《现代控制理论》复习例题汇总

例2-1 P30 系统输入输出方程 $\dddot{y}+6\ddot{y}+11\dot{y}+6y=2u$，变换为状态空间模型

解：方程 $\dddot{y}+6\ddot{y}+11\dot{y}+6y=2u$

① $a_0=1,\ a_1=6,\ a_2=11,\ a_3=6,\ b=2$

② 当选择输出y及其一阶、二阶导数为状态变量，

③ 状态空间模型为

$$\begin{cases}\dot{x}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\\underset{-a_n}{-6}&\underset{-a_{n-1}\cdots}{-11}&\underset{-a_1}{-6}\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\\underset{b}{2}\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix}x\end{cases}$$

例2-2 P32 $\dddot{y}+5\ddot{y}+8\dot{y}+4y=2\ddot{u}+14\dot{u}+24u$ 变换为状态空间模型.

解：$\dddot{y}+5\ddot{y}+8\dot{y}+4y=2\ddot{u}+14\dot{u}+24u$

① $a_0=$[illegible]$,\ a_1=5,\ a_2=8,\ a_3=4.\ b_0=0.\ b_1=2,\ b_2=14$
$b_3=24$

② 待定系数

$$\begin{cases}\beta_0=b_0=0\\ \beta_1=b_1-a_1\beta_0=2\\ \beta_2=b_2-a_1\beta_1-a_2\beta_0=4\\ \beta_3=b_3-a_1\beta_2-a_2\beta_1-a_3\beta_0=-12\end{cases}$$

$\beta_i=b_i-a_1\beta_{i-1}-\cdots-a_i\beta_0$

③ 当选择状态变量为 $x_i=y^{(i-1)}-\beta_{i-1}u-\beta_{i-2}\ddot{u}-\cdots-\beta_0u^{(i-1)}$

$$\begin{cases}x_1=y-\beta_0u=y\\ x_2=\dot{y}-\beta_1u-\beta_0\dot{u}=\dot{y}-2u\\ x_3=\ddot{y}-\beta_2u-\beta_1\dot{u}-\beta_0\ddot{u}=\ddot{y}-4u-2\dot{u}\end{cases}$$

④ 状态空间模型为

$$\begin{cases}\dot{x}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\\underset{-a_n}{-4}&\underset{-a_{n-1}\cdots}{-8}&\underset{-a_1}{-5}\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}2\\4\\-12\end{bmatrix}u\ \begin{matrix}\beta_1\\\vdots\\\beta_{n-1}\\\beta_n\end{matrix}\\ y=\begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix}x+\beta_0u\end{cases}$$

例2-3 P34 $G(s)=\dfrac{2}{s^3+6s^2+11s+6}$ 状态空间模型

解：$G(s)=\dfrac{2}{s^3+6s^2+11s+6}=\dfrac{2}{(s+1)(s+2)(s+3)}$

系统特征多项式 $s^3+6s^2+11s+6=(s+1)(s+2)(s+3)=0$,

① 系统极点为 $s_1=-1,\ s_2=-2,\ s_3=-3$

② 于是有 $G(s)=\dfrac{k_1}{s-s_1}+\dfrac{k_2}{s-s_2}+\dfrac{k_3}{s-s_3}$

③ 待定系数 $k_1=[G(s)(s+1)]|_{s=-1}=\dfrac{2}{1\times2}=1$

$k_2=[G(s)(s+2)]|_{s=-2}=\dfrac{2}{-1\times1}=-2$

$k_3=[G(s)(s+3)]|_{s=-3}=\dfrac{2}{-2\times(-1)}=1$

$k_i=[G(s)(s-s_i)]|_{s=s_i}\quad(i=1,2,\cdots,n)$

④ 当状态变量为G(s)分式并联分解的各个一阶惯性环节的输出时，状态空间模型为

⑤

$$\begin{cases}\dot{x}=\begin{bmatrix}\underset{s_1}{-1}&0&0\\0&\underset{s_2}{-2}&0\\0&0&\underset{s_n}{-3}\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}\underset{k_1}{1}&\underset{k_2\cdots}{-2}&\underset{k_n}{1}\end{bmatrix}x\end{cases}$$

例2-4 P36 $G(s)=\dfrac{2s^2+14s+24}{s^3+5s^2+8s+4}$ 状态空间模型

$2s^2+14s+24=2(s+3)(s+4)$

解：系统特征多项式 $s^3+5s^2+8s+4=(s+2)^2(s+1)=0$.

① 系统有二重极点 $s_1=-2$ 和单极点 $s_3=-1$.

② 于是有 $G(s)=\dfrac{k_{11}}{(s-s_1)^2}+\dfrac{k_{12}}{s-s_1}+\dfrac{k_{31}}{s-s_3}$

③ 其中，$k_{11}=[G(s)(s+2)^2]|_{s=-2}=\dfrac{2\times1\times2}{-1}=-4$

$k_{12}=[\dfrac{d}{ds}G(s)(s+2)^2]|_{s=-2}=[\dfrac{d}{ds}\dfrac{2(s+3)(s+4)}{(s+1)}]|_{s=-2}$

$=\left[\dfrac{(4s+14)(s+1)-2(s+3)(s+4)}{(s+1)^2}\right]_{s=-2}$

$=-10$

$k_{31}=[G(s)(s+1)]|_{s=-1}$

$=\dfrac{2\times2\times3}{1^2}=12$

$k_{ij}=\dfrac{1}{(j-1)!}\cdot\dfrac{d^{j-1}}{ds^{j-1}}[G(s)(s-s_i)^{l_i}]|_{s=s_i}\quad(j=1,2,\cdots,l_i)$

④ 当状态变量为G(s)分式串-并联分解的一阶惯性环节的输出时，状态空间模型为

极点s_i重数

⑤

$$\begin{cases}\dot{x}=\left[\begin{array}{cc|c}\overset{s_1}{-2}&1&0\\0&\overset{s_1}{-2}&0\\\hline0&0&\underset{s_3}{-1}\end{array}\right]x+\left[\begin{array}{c}0\\1\\\hline1\end{array}\right]u\\ y=\left[\begin{array}{cc|c}\underset{k_{11}}{-4}&\underset{k_{12}}{-10}&\underset{k_{31}}{12}\end{array}\right]x\end{cases}$$

例2-5 P41
$$\begin{cases}\dot{x}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-6&-11&-6\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\6\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix}x\end{cases}$$
作 $P=\begin{bmatrix}1&1&1\\-1&-2&-3\\1&4&9\end{bmatrix}$ 的线性变换

解：$P=\begin{bmatrix}1&1&1\\-1&-2&-3\\1&4&9\end{bmatrix}$，$P^{-1}=\begin{bmatrix}3&2.5&0.5\\-3&-4&-1\\1&1.5&0.5\end{bmatrix}$

$$\underline{\tilde{A}=P^{-1}AP}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-2&0\\0&0&-3\end{bmatrix}$$
$$\underline{\tilde{B}=P^{-1}B}=\begin{bmatrix}3\\-6\\3\end{bmatrix}$$
$$\underline{\tilde{C}=CP}=\begin{bmatrix}1&1&1\end{bmatrix}$$
$\tilde{D}=D$

系统在新状态变量 $\tilde{x}$ 下的状态空间模型为
$$\begin{cases}\dot{x}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-2&0\\0&0&-3\end{bmatrix}\tilde{x}+\begin{bmatrix}3\\-6\\3\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}1&1&1\end{bmatrix}x\end{cases}$$

例2-6 P44 求 $A=\begin{bmatrix}3&0&-1\\1&2&-1\\2&0&0\end{bmatrix}$ 的特征向量

解：(1) 由特征方程 $\underline{|\lambda I-A|=0}$
$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&0&1\\-1&\lambda-2&1\\-2&0&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda^2-3\lambda+2)=(\lambda-2)^2(\lambda-1)=0$$ 得

特征值 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=2$，$\lambda_3=2$　2为系统二重特征值.
代数重数为2 .

(2) $\lambda_1=1$ 时，$\underline{(\lambda_1 I-A)v_1=0}$
$$\begin{bmatrix}-2&0&1\\-1&1&1\\-2&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{11}\\v_{12}\\v_{13}\end{bmatrix}=0$$ 有无穷解.

$n-\mathrm{rank}(\lambda_1 I-A)=3-2=1$. 特征向量解空间为一维.

通解式 $v_1=\begin{bmatrix}v_{11}\\v_{12}\\v_{13}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}v_{11}\\v_{11}\\2v_{11}\end{bmatrix}$　可取 $v_1=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$

(3) $\lambda_2=\lambda_3=2$ 时，$\underline{(\lambda_2 I-A)v_2=0}$
$$\begin{bmatrix}-1&0&1\\-1&0&1\\-2&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{21}\\v_{22}\\v_{23}\end{bmatrix}=0$$ 有无穷解

$n-\mathrm{rank}(\lambda_2 I-A)=3-1=2$. 特征向量解空间为二维.

通解式 $v_2=\begin{bmatrix}v_{21}\\v_{22}\\v_{23}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}v_{21}\\v_{22}\\v_{21}\end{bmatrix}$　可取 $v_2=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$，$v_3=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

2重特征值2有2个线性独立特征向量，<u>几何重数为2</u>

例2-7 P45 求 $A=\begin{bmatrix}-4&-3&-6\\1&0&2\\1&1&1\end{bmatrix}$ 的特征向量和链.

解：(1) 特征方程 $|\lambda I-A|=0$
$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda+4&3&6\\-1&\lambda&-2\\-1&-1&\lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda+4&3&6\\-1&\lambda&-2\\0&-1-\lambda&\lambda+1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda+4&9&6\\-1&\lambda-2&-2\\0&0&\lambda+1\end{vmatrix}$$
$$=(\lambda+1)(\lambda^2+2\lambda+1)=(\lambda+1)^3$$

特征值 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$，$-1$ 为三重特征值 <u>代数重数3</u>.

(2) $\lambda_1=-1$ 时，$(\lambda_1 I-A)v_1=0$
$$\begin{bmatrix}3&3&6\\-1&-1&-2\\-1&-1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{11}\\v_{12}\\v_{13}\end{bmatrix}=0$$

$n-\mathrm{rank}(\lambda_1 I-A)=3-1=2$，有2个独立特征向量，<u>几何重数2</u>

<u>几何重数2 < 代数重数3，某个独立特征向量存在广义特征向</u>

特征向量通解式 $v_1=\begin{bmatrix}v_{11}\\v_{12}\\-\frac{1}{2}(v_{11}+v_{12})\end{bmatrix}$

(3) 计算广义特征向量
$$(\lambda_1 I-A)v_{1,2}=-v_1$$
$$\begin{cases}v_{j,1}=v_j\\(\lambda_i I-A)v_{j,k}=-v_{j,k-1}\end{cases}$$
$$\begin{bmatrix}3&3&6\\-1&-1&-2\\-1&-1&-2\end{bmatrix}v_{1,2}=\begin{bmatrix}-v_{11}\\-v_{12}\\\frac{1}{2}(v_{11}+v_{12})\end{bmatrix}$$

有 $v_{11}=-3v_{12}$，广义特征向量通解 $v_{1,2}=\begin{bmatrix}r_1\\r_2\\-\frac{1}{2}(r_1+r_2-v_{12})\end{bmatrix}$

可取 $v_1=\begin{bmatrix}v_{11}\\v_{12}\\-\frac{1}{2}(v_{11}+v_{12})\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3v_{12}\\v_{12}\\v_{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\1\\1\end{bmatrix}$，$v_{1,2}=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}$

另一个不存在广义特征向量的 λ_1 的特征向量为
$$v_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$$

例2-10 P52. 空间模型变为约旦规范形。

$$\begin{cases}\dot{x}=\begin{bmatrix}2&1&1&0\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\-3&-1&-5&-1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}1&0&0&0\end{bmatrix}x\end{cases}$$

解：(1) 先求A的特征值

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&-1&0\\0&\lambda-2&0&0\\0&0&\lambda-2&0\\3&1&5&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-2)^3(\lambda+1)=0$$

特征值2为三重，代数重数为3

$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2$，$\lambda_4=-1$

(2) 当 $\lambda_1=2$ 时，$(\lambda_1 I-A)V_1=0$

$$\begin{bmatrix}0&-1&-1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\3&1&5&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_{11}\\V_{12}\\V_{13}\\V_{14}\end{bmatrix}=0$$

$n-\mathrm{rank}(\lambda_1 I-A)=2$

有2个独立特征向，几何重数为2

几何重数2<代数重数3，某个独立向量存在广义特征向量。

$$\begin{cases}V_{12}=-V_{13}\\3V_{11}-4V_{12}+3V_{14}=0\end{cases}$$

广义特征向量 $V_{1,2}$

$$\begin{bmatrix}0&-1&-1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\3&1&5&3\end{bmatrix}V_{1,2}=-\begin{bmatrix}V_{11}\\V_{12}\\-V_{12}\\V_{14}\end{bmatrix}\qquad V_{1,2}=\begin{bmatrix}r_1\\r_2\\r_3\\r_4\end{bmatrix}$$

取 $V_1=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\\frac{1}{3}\end{bmatrix}$，无 $V_{1,2}$ 解

取 $V_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\-1\end{bmatrix}$，$V_{1,2}=\begin{bmatrix}1\\1\\0\\-1\end{bmatrix}$

$\therefore P_{1,1}=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\\frac{1}{3}\end{bmatrix}$，$P_{2,1}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\-1\end{bmatrix}$，$P_{2,2}=\begin{bmatrix}1\\1\\0\\-1\end{bmatrix}$

当 $\lambda_4=-1$ 时，$(\lambda_4 I-A)V_4=0$ $P_{3,1}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$

(3) $P=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\1&0&1&0\\-1&0&0&0\\\frac{1}{3}&-1&-1&1\end{bmatrix}$，$P^{-1}=\begin{bmatrix}0&0&-1&0\\1&-1&0&0\\0&1&1&0\\1&0&\frac{4}{3}&1\end{bmatrix}$

(4) $\tilde{A}=P^{-1}AP=\begin{bmatrix}2&1&0&0\\0&2&1&0\\0&0&2&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}$

$\tilde{B}=P^{-1}B=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$

$\tilde{C}=CP=\begin{bmatrix}1&1&1&0\end{bmatrix}$

$$\begin{cases}\dot{\tilde{x}}=\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&2&1&0\\0&0&2&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}\tilde{x}+\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}1&1&1&0\end{bmatrix}\tilde{x}\end{cases}$$

例2-11 P53. 变换为约旦规范形.

$$\begin{cases}\dot{x}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-4&-8&-5\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix}X\end{cases}$$

解：(1) 求A的特征值

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&0\\0&\lambda&-1\\4&8&\lambda+5\end{vmatrix}=\lambda[\lambda(\lambda+5)+8]+4$$

$$=\lambda(\lambda^2+5\lambda+8)+4$$

$$=\lambda^3+5\lambda^2+8\lambda+4$$

$$=(\lambda-1)(\lambda-2)^2$$

$\lambda_1=-1$，$\lambda_2=\lambda_3=-2$.

(2) A为友矩阵，则A变为约旦矩阵的变换矩阵 $P\cdot QP^{-1}$

$P_1=\begin{bmatrix}1\\\lambda_1\\\lambda_1^2\end{bmatrix}$，$P_2=\begin{bmatrix}1&0\\\lambda_2&1\\\lambda_2^2&2\lambda_2\end{bmatrix}$

$P=\begin{bmatrix}1&1&0\\-1&-2&1\\1&4&-4\end{bmatrix}$，$P^{-1}=\begin{bmatrix}4&4&1\\-3&-4&-1\\-2&-3&-1\end{bmatrix}$

(3) $\tilde{A}=P^{-1}AP=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-2&1\\0&0&-2\end{bmatrix}$

$\tilde{B}=P^{-1}B=\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix}$

$\tilde{C}=CP=\begin{bmatrix}1&1&0\end{bmatrix}$

$$\therefore\begin{cases}\dot{\tilde{x}}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-2&1\\0&0&-2\end{bmatrix}\tilde{x}+\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}1&1&0\end{bmatrix}\tilde{x}\end{cases}$$

例3-1 P86 求线性常系统在如下的解.

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}x,\quad x_0=\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$$

解: (1) 求矩阵函数 $sI-A$ 的逆.

$$(sI-A)^{-1}=\frac{\operatorname{adj}(sI-A)}{|sI-A|}=\frac{1}{(s+1)(s+2)}\begin{bmatrix}s+3 & 1\\ -2 & s\end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{s-\gamma}\downarrow e^{\gamma t}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{2}{s+1}-\frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}\\ -\frac{2}{s+1}+\frac{2}{s+2} & -\frac{1}{s+1}+\frac{2}{s+2}\end{bmatrix}$$

(2) 计算矩阵指数函数 e^{At}.

$$\frac{1}{s-a}\rightarrow e^{at}$$
$$\frac{1}{(s-a)^2}\rightarrow t\cdot e^{at}$$
$$\frac{1}{(s-a)^3}\rightarrow \frac{t^2}{2!}e^{at}$$

$$e^{At}=\mathcal{L}^{-1}[(sI-A)^{-1}]=\begin{bmatrix}2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t}\end{bmatrix}$$

拉氏逆变换

(3) 求解

$$x(t)=e^{At}x_0=\begin{bmatrix}4e^{-t}-3e^{-2t}\\ -4e^{-t}+6e^{-2t}\end{bmatrix}$$

例3-2 P89 求状态转移矩阵的逆矩阵 $\Phi^{-1}(t)$.

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}x$$

解: 例3-1已得状态转移矩阵

$$\Phi(t)=e^{At}=\begin{bmatrix}2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t}\end{bmatrix}$$

由 $\boxed{\Phi^{-1}(-t)=\Phi(t)}$ 得

$$\therefore\ \Phi^{-1}(t)=\Phi(-t)=\begin{bmatrix}2e^{t}-e^{2t} & e^{t}-e^{2t}\\ -2e^{t}+2e^{2t} & -e^{t}+2e^{2t}\end{bmatrix}$$

例3-3 P91 求单位阶跃输入下方程的解.

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u,\quad x_0=\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$$

解: 由例3-1得

$$\Phi(t)=\begin{bmatrix}2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t}\end{bmatrix}$$

∴ 系统在阶跃输入 $u(t)=1(t)$ 下的解

$$x(t)=\Phi(t)x_0+\int_0^t(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

$$=\begin{bmatrix}2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}+\int_0^t\begin{bmatrix}\cdots\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}d\tau$$

$$=\begin{bmatrix}4e^{-t}-3e^{-2t}\\ -4e^{-t}+6e^{-2t}\end{bmatrix}+\int_0^t\begin{bmatrix}e^{-(t-\tau)}-e^{-2(t-\tau)}\\ -e^{-(t-\tau)}+2e^{-2(t-\tau)}\end{bmatrix}d\tau$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}+3e^{-t}-\frac{5}{2}e^{-2t}\\ -3e^{-t}+5e^{-2t}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}e^{-(t-\tau)}-\frac{1}{2}e^{-2(t-\tau)}\\ -e^{-2(t-\tau)}+e^{-2(t-\tau)}\end{bmatrix}\Bigg|_0^t$$

$$\begin{bmatrix}1-e^{-t}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-2t}\\ -1+e^{-t}+1-e^{-2t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}-e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}\\ e^{-t}-e^{-2t}\end{bmatrix}$$

例4-1 P137. 判断状态能控性

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-a_3&-a_2&-a_1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u$$

解：由状态能控的代数判据有

$$b=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\ Ab=\begin{bmatrix}0\\1\\-a_1\end{bmatrix},\ A^2b=\begin{bmatrix}1\\-a_1\\-a_2+a_1^2\end{bmatrix}$$

$\underline{\operatorname{rank}Q_c=\operatorname{rank}[b\ \ Ab\ \ A^2b]}$ 能控性矩阵Q_c满秩.

$$=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&-a_1\\1&-a_1&-a_2+a_1^2\end{bmatrix}=3=\underline{n}$$

系统状态完全能控.

例4-3. P138 判断状态能控性

(1) $\dot{x}=\begin{bmatrix}-7&0\\0&-5\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}u$ ✓

(2) $\dot{x}=\left[\begin{array}{cc|c}-4&1&0\\0&-4&0\\\hline 0&0&-3\end{array}\right]x+\left[\begin{array}{cc}0&0\\0&0\\\hline 1&1\end{array}\right]u$ ✗ 全为零

(3) $\dot{x}=\left[\begin{array}{cc|c|c}-4&1&0&0\\0&-4&0&0\\\hline 0&0&-3&0\\\hline 0&0&0&-4\end{array}\right]x+\left[\begin{array}{cc}0&0\\0&1\\\hline 2&0\\\hline 2&1\end{array}\right]u$ ✓

(4) $\dot{x}=\left[\begin{array}{cc|c|c}-4&1&0&0\\0&-4&0&0\\\hline 0&0&-3&0\\\hline 0&0&0&-4\end{array}\right]x+\left[\begin{array}{c}0\\1\\\hline 2\\\hline 3\end{array}\right]u$ ✗ 线性相关

模态判据

(1) A特征值只有一个约旦块，对应B最后一行不全为零. ✓

(2) A —— 多个 —— ，———— 线性无关. ✓

PBH秩判据：$\underline{\Sigma(A,B)}$ 状态完全能控 ⇔

$\underline{\operatorname{rank}[\lambda I-A\ \ B]=n\quad(\forall\lambda\in C')}$

例4-4. P139. 判断状态能控性.

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}1&3&2\\0&2&0\\0&1&3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}2&1\\1&1\\-1&-1\end{bmatrix}u$$

解：$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-3&-2\\0&\lambda-2&0\\0&1&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$

$\therefore\ \lambda_1=1,\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=3$

当$\lambda_1=1$时. $\operatorname{rank}[\lambda_1I-A\ \ B]$

$$=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}0&-3&-2&2&1\\0&-1&0&1&1\\0&-1&-2&-1&-1\end{bmatrix}=3=n$$

当$\lambda_2=2$时，$\operatorname{rank}[\lambda_2I-A\ \ B]$

$$=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}1&-3&-2&2&1\\0&0&0&1&1\\0&-1&-1&-1&-1\end{bmatrix}=3=n$$

当$\lambda_3=3$时，$\operatorname{rank}[\lambda_3I-A\ \ B]$

$$=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}2&-3&-2&2&1\\0&1&0&1&1\\0&-1&0&-1&-1\end{bmatrix}=2<n$$

$\therefore$ 对$\lambda_3=3$时，$\operatorname{rank}[\lambda_3I-A\ \ B]\neq n$.

系统状态不完全能控，且是$\lambda=3$的子空间不能控.

例4-7 P149 判断状态能观性

$$\begin{cases}\dot{x}=\begin{bmatrix}-4&5\\1&0\end{bmatrix}x\\ y=\begin{bmatrix}1&-1\end{bmatrix}x\end{cases}$$

由状态能观的代数判据有

$$\underline{\operatorname{rank}Q_o=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}C\\CA\end{bmatrix}}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}1&-1\\-5&5\end{bmatrix}=1\neq n$$

$\therefore$ 系统状态不能观 能观性矩阵Q_o满秩

模态判据：

(1) A特征值只有一个约旦块，对应C第一列不全为零. ✓

(2) A特征值 —— 多个 ———— 线性无关. ✓

PBH秩判据 $\underline{\Sigma(A,C)}$ 状态完全能观 ⇔

$$\underline{\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\lambda I-A\\C\end{bmatrix}=n\quad(\forall\lambda\in C')}$$

例4-8 P150 判断状态能观测性.

(1) $\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} x \\ y = \begin{bmatrix} 3 & \boxed{0} \end{bmatrix} x \end{cases}$ × 不全为零

(2) $\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} x \\ y = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} x \end{cases}$ ✓

(3) $\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} x \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$ × 线性相关

例4-9 P150 判能观.

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} x \\ y = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

解: $|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 6 & 11 & \lambda+6 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda^2+6\lambda+11)+6 = \lambda^3+6\lambda^2+11\lambda+6 = (\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)$

$\therefore \lambda_1=-1, \lambda_2=-2, \lambda_3=-3$

当 $\lambda_1=-1$ 时, $\text{rank}\begin{bmatrix} \lambda_1 I-A \\ C \end{bmatrix} = \text{rank}\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 6 & 11 & 5 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$

$= 2 < n$

$\therefore$ 对 $\lambda_1=-1$ 时, $\text{rank}\begin{bmatrix} \lambda_1 I-A \\ C \end{bmatrix} \neq n$.

系统不完全能观.

例4-15 P165 求能控子系统

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

解: $\text{rank}\,Q_c = \text{rank}\begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix}$

$= \text{rank}\begin{bmatrix} 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} = 2 < 3 = n$

$\therefore$ 系统不完全能控，能控部分状态变量个数为2.

选择 P_c 和其逆矩阵为

$P_c = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ ✓✓, $P_c^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$\hat{A} = P_c^{-1}AP_c = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\hat{B} = P_c^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\hat{C} = CP_c = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

$\therefore$ 能控子系统 $\dot{\hat{x}}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\hat{x}_1 + \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}\hat{x}_2 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$

例4-16 求能观子系统

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

解: $\text{rank}\,Q_o = \text{rank}\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \text{rank}\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & -4 \end{bmatrix}$

$= 2 < 3 = n$

$\therefore$ 系统不完全能观，且能观部分状态变量个数为2.

选择 P_0 及其逆矩阵 P_0^{-1}.

$P_0^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ✓✓, $P_0 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\tilde{A} = P_0^{-1}AP_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

$\tilde{B} = P_0^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\tilde{C} = CP_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\therefore$ 能观子系统 $\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\tilde{x}_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u \\ \bar{y}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\tilde{x}_1 \end{cases}$

例 4-19. P_{176} 求系统状态方程能控规范I形和II形.

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [0 \quad 1] x \end{cases}$$

解：(1) 判断是否能控

$\operatorname{rank} Q_c = \operatorname{rank}[B \ AB] = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = 2 = n$

∴ 系统状态完全能控，可变为能控规范形.

(2) 求能控I形.

变换矩阵 $T_{c1} = Q_c = [B \ AB] = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

$T_{c1}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

则经过 $x = T_{c1}\tilde{x}$ 变换后能控I形为

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = T_{c1}^{-1}AT_{c1}\tilde{x} + T_{c1}^{-1}Bu = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\tilde{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = CT_{c1}\tilde{x} = [1 \quad 3]\tilde{x} \end{cases}$$

(3) 求能控II形

△ $T_1 = [0 \quad 1][B \ AB]^{-1} = [0 \ 1]\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = [\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}]$

变换矩阵 $T_{c2}^{-1} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_1 A \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

△

$T_{c2} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

则经过 $x = T_{c2}\tilde{x}$ 变换后能控II形为

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = T_{c2}^{-1}AT_{c2}\tilde{x} + T_{c2}^{-1}Bu = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\tilde{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = CT_{c2}\tilde{x} = [0 \quad 1]\tilde{x} \end{cases}$$

例 4-20 P_{178} 求系统的能观规范I、II形.

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x \\ y = [-1 \quad -\frac{1}{2}] x \end{cases}$$

解：(1) 判断是否能观

$\operatorname{rank} Q_o = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = 2 = n$

∴ 系统状态完全能观，可变为能观规范形.

(2) 求能观I形.

变换矩阵 $T_{o1}^{-1} = Q_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$T_{o1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

则经过 $x = T_{o1}\tilde{x}$ 变换后能观I形为

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = T_{o1}^{-1}AT_{o1}\tilde{x} + \cancel{T_{o1}^{-1}Bu} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\tilde{x} \\ y = CT_{o1}\tilde{x} = [1 \quad 0]\tilde{x} \end{cases}$$

(3) 求能控II形

△ $R_1 = Q_o^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

变换矩阵 $T_{o2} = [R_1 \ AR_1] = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

△

$T_{o2}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

则经过 $x = T_{o2}\tilde{x}$ 变换后能观II形为

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = T_{o2}^{-1}AT_{o2}\tilde{x} \cancel{+} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\tilde{x} \\ y = CT_{o2}\tilde{x} = [0 \quad 1]\tilde{x} \end{cases}$$

例4-17 P169 能控能观性分解

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

(1) 先能控分解

$$\operatorname{rank} Q_c = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} \overset{\text{rank}}{=} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} = 2 < 3 = n$$

∴ 系统不完全能控，且能控为2阶.

$$P_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad P_c^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

则能控分解后系统为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_c \\ \dot{\tilde{x}}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc:c} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ \hdashline \underline{0} & \underline{0} & \underline{-1} \end{array}\right] \begin{bmatrix} \tilde{x}_c \\ \tilde{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \hdashline \underline{0} \end{array}\right] u \\ y = \left[\begin{array}{cc:c} 1 & -1 & \underline{-2} \end{array}\right] \begin{bmatrix} \tilde{x}_c \\ \tilde{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \end{cases}$$

不能控子空间 $\tilde{x}_{\bar{c}}$ 仅一阶且能观，无需分解. 为系统不能控但能观的子系统.

(2) 将能控子系统 Σ_c 能观分解.

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_c = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \tilde{x}_c + \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} \tilde{x}_{\bar{c}} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \tilde{x}_c \end{cases}$$

$$\operatorname{rank} Q_o = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} \overset{\text{rank}}{=} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 1 < 2 = n$$

∴ 子系统不完全能观，且能观为1阶.

$$P_{c,o}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P_{c,o} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

则子系统 Σ_c 能观分解为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_{co} \\ \dot{\tilde{x}}_{c\bar{o}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ \underline{1} & \underline{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_{co} \\ \tilde{x}_{c\bar{o}} \end{bmatrix} + \underline{\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}} \tilde{x}_{\bar{c}} + \underline{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} u \\ y_1 = \underline{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} \tilde{x}_{co} \\ \tilde{x}_{c\bar{o}} \end{bmatrix} \end{cases}$$

(3) 综合两次变换结果，系统能控能观分解为

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \left[\begin{array}{cc:c} -1 & 0 & -1 \\ \underline{1} & \underline{-1} & \underline{-2} \\ \hdashline \underline{0} & \underline{0} & \underline{-1} \end{array}\right] \tilde{x} + \left[\begin{array}{c} 1 \\ \underline{0} \\ \hdashline \underline{0} \end{array}\right] u \\ y = \left[\begin{array}{cc:c} \underline{1} & \underline{0} & \underline{-2} \end{array}\right] \tilde{x} \end{cases}$$

状态空间分解为 $\tilde{x} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_{co} & \tilde{x}_{c\bar{o}} & \tilde{x}_{\bar{c}o} \end{bmatrix}$

$$P_{co} = P_c \begin{bmatrix} P_{c,o} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

例5-3 P217 确定平衡态稳定性

$$\begin{cases}\dot x_1=x_2-x_1(x_1^2+x_2^2)\\ \dot x_2=-x_1-x_2(x_1^2+x_2^2)\end{cases}$$

解: ① 原点是系统唯一平衡态.

② 李函数 $V(x)=x_1^2+x_2^2$

$V(x)$对时间的全导数

③ $\dot V(x)=2x_1\dot x_1+2x_2\dot x_2=-2(x_1^2+x_2^2)^2\underline{<0}$ 一致渐近稳

④ 当$\underline{\|x\|=\sqrt{x_1^2+x_2}\to\infty\text{时}, V(x)\to\infty}$, 大范围一致

∴ 在原点处的平衡态是大范围一致渐近稳定的。

例5-4. P217 确定平衡态稳定性

$$\begin{cases}\dot x_1=x_2\\ \dot x_2=-x_1-x_2\end{cases}$$

解: 原点是系统唯一平衡态.

李函数 $V(x)=x_1^2+x_2^2$

$\dot V(x)=2x_1\dot x_1+2x_2\dot x_2=-2x_2^2\le 0$ 非正定

无法判别.

无法判断

例5-5. 同上

$\dot V(x)=-2x_2^2\le 0$ 非正定

令李函数 $V(x,t)=\frac{1}{2}[(x_1+x_2)^2+2x_1^2+x_2^2]$

$\dot V(x,t)=-(x_1^2+x_2^2)<0$ 负定.

渐近稳定.

例5-6 P218 确定平衡态稳定性

$$\begin{cases}\dot x_1=kx_2\\ \dot x_2=-x_1\end{cases}\quad(k>0)$$

解: 原点是唯一平衡态.

李: $V(x)=x_1^2+kx_2^2$

$V'(x)=2x_1x_1'+2kx_2x_2'=2kx_1x_2-2kx_1x_2\equiv 0$

$\dot V(x)$ 非正定且恒为0. 系统稳定但非渐近稳定.

例5-7. P218 确定平衡稳定性.

$$\begin{cases}\dot x_1=x_2\\ \dot x_2=-x_1+x_2\end{cases}$$

解: 原点是唯一平衡态.

李: $V(x)=x_1^2+kx_2^2$

$\dot V(x)=2x_1x_1'+2kx_2x_2'=2x_2^2\ge 0$

$\dot V(x)$ 非负定且不恒为0，系统不稳定.

V(x)	V(x)	结论
正定 >0	负定 <0	渐近稳定
>0	≤0 且不恒为0	渐近稳定
>0	≤0 且恒为0	稳定但非渐近
>0	>0	不稳定
>0	≥0 且不恒为0	不稳定

例 6-2 P251 线性定常系统状态方程为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-1&-2\\-1&3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}u$$

求状态反馈阵 K 使闭环系统的极点为 $-1\pm 2j$.

解：(1) 判断系统的能控性 ✓

开环系统 $\text{rank}\,Q_c=\text{rank}[B\ AB]$

$$=\text{rank}\begin{bmatrix}2&-4\\1&1\end{bmatrix}=2=n$$

∴ 开环系统状态完全能控，可进行任意极点配置.

(2) 求能控规范II形. ✓

$$\underline{T_1=[0\ 1][B\ AB]^{-1}}=[0\ 1]\begin{bmatrix}2&-4\\1&1\end{bmatrix}^{-1}=[-\tfrac{1}{6}\ \tfrac{1}{3}]$$ ✓

变换矩阵 $\underline{T_{c2}^{-1}=\begin{bmatrix}T_1\\T_1A\end{bmatrix}}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}-1&2\\-1&8\end{bmatrix}$ ✓

$$\bar{A}=T_{c2}^{-1}AT_{c2}=\begin{bmatrix}0&1\\\underset{-a_n}{5}&\underset{-a_1}{2}\end{bmatrix},\quad \tilde{B}=T_{c2}^{-1}B=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$ ✓

∴ 系统开环特征多项式 $\underline{f(s)=s^2-2s-5}$.

由期望的闭环极点 $-1\pm 2j$ 可得期望的闭环特征多项式 $\underline{f(s)=s^2+2s+5}$

原系统的状态反馈阵 K 为

$$K=\underset{\substack{\downarrow\\\text{II形的}\tilde{k}}}{\tilde{k}}\,T_{c2}^{-1}=[a_2^*-a_2\ \ a_1^*-a_1]T_{c2}^{-1}$$

$$=[5-(-5)\ \ 2-(-2)]\times\frac{1}{6}\begin{bmatrix}-1&2\\-1&8\end{bmatrix}$$

$$=[-\tfrac{7}{3}\ \tfrac{26}{3}]$$

在反馈律 $u=-kx+v$ 下的闭环系统状态方程

$$\underline{A-Bk}=\begin{bmatrix}-1&-2\\-1&3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}[-\tfrac{7}{3}\ \tfrac{26}{3}]$$

$$=\begin{bmatrix}-1&-2\\-1&3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-\frac{14}{3}&\frac{52}{3}\\-\frac{7}{3}&\frac{26}{3}\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}11&-58\\4&17\end{bmatrix}x$$

∴ $\dot{x}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}11&-58\\4&17\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}u$.

通过验算，闭环系统的极点为 $-1\pm 2j$，达到要求.

例 6-3 P252. 已知系统传递函数

$$G(s)=\frac{10}{s(s+1)(s+2)}$$

选择一种状态空间实现并求状态反馈阵 K，使极点配置在 -2 和 $-1\pm j$ 上.

解：(1) 建立能控II形

由 G(s) 可知，系统特征值为 $s_1=0, s_2=-1, s_3=-2$

$f(s)=s(s+1)(s+2)=s^3+3s^2+2s$ ~~$a_0=0$,~~ ~~$a_1=2, a_2=3, a_3=1$~~

∴ 能控II形 $\underline{a_0=1, a_1=3, a_2=2, a_3=0}$

$$\begin{cases}\dot{x}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&-2&-3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u\\ \underline{y=[10\ 0\ 0]x}\end{cases}$$

(2) 求反馈矩阵 K.

系统开环特征多项式 $f(s)=s^3+3s^2+2s$

期待的闭环极点 -2，$-1\pm j$.

则期望的闭环特征多项式 $f^*(s)=(s+2)[(s+1)^2+1]$

$$=s^3+4s^2+6s+4$$

∴ 相应反馈矩阵 $k=[a_3^*-a_3\ \ a_2^*-a_2\ \ a_1^*-a_1]$

$$=[4-0\ \ 6-2\ \ 4-3]=[4\ 4\ 1]$$

在反馈律 $u=-kx+v$ 下的闭环系统的状态空间模型

$$\underline{A-Bk}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&-2&-3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}[4\ 4\ 1]$$

$$=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&-2&-3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\4&4&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-4&-6&-4\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}\dot{x}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-4&-6&-4\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u\\ y=[10\ 0\ 0]x\end{cases}$$

例6-10 P273. 已知状态空间模型为

$$\Sigma \begin{cases} \dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}}_{A} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} u \\ y = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C} x \end{cases}$$

试设计一个状态观测器，使其极点配置 $-3, -4, -5$.

解：(1) 方法一.

① 利用对偶性方法，原系统对偶系统为 $\hat{A}=A^T, \tilde{B}=C^T, \tilde{C}=B^T$

$$\tilde{\Sigma}(\hat{A}, \tilde{B}, \tilde{C}) = \Sigma(A^T, C^T, B^T)$$

$$\tilde{\Sigma} \begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\hat{A}} \tilde{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\tilde{B}} u \\ \tilde{y} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\tilde{C}} \tilde{x} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 6 \\ -2 \\ 2 \end{matrix}$$

② 该系统转为能控Ⅱ型. $T_1 \rightarrow T_{c2}^{-1} \rightarrow x = T_{c2}\tilde{x}$

$$T_1 = [0 \ 0 \ 1][\tilde{B} \ \hat{A}\tilde{B} \ \hat{A}^2\tilde{B}]^{-1}$$

$$= [0 \ 0 \ 1]\begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T_{c2}^{-1} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_1\hat{A} \\ T_1\hat{A}^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad T_{c2} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

经过 $x = T_{c2}\tilde{x}$ 变换后

$$A' = T_{c2}^{-1}\hat{A}T_{c2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & 1 \\ \frac{1}{6} & \frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Σ 原始系统的特征多项式 $f(s) = |sI - A| = s^3 - 3s + 2$

$\tilde{\Sigma}$ 能控Ⅱ型的特征多项式 $f(s) = |sI - A'| = s^3 - 3s + 2$

$\tilde{\Sigma}$ 期望极点的特征多项式

$$f^*(s) = (s+3)(s+4)(s+5) = s^3 + 12s^2 + 47s + 60$$

③ $\tilde{\Sigma}$ 对偶系统的反馈矩阵 K

$$K = \tilde{K}T_{c2}^{-1} = [a_3^* - a_3 \ \ a_2^* - a_2 \ \ a_1^* - a_1] T_{c2}^{-1}$$

$$= [60-2 \ \ 47+3 \ \ 12-0]\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= [20 \ \ 25 \ \ 12]$$

∴ 所求状态观测器的反馈阵

$$G = K^T = \begin{bmatrix} 20 \\ 25 \\ 12 \end{bmatrix}$$

④ 所得状态观测器

$$\hat{\Sigma} \begin{cases} \dot{\hat{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \hat{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} u + \underbrace{\begin{bmatrix} 20 \\ 25 \\ 12 \end{bmatrix}}_{G} (y - \hat{y}) \\ \hat{y} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C} \hat{x} \end{cases}$$

(2) 方法二

① 原系统转为能观规范Ⅱ型.

$$R_1 = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & -2 & 2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T_{o2} = [R_1 \ \ AR_1 \ \ A^2R_1]$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

② 能观Ⅱ型的反馈矩阵 $\tilde{G}$

系统特征多项式 $f(s) = |sI - A| = s^3 - 3s + 2$

期望极点的 $f^*(s) = s^3 + 12s^2 + 47s + 60$

✓ $\tilde{G} = [a_3^* - a_3 \ \ a_2^* - a_2 \ \ a_1^* - a_1]^T$

$$= \begin{bmatrix} 58 \\ 50 \\ 12 \end{bmatrix}$$

③. 原系统的反馈矩阵 G

✓ $G = T_{o2}\tilde{G} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 58 \\ 50 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 25 \\ 12 \end{bmatrix}$