现代控制理论习题 1　P80

2-7. 将系统输入输出方程转换为状态空间模型.

(1) $\dddot{y}+2\ddot{y}+6\dot{y}+3y=5u$

由输入输出方程可知, $a_1=2, a_2=6, a_3=3, b=5$

选择输出 y 及其一阶、二阶导数为状态变量时,

状态空间模型为

$$\begin{cases} \dot{x}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -6 & -2 \end{bmatrix}x+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}u \\ y=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}x \end{cases}$$

(2) $2\dddot{y}-3y=\ddot{u}-u$　　$\dddot{y}-\frac{3}{2}y=\frac{1}{2}\ddot{u}-\frac{1}{2}u$

由输入输出方程可知, $a_1=0, a_2=0, a_3=-\frac{3}{2}$

$b_0=\frac{1}{2}, b_1=0, b_2=0, b_3=-\frac{1}{2}$

待定系数 β_i $(i=0,1,2,3)$ 满足

$$\begin{cases} \beta_0=b_0=\frac{1}{2} \\ \beta_1=b_1-a_1\beta_0=0 \\ \beta_2=b_2-a_1\beta_1-a_2\beta_0=0 \\ \beta_3=b_3-a_1\beta_2-a_2\beta_1-a_3\beta_0=\frac{1}{4} \end{cases}$$

当选择状态变量为

$$\begin{cases} x_1=y-\beta_0u=y-\frac{1}{2}u \\ x_2=\dot{y}-\beta_1u-\beta_0\dot{u}=\dot{y}-\frac{1}{2}\dot{u} \\ x_3=\ddot{y}-\beta_2u-\beta_1\dot{u}-\beta_0\ddot{u}=\ddot{y}-\frac{1}{2}\ddot{u} \end{cases}$$

时, 状态空间模型为

$$\begin{cases} \dot{x}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{3}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}x+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}u \\ y=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}x+\frac{1}{2}u \end{cases}$$

(3) $\dddot{y}+4\ddot{y}+5\dot{y}+2y=2\dddot{u}+\ddot{u}+\dot{u}+2u$

由输入输出方程可知, $a_1=4, a_2=5, a_3=2$

$b_0=2, b_1=1, b_2=1, b_3=2$

待定系数 β_i $(i=0,1,2,3)$ 满足

$$\begin{cases} \beta_0=b_0=2 \\ \beta_1=b_1-a_1\beta_0=-7 \\ \beta_2=b_2-a_1\beta_1-a_2\beta_0=1+28-10=19 \\ \beta_3=b_3-a_1\beta_2-a_2\beta_1-a_3\beta_0=2-4\times19+35-6 \\ \quad =31-76=-45 \end{cases}$$

当选择状态变量为

$$\begin{cases} x_1=y-\beta_0u=y-2u \\ x_2=\dot{y}-\beta_1u-\beta_0\dot{u}=\dot{y}+7u-2\dot{u} \\ x_3=\ddot{y}-\beta_2u-\beta_1\dot{u}-\beta_0\ddot{u}=\ddot{y}-19u+7\dot{u}-2\ddot{u} \end{cases}$$

时, 状态空间模型为

$$\begin{cases} \dot{x}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -5 & -4 \end{bmatrix}x+\begin{bmatrix} -7 \\ 19 \\ -45 \end{bmatrix}u \\ y=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}x-2u \end{cases}$$

2-8. 将传递函数转换为状态空间模型

(1) $G(s)=\dfrac{2s^2+18s+40}{s^3+6s^2+11s+6}=\dfrac{\cancel{2s^2+18s+40}\ 2(s+5)(s+4)}{(s+1)(s+2)(s+3)}$

由系统特征多项式 $s^3+6s^2+11s+6=0$, 可得系统极点

$s_1=-1, s_2=-2, s_3=-3$

传递函数 $G(s)=\dfrac{k_1}{s-s_1}+\dfrac{k_2}{s-s_2}+\dfrac{k_3}{s-s_3}$

待定系数　$k_1=[G(s)(s-s_i)]|_{s=s_i}=[G(s)(s+1)]|_{s=-1}$

$=\dfrac{2-18+40}{1\times2}=12$

$k_2=[G(s)(s+2)]|_{s=-2}=\dfrac{8-36+40}{-1\times1}=-12$

$k_3=[G(s)(s+3)]|_{s=-3}=\dfrac{18-54+40}{-2\times(-1)}=2$

故当选择状态变量为 $G(s)$ 分式并联分解的各个一阶惯性环节的输出时, 可得状态空间模型.

$$\begin{cases} \dot{x}=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}x+\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}u \\ y=\begin{bmatrix} 12 & -12 & 2 \end{bmatrix}x \end{cases}$$

(2) $G(s)=\dfrac{s^2+2s+1}{s^2+5s+6}=\dfrac{(s+1)^2}{(s+2)(s+3)}$

由特征多项式 $s^2+5s+6=0$，可得极点 $s_1=-2, s_2=-3$.

传递函数 $G(s)=\dfrac{k_1}{s-s_1}+\dfrac{k_2}{s-s_2}$

系数 $k_1=[G(s)(s+2)]|_{s=-2}=1$

$k_2=[G(s)(s+3)]|_{s=-3}=-4$

当选择状态变量 $G(s)$ 分式并联分解的各个一阶惯性环节的输出时，状态空间模型为

$$\begin{cases}\dot{x}=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}u\\[2ex] y=[1\ \ -4]\,x\end{cases}$$

(3) $G(s)=\dfrac{3(s+5)}{(s+3)^2(s+1)}$ $\quad \dfrac{d}{ds}\left[\dfrac{3(s+5)}{s+1}\right]=\dfrac{3(s+1)-3(s+5)}{(s+1)^2}\Big|_{s=-3}=\dfrac{3\times(-2)-3\times2}{4}=-3$

由系统特征多项式 $(s+3)^2(s+1)$ 可知，系统有二重极点 $s_1=-3$，单极点 $s_3=-1$.

传递函数 $G(s)$ 可分解为 $G(s)=\dfrac{k_{11}}{(s-s_1)^2}+\dfrac{k_{12}}{s-s_1}+\dfrac{k_{31}}{s-s_3}$

待定系数 $k_{11}=[G(s)(s+3)^2]|_{s=-3}=-3$

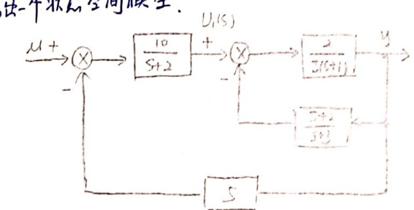
$k_{12}=\frac{d}{ds}[G(s)(s+3)^2]|_{s=-3}=-3$

$k_{31}=[G(s)(s+1)]|_{s=-1}=3$

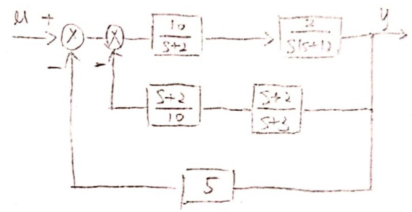
当选择状态变量 $G(s)$ 分式串-并联分解的各个一阶惯性环节的输出时，状态空间模型为

$$\begin{cases}\dot{x}=\begin{bmatrix}-3 & 1 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}u\\[2ex] y=[-3\ \ -3\ \ 3]\,x\end{cases}$$

2-10. 给定系统方框图，输入变量和输出变量 u, y，写出一个状态空间模型.



将分支点前移可得新的系统方框图如下.



则有传递函数 $G(s)=\dfrac{10}{s+2}\cdot\dfrac{2}{s(s+1)}-\dfrac{s+2}{10}\cdot\dfrac{s+2}{s+3}-5$

$$=\frac{200(s+3)-(s+2)^3(s+1)s-50s(s+1)(s+2)(s+3)}{s(s+1)(s+2)(s+3)\cdot 10}$$

$$\therefore G(s)=\frac{200(s+3)-s(s+1)(s+2)[(s+2)-50(s+3)]}{10\cdot s(s+1)(s+2)(s+3)}$$

由系统特征多项式可知有极点 $s_1=0, s_2=-1, s_3=-2, s_4=-3$

传递函数 $G(s)=\dfrac{k_1}{s-s_1}+\dfrac{k_2}{s-s_2}+\dfrac{k_3}{s-s_3}+\dfrac{k_4}{s-s_4}$

待定系数 $k_1=[G(s)(s-0)]|_{s=0}=\dfrac{600}{60}=10$

$k_2=[G(s)(s+1)]|_{s=-1}=\dfrac{400}{10\times(-1)\times1\times2}=-20$

$k_3=[G(s)(s+2)]|_{s=-2}=\dfrac{200}{10\times(-2)\times(-1)\times1}=10$

$k_4=[G(s)(s+3)]|_{s=-3}=\dfrac{3\times(-2)\times(-1)\times(-1)}{10\times(-3)\times(-2)\times(-1)}=\dfrac{1}{10}$

当选择 $G(s)$ 分式并联分解的各一阶惯性环节的输出时，状态空间模型为

$$\begin{cases}\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}u\\[2ex] y=\left[10\ \ -20\ \ 10\ \ \frac{1}{10}\right]x\end{cases}$$

2-11. 已知状态空间模型为

$$\begin{cases}\dot{x}=\begin{bmatrix}3&0&0\\1&5&2\\0&2&1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1&0\\2&0\\0&5\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}3&0&1\\6&2&0\end{bmatrix}x\end{cases}$$

现用 $\tilde{x}=Px$ 进行状态变换，$P=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$

写出状态变换后的状态方程和输出方程。

解：$\because P=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$ $\quad\therefore P^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$

则有 $\tilde{A}=P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&\frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&0&0\\1&5&2\\0&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}3&0&0\\\frac{1}{2}&\frac{5}{2}&1\\0&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&0&0\\\frac{1}{2}&5&3\\0&\frac{4}{3}&1\end{bmatrix}$

$\tilde{B}=P^{-1}B=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&\frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\2&0\\0&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\1&0\\0&\frac{5}{3}\end{bmatrix}$

$\tilde{C}=CP=\begin{bmatrix}3&0&1\\6&2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&0&3\\6&4&0\end{bmatrix}$

故系统在新的状态变量 $\tilde{x}$ 下（经过状态变换后）的状态方程和输出方程如下。

$$\begin{cases}\dot{\tilde{x}}=\begin{bmatrix}3&0&0\\\frac{1}{2}&5&3\\0&\frac{4}{3}&1\end{bmatrix}\tilde{x}+\begin{bmatrix}1&0\\1&0\\0&\frac{5}{3}\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}3&0&3\\6&4&0\end{bmatrix}\tilde{x}\end{cases}$$

2-13. 试将状态方程变换为约旦规范形（对角线规范形）

(1) $$\begin{cases}\dot{x}=\begin{bmatrix}2&-1&-1\\0&-1&0\\0&2&1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}7\\2\\3\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&2&0\end{bmatrix}x\end{cases}$$

解：(1) 求A的特征值。

$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&1&1\\0&\lambda+1&0\\0&-2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda^2-1)=0$

$\lambda_1=2,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=-1$

(2) 求特征值对应的特征向量。

$(\lambda_1I-A)P_1=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&3&0\\0&-2&1\end{pmatrix}P_1=0 \qquad P_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

$(\lambda_2I-A)P_2=\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&2&0\\0&-2&0\end{pmatrix}P_2=0 \qquad P_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

$(\lambda_3I-A)P_3=\begin{pmatrix}-3&1&1\\0&0&0\\0&-2&-2\end{pmatrix}P_3=0 \qquad P_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

(3) 线性变换矩阵P及逆矩阵 P^{-1}。

$P=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$

$(P\,|\,E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&0&1&0&1&0\\0&1&-1&0&0&1\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&0&1&0&1&0\\0&1&0&0&1&1\end{array}\right)$

$=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&-1&-1\\0&1&0&0&1&1\\0&0&1&0&1&0\end{array}\right) \qquad \therefore P^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&1\\0&1&0\end{pmatrix}$

(4) 计算 $\tilde{A}$、$\tilde{B}$、$\tilde{C}$。

$\tilde{A}=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1&-1\\0&-1&0\\0&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}2&-2&-2\\0&1&1\\0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ （不同单根）

$\tilde{B}=P^{-1}B=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\5\\2\end{pmatrix}$

$\tilde{C}=CP=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&1&2\end{pmatrix}$

$\therefore$ 新的状态空间模型为

$$\begin{cases}\dot{\tilde{x}}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\tilde{x}+\begin{bmatrix}2\\5\\2\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}0&1&-1\\1&1&2\end{bmatrix}x\end{cases}$$

(2) $\dot{x}=\begin{bmatrix}8&-8&-2\\4&-3&-2\\3&-4&1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}2&3\\1&5\\7&1\end{bmatrix}u$

解：(1) 求A的特征值

$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-8&8&2\\-4&\lambda+3&2\\-3&4&\lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-4&5-\lambda&0\\-4&\lambda+3&2\\-3&4&\lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-4&1&0\\-4&\lambda-1&2\\-3&1&\lambda-1\end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix}\lambda-4&1&0\\-4&\lambda-1&2\\1-\lambda&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(1-\lambda)\cdot2+(\lambda-1)(\lambda^2-5\lambda+8)$

$=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$

$\therefore\lambda_1=1,\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=3$

(2) 求特征值对应特征向量

$(\lambda_1I-A)P_1=\begin{pmatrix}-7&8&2\\-4&4&2\\-3&4&0\end{pmatrix}P_1=0 \qquad P_1=\begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix}$

$$(\lambda_2 I-A)P_2=\begin{pmatrix}-6 & 8 & 2\\ -4 & 5 & 2\\ -3 & 4 & 1\end{pmatrix}P_2=0 \qquad P_2=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$(\lambda_3 I-A)P_2=\begin{pmatrix}-5 & 8 & 2\\ -4 & 6 & 2\\ -3 & 4 & 2\end{pmatrix}P_3=0 \qquad P_3=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$$

(3) 线性变换 P 及 P^{-1}

$$P=\begin{pmatrix}4 & 3 & 2\\ 3 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$(P|E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -2\\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1\end{array}\right)$$

$$\therefore P^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -2\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

(4) 计算 $\hat{A}$, $\hat{B}$

$$\hat{A}=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

$$\hat{B}=P^{-1}B=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -2\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 5\\ 7 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 3\\ -12 & 1\\ 7 & -6\end{pmatrix}$$

∴ 变换后状态方程

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}6 & 3\\ -12 & 1\\ 7 & 6\end{bmatrix}u.$$