考试形式：闭卷■ 开卷□ 开卷物品：计算器

教师：

班级：

学号：

姓名：

密 封 线

上海电力学院研究生课程 2013/20 14 学年第 1 学期期 末 考试**试卷** [A卷■、B卷□]

课号： MA0323001 课程名称： 《现代控制理论》 开课学院（系）： 电气工程学院

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

一、（10 分）建立下列输入—输出高阶微分方程的状态空间表达式。

$$\dddot{y}+3\ddot{y}+2\dot{y}+y=\ddot{u}+2\dot{u}+u$$

。

二、（10 分）求定常控制系统的状态响应

$$\dot{x}(t)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}x(t)+\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}u(t),t\geq 0,x(0)=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix},u(t)=1(t)$$

课号：MA0323001　课程名称：《现代控制理论》　开课学院（系）：电气工程学院

考试形式：闭卷■ 开卷□ 开卷物品：

教师：

班级：

学号：

姓名：

密　封　线

三、（20 分）试将下列系统分别按能控性、能观性进行结构分解。

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -4 & 3\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

四、（20 分）利用李雅普诺夫第二方法判断下列系统是否为大范围渐近稳定（写出李雅普诺夫函数及其导数）：

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & -3\end{bmatrix}x$$

课号： MA0323001 课程名称： 《现代控制理论》 开课学院（系）： 电气工程学院

考试形式：闭卷■ 开卷□ 开卷物品：

教师：

班级：

学号：

姓名：

密 封 线

五、（20 分）对于如下系统

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x$$

（1）请设计观测器，并实现状态反馈。要求闭环系统的极点为-1±j，观测器的极点为-3，-3。

（2）画出系统结构图。

六、（20 分）设有一阶系统 $\dot{x}=-x+u$， $x(0)=3$。试确定最优控制函数 $u(t)$，在 $t=2$ 时，将系统控制到零态，并使泛函 $J=\int_0^2(1+u^2)dt$，取极小值。

考试形式：闭卷■ 开卷□ 开卷物品：计算器

教师：

班级：

学号：

姓名：

密 封 线

上海电力学院研究生课程 2013/2014 学年第 1 学期期 末 考试**试卷** [A 卷□、B 卷■] 共 3 页，第 1 页

课号： MA0323001 课程名称： 《现代控制理论》 开课学院（系）： 电气工程学院

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

一、（10 分）已知系统传递函数 $G(s)=\dfrac{5}{(s+1)^2(s+2)}$ ，试求约旦型状态方程。

。

二、（10 分）求定常控制系统的状态响应

$$\dot{x}(t)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}x(t)+\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}u(t),t\ge 0,x(0)=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix},u(t)=1(t)$$

课号： MA0323001　课程名称： 《现代控制理论》　开课学院（系）：电气工程学院

考试形式：
闭卷■
开卷□
开卷物品：

教师：

班级：

学号：

姓名：

密　封　线

五、（20 分）设线性定常系统的状态空间表达式为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & -2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u \qquad y=\begin{bmatrix}2 & 0\end{bmatrix}x$$

试设计全维状态观测器，使其极点为-10，-10，并画出带观测器的闭环系统结构图。

三、（20 分）试确定当 p 与 q 为何值时下列系统不能控，为何值时不能观测。

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 12\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}p\\ -1\end{bmatrix}u, \qquad y=\begin{bmatrix}q & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

六、（20 分）已知被控系统 $\dot{x}=u$，其初始条件为 $x(0)=1$。试求 $u(t)$ 和 t_f，使系统在 t_f 时刻转移到 $x(t_f)=0$，且使如下性能指标泛函极小

$$J=t_f^2+\int_0^{t_f}u^2(t)dt$$

四、（20分）（1） 叙述线性时不变连续系统的李雅普诺夫稳定性定理；

（2） 利用李雅普诺夫稳定性定理判断系统 $\dot{x}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}x$ 的稳定性。

1、解：方法一：$a_1=3,a_2=2,a_3=1$
$b_0=0,b_1=1,b_2=2,b_3=1$

$$\beta_0=b_0=0$$
$$\beta_1=b_1-a_1\beta_0=1-3\times0=1$$
$$\beta_2=b_2-a_1\beta_1-a_2\beta_0=2-3\times1-2\times0=-1$$
$$\beta_3=b_3-a_1\beta_2-a_2\beta_1-a_3\beta_0=1-3\times(-1)-2\times1-1\times0=2$$

$$\begin{cases}\dot{x}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-1&-2&-3\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}u\\ y=\begin{pmatrix}1&0&0\end{pmatrix}x\end{cases}$$

方法二：系统的传递函数为$g(s)=\dfrac{s^2+2s+1}{s^3+3s^2+2s+1}$

能控型实现为$\begin{cases}\dot{x}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-1&-2&-3\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}u\\ y=\begin{pmatrix}1&2&1\end{pmatrix}x\end{cases}$

或能观型实现为$\begin{cases}\dot{x}=\begin{pmatrix}0&0&-1\\1&0&-2\\0&1&-3\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}u\\ y=\begin{pmatrix}0&0&1\end{pmatrix}x\end{cases}$

2、解：$e^{At}=\begin{pmatrix}e^{-t}+te^{-t}&te^{-t}\\-te^{-t}&e^{-t}-te^{-t}\end{pmatrix}=e^{-t}\begin{pmatrix}1+t&t\\-t&1-t\end{pmatrix}$

$$x(t)=e^{At}x(0)+\int_0^t e^{A(t-s)}bu(s)ds=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

3、解：①按能控性进行结构分解

$$Q_c=\begin{bmatrix}b&Ab&A^2b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1&-4\\0&0&0\\1&3&9\end{bmatrix},\quad rankU_c=2$$

所以系统不完全能控，需按能控性进行结构分解，构造非奇异变换阵T_c。

$$T_c=\begin{bmatrix}0&-1&0\\0&0&1\\1&3&0\end{bmatrix},\quad T_c^{-1}=\begin{bmatrix}3&0&1\\-1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$$

按能控性进行结构分解后的系统状态空间表达式为：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_c\\ \dot{x}_{\bar{c}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-3&2\\1&4&-2\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_c\\ x_{\bar{c}}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}u$$
$$y=\begin{bmatrix}1&2&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_c\\ x_{\bar{c}}\end{bmatrix}$$

②按能观性进行结构分解

$$Q_0=\begin{bmatrix}C\\CA\\CA^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&1\\1&-3&2\\1&-9&5\end{bmatrix},\quad rankV_0=2$$

所以系统不完全能观，需按能观性进行结构分解，构造非奇异变换阵P_0^{-1}。

$$P_0^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & -3 & 2\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}，\quad P_0=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 2 & -1 & -1\\ 3 & -1 & -2\end{bmatrix}$$

按能观性进行结构分解后的系统状态空间表达式为：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_0\\ \dot{x}_{\bar{0}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -3 & 4 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_0\\ x_{\bar{0}}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 0\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_0\\ x_{\bar{0}}\end{bmatrix}$$

4、解：令矩阵 $P=\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{12} & p_{22}\end{bmatrix}$

则由李雅普方程 $A^TP+PA=-I$（$V(x)=x^TPx$，*取 Q 为单位阵*）

得

$$\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{12} & p_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{12} & p_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

解上述矩阵方程，有

$$\begin{cases}-2p_{11}+4p_{12}=-1\\ p_{11}-4p_{12}+2p_{22}=0\\ 2p_{12}-6p_{22}=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p_{11}=7/4\\ p_{22}=3/8\\ p_{12}=5/8\end{cases}$$

即得

$$P=\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{12} & p_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7/4 & 5/8\\ 5/8 & 3/8\end{bmatrix}$$

因为（***赛尔维斯特定理***）

$$P_{11}=\frac{7}{4}>0\quad \det\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{12} & p_{22}\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}7/4 & 5/8\\ 5/8 & 3/8\end{bmatrix}=\frac{17}{8}>0$$

可知 P 是正定的。因此系统在原点处是大范围渐近稳定的。

系统的李雅普诺夫函数及其沿轨迹的导数分别为

$$V(x)=x^TPx=\frac{1}{8}(14x_1^2+10x_1x_2+6x_2^2)>0$$

$$\dot{V}(x)=-x^TQx=-x^Tx=-(x_1^2+x_2^2)<0$$

又因为 $\lim\limits_{\|x\|\to\infty}V(x)=\infty$，所以系统大范围渐近稳定。

5、解：系统的状态反馈矩阵和状态观测器是解耦的，因此可以分开来设计

（1）状态反馈

首先要判断系统是否能控：

$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}B & AB\end{bmatrix}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}=2=\mathrm{n}$ 故系统能控。

系统期望的特征根方程为：

$(\mathrm{s}+1-j)(s+1+j)=s^2+2s+2$

设系统的状态反馈矩阵为：$k=\begin{bmatrix}k_1 & k_2\end{bmatrix}$

则有：$|sI-A+Bk|=\begin{vmatrix}s+2 & -1\\ k_1 & s+1+k_2\end{vmatrix}=s^2+(3+k_2)s+2+2k_2+k_1$

$$\begin{cases} 3+k_2=2 \\ 2+2k_2+k_1=2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} k_1=2 \\ k_2=-1 \end{cases}$$

（2）状态观测器

首先讨论系统的能观性：$rank\begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}=rank\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}=2=n$ 故系统能观。

系统期望的状态观测器的特征根方程为：

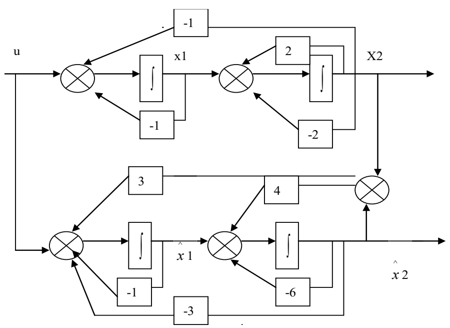
$(s+3)(s+3)=s^2+6s+9$，设观测器的反馈矩阵为：$g=\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$

则有对应的观测器的特征根方程为：

$$|sI-A+gC|=\begin{vmatrix} s+2+c_1 & -1 \\ c_2 & s+1+ \end{vmatrix}=s^2+(3+c_1)s+2+c_1+c_2$$

$\begin{cases} 3+c_1=6 \\ 2+c_1+c_2=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1=4 \\ c_2=3 \end{cases}$。状态控制器的空间状态方程：

$$\hat{\tilde{x}}=(A-gC)\hat{x}+Bu+gy=\begin{bmatrix} -6 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}\hat{x}+\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u+\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}y$$



6、解 作泛函 $J_0=\int_0^2[1+u^2+\lambda(\dot{x}+x-u)]\mathrm{d}t$

写出泛函 J_0 的欧拉方程 $\begin{cases} F_u-\dfrac{\partial F_{\dot{u}}}{\partial u}=0 \\ F_x-\dfrac{\partial F_{\dot{x}}}{\partial t}=0 \end{cases}$

推出 $\begin{cases} 2u-\lambda=0 \\ \lambda-\dot{\lambda}=0 \end{cases}$，

$$\lambda=c_1e^t$$

与状态方程 $\dot{x}=-x+u$ 联立求得 $u=\dfrac{c_1}{2}e^t$

$$x=c_2e^{-t}+\frac{c_1}{2}e^t$$

代入边界条件 $x(0)=3,\ x(2)=0$

得 $\begin{matrix} c_2+\dfrac{c_1}{2}=3 \\ c_2e^{-2}+\dfrac{c_1}{2}e^2=0 \end{matrix}$，

解之得，$c_1=\dfrac{-6e^{-2}}{e^2-e^{-2}}$， $c_2=\dfrac{3e^2}{e^2-e^{-2}}$

故 $u=\dfrac{c_1}{2}e^t=\dfrac{-3e^{-2}}{e^2-e^{-2}}e^t$

1、解：**解：** $G(s)=\dfrac{5}{(s+1)^2(s+2)}=\dfrac{5}{(s+1)^2}-\dfrac{5}{s+1}+\dfrac{5}{s+2}$

由上式，可得

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}5 & -5 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

2、解：$e^{At}=\begin{pmatrix}e^{-t}+te^{-t} & te^{-t}\\ -te^{-t} & e^{-t}-te^{-t}\end{pmatrix}=e^{-t}\begin{pmatrix}1+t & t\\ -t & 1-t\end{pmatrix}$

$$x(t)=e^{At}x(0)+\int_0^t e^{A(t-s)}bu(s)ds=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$$

3、**解：** 系统的能控性矩阵为

$$Q_C=\begin{bmatrix}b & Ab\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p & p-12\\ -1 & p\end{bmatrix}$$

其行列式为

$$\det\begin{bmatrix}b & Ab\end{bmatrix}=p^2+p-12$$

根据判定能控性的定理，若系统能控，则系统能控性矩阵的秩为 2，亦即 $\det\begin{bmatrix}b & Ab\end{bmatrix}\neq 0$，可知 $p\neq -4$ 或 $p\neq 3$。

系统能观测性矩阵为

$$Q_O=\begin{bmatrix}C\\ CA\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}q & 1\\ q+1 & 12q\end{bmatrix}$$

其行列式为

$$\det\begin{bmatrix}C\\ CA\end{bmatrix}=12q^2-q-1$$

根据判定能观性的定理，若系统能观，则系统能观性矩阵的秩为 2，亦即 $\det\begin{bmatrix}C\\ CA\end{bmatrix}\neq 0$，可知 $q\neq \dfrac{1}{3}$ 或 $q\neq -\dfrac{1}{4}$。

课号：MA0323001 课程名称：《现代控制理论》 开课学院（系）：电气工程学院 答卷教师：____

4、解：(1)连续线性时不变系统 $\dot{x}=Ax$ 在平衡点原点处渐近稳定的充分必要条件是：对任意给定的对称正定矩阵Q，存在一个对称正定矩阵P，使得矩阵方程 $A^TP+PA=-Q$ 成立。

(2) 原点是系统的惟一平衡状态。

$$\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{12} & p_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{12} & p_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}-2p_{11}&=-1\\ p_{11}-2p_{12}&=0\\ 2p_{12}-2p_{22}&=-1\end{aligned}\qquad \begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{12} & p_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{bmatrix}$$

根据矩阵正定性判别的塞尔维斯特方法，可得

$$\Delta_1=\frac{1}{2}>0,\qquad \Delta_2=\det\left(\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{bmatrix}\right)>0$$

故矩阵P是正定的。因此，系统在原点处的平衡状态是大范围渐近稳定的。

5、解：**解**：$rankQ_g=\begin{bmatrix}C\\ CA\end{bmatrix}=2=n$

系统完全能观，状态观测器存在并且其极点可以任意配置。令：$G=\begin{bmatrix}g_1\\ g_2\end{bmatrix}$

状态观测器的特征多项式为：

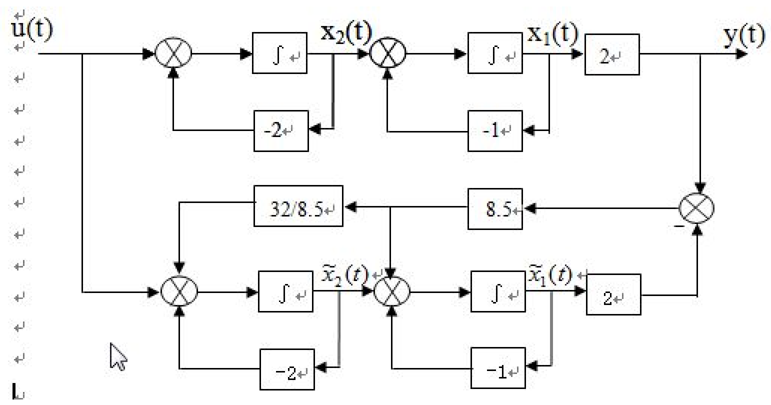
$f(s)=|sI-(A-GC)|=s^2+(3+2g_1)s+(2+4g_1+2g_2)$ （1）

$f^*(s)=(s+10)(s+10)=s^2+20s+100$ （2）

（1）=（2）比较系数，得 g_1=8.5，g_2=32　　所以全维状态观测器为：

$$\dot{\tilde{x}}=(A-GC)\tilde{x}+Bu+Gy=\begin{bmatrix}-18 & 1\\ -64 & -2\end{bmatrix}\tilde{x}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u+\begin{bmatrix}8.5\\ 32\end{bmatrix}y$$

全维状态观测器的结构图如下所示：



6、解：首先构造哈密尔顿函数如下

$$H(x,u,\lambda,t)=u^2+\lambda u$$

由极值条件可解得 $u=-\lambda/2$。将其代入规范方程，可得

$$\dot{x}=u,\dot{\lambda}=-\frac{\partial H}{\partial x}=0$$

并写出边界条件如下

$$x(0)=1,x(t_f)=0$$

$$u^2(t_f)+\lambda(t_f)u(t_f)=-2t_f$$

从而解得 $t_f^*=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$， $u^*(t)=-\sqrt[3]{2}$， $x^*(t)=-\sqrt[3]{2}t+1$