Ch.4 线性系统的能控性和能观性

4.2 线性连续系统的能观性

状态能观性反映系统外部可直接或间接观测的输出 $y(t)$ 和输入 $u(t)$ 来确定或识别系统状态 $x(t)$ 的能力。

· 如果系统的任何内部运动状态变化 $x(t)$ 都可由系统的外部输出 $y(t)$ 和输入 $u(t)$ 唯一地确定，那么称系统是状态能观的。

· 否则称系统为状态不完全能观的。

4.2.2 状态能观性的定义

线性系统 $\begin{cases} \dot{x} = Ax+Bu \\ y = Cx \end{cases}$，状态能观性只与系统的输出 $y(t)$，以及系统矩阵 A 和输出矩阵 C 有关，与系统的输入 $u(t)$ 和输入矩阵 B 无关。

若线性连续系统（定常或时变）

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) \\ y(t) = C(t)x(t) \end{cases}$$

对初始时刻 t_0（$t_0 \in T$，T为时间定义域）和初始状态 $x(t_0)$，

· 存在另一有限时刻 t_1（$t_1 > t_0$，$t_1 \in T$），

· 在有限时间区间 $[t_0, t_1]$ 内测输出 $y(t)$，

· 能够唯一确定系统在 t_0 时刻的初始状态 $x(t_0)$，

则称在 t_0 时刻的状态 $x(t_0)$ 能观；

· 若对 t_0 时刻的状态空间中的所有状态都能观，则称系统在 t_0 时刻完全能观。

· 若系统在所有时刻状态完全能观，则称系统状态完全能观。

4.2.3 线性定常连续系统的状态能观性判据

1. 代数判据

（线性定常连续系统能控性秩判据）

定理4-7 之一般：

线性定常连续系统 $\Sigma(A, C)$ 状态完全能观的充要条件

(1) 矩阵函数 Ce^{At} 的各列函数线性独立，不存在非零向量 $f \in R^n$，使得 $Ce^{At} f \equiv 0$

(2) 定义能观性矩阵 $Q_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$ 满秩

↓ 代数判据

2. 模态判据

线性定常系统经线性变换后状态能观性不变。

定理4-8

约旦规范形的线性定常连续系统 $\Sigma(A, C)$，有：

1. 若A为每个特征值都只有一个约旦块的约旦矩阵，
充要条件：对应A的每个约旦块的C的分块第一列都不全为0；

2. A为某特征值对应多于一个约旦块的约旦矩阵，
充要条件：对应A的每个特征值的所有约旦块的C的分块的第一列线性无关。

@19108002-崔荣成

4.1 线性连续系统的能控性

状态能控性反映由能直接测量的输入u、输出y的量测值来确定反映系统内部动态特性的状态x的可能性。

4.1.2 状态能控性的定义

线性连续系统 $x'(t)=A(t)x(t)+B(t)u(t)$

对初始时刻 t_0 和初始状态 $x(t_0)$。

- 存在另一有限时刻 t_1，
- 可以找到另一个控制器 $u(t)$，
- 能在有限时间 $[t_0, t_1]$ 内把系统初始状态 $x(t_0)$ 控制到原点，即 $x(t_1)=0$。

即称 t_0 时刻的状态 $x(t_0)$ 能控。

- 若 t_0 时刻状态空间所有状态都能控，则称系统在 t_0 时刻状态完全能控。
- 若系统在所有时刻 (t_0-t_1) 状态完全能控，则称系统完全能控，简称为系统能控。

4.1.3. 线性定常连续系统的状态能控性判别

1. 代数判据

定理4-1（线性定常连续系统能控性秩判据）

线性定常连续系统 $\Sigma(A,B)$ 状态完全能控的充要条件为下条件之一成立：

(1) 矩阵函数 $e^{-At}B$ 的各行函数线性独立，即不存在非零常数向量 $f\in R^n$，使 $f^{\tau}e^{-At}B=0$

(2) 定义能控性矩阵

$$Q_c=[B\ \ AB\ \ \cdots\ \ A^{n-1}B]$$ 满秩

2. 模态判据

定理4-2

约旦规范形的线性定常连续系统 $\Sigma(A,B)$，有：

1. 若A的每个特征值为只有一个约旦块的约旦矩阵，充要条件：对应A的每个约旦块的B的分块的最后一行都不全为0；
2. 若A的特征值有多于一个约旦块的约旦矩阵，充要条件：A的每个约旦块的B的分块的最后一行线性无关。

4.1.4 线性定常连续系统的输出能控性

定理4-4.

线性定常连续系统 $\Sigma(A,B,C,D)$ 输出完全能控充要条件 $[CB\ \ CAB\ \ \cdots\ \ CA^{n-1}B\ \ D]$ 满秩

@19108002-崔荣成

4.4 对偶性原理

定义：若两个线性定常连续系统 $\Sigma(A,B,C)$ 和 $\tilde{\Sigma}(\tilde{A},\tilde{B},\tilde{C})$ 满足 $\tilde{A}=A^T$，$\tilde{B}=C^T$，$\tilde{C}=B^T$，

则称系统 $\Sigma(A,B,C)$ 和 $\tilde{\Sigma}(\tilde{A},\tilde{B},\tilde{C})$ 互为对偶。

$\Sigma(A,B,C)$ r维输入，m维输出 $\Leftrightarrow$

$\tilde{\Sigma}(\tilde{A},\tilde{B},\tilde{C})$ m维输入，r维输出。

· 互为对偶系统的传递函数阵是互为转置的，其特征方程相同。

定理：$\Sigma(A,B,C)$ 与 $\tilde{\Sigma}(\tilde{A},\tilde{B},\tilde{C})$ 互为对偶，则 Σ 的线性能控性等价于 $\tilde{\Sigma}$ 的线性能观性

Σ 的 — 能观性 ——— 能控性。

4.5 线性系统的结构分解和零极点相消

4.5.1 能控性分解

定理（能控分解定理）：

线定常系统 $\begin{cases} \dot{x}=Ax+Bu \\ y=Cx \end{cases}$，状态不能控。

能控性矩阵的秩 $\operatorname{rank} Q_c=\operatorname{rank}[B \ AB \ \cdots \ A^{n-1}B]=n_c<n$

则存在非奇线变 $x=P_c\tilde{x}$，使 $\Sigma(A,B,C)$ 变换成

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad \begin{matrix} \text{能控} \\ \text{不能控} \end{matrix} \\ y = \begin{bmatrix} \tilde{C}_1 & \tilde{C}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$\dot{\tilde{x}}_1=\tilde{A}_{11}\tilde{x}_1+\tilde{A}_{12}\tilde{x}_2+\tilde{B}_1u$　完全能控

$\dot{\tilde{x}}_2=\tilde{A}_{22}\tilde{x}_2$　完全不能控

$G(s)=\tilde{C}_1(sI-\tilde{A}_{11})^{-1}\tilde{B}_1$

状态不完全能控的系统的传递函数阵为能控子部分的传递函数阵。阶次小于n，系统存在零极点相消现象。

4.5.2 能观性分解

定理（能观分解定理）

线定常系统 $\Sigma(A,B,C)$ 状态不完全能观，其能观性矩阵的秩 $\operatorname{rank} Q_o=\operatorname{rank}\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}=n_o<n$。

存在非奇异线性变换 $x=P_o\tilde{x}$，使 $\Sigma(A,B,C)$ 变换成

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & 0 \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} \tilde{C}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

n_o 维子系统 $\tilde{\Sigma}_o$ $\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1=\tilde{A}_{11}\tilde{x}_1+\tilde{B}_1u & \text{状态完全能观} \\ y=\tilde{C}_1\tilde{x}_1 \end{cases}$

$(n-n_o)$ 维子系统 $\tilde{\Sigma}_{n-o}$　$\dot{\tilde{x}}_2=\tilde{A}_{21}\tilde{x}_1+\tilde{A}_{22}\tilde{x}_2+\tilde{B}_2u$　完全不能观

进行能观分解的变换矩阵

$$P_o^{-1}=\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{n} \end{bmatrix}$$ （Q_o 的 n_o 个线行无关行向量）

$G(s)=\tilde{C}_1(sI-\tilde{A}_{11})^{-1}\tilde{B}_1$

状态不完全能观的系统的传递函数阵为其能观子部分的传递函数阵，阶次小于n个，存在零极点相消。

进行能控分解的变换矩阵

$P_c=[p_1 \ \cdots \ p_{n_c} \ p_{n_c+1} \ \cdots \ p_n]$（$Q_c$ 的 n_c 个线性无关列向量）

@19108002-崔荣欣

4.5.3 能控能观分解

- 系统 $\xrightarrow{\text{能控分解}}$
  - 能控子系统 $\xrightarrow{\text{能观分解}}$
    - 能控但不能观
    - 能控又能观
  - 不能控子系统 $\xrightarrow{\text{能观分解}}$
    - 不能控又不能观
    - 不能控但能观

定理 能控能观分解定理

若线性定常连续系统 $\Sigma(A,B,C)$ 状态不完全能控又不完全能观，则一定存在非奇异变换，使得变换后的状态空间模型为

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u \\ y = \tilde{C}\tilde{x} \end{cases}$$

$$\tilde{A} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \text{能控} & & \text{不能控} & \\ \text{不能观} & \text{能观} & \text{不能观} & \text{能观} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{能控}\ \text{不能观} \\ \text{能控}\ \text{能观} \\ \text{不能控}\ \text{不能观} \\ \text{不能控}\ \text{能观} \end{array} & \left[\begin{array}{cc|cc} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} & \tilde{A}_{13} & \tilde{A}_{14} \\ 0 & \tilde{A}_{22} & \boxed{0} & \tilde{A}_{24} \\ \hline 0 & 0 & \tilde{A}_{33} & \tilde{A}_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{A}_{44} \end{array}\right] \end{array}, \quad \tilde{B} = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{c} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \\ \hline \boxed{0} \\ \boxed{0} \end{array}\right] & \begin{array}{c} \text{不能观}\ \text{能控} \\ \text{能观} \\ \text{不能观}\ \text{不能控} \\ \text{能观} \end{array} \end{array}$$

$$\tilde{C} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c|c|c|c} \boxed{0} & \tilde{C}_2 & \boxed{0} & \tilde{C}_4 \end{array}\right] \\ \begin{array}{cccc} \text{不能观} & \text{能观} & \text{不能观} & \text{能观} \end{array} \\ \begin{array}{cc} \text{能控} & \text{不能控} \end{array} \end{array}$$

系统可分解成如下4个子系统：

1. 能控但不能观子系统 $\tilde{\Sigma}_{c,no}$

$$\dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{A}_{11}\tilde{x}_1 + \tilde{A}_{12}\tilde{x}_2 + \tilde{A}_{13}\tilde{x}_3 + \tilde{A}_{14}\tilde{x}_4$$

2. 能控又能观子系统 $\tilde{\Sigma}_{c,o}$

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_2 = \tilde{A}_{22}\tilde{x}_2 + \tilde{A}_{24}\tilde{x}_4 + \tilde{B}_2 u \\ y_2 = \tilde{C}_2\tilde{x}_2 \end{cases}$$

3. 不能控又不能观子系统 $\tilde{\Sigma}_{nc,no}$

$$\dot{\tilde{x}}_3 = \tilde{A}_{33}\tilde{x}_3 + \tilde{A}_{34}\tilde{x}_4$$

4. 不能控但能观子系统 $\tilde{\Sigma}_{nc,o}$

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_4 = \tilde{A}_{44}\tilde{x}_4 \\ y_4 = \tilde{C}_4\tilde{x}_4 \end{cases}$$

能控能观分解的变换阵 P_{co}

$$P_{co} = P_c \begin{bmatrix} P_{c,o} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & P_{nc,o} \end{bmatrix} = P_c \begin{bmatrix} P_{c,o} & 0 \\ 0 & P_{nc,o} \end{bmatrix}$$

（先能控分解，再能观分解 ↑）

$$P_{co} = P_o \begin{bmatrix} P_{o,c} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & P_{no,c} \end{bmatrix} = P_o \begin{bmatrix} P_{o,c} & 0 \\ 0 & P_{no,c} \end{bmatrix}$$

（先能观，再能控 ↑）

$$G(s) = \tilde{G}(s) = \tilde{C}_2(sI - \tilde{A}_{22})^{-1}\tilde{B}_2$$

状态不完全能控又不完全能观系统的传递函数阵等于其能控能观分解后能控又能观子系统的传递函数阵。

4.5.4 系统传递函数中的零极点相消定理

定理 SISO线定常系统状态空间模型传递函数没有零极点相消 充要条件 状态既完全能控又完全能观。

@19108002-崔荣成

4.6 能控规范形和能观规范形

4.6.1 能控规范形

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

能控规范I形：（A为友矩阵的转置）

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

能控规范II形：（A为友矩阵）

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

定理4-24 $\Sigma(A,B)$引入变换矩阵T_{c1}

$$T_{c1} = Q_c = [B \ AB \ \cdots \ A^{n-1}B]$$

线性变换$x=T_{c1}\bar{x}$可将$\Sigma(A,B)$变成能控规范I形。

定理4-25 $\Sigma(A,B)$引入变换矩阵T_{c2}

$$T_{c2}^{-1} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_1A \\ \vdots \\ T_1A^{n-1} \end{bmatrix}$$

式中，$T_1 = [0 \cdots 0 \ 1][B \ AB \ \cdots \ A^{n-1}B]^{-1}$

线性变换$x=T_{c2}\bar{x}$可将$\Sigma(A,B)$变成能控规范II形。

4.6.2 能观规范形

能观规范I形：（A为友矩阵）

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}, C=[1 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 0]$$

能观规范II形：（A为友矩阵的转置）

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix}, C=[0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 1]$$

定理4-26. $\Sigma(A,B,C)$引入变换矩阵T_{o1},

$$T_{o1}^{-1} = Q_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

线性变换$x=T_{o1}\bar{x}$可将$\Sigma(A,B,C)$变成能观规范I形。

定理4-27. $\Sigma(A,B,C)$引入变换矩阵T_{o2},

$$T_{o2} = [R_1 \ AR_1 \ \cdots \ A^{n-1}R_1]$$

式中：$R_1 = Q_o^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$

线性变换$x=T_{o2}\bar{x}$可将状态空间$\Sigma(A,B,C)$变成能观规范II形。

能观规范形和能控规范形互为对偶。

@19108002-崔荣成

4.7 实现问题

给定的真有理实矩阵函数 $G(s)$，如果能找到相应的线性定常连续系统 $\Sigma(A,B,C,D)$，满足 $G(s)=C(sI-A)^{-1}B+D$，则为 $G(s)$ 实现。

4.7.2 能控规范形实现和能观规范形实现

1. SISO 系统的能控规范形实现

$$G(s)=\frac{b_1 s^{n-1}+\cdots+b_n}{s^n+a_1 s^{n-1}+\cdots+a_n}$$

能控规范I形：

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C=[\beta_1\ \beta_2\ \cdots\ \beta_{n-1}\ \beta_n],\ D=[0]$$

$$\begin{cases} \beta_0=b_0 \\ \beta_1=b_1-a_1\beta_0 \\ \beta_2=b_2-a_1\beta_1-a_2\beta_0 \\ \vdots \\ \beta_n=b_n-a_1\beta_{n-1}-\cdots-a_n\beta_0 \end{cases}$$

能控规范II形：

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C=[b_n,\ b_{n-1},\ b_{n-2},\ \cdots,\ b_1],\ D=[0]$$

2. SISO 系统的能观规范形实现

能观规范I形

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

$$C=[1\ 0\ \cdots\ 0\ 0]$$

能观规范II形

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ b_{n-2} \\ \vdots \\ b_1 \end{bmatrix}$$

$$C=[0\ 0\ \cdots\ 0\ 1]$$

3. MIMO（不作要求）

4.7.3 最小实现

定理：$\Sigma(A,B,C)$ 是给定传递函数阵 $G(s)$ 的最小实现的充要条件：系统完全能控且完全能观。

方法：

(1) 给定 $G(s)$，找 $\Sigma(A,B,C)$。

用较方便的方法实现能控或能观。

输入多时先能观

输出多时先能控

(2) 对所得系统能控能观分解

能控又能观的子系统为 $G(s)$ 的最小实现。

具有相同维数。

@19108002-崔荣成