《现代控制理论》

经典控制理论 → 现代控制理论

考勤 + 考试

▲ 2-3人组队 对某种控制算法在专业应用

的展示（7-8分钟）
PPT
一个月之后

2010年之后文献
附参考文献，约10篇
（7+3
SCI.EI.中文核心

传递函数 $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ — 输出 / — 输入 （状态空间方程

离散部分不做要求!!!

时域，根轨迹，频域法

只学习 线性定常性

李亚普诺夫稳定性分析

经典控制理论 — 传递函数 — 时域法 / 根轨迹法 / 频域法

反馈控制系统

线性定常系统

单输入单输出（SISO）

PID控制、Smith控制、解耦控制、Dalin控制

串级控制

现代控制理论 — 状态空间表达式 — 时域法

多变量、非线性，时变系统

"时域法" 多变量线性系统

最优控制

最优估计

状态空间表达式

多输入多输出（MIMO）

课程基础：自控原理、MATLAB

讲课形式：理论（上课）+实验（作业）+讲座

学会发现论文中的问题

1.2 现代控制理论的主要内容

1.2.1 线性控制理论

1.2.2 最优控制理论

1.2.3 随机系统理论和最优估计

1.2.4 系统辨识

1.2.5 自适应控制

1.2.6 非线性系统

1.2.7 鲁棒性分析与鲁棒控制

1.2.8 分布参数控制

1.2.9 离散事件控制

1.2.10 智能控制

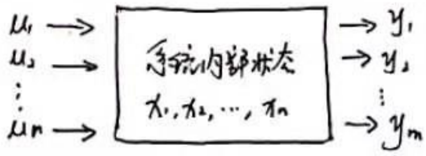
Ch.2 控制系统的状态空间模型

2.1 状态和状态空间模型

2.1.1 状态空间的基本概念

状态：能够完全描述系统时间域动态行为的一个最小变量组。该变量组每个变量称为状态变量.

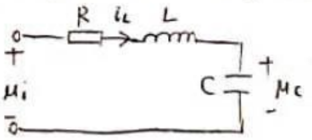
三要素：完全描述、时域动态行为，最小变量组



输入变量　　状态变量　　输出变量

（完全描述）$\xrightarrow{\text{空间映射}}$（外在表现）

2.1.2 系统的状态空间模型 < 状态方程 / 输出方程



① 根据系统内部机理列出关系式

$$\begin{cases} R i_L + L\dfrac{di_L}{dt} + u_c = u_i \\ i_L = C\dfrac{du_c}{dt} \end{cases}$$

② 选择状态变量

$$\begin{cases} x_1(t) = i_L \\ x_2(t) = u_c \end{cases}$$

③ 代入整理得一阶矩阵微分方程组

—状态方程.

$$\begin{cases} R x_1 + L\dot{x}_1 + x_2 = u_i \\ x_1 = C\dot{x}_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = -\dfrac{R}{L}x_1 - \dfrac{1}{L}x_2 + \dfrac{1}{L}u_i \\ \dot{x}_2 = \dfrac{1}{C}x_1 \end{cases}$$

写成向量与矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} u_i$$

④ 写出输出方程.

$$y = u_c = x_2 = \underbrace{[0 \ \ 1]}_{C}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

⑤ 状态方程和输出方程合在一起，构成状态空间模型.

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

其中 $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$，$u = [u_i]$，$y = [u_c]$

$A = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}$，$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}$，$C = [0 \ \ 1]$

状态空间模型的一般形式

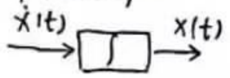
$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

式中：x为n维的状态向量；
u为r维的输入向量；
y为m维的输出向量；

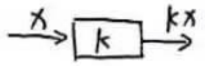
A为$n\times n$维的系统矩阵；
B为$n\times r$维的输入矩阵；
C为$m\times n$维的输出矩阵；
D为$m\times r$维的直联矩阵（前馈矩阵）.

2.1.3 线性系统状态空间模型的模拟结构图

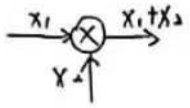
3种基本元件：



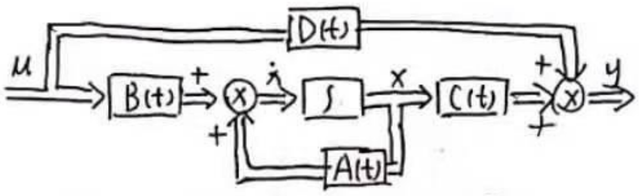
积分器



比例器



加法器



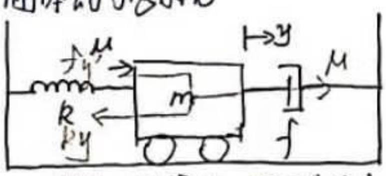
MIMO线性时变系统结构图

（双线表示传递多维向量信号）

$$\begin{cases} \dot{x}=A(t)x+B(t)u \\ y=C(t)x+D(t)u \end{cases}$$

2.2 根据系统机理建立状态空间模型

1. 刚体动力学系统



弹簧－质量体－阻尼器系统

1. 根据系统内部机理列出物理量关系式：

由牛二知： $m\frac{d^2y}{dt^2}=u-f\frac{dy}{dt}-ky$

2. 选择状态变量

$x_1(t)=y(t)$， $x_2(t)=y'(t)$

3. 状态变量代入运动方程

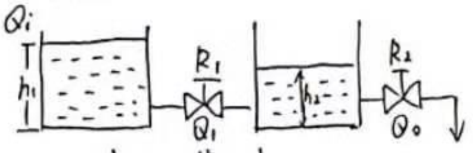
$$\begin{cases} x_1'=x_2 \\ x_2'=-\frac{k}{m}x_1-\frac{f}{m}x_2+\frac{1}{m}u \end{cases}$$

4. 建立输出方程 $y=x_1$

5. 得到状态空间模型

$$\begin{cases} x'=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{f}{m} \end{bmatrix}x+\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}u \\ y=\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}x \end{cases}$$

2. 流体力学系统



串联水槽系统

2.3 根据系统的输入输出关系建立状态空间模型

2.3.1 由高阶常微分方程建立状态空间模型

1. 微分方程中不包含输入量的导数项

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_ny=bu$$ （线性定常微分方程）

微分方程：

状态变量：
$$\begin{cases}x_1=y\\x_2=\dot y\\ \vdots\\x_n=y^{(n-1)}\end{cases}$$
（取输出y和y的各阶导数为状态变量）

状态方程：
$$\begin{cases}\dot x_1=x_2\\\dot x_2=x_3\\ \vdots\\\dot x_{n-1}=x_n\\\dot x_n=-a_1x_n-a_2x_{n-1}-\cdots-a_nx_1+bu\end{cases}$$
（状态变量的一阶微分方程组）

输出方程：$y=x_1$

状态空间模型：
$$\dot x=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&&\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\\-a_n&-a_{n-1}&\cdots&&-a_1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\b\end{bmatrix}u$$

$$y=[1\ 0\ \cdots\ 0]x$$

其中，$x=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^T$；$u=[u]$；$y=[y]$.

2. 微分方程中包含输入量的导数项

微分方程：$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_ny=b_0u^{(n)}+\cdots+b_nu$

状态变量：
$$\begin{cases}x_1=y-\beta_0u\\x_2=\dot y-\beta_1u-\beta_0\dot u\\ \vdots\\x_n=y^{(n-1)}-\beta_{n-1}u-\beta_{n-2}\dot u-\cdots-\beta_0u^{(n-1)}\end{cases}$$

状态方程：
$$\dot x_1=\dot y-\beta_0\dot u=x_2+\beta_1u$$
$$\dot x_2=\ddot y-\beta_1\dot u-\beta_0\ddot u=x_3+\beta_2u$$
$$\vdots$$
$$\dot x_{n-1}=x_n+\beta_{n-1}u$$
$$\dot x_n=-a_1y^{(n-1)}-\cdots-a_ny+b_0u^{(n)}+b_1u^{(n-1)}+\cdots+b_nu-\beta_{n-1}\dot u-\beta_{n-2}\ddot u-\beta_0u^{(n)}$$

若待定系数 $\beta_i\ (i=0,1,\cdots,n)$ 满足
$$\begin{cases}\beta_0=b_0\\\beta_1=b_1-a_1\beta_0\\\beta_2=b_2-a_1\beta_1-a_2\beta_0\\ \vdots\\\beta_n=b_n-a_1\beta_{n-1}-\cdots-a_n\beta_0\end{cases}$$

状态空间模型：
$$\dot x=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\\-a_n&-a_{n-1}&\cdots&&-a_1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\vdots\\\beta_n\end{bmatrix}u$$

$$y=[1\ 0\ \cdots\ 0]x+\beta_0u.$$

其中，$x=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^T$；$u=[u]$；$y=[y]$

β_i 满足
$$\begin{bmatrix}1&0&0&\cdots&0\\a_1&1&0&\cdots&0\\a_2&a_1&0&\cdots&0\\\vdots&&&&\\a_n&a_{n-1}&a_{n-2}&\cdots&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_0\\\beta_1\\\beta_2\\\vdots\\\beta_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_0\\b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{bmatrix}$$

2.4 状态空间模型的线性变换和约旦规范形

状态空间模型不具有唯一性（状态变量不同选择）

2.4.1 状态空间的线性变换

状态变量向量 x 下的状态空间模型

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

作非奇异线性变换 $x = P\bar{x}$，即 $\bar{x} = P^{-1}x$．则有

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = P^{-1}AP\bar{x} + P^{-1}Bu \\ y = CP\bar{x} + Du \end{cases}$$

有对应关系 $\bar{A} = P^{-1}AP$　$\bar{B} = P^{-1}B$

$\bar{C} = CP$　$\bar{D} = D$

初始条件　$\bar{x}(t_0) = P^{-1}x(t_0)$

2.4.2 系统特征值的不变性与系统的不变量

1. 系统的特征值和特征向量

线性定常系统 $\Sigma(A.B.C.D)$，系统的特征值即系统矩阵 A 的特征值．

$$Av = \lambda v$$

λ 为特征值，v 为特征向量．

2. 系统特征值的不变性

线性定常系统特征值对线性变换具有不变性．

3. 特征向量的计算

$(\lambda I - A)v = 0$　　$|\lambda I - A| = 0$

λ_i 的重数为 λ_i 的代数重数．$\geq$

λ_i 线性独立的特征向量数为 λ_i 的几何重数．

4. 广义特征向量和特征向量链

几何重数小于代数重数，有广义特征向量

$$\left.\begin{aligned} &v_{j,1} = v_j \\ &(\lambda_i I - A)v_{j,k} = -v_{j,k-1} \quad (k=2,3,\cdots) \end{aligned}\right\}$$

2.4.3 化状态方程为对角线规范形

- 任何具有 n 个线性独立特征向量的状态空间模型一定能经状态变换变换成对角线规范形．

例 2.8．

1) 特征值 $|\lambda I - A| = 0$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -6 & -11 & 6 \\ -6 & -11 & 5 \end{bmatrix} \quad |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 1 \\ 6 & \lambda+11 & -6 \\ 6 & 11 & \lambda-5 \end{vmatrix} = 0$$

$\lambda_1 = -1$，$\lambda_2 = -2$，$\lambda_3 = -3$

2) 特征向量　$(\lambda I - A)v_1 = 0$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 6 & 10 & -6 \\ 6 & 11 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \end{bmatrix} = 0 \quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

3) 变换矩阵 P

$$P = [P_1\ P_2\ P_3] \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & \frac{5}{2} & -2 \\ -3 & -4 & 3 \\ 1 & \frac{3}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

4) 计算 $\bar{A}$、$\bar{B}$、$\bar{C}$

$\bar{A} = P^{-1}AP$，$\bar{B} = P^{-1}B$，$\bar{C} = CP$，$D = D$

2.4.4 约旦规范形的转换（代数重数 > 几何重数）

1. 约旦块和约旦矩阵

约旦块定义　$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 \cdots & \lambda_i \end{bmatrix}_{m_i \times m_i} \quad (m_i \geq 1)$$

m_i 为约旦块的维数．由多个约旦块组成的块对角矩阵称为约旦矩阵．

2.3.2 由传递函数建立状态空间模型 ☆

SISO线性系统传递函数:

$$\overline{G}(s)=\frac{\overline{b}_0 s^n+\overline{b}_1 s^{n-1}+\cdots+\overline{b}_n}{\overline{a}_0 s^n+\overline{a}_1 s^{n-1}+\cdots+\overline{a}_n}\quad(\overline{a}_0\neq 0)$$

长除法转换 $\overline{G}(s)=\dfrac{b_1 s^{n-1}+\cdots+b_n}{s^n+a_1 s^{n-1}+\cdots+a_n}+d$

$$=G(s)+d$$

1. 传递函数中极点互异时的变换

$G(s)$特征方程 $s^n+a_1 s^{n-1}+\cdots+a_n=0$

其特征根 $s_1,s_2,\cdots,s_n$ 互异.

$$G(s)=\frac{b_1 s^{n-1}+\cdots+b_n}{(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_n)}$$

$$=\frac{k_1}{s-s_1}+\frac{k_2}{s-s_2}+\cdots+\frac{k_n}{s-s_n}$$

待定系数.

$$k_i=[G(s)(s-s_i)]\Big|_{s=s_i}$$

状态方程: $\dot{x}_i=s_i x_i+u$, $i=1,2,\cdots,n$

输出方程: $y=k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_nx_n$

状态空间模型: $\dot{x}=\begin{bmatrix} s_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & s_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & s_n\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}u$

$$y=[k_1\ k_2\ \cdots\ k_n]x$$

2. 传递函数中有重极点时的变换

假设有6个根, s_1,s_1,s_1,s_4,s_5,s_5

$$G(s)=\frac{b_1s^5+\cdots+b_4s+b_5}{(s-s_1)^3(s-s_4)(s-s_5)^2}$$

$$=\frac{k_{11}}{(s-s_1)^3}+\frac{k_{12}}{(s-s_1)^2}+\frac{k_{13}}{(s-s_1)}+\frac{k_{41}}{(s-s_4)}+\frac{k_{51}}{(s-s_5)^2}+\frac{k_{52}}{(s-s_5)}$$

待定系数:

$$k_{ij}=\frac{1}{(j-1)!}\frac{d^{j-1}}{ds^{j-1}}\left[G(s)(s-s_i)^{l_i}\right]\Big|_{s=s_i}$$

$$j=1,2,\cdots,l_i$$

状态方程:

$\dot{x}_1=s_1x_1+x_2$ $\quad \dot{x}_4=s_4x_4+u$ $\quad \dot{x}_5=s_5x_5+x_6$

$\dot{x}_2=s_1x_2+x_3$ $\quad \dot{x}_6=s_5x_6+u$

$\dot{x}_3=s_1x_3+u$

输出方程

$$y=k_{11}x_1+k_{12}x_2+k_{13}x_3+k_{41}x_4+k_{51}x_5+k_{52}x_6$$

状态空间模型

$$\dot{x}=\begin{bmatrix} s_1 & 1 & & & & \\ & s_1 & 1 & & & \\ & & s_1 & & & \\ & & & s_4 & & \\ & & & & s_5 & 1\\ & & & & & s_5\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\\0\\1\end{bmatrix}u$$

$$y=[k_{11}\ k_{12}\ k_{13}\ k_{41}\ k_{51}\ k_{52}]x$$

2.约旦规范形及其计算

系统矩阵A为约旦矩阵的状态空间模型称为约旦规范形。

$$\begin{tikzcd} & \text{对角线规范形} \arrow[d, "\text{特例}"] \\ \text{一般状态} \arrow[ur, "\text{代数重数=几何重数}"] \arrow[r, "\text{代数重数>几何重数}"'] & \text{约旦规范形} \end{tikzcd}$$

! 约旦矩阵的约旦块数等于几何重数

例2.10 $\begin{cases} \dot{x}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -3 & -1 & -5 & -1 \end{bmatrix} x+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mu \\ y=[1\ 0\ 0\ 0]x \end{cases}$

1) 求特征值 $|\lambda I-A|=0$ ，$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2$ ，$\lambda_4=-1$

2) 求特征值对应特征向量

$\underline{\lambda_1=2}$ $(\lambda_1 I-A)v_1=0$ $n-rank(\lambda_1 I-A)=2$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \\ v_{14} \end{pmatrix}=0 \quad v_{1,1}=(1,1,-1,\tfrac{1}{3})^T,\ v_{1,2}=(1,0,0,-1)^T$$

$P_{1,1}=(1,1,-1,\frac{1}{3})^T$ $P_{2,1}=(1,0,0,-1)^T$

$(\lambda_1 I-A)P_{1,2}=-P_{1,1}$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}P_{1,2}=-\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$P_{1,2}$无解

$(\lambda_1 I-A)P_{2,2}=-P_{2,1}$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}P_{2,2}=-\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad P_{22}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_4=-1$ $(\lambda_4 I-A)v_4=0$ $n-rank(\lambda_4 I-A)=1$

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}v_4=0 \quad v_4=(0,0,0,1)^T$$

$$\therefore P_{1,1}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix},\ P_{2,1}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ P_{2,2}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ P_{3,1}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3) 线性变换 $P \triangle P^{-1}$

$$P=(P_{1,1},P_{2,1},P_{2,2},P_{3,1})=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad P^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

4) $$\hat{A}=P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \hat{B}=P^{-1}B=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \hat{C}=CP=(1,1,1,0)$$

2.5 传递函数阵

2.5.1 传递函数阵的定义

r维输入，m维输出的MIMO系统，

输入、输出向量的拉氏变换分别为 $U(s)$ 和 $Y(s)$。

系统的输入与输出间的动态关系为：

$$Y(s)=G(s)U(s)$$

$G(s)$ 为传递函数阵， $G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}$

$$G(s)=\begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & \cdots & G_{1r}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & \cdots & G_{2r}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{m1}(s) & G_{m2}(s) & \cdots & G_{mr}(s) \end{bmatrix}$$

$G_{ij}(s)$ 描述了第i个输出与第j个输入的动态传递关系。

2.5.2 由状态空间模型求传递函数阵

1. 传递函数矩阵的推导

$$\begin{cases} \dot{x}=Ax+Bu \\ y=Cx+Du \end{cases}$$

线性定常连续系统传递函数阵

$$G(s)=C(sI-A)^{-1}B+D$$

传递函数阵对状态变换具有不变性。

2. 函数矩阵$(sI-A)$的逆矩阵的快速计算

$$(sI-A)^{-1}=\frac{adj(sI-A)}{|sI-A|} \quad \left(A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}\right)$$

2.5.3 组合系统的状态空间模型和传递函数阵

1. 并联联结 $G(s)=G_1(s)+G_2(s)$
2. 串联联结 $G(s)=G_2(s)G_1(s)$
3. 反馈联结 $G(s)=[I+G_0(s)F(s)]^{-1}G_0(s)$ $=G_0(s)[I+F(s)G_0(s)]^{-1}$