现代控制理论 3　　P202

4-1 判定如下系统的状态能控性和输出能控性.

(1) $\begin{cases} \dot{x}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}x+\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}u \\ y=\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}x \end{cases}$

(1) 采用代数判据

由状态能控性的代数判据有

$B=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $AB=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

则 $\text{rank}\,Q_c=\text{rank}\begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix}=\text{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}=2=n$

所以状态完全能控.

由输出能控性的代数判据有

$\text{rank}\begin{bmatrix} CB & CAB & D \end{bmatrix}=\text{rank}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}=1=m$

所以输出完全能控.

(2) $\begin{cases} \dot{x}=\begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}x+\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}u \\ y=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}x \end{cases}$

(2) 因为A是约旦规范形矩阵，且A的特征值-3的约旦块对应的B的分块最后一行全为零，则由状态能控性的模态判据有，系统不完全能控。

由输出能控性的代数判据有

$\text{rank}\begin{bmatrix} CB & CAB & CA^2B & D \end{bmatrix}=\text{rank}\begin{bmatrix} 3 & -1 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$

$=\text{rank}\begin{bmatrix} 3 & -1 & -5 & 3 & 7 & -9 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & -3 & -9 & 9 & 0 \end{bmatrix}=2=m$

所以输出完全能控.

(3) $\begin{cases} \dot{x}=\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}x+\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}u \\ y=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}x \end{cases}$

(3) 由状态能控性的模态判据有，特征值λ的2个约旦块对应的B的分块的最后一行与[a]和[c]有关，则系统不完全能控。

由输出能控性的代数判据有

$\begin{bmatrix} CB & CAB & CA^2B & D \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & a\lambda & a\lambda^2 & 0 \end{bmatrix}$

当a不为零时，输出完全能控；

当a为零时，输出不能控.

4-2 判定如下系统的状态能观性.

(1) $\begin{cases} \dot{x}=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}x \\ y=\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}x \end{cases}$

(1) 采用代数判据

由状态能观性的代数判据有

$\text{rank}\,Q_o=\text{rank}\begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}=\text{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}=2=n$

所以状态完全能观.

(2) $\begin{cases} \dot{x}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -3 \end{bmatrix}x \\ y=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}x \end{cases}$

(2) 采用代数判据

由状态能观性的代数判据有

$\text{rank}\,Q_o=\text{rank}\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix}=\text{rank}\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -4 & -7 & -2 \\ 4 & 4 & -1 \end{bmatrix}=3=n$

所以状态完全能观.

(3) $\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} x \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} x \end{cases}$

(3) 由状态能观性的模态判据有.

A的每个特征值对应的C的分块的第一列不全为零. 所以系统完全能观.

4-8. 试将下列系统按能控性和能观性进行结构分解.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(1) 先对系统进行能控分解。

$$\mathrm{rank}\, Q_c = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix}$$

$$= \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 10 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 < 3 = m \\ = \cancel{3} = m \end{matrix}$$

~~所以系统完全能控~~. 系统不完全能控且能控部分状态变量维数为2.

(2) 对能控系统进行能观分解.

$$\mathrm{rank}\, Q_o = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix}$$

$$= \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1 < 3 = n$$

所以能控系统不完全能观, 且能观维数为1.

选择变换矩阵 P_o 及逆矩阵 P_o^{-1}.

$$P_o^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(3) 结合两次变换结果 系统能控能观分解为

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{x} \end{cases}$$

式中 $\tilde{x} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_{co} & \tilde{x}_{c\bar{o}} & \tilde{x}_{\bar{c}o} \end{bmatrix}$ 3个子空间

$\begin{cases} \tilde{x}_{co} & 能控又能观 \\ \tilde{x}_{c\bar{o}} & 能控不能观 \\ \tilde{x}_{\bar{c}o} & 不能控但能观 \end{cases}$

变换矩阵 $P_{co} = P_c \begin{bmatrix} P_{c,o} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

$$P_c = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P_c^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}_1 = P_c^{-1} A P_c = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ -\frac{8}{3} & \frac{2}{3} & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} & \frac{7}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B}_1 = P_c^{-1} B = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{6} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C}_1 = C P_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix}$$

则系统能控分解为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_c \\ \dot{\tilde{x}}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} & \frac{7}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{x}_c \\ \tilde{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{x}_c \\ \tilde{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \end{cases}$$

不能控子系统 $\tilde{x}_{\bar{c}}$ 仅一维能观, 无需再分解, 为系统的不能控但能观子系统。

---

(2) 能控子系统 Σ_c 按能观性分解

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_c = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \frac{4}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix} \tilde{x}_c + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \tilde{x}_{\bar{c}} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \tilde{x}_c \end{cases}$$

$$\mathrm{rank}\, Q_{co} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} \tilde{C}_1 \\ \tilde{C}_1\tilde{A}_1 \end{bmatrix} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{4}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix} = 1 < 2 = n$$

所以能控子系统 Σ_c 不完全能观. 且能观维数为1.

$$P_{c,o}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P_{c,o} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}_2 = P_{c,o}^{-1} \tilde{A}_1 P_{c,o} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \frac{4}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & 0 \\ \frac{4}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B}_2 = P_{c,o}^{-1} \tilde{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C}_2 = \tilde{C}_1 P_{c,o} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

则能控子系统 Σ_c 进行能观分解为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_{co} \\ \dot{\tilde{x}}_{c\bar{o}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & 0 \\ \frac{4}{3} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{x}_{co} \\ \tilde{x}_{c\bar{o}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \tilde{x}_{\bar{c}} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{x}_{co} \\ \tilde{x}_{c\bar{o}} \end{bmatrix} \end{cases}$$

4-9 已知能控系统的状态方程A, B阵为

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$ 转化为能控规范形.

系统的能控性矩阵

$$Q_c=[B\ \ AB]=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 7\end{bmatrix}$$

是非奇异矩阵，系统状态完全能控，可变为能控规范形.

(1) 求能控规范I形. 系统变换矩阵取为

$$T_{c1}=Q_c=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 7\end{bmatrix},\ T_{c1}^{-1}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}7 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

经过变换 $x=T_{c1}\tilde{x}$ 后得到能控规范形如下.

$$\dot{\tilde{x}}=T_{c1}^{-1}AT_{c1}\tilde{x}+T_{c1}^{-1}Bu$$

$$=\begin{bmatrix}0 & -10\\ 1 & 5\end{bmatrix}\tilde{x}+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}u$$

(2) 求能控规范II形, 系统变换矩阵

$$T_1=[0\ \ 1][B\ \ AB]^{-1}=[0\ \ 1]\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 7\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{8} & \frac{1}{8}\end{bmatrix}$$

$$T_{c2}^{-1}=\begin{bmatrix}T_1\\ T_1A\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{8} & \frac{1}{8}\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{bmatrix}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & 6\end{bmatrix}$$

$$T_{c2}=\begin{bmatrix}-6 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}$$

经过 $x=T_{c2}\tilde{x}$ 后方程如下

$$\dot{\tilde{x}}=T_{c2}^{-1}AT_{c2}\tilde{x}+T_{c2}^{-1}Bu$$

$$=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-6 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}\tilde{x}+\frac{1}{8}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}u$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -10 & 5\end{bmatrix}\tilde{x}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u$$

4-10. 已知能观系统A, B, C阵为

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix},\ C=[-1\ \ 1]$$

转化为能观规范形.

系统的能观性矩阵

$$Q_o=\begin{bmatrix}C\\ CA\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$$

是非奇异矩阵，系统完全能观，可转为能观规范形.

(1) 求能观规范I形. 系统变换矩阵取为

$$T_{o1}^{-1}=Q_o=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix},\ T_{o1}=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2 & -1\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

经过变换 $x=T_{o1}\tilde{x}$ 后得到能观规范形如下.

$$\begin{cases}\dot{\tilde{x}}=T_{o1}^{-1}AT_{o1}\tilde{x}+T_{o1}^{-1}Bu\\ y=CT_{o1}\tilde{x}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dot{\tilde{x}}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\tilde{x}+\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}u\\ \quad=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & 2\end{bmatrix}\tilde{x}+\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}u\\ y=[-1\ \ 1]\begin{bmatrix}-1 & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\tilde{x}=[1\ \ 0]\tilde{x}\end{cases}$$

(2) 求能观规范II形

$$R_1=\begin{bmatrix}C\\ CA\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

则变换矩阵 $T_{o2}=[R_1\ \ AR_1]=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}$, $T_{o2}^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}$

经过变换 $x=T_{o2}\tilde{x}$ 后得到能观规范形如下

$$\begin{cases}\dot{\tilde{x}}=T_{o2}^{-1}AT_{o2}\tilde{x}+T_{o2}^{-1}Bu\\ y=CT_{o2}\tilde{x}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dot{\tilde{x}}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}\tilde{x}+\begin{bmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}u\\ \quad=\begin{bmatrix}0 & -2\\ 1 & 2\end{bmatrix}\tilde{x}+\begin{bmatrix}4\\-1\end{bmatrix}u\\ y=[-1\ \ 1]\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}\tilde{x}=[0\ \ 1]\tilde{x}\end{cases}$$