现代控制理论习题 5 P293

6-3 给定被控系统状态方程为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}1&2\\3&1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}u$$

试确定一个状态反馈矩阵K，使闭环系统极点$-2\pm j$.

解：(1) 判断系统能控性

$$\mathrm{rank}\,Q_c=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}B & AB\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\0&3\end{bmatrix}=2=n$$

∴系统完全能控 可进行极点配置

(2) 转换为能控II型

$$T_1=\begin{bmatrix}0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B&AB\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&3\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}0&1\end{bmatrix}$$

$$T_{c2}^{-1}=\begin{bmatrix}T_1\\T_1A\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}0&1\\3&1\end{bmatrix}$$

$$\hat{A}=T_{c2}^{-1}AT_{c2}=\begin{bmatrix}0&1\\5&2\end{bmatrix}$$

$$\hat{B}=T_{c2}^{-1}B=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

(3) 求状态反馈矩阵 K

$$\hat{K}=\begin{bmatrix}a_2^*-a_2 & a_1^*-a_1\end{bmatrix}$$

系统开环特征多项式 $f(s)=s^2-2s-5$

期望闭环系统极点确定的多项式 $f^*(s)=(s+2)^2+1=s^2+4s+5$

$$\therefore\ \hat{K}=\begin{bmatrix}5-(-5) & 4-(-2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10&6\end{bmatrix}$$

∴ 系统反馈矩阵 $K=\hat{K}T_{c2}^{-1}=\begin{bmatrix}10&6\end{bmatrix}\frac{1}{3}\begin{bmatrix}0&1\\3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{18}{3}&\frac{16}{3}\end{bmatrix}$

$$A-BK=\begin{bmatrix}1&2\\3&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{18}{3}&\frac{16}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5&-\frac{10}{3}\\3&1\end{bmatrix}$$

$$\therefore\ \dot{x}=\begin{bmatrix}-5&-\frac{10}{3}\\3&1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}u$$

6-9. 给定被控系统状态空间模型

$$\begin{cases}\dot{x}=\begin{bmatrix}-1&-2&-2\\0&-1&1\\1&0&-1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}1&1&0\end{bmatrix}x\end{cases}$$

确定一个状态观测器，极点配置在 -2，-2和-3处。

解：用方法一求解

(1) 由对偶性方法，得原系统的对偶系统为

$$\hat{\Sigma}(\hat{A},\hat{B},\hat{C})=\Sigma\left(\begin{bmatrix}-1&0&1\\-2&-1&0\\-2&1&-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2&0&1\end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{bmatrix}-1&0&1\\-3&-1&0\\-2&1&-1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1&1&0\\4&1&0\\2&0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&1&-2\\4&1&-2\\2&-2&-1\end{bmatrix}$$

(2) 转换为能控II型

$$T_1=\begin{bmatrix}0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{B}&\hat{A}\hat{B}&\hat{A}^2\hat{B}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&0\\1&-3&5\\0&-1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1&0\end{bmatrix}$$

$$T_{c2}^{-1}=\begin{bmatrix}T_1\\T_1\hat{A}\\T_1\hat{A}^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1&0\\2&3&-2\\0&-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1&0\\2&1&0\\-4&-1&2\end{bmatrix}$$

(3) 求对偶系统的反馈阵K

被控系统 $f(s)=|sI-A|=\begin{vmatrix}s+1&2&2\\0&s+1&-1\\-1&0&s+1\end{vmatrix}$

$=(s+1)(s+1)^2-[-2-2(s+1)]$

$=(s+1)^3+2s+4=s^3+3s^2+3s+1+2s+4=s^3+3s^2+5s+5$

期望极点配置后闭环系统多项式

$f^*(s)=(s+2)(s+2)(s+3)=(s^2+4s+4)(s+3)=s^3+7s^2+16s+12$

∴对偶系统的状态反馈阵K为

$$K=\hat{K}T_{c2}^{-1}=\begin{bmatrix}a_3^*-a_3 & a_2^*-a_2 & a_1^*-a_1\end{bmatrix}T_{c2}^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}12-5 & 16-5 & 7-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-1&2\\2&3&-2\\0&-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-1&0\\2&1&0\\-4&-1&2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}7&11&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-1&2\\2&3&-2\\0&-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2[illegible]&2[illegible]&-8\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}7&11&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-1&0\\2&1&0\\-4&-1&2\end{bmatrix}=$$

方法二 求解 $A=\begin{bmatrix}-1&-2&-2\\0&-1&1\\1&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&-2&-2\\0&-1&1\\1&0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&4&2\\1&1&-2\\-2&-2&-1\end{bmatrix}=A^2$

(1) 原系统转为能观II形. $C=[1\ 1\ 0]$

$$R_1=\begin{bmatrix}C\\CA\\CA^2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0\\-1&-3&-1\\0&5&0\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cancel{1}&0&\frac{1}{5}\\0&0&\frac{1}{5}\\1&-1&-\frac{2}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{5}\\\frac{1}{5}\\-\frac{4}{5}\end{bmatrix}=\frac{1}{5}\cancel{\begin{bmatrix}1\\1\\-4\end{bmatrix}}\quad\begin{bmatrix}-\frac{1}{5}\\\frac{1}{5}\\-\frac{2}{5}\end{bmatrix}$$

$$T_{o2}=[R_1\ AR_1\ A^2R_1]=\frac{1}{5}\cancel{\begin{bmatrix}1&5&-5\\1&-5&10\\-4&5&0\end{bmatrix}}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}-1&3&1\\1&-3&4\\-2&1&2\end{bmatrix}$$

开环系统 $f(s)=|sI-A|=\begin{vmatrix}s+1&2&2\\0&s+1&-1\\-1&0&s+1\end{vmatrix}$

$$=(s+1)(s+1)^2-[-2-2(s+1)]$$
$$=s^3+3s^2+3s+1+2+2s+2$$
$$=s^3+3s^2+5s+5$$

闭环极点多项式 $f^*(s)=(s+2)(s+2)(s+3)$

$$=(s^2+4s+4)(s+3)$$
$$=s^3+7s^2+16s+12$$

(2) 求原系统 G

$$G=T_{o2}\tilde{G}=T_{o2}[a_3^*-a_3\ \ a_2^*-a_2\ \ a_1^*-a_1]^T$$

$$=\frac{1}{5}\cancel{\begin{bmatrix}1&5&-5\\1&-5&10\\-4&5&0\end{bmatrix}}[12-5\ \ 16-5\ \ 7-3]^T$$

$$=\frac{1}{5}\cancel{\begin{bmatrix}1&5&-5\\1&-5&10\\-4&5&0\end{bmatrix}[7\ 11\ 4]^T}$$

$$=\cancel{\frac{1}{5}\begin{bmatrix}42\\-8\\27\end{bmatrix}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}42\\-8\\27\end{bmatrix}}$$

$$=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}-1&3&1\\1&-3&4\\-2&1&2\end{bmatrix}[7\ 11\ 4]^T=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}30\\-10\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\-2\\1\end{bmatrix}$$

6-11 空间模型

$$\begin{cases}\dot{x}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-2&-4&-3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u\\ y=[1\ 4\ 2]x\end{cases}$$

试设计一个带状态观测器的状态反馈系统.

状态观测部分的极点配置在 −5, −7 和 −8 处,

状态反馈部分的极点配置在 −1, −2 和 −3 处.

解: (1) 先进行状态反馈部分的极点配置

① 判断系统的能控性.

$$\mathrm{rank}\,Q_c=\mathrm{rank}[B\ AB\ A^2B]=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&-3\\1&-3&5\end{bmatrix}=3=n$$

开环系统状态能控, 可进行极点配置.

② 转为能控II形

$$T_1=[0\ 0\ 1][B\ AB\ A^2B]^{-1}=[0\ 0\ 1]\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&-3\\1&-3&5\end{bmatrix}^{-1}=[1\ 0\ 0]$$

$$T_{c2}^{-1}=\begin{bmatrix}T_1\\T_1A\\T_1A^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

原开环系统已是能控II形

③ 求状态反馈阵 K

开环系统多项式 $f(s)=s^3+3s^2+4s+2$

闭环期望极点多项式 $f^*(s)=(s+1)(s+2)(s+3)=(s^2+3s+2)(s+3)$

$$=s^3+6s^2+11s+6$$

$$K=\tilde{K}T_{c2}^{-1}=[a_3^*-a_3\ \ a_2^*-a_2\ \ a_1^*-a_1]T_{c2}^{-1}$$

$$=[6-2\ \ 11-4\ \ 6-3]\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=[4\ 7\ 3]$$

(2) 再进行状态观测部分的极点配置. 用方法二

① 转为能观II形

$$R_1=\begin{bmatrix}C\\CA\\CA^2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&4&2\\-4&-7&-2\\-14&4&-1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$T_{o2}=[R_1\ AR_1\ A^2R_1]=$

② 求状态观测器反馈矩阵 G

$$f(s)=s^3+3s^2+4s+2$$

$$f^*(s)=(s+5)(s+7)(s+8)=(s^2+12s+35)(s+8)=s^3+20s^2+131s+280$$

$$G=T_{o2}\tilde{G}=T_{o2}[a_3^*-a_3\ \ a_2^*-a_2\ \ a_1^*-a_1]^T=T_{o2}[278\ 127\ 17]$$

$$=\left[-\frac{353}{3}\ \ \frac{260}{3}\ \ -106\right]^T$$

状态反馈系统的状态反馈律 $u=-[4\ 7\ 3]\hat{x}+v$

状态观测器

$$\begin{cases}\dot{\hat{x}}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-2&-4&-3\end{bmatrix}\hat{x}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u+\begin{bmatrix}-\frac{353}{3}\\\frac{260}{3}\\-106\end{bmatrix}(y-\hat{y})\\ \hat{y}=[1\ 4\ 2]\hat{x}\end{cases}$$