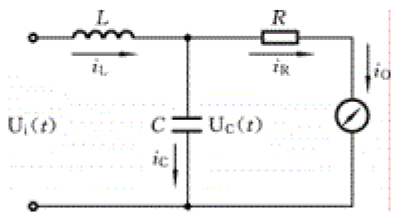
习题解答

2-1 如题图 2-1 所示为 RLC 电路网络，其中 $U_i(t)$ 为输入电压，安培表的指示电流 $i_o(t)$ 为输出量。试列写状态空间模型。



题图 2-1

解： (1) 根据回路电压和节点电流关系，列出各电压和电流所满足的关系式.

$$U_i(t) = L\frac{d}{dt}i_L(t) + U_C(t)$$

$$i_L(t) = i_C(t) + i_R(t) = C\frac{d}{dt}U_C(t) + \frac{1}{R}U_C(t)$$

(2) 在这个电路中,只要给定了储能R元件电感L和电容C上的i_L和U_C的初始值,以及$t \geq t_0$时刻后的输入量$U_i(t)$,则电路中各部分的电压、电流在$t \geq t_0$时刻以后的值就完全确定了。也就是说,i_L和U_C可构成完整的描述系统行为的一组最少个数的变量组,因此可选i_L和为U_C状态变量,即

$$x_1(t) = i_L, \quad x_2(t) = u_C$$

(3) 将状态变量代入电压电流的关系式,有

$$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{1}{L}x_2 + \frac{1}{L}U_i$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{C}x_1 - \frac{1}{RC}x_2$$

经整理可得如下描述系统动态特性的一阶矩阵微分方程组--状态方程

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1 \\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & \frac{-1}{RC}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 \\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\frac{1}{L} \\ 0\end{bmatrix}U_i$$

(4) 列写描述输出变量与状态变量之间关系的输出方程,

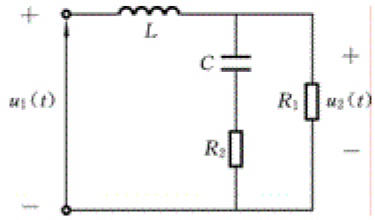
$$y = \frac{1}{R}U_C = \frac{1}{R}x_2 = \begin{bmatrix}0 & \frac{1}{R}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 \\ x_2\end{bmatrix}$$

(5) 将上述状态方程和输出方程列写在一起,即为描述系统的状态空间模型的状态空间表达式

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -\frac{1}{L}\\ \frac{1}{C} & \frac{-1}{RC}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{L}\\ 0\end{bmatrix}U_i$$

$$y=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{R}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

2-2 如题图 2-2 所示为 RLC 电路网络,其中 $v_1(t)$ 为输入电压,$v_2(t)$ 为输出电压。试列写状态空间模型。



题图 2-2

解: (1) 根据回路电压和节点电流关系,列出各电压和电流所满足的关系式.

$$\begin{cases} L\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}+R_1\left(i_L-C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right)=u_1 \\ u_C+R_2C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=R_1\left(i_L-C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right) \end{cases}$$

(2) 选择状态变量.状态变量的个数应为独立一阶储能元件(如电感和电容)的个数.对本题

$$x_1(t)=i_L,\quad x_2(t)=u_C$$

(3) 将状态变量代入电压电流的关系式,经整理可得如下描述系统动态特性的一阶矩阵微分方程组--状态方程

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{-R_1R_2}{(R_1+R_2)L} & \dfrac{-R_1}{(R_1+R_2)L}\\ \dfrac{R_1}{(R_1+R_2)C} & \dfrac{-1}{(R_1+R_2)C}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\dfrac{1}{L}\\ 0\end{bmatrix}u_1$$

(4) 列写描述输出变量与状态变量之间关系的输出方程,

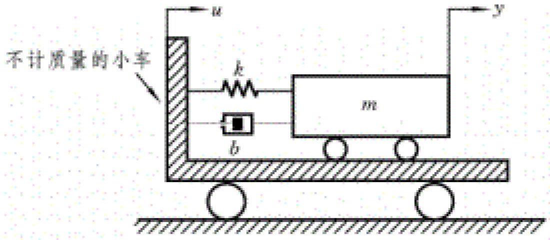
$$y=u_2=R_1\left(i_L-C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right)=R_1\left(x_1-C\dot{x}_2\right)=\begin{bmatrix}\dfrac{R_1R_2}{(R_1+R_2)} & \dfrac{R_1}{(R_1+R_2)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

(5) 将上述状态方程和输出方程列写在一起,即为描述系统的状态空间模型的状态空间表达式

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{-R_1R_2}{(R_1+R_2)L} & \dfrac{-R_1}{(R_1+R_2)L}\\ \dfrac{R_1}{(R_1+R_2)C} & \dfrac{-1}{(R_1+R_2)C}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\dfrac{1}{L}\\ 0\end{bmatrix}u_1$$

$$y=\begin{bmatrix}\dfrac{R_1R_2}{(R_1+R_2)} & \dfrac{R_1}{(R_1+R_2)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

2-3 设有一个弹簧-质量-阻尼器系统,安装在一个不计质量的小车上,如题图 2-3 所示。u 和 y 为分别为小车和质量体的位移,k、b 和 m 分别为弹簧弹性系数、阻尼器阻尼系数和质量体质量阻尼器。试建立 u 为输入,y 为输出的状态空间模型。



题图 2-3

解:下面推导安装在小车上的弹簧—质量—阻尼器系统的数学模型。假设 $t<0$ 时小车静止不动,并且安装在小车上面的弹簧—质量—阻尼器系统这时也处于静止状态(平衡状态)。在这个系统中,$u(t)$ 是小车的位移,并且是系统的输入量。当 $t=0$ 时,小车以定常速度运动,即 $\dot{u}=$ 常量。质量的位移 $y(t)$ 为输出量(该位移是相对于地面的位移)。在此系统中,m 表示质量,b 表示黏性摩擦系数,k 表示弹簧刚度。假设阻尼器的摩擦力与 $\dot{y}-\dot{u}$ 成正比,并且假设弹簧为线性弹簧,即弹簧力与 $y-u$ 成正比。

对于平移系统,牛顿第二定律可以表示为:

$$ma=\sum F$$

式中,m 为质量,a 为质量加速度,$\sum F$ 为沿着加速度 a 的方向并作用在该质量上的外力之和。对该系统应用牛顿第二定律,并且不计小车的质量,我们得到:

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=-b\left(\frac{dy}{dt}-\frac{du}{dt}\right)-k(y-u)$$

即:

$$m\frac{d^2y}{dt^2}+b\frac{dy}{dt}+ky=b\frac{du}{dt}+ku$$

这个方程就是该系统的数学模型。对这个方程进行拉普拉斯变换,并且令初始条件等于零,得到:

$$(ms^2+bs+k)Y(s)=(bs+k)U(s)$$

取 $Y(s)$ 与 $U(s)$ 之比,求得系统的传递函数为:

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{bs+k}{ms^2+bs+k}$$

下面我们来求这个系统的状态空间模型。首先将该系统的微分方程

$$\ddot{y}+\frac{b}{m}\dot{y}+\frac{k}{m}y=\frac{b}{m}\dot{u}+\frac{k}{m}u$$

与下列标准形式比较:

$$\ddot{y}+a_1\dot{y}+a_2 y=b_o\ddot{u}+b_1\dot{u}+b_2 u$$

得到：

$$a_1=\frac{b}{m},\quad a_2=\frac{k}{m},\quad b_o=0,\quad b_1=\frac{b}{m},\quad b_2=\frac{k}{m}$$

即而得到：

$$\beta_0=b_0=0$$

$$\beta_1=b_1-a_1\beta_0=\frac{b}{m}$$

$$\beta_2=b_2-a_1\beta_1-a_2\beta_0=\frac{k}{m}-\left(\frac{b}{m}\right)^2$$

并定义：

$$x_1=y-\beta_0 u=y$$

$$x_2=\dot{x}_1-\beta_1 u=\dot{x}_1-\frac{b}{m}u$$

可得到：

$$\dot{x}_1=x_2+\beta_1 u=x_2+\frac{b}{m}u$$

$$\dot{x}_2=-a_2x_1-a_1x_2+\beta_2 u=-\frac{k}{m}x_1-\frac{b}{m}x_2+\left[\frac{k}{m}-\left(\frac{b}{m}\right)^2\right]u$$

输出方程为：

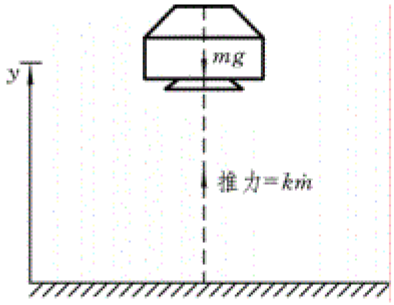
$$y=x_1$$

即：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{b}{m}\\ \frac{k}{m}-\left(\frac{b}{m}\right)^2\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

2-4 题图 2-4 为登月舱在月球软着陆的示意图。其中,m 为登月舱质量,g 为月球表面重力常数,$-k\dot{m}$ 项为反向推力,k 为常数,y 为登月舱相对于地球表面着陆点的距离。现指定状态变量组 $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$ 和 $x_3 = m$,输入变量 $u = \dot{m}$,试列出系统的状态方程。



题图 2-4

解:本题属于由物理系统建立状态空间描述的基本题。

对给定力学系统,储能元件质量的相应变量即位置、速度和质量(本题中他也是随时间改变的),可被取为状态变量组

$$x_1 = y,\ x_2 = \dot{y} \text{ 和 } x_3 = m \text{ 。}$$

基此,利用力学定律并考虑到输入变量 $u = \dot{m}$,先来导出

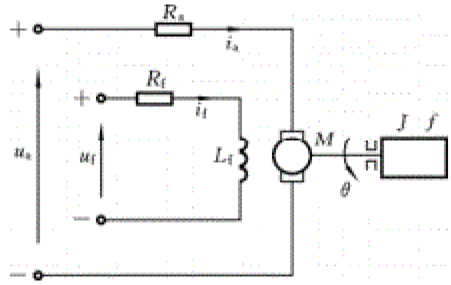
$$\dot{x}_1 = \dot{y} = x_2$$
$$\dot{x}_2 = \ddot{y} = \frac{k}{m}\dot{m} - \frac{gm}{m} = -\frac{g}{x_3}x_3 + \frac{k}{x_3}u$$
$$\dot{x}_3 = \dot{m} = u$$

在将此方程组表为向量方程,就得到系统的状态方程:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{g}{x_3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k}{x_3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

且由状态方程形式可以看出,给定力学系统为非线性系统。

2-5 某磁场控制的直流电动机的简化原理图如题图 2-5 所示,其中电动机轴上的负载为阻尼摩擦,其摩擦系数为f;电动机轴上的转动惯量为J。设输入为电枢电压u_a和激磁电压u_f,输出为电机转角θ,试列出系统的状态空间模型。



题图 2-5

解 设电动机的铁芯工作在非饱和区。分析题图 2-5 所描述的电动机转速控制系统,可以写出电动机的主回路、励磁回路电压方程和轴转动运动方程为

$$u_a = R_a i_a + E_a$$

$$u_f = R_f i_f + L_f \frac{\mathrm{d}i_f}{\mathrm{d}t}$$

$$M = J\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + f\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

式中,E_a和M分别为如下电动机电枢电势和电动机转矩,且

$$E_a = C_e\Phi\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = k_e i_f \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}, \quad M = C_m\Phi i_a = k_m i_f i_a$$

式中,C_e和C_m分别为电动机的电枢电势常数和转矩常数;Φ为磁场的磁通量,其正比于励磁回路电流i_f;k_e和k_m分别为比例常数。因此,主回路、励磁回路电压方程和轴转动运动可记为

$$\begin{cases} u_a = R_a i_a + k_e i_f \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \\ u_f = R_f i_f + L_f \dfrac{\mathrm{d}i_f}{\mathrm{d}t} \\ k_m i_f i_a = J\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + f\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \end{cases} \tag{2-13}$$

对于上述微分方程组,若已知电枢电流$i_f(t)$、角位移$\theta(t)$及其导数 $\mathrm{d}\theta(t)/\mathrm{d}t$ 在初始时刻t_0的值,以及电枢电压u_a和励磁回路电压u_f,则方程组有惟一解。因此,可以选择状态变量为

$$x_1(t) = i_f(t), \quad x_2(t) = \theta(t), \quad x_3(t) = \frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t}$$

因此,由微分方程组(2-13)可得系统的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\dfrac{R_f}{L_f}x_1 + \dfrac{1}{L_f}u_f \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = \dfrac{k_m}{J}x_1 i_a - \dfrac{f}{J}x_3 = \dfrac{k_m}{J}x_1\left(\dfrac{u_a - k_e x_1 x_3}{R_a}\right) - \dfrac{f}{J}x_3 \end{cases}$$

输出方程为

$$y=\theta=x_2$$

由上述状态方程和输出方程可得系统的非线性状态空间模型为

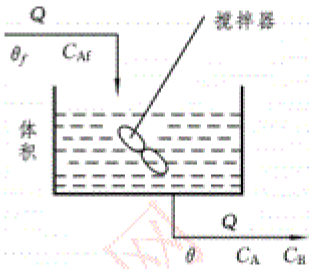
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\dfrac{R_f}{L_f}x_1 + \dfrac{1}{L_f}u_f \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = \dfrac{k_m}{JR_a}u_a x_1 - \dfrac{k_m k_e}{JR_a}x_1^2 x_3 - \dfrac{f}{J}x_3 \end{cases}$$

$$y = x_2$$

2-6 题图 2-6 为一化学反应器,它是一个均匀、连续流动单元,其中发生如下反应速率常数为 k 的一级吸热反应

$$A \xrightarrow{k} B$$

该化工反应生产过程为:温度为常量θ_f,含A物质浓度为常量C_{Af}的料液以$Q(t)$的流量进入反应器;假定流出的液体的流量也为$Q(t)$,保持单元内液体体积为V;为了使化学反应向右进行,用蒸汽对反应器内的溶液进行加热,蒸汽加热量为$q(t)$。试以料液的流量$Q(t)$和蒸汽加热量$q(t)$为输入,容器内的液体的温度$\theta(t)$和物质B的浓度$C_B(t)$为输出,建立状态空间模型。



题图 2-6

参见 2.2 小节例题

2-7. 将以下系统输入输出方程变换为状态空间模型。

(1) $\dddot{y}+2\ddot{y}+6\dot{y}+3y=5u$　　　　(2) $2\dddot{y}-3y=\dddot{u}-u$

(3) $\dddot{y}+4\ddot{y}+5\dot{y}+2y=2\dddot{u}+\ddot{u}+\dot{u}+2u$

解 (1) 由所求的系统输入输出方程,有

$$a_1=2,\quad a_2=6,\quad a_3=3,\quad b=5$$

当选择输出 y 及其 1 阶、2 阶导数为状态变量时,可得状态空间模型为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -3 & -6 & -2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\0\\5\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$$
$$\boldsymbol{y}=[1\quad 0\quad 0]\boldsymbol{x}$$

(2) 先将方程变换成 y 的首项的系数为 1,对方程两边除以 2，得

$$\dddot{y}-\frac{3}{2}y=\frac{1}{2}\dddot{u}-\frac{1}{2}u$$

由所求的系统输入输出方程,有

$$a_1=0,\quad a_2=0,\quad a_3=-3/2,\quad b_0=1/2,\quad b_1=0,\quad b_2=0,\quad b_3=-1/2,$$

故由式(2-17)可得

$$\begin{aligned}&\beta_0=b_0=1/2\\&\beta_1=b_1-a_1\beta_0=0\\&\beta_2=b_2-a_1\beta_1-a_2\beta_0=0\\&\beta_3=b_3-a_1\beta_2-a_2\beta_1-a_3\beta_0=1/4\end{aligned}$$

因此,当选择状态变量

$$\begin{cases}x_1=y-\beta_0u=y-\dfrac{1}{2}u\\[2mm] x_2=\dot{y}-\beta_1u-\beta_0\dot{u}=\dot{y}-\dfrac{1}{2}\dot{u}\\[2mm] x_3=\ddot{y}-\beta_2u-\beta_1\dot{u}-\beta_0\ddot{u}=\ddot{y}-\dfrac{1}{2}\ddot{u}\end{cases}$$

时,可写出状态空间模型为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\3/2 & 0 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\0\\1/4\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$$
$$\boldsymbol{y}=[1 \quad 0 \quad 0]\boldsymbol{x}+\frac{1}{2}u$$

(3) 由所求的系统输入输出方程,有

$$a_1=4,\quad a_2=5,\quad a_3=2,\quad b_0=2,\quad b_1=1,\quad b_2=1,\quad b_3=2,$$

故由式(2-17)可得

$$\begin{aligned}&\beta_0=b_0=2\\&\beta_1=b_1-a_1\beta_0=-7\\&\beta_2=b_2-a_1\beta_1-a_2\beta_0=19\\&\beta_3=b_3-a_1\beta_2-a_2\beta_1-a_3\beta_0=-43\end{aligned}$$

因此,当选择状态变量

$$\begin{cases}x_1=y-\beta_0u=y-2u\\x_2=\dot{y}-\beta_1u-\beta_0\dot{u}=\dot{y}+7u-2\dot{u}\\x_3=\ddot{y}-\beta_2u-\beta_1\dot{u}-\beta_0\ddot{u}=\ddot{y}-19u+7\dot{u}-2\ddot{u}\end{cases}$$

时,可写出状态空间模型为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\-2 & -5 & -4\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}-7\\19\\-43\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$$
$$\boldsymbol{y}=[1 \quad 0 \quad 0]\boldsymbol{x}+2u$$

2-8 将下列传递函数转换为状态空间模型

(1) $G(s)=\dfrac{2s^2+18s+40}{s^3+6s^2+11s+6}$ (2) $G(s)=\dfrac{s^2+2s+1}{s^2+5s+6}$

(3) $G(s)=\dfrac{3(s+5)}{(s+3)^2(s+1)}$

解 (1) 由系统特征多项式 $s^3+6s^2+11s+6$,可求得系统的极点为

$$s_1=-1,\quad s_2=-2,\quad s_3=-3$$

于是有

$$G(s)=\frac{k_1}{s-s_1}+\frac{k_2}{s-s_2}+\frac{k_3}{s-s_3}$$

其中,

$$k_1=[G(s)(s+1)]\big|_{s=-1}=12$$
$$k_2=[G(s)(s+2)]\big|_{s=-2}=-12$$
$$k_3=[G(s)(s+3)]\big|_{s=-3}=2$$

故当选择状态变量为 $G(s)$分式并联分解的各个一阶惯性环节的输出,则可得状态空间模型为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-2&0\\0&0&-3\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$$
$$\boldsymbol{y}=[\,12\quad -12\quad 2\,]\boldsymbol{x}$$

(2) 对本题，先用长除法求出严格真有理函数如下

$$G(s)=\frac{s^2+2s+1}{s^2+5s+6}=1+\frac{-3s-5}{s^2+5s+6}=1+\tilde{G}(s)$$

由系统特征多项式 s^2+5s+6,可求得系统的极点为

$$s_1=-2,\quad s_2=-3$$

于是有

$$G(s)=1+\frac{k_1}{s-s_1}+\frac{k_2}{s-s_2}$$

其中,

$$k_1=[\tilde{G}(s)(s+2)]\big|_{s=-2}=1$$
$$k_2=[\tilde{G}(s)(s+3)]\big|_{s=-3}=-4$$

故当选择状态变量为 $G(s)$分式并联分解的各个一阶惯性环节的输出,则可得状态空间模型为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}$$
$$\boldsymbol{y} = [\ 1 \quad -4\ ] \boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}$$

(3) 由系统特征多项式$(s+3)^2(s+1)$,可求得系统的极点为

$$s_1 = s_2 = -3, \quad s_3 = -1$$

于是有

$$G(s) = \frac{k_{11}}{(s - s_1)^2} + \frac{k_{12}}{s - s_1} + \frac{k_{31}}{s - s_3}$$

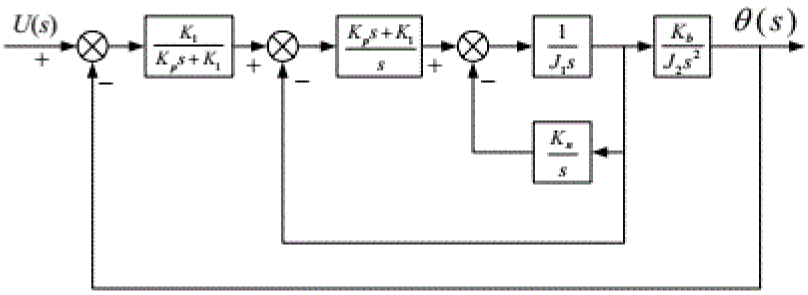
其中

$$k_{11} = [G(s)(s+3)^2]\big|_{s=-2} = -3,$$
$$k_{12} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[G(s)(s+3)^2]\big|_{s=-2} = -3,$$
$$k_{31} = [G(s)(s+1)]\big|_{s=-1} = 3。$$

故当选择状态变量为 $G(s)$分式串-并联分解的各个一阶惯性环节的输出,可得状态空间模型为

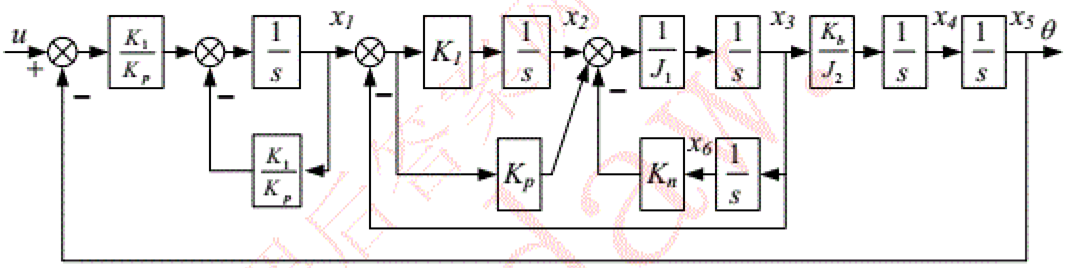
$$\dot{\boldsymbol{x}} = \left[\begin{array}{cc:c} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \hline 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}$$
$$\boldsymbol{y} = [-3 \quad -3 \quad 3] \boldsymbol{x}$$

2-9 试求题图 2-9 所示系统的模拟结构图,并建立其状态空间模型。



题图 2-9

解: 系统方框图变换成:

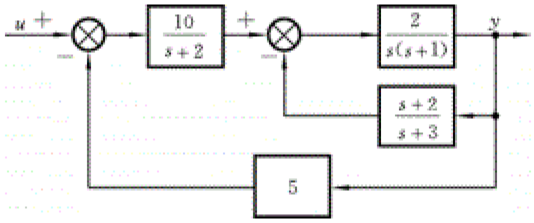


则状态空间表达式$\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu\\ y=Cx+Du\end{cases}$中:

$$A=\begin{bmatrix}-k_1/k_p & 0 & 0 & 0 & -k_1/k_p & 0\\ k_1 & 0 & -k_1 & 0 & 0 & 0\\ k_p/J_1 & 1/J_1 & -k_p/J_1 & 0 & 0 & -k_n/J_1\\ 0 & 0 & k_b/J_2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}k_1/k_p\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix},$$

$$C=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix},\qquad D=0$$

2-10 给定题图 2-10 所示的一个系统方框图,输入变量和输出变量分别为u和y,试列出系统的一个状态空间模型。



题图 2-10

解:首先,定出状态方程。对此,需将给定方块图化为图示规范方块图,并按图中所示把每个一阶环节的输出取为状态变量x_1,x_2,x_3,x_4。进而,利用每个环节的因果关系,可以导出变换域变量关系式:

$$\hat{x}_1(s)=\frac{10}{s+2}\{\hat{u}(s)-5[\hat{x}_2(s)-\hat{x}_3(s)]\}$$

$$\hat{x}_2(s)=\frac{2}{s}\{\hat{x}_1(s)-\hat{x}_2(s)+\hat{x}_3(s)+\hat{x}_4(s)\}$$

$$\hat{x}_3(s)=\frac{2}{s+1}\{\hat{x}_1(s)-\hat{x}_2(s)+\hat{x}_3(s)+\hat{x}_4(s)\}$$

$$\hat{x}_4(s)=\frac{1}{s+3}\{\hat{x}_2(s)-\hat{x}_3(s)\}$$

基此,可以导出变换域状态变量方程:

$$s\hat{x}_1(s)=-2\hat{x}_1(s)-50\hat{x}_2(s)+50\hat{x}_3(s)+10\hat{u}(s)$$

$$s\hat{x}_2(s)=2\hat{x}_1(s)-2\hat{x}_2(s)+2\hat{x}_3(s)+2\hat{x}_4(s)$$

$$s\hat{x}_3(s)=2\hat{x}_1(s)-2\hat{x}_2(s)+\hat{x}_3(s)+2\hat{x}_4(s)$$

$$s\hat{x}_4(s)=2\hat{x}_2(s)-\hat{x}_3(s)-3\hat{x}_4(s)$$

将上述关系式组取拉普拉斯反变换,并运用$L^{-1}\{sx_i(s)\}=\dot{x}_i$,就定义此方块图的状态变量方程:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1&=-2x_1-50x_2+50x_3+10u\\
\dot{x}_2&=2x_1-2x_2+2x_3+2x_4\\
\dot{x}_3&=2x_1-2x_2+x_3+2x_4\\
\dot{x}_4&=x_2-x_3-3x_4
\end{aligned}$$

再将上述方程组表为向量方程,得到此方块图的状态方程：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & -50 & 50 & 0\\ 2 & -2 & 2 & 2\\ 2 & -2 & 1 & 2\\ 0 & 1 & -1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}10\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}u$$

进而,定出输出方程。对此,由方块图中相应环节显示的因果关系,可直接导出此方块图的输出方程：

$$y=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}$$

2-11 已知系统的状态空间模型为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}3&0&0\\1&5&2\\0&2&1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1&0\\2&0\\0&5\end{bmatrix}u$$
$$y=\begin{bmatrix}3&0&1\\6&2&0\end{bmatrix}x$$

现用 $\tilde{x}=Px$ 进行状态变换,其变换矩阵为

$$P=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$$

试写出状态变换后的状态方程和输出方程。

解 本题的线性变换为 $\tilde{x}=Px$ ，因此相应的各个矩阵的变换公式为

$$\tilde{A}=PAP^{-1},\quad \tilde{B}=PB,\quad \tilde{C}=CP^{-1},\quad \tilde{D}=D$$

P 的逆矩阵为

$$P^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1/2&0\\0&0&1/3\end{bmatrix}$$

因此有

$$\tilde{A}=PAP^{-1}=\begin{bmatrix}3&0&0\\2&5&4/3\\0&3&1\end{bmatrix}\quad \tilde{B}=PB=\begin{bmatrix}1&0\\4&0\\0&15\end{bmatrix}$$
$$\tilde{C}=CP^{-1}=\begin{bmatrix}3&0&1/3\\6&1&0\end{bmatrix}$$

故系统在新的状态变量 $\tilde{x}$ 下的状态空间模型为

$$\dot{\tilde{x}}=\begin{bmatrix}3&0&0\\2&5&4/3\\0&3&1\end{bmatrix}\tilde{x}+\begin{bmatrix}1&0\\4&0\\0&15\end{bmatrix}u$$
$$y=\begin{bmatrix}3&0&1/3\\6&1&0\end{bmatrix}\tilde{x}$$

2-12 求下列各方阵 A 的特征值、特征向量和广义特征向量。

(1) $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{bmatrix}$　　(2) $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}$

(3) $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 2 & -5 & 4\end{bmatrix}$　　(4) $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -8 & -12 & -6\end{bmatrix}$

解 (1) 由特征方程$|\lambda I\text{-}A|=0$ 可求得系统的特征值为

$$\lambda_1=1,\quad \lambda_2=2$$

计算对应于$\lambda_1=1$ 的特征向量。按定义有

$$(\lambda_1 I\text{-}A)\boldsymbol{v}_1=0$$

将A、λ_1和$\boldsymbol{v}_1$代入上式,有

$$\begin{bmatrix}0 & -3\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{11}\\ v_{12}\end{bmatrix}=0$$

该方程组有无穷组解。由于 n-rank$(\lambda_1 I\text{-}A)$=1,即特征向量解空间为 1 维,其通解式为

$$v_1=\begin{bmatrix}v_{11} & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}v_{11} & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

令v_{11}=1, 可得如下独立的特征向量

$$v_1=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

再计算对应于重特征值λ_2= 2 的特征向量。按定义有

$$(\lambda_2 I\text{-}A)\boldsymbol{v}_2=0$$

将A、λ_2和$\boldsymbol{v}_2$代入上式,有

$$\begin{bmatrix}1 & -3\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{21}\\ v_{22}\end{bmatrix}=0$$

由于 n-rank$(\lambda_2 I\text{-}A)$=1,该方程组有特征向量解空间为 1 维,其通解式为

$$v_2=\begin{bmatrix}v_{21} & v_{22}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}3v_{22} & v_{22}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

因此,令v_{22}=1,解之得

$$v_2=\begin{bmatrix}3 & 1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

(2) 由特征方程|λ*I*-*A*|=0 可求得系统的特征值为

$$\lambda_1=\lambda_2=-1,\quad \lambda_3=5$$

即-1 为系统的二重特征值,其代数重数为 2。

计算对应于二重特征值-1 的特征向量。按定义有

$$(\lambda_1 I-A)\boldsymbol{v}_1=0$$

将A、λ_1和$\boldsymbol{v}_1$代入上式,有

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \end{bmatrix}=0$$

由于 n-rank($\lambda_1 I$-A)=2,该方程组有特征向量解空间为 2 维,故特征向量解空间为 2 维,独立的特征向量数为 2。解该方程,可得特征向量的通解式为

$$v_1=\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{23} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & -(v_{11}+v_{12}) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

因此,令v_{11}=1,v_{12}=0 或 1,解之得

$$v_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\quad 和 \quad v_2=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

即重特征值 2 有两个线性独立的特征向量,故该重特征值的几何重数亦为 2。

再计算对应于重特征值λ_3=5 的特征向量。按定义有

$$(\lambda_3 I-A)\boldsymbol{v}_2=0$$

将A、λ_3和$\boldsymbol{v}_3$代入上式,有

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{31} \\ v_{32} \\ v_{33} \end{bmatrix}=0$$

该方程组有无穷组解。由于 n-rank($\lambda_1 I$-A)=1,即特征向量解空间为 1 维,其通解式为

$$v_3=\begin{bmatrix} v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} v_{31} & v_{31} & v_{31} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

令v_{31}=1, 可得如下独立的特征向量

$$v_1=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

(4) 由特征方程|λ*I*-*A*|=0 可求得系统的特征值为

$$\lambda_1=\lambda_2=1,\quad \lambda_3=2$$

由于矩阵为友矩阵, 因此对应于λ_1=λ_2=1 的特征向量和广义特征向量分别为

$$v_{1,1}=v_1=\begin{bmatrix}1 & \lambda_1 & \lambda_1^2\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$
$$v_{1,2}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\lambda_1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

对应于$\lambda_3=2$的特征向量和广义特征向量分别为

$$v_3=\begin{bmatrix}1 & \lambda_3 & \lambda_3^2\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

(4) 由特征方程$|\lambda I-A|=0$可求得系统的特征值为

$$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-2$$

由于矩阵为友矩阵，因此对应于$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-2$的特征向量和广义特征向量分别为

$$v_{1,1}=v_1=\begin{bmatrix}1 & \lambda_1 & \lambda_1^2\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1 & -2 & 4\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$
$$v_{1,2}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\lambda_1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}0 & 1 & -4\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$
$$v_{1,3}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

2-13 试将下列状态方程变换为约旦规范形(对角线规范形)

(1) $\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}2 & -1 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}7\\2\\3\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}\end{cases}$ (2) $\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}8 & -8 & -2\\ 4 & -3 & -2\\ 3 & -4 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 5\\ 7 & 1\end{bmatrix}u$

解 (1) 先求 A 的特征值。由特征方程$|\lambda I-A|=0$ 可求得系统的特征值为

$$\lambda_1=-1,\quad \lambda_2=1,\quad \lambda_3=2$$

求特征值所对应的状态向量。由前述方法可求得特征值λ_1,λ_2,和λ_3所对应的特征向量分别为

$$\boldsymbol{p}_1=[0\quad 1\quad -1]^\tau,\quad \boldsymbol{p}_2=[1\quad 0\quad 1]^\tau,\quad p_3=[-1\quad 0\quad 0]^\tau$$

取系统的特征向量组成线性变换矩阵P并求逆矩阵P^{-1},即有

$$P=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix},\qquad P^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

计算$\tilde{A}$、$\tilde{B}$和$\tilde{C}$

$$\tilde{A}=P^{-1}AP=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix},\qquad \tilde{B}=P^{-1}B=\begin{bmatrix}2\\ 5\\ -2\end{bmatrix}$$

$$\tilde{C}=CP=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

故系统在新的状态变量$\tilde{\boldsymbol{x}}$下的状态空间模型为

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{x}}+\begin{bmatrix}2\\ 5\\ -2\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & -1\end{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{x}}$$

(2) 先求 A 的特征值。由特征方程$|\lambda I-A|=0$ 可求得系统的特征值为

$$\lambda_1=-1,\quad \lambda_2=1,\quad \lambda_3=2$$

求特征值所对应的状态向量。由前述方法可求得特征值λ_1,λ_2,和λ_3所对应的特征向量分别为

$$\boldsymbol{p}_1=[-4 \quad -3 \quad -2]^\tau,\quad \boldsymbol{p}_2=[3 \quad 2 \quad 1]^\tau,\quad p_3=[2 \quad 1 \quad 1]^\tau$$

取系统的特征向量组成线性变换矩阵P并求逆矩阵P^{-1},即有

$$P=\begin{bmatrix}-4 & 3 & 2\\ -3 & 2 & 1\\ -2 & 1 & 1\end{bmatrix},\qquad P^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & 0 & -2\\ 1 & -2 & 1\end{bmatrix}$$

计算$\widetilde{A}$、$\widetilde{B}$

$$\tilde{A}=P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix},\qquad \tilde{B}=P^{-1}B=\begin{bmatrix}-6 & -3\\ -12 & 1\\ 7 & -6\end{bmatrix}$$

故系统在新的状态变量$\tilde{\boldsymbol{x}}$下的状态空间模型为

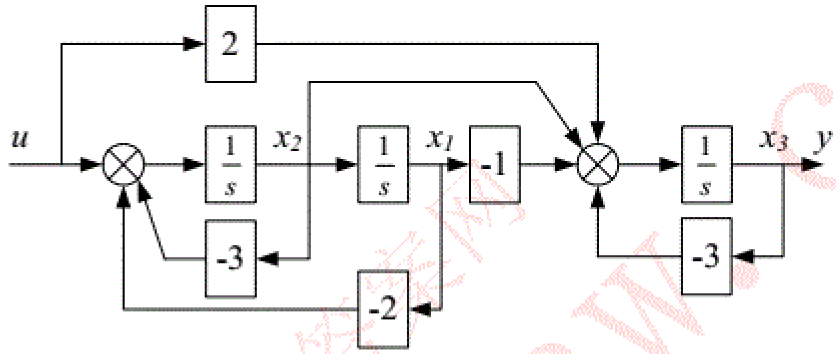
$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{x}}+\begin{bmatrix}-6 & -3\\ -12 & 1\\ 7 & -6\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$$

2-14 状态空间模型为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -2 & -3 & 0\\ -1 & 1 & -3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}u$$
$$y=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}x$$

(1) 画出其模拟结构图;
(2) 求系统的传递函数。

解：(i) 系统的模拟结构图如下：



(ii) 传递函数 $G(s)$ 由下式给出：

$$G(s)=C(sI-A)^{-1}B+D$$

对于该问题,矩阵 A,B,C 和 D 为：

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -2 & -3 & 0\\ -1 & 1 & -3\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix},\ D=0$$

因此：

$$G(s)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s & -1 & 0\\ 2 & s+3 & 0\\ 1 & -1 & s+3\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}$$

$$=\frac{2s^2+7s+3}{s^3+6s^2+11s+6}$$

2-15 已知两系统的传递函数阵 $W_1(s)$ 和 $W_2(s)$ 分别为

$$W_1(s)=\begin{bmatrix}\frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+2}\\ 0 & \frac{s+1}{s+2}\end{bmatrix},\qquad W_2(s)=\begin{bmatrix}\frac{1}{s+3} & \frac{1}{s+4}\\ \frac{1}{s+1} & 0\end{bmatrix}$$

试求两子系统串联联结和并联联结时,系统的传递函数阵。

解： 串联联结时,

$$W(s)=W_2(s)\cdot W_1(s)$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{s+3} & \frac{1}{s+4}\\ \frac{1}{s+1} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+2}\\ 0 & \frac{s+1}{s+2}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{s^2+4s+3} & \frac{s^2+5s+7}{s^3+9s^2+26s+24}\\ \frac{1}{s^2+2s+1} & \frac{1}{s^2+3s+2}\end{bmatrix}$$

并联联结时,

$$W(s)=W_1(s)+W_2(s)$$

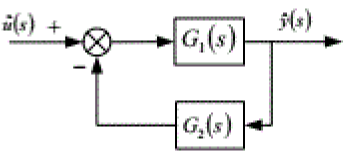
$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+2}\\ 0 & \frac{s+1}{s+2}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{s+3} & \frac{1}{s+4}\\ \frac{1}{s+1} & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{s^2+4s+3} & \frac{1}{s^2+6s+8}\\ \frac{1}{s+1} & \frac{s+1}{s+2}\end{bmatrix}$$

2-16 给定题图 2-16 所示的动态输出反馈系统,其中,

$$G_1(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s+1} & \dfrac{1}{s+2}\\ 0 & \dfrac{s+1}{s+2}\end{bmatrix},\quad G_2(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s+3} & \dfrac{1}{s+4}\\ \dfrac{1}{s+1} & 0\end{bmatrix}$$

试定出反馈系统的传递函数矩阵 $G(s)$。



题图 2-16

解：计算所依据的关系式为

$$G(s)=G_1(s)[I+G_2(s)G_1(s)]^{-1} \quad 或 \quad G(s)=[I+G_1(s)G_2(s)]^{-1}G_1(s)$$

采用前一个计算公式。对此,先行计算

$$G_2(s)G_1(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s+3} & \dfrac{1}{s+4}\\ \dfrac{1}{s+1} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s+1} & \dfrac{1}{s+2}\\ 0 & \dfrac{s+1}{s+2}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{(s+1)(s+3)} & \dfrac{s^2+5s+7}{(s+2)(s+3)(s+4)}\\ \dfrac{1}{(s+1)^2} & \dfrac{1}{(s+1)(s+2)}\end{bmatrix}$$

$$[I+G_2(s)G_1(s)]=\begin{bmatrix}\dfrac{s^2+4s+4}{(s+1)(s+3)} & \dfrac{s^2+5s+7}{(s+2)(s+3)(s+4)}\\ \dfrac{1}{(s+1)^2} & \dfrac{s^2+3s+3}{(s+1)(s+2)}\end{bmatrix}$$

$$[I+G_2(s)G_1(s)]^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{s^2+4s+4}{(s+1)(s+3)} & \dfrac{s^2+5s+7}{(s+2)(s+3)(s+4)}\\ \dfrac{1}{(s+1)^2} & \dfrac{s^2+3s+3}{(s+1)(s+2)}\end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix} \dfrac{(s^2+3s+3)(s+3)(s+4)}{s^4+10s^3+37s^2+62s+41} & \dfrac{(s^2+5s+7)(s+1)}{s^4+10s^3+37s^2+62s+41} \\ \dfrac{(s+2)(s+3)(s+4)}{(s+1)(s^4+10s^3+37s^2+62s+41)} & \dfrac{(s^2+4s+4)(s+2)(s+4)}{s^4+10s^3+37s^2+62s+41} \end{bmatrix}$$

基此,求得

$$G(s)=G_1(s)[I+G_2(s)G_1(s)]^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} & \dfrac{1}{s+2} \\ 0 & \dfrac{s+1}{s+2} \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} \dfrac{(s^2+3s+3)(s+3)(s+4)}{s^4+10s^3+37s^2+62s+41} & \dfrac{(s^2+5s+7)(s+1)}{s^4+10s^3+37s^2+62s+41} \\ \dfrac{(s+2)(s+3)(s+4)}{(s+1)(s^4+10s^3+37s^2+62s+41)} & \dfrac{(s^2+4s+4)(s+2)(s+4)}{s^4+10s^3+37s^2+62s+41} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \dfrac{(s+2)(s+3)(s+4)}{s^4+10s^3+37s^2+62s+41} & \dfrac{s^3+7s^2+15s+9}{s^4+10s^3+37s^2+62s+41} \\ \dfrac{(s+3)(s+4)}{s^4+10s^3+37s^2+62s+41} & \dfrac{(s^2+4s+4)(s+1)(s+4)}{s^4+10s^3+37s^2+62s+41} \end{bmatrix}$$

2-17 将下列系统输入输出方程变换为状态空间模型。

(1) $y(k+2)+2y(k+1)+y(k)=u(k)$

(2) $y(k+2)+y(k+1)+0.16y(k)=u(k+1)+2u(k)$

解： (1) 可知： $a_1=2 \quad a_2=1 \quad b_0=0 \quad b_1=0 \quad b_2=1$

故可得：

$$\beta_0=b_0=0$$
$$\beta_1=b_1-a_1\beta_0=0-2\times0=0$$
$$\beta_2=b_2-a_1\beta_1-a_2\beta_0=1-1\times0-1\times0=1$$

因此,当选择状态变量如下：

$$x_1(k)=y(k)-\beta_0u(k)=y(k)$$
$$x_2(k)=y(k+1)-\beta_1u(k)-\beta_0u(k+1)=y(k+1)$$

可写出如下线性离散系统的状态空间表达式:

$$\mathbf{x}(k+1)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -2\end{bmatrix}\mathbf{x}(k)+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\mathbf{u}(k)$$

$$\mathbf{y}(k)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\mathbf{x}(k)$$

(2) $y(k+2)+y(k+1)+0.16y(k)=u(k+1)+2u(k)$

解： 可知：$a_1=1 \quad a_2=0.16 \quad b_0=0 \quad b_1=1 \quad b_2=2$

故可得：

$$\beta_0=b_0=0$$
$$\beta_1=b_1-a_1\beta_0=1-1\times0=1$$
$$\beta_2=b_2-a_1\beta_1-a_2\beta_0=2-1\times1-0.16\times0=1$$

因此,当选择状态变量如下：

$$x_1(k)=y(k)-\beta_0u(k)=y(k)$$
$$x_2(k)=y(k+1)-\beta_1u(k)-\beta_0u(k+1)=y(k+1)-u(k)$$

可写出如下线性离散系统的状态空间表达式:

$$\mathbf{x}(k+1)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -0.16 & -1\end{bmatrix}\mathbf{x}(k)+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\mathbf{u}(k)$$

$$\mathbf{y}(k) = [1 \quad 0]\mathbf{x}(k)$$

2-18 求下列系统状态空间模型对应的 z 域传递函数 $G(z)$

(1) $\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1)=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -3\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(k)+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}u(k) \\ y(k)=\begin{bmatrix}1 & -4\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(k)+u(k)\end{cases}$ (2) $\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -0.16 & -1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(k)+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u(k) \\ y(k)=\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(k)\end{cases}$

解： (1) 由公式可得：

$$
\begin{aligned}
G(z) &= C(zI-G)^{-1}H+D \\
&= [1 \quad -4]\begin{bmatrix}z+2 & 0\\ 0 & z+3\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+1 \\
&= [1 \quad -4]\begin{bmatrix}\dfrac{1}{z+2} & 0\\ 0 & \dfrac{1}{z+3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+1 \\
&= \frac{z^2+2z+1}{z^2+5z+6}
\end{aligned}
$$

(2) $x(k+1)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -0.16 & -1\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u(k)$

$y(k)=\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}x(k)$

解：由公式可得：

$$
\begin{aligned}
G(z) &= C(zI-G)^{-1}H+D \\
&= [2 \quad 1]\begin{bmatrix}z & -1\\ 0.16 & z+1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \\
&= [2 \quad 1]\begin{bmatrix}\dfrac{z^2+0.84z+0.16}{z(z^2+z+0.16)} & \dfrac{1}{z^2+z+0.16}\\ \dfrac{-0.16}{z^2+z+0.16} & \dfrac{z}{z^2+z+0.16}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \\
&= \frac{z+2}{z^2+z+0.16}
\end{aligned}
$$

习题解答

3-1 试用直接计算法计算下列矩阵A的矩阵指数函数e^{At}(即状态转移矩阵)。

(1) $A=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ (2) $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}$

解 (1) 按矩阵指数函数e^{At}的展开式，可计算如下:

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{At} &= I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \ldots + \frac{A^kt^k}{k!} + \ldots \\
&= \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}t + \begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}^2\frac{t^2}{2!} + \ldots \\
&= \begin{bmatrix}1 - t + \frac{1}{2!}t^2 + \ldots & 0\\ 0 & 1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + \ldots\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-t} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{t}\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

(2) 按矩阵指数函数e^{At}的展开式，可计算如下:

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{At} &= I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \ldots + \frac{A^kt^k}{k!} + \ldots \\
&= \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}t + \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}^2\frac{t^2}{2!} + \ldots \\
&= \begin{bmatrix}1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + \ldots & 0 & 0\\ 0 & 1 - \frac{1}{2!}t^2 + \ldots & t - \frac{1}{3!}t^3 + \ldots\\ 0 & -t + \frac{1}{3!}t^3 + \ldots & 1 - \frac{1}{2!}t^2 + \ldots\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix}\mathrm{e}^{t} & 0 & 0\\ 0 & \cos t & \sin t\\ 0 & -\sin t & \cos t\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

3-2 试利用矩阵指数函数的性质计算下列矩阵A的矩阵值函数e^{At}。

(1) $A=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$　　(2) $A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

解 (1) 因为 A 矩阵为由

$$A_1=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 0 & -2\end{bmatrix}\qquad A_2=[-2]$$

2 个方块矩阵组成的块对角矩阵，因此矩阵A的矩阵值函数e^{At}为

$$e^{At}=\begin{bmatrix}e^{A_1t} & 0\\ 0 & e^{A_2t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^{\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 0 & -2\end{bmatrix}t} & 0\\ 0 & e^{-2t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^{-2t}\begin{bmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{bmatrix} & 0\\ 0 & e^{-2t}\end{bmatrix}=e^{-2t}\left[\begin{array}{cc:c}1 & t & 0\\ 0 & 1 & 0\\ \hdashline 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

(2) 因为 A 矩阵为由

$$A_1=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\qquad A_2=[1]$$

2 个方块矩阵组成的块对角矩阵，其中块矩阵$\boldsymbol{A}_1$的矩阵指数函数为

$$e^{A_1t}=\exp\left(\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}t\right)=\left[\exp\left(\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}t\right)\right]^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ t & 1\end{bmatrix}$$

因此矩阵A的矩阵值函数e^{At}为

$$e^{At}=\begin{bmatrix}e^{A_1t} & 0\\ 0 & e^{A_2t}\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc:c}1 & 0 & 0\\ t & 1 & 0\\ \hdashline 0 & 0 & e^{t}\end{array}\right]$$

3-3 试选择适当的方法计算下列矩阵A的矩阵指数函数e^{At}。

(1) $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&2\end{bmatrix}$　　(2) $A=\begin{bmatrix}0&1\\-ab&-(a+b)\end{bmatrix}$　$(a\neq b)$

解 (1) 因为 A 矩阵为由

$$A_1=[1]\qquad A_2=\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}$$

2 个方块矩阵组成的块对角矩阵，其中块矩阵A_2的矩阵指数函数的计算过程为

$$(sI-A_2)^{-1}=\frac{\mathrm{adj}(sI-A_2)}{|sI-A_2|}=\frac{1}{(s-1)(s-2)}\begin{bmatrix}s-2&1\\0&s-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{s-1}&\frac{1}{s-2}-\frac{1}{s-1}\\0&\frac{1}{s-2}\end{bmatrix}$$

$$e^{A_2t}=L^{-1}[(sI-A_2)^{-1}]=\begin{bmatrix}e^t&e^{2t}-e^t\\0&e^{2t}\end{bmatrix}$$

因此矩阵A的矩阵值函数e^{At}为

$$e^{At}=\begin{bmatrix}e^{A_1t}&0\\0&e^{A_2t}\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c|cc}e^t&0&0\\\hline 0&e^t&e^{2t}-e^t\\0&0&e^{2t}\end{array}\right]$$

(2) 因为A矩阵的特征多项式为$s^2+(a+b)s+ab$,其特征值为$-a$和$-b$。因此矩阵A的矩阵值函数e^{At}可表示为

$$e^{At}=\alpha_0(t)I+\alpha_1(t)A$$

其中待定函数由如下计算确定

$$\begin{bmatrix}\alpha_0(t)\\\alpha_1(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-a\\1&-b\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}e^{-at}\\e^{-bt}\end{bmatrix}=\frac{1}{a-b}\begin{bmatrix}-be^{-at}+ae^{-bt}\\-e^{-at}+e^{-bt}\end{bmatrix}$$

则系统的矩阵指数函数为

$$\begin{aligned}e^{At}&=\alpha_0(t)I+\alpha_1(t)A\\&=\frac{1}{a-b}\{(-be^{-at}+ae^{-bt})I+(-e^{-at}+e^{-bt})A\}\\&=\frac{1}{a-b}\begin{bmatrix}-be^{-at}+ae^{-bt}&-e^{-at}+e^{-bt}\\-ab(-e^{-at}+e^{-bt})&ae^{-at}-be^{-bt}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

3-4 试说明下列矩阵是否满足状态转移矩阵的条件,若满足,试求与之对应的 A 矩阵。

(1) $\Phi(t)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos t & -\sin t\\ 0 & \sin t & \cos t\end{bmatrix}$ (2) $\Phi(t)=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}2(e^{-t}+e^{3t}) & e^{3t}-e^{-t}\\ 4(e^{3t}-e^{-t}) & 2(e^{-t}+e^{3t})\end{bmatrix}$

解 (1) 判断是否为状态转移矩阵，主要看是否其满足状态转移矩阵的如下定义式。

$$\begin{cases}\dot{\Phi}(t)=A\Phi(t)\\ \Phi(0)=I\end{cases}$$

本例的Φ(t)显然满足定义的初始条件。设该Φ(t)满足该微分方程式，则也应该满足 t=0 的情形

$$\dot{\Phi}(0)=A\Phi(0)$$

即

$$A=\dot{\Phi}(0)$$

将本例的Φ(t)代入有

$$A=\dot{\Phi}(0)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -\sin t & -\cos t\\ 0 & \cos t & \sin t\end{bmatrix}_{t=0}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

对上述计算出的 A，还需检验其是否满足Φ(t)定义中的微分方程式。该微分方程式的左右两边分别为

$$\dot{\Phi}(t)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -\sin t & -\cos t\\ 0 & \cos t & -\sin t\end{bmatrix}$$

$$A\Phi(t)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos t & -\sin t\\ 0 & \sin t & \cos t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -\sin t & -\cos t\\ 0 & \cos t & -\sin t\end{bmatrix}$$

综上所述，因为该 A 矩阵满足Φ(t)定义中的微分方程式和初始条件，因此其为该Φ(t)为一个状态转移矩阵，A 为其对应的系统矩阵。

(2) 判断是否为状态转移矩阵，主要看是否其满足状态转移矩阵的如下定义式。

$$\begin{cases}\dot{\Phi}(t)=A\Phi(t)\\ \Phi(0)=I\end{cases}$$

本例的Φ(t)显然满足定义的初始条件。设该Φ(t)满足该微分方程式，则也应该满足 t=0 的情形

$$\dot{\Phi}(0) = A\Phi(0)$$

即

$$A = \dot{\Phi}(0)$$

将本例的Φ(t)代入有

$$A = \dot{\Phi}(0) = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2(-e^{-t}+3e^{3t}) & 3e^{3t}+e^{-t} \\ 4(3e^{3t}+e^{-t}) & 2(-e^{-t}+3e^{3t}) \end{bmatrix}_{t=0} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

对上述计算出的 A，还需检验其是否满足Φ(t)定义中的微分方程式。该微分方程式的左右两边分别为

$$\dot{\Phi}(t) = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2(-e^{-t}+3e^{3t}) & 3e^{3t}+e^{-t} \\ 4(3e^{3t}+e^{-t}) & 2(-e^{-t}+3e^{3t}) \end{bmatrix}$$

$$A\Phi(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \times \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2(e^{-t}+e^{3t}) & e^{3t}-e^{-t} \\ 4(e^{3t}-e^{-t}) & 2(e^{-t}+e^{3t}) \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2(-e^{-t}+3e^{3t}) & 3e^{3t}+e^{-t} \\ 4(3e^{3t}+e^{-t}) & 2(-e^{-t}+3e^{3t}) \end{bmatrix}$$

综上所述，因为该 A 矩阵满足Φ(t)定义中的微分方程式和初始条件，因此其为该Φ(t)为一个状态转移矩阵，A 为其对应的系统矩阵。

3-5 试求下列齐次状态方程的解。

(1) $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

解：(1) 由于 A 矩阵为对角线矩阵，其对应的矩阵指数函数为

$$\mathrm{e}^{At} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{-3t} \end{bmatrix}$$

因此齐次状态方程的解为

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathrm{e}^{A(t-t_0)}\boldsymbol{x}(t_0) = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-(t-t_0)} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-2(t-t_0)} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{-3(t-t_0)} \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t_0)$$

(2) 由于 A 矩阵为约旦矩阵，其对应的矩阵指数函数为

$$\mathrm{e}^{At} = \mathrm{e}^{2t} \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2! \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

因此齐次状态方程的解为

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathrm{e}^{A(t-t_0)}\boldsymbol{x}(t_0) = \mathrm{e}^{2(t-t_0)} \begin{bmatrix} 1 & (t-t_0) & (t-t_0)^2/2! \\ 0 & 1 & (t-t_0) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t_0)$$

3-6 设线性定常系统的齐次状态方程为

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

已知

(1) $x(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{bmatrix}$，当 $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

(2) $x(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix}$，当 $x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

试求取该系统的系统矩阵 A 及状态转移矩阵 $\Phi(t)$ 。

解: 根据齐次状态方程的解表达式,将同一个系统在不同初始条件下的解排列在一起，有

$$[x_1(t) \quad x_2(t)] = [e^{At}x_1(0) \quad e^{At}x_2(0)] = e^{At}[x_1(0) \quad x_2(0)]$$

因此,有

$$\begin{aligned}\Phi(t) = e^{At} &= [x_1(t) \quad x_2(t)][x_1(0) \quad x_2(0)]^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} e^{-2t} & 2e^{-t} \\ -e^{-2t} & -e^{-t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & 2e^{-t} - 2e^{-2t} \\ -e^{-t} + e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

下面计算上述矩阵指数函数（状态转移矩阵）对应的 A。由状态转移矩阵的定义式

$$\begin{cases} \dot{\Phi}(t) = A\Phi(t) \\ \Phi(0) = I \end{cases}$$

知，矩阵 A 和Φ(t)满足该微分方程式，则也应该满足 t=0 的情形

$$\dot{\Phi}(0) = A\Phi(0)$$

即

$$A = \dot{\Phi}(0)$$

将上述Φ(t)代入有

$$A = \dot{\Phi}(0) = \begin{bmatrix} -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -2e^{-t} + 4e^{-2t} \\ e^{-t} - 2e^{-2t} & e^{-t} - 4e^{-2t} \end{bmatrix}_{t=0} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

对上述计算出的 A，还需检验其是否满足Φ(t)定义中的微分方程式。该微分方程式的左右两边分别为

$$\dot{\Phi}(t)=\begin{bmatrix}-2e^{-t}+2e^{-2t} & -2e^{-t}+4e^{-2t}\\ e^{-t}-2e^{-2t} & e^{-t}-4e^{-2t}\end{bmatrix}$$

$$A\Phi(t)=\begin{bmatrix}0 & 2\\ -1 & -3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2e^{-t}-e^{-2t} & 2e^{-t}-2e^{-2t}\\ -e^{-t}+e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2e^{-t}+2e^{-2t} & -2e^{-t}+4e^{-2t}\\ e^{-t}-2e^{-2t} & e^{-t}-4e^{-2t}\end{bmatrix}$$

综上所述，因为该 A 矩阵满足Φ(t)定义中的微分方程式和初始条件，因此所求得的 A 及其状态转移矩阵Φ(t)满足题目所给定的两个初始条件。

3-7 已知线性定常系统的齐次状态方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)$$

试确定与状态 $\boldsymbol{x}(1)=[2 \quad 5]^{\mathrm{T}}$ 相对应的初始状态 $\boldsymbol{x}(0)$。

解 对本题，先求出系统的状态转移矩阵。由于矩阵A为友矩阵，其特征多项式为s^2+s-2，特征值为 1 和-2，其对应的特征向量分别为

$$[1\ 1]^{\mathrm{T}} \qquad [1\ -2]^{\mathrm{T}}$$

则由特征向量组成的变换矩阵 P 可以将 A 矩阵变换为对角线矩阵，即有

$$P=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}=P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}$$

因此，原矩阵 A 的矩阵指数函数为

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{At}=P\mathrm{e}^{\tilde{A}t}P^{-1}&=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{t} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{-2t}\end{bmatrix}\times\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\\ &=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2\mathrm{e}^{t}+\mathrm{e}^{-2t} & \mathrm{e}^{t}-\mathrm{e}^{-2t}\\ 2\mathrm{e}^{t}-2\mathrm{e}^{-2t} & \mathrm{e}^{t}+2\mathrm{e}^{-2t}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

因此，若已知 $\boldsymbol{x}(1)=[2 \quad 5]^{\mathrm{T}}$，则由 $\boldsymbol{x}(1)=\mathrm{e}^{A\times 1}\boldsymbol{x}(0)$ 可得

$$\boldsymbol{x}(0)=\mathrm{e}^{-A}\boldsymbol{x}(1)=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2\mathrm{e}^{-1}+\mathrm{e}^{2} & \mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}^{2}\\ 2\mathrm{e}^{-1}-2\mathrm{e}^{2} & \mathrm{e}^{-1}+2\mathrm{e}^{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}^{2}\\ 3\mathrm{e}^{-1}+2\mathrm{e}^{2}\end{bmatrix}$$

3-8 已知线性定常系统的非齐次状态方程为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\ 0\end{bmatrix}u \qquad \begin{bmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$$

试分别求在下列输入下状态轨迹 $\boldsymbol{x}(t)$

(1) 阶跃信号 $u(t)=1\,(t\ge 0)$；

(2) 负指数信号 $u(t)=e^{-t}\ (t\ge 0)$ 。

解 先求系统的状态转移矩阵。

$$(sI-A)^{-1}=\frac{\mathrm{adj}(sI-A)}{|sI-A|}=\frac{1}{(s+1)(s+2)}\begin{bmatrix}s+3 & 1\\ -2 & s\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{s+1}+\frac{-1}{s+2} & \frac{1}{s+1}+\frac{-1}{s+2}\\ \frac{-2}{s+1}+\frac{2}{s+2} & \frac{-1}{s+1}+\frac{2}{s+2}\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{e}^{At}=L^{-1}[(sI-A)^{-1}]=\begin{bmatrix}2\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t} & \mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t}\\ -2\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t} & -\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t}\end{bmatrix}$$

然后根据非齐次状态方程的解公式对不同输入求解状态响应。

(1) 当输入信号为负指数信号 $u(t)=e^{-t}\ (t\ge 0)$

$$\boldsymbol{x}(t)=L^{-1}\left[(sI-A)^{-1}\boldsymbol{x}_0\right]+L^{-1}\left[(sI-A)^{-1}BU(s)\right]=\mathrm{e}^{At}\boldsymbol{x}(0)+\int_0^t \mathrm{e}^{A(t-\tau)}B\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$=\begin{bmatrix}-3\mathrm{e}^{-t}+3\\ 3\mathrm{e}^{-t}-2\end{bmatrix}$$

(2) 当输入信号为负指数信号 $u(t)=e^{-t}\ (t\ge 0)$

$$\boldsymbol{x}(t)=L^{-1}\left[(sI-A)^{-1}\boldsymbol{x}_0\right]+L^{-1}\left[(sI-A)^{-1}BU(s)\right]=\mathrm{e}^{At}\boldsymbol{x}(0)+\int_0^t \mathrm{e}^{A(t-\tau)}B\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-2t}-\mathrm{e}^{-t}+4t\mathrm{e}^{-t}\\ -2\mathrm{e}^{-2t}+3\mathrm{e}^{-t}-4t\mathrm{e}^{-t}\end{bmatrix}$$

3-9 试求取下列连续系统状态方程在 T=0.1s 的离散化方程。

(1) $\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u$ (2) $\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & -2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}u$

解 采样周期 T=0.1s 较大，采用精确离散法

(1) 先求系统的状态转移矩阵。由于 A 为对角线矩阵，因此状态转移矩阵为

$$\Phi(t)=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & e^{t}\end{bmatrix}$$

因此，精确离散化方法离散化所得的系统模型各矩阵为

$$G(T)=\Phi(T)=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & e^{T}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & e^{0.1}\end{bmatrix}$$

$$H(T)=\int_0^T\Phi(t)\mathrm{d}tB=\int_0^T\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & e^{t}\end{bmatrix}\mathrm{d}t\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\e^{T}-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\e^{0.1}-1\end{bmatrix}$$

(2) 先求系统的状态转移矩阵。由求状态转移矩阵的方法，可求得本题的

$$\Phi(t)=\begin{bmatrix}1 & (1-e^{-2t})/2\\0 & e^{-2t}\end{bmatrix}$$

因此，精确离散化方法离散化所得的系统模型各矩阵为

$$G(T)=\Phi(T)=\begin{bmatrix}1 & (1-e^{-2T})/2\\0 & e^{-2T}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & (1-e^{-0.2})/2\\0 & e^{-0.2}\end{bmatrix}$$

$$H(T)=\int_0^T\Phi(t)\mathrm{d}tB=\int_0^T\Phi(t)\begin{bmatrix}1 & (1-e^{-2t})/2\\0 & e^{-2t}\end{bmatrix}\mathrm{d}t\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}6T-1+e^{-2T}\\2-2e^{-2T}\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}-0.4+e^{-0.2}\\2-2e^{-0.2}\end{bmatrix}$$

3-10 已知系统的状态方程为

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\begin{bmatrix}0.2 & 1\\ 0 & 0.2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(k)+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}(k)\qquad \boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}-1\\ 3\end{bmatrix}$$

其中输入信号$u_1(k)$和$u_2(k)$分别为阶跃信号和斜坡信号在采样周期为 0.2s时的采样值。试求系统的状态方程的解$\boldsymbol{x}(k)$。

解 (1) 直接法求解。先计算出G^k。由于G矩阵为约旦矩阵，则

$$G^k=\begin{bmatrix}\lambda^k & \Omega_k^1\lambda^{k-1}\\ 0 & \lambda^k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.2^k & 0.2^{k-1}k\\ 0 & 0.2^k\end{bmatrix}$$

又知

$$\boldsymbol{u}(k)=\begin{bmatrix}1\\ 0.2k\end{bmatrix}$$

因此有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(k)&=G^k\boldsymbol{x}(0)+\sum_{j=0}^{k-1}G^{k-j-1}H\boldsymbol{u}(j)\\ &=\begin{bmatrix}0.2^k & 0.2^{k-1}k\\ 0 & 0.2^k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ 3\end{bmatrix}+\sum_{j=0}^{k-1}\begin{bmatrix}0.2^{k-j-1} & 0.2^{k-j-2}(k-j-1)\\ 0 & 0.2^{k-j-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0.2j\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}-0.2^k+3\times0.2^{k-1}k\\ 3\times0.2^k\end{bmatrix}+\sum_{j=0}^{k-1}\begin{bmatrix}0.2^{k-j-1}+0.2^{k-j-1}(k-j-1)\\ 0.2^{k-j}j\end{bmatrix}\end{aligned}$$

(2) 用z变换法求解。先计算$(zI\text{-}G)^{-1}$:

$$\begin{aligned}(zI\text{-}G)^{-1}&=\frac{\mathrm{adj}(zI\text{-}G)}{|zI\text{-}G|}=\frac{1}{(z-0.2)^2}\begin{bmatrix}z-0.2 & 1\\ 0 & z-0.2\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{z-0.2} & \dfrac{1}{(z-0.2)^2}\\ 0 & \dfrac{1}{z-0.2}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

对系统输入，

$$\boldsymbol{u}(k)=\begin{bmatrix}1\\ 0.2k\end{bmatrix}$$

其拉氏变换为

$$U(z)=\begin{bmatrix}\dfrac{z}{z-1}\\[2mm] \dfrac{0.2z}{(z-1)^2}\end{bmatrix}$$

因此有

$$X(z)=(z\mathrm{I}\text{-}G)^{-1}[z\boldsymbol{x}(0)+HU(z)]$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{z-0.2} & \dfrac{1}{(z-0.2)^2}\\[2mm] 0 & \dfrac{1}{z-0.2}\end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}z+\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{z}{z-1}\\[2mm] \dfrac{0.2z}{(z-1)^2}\end{bmatrix}\right\}$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{z-0.2} & \dfrac{1}{(z-0.2)^2}\\[2mm] 0 & \dfrac{1}{z-0.2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-z+\dfrac{z}{z-1}\\[2mm] 3z+\dfrac{0.2z}{(z-1)^2}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{-z}{z-0.2}+\dfrac{z}{(z-0.2)(z-1)}+\dfrac{3z}{(z-0.2)^2}+\dfrac{0.2z}{(z-0.2)^2(z-1)^2}\\[2mm] \dfrac{3z}{z-0.2}+\dfrac{0.2z}{(z-0.2)(z-1)^2}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}(k)=Z^{-1}\{X(z)\}=Z^{-1}\begin{bmatrix}\dfrac{-z}{z-0.2}+\dfrac{z}{(z-0.2)(z-1)}+\dfrac{3z}{(z-0.2)^2}+\dfrac{0.2z}{(z-0.2)^2(z-1)^2}\\[2mm] \dfrac{3z}{z-0.2}+\dfrac{0.2z}{(z-0.2)(z-1)^2}\end{bmatrix}$$

$$=Z^{-1}\begin{bmatrix}\dfrac{-z}{z-0.2}+\dfrac{z}{0.8(z-1)}-\dfrac{z}{0.8(z-0.2)}+\dfrac{3z}{(z-0.2)^2}+\dfrac{0.2z}{0.8^2\times(z-0.2)^2}\\ +\dfrac{0.4z}{0.8^3\times(z-0.2)}+\dfrac{0.2z}{0.8^2\times(z-1)^2}+\dfrac{-0.4z}{0.8^3\times(z-1)}\\ \hdashline \dfrac{3z}{z-0.2}+\dfrac{0.2z}{0.8^2(z-0.2)}+\dfrac{0.2z}{0.8(z-1)^2}+\dfrac{-0.2z}{0.8^2(z-1)}\end{bmatrix}$$

$$=Z^{-1}\begin{bmatrix}\dfrac{-0.752z}{0.8^3\times(z-0.2)}+\dfrac{2.12z}{0.8^2\times(z-0.2)^2}+\dfrac{0.24z}{0.8^3\times(z-1)}+\dfrac{0.2z}{0.8^2\times(z-1)^2}\\ \hdashline \dfrac{2.12z}{0.8^2(z-0.2)}+\dfrac{0.2z}{0.8(z-1)^2}+\dfrac{-0.2z}{0.8^2(z-1)}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{-0.752\times0.2^k}{0.8^3}+\dfrac{2.12k\times0.2^k}{0.8^2}+\dfrac{0.24}{0.8^3}+\dfrac{0.2k}{0.8^2}\\ \hdashline \dfrac{2.12\times0.2^k}{0.8^2}+\dfrac{0.2k}{0.8}+\dfrac{-0.2}{0.8^2}\end{bmatrix}$$

3-11 设线性时变离散系统的状态方程为

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\begin{bmatrix}1 & 1-e^{-kT}\\ 0 & e^{-kT}\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(k)+\begin{bmatrix}1 & e^{-kT}\\ 0 & 1-e^{-kT}\end{bmatrix}\boldsymbol{u}(k) \qquad \boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

试求取在 $T=0.2s$ 且 $\boldsymbol{u}(k)=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\ (k\geq 0)$ 时该系统状态方程的解。

习题解答

4-1 判定如下系统的状态能控性和输出能控性。

(1) $\begin{cases}\dot{x}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}x\end{cases}$

(2) $\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}-3 & 1 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\\ 2 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}\end{cases}$

(3) $\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}\end{cases}$

解 (1) 采用代数判据。由状态能控性的代数判据有

$$\operatorname{rank}Q_c=\operatorname{rank}[B \quad AB]=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}=2=n$$

所以状态完全能控。由输出能控性的代数判据有

$$\operatorname{rank}[CB \quad CAB \quad D]=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\end{bmatrix}=1=m$$

所以输出完全能控。

(2) 由状态能控性的模态判据有，由于特征值-3 的约旦块对应的 B 的分块的最后一行为全零，则系统不完全能控。

由输出能控性的代数判据有

$$\operatorname{rank}[CB \quad CAB \quad CA^2B \quad D]=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}3 & -1 & \cdots\\ -1 & 1 & \cdots\end{bmatrix}=2=m$$

所以输出完全能控。

(3) 由状态能控性的模态判据有，由于特征值λ的 2 个约旦块对应的 B 的分块的最后一行为[a]和[c]相关，则系统不完全能控。

由输出能控性的代数判据有

$$[CB \quad CAB \quad CA^2B \quad D]=\begin{bmatrix}a & a\lambda & a\lambda^2 & 0\end{bmatrix}$$

因此，当 a 不为 0 时，输出完全能控。否则，输出不能控。

4-2 判定如下系统的状态能观性。

(1) $\begin{cases} \dot{x}=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}x \\ y=\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}x \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \dot{x}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -3 \end{bmatrix}x \\ y=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}x \end{cases}$

(3) $\begin{cases} \dot{x}=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}x \\ y=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}x \end{cases}$

解 (1) 采用代数判据。由状态能观性的代数判据有

$$\operatorname{rank}Q_o=\operatorname{rank}\begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}=2=n$$

所以状态完全观控。

(2) 采用代数判据。由状态能观性的代数判据有

$$\operatorname{rank}Q_o=\operatorname{rank}\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -4 & -7 & -2 \\ 4 & 4 & -1 \end{bmatrix}=3=n$$

所以状态完全观控。

(3) 由状态能观性的模态判据有，由于每个特征值仅有一个约旦块且所对应的 C 的分块的第一列非全为零，因此系统完全能观。

4-3　确定使下列系统为状态完全能控和状态完全能观的待定常数 α_i、β_i。

(1) $\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \beta_3 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} \end{cases}$

解 (1) 采用代数判据。由状态能控性、状态能观性的代数判据有

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1+\alpha_1 \\ 1 & \alpha_2 \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1+\alpha_1 \\ 0 & \alpha_2-\alpha_1-1 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \alpha_1 & 1-\alpha_2 \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha_1 & 1+\alpha_1-\alpha_2 \end{bmatrix}$$

因此系统状态完全能控、状态完全能观的条件都为 $1+\alpha_1-\alpha_2 \neq 0$

(2) 采用代数判据。由状态能控性、状态能观性的代数判据有

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & 2\beta_2 & 2\beta_1-8\beta_2 \\ \beta_1 & 1-3\beta_2 & -3\beta_1+14\beta_2 \\ \beta_2 & \beta_1-4\beta_2 & 1-4\beta_1+13\beta_2 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 0 & 0 & \beta_3 \\ 0 & \beta_3 & * \\ \beta_3 & * & * \end{bmatrix}$$

因此当 β_3 不为 0 时系统状态完全能观，否则不能观。当 $\beta_1=\beta_2=0$ 时，系统状态完全能控；更进一步若 $1-\beta_1+10\beta_2-27\beta_1\beta_2+25\beta_2^2+3\beta_1^2-14\beta_2\beta_1^2+6\beta_1\beta_2^2+2\beta_1^3+4\beta_2^3$ 不为 0 时，系统状态完全能控，否则不能控。

4-4 设连续被控系统的状态方程为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -4 & 0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

为了保持该连续系统的离散化系统的状态能控性,试确定采样周期 T 的选择。

解 由连续系统的 A 矩阵，可求得系统的特征值伟 2j 和-2j。根据离散化系统状态能控能观的条件，为保持连续系统的状态能控能观性，采样周期的选择满足

$$T\neq\frac{2k\pi}{\mathrm{Im}[\lambda_i-\lambda_j]}=\frac{k\pi}{2}\quad k=1,2,\ldots$$

4-5　试将下列系统按能控性进行结构分解。

(1) $\begin{cases} A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \end{bmatrix}, & b=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ C=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} A=\begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \end{bmatrix}, & b=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ C=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{cases}$

解：(1) 按 4.5.1 小节的计算方法，本题得到的能控性分解为

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c:cc} 1 & 0 & -6 \\ \hdashline 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right]\begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix}+\left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline 0 \\ 0 \end{array}\right]\boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \end{bmatrix}$$

其中能控子系统为 1 维子系统 $\tilde{x}_1$，完全不能控子系统为 2 维子系统 $\tilde{x}_2$，变换矩阵为

$$P_c=\left[\begin{array}{c:cc} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

(2) 按 4.5.1 小节的计算方法，本题得到的能控性分解为

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc:c} 0 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 2 \\ \hdashline 0 & 0 & -2 \end{array}\right]\begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix}+\left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \hline 0 \end{array}\right]\boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \end{bmatrix}$$

其中能控子系统为 2 维子系统 $\tilde{x}_1$，完全不能控子系统为 1 维子系统 $\tilde{x}_2$，变换矩阵为

$$P_c=\left[\begin{array}{cc:c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

4-6 试将下列系统按能观性进行结构分解。

(1) $\begin{cases} A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & -4 & 3\end{bmatrix}, \quad b=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \\ C=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\end{bmatrix}\end{cases}$ (2) $\begin{cases} A=\begin{bmatrix}-2 & 2 & -1\\ 0 & -2 & 0\\ 1 & -4 & 0\end{bmatrix}, \quad b=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \\ C=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\end{bmatrix}\end{cases}$

解： (1) 按 4.5.2 小节的计算方法，本题得到的能观性分解为

$$\begin{bmatrix}\dot{\tilde{x}}_1\\ \dot{\tilde{x}}_2\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc|c}0 & 1 & 0\\ -2 & 3 & 0\\ \hline 5 & -5 & 2\end{array}\right]\begin{bmatrix}\tilde{x}_1\\ \tilde{x}_2\end{bmatrix}+\left[\begin{array}{c}1\\ 2\\ \hline 0\end{array}\right]u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\tilde{x}}_1\\ \dot{\tilde{x}}_2\end{bmatrix}$$

其中能观子系统为 2 维子系统 $\tilde{x}_1$，完全不能观子系统为 1 维子系统 $\tilde{x}_2$，变换矩阵为

$$P_o^{-1}=\left[\begin{array}{ccc}1 & -1 & 1\\ 2 & -3 & 2\\ \hline 5 & 0 & 0\end{array}\right]$$

(2) 按 4.5.2 小节的计算方法，本题得到的能观性分解为

$$\begin{bmatrix}\dot{\tilde{x}}_1\\ \dot{\tilde{x}}_2\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc|c}0 & 1 & 0\\ -2 & -3 & 0\\ \hline -6 & -3 & -1\end{array}\right]\begin{bmatrix}\tilde{x}_1\\ \tilde{x}_2\end{bmatrix}+\left[\begin{array}{c}1\\ -1\\ \hline 0\end{array}\right]u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\tilde{x}}_1\\ \dot{\tilde{x}}_2\end{bmatrix}$$

其中能观子系统为 2 维子系统 $\tilde{x}_1$，完全不能观子系统为 1 维子系统 $\tilde{x}_2$，变换矩阵为

$$P_o^{-1}=\left[\begin{array}{ccc}1 & -1 & 1\\ -1 & 0 & -1\\ \hline 3 & 0 & 0\end{array}\right]$$

4-7　试指出下述系统的能控能观分解后的各子系统(特征值 λ_1、λ_2 和 λ_3 互异)。

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

解 对该题分析如下：由模态判据可知：

x_1-x_2子系统状态完全能控、状态不完全能观

x_3子系统状态完全能控、状态完全能观

x_4-x_5子系统状态不完全能控、状态完全能观

对状态不完全能观的x_1-x_2子系统可进一步分析可知，其能观性矩阵的秩为 1，则该 2 维子系统（子空间）应有 1 维能观，1 维不能观。由系统方程知，状态变量x_1不能观，x_2能观。

同样对状态不完全能控的x_4-x_5子系统可进一步分析可知，其能控性矩阵的秩为 1，则该 2 维子系统（子空间）应有 1 维能控，1 维不能控。由系统方程知，状态变量x_5不能控，x_4能控。

综上所述，x_2-x_3-x_4子系统状态完全能控能观，x_1子系统状态完全能控但不能观，x_5子系统状态完全不能控但能观。

4-8 试将下列系统按能控性和能观性进行结构分解。

(1) $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 2 & 3\\ -2 & 0 & 1\end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 2\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\end{bmatrix}$

(2) $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 2 & 3\\ -2 & 0 & 1\end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix}1\\ -2\\ 2\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}$

解 (1) 本题系统能控又能观，不能进行分解

(2) 按 4.5.3 小节的方法，本题系统得到的能控能观性分解为

$$\begin{bmatrix}\dot{\tilde{x}}_1\\ \dot{\tilde{x}}_2\\ \dot{\tilde{x}}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -5\\ -2 & 1 & -10\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{x}_1\\ \tilde{x}_2\\ \tilde{x}_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 0\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{x}_1\\ \tilde{x}_2\\ \tilde{x}_3\end{bmatrix}$$

其中能控但不能观子系统为 1 维子系统 $\tilde{x}_1$，能控又能观子系统为 1 维子系统 $\tilde{x}_2$，不能控又能观子系统为 1 维子系统 $\tilde{x}_3$，变换矩阵为

$$P_{co}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 5\\ 4 & -3 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

4-9 已知能控系统的状态方程 A,b 阵为

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$

试将该状态方程变换为能控规范形。

解 系统的能控性矩阵

$$Q_c=[B \quad AB]=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 7\end{bmatrix}$$

是非奇异矩阵,即该系统为状态完全能控,因此可以将其变换成能控规范形。

(1) 求能控规范 I 形。根据定理 4-24,系统变换矩阵可取为

$$T_{c1}=Q_c=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 7\end{bmatrix},\quad T_{c1}^{-1}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}7 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

因此,经变换$\boldsymbol{x}=T_{c1}\tilde{\boldsymbol{x}}$ 后所得的能控规范形的状态方程为

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}=T_{c1}^{-1}AT_{c1}\tilde{\boldsymbol{x}}+T_{c1}^{-1}B\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}0 & -10\\ 1 & 5\end{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{x}}+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$$

(2) 求能控规范 II 形。先求变换矩阵。根据定理 4-25,有

$$T_1=[0 \quad 1][B \quad AB]^{-1}=[0 \quad 1]\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 7\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{8} & \frac{1}{8}\end{bmatrix}$$

则变换矩阵为

$$T_{c2}^{-1}=\begin{bmatrix}T_1\\ T_1A\end{bmatrix}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & 6\end{bmatrix},\qquad T_{c2}=\begin{bmatrix}-6 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}$$

因此,经变换$\boldsymbol{x}=T_{c2}\tilde{\boldsymbol{x}}$ 后所得的能控规范形的状态方程为

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}=T_{c2}^{-1}AT_{c2}\tilde{\boldsymbol{x}}+T_{c2}^{-1}B\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -10 & 5\end{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{x}}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$$

4-10　已知能观系统的 A,b,C 阵为

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}$$

试将该状态空间模型变换为能观规范形。

解 因为系统的能观性矩阵

$$Q_o=\begin{bmatrix}C\\ CA\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$$

是非奇异矩阵,即该系统为状态完全能观,则可以将其变换成能观规范形。

(1) 求能观规范 I 形。根据定理 4-26,系统变换矩阵可取为

$$T_{o1}^{-1}=Q_o=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad T_{o1}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$$

因此,经变换$\boldsymbol{x}=T_{o1}\tilde{\boldsymbol{x}}$后所得的能控规范形的状态方程为

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}=T_{o1}^{-1}AT_{o1}\tilde{\boldsymbol{x}}+T_{o1}^{-1}B\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & 2\end{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{x}}+\begin{bmatrix}-1\\ 2\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$$
$$\boldsymbol{y}=CT_{o1}\tilde{\boldsymbol{x}}=[1\quad 0]\tilde{\boldsymbol{x}}$$

(2) 求能观规范 II 形。根据定理 4-27,先求变换矩阵，有

$$R_1=\begin{bmatrix}C\\ CA\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$

则变换矩阵

$$T_{o2}=\begin{bmatrix}R_1 & AR_1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}\qquad T_{o2}^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

因此,经变换$\boldsymbol{x}=T_{o2}\tilde{\boldsymbol{x}}$后所得的能观规范形的状态空间模型为

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}=T_{o2}^{-1}AT_{o2}\tilde{\boldsymbol{x}}+T_{o2}^{-1}B\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}0 & -2\\ 1 & 2\end{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{x}}+\begin{bmatrix}4\\ -1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$$
$$\boldsymbol{y}=CT_{o2}\tilde{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{x}}$$

□□□

4-11 线性系统的传递函数为

$$\frac{y(s)}{u(x)}=\frac{s+a}{s^3+10s^2+27s+18}$$

(1) a 取何值时,使系统 3 阶的状态空间实现或为不能控,或为不能观;
(2) 在上述 a 的取值下,求使系统为能控但不能观的 3 阶状态空间模型。

解 (1) 根据零极点相消定理，对 3 阶的传递函数实现的 3 阶状态空间实现或为不能控,或为不能观的充分必要条件为传递函数有零极点相消。对该传递函数其零点为-a，其极点分别为-1，-3，和-6。因此，若出现零极点相消，则 a 为 1，或 3，或 6。

(2) 在 a 为 1，或 3，或 6 时，3 阶的传递函数实现的 3 阶状态空间实现或为不能控,或为不能观。因此，若求取的是 3 阶的能控规范形实现，则必为不能观的。故，下述求取的如下能控规范 II 形是能控但不能观的。

$$\begin{cases}\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -18 & -27 & -10\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}a & 1 & 0\end{bmatrix}x\end{cases}$$

4-12 求下列传递函数阵的最小实现

(1) $W(s)=\begin{bmatrix}\frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+1}\\ \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+1}\end{bmatrix}$ (2) $W(s)=\begin{bmatrix}\frac{1}{s} & \frac{1}{s^2}\\ \frac{1}{s^2} & \frac{1}{s^3}\end{bmatrix}$

解 (1) 按照 4.7.2 节的方法，可求得本题传递函数阵的最小实现为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}\end{cases}$$

(2) 按照 4.7.2 节的方法，可求得本题传递函数阵的最小实现为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}\end{cases}$$

习题解答

5-1 判定下列二次型函数的定号性。

(1) $V(\boldsymbol{x})=2x_1^2+3x_2^2+x_3^2-2x_1x_2+2x_1x_3$ (2) $V(\boldsymbol{x})=x_1^2+2x_3^2-2x_1x_3+6x_2x_3$

(3) $V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^\tau Q\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^\tau\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&0\\1&0&2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$ (4) $V(\boldsymbol{x})=\begin{cases}x_1^2+x_2 & x_2\ge 0\\ x_1^2+x_2^4 & x_2<0\end{cases}$

解：(1) 本题二次型函数对应的对称权矩阵 P 为

$$P=\begin{bmatrix}2&-1&1\\-1&3&0\\1&0&1\end{bmatrix}$$

对实对称矩阵 P 作合同变换如下

$$P=\begin{bmatrix}2&-1&1\\-1&3&0\\1&0&1\end{bmatrix}\underset{\text{列:(1)-(3)}\to\text{(1)}}{\overset{\text{行:(1)-(3)}\to\text{(1)}}{\Longrightarrow}}\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&3&0\\0&0&1\end{bmatrix}\underset{\text{列:(2)+(1)}\to\text{(2)}}{\overset{\text{行:(2)+(1)}\to\text{(2)}}{\Longrightarrow}}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

因此该二次型函数及对应的对称权矩阵 P 为正定的。

(2) 本题二次型函数对应的对称权矩阵 P 为

$$P=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&0&3\\-1&3&2\end{bmatrix}$$

对实对称矩阵 P 作合同变换如下

$$P=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&0&3\\-1&3&2\end{bmatrix}\underset{\text{列:(1)+(3)}\to\text{(3)}}{\overset{\text{行:(1)+(3)}\to\text{(3)}}{\Longrightarrow}}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&3\\0&3&1\end{bmatrix}\underset{\text{列:(2)-3(3)}\to\text{(2)}}{\overset{\text{行:(2)-3(3)}\to\text{(2)}}{\Longrightarrow}}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-9&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

因此该二次型函数及对应的对称权矩阵 P 为不定的。

(3) 对实对称矩阵 P 作合同变换如下

$$P=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&0\\1&0&2\end{bmatrix}\underset{\text{列:(1)-(3)/2}\to\text{(1)}}{\overset{\text{行:(1)-(3)/2}\to\text{(1)}}{\Longrightarrow}}\begin{bmatrix}1/2&1&0\\1&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}\underset{\text{列:(2)-2(1)}\to\text{(2)}}{\overset{\text{行:(2)-2(1)}\to\text{(2)}}{\Longrightarrow}}\begin{bmatrix}1/2&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

因此该二次型函数及对应的对称权矩阵 P 为半正定的。

(4) 由于

$$V(\boldsymbol{x}):=\begin{cases} x_1^2+x_2=0 & x_1=x_2=0 \\ x_1^2+x_2>0 & x_1\neq 0, x_2\geq 0 \\ x_1^2+x_2>0 & x_1=0, x_2>0 \\ x_1^2+x_2^4>0 & x_2<0 \end{cases}$$

故该函数 V(x)为正定函数。

5-2 确定下列二次型函数中的待定系数的取值范围,从而使其成为正定的。

(1) $V(\boldsymbol{x})=x_1^2+2x_2^2+ax_3^2+2x_1x_2-2x_1x_3+2x_2x_3$

(2) $V(\boldsymbol{x})=ax_1^2+bx_2^2+cx_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3-4x_2x_3$

解：(1) 本题二次型函数对应的对称权矩阵 P 为

$$P=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ -1 & 1 & a\end{bmatrix}$$

对实对称矩阵 P 作合同变换如下

$$P=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ -1 & 1 & a\end{bmatrix}\underset{\text{列:(1)+(3)→(3)}}{\overset{\text{行:(1)+(3)→(3)}}{\Longrightarrow}}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 2\\ 0 & 2 & a-1\end{bmatrix}\underset{\text{列:(2)−(1)→(2)}}{\overset{\text{行:(2)−(1)→(2)}}{\Longrightarrow}}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 2 & a-1\end{bmatrix}\underset{\text{列:(3)−2(2)→(3)}}{\overset{\text{行:(3)−2(2)→(3)}}{\Longrightarrow}}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & a-5\end{bmatrix}$$

因此该二次型函数及对应的对称权矩阵 P 为正定的条件为 $a>5$。

(2) 本题二次型函数对应的对称权矩阵 P 为

$$P=\begin{bmatrix}a & 1 & 1\\ 1 & b & -2\\ 1 & -2 & c\end{bmatrix}$$

根据赛尔维斯特准则知，由于

$$\Delta_1=a,\qquad \Delta_2=\begin{vmatrix}a & 1\\ 1 & b\end{vmatrix}=ab-1,\qquad \Delta_3=\begin{vmatrix}a & 1 & 1\\ 1 & b & -2\\ 1 & -2 & c\end{vmatrix}=abc-4a-b-c-4$$

因此，该二次型函数及对应的对称权矩阵 P 为正定的条件为

$$a>0\qquad ab-1>0\qquad abc-4a-b-c-4>0$$

5-3 判定下列矩阵的正定性。

(1) $\begin{bmatrix} \dfrac{a_1^2}{2\lambda_1} & \dfrac{a_1a_2}{\lambda_1} \\ \dfrac{a_1a_2}{\lambda_1} & a_2^2 \end{bmatrix} \quad (a_1,a_2,\lambda_1 \neq 0)$ (2) $\begin{bmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 \\ a_1a_2 & a_2^2 & a_2a_3 \\ a_1a_3 & a_2a_3 & a_3^2 \end{bmatrix} \quad (a_1,a_2,a_3 \neq 0)$

解 (1) 对实对称矩阵 P 作合同变换如下

$$P=\begin{bmatrix} \dfrac{a_1^2}{2\lambda_1} & \dfrac{a_1a_2}{\lambda_1} \\ \dfrac{a_1a_2}{\lambda_1} & a_2^2 \end{bmatrix} \underset{\text{列:}(1)*\lambda_1/a_1\to(1)}{\overset{\text{行:}(1)*\lambda_1/a_1\to(1)}{\Longrightarrow}} \begin{bmatrix} \dfrac{\lambda_1}{2} & a_2 \\ a_2 & a_2^2 \end{bmatrix} \underset{\text{列:}(2)/a_2\to(2)}{\overset{\text{行:}(2)/a_2\to(2)}{\Longrightarrow}} \begin{bmatrix} \dfrac{\lambda_1}{2} & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{\text{列:}(1)-(2)\to(1)}{\overset{\text{行:}(1)-(2)\to(1)}{\Longrightarrow}} \begin{bmatrix} \dfrac{\lambda_1}{2}-1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

因此,当 λ_1>2 该二次型函数及对应的对称权矩阵 P 为正定;当 λ_1=2 该二次型函数及对应的对称权矩阵 P 为半正定;当 λ_1<2 该二次型函数及对应的对称权矩阵 P 为不定。

(2) 对实对称矩阵 P 作合同变换如下

$$P=\begin{bmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 \\ a_1a_2 & a_2^2 & a_2a_3 \\ a_1a_3 & a_2a_3 & a_3^2 \end{bmatrix} \underset{\text{列:}(2)-(1)*a_2/a_1\to(2)}{\overset{\text{行:}(2)-(1)*a_2/a_1\to(2)}{\Longrightarrow}} \begin{bmatrix} a_1^2 & 0 & a_1a_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ a_1a_3 & 0 & a_3^2 \end{bmatrix} \underset{\text{列:}(3)-(1)*a_3/a_1\to(3)}{\overset{\text{行:}(3)-(1)*a_3/a_1\to(3)}{\Longrightarrow}} \begin{bmatrix} a_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

因此,该二次型函数及对应的对称权矩阵 P 为半正定。

5-4 设有二阶非线性系统为

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\sin x_1 - x_2\end{cases}$$

(1) 求出所有的平衡态;

(2) 求出各平衡态处的线性化状态方程,并用李雅普诺夫第一法判断是否为渐近稳定。

解 (1) 对本题，平衡态为代数方程组

$$\begin{cases}x_2 = 0 \\ -\sin x_1 - x_2 = 0\end{cases}$$

的解,即下述状态空间中的状态为其孤立平衡态

$$\boldsymbol{x}_{e,k} = \begin{bmatrix}\pm k\pi \\ 0\end{bmatrix} \quad k = 0,1,2,3,\dots$$

(2) 由线性化方法，各平衡态处的线性化状态方程的系统矩阵 A 为

$$A = \left.\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}^{\tau}}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_e} = \begin{bmatrix}0 & 1 \\ -\cos x_1 & -1\end{bmatrix}_{x_1=\pm k\pi} == \begin{bmatrix}0 & 1 \\ (-1)^{k+1} & -1\end{bmatrix}$$

线性化系统的特征多项式为$s^2+s+(-1)^k$,因此，只有平衡态 $\boldsymbol{x}_{e,k} = \begin{bmatrix}\pm k\pi \\ 0\end{bmatrix} \quad k = 0,2,4,\dots$ 为渐近稳定的，而平衡态 $\boldsymbol{x}_{e,k} = \begin{bmatrix}\pm k\pi \\ 0\end{bmatrix} \quad k = 1,3,5,\dots$ 为不稳定的。

5-5 设系统的运动方程式为

$$\ddot{y}+(1-|y|)\dot{y}+y=0$$

试确定其渐近稳定的条件。

解：令 $x_1=y, x_2=\dot{y}$，则状态方程为

$$\begin{cases}\dot{x}_1=\dot{y}=x_2\\ \dot{x}_2=\ddot{y}=-(1-|x_1|)x_2-x_1\end{cases}$$

原点是唯一的平衡态，初选

$$V(\mathbf{x})=x_1^2+x_2^2>0$$

则有

$$\dot{V}(\mathbf{x})=-2x_2^2(1-|x_1|)$$

当$|x_1|<1$，$\dot{V}(\mathbf{x})\le 0$。则在原点平衡态的这个邻域范围内，系统是稳定的。进一步，由于$\dot{V}(\mathbf{x})\le 0$对所有非零状态轨迹不能恒为零，因此该平衡态为渐近稳定的。

5-6 试选择适当的李雅普诺夫函数,并利用该函数判定下列非线性系统的稳定性。

(1) $\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_1^2 x_2\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\sin x_1 - x_2\end{cases}$

(3) $\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -a(1+x_2)^2 x_2 - x_1, \qquad a > 0\end{cases}$

解：(1) 显然,原点是给定系统的惟一平衡态,如果选择正定函数 $V(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2$ 为李雅普诺夫函数,那么沿任意轨迹 $\boldsymbol{x}(t)$,$V(\boldsymbol{x})$对时间的全导数

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = -2x_1^2 x_2^2$$

是半负定函数，并且由于 $\dot{V}(\boldsymbol{x})$ 对所有非零初始状态出发的状态轨迹非恒为零，因此，该原点平衡态是渐近稳定的。

(2) 显然,原点是给定系统的平衡态。下面仅讨论原点平衡态的稳定性问题，其它平衡态可类似地进行分析。如果选择正定函数 $V(\boldsymbol{x}) = \sin^2 x_1 + x_2^2 \cos x_1$ 为李雅普诺夫函数,那么沿任意轨迹 $\boldsymbol{x}(t)$,$V(\boldsymbol{x})$对时间的全导数

$$\begin{aligned}\dot{V}(\boldsymbol{x}) &= 2(\cos x_1)(\sin x_1)\dot{x}_1 + 2x_2(\cos x_1)\dot{x}_2 + 2x_2^2(\sin x_1)\dot{x}_1 \\ &= 2(\cos x_1)(\sin x_1)x_2 - 2x_2(\cos x_1)(\sin x_1) - 2x_2^2(\cos x_1) + 2x_2^3(\sin x_1) \\ &= -2x_2^2\left[\cos x_1 - x_2(\sin x_1)\right]\end{aligned}$$

在原点的一个充分小的邻域内，$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = -2x_2^2 +$ 高阶项，因此 $\dot{V}(\boldsymbol{x})$ 为负定，故系统原点处的平衡态渐近稳定。

(3) 原点为系统的平衡态，选李氏函数为：

$$V(\mathbf{x}, t) = x_1^2 + x_2^2$$

则　$\dot{V}(\mathbf{x}, t) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = -2a(1+x_2)^2 x_2^2$ 为半正定，原点平衡态为稳定的。更进一步，由于在原点的充分小的邻域内，当　$x_1 \neq 0, x_2 = 0$ 时，$\dot{V}(\mathbf{x}, t) = 0$，但此时 $\dot{x}_2 = x_1 \neq 0$，故 x_2 和 $\dot{V}(\boldsymbol{x}, t)$ 都不能保持恒定为零。因此，原点平衡态为渐近稳定的。

5-7 设系统的状态方程为

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 - a x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 = -x_1 - a x_2(x_1^2 + x_2^2)\end{cases}$$

试求其 V 函数,并在 $a>0, a<0$ 和 $a=0$ 时,分析平衡点处的系统稳定性。

解) 设选择正定函数 $V(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2$ 为李雅普诺夫函数,那么沿任意轨迹 $\boldsymbol{x}(t)$,$V(\boldsymbol{x})$对时间的全导数

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = -2a(x_1^2 + x_2^2)^2$$

因此，当 $a>0$，$\dot{V}(\boldsymbol{x})$ 是负定函数，该原点平衡态是渐近稳定的；当 $a<0$，$\dot{V}(\boldsymbol{x})$ 是正定函数，该原点平衡态是不稳定的；当 $a=0$，$\dot{V}(\boldsymbol{x})$ 恒为 0，该原点平衡态是稳定的，但非渐近稳定的。

5-8 用李雅普诺夫方法判定下列线性定常系统的稳定性。

(1) $\dot{x}=\begin{bmatrix}2 & 6\\ -1 & -5\end{bmatrix}x$　　　　(2) $\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -6 & -5\end{bmatrix}x$

解 (1) 设选取的李雅普诺夫函数$V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^T P\boldsymbol{x}$,其中 P 为对称矩阵。将 P 代入李雅普诺夫方程,可得

$$\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{12} & p_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 6\\ -1 & -5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & -1\\ 6 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{12} & p_{22}\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

解出p_{11}、p_{12}和p_{22},得

$$P=\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{12} & p_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2.3750 & 0.7083\\ 0.7083 & -0.0417\end{bmatrix}$$

经检验，对称矩阵 P 不为正定矩阵，因此该线性系统不是渐近稳定的。

(2) 设选取的李雅普诺夫函数$V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^T P\boldsymbol{x}$,其中 P 为对称矩阵。将 P 代入李雅普诺夫方程,可得

$$\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{12} & p_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ -6 & -5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -6\\ 1 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{12} & p_{22}\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

解出p_{11}、p_{12}和p_{22},得

$$P=\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{12} & p_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.5333 & -0.5\\ -0.5 & 0.7\end{bmatrix}$$

经检验，对称矩阵 P 为正定矩阵，因此该线性系统是渐近稳定的。

5-9 线性时变系统的状态方程为。

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = -\dfrac{1}{t}x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -tx_1 - \dfrac{1}{2}x_2\end{cases}$$

分析系统在平衡点处的稳定性如何？并求V函数。

解：原点是系统的一个平衡态，由

$$\dot{P}(t) = -A^T(t)P(t) - P(t)A(t) - Q(t)$$

其中 $A(t) = \begin{bmatrix} -1/t & 1 \\ -t & -1/2 \end{bmatrix}$， $Q(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

解矩阵P得 $P(t) = \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$。 根据根据赛尔维斯特准则有：

$$\Delta_1 = t > 0, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = t > 0$$

该系统在平衡点处是大范围渐近稳定的。其李雅普诺夫函数为 $V(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{x}^T(t)P(t)\boldsymbol{x}(t) = tx_1^2 + x_2^2$。

5-10 用李雅普诺夫方法判定下列线性定常离散系统的稳定性。

(1) $\boldsymbol{x}(k+1)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -0.16 & -1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(k)$　　(2) $\boldsymbol{x}(k+1)=\begin{bmatrix}1 & 4 & 0\\ -3 & -2 & -3\\ 2 & 0 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(k)$

(3) $\boldsymbol{x}(k+1)=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & \dfrac{k}{2} & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(k),\qquad k>0$

解 (1) 设 P 为对称矩阵，由李雅普诺夫代数方程:

$$\begin{bmatrix}0 & -0.16\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{12} & p_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ -0.16 & -1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{12} & p_{22}\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

求解上述方程,解出p_{11}、p_{12}和p_{22},得

$$P=\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{12} & p_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5.0981 & -3.5328\\ -3.5328 & 4.0981\end{bmatrix}$$

经检验对称矩阵 P 为正定的,因此,系统为大范围渐近稳定的。

(2) 设 P 为对称矩阵，由李雅普诺夫代数方程:

$$\begin{bmatrix}1 & -3 & 2\\ 4 & -2 & 0\\ 0 & -3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12} & p_{13}\\ p_{12} & p_{22} & p_{23}\\ p_{13} & p_{23} & p_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 4 & 0\\ -3 & -2 & -3\\ 2 & 0 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12} & p_{13}\\ p_{12} & p_{22} & p_{23}\\ p_{13} & p_{23} & p_{33}\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

求解上述方程,解出 P,得

$$P=\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12} & p_{13}\\ p_{12} & p_{22} & p_{23}\\ p_{13} & p_{23} & p_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.3403 & 0.1188 & 0.2694\\ 0.1188 & -0.1219 & -0.1219\\ 0.2694 & -0.1219 & -0.3614\end{bmatrix}$$

经检验对称矩阵 P 不为正定的,因此,系统非渐近稳定的。

(3) 由李雅普诺夫代数方程 $G^TPG-P=-Q$,有

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{k}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{k}{2} & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

解出矩阵 $$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k^2+4}{k^2-4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{k^2-4} \end{bmatrix}$$

为使 P 为正定矩阵，根据根据赛尔维斯特准则，其充要条件是

$$k^2 - 4 < 0$$

即 $-2 < k < 2$，可保证系统在原点处是大范围渐近稳定。

5-11 用克拉索夫斯基法判别下述非线性系统的稳定性。

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = -x_1 - x_2 - x_1^3 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 - x_2^3\end{cases}$$

解 由于 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$连续可导且

$$\boldsymbol{f}^{\tau}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (-x_1 - x_2 - x_1^3)^2 + (x_1 - x_2 - x_2^3)^2 > 0$$

可取作李雅普诺夫函数,因此,有

$$J(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}^{\tau}} = \begin{bmatrix} -1-3x_1^2 & -1 \\ 1 & -1-3x_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{J}(\boldsymbol{x}) = J(\boldsymbol{x}) + J^{\tau}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} -2-6x_1^2 & 0 \\ 0 & -2-6x_2^2 \end{bmatrix} < 0$$

由矩阵函数 $\hat{J}(\mathbf{x})$ 负定,所以由克拉索夫斯基定理可知,平衡态$\boldsymbol{x}_e$=0 是渐近稳定的。

5-12 用克拉索夫斯基法确定下述系统为大范围渐近稳定时,参数 a 和 b 的取值范围。

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = ax_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + bx_2^5\end{cases}$$

解 由于 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$连续可导且

$$\boldsymbol{f}^{\tau}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (ax_1 + x_2)^2 + (x_1 - x_2 + bx_2^5)^2$$

因此当 $b\neq0$ 时,$\boldsymbol{f}^{\tau}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 正定;当 b=0 时,只要 $a\neq$-1,$\boldsymbol{f}^{\tau}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 正定.此时,上述 $\boldsymbol{f}^{\tau}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 可取作李雅普诺夫函数,因此,有

$$J(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}^{\tau}} = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & -1 + 5bx_2^4 \end{bmatrix}$$

$$\hat{J}(\boldsymbol{x}) = J(\boldsymbol{x}) + J^{\tau}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 2a & 2 \\ 2 & -2 + 10bx_2^4 \end{bmatrix} < 0$$

因此矩阵函数 $\hat{J}(\mathbf{x})$ 负定的条件为a<0, $4a(-1+5bx_2^4)-4>0$.所以综上所述,由克拉索夫斯基定理可知,平衡态$\boldsymbol{x}_e$=0 是渐近稳定的条件为:

$$b\neq0,\ a<0,\ 4a(-1+5bx_2^4)-4>0.$$

或

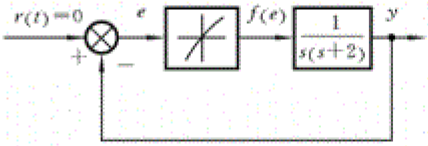
$$b=0,\ a<-1$$

5-13 用变量梯度法构成下述非线性系统的李雅普诺夫函数,并判别稳定性。

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 2x_1^5 x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \end{cases}$$

参见 5.4.2 小节的例题

5-14 用阿依捷尔曼法判别结构如题图 5-14 所示的非线性系统的稳定性。



题图 5-14

参见 5.4.3 小节的例题

习题解答

6-1 对线性系统

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = C\boldsymbol{x} + D\boldsymbol{u} \end{cases}$$

作状态反馈 $\boldsymbol{u} = -K\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}$,试推导出闭环系统的状态空间模型和传递函数。

解 将反馈律代入状态空间模型，则有

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}} &= A\boldsymbol{x} + B(-K\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}) \\ &= (A - BK)\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{y} &= C\boldsymbol{x} + D(-K\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}) \\ &= (C - DK)\boldsymbol{x} + D\boldsymbol{v} \end{aligned}$$

因此，闭环系统的状态空间模型和传递函数分别为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = (A - BK)\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{y} = (C - DK)\boldsymbol{x} + D\boldsymbol{v} \end{cases}$$

$$G_K(s) = (C - DK)(sI - A + BK)^{-1}B + D$$

6-2 对线性系统

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = C\boldsymbol{x} + D\boldsymbol{u} \end{cases}$$

作输出反馈 $\boldsymbol{u}$=-$H\boldsymbol{y}$+$\boldsymbol{v}$,试推导出闭环系统的状态空间模型和传递函数。

解 将反馈律代入状态空间模型的输出方程，则有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y} &= C\boldsymbol{x} + D(-H\boldsymbol{y} + \boldsymbol{v}) \\ &= C\boldsymbol{x} - DH\boldsymbol{y} + D\boldsymbol{v} \end{aligned}$$

即

$$(I + DH)\boldsymbol{y} = C\boldsymbol{x} + D\boldsymbol{v}$$

因此，当 $(I + DH)$ 可逆时，闭环系统输出方程为

$$\boldsymbol{y} = (I + DH)^{-1}C\boldsymbol{x} + (I + DH)^{-1}D\boldsymbol{v}$$

将反馈律和上述输出方程代入状态方程，则有

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}} &= A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u} \\ &= A\boldsymbol{x} + B(-H\boldsymbol{y} + \boldsymbol{v}) \\ &= [A - BH(I + DH)^{-1}C]\boldsymbol{x} + [BH(I + DH)^{-1}D + B]\boldsymbol{v} \end{aligned}$$

当闭环系统的状态空间模型和传递函数分别为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = [A - BH(I + DH)^{-1}C]\boldsymbol{x} + [BH(I + DH)^{-1}D + B]\boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{y} = (I + DH)^{-1}C\boldsymbol{x} + (I + DH)^{-1}D\boldsymbol{v} \end{cases}$$

$$G_H(s) = (I + DH)^{-1}C[sI - A + BH(I + DH)^{-1}C]^{-1}[BH(I + DH)^{-1}D + B] + (I + DH)^{-1}D$$

6-3 给定被控系统的状态方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$$

试确定一个状态反馈阵 K,使闭环系统的极点配置在-2±j 处。

解 1) 判断系统的能控性。开环系统的能控性矩阵为

$$[B \quad AB]=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 3\end{bmatrix}$$

则开环系统为状态能控,可以进行任意极点配置。

2) 求能控规范 II 形:

$$T_1=[0 \quad 1][B \quad AB]^{-1}=\frac{1}{3}[0 \quad 1]$$

$$T_{c2}^{-1}=\begin{bmatrix}T_1\\ T_1A\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 3 & 1\end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}=T_{c2}^{-1}AT_{c2}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 5 & 2\end{bmatrix},\quad \tilde{B}=T_{c2}^{-1}B=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$$

因此系统开环特征多项式$f(s)=s^2$-2s-5,而由期望的闭环极点-2±j所确定的期望的闭环特征多项式$f(s)=s^2$+4s+5,得系统的状态反馈阵K为

$$K=\tilde{K}T_{c2}^{-1}=[a_2^*\text{-}a_2 \quad a_1^*\text{-}a_1]T_{c2}^{-1}=[5\text{-}(\text{-}5) \quad 4\text{-}(\text{-}2)]\times\frac{1}{3}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{18}{3} & \frac{16}{3}\end{bmatrix}$$

则在反馈律 $\boldsymbol{u}$=-K**x**+**v** 下的闭环系统的状态方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}-5 & -10/3\\ 3 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}v$$

通过验算可知,该闭环系统的极点为-2±j,达到设计要求。

6-4 给定被控系统的状态方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}2&1&0&0\\0&2&0&0\\0&0&-2&0\\0&0&0&-2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$$

问能否确定一个状态反馈阵 K,使闭环系统的极点分别配置在下列位置:

(1) s_1=-2, s_2=-2, s_3=-2, s_4=-2
(2) s_1=-3, s_2=-3, s_3=-3, s_4=-2
(3) s_1=-3, s_2=-3, s_3=-3, s_4=-3

解： 由于开环系统模型为约旦规范形，因此由模态判据知，该系统特征值 2 的子系统完全能控，因此 2 重的开环极点 2 可以任意配置；而特征值-2 对应的 2 维子系统不完全能控，但由于其对应的 2 维子系统的能控性矩阵的秩为 1，故 2 重的开环极点-2 应有一个可以任意配置，一个不能配置（不能控）。

根据上述分析结果，可以判定如下：

(1) s_1=-2, s_2=-2, s_3=-2, s_4=-2

由于期望闭环极点有一个为-2，因此，可以将可任意配置的 3 个极点配置为-2，而一个不能配置的极点也为-2，符合期望极点要求。故，应存在状态反馈律将闭环极点配置在期望位置上。

(2) s_1=-3, s_2=-3, s_3=-3, s_4=-2

由于期望闭环极点有一个为-2，因此，可以将可任意配置的 3 个极点配置为-3，而一个不能配置的极点还为-2，符合期望极点要求。故，应存在状态反馈律将闭环极点配置在期望位置上。

(3) s_1=-3, s_2=-3, s_3=-3, s_4=-3

由于期望闭环极点没有-2 极点，因此，不存在状态反馈律将不能配置的极点-2 还为配置在期望的 4 个极点的任何一个上。

6-5 判断下述系统是否能镇定，若能镇定，试设计一个状态反馈使系统成为稳定的。

(1) $\dot{x}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u$ (2) $\dot{x}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & -2 & 0\\ -1 & 0 & 2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u$

解: (1) 先对系统进行能控性分解

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}B & AB\end{bmatrix}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 4\end{bmatrix}=2<n=3$$

表明系统不完全能控,取能控性分解变换矩阵 P_c 为

$$P_c=\left[\begin{array}{cc:c}0 & 0 & 4\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 0\end{array}\right],\qquad P_c^{-1}=\begin{bmatrix}0 & -3 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0.25 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

于是可得

$$\tilde{A}=P_c^{-1}AP_c=\left[\begin{array}{cc:c}0 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 0\\ \hdashline 0 & 0 & -1\end{array}\right];\qquad \tilde{B}=P_c^{-1}B=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

原系统的能控性分解为

$$\begin{bmatrix}\dot{\tilde{x}}_1\\ \dot{\tilde{x}}_2\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc:c}0 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 0\\ \hdashline 0 & 0 & -1\end{array}\right]\begin{bmatrix}\tilde{x}_1\\ \tilde{x}_2\end{bmatrix}+\left[\begin{array}{c}1\\0\\ \hline 0\end{array}\right]u$$

由于该系统的不能控部分只有一个具有负实部的极点-1,因此不能控子系统是稳定的,系统是可镇定的。

再对能控部分进行极点配置。由上可知,系统的能控部分为

$$\tilde{A}_{11}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix},\qquad \tilde{B}_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

设 A^* 为具有期望特征值的闭环系统矩阵，且 $A^*=\tilde{A}_{11}-\tilde{B}_1\tilde{K}_1$,本例中设期望的闭环极点取为-3 和-2，因此有

$$A^*=\tilde{A}_{11}-\tilde{B}_1\tilde{K}_1=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1 & k_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-k_1 & 1-k_2\\ 1 & 3\end{bmatrix}$$

显然,当反馈阵 $\tilde{K}_1$ 为

$$\tilde{K}_1=\begin{bmatrix}k_1 & k_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 31\end{bmatrix}$$

此时,闭环极点为-3 和-2。

求取原系统的状态反馈镇定矩阵 K

$$K=\begin{bmatrix}\tilde{K}_1 & 0\end{bmatrix}P_c^{-1}=\begin{bmatrix}8 & 31 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -3 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0.25 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 7 & 8\end{bmatrix}$$

经检验,状态反馈后得到的如下闭环系统矩阵为镇定的。

$$A-BK=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -6 & -5\end{bmatrix}$$

(2) 先对系统进行能控性分解

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & -2 & 0\\ -1 & 0 & 2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u$$

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}B & AB\end{bmatrix}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}0 & -1 & -3\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 5\end{bmatrix}=2<n=3$$

表明系统不完全能控,取能控性分解变换矩阵 P_c 为

$$P_c=\left[\begin{array}{cc|c}0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 3\\ 1 & 2 & 0\end{array}\right],\qquad P_c^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0\\ 0. & 1/3 & 0\end{bmatrix}$$

于是可得

$$\tilde{A}=P_c^{-1}AP_c=\left[\begin{array}{cc|c}0 & -1 & 0\\ 1 & 3 & 0\\ \hline 0 & 0 & -2\end{array}\right];\qquad \tilde{B}=P_c^{-1}B=\left[\begin{array}{c}1\\0\\ \hline 0\end{array}\right]$$

原系统的能控性分解为

$$\begin{bmatrix}\dot{\tilde{x}}_1\\ \dot{\tilde{x}}_2\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc|c}0 & -1 & 0\\ 1 & 3 & 0\\ \hline 0 & 0 & -2\end{array}\right]\begin{bmatrix}\tilde{x}_1\\ \tilde{x}_2\end{bmatrix}+\left[\begin{array}{c}1\\0\\ \hline 0\end{array}\right]u$$

由于该系统的不能控部分只有一个具有负实部的极点-1,因此不能控子系统是稳定的,系统是可镇定的。

(2) 对能控部分进行极点配置。由上可知,系统的能控部分为

$$\tilde{A}_{11}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 3\end{bmatrix},\qquad \tilde{B}_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

设 A^* 为具有期望特征值的闭环系统矩阵，且 $A^*=\tilde{A}_{11}-\tilde{B}_1\tilde{K}_1$,本例中设期望的闭环极点取为-1 和-2，因此有

$$A^*=\tilde{A}_{11}-\tilde{B}_1\tilde{K}_1=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1 & k_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-k_1 & -1-k_2\\ 1 & 3\end{bmatrix}$$

显然,当反馈阵 $\tilde{K}_1$ 为

$$\tilde{K}_1=\begin{bmatrix}k_1 & k_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 19\end{bmatrix}$$

此时,闭环极点为-1 和-2。

(3) 求取原系统的状态反馈镇定矩阵 K

$$K=\begin{bmatrix}\tilde{K}_1 & 0\end{bmatrix}P_c^{-1}=\begin{bmatrix}6 & 19 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0\\ 0. & 1/3 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7 & 0 & 6\end{bmatrix}$$

经检验,状态反馈后得到的如下闭环系统矩阵为镇定的。

$$A-BK=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & -2 & 0\\ 6 & 0 & -4\end{bmatrix}$$

6-6 已知系统状态空间模型的各矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

试判断该系统的输出反馈可镇定性。

解 设输出反馈$u=[h_1 \quad h_2]y$,因此闭环系统的系统矩阵为

$$\begin{aligned}A-BHC&=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}[h_1 \quad h_2]\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -h_1 & 0 & -1-h_2\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}\end{aligned}$$

其特征多项式为$s^3+h_1s-(1+h_2)$。由劳斯判据可知，该系统不可能通过输出反馈进行镇定。

本题系统为能控能观的，根据定理 6-5，其输出反馈可镇定性。

6-7 已知待解耦的传递函数矩阵为。

$$G_p(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s} & -\dfrac{1}{s+1}\\ \dfrac{s-1}{s(s+1)} & \dfrac{1}{s+1}\end{bmatrix}$$

试作一前馈补偿器 $G_c(s)$ 使系统解耦，且其传递函数阵为

$$G(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{(s+1)^2} & 0\\ 0 & \dfrac{1}{(s+1)(s+2)}\end{bmatrix}$$

解 根据 6.4.1 节的方法，前馈补偿器 $G_c(s)$ 为

$$\begin{aligned}G_c(s)&=G_p^{-1}(s)G(s)[I-G(s)]^{-1}\\
&=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s} & -\dfrac{1}{s+1}\\ \dfrac{s-1}{s(s+1)} & \dfrac{1}{s+1}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\dfrac{1}{(s+1)^2} & 0\\ 0 & \dfrac{1}{(s+1)(s+2)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1-\dfrac{1}{(s+1)^2} & 0\\ 0 & 1-\dfrac{1}{(s+1)(s+2)}\end{bmatrix}\\
&=\frac{(s+1)}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -\dfrac{s-1}{s} & \dfrac{s+1}{s}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{1}{(s+1)^2-1} & 0\\ 0 & \dfrac{1}{(s+1)(s+2)-1}\end{bmatrix}\\
&=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\dfrac{s+1}{s(s+2)} & \dfrac{(s+1)}{s^2+3s+1}\\ -\dfrac{s^2-1}{s^2(s+2)} & \dfrac{(s+1)^2}{s(s^2+3s+1)}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

6-8 已知状态空间模型的各矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}-2&1&0\\0&-2&0\\0&0&4\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\\1&0\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}$$

试判断该系统能否实现状态反馈解耦。若能，求其积分型解耦系统。

解：由于

$$C_1B=[1\quad 0],$$
$$C_2B=[0\quad 0],C_2^TAB=[0\quad 1],$$

可知

$$l_1=0,\quad l_2=1。$$

从而

$$E\stackrel{\Delta}{=}\begin{bmatrix}C_1B\\C_2AB\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},$$
$$F\stackrel{\Delta}{=}\begin{bmatrix}C_1A\\C_2A^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&4\\4&-4&0\end{bmatrix}$$

状态反馈解耦控制律的反馈矩阵与前馈矩阵为

$$K=E^{-1}F=\begin{bmatrix}0&0&-4\\-4&4&0\end{bmatrix},$$
$$H=E^{-1}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

因此，状态反馈解耦控制闭环系统传递函数阵为

$$G_d(s)=C(sI-A+BK)^{-1}BH=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s+2&-1&0\\4&s-2&0\\0&0&s\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0&0\\0&1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{s}&0\\0&\frac{1}{s^2}\end{bmatrix}$$

6-9 给定被控系统的状态空间模型为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-1 & -2 & -2\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}x$$

试确定一个状态观测器,要求将其极点配置在-2,-2 和-3 处。

解 (1) 用方法一求解。利用对偶性方法,求得原系统的对偶系统为

$$\Sigma(\tilde{A},\tilde{B},\tilde{C})=\Sigma\left(\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ -2 & -1 & 0\\ -2 & 1 & -1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}2 & 0 & 1\end{bmatrix}\right)$$

根据 6.2 节进行极点配置方法，可计算出对偶系统的状态反馈阵 K 为

$$K=\begin{bmatrix}6 & -2 & 1\end{bmatrix}$$

即所求状态观测器的反馈阵

$$G=K^{\tau}=\begin{bmatrix}6 & -2 & 1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

则相应状态观测器为

$$\dot{\hat{x}}=\begin{bmatrix}-7 & -8 & -2\\ 2 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -1\end{bmatrix}\hat{x}+\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}u+\begin{bmatrix}6\\-2\\1\end{bmatrix}(y-\hat{y})$$

$$\hat{y}=[1 \quad 1 \quad 0]\hat{x}$$

6-10 给定被控系统的状态空间模型为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}2\\ 1\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}x$$

试设计一个降维状态观测器,要求将观测器的极点配置在-3 和-5 处。

解 (1) 由于输出 C 已为规范形式，则系统各矩阵可分解为如下形式

$$A=\left[\begin{array}{cc:c}1 & 2 & 0\\ 3 & -1 & 1\\ \hdashline 0 & 2 & 0\end{array}\right]\qquad B=\left[\begin{array}{c}2\\ 1\\ \hline 1\end{array}\right]$$

$$C=\left[\begin{array}{cc:c}0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

(2) 因此,降维状态观测器的特征多项式为

$$f(s)=|sI-F|=\left|sI-\left(\tilde{A}_{11}-L\tilde{A}_{21}\right)\right|=\left|sI-\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}L_1\\ L_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 2\end{bmatrix}\right|$$

$$=\begin{vmatrix}s-1 & -2+2L_1\\ -3 & s+1+2L_2\end{vmatrix}=s^2+2L_2s-7-2L_2+6L_1$$

(3) 由给定的期望特征值得期望的特征多项式为

$$f^*(s)=(s+3)(s+5)=s^2+8s+15$$

令$f(s)=f^*(s)$,则可得

$$L=\begin{bmatrix}L_1\\ L_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\ 4\end{bmatrix}$$

(4) 故，可得降维状态观测器的各矩阵为

$$F=A_{11}-LA_{21}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}5\\ 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -8\\ 3 & -9\end{bmatrix}$$

$$G=A_{12}-LA_{22}+FL=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}5\\ 4\end{bmatrix}\times 0+\begin{bmatrix}1 & -8\\ 3 & -9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\ 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-27\\ -20\end{bmatrix}$$

$$H=B_1-LB_2=\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}5\\ 4\end{bmatrix}\times 1=\begin{bmatrix}-3\\ -3\end{bmatrix}$$

于是所得的降维状态观测器为

$$\dot{z}=Fz+Gy+Hu=\begin{bmatrix}1 & -8\\ 3 & -9\end{bmatrix}z+\begin{bmatrix}-27\\ -20\end{bmatrix}y+\begin{bmatrix}-3\\ -3\end{bmatrix}u$$

$$\hat{x}=\begin{bmatrix}z+Ly\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}z+\begin{bmatrix}5\\ 4\\ 1\end{bmatrix}y$$

6-11 给定被控系统的状态空间模型为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -2 & -4 & -3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 4 & 2\end{bmatrix}x$$

该系统的状态不能直接测量,试设计一个带状态观测器的状态反馈系统,要求将其状态观测部分的极点配置在-5,-7 和-8 处,状态反馈部分的极点配置在-1,-2 和-3 处。

解：根据 6.2 节求解极点配置方法，得到反馈矩阵为K=[4 7 3]；再根据 6.5 节求解状态观测器反馈矩阵的方法，得到反馈矩阵为$G=[-353/3 \quad 260/3 \quad -106]^{T}$。因此，所设计的带状态观测器的状态反馈系统的状态反馈律：

$$u=-[4 \quad 7 \quad 3]\hat{x}+v$$

状态观测器为

$$\begin{cases}\dot{\hat{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -2 & -4 & -3\end{bmatrix}\hat{x}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u+\begin{bmatrix}-353/3\\ 260/3\\ -106\end{bmatrix}(y-\hat{y})\\ \hat{y}=\begin{bmatrix}1 & 4 & 2\end{bmatrix}\hat{x}\end{cases}$$

习题解答

7-1 应用拉格朗日乘子法求下列二次型函数

$$J(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})=\boldsymbol{x}^{\tau}Q\boldsymbol{x}+\boldsymbol{u}^{\tau}R\boldsymbol{u}$$

在 n 维线性向量方程

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})=A\boldsymbol{x}+B\boldsymbol{u}=C$$

约束条件下的极值点。其中 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{u}$ 分别为 n 维和 m 维的变量向量;Q 和 R 分别为 $n\times n$ 维和 m×m 维的正定的常数矩阵;A 和 B 分别 n×n 和 n×m 常数矩阵;C 为 n 维常数向量。并证明满足必要条件的点是极小值点。

解 先定义如下拉格朗日函数

$$L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda})=\boldsymbol{x}^{\tau}Q\boldsymbol{x}+\boldsymbol{u}^{\tau}R\boldsymbol{u}+\boldsymbol{\lambda}^{\tau}(A\boldsymbol{x}+B\boldsymbol{u}-C)$$

式中，$\boldsymbol{\lambda}$为 n 维拉格朗日乘子向量,那么

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}}=2Q\boldsymbol{x}+A^{\tau}\boldsymbol{\lambda}=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{u}}=2R\boldsymbol{u}+B^{\tau}\boldsymbol{\lambda}=0$$

因此，有

$$\boldsymbol{x}=-\frac{1}{2}Q^{-1}A^{\tau}\boldsymbol{\lambda}$$

$$\boldsymbol{u}=-\frac{1}{2}R^{-1}B^{\tau}\boldsymbol{\lambda}$$

由约束条件,有

$$A\boldsymbol{x}+B\boldsymbol{u}=-\frac{1}{2}AQ^{-1}A^{\tau}\boldsymbol{\lambda}-\frac{1}{2}BR^{-1}B^{\tau}\boldsymbol{\lambda}=C$$

即

$$\boldsymbol{\lambda}=-2\left[AQ^{-1}A^{\tau}+BR^{-1}B^{\tau}\right]^{-1}C$$

由上述$\boldsymbol{\lambda}$的表达式，可得 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{u}$ 的解如下

$$\boldsymbol{x}=Q^{-1}A^{\tau}\left[AQ^{-1}A^{\tau}+BR^{-1}B^{\tau}\right]^{-1}C$$

$$\boldsymbol{u}=R^{-1}B^{\tau}\left[AQ^{-1}A^{\tau}+BR^{-1}B^{\tau}\right]^{-1}C$$

只要矩阵 A 和 B 其中之一行满秩，则矩阵 $AQ^{-1}A^{\tau}+BR^{-1}B^{\tau}$ 是可逆的,此时上述解成立。

由极值问题的充分条件可知,由于

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2 L(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{u}^*,\lambda)}{\partial \boldsymbol{x}\partial \boldsymbol{x}^{\tau}} & \dfrac{\partial^2 L(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{u}^*,\lambda)}{\partial \boldsymbol{x}\partial \boldsymbol{u}^{\tau}}\\ \dfrac{\partial^2 L(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{u}^*,\lambda)}{\partial \boldsymbol{u}\partial \boldsymbol{x}^{\tau}} & \dfrac{\partial^2 L(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{u}^*,\lambda)}{\partial \boldsymbol{u}\partial \boldsymbol{u}^{\tau}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Q & 0\\ 0 & R\end{bmatrix}>0$$

时,上述极值为极小值。 □□□

7-2 求函数

$$J(x)=x_1^2+x_2^2$$

在不等式约束

$$(x_1-4)^2+x_2^2\le 4,\quad (x_1-1)^2+x_2^2\le 2$$

条件下的最大值。

解 先定义库恩-塔哈克函数如下

$$L(x,y,\lambda_1,\lambda_2)=x_1^2+x_2^2+\lambda_1[(x_1-4)^2+x_2^2-4]+\lambda_2[(x_1-1)^2+x_2^2-2]$$

根据库恩-塔哈克定理，极小值的必要条件如下：

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}=2x_1+\lambda_1(2x_1-8)+\lambda_2(2x_1-2)=0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2}=2x_2+2\lambda_1x_2+2\lambda_2x_2=0$$

$$\lambda_1[(x_1-4)^2+x_2^2-4]=0,\qquad \lambda_1\ge 0$$

$$\lambda_2[(x_1-1)^2+x_2^2-2]=0,\qquad \lambda_2\ge 0$$

$$(x_1-4)^2+x_2^2-4\le 0,$$

$$(x_1-1)^2+x_2^2-2\le 0$$

现在依次考虑下述 4 种可能情况：

(1) $\lambda_1=\lambda_2=0$,即在两个不等式约束的边界之内求解。此时,则由

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}=2x_1=0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2}=2x_2=0$$

解得$x_1=x_2=0$。由于该问题的第一个不等式约束条件不满足,因此,不是极小解。

(2) $\lambda_1=0,\lambda_2>0$。因此,有

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}=2x_1+\lambda_2(2x_1-2)=0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2}=2x_2+2\lambda_2x_2=0$$

$$(x_1-1)^2+x_2^2-2=0$$

解得

$$\begin{cases}x_1=1+\sqrt{2}\\ x_2=0\\ \lambda_2=-\dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\end{cases},\qquad \begin{cases}x_1=1-\sqrt{2}\\ x_2=0\\ \lambda_2=\dfrac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\end{cases}$$

经检验，上述 2 个均故不是极小值解。

(3) $\lambda_1>0,\lambda_2=0$。因此,有

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 + \lambda_1(2x_1 - 8) = 0,$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 + 2\lambda_1 x_2 = 0$$
$$(x_1 - 4)^2 + x_2^2 - 4 = 0,$$

解得

$$\begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = 0 \\ \lambda_1 = -1/3 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 0 \\ \lambda_1 = 1 \end{cases}$$

经检验，上述第一个解不满足$\lambda_1>0$,因此不是极小值解。第二个解满足所有条件，其为极小值解。

(4) $\lambda_1>0,\lambda_2>0$。因此,有

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 + \lambda_1(2x_1 - 8) + \lambda_2(2x_1 - 2) = 0,$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 + 2\lambda_1 x_2 + 2\lambda_2 x_2 = 0$$
$$(x_1 - 4)^2 + x_2^2 - 4 = 0,$$
$$(x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 2 = 0$$

解得

$$\begin{cases} x_1 = 13/6 \\ x_2 = \sqrt{23}/6 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x_1 = 13/6 \\ x_2 = -\sqrt{23}/6 \end{cases}$$

经检验，上述 2 个解均不是极小值解。

综上所述,该极值问题的解为

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 0 \end{cases}。$$

7-3 求如下泛函问题的极值曲线

(1) $J[x(\cdot)]=\int_0^{\pi/2}(\dot{x}^2-x^2)\mathrm{d}t \qquad x(0)=1, x(\pi/2)=2$

(2) $J[x(\cdot)]=\int_0^{1}(\dot{x}^2+12tx)\mathrm{d}t \qquad x(0)=0, x(1)=2$

(3) $J[x(\cdot)]=\int_0^{2}\frac{\sqrt{1+\dot{x}^2}}{x}\mathrm{d}t \qquad x(0)=1, x(2)=0$

解 (1) 因为 F 函数不显含自变量 t, 因此极值曲线的解满足

$$F-\dot{x}F_{\dot{x}}=C_1$$

代入 F 函数，有

$$\dot{x}^2-x^2-\dot{x}(2\dot{x})=C_1$$

则有

$$\dot{x}=\pm\sqrt{-C_1-x^2}=\pm\sqrt{C_2-x^2}$$

解得

$$x=k_1\sin(t+k_2)$$

根据边界条件，可解得

$$k_1=\pm\sqrt{5} \quad k_2=\pm\arcsin(1/\sqrt{5})$$

(2) 由欧拉方程 $F_x-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_{\dot{x}}=0$，有

$$12t-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2\dot{x})=0$$

即

$$\ddot{x}=6t$$

则有

$$x=t^3+C_1t+C_2$$

根据边界条件，可解得

$$x=t^3+t$$

$$J[x(\cdot)]=\int_0^{2}\frac{\sqrt{1+\dot{x}^2}}{x}\mathrm{d}t \qquad x(0)=1, x(2)=0$$

(3) 由于泛函的被积函数 *F* 不显含自变量 *t*, 因此极值曲线的解满足

$$F-\dot{x}F_{\dot{x}}=C_1$$

将 *F* 代入该方程,有

$$\frac{\sqrt{1+\dot{x}^2}}{x}-\dot{x}\frac{\dot{x}}{x\sqrt{1+\dot{x}^2}}=C_1$$

经整理, 可得

$$x\sqrt{1+\dot{x}^2}=C_2$$

引入参变量ξ, 令 $\dot{x}$=ctgξ, 于是上式可表示为

$$x = \frac{C_2}{\sqrt{1 + \mathrm{ctg}^2 \xi}} = C_3 \sin \xi$$

又由

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{\dot{x}} = \frac{C_3 \cos \xi}{\mathrm{ctg} \xi} \mathrm{d}\xi = C_3 \sin \xi \mathrm{d}\xi$$

积分得

$$t = -C_3 \cos \xi + C_4$$

即该泛函问题的极值曲线解满足

$$t = -C_3 \cos \xi + C_4 \qquad x = C_3 \sin \xi$$

即

$$x^2 + (t - C_4)^2 = C_3^2$$

由边界条件，可确定

$$C_3 = \pm 5/4 \quad C_4 = 3/4$$

7-4 已知线性系统的状态方程为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}u$$

其边界条件为

$$x(0)=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix},\quad x_2(2)=0$$

求 $\mathbf{u}(t)$,使性能指标泛函

$$J=\frac{1}{2}\int_0^2 u^\tau(t)u(t)\mathrm{d}t$$

为最小。

解 本例中末态约束条件为

$$g(\boldsymbol{x}(t_f),t_f)=x_2(2)=0$$

因此,相应的哈密顿函数和辅助性能指标泛函中的末值项分别为

$$H(t,\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}},u,\lambda)=\frac{1}{2}u^\tau(t)u(t)+\lambda_1(x_2+u_1-\dot{x}_1)+\lambda_2(u_2-\dot{x}_2)$$

$$\overline{S}(\boldsymbol{x}(t_f),t_f)=\mu x_2(2)$$

根据定理 7-7,可得该最优控制的如下方程和边界条件

$$\dot{x}_1(t)=x_2(t)+u_1(t)$$

$$\dot{x}_2(t)=u_2(t)$$

$$\dot{\lambda}_1(t)=-\frac{\partial H}{\partial \dot{x}_1}=0$$

$$\dot{\lambda}_2(t)=-\frac{\partial H}{\partial \dot{x}_2}=-\lambda_1(t)$$

$$x_1(0)=1 \qquad x_2(0)=1$$

$$x_2(2)=0$$

$$\lambda_1(2)=\frac{\partial g}{\partial x_1}\mu=0 \qquad \lambda_2(2)=\frac{\partial g}{\partial x_2}\mu=\mu$$

$$\frac{\partial H}{\partial u_1}=u_1+\lambda_1=0$$

$$\frac{\partial H}{\partial u_2}=u_2+\lambda_2=0$$

由上述方程可求得如下解析解

$$u_1^*(t)=0$$

$$u_2^*(t)=-\frac{1}{2}$$

$$x_1^*(t)=-\frac{1}{4}t^2+t+1$$

$$x_2^*(t)=-\frac{t}{2}+1$$

7-5 已知被控系统 $\dot{x}=u$,其初始条件为$x(0)$=1。试求u(t)和t_f,使系统在t_f时刻转移到$x(t_f)$=0,且使如下性能指标泛函极小

$$J=t_f^2+\int_0^{t_f}u^2(t)\mathrm{d}t$$

解 首先构造哈密顿函数如下

$$H(x,u,\lambda,t)=u^2+\lambda u$$

由极值条件可解得 $u=-\lambda/2$。将其代入规范方程, 可得

$$\dot{x}=u,\qquad \dot{\lambda}=-\frac{\partial H}{\partial x}=0$$

并写出边界条件如下

$$x(0)=1\qquad x(t_f)=0$$

$$u^2(t_f)+\lambda(t_f)u(t_f)=-2t_f$$

从而解得

$$t_f^*=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\qquad u^*(t)=-\sqrt[3]{2}\qquad x^*(t)=-\sqrt[3]{2}t+1$$

7-6 已知线性系统的状态方程为

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2\\ \dot{x}_2 = u\end{cases} \qquad \boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

系统的在未定末态时刻t_f的末态条件分别为

(1) $x_1(t_f) = -t_f^2$

(2) $x_1(t_f) = -t_f^2 \qquad x_2(t_f) = 0$

试分别求使系统转移到上述末态条件的最优控制 $u(t)$,并使性能指标泛函

$$J = \int_0^{t_f} u^2(t)\mathrm{d}t$$

为最小。

解 (1) 首先构造哈密顿函数如下

$$H(x,u,\lambda,t) = u^2 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u$$

由极值条件可解得$u=-\lambda_2/2$。将其代入规范方程,可得

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad \dot{x}_2 = u \quad \dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0 \quad \dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\lambda_1$$

解得

$$\lambda_1 = C_1$$
$$\lambda_2 = -C_1 t + C_2$$
$$u = \frac{C_1}{2}t - \frac{C_2}{2}$$
$$x_2 = \frac{C_1}{4}t^2 - \frac{C_2}{2}t + C_3$$
$$x_1 = \frac{C_1}{12}t^3 - \frac{C_2}{4}t^2 + C_3 t + C_4$$

并写出边界条件如下

$$x_1(0) = 1 \qquad x_2(0) = 1$$
$$x_1(t_f) = -t_f^2$$
$$\lambda_1(t_f) = \frac{\partial S(\boldsymbol{x}(t_f),t_f)}{\partial \boldsymbol{x}(t_f)} + \frac{\partial \boldsymbol{g}^\tau(\boldsymbol{x}(t_f),t_f)}{\partial \boldsymbol{x}(t_f)}\boldsymbol{\mu} = \frac{\partial[x_1(t_f)+t_f^2]}{\partial x_1(t_f)}\mu = \mu$$
$$\lambda_2(t_f) = \frac{\partial S(\boldsymbol{x}(t_f),t_f)}{\partial \boldsymbol{x}(t_f)} + \frac{\partial \boldsymbol{g}^\tau(\boldsymbol{x}(t_f),t_f)}{\partial \boldsymbol{x}(t_f)}\boldsymbol{\mu} = \frac{\partial[x_1(t_f)+t_f^2]}{\partial x_2(t_f)}\mu = 0$$
$$u^2(t_f) + \lambda_1(t_f)x_2(t_f) + \lambda_2(t_f)u(t_f) = -\frac{\partial S(\boldsymbol{x}(t_f),t_f)}{\partial t_f} - \frac{\partial \boldsymbol{g}^\tau(\boldsymbol{x}(t_f),t_f)}{\partial t_f}\boldsymbol{\mu} = -2t_f + \mu$$

由边界条件可以求出待定常数C_i,从而解得最优控制$u^*(t)$和最优状态轨迹$\boldsymbol{x}^*(t)$。

(2) 首先构造哈密顿函数如下

$$H(x,u,\lambda,t) = u^2 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u$$

由极值条件可解得$u=-\lambda_2/2$。将其代入规范方程,可得

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad \dot{x}_2 = u \quad \dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0 \quad \dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\lambda_1$$

解得

$$\lambda_1 = C_1$$
$$\lambda_2 = -C_1 t + C_2$$
$$u = \frac{C_1}{2}t - \frac{C_2}{2}$$
$$x_2 = \frac{C_1}{4}t^2 - \frac{C_2}{2}t + C_3$$
$$x_1 = \frac{C_1}{12}t^3 - \frac{C_2}{4}t^2 + C_3 t + C_4$$

并写出边界条件如下

$$x_1(0) = 1 \qquad x_2(0) = 1$$
$$x_1(t_f) = -t_f^2 \quad x_2(t_f) = 0$$
$$\lambda_1(t_f) = \frac{\partial S(\boldsymbol{x}(t_f), t_f)}{\partial \boldsymbol{x}(t_f)} + \frac{\partial \boldsymbol{g}^\tau(\boldsymbol{x}(t_f), t_f)}{\partial \boldsymbol{x}(t_f)}\boldsymbol{\mu} = \frac{\partial [x_1(t_f) + t_f^2]}{\partial x_1(t_f)}\mu_1 + \frac{\partial x_2(t_f)}{\partial x_1(t_f)}\mu_2 = \mu_1$$
$$\lambda_2(t_f) = \frac{\partial S(\boldsymbol{x}(t_f), t_f)}{\partial \boldsymbol{x}(t_f)} + \frac{\partial \boldsymbol{g}^\tau(\boldsymbol{x}(t_f), t_f)}{\partial \boldsymbol{x}(t_f)}\boldsymbol{\mu} = \frac{\partial [x_1(t_f) + t_f^2]}{\partial x_2(t_f)}\mu_1 + + \frac{\partial x_2(t_f)}{\partial x_2(t_f)}\mu_2 = \mu_2$$
$$u^2(t_f) + \lambda_1(t_f)x_2(t_f) + \lambda_2(t_f)u(t_f) = -\frac{\partial S(\boldsymbol{x}(t_f), t_f)}{\partial t_f} - \frac{\partial \boldsymbol{g}^\tau(\boldsymbol{x}(t_f), t_f)}{\partial t_f}\boldsymbol{\mu} = -2t_f + \mu_1$$

由边界条件可以求出待定常数C_i,从而解得最优控制$u^*(t)$和最优状态轨迹$\boldsymbol{x}^*(t)$。

7-7 已知被控系统状态方程 $\dot{x}=u$ 控制变量不等式约束$|u(t)|\le 1$,试试利用极大值原理求使系统从初始状态$x(0)=1$ 转移到$x(t_f)=0$,且使性能指标泛函

$$J=t_f^2+\int_0^{t_f}x^2(t)\mathrm{d}t$$

为最小的最优控制和最优轨线。

解 该问题的哈密顿函数为

$$H=x^2+\lambda u$$

运用极大值原理

$$\begin{aligned}H(\boldsymbol{x}^*(t),\boldsymbol{\lambda}(t),\boldsymbol{u}^*(t))&=\min_{u(t)\in U}H(\boldsymbol{x}^*(t),\boldsymbol{\lambda}(t),\boldsymbol{u}(t))\\&=\min_{1\le u(t)\le 1}x^{*2}+\lambda u\\&=x^{*2}+\min_{1\le u(t)\le 1}\lambda u\end{aligned}$$

解得

$$u^*(t)=\begin{cases}-1 & \lambda(t)>0\\+1 & \lambda(t)<0\end{cases}$$

由于本问题时寻求控制律使系统从初始状态$x(0)=1$ 转移到末态$x(t_f)=0$,因此,考虑系统的状态方程为 $\dot{x}=u$，从初始状态$x(0)=1$ 出发时的一段时间内，系统的最优控制律必为

$$u^*(t)=-1;$$

此时状态轨线为

$$x^*(t)=-t+1$$

由协态方程

$$\dot{\lambda}=-\frac{\partial H}{\partial x}=-2x=t-1$$

得

$$\lambda(t)=\frac{1}{2}t^2-t+\lambda(0)\quad \lambda(t_0)>0$$

若系统控制量到达$x(t_f)=0$ 之前无切换，即没有从-1 切换到+1，则只要$t_f=1$, $x^*(1)=0$,此时

$$J=t_f^2+\int_0^{t_f}x^2(t)\mathrm{d}t=1+\int_0^1(-t+1)^2\mathrm{d}t=\frac{4}{3}$$

可以证明，若发生切换，不管切换多少次，使系统从初始状态$x(0)=1$ 转移到末态$x(t_f)=0$ 的控制规律的性能指标函数值必定大于没有发生过切换的$u^*(t)=-1$。因此$u^*(t)=-1$ 为最优控制且$t_f=1$。

7-8 已知被控系统状态方程和性能指标泛函分别为

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad \dot{x}_2 = x_3 \quad \dot{x}_3 = u$$

$$J = t_f^2 x_2(t_f) + \int_0^{t_f} x_1^2(t)\mathrm{d}t$$

约束条件为

(1) $\boldsymbol{x}(0) = [1 \quad 0 \quad 0]^T$

(2) $x_1(t_f) = x_2(t_f)$, $\quad x_3(t_f) = 0$

(3) $|u(t)| \le 1$

(4) $\int_0^{t_f} u^2(t)\mathrm{d}t = 1$

试写出最优控制的必要条件,其中末态时刻t_f未定。

参见习题 7-7

7-9 某一阶被控系统的状态方程为

$$\dot{x}=0.5x+u \qquad x(0)=x_0$$

试证明

$$u^*(t)=-\frac{1-e^{-t_f}e^t}{2(1+e^{-t_f}e^t)}x(t)$$

是使性能指标泛函

$$J=\frac{1}{2}\int_0^{t_f}e^{-t}[x^2(t)+2u^2(t)]\mathrm{d}t$$

为最小的最优控制律。

解 对本问题，各系统状态空间模型和二次型、性能指标函数各矩阵如下

$$A=[0.5],\quad B=[1],\quad Q=[\mathrm{e}^{-t}],\quad R=[2\mathrm{e}^{-t}],\quad F=[0]$$

因此，若 $u^*(t)=-\frac{1-e^{-t_f}e^t}{2(1+e^{-t_f}e^t)}x(t)$ 为最优控制规律，应满足黎卡提微分方程。由于最优二次型控制律为 $\boldsymbol{u}^*(t)=-R^{-1}B^{\tau}P\boldsymbol{x}(t)$，因此该控制律的 $P=\frac{e^{-t}-e^{-t_f}}{1+e^{-t_f}e^t}$ 应满足如下黎卡提微分方程

$$\dot{P}(t)=-P(t)A-A^{\tau}P(t)+P(t)BR^{-1}B^{\tau}P(t)-Q,\quad t\in[t_0,t_f]$$
$$P(t_f)=F$$

即

$$\dot{P}(t)=-P(t)+e^tP^2(t)/2-e^{-t},\quad t\in[t_0,t_f]$$
$$P(t_f)=0$$

将 $P=\frac{e^{-t}-e^{-t_f}}{1+e^{-t_f}e^t}$ 代入上述黎卡提方程，等式左右两边相等，边界条件也成立。根据微分方程解理论，微分方程解惟一存在，因此 $P=\frac{e^{-t}-e^{-t_f}}{1+e^{-t_f}e^t}$ 为该二次型最优控制问题的黎卡提方程的解，$u^*(t)=-\frac{1-e^{-t_f}e^t}{2(1+e^{-t_f}e^t)}x(t)$ 为最优控制律。

7-10 某一阶被控系统的状态方程和初始条件为

$$\dot{x} = u \qquad x(1) = 3$$

性能指标泛函为

$$J = x^2(5) + \frac{1}{2}\int_1^5 u^2(t)\mathrm{d}t$$

试求使 J 最小的最优控制律。

解 对本问题，各系统状态空间模型和二次型、性能指标函数各矩阵如下

$$A = [0], \quad B = [1], \quad Q = [0], \quad R = [1], \quad F = [1]$$

因此求解黎卡提代数方程

$$\dot{P}(t) = -P(t)A - A^{\tau}P(t) + P(t)BR^{-1}B^{\tau}P(t) - Q, \quad t \in [t_0, t_f]$$

$$P(t_f) = F$$

得

$$P = \frac{1}{6-t}$$

因此，最优反馈控制律为

$$\boldsymbol{u}^*(t) = -R^{-1}B^{\tau}P\boldsymbol{x}(t) = -\frac{1}{6-t}\boldsymbol{x}(t)$$

闭环系统状态方程为

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \left[A - BR^{-1}B^{\tau}P\right]\boldsymbol{x}(t)\\ &= \left[1 - \frac{1}{6-t}\right]\boldsymbol{x}(t)\\ &= \frac{5-t}{6-t}\boldsymbol{x}(t)\end{aligned}$$

7-11 某一阶被控系统的状态方程和初始条件为

$$\dot{x} = x + u \qquad x(0) = x_0$$

性能指标泛函为

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{t_f} [2x^2(t) + u^2(t)]\mathrm{d}t$$

试求使 J 最小的最优控制律。

解 对本问题，各系统状态空间模型和二次型、性能指标函数各矩阵如下

$$A = [1], \quad B = [1], \quad Q = [2], \quad R = [1], \quad F = [0]$$

因此求解黎卡提代数方程

$$\dot{P}(t) = -P(t)A - A^{\tau}P(t) + P(t)BR^{-1}B^{\tau}P(t) - Q, \quad t \in [t_0, t_f]$$

$$P(t_f) = F$$

得

$$P = \frac{Ce^{2\sqrt{3}t}(1-\sqrt{3}) - 1 - \sqrt{3}}{Ce^{2\sqrt{3}t} - 1}$$

其中

$$C = \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}e^{-2\sqrt{3}t_f}$$

即

$$P = \frac{-2e^{2\sqrt{3}(t-t_f)} + 2}{(1+\sqrt{3})e^{2\sqrt{3}(t-t_f)} - (1-\sqrt{3})}$$

因此，最优反馈控制律为

$$u^*(t) = -R^{-1}B^{\tau}Px(t) = -\frac{-2e^{2\sqrt{3}(t-t_f)} + 2}{(1+\sqrt{3})e^{2\sqrt{3}(t-t_f)} - (1-\sqrt{3})}x(t)$$

闭环系统状态方程为

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \left[A - BR^{-1}B^{\tau}P\right]x(t) \\
&= \left[1 - \frac{-2e^{2\sqrt{3}(t-t_f)} + 2}{(1+\sqrt{3})e^{2\sqrt{3}(t-t_f)} - (1-\sqrt{3})}\right]x(t) \\
&= \frac{(3+\sqrt{3})e^{2\sqrt{3}(t-t_f)} - (3-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3})e^{2\sqrt{3}(t-t_f)} - (1-\sqrt{3})}x(t)
\end{aligned}$$

7-12 某一阶被控系统的状态方程为

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u\end{cases}$$

性能指标泛函为

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}[x_1^2(t) + u^2(t)]\mathrm{d}t$$

试求使 J 最小的最优控制律。

解 对本问题，各系统状态空间模型和二次型、性能指标函数各矩阵如下

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\quad R = [1]$$

因此求解黎卡提矩阵代数方程

$$PA + A^{\tau}P - PBR^{-1}B^{\tau}P + Q = 0$$

得

$$P = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

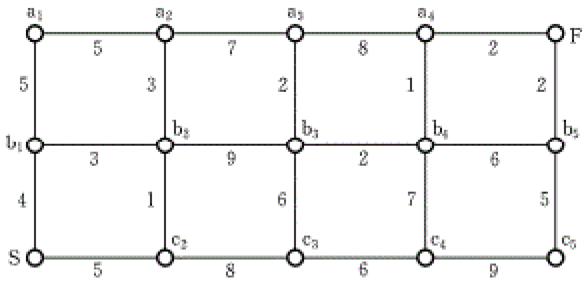
因此，最优反馈控制律为

$$\boldsymbol{u}^*(t) = -R^{-1}B^{\tau}P\boldsymbol{x}(t) = -\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)$$

闭环系统状态方程为

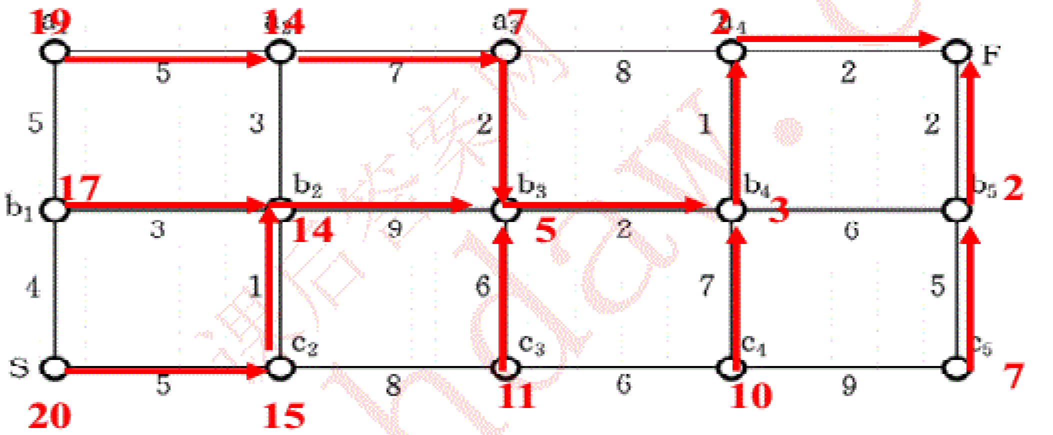
$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \left[A - BR^{-1}B^{\tau}P\right]\boldsymbol{x}(t) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\sqrt{2} \end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)\end{aligned}$$

7-13 如题图 7-14 所示的街道,图中数字表示相应的街道长度,试求从起点 S 到终点 F 的最短路线。



题图 7-13 某街道路线图

解 由动态规划法逆向求解，各点到终点的最佳路径与最短路径值如下图所示。



7-14 已知被控系统的状态方程和初始条件分别为

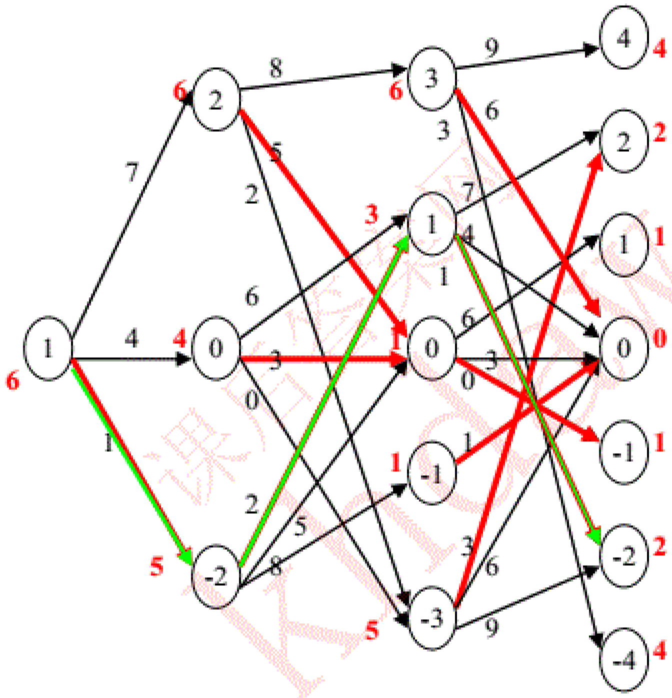
$$x(k+1)=x(k)u(k)+u(k) \quad x(0)=1$$

其中 $u(k)$是控制变量,它只能在-1、0 和+1 三者之间取值。给定的性能指标泛函为

$$J=|x(3)|+\sum_{k=0}^{2}[|x(k)|+3|u(k)+1|]$$

极小化。试用动态规划法先列出递推方程,然后求出最优控制序列 $u^*(0)$,$u^*(1)$和 $u^*(2)$的显式解。

解 采用搜索路径的图解法，求解过程如图所示，节点内的数字为各时刻状态变量的值，弧线上的数字表示各步性能指标函数，即为$|x(k)|+3|u(k)+1|$，红线表示各状态下一步的最优策略，红色数字表示最优性能指标值。从图上可知，最优策略为 $u(k)=-1$,k=0,1,2;最优状态轨迹为{1，-2，1，-2}



7-15 已知被控系统的状态方程

$$x(k+1)=x(k)+u(k)$$

和初始条件

$$x(0)=x_0 \quad x(N)=x_f$$

给定的性能指标泛函为

$$J=\sum_{k=0}^{N-1}\sqrt{1+u^2(k)}$$

极小化。试用动态规划法先列出递推方程,然后求出最优控制律。

解 由离散系统最优控制问题的贝尔曼逆向递推方程,可得

$$J^*[x(k),u^*(k,N-1)]=\min_{u(k)\in U}\left\{\sqrt{1+u^2(k)}+J^*[\boldsymbol{x}(k+1),\boldsymbol{u}^*(k+1,N-1)]\right\} \quad k=N-1,N-2,\ldots$$

$$J^*[x(N),N)]=0$$

由状态方程

$$x(k+1)=x(k)+u(k)$$

可得

$$x_f=x_0+\sum_{k=0}^{N-1}u(k)$$

因此,本题的最优控制问题等价于求

$$J=\sum_{k=0}^{N-1}\sqrt{1+u^2(k)}$$

在约束条件

$$x_f=x_0+\sum_{k=0}^{N-1}u(k)$$

下的最优控制问题。因此，该问题的最优解为

$$u(k)=\frac{x_f-x_0}{N}, \quad k=0,1,2,\cdots,\mathrm{N}\text{-}1$$