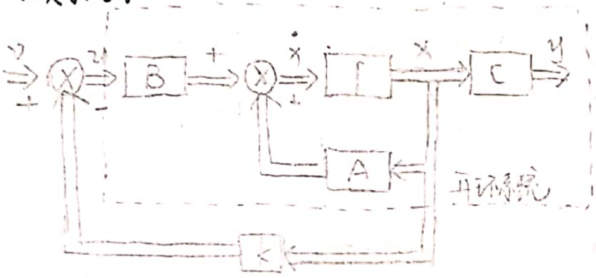
Ch.6 线性系统综合

6.1 状态反馈与输出反馈

6.1.1 状态反馈的描述式

对线性定常连续被控系统 $\Sigma(A,B,C)$，若取状态变量来构成反馈律，则所得到的闭环控制系统为状态反馈系统。



$$\begin{cases} \dot{x}=Ax+Bu \\ y=Cx \end{cases}$$

$$\boxed{u=-Kx+v}$$

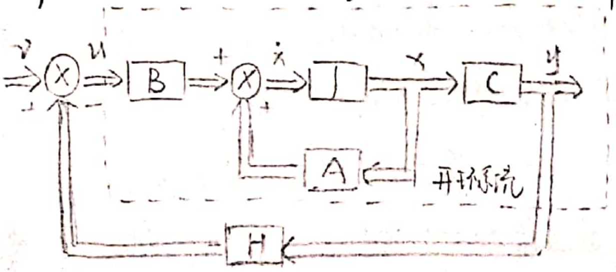
$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}=(A-BK)x+Bv \\ y=Cx \end{cases}$$

$$G_K(s)=C(sI-A+BK)^{-1}B$$

简记为 $\Sigma_K(A-BK,B,C)$

6.1.2 输出反馈的描述式

输出反馈采用系统的输出变量构成反馈律。



$$\begin{cases} \dot{x}=Ax+Bu \\ y=Cx \end{cases}$$

$$\boxed{u=-Hy+v}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}=(A-BHC)x+Bv \\ y=Cx \end{cases}$$

$$G_H(s)=C(sI-A+BHC)^{-1}B$$

简记为 $\Sigma_H(A-BHC,B,C)$

- 输出反馈可视为当 $K=HC$ 时的状态反馈。

6.1.3 闭环系统的状态能控性和能观性

1. 闭环系统的状态能控性
   - 状态反馈不改变系统的状态能控性
   - 输出反馈不改变系统的状态能控性
2. 闭环系统的状态能观性
   - 输出反馈不改变系统的状态能观性
   - ~~输~~状态反馈可能改变状态能观性

6.2 反馈控制与极点配置

6.2.1 状态反馈极点配置定理

定理6-1 线性定常系统 $\Sigma(A,B)$ 利用线性状态反馈闭环系统 $\Sigma_K(A-BK,B)$ 的极点任意配置充要条件 被控系统 $\Sigma(A,B)$ 状态完全能控。

$$G_K(s)=\frac{b_1 s^{n-1}+\cdots+b_n}{s^n+(a_1+k_n)s^{n-1}+\cdots+(a_n+k_1)}$$

状态反馈虽然可以改变系统的极点，但不能改变系统的零点。

6.2.2 SISO系统状态反馈极点配置方法

1) $\Sigma(A,B)$ 为~~[illegible]~~能控规范Ⅱ形，相应反馈矩阵

$$K=[k_1\ k_2\ \cdots\ k_n]=[a_n^*-a_n\ \ a_{n-1}^*-a_{n-1}\ \cdots\ a_1^*-a_1]$$

a_i, a_i^* 分别为开环系统 $\Sigma(A,B)$ 和期望的闭环系统 $\Sigma(A-BK,B)$ 的特征多项式的系数。

$$(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_n)=0$$

$$\Downarrow$$

$$s^n+a_1^*s^{n-1}+a_2^*s^{n-2}+\cdots+a_n^*=0$$

$$s^n+(a_1+k_n)s^{n-1}+(a_2+k_{n-1})s^{n-2}+\cdots+a_n+k_1=0$$

$$k_n=a_1^*-a_1 \qquad k_{n-1}=a_2^*-a_2 \quad \cdots \quad k_1=a_n^*-a_n$$

2) 若$\Sigma(A,B)$不为能控规范II形，
利用线性变换 $x=T_{c2}\tilde{x}$，$\Sigma(A,B)$变成$\tilde{\Sigma}(\tilde{A},\tilde{B})$
有 $\tilde{A}=T_{c2}^{-1}AT_{c2}$，$\tilde{B}=T_{c2}^{-1}B$
能对能控II形$\Sigma(\tilde{A},\tilde{B})$进行极点配置，
相应的状态反馈阵为
$$\tilde{K}=[a_n^*-a_n \quad a_{n-1}^*-a_{n-1} \quad \cdots \quad a_1^*-a_1]$$
原系统$\Sigma(A,B)$的相应状态反馈阵K为 $K=\tilde{K}T_{c2}^{-1}$

6.3 系统镇定

6.3.1 状态反馈镇定

定理6-3. 状态完全能控的系统$\Sigma(A,B,C)$可经状态反馈矩阵K镇定。

定理6-4. 若系统$\Sigma(A,B,C)$是不完全能控的，则线性~~状态~~反馈使系统镇定的充要条件：系统的完全不能控部分是渐近稳定的，即系统$\Sigma(A,B,C)$不稳定的极点只分布在系统的能控部分。

状态反馈镇定算法步骤：

1) 将可镇定的系统$\Sigma(A,B,C)$进行能控性分解，获得变换矩阵P_c，并可得到
$$\bar{A}=P_c^{-1}AP_c=\left[\begin{array}{c:c}\bar{A}_{11} & \bar{A}_{12}\\ \hdashline 0 & \bar{A}_{22}\end{array}\right] \quad \bar{B}=P_c^{-1}B=\begin{bmatrix}\bar{B}_1\\ \hdashline 0\end{bmatrix}\begin{array}{l}\text{能控}\\ \text{不能控}\end{array}$$
能控　不能控

其中，$\Sigma_c(\bar{A}_{11},\bar{B}_1,\bar{C}_1)$为完全能控部分，$\Sigma(\bar{A}_{22},0,\bar{C}_2)$为完全不能控部分但渐近稳定。

2) 利用极点配置算法求取状态反馈矩阵$\bar{K}_1$，使得$\bar{A}_{11}-\bar{B}_1\bar{K}_1$具有一组稳定特征值。

3) 计算原系统$\Sigma(A,B,C)$可镇定的状态反馈阵
$K=[\bar{K}_1 \quad 0]P_c^{-1}$。

6.3.2 输出反馈镇定

定理6-5 系统$\Sigma(A,B,C)$通过输出反馈能镇定
充要条件：系统结构分解中的能控且能观部分是能输出反馈极点配置的，其余部分是渐近稳定的。

证：对$\Sigma(A,B,C)$进行能控能观性结构分解，可得
$$\tilde{A}=\begin{bmatrix}\tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} & \tilde{A}_{13} & \tilde{A}_{14}\\ 0 & \tilde{A}_{22} & 0 & \tilde{A}_{24}\\ 0 & 0 & \tilde{A}_{33} & \tilde{A}_{34}\\ 0 & 0 & 0 & \tilde{A}_{44}\end{bmatrix},\ \tilde{B}=\begin{bmatrix}\tilde{B}_1\\ \tilde{B}_2\\ 0\\ 0\end{bmatrix},\ \tilde{C}=[0 \ \tilde{C}_2 \ 0 \ \tilde{C}_4]$$

闭环系统的系统矩阵
$$\tilde{A}-\tilde{B}\tilde{H}\tilde{C}=\begin{bmatrix}\tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} & \tilde{A}_{13} & \tilde{A}_{14}\\ 0 & \tilde{A}_{22} & 0 & \tilde{A}_{24}\\ 0 & 0 & \tilde{A}_{33} & \tilde{A}_{34}\\ 0 & 0 & 0 & \tilde{A}_{44}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\tilde{B}_1\\ \tilde{B}_2\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\tilde{H}[0 \ \tilde{C}_2 \ 0 \ \tilde{C}_4]$$
$$=\begin{bmatrix}\tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12}-\tilde{B}_1\tilde{H}\tilde{C}_2 & \tilde{A}_{13} & \tilde{A}_{14}-\tilde{B}_1\tilde{H}\tilde{C}_4\\ 0 & \tilde{A}_{22}-\tilde{B}_2\tilde{H}\tilde{C}_2 & 0 & \tilde{A}_{24}-\tilde{B}_2\tilde{H}\tilde{C}_4\\ 0 & 0 & \tilde{A}_{33} & \tilde{A}_{34}\\ 0 & 0 & 0 & \tilde{A}_{44}\end{bmatrix}$$

闭环系统特征多项式
$$|sI-(\tilde{A}-\tilde{B}\tilde{H}\tilde{C})|=|sI-\tilde{A}_{11}|\cdot|sI-(\tilde{A}_{22}-\tilde{B}_2\tilde{H}\tilde{C}_2)|\cdot|sI-\tilde{A}_{33}|\cdot|sI-\tilde{A}_{44}|$$

当且仅当$\tilde{A}_{11}$，$\tilde{A}_{22}-\tilde{B}_2\tilde{H}\tilde{C}_2$，$\tilde{A}_{33}$，$\tilde{A}_{44}$的特征值有负实部时，闭环系统渐近稳定。

即$\Sigma(A,B,C)$通过输出反馈镇定 $\Longleftrightarrow$
能控且能观部分$\Sigma(\tilde{A}_{22},\tilde{B}_2,\tilde{C}_2)$是输出反馈极点配置的，其余部分是渐近稳定的。

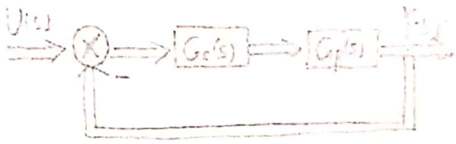
6.4 系统解耦

在一个MIMO系统中，每一个输入都受多个输出的影响，每个输出受多个输入的控制。一个控制量的变化必然会波及其他量的变化，这种现象称为耦合。

解耦：消除系统间耦合关联作用。

解耦方法：补偿器解耦、状态反馈解耦。

6.4.1 补偿器解耦



串联解耦方框图

前向通路的传递函数 $G(s)=G_p(s)G_c(s)$

反馈回路的传递矩阵 $H(s)=I$

系统的闭环传递函数

$$W(s)=[I+G_p(s)G_c(s)]^{-1}G_p(s)G_c(s)$$

为实现系统解耦，要求 $W(s)$ 为对角线矩阵。

$[I-W(s)]$、$G_p(s)G_c(s)$ 为对角线矩阵。

即为实现解耦，取合适的补偿器 $G_c(s)$，使 $G_p(s)G_c(s)$ 是非奇异对角线矩阵。

$$G_c(s)=G_p^{-1}(s)W(s)[I-W(s)]^{-1}$$

6.4.2 状态反馈解耦

通过对系统设计状态反馈律，构造状态反馈闭环控制系统，使得闭环系统的输入输出间实现解耦。

模型描述：

$$\begin{cases} \dot{x}=Ax+Bu \\ y=Cx \end{cases}$$

u,y 为m维向量，x 为n维向量，A为 $n\times n$ 矩阵，B为 $n\times m$ 矩阵，C为 $m\times n$ 矩阵。

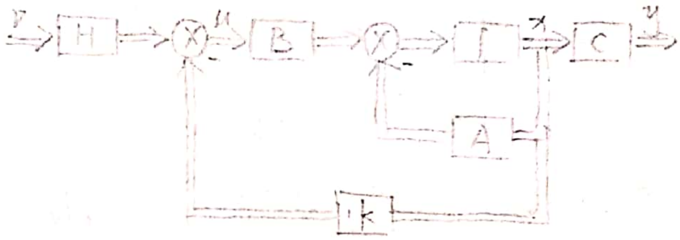
构造状态反馈控制律 $u=-Kx+Hv$.

使闭环系统的输入输出实现完全解耦。

K是 $m\times m$ 非奇异反馈矩阵，

H是 $m\times m$ 实常数非奇异矩阵，

v 是m维的外部输入向量。



用状态反馈实现解耦的系统

闭环系统状态空间模型

$$\begin{cases} \dot{x}=(A-BK)x+BHu \\ y=Cx \end{cases}$$

状态反馈解耦条件：

状态反馈解耦系统实现输入输出间完全解耦的充分必要条件 如下定义的矩阵E是非奇异矩阵。

$$E=\begin{bmatrix} C_1A^{l_1}B \\ C_2A^{l_2}B \\ \vdots \\ C_mA^{l_m}B \end{bmatrix}$$

其中 $C_i,(i=1,2,\cdots,m)$ 是系统输出矩阵C第i行向量。

$l_i,(i=1,2,\cdots,m)$ 是从0到n-1之间的某一正整数，且 l_i 应该满足不等式 $C_iA^jB\neq 0$ 的最小 j.

$$l_i=\begin{cases} j & C_iA^kB=0,\ k=0,1,\cdots,j-1,\ C_iA^jB\neq 0 \\ n-1 & C_iA^kB=0,\ k=0,1,\cdots,n-1 \end{cases}$$

定义 $F=\begin{bmatrix} C_1A^{l_1+1} \\ C_2A^{l_2+1} \\ \vdots \\ C_mA^{l_m+1} \end{bmatrix}$

选取反馈矩阵 $K=E^{-1}F=E^{-1}\begin{bmatrix} C_1A^{l_1+1} \\ C_2A^{l_2+1} \\ \vdots \\ C_mA^{l_m+1} \end{bmatrix}$.

前馈矩阵 $H=E^{-1}$

代入闭环系统状态空间模型得

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - BE^{-1}F)x + BE^{-1}u \\ y = Cx. \end{cases}$$

可得 $W(s) = C(sI - A + BE^{-1}F)^{-1}BE^{-1}$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{s^{l_1+1}} & & & 0 \\ & \frac{1}{s^{l_2+1}} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{1}{s^{l_m+1}} \end{bmatrix}$$

为对角线矩阵，所以其闭环系统是一个完全解耦。

（积分型解耦系统）

6.5 状态观测器

状态变量的重构或观测估计：设法另外构造一个物理可实现的动态系统。

6.5.1 全维状态观测器及其设计方法

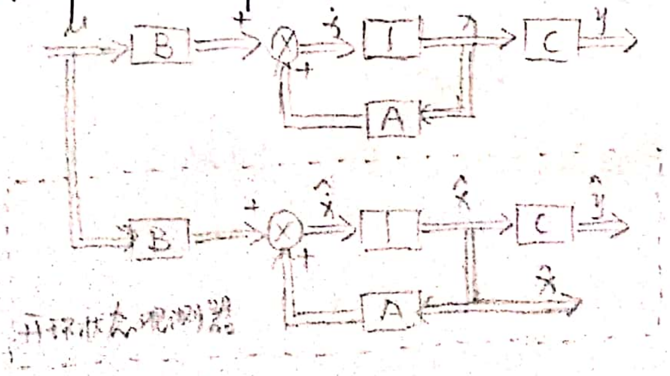
1. 开环状态观测器

线性定常连续系统 $\Sigma(A,B,C)$，A,B,C 已知，$x(t)$ 不能直接测量，则可以利用仿真技术构造一个和被控系统有同样动力学性质（$A.B.C$ 相同）的系统来重构被控系统的状态变量：

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases} \longleftarrow \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

$\hat{x}$ 为被控系统变量 $x(t)$ 的估计值。

该估计系统称为开环状态观测器 $\hat{\Sigma}(A,B,C)$



状态估计误差 $x-\hat{x}$ 的解为

$$x(t) - \hat{x}(t) = e^{At}[x(0) - \hat{x}(0)]$$

2. 渐近状态观测器

利用输出变量 y 来对状态估计值进行修正.

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + G(y - \hat{y}) \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases}$$

其中，G 为状态观测器的反馈矩阵.

被控系统 $\Sigma(A,B,C)$ 的状态观测器记为 $\hat{\Sigma}(A-GC,B,C)$

状态估计误差 $\bar{x} = x - \hat{x}$

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} &= A(x-\hat{x}) - G(y-\hat{y}) \\ &= A(x-\hat{x}) - GC(x-\hat{x}) \\ &= (A-GC)(x-\hat{x}) = (A-GC)\bar{x} \end{aligned}$$

解为 $\bar{x}(t) = e^{(A-GC)t}\bar{x}(0)$

$$= e^{(A-GC)t}[x(0) - \hat{x}(0)]$$

定理：状态观测器的极点可以任意配置，即通过矩阵 G 任意配置 $A-GC$ 的特征值的充要条件 是矩阵对 (A,C) 为能观的.

类似于状态反馈的极点配置技术，有如下状态观测器的设计方法。

方法一：

能观性矩阵对(A,C) $\xrightarrow{\text{对偶原理}}$ 能控性矩阵对(A^T,C^T) $\xrightarrow{\text{状态反馈极点配置技术得}G^T}$ 配置$A^T-C^TG^T$的极点 $\xrightarrow{\text{对偶原理}}$ 由反馈矩阵G配置状态观测器$A-GC$极点

方法二：

完全能观$\Sigma(A,C)$ $\xrightarrow[x=T_{o2}\bar{x}]{\text{非奇异变换}}$ 能观规范II型$\bar{\Sigma}(\bar{A},\bar{C})$

$$\bar{A}=T_{o2}^{-1}AT_{o2}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C}=CT_{o2}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

对$\bar{\Sigma}(\bar{A},\bar{C})$进行极点配置，得观测器反馈阵$\bar{G}$

$$\bar{G}=[a_n^*-a_n,\ a_{n-1}^*-a_{n-1}\ \cdots\ a_1^*-a_1]^T$$

∴ 原系统$\Sigma(A,B,C)$相应状态观测器的反馈阵G为 $G=T_{o2}\bar{G}$

6.5.2 降维状态观测器及其设计方法

降维状态观测器：所设计的状态观测器的维数少于状态变量的维数n。

将输出矩阵满秩的状态空间模型，对状态变量重排序有

$$\begin{array}{l} n-m\text{维} \\ m\text{维} \end{array}\left\{\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}+\left[\begin{array}{c} B_1 \\ \hline B_2 \end{array}\right]u \\ y &= \left[\begin{array}{c|c} C_1 & C_2 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned}\right.$$

C_2为$m\times m$维的可逆方阵；x_1,x_2分别为$n-m$和m维。

当变换矩阵 $P=\begin{bmatrix} I & 0 \\ -C_2^{-1}C_1 & C_2^{-1} \end{bmatrix}$ 时，

在状态变换$x=P\tilde{x}$下，模型变换为

$$\begin{array}{l} n-m\text{维} \\ m\text{维} \end{array}\left\{\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \end{bmatrix} &= \left[\begin{array}{c|c} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \hline \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{array}\right]\begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix}+\left[\begin{array}{c} \tilde{B}_1 \\ \hline \tilde{B}_2 \end{array}\right]u \\ y &= \left[\begin{array}{c|c} 0 & I \end{array}\right]\begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} \end{aligned}\right.$$

$\tilde{x}_2(t)$即为$y(t)$，只需求$\tilde{x}_1(t)$即可。

降维状态观测器的设计方法：

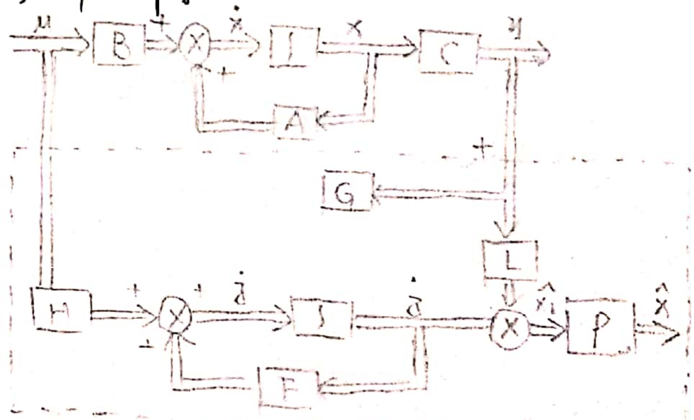
$\tilde{x}_1$满足状态方程：

$$\dot{\tilde{x}}_1=\tilde{A}_{11}\tilde{x}_1+\tilde{A}_{12}\tilde{x}_2+\tilde{B}_1u=\tilde{A}_{11}\tilde{x}_1+\tilde{A}_{12}y+\tilde{B}_1u$$

构造$\tilde{x}_1$的全维状态观测器

$$\left\{\begin{aligned} \dot{z} &= Fz+Gy+Hu \\ \hat{\tilde{x}}_1 &= z+Ly \end{aligned}\right.$$

z是降维观测器的$n-m$维状态变量；$\hat{\tilde{x}}_1$是降维观测器的输出变量，即原系统$\tilde{x}_1$的估计值。F,G,H,L为待定常数阵。



$$\left\{\begin{aligned} F &= \tilde{A}_{11}-L\tilde{A}_{21} \\ G &= \tilde{A}_{12}-L\tilde{A}_{22}+FL \\ H &= \tilde{B}_1-L\tilde{B}_2 \end{aligned}\right.$$

反馈矩阵L与全维状态观测器中的G求法一致

$\tilde{x}(t)$的估计值为 $\hat{\tilde{x}}=\begin{bmatrix} z+Ly \\ y \end{bmatrix}$

原系统$x(t)$的估计值

$$\hat{x}=P\hat{\tilde{x}}=P\begin{bmatrix} z+Ly \\ y \end{bmatrix}$$

则原系统的降维状态观测器为

$$\begin{cases} \dot{z} = Fz + Gy + Hu \\ \hat{x} = P\begin{bmatrix} z + Ly \\ y \end{bmatrix} \end{cases}$$

6.6 带状态观测器的闭环控制系统

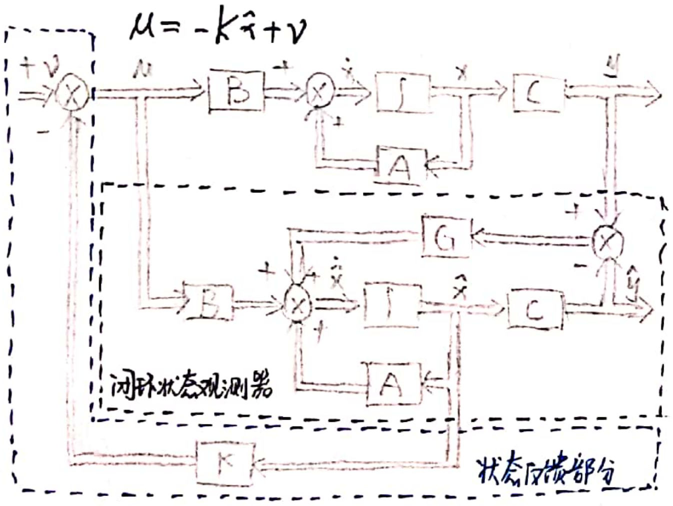
系统 $\Sigma(A,B,C)$ 状态能控又能观，则状态反馈进行任意极点配置，以及能建立全维状态观测器并对其进行任意极点配置。

$\Sigma(A,B,C)$，其全维状态观测器为

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + G(y - \hat{y}) \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases}$$

闭环控制系统的状态反馈律为

$$u = -K\hat{x} + v$$



定义状态观测误差 $\tilde{x} = x - \hat{x}$

$$\dot{\tilde{x}} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = (A - GC)\tilde{x}$$

系统状态方程可记为 $\dot{x} = (A - BK)x + BK\tilde{x} + Bv$

∴ 带全维状态观测器的状态反馈闭环控制系统

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\tilde{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A-BK & BK \\ 0 & A-GC \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ \tilde{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} v \\ y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ \tilde{x} \end{bmatrix} \end{cases}$$

闭环系统的几点特性：

1) 分离特性　状态反馈控制与状态观测器的分离特性。

2) 传递函数的不变性，状态观测器不改变闭环系统的传递函数阵。

3) 状态观测误差不能控　状态观测误差 $\tilde{x}(t)$ 是不能控的，即不能由外部输入去影响它。