Ch.3 线性系统的时域分析

3.1 线性定常连续系统状态方程的解

3.1.1 齐次状态方程的解

齐次状态方程就是指输入为零时的状态方程，即 $\dot{x}(t)=Ax(t)$

1. 级数展开法

标量常微分方程 $\dot{x}(t)=ax(t)$ 在初始时刻 $t_0=0$ 的解，$x(t)$ 为标量变量，a 为常数

$$x(t)=q_0+q_1t+q_2t^2+\dots+q_kt^k+\dots$$

$q_k(k=1,2,\dots)$ 为待定级数展开系数.

将解代入微分方程，可得 $x(t)$ 的解表达式

$$x(t)=\left(1+at+\frac{a^2}{2!}t^2+\dots+\frac{a^k}{k!}t^k+\dots\right)x(0)$$
$$=e^{at}x(0)$$

向量状态方程的解 $x(t)=q_0+q_1t+q_2t^2+\dots+q_kt^k+\dots$

状态 $x(t)$ 的解表达式

$$x(t)=\left(I+At+\frac{A^2}{2!}t^2+\dots+\frac{A^k}{k!}t^k+\dots\right)x_0$$
$$=e^{At}x_0.$$

齐次状态方程的解：$x(t)=e^{At}x_0$.

2. 拉氏变换法

齐次状态方程 $\dot{x}=Ax$，在初始时刻 $t_0=0$ 且初始状态 $x(t)=x_0$. 两边取拉氏变换.

$$sX(s)-x_0=AX(s).$$

该齐次状态方程的解 $x(t)$ 的拉氏变换为

$$X(s)=(sI-A)^{-1}x_0.$$

拉氏反变换得 齐次状态方程的解

$$x(t)=\underline{L^{-1}[(sI-A)^{-1}]}x_0$$
$$=\underline{e^{At}}x_0.$$

若初始时刻 $t_0\neq 0$，则有 $x(t)=e^{A(t-t_0)}x_0$.

引入能描述系统~~状态~~状态转移特性的线性定常连续系统的状态转移矩阵

$$\Phi(t)=e^{At}$$
$$\Phi(t-t_0)=e^{A(t-t_0)}$$
$$\Phi(t)=L^{-1}[(sI-A)^{-1}]$$

3.1.2 线性定常连续系统的状态转移矩阵

1. 基本定义

对于线性定常连续系统 $\dot{x}=Ax$，当初始时刻 $t_0=0$，满足如下矩阵微分方程和初始条件：

$$\dot{\Phi}(t)=A\Phi(t),\quad \Phi(t)|_{t=0}=I.$$

的解 $\Phi(t)$ 为线性定常连续系统 $\dot{x}=Ax$ 的状态转移矩阵.

(1) 对角线矩阵

$$A=\mathrm{diag}\{\lambda_1\ \lambda_2\ \dots\ \lambda_n\}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

$$\Phi(t)=e^{At}=\mathrm{diag}\{e^{\lambda_1 t}\ e^{\lambda_2 t}\ \dots\ e^{\lambda_n t}\}=\begin{bmatrix}e^{\lambda_1 t} & & & \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n t}\end{bmatrix}$$

(2) 块对角矩阵

$$A=\text{block-diag}\{A_1\ A_2\ \dots A_i\}=\begin{bmatrix}A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & A_i\end{bmatrix}$$

$$\Phi(t)=e^{At}=\text{block-diag}\{e^{A_1t}\ e^{A_2t}\ \dots e^{A_it}\}=\begin{bmatrix}e^{A_1t} & & & \\ & e^{A_2t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{A_it}\end{bmatrix}$$

(3) 约旦块矩阵

$$A_i=\begin{bmatrix}\lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i\end{bmatrix}$$

$$e^{A_it}=e^{\lambda_i t}\begin{bmatrix}1 & t & \frac{t^{m_i-2}}{(m_i-2)!} & \frac{t^{m_i-1}}{(m_i-1)!} \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & 1 & t \\ & & & 1\end{bmatrix}$$

2. 矩阵指数函数和状态转移矩阵的性质.

(1) $\Phi(0)=e^{A0}=I$

(2) $e^{A(t+s)}=e^{At}e^{As}$

$\Phi(t+s)=\Phi(t)\Phi(s)$

(3) $[\Phi(t_2-t_1)]^{-1}=\Phi(t_1-t_2)$

(4) $n\times n$阶方阵A和B，当AB=BA时

$e^{(A+B)t}=e^{At}e^{Bt}$

(5) $\frac{d}{dt}e^{At}=Ae^{At}=e^{At}A$.

$\dot{\Phi}(t)=A\Phi(t)=\Phi(t)A$

(6) $[\Phi(t)]^n=\Phi(nt)$

(7) $\Phi(t_2-t_1)\Phi(t_1-t_0)=\Phi(t_2-t_0)$

(8) $e^{A^Tt}=(e^{At})^T$

3.1.3 非齐次状态方程的解

线性定常连续系统具有输入作用

$\dot{x}=Ax+Bu$

在初始状态 $x(t)|_{t=t_0}=x(t_0)$ 的解.

1. 直接求解法

$\dot{x}=Ax+Bu$

$\dot{x}-Ax=Bu$

$e^{-At}[\dot{x}-Ax]=e^{-At}Bu$

$\frac{d[e^{-At}x(t)]}{dt}=e^{-At}Bu(t)$

$\int_{t_0}^{t}\frac{d}{d\tau}[e^{-A\tau}x(\tau)]d\tau=\int_{t_0}^{t}e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$

得 $e^{-At}x(t)-e^{-At_0}x(t_0)=\int_{t_0}^{t}e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$

$\therefore\ x(t)=e^{A(t-t_0)}x(t_0)+\int_{t_0}^{t}e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$

用状态转移矩阵表示，非齐次状态方程的解

$x(t)=\Phi(t-t_0)x(t_0)+\int_{t_0}^{t}\Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$

$=\Phi(t)x_0+\int_0^t\Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau \quad (t_0=0)$

2. 拉氏变换法

$\dot{x}=Ax+Bu$ 两边取拉氏变换

$sX(s)-x_0=AX(s)+BU(s)$

$X(s)=(sI-A)^{-1}[x_0+BU(s)]$

上式两边取拉氏反变换 并利用卷积的拉氏变换公式

$x(t)=e^{At}x(0)+\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$

3. 状态方程解的意义

初始状态$x(t_0)$所引起的自由运动 +

输入所引起的系统强迫运动

4. 输出方程的解

$y=Cx+Du$.

$y(t)=Ce^{A(t-t_0)}x(t_0)+\int_{t_0}^{t}Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau+Du(t)$

$=C\Phi(t-t_0)x(t_0)+\int_{t_0}^{t}C\Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau+Du(t)$

初始状态所引起的自由运动 +

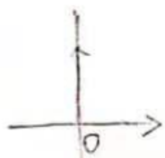
输入所引起的系统强迫运动 +

直联项引起的前馈响应

3.1.4 系统的脉冲响应

单位脉冲函数 $\delta(t)$

$$\begin{cases}\delta(t)=\begin{cases}0 & t\neq 0\\ \infty & t=0\end{cases}\\ \int_{0^-}^{0^+}\delta(t)dt=1\end{cases}$$



脉冲响应 $H(t)$

$H(t)=\int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau=\int_{0^-}^{0^+}Ce^{A(t-\tau)}B\delta(\tau)d\tau$

$H(t)=Ce^{At}B=L^{-1}[C(sI-A)^{-1}B]$