Ch.5 李雅普诺夫稳定性分析

系统的稳定性就是系统在受到外界干扰后，系统状态变量或输出变量的偏差量过渡过程的收敛性． $\lim_{t\to\infty}|\Delta x(t)|\le\varepsilon$

- 间接法（李一法） 解微分方程式
- 直接法（李二法） 定义李雅普诺夫函数

5.1 李雅普诺夫稳定性的定义

5.1.1 平衡态

定义5-1．动态系统 $\dot{x}=f(x,t)$ 的平衡态是使 $f(x,t)=0$ 的状态．用 x_e 来表示．

平衡态即指状态空间中状态变量的导数向量为零向量的点（状态）．

李稳性研究 平衡态附近（邻域）的运动变化．

线性定常系统 $\dot{x}=Ax$ 的平衡态满足 $Ax_e=0$ 的解．

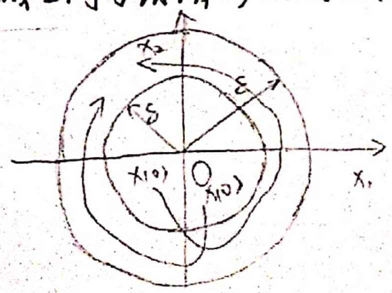
- A非奇异，只有一个孤立的平衡态 $x_e=0$；
- A奇异，有无限多个不孤立平衡态，成空间；
- 非线性系统，有一个或n个孤立平衡态．

5.1.2 李雅普诺夫意义下的稳定性．

1．范数：度量n维空间的点之间的距离．

2-范数：$\|x_1-x_2\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-x_{2,i})^2}$

2．球域：以n维空间中的点 x_0 为中心，以范数度量意义下的长度 δ 为半径的各点所组成空间为球域，记为 $S(x_0,\delta)$．



定义5-2（李雅普诺夫稳定性）若状态方程 $\dot{x}=f(x,t)$ 的系统，对于任意的 $\varepsilon>0$ 和任意初始时刻 t_0，都对应存在一个实数 $\delta(\varepsilon,t_0)>0$．使得对于任意位于平衡态 x_e 的球域 $S(x_e,\delta)$ 的初始状态 x_0．当从 x_0 出发的解 x 都位于球域 $S(x_e,\varepsilon)$ 内，则称系统的平衡态 x_e 是李雅普诺夫意义下稳定的。

逻辑表示：

$$(\forall\varepsilon>0)(\forall t_0)(\exists\delta>0)(\forall x_0\in S(x_e,\delta))(\forall t\ge t_0)\;[x(t)\in S(x_e,\varepsilon)]$$

若 $\delta(\varepsilon,t_0)$ 与初始时刻 t_0 无关，则

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall t_0)(\forall x_0\in S(x_e,\delta))(\forall t\ge t_0)\;[x(t)\in S(x_e,\varepsilon)]$$

系统的平衡态 x_e 是李雅普诺夫意义下一致稳定的．

定常系统，稳定性与一致稳定性等价。
时变系统，稳定性并非一致稳定性．

5.1.3 渐近稳定性

定义5-3（李雅普诺夫渐近稳定性）

若状态方程 $\dot{x}=f(x,t)$ 所描述的系统在初始时刻 t_0 的平衡态 x_e 是李下稳定的，且系统状态最终趋近于系统的平衡态 x_e，即 $\lim_{t\to\infty}x(t)=x_e$

则称平衡态 x_e 是李下渐近稳定的．

若 $\delta(\varepsilon,t_0)$ 与 t_0 无关，称 x_e 是一致渐近稳定的．

5.1.4 大范围渐近稳定性

n维状态空间的所有状态，状态轨线都渐近稳定．平衡态 x_e 为李下大范围渐近稳定的．

$\Longleftrightarrow$ 系统在整个状态空间只有一个平衡态且为渐近稳定的．

5.1.5 不稳定性

若状态方程 $\dot{x}=f(x,t)$ 的系统…

总存在一个位于平衡态 x_e 的球域 $S(x_e,\delta)$ 的初始状态 x_0，使得从 x_0 出发的解 x 脱离球域 $S(x_e,\varepsilon)$，则 x_0 是否不~~平衡稳~~定的。

5.1.6 平衡稳定性与输入/输出稳定性的关系

李雅普诺夫稳定性：系统状态在平衡点领域的稳定性问题。

线性定常系统若系统是渐近稳定的，则一定是输入/输出稳定的，且输出在输入信号为零后趋于零。

5.2 李雅普诺夫稳定性的基本定理

5.2.1 李雅普诺夫第一法（间接法）

思路：非线性状态方程在平衡态附近线性化。

· 解出线性化状态方程特征值，判定系统在零输入下的稳定性。

结论：

1. 若线性状态系统的 A 的所有特征值都具有负实部，则非线性系统的平衡态 x_e 总是渐近稳定的，且与高阶项 $R(x)$ 无关。

2. 若 A 的特征值中至少有一个具有正实部，则 x_e 不稳定，与 $R(x)$ 无关。

3. 若 A 除有实部为 0 的特征值外，其余特征值都具有负实部，x_e 稳定性由 $R(x)$ 决定。

例5-1：
1. 先求平衡态 x_e；
2. 系统在 x_e 处线性化，求系统矩阵 A；
3. 求 A 的特征值 λ_i；
4. 根据 λ 正负判定稳定性。

5.2.2 李雅普诺夫第二法（直接法）

1. 数学预备知识

(1) 实函数的正定性

正定函数：除零点外恒为正值的标量函数

负定函数（<0）、非负定（≥ 0）

非正定（≤ 0），不定（$\lessgtr 0$）

(2) 二次型函数和对称矩阵的正定性

$V(x)=x^TPx$　　二次型函数 $V(x)$

P 为权矩阵，$n\times n$ 维实对称矩阵

P 正定，负定，非负定，非正定

$\Leftrightarrow P>0,\ P<0,\ P\geq 0,\ P\leq 0$

(3) 矩阵正定性的判别方法

P 正定判别法：① 塞尔维斯特定理（各阶顺序主子式大于 0）；

② 特征值判别法（所有特征值大于 0）；

③ 合同变换法（对角线矩阵 P 对角线大于 0）。

2. 李雅普诺夫第二法的直观意义

定义一个正定的标量函数 $V(x)$，

根据 $\dot{V}(x)=\dfrac{dV(x)}{dt}$ 的符号特征来判别系统的稳定性。

3. 九个定理

(1) 渐近稳定性定理

定理5-4：系统状态方程 $\dot{x}=f(x,t)$，$x_e=0$ 平衡态，若有一个连续一阶偏导数的正定函数 $V(x,t)$ 满足：

1) 若 $\dot{V}(x,t)$ 为负定（<0），则平衡态一致渐近稳定的；

2) $\|x\|\to\infty$，有 $V(x,t)\to\infty$，x_e 处大范围一致渐近稳定的。

说明：1) 只是充分条件；

2) 李函数存在但不唯一；

3) 非线性系统，李二可证 x_e 邻域内渐近稳定；但不意味其他区域是否渐近稳定；线性系统 x_e 渐稳则大范围渐稳；

4) 具有普遍性。

(2). 稳定性原理

定理5-5 系统 $\dot{x}=f(x,t)$，x_e为平衡态，一阶偏导数的正定函数 $V(x,t)$，满足：

1) 若 $\dot{V}(x,t)$ 为非正定的 (≤ 0)，系统在原点处的平衡态是一致稳定的；

2) 更进一步，若 $V(x,t)$ 的定义域 Ω 为 R^n，对任意 t_0 和任意 $x(t_0)\ne 0$，$\dot{V}(x,t)$ 在 $t>t_0$ 时不恒为零（$\dot{V}(x,t)\not\equiv 0$），则系统在原点处的平衡态是一致渐近稳定的。

$\|x\|\to\infty$，有 $V(x,t)\to\infty$，系统大范围一致渐近稳定。

(3) 不稳定性定理

定理5-6 系统 $\dot{x}=f(x,t)$，有 x_e，正定函数 $V(x,t)$ 满足：

1) $\dot{V}(x,t)>0$ 为正定的 (>0)，系统原点平衡态不稳定；

2) 若 $\dot{V}(x,t)\ge 0$ 为非负定的 (≥ 0)，且 $\forall t_0$，$x(t_0)\ne 0$，有 $\dot{V}(x,t)$ 在 $t>t_0$ 时不恒为零，则平衡态不稳定。

$V(x)$	$V(x)$	结论
正定(>0)	负定(<0)	渐近稳定
正定(>0)	非正定(≤ 0)且不恒为0	渐近稳定
正定(>0)	非正定(≤ 0)且恒为0	稳定但非渐近
正定(>0)	正定(>0)	不稳定
正定(>0)	非负定(≥ 0)且不恒为0	不稳定

5.3 线性系统的稳定性分析

5.3.1 线性定常连续系统的稳定性分析

定理5-7 线性连续系统 $\dot{x}=Ax$ 的平衡态 $x_e=0$ 为渐近稳定的充要条件：

· 对任意一个正定矩阵Q，都存在一个正定矩阵P为矩阵方程 $PA+A^TP=-Q$ 的解。

正定函数 $V(x)=x^TPx$ 即为系统的一个李函数。

选取 $Q=I$，则李雅普诺夫代数方程改为

$$PA+A^TP=-I.$$