现代控制理论习题2　　P129

3-2 利用矩阵指数函数的性质计算下列矩阵A的矩阵值函数 e^{At}.

(1) $A=\begin{bmatrix}-2&1&0\\0&-2&0\\0&0&-2\end{bmatrix}$

A矩阵是由 $A_1=\begin{bmatrix}-2&1\\0&-2\end{bmatrix}$，$A_2=[-2]$ 组成的块对角矩阵，则有

$$e^{At}=\begin{bmatrix}e^{A_1t}&0\\0&e^{A_2t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^{\begin{bmatrix}-2&1\\0&-2\end{bmatrix}t}&0\\0&e^{-2t}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{-2t}&te^{-2t}\\0&e^{-2t}\end{bmatrix}&0\\0&e^{-2t}\end{bmatrix}$$

$$=e^{-2t}\begin{bmatrix}1&t&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

(2) $A=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

A可由 $A_1=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$，$A_2=[1]$ 组成块对角矩阵

$$e^{A_1t}=e^{(A_1^T)^Tt}=(e^{A_1^Tt})^T$$

$$=(e^{\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}t})^T=\begin{bmatrix}1&t\\0&1\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}1&0\\t&1\end{bmatrix}$$

$$\therefore e^{At}=\begin{bmatrix}e^{A_1t}&0\\0&e^{A_2t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\t&1&0\\0&0&e^{t}\end{bmatrix}$$

3-3. 选择适当的方法计算 e^{At}.

(1) $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&2\end{bmatrix}$

A可由 $A_1=[1]$，$A_2=\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}$ 组成块对角矩阵

$$|sI-A_2|=\begin{vmatrix}s-1&-1\\0&s-2\end{vmatrix}=(s-1)(s-2)$$

$$\mathrm{adj}(sI-A_2)=\begin{bmatrix}s-2&1\\0&s-1\end{bmatrix}$$

$$(sI-A_2)^{-1}=\frac{\mathrm{adj}(sI-A_2)}{|sI-A_2|}=\frac{1}{(s-1)(s-2)}\begin{bmatrix}s-2&1\\0&s-1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{s-1}&\frac{1}{s-2}-\frac{1}{s-1}\\0&\frac{1}{s-2}\end{bmatrix}$$

$$e^{A_2t}=\mathcal{L}^{-1}[(sI-A_2)^{-1}]=\begin{bmatrix}e^{t}&e^{2t}-e^{t}\\0&e^{2t}\end{bmatrix}$$

$$\therefore e^{At}=\begin{bmatrix}e^{A_1t}&0\\0&e^{A_2t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^{t}&0&0\\0&e^{t}&e^{2t}-e^{t}\\0&0&e^{2t}\end{bmatrix}$$

(2) $A=\begin{bmatrix}0&1\\-ab&-(a+b)\end{bmatrix}$ $(a\neq b)$

3-5. 求下列齐次状态方程的解.

(1) $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

(1) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ 为对角线矩阵.

$\therefore e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}$

则齐次状态方程的解为

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x(t_0)$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-1(t-t_0)} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2(t-t_0)} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3(t-t_0)} \end{bmatrix} x(t_0)$$

(2) $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(2) $= A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ 为约旦矩阵.

$\therefore e^{At} = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

则齐次状态方程的解为

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x(t_0)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & t-t_0 & \frac{(t-t_0)^2}{2} \\ 0 & 1 & t-t_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t_0)$$

3-8、已知线性定常系统的非齐次状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

试分别求在下列输入下的状态轨迹 $x(t)$.

(1) 阶跃信号 $u(t)=1$ $(t \geq 0)$; $\begin{bmatrix} -3e^{-t}+3 \\ 3e^{-t}-2 \end{bmatrix}$

(2) 负指数信号 $u(t)=e^{-t}$ $(t \geq 0)$.

$\begin{bmatrix} e^{-2t} - e^{-t} + 4te^{-t} \\ -2e^{-2t} + 3e^{-t} - 4te^{-t} \end{bmatrix}$

解: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$

$$|sI-A| = \begin{vmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{vmatrix} = (s+1)(s+2)$$

$$\operatorname{adj}(sI-A) = \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}$$

$$(sI-A)^{-1} = \frac{\operatorname{adj}(sI-A)}{|sI-A|} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{s+1} + \frac{-1}{s+2} & \frac{1}{s+1} + \frac{-1}{s+2} \\ \frac{-2}{s+1} + \frac{2}{s+2} & \frac{-1}{s+1} + \frac{2}{s+2} \end{bmatrix}$$

$$\therefore e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[(sI-A)^{-1}] = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$