现代控制理论习题 4　P_{240}

5-4. 设有二阶非线性系统为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\sin x_1 - x_2 \end{cases}$$

(1) 求出所有的平衡态；

平衡态为代数方程组 $\begin{cases} x_2 = 0 \\ -\sin x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$ 的解.

即平衡态 $x_{e,k} = \begin{bmatrix} \pm k\pi \\ 0 \end{bmatrix}$, $k = 0, 1, 2, \cdots$

(2) 求出各平衡态处的线性化状态方程，并用李雅普诺夫第一法判断是否为渐近稳定.

将非线性方程在平衡态 $x_{e,k}$ 附近展开成泰勒展开式进行线性化.

$$x' = f(x_e) + \frac{\partial f(x)}{\partial x^T}\Big|_{x=x_e}(x - x_e) + R(x - x_e)$$

可得线性化状态方程如下:

$$\begin{cases} x_1' = (x_1 \mp k\pi) + R(x_1 \mp k\pi) = x_1 \mp k\pi \\ x_2' = [(-1)^{k+1} - 1]x_2 + R(x_2) = [(-1)^{k+1} - 1]x_2 \end{cases}$$

系统矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x_1 & -1 \end{bmatrix}_{x_1 = \pm k\pi} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^{k+1} & -1 \end{bmatrix}$

则系统特征多项式为 $|\lambda I - A| = \lambda^2 + \lambda + (-1)^k$

当 $k = 0, 2, 4, \cdots$ 时，A有负实部的特征值，系统是渐近稳定的；

当 $k = 1, 3, 5, \cdots$ 时，A有正实部特征值，系统是不稳定的.

5-6. 试选择适当的李雅普诺夫函数，并利用该函数判定下列非线性系统的稳定性.

(1) $\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -x_1 - x_1^2 x_2 \end{cases}$

① 原点是系统的唯一平衡态；

② 选择李雅普诺夫函数 $V(x) = x_1^2 + x_2^2$；

③ $V'(x) = 2x_1 x_1' + 2x_2 x_2' = -2x_1^2 x_2^2 \leq 0$

$V'(x)$ 非正定，且对任意 $x \neq 0$ 不恒为零，

所以系统是渐近稳定的.

(2) $\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -\sin x_1 - x_2 \end{cases}$

① 原点是系统的一个平衡态；

② 选李雅普诺夫函数 $V(x) = \sin^2 x_1 + x_2^2 \cos x_1$

③ $V'(x) = 2\sin x_1 \cos x_1 x_1' + 2x_2 \cos x_1 x_2' + x_2^2(-\sin x_1) x_1'$

$= 2\sin x_1 \cos x_1 x_2 + 2x_2 \cos x_1(-\sin x_1 - x_2) - x_2^2 \sin x_1 x_2$

$= -2x_2^2 \cos x_1 - x_2^3 \sin x_1$

$= -x_2^2(2\cos x_1 + x_2 \sin x_1)$

在原点附近邻域内，$V'(x) < 0$.

所以系统在原点处是渐近稳定的.

(3) $\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -a(1+x_2)^2 x_2 - x_1 \quad (a > 0) \end{cases}$

① 原点是系统的一个平衡态；

② 选李雅普诺夫函数 $V(x) = x_1^2 + x_2^2$

③ $V'(x) = 2x_1 x_1' + 2x_2 x_2' = 2x_1 x_2 + 2x_2[-a(1+x_2)^2 x_2 - x_1]$

$= -2a x_2^2 (1+x_2)^2 \leq 0 \quad (a > 0)$

$V'(x)$ 非正定，且对任意 $x_2 \neq 0$ 不恒为零.

所以系统在原点处是渐近稳定的.

5-7 设系统的状态方程为

$$\begin{cases} x_1' = x_2 + a x_1 (x_1^2 + x_2^2) \\ x_2' = -x_1 - a x_2 (x_1^2 + x_2^2) \end{cases}$$

试求其V函数，并在$a>0$、$a<0$和$a=0$时，分析平衡点处的系统稳定性。

① 原点是系统的一个平衡态；

② 选正定函数 $V(x) = x_1^2 + x_2^2$ 考虑……；

③ $V'(x) = 2x_1 x_1' + 2x_2 x_2'$

$$= 2x_1x_2 + 2ax_1^2(x_1^2+x_2^2) - 2x_1x_2 - 2ax_2^2(x_1^2+x_2^2)$$

$$= 2a(x_1^2+x_2^2)(x_1^2-x_2^2)$$

$$= 2a(x_1^4 - x_2^4)$$

5-8. 用李雅普诺夫方法判定下列线性定常系统的稳定性。

(1) $x' = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -5 \end{bmatrix} x$

设选取的李雅普诺夫函数 $V(x) = x^T P x$，P对称矩阵

$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix}$ 代入李雅普诺夫方程

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

解
$$\begin{cases} 2P_{11} - P_{12} + 2P_{11} - P_{12} = -1 \\ 6P_{11} - 5P_{12} + 2P_{12} - P_{22} = 0 \\ 2P_{12} - P_{22} + 6P_{11} - 5P_{12} = 0 \\ 6P_{12} - 5P_{22} + 6P_{12} - 5P_{22} = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} P_{11} = -\frac{11}{12} \\ P_{12} = -\frac{4}{3} \\ P_{22} = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\therefore P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{11}{12} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$ 不正定，

所以系统不是渐近稳定的。

(2) $x' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} x$

$V(x) = x^T P x$，P为对称阵

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -6P_{12} - 6P_{12} = -1 \\ P_{11} - 5P_{12} - 6P_{22} = 0 \\ -6P_{22} + P_{11} - 5P_{12} = 0 \\ P_{12} - 5P_{22} + P_{12} - 5P_{22} = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} P_{11} = \frac{67}{60} \\ P_{12} = \frac{1}{12} \\ P_{22} = \frac{7}{60} \end{cases}$$

$$\therefore P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{67}{60} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{7}{60} \end{bmatrix}$$ 为正定

∴ 系统是渐近稳定的。