МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
ВЯТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ

ФАКУЛЬТЕТ КОМПЬЮТЕРНЫХ И ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Допущена к защите

Заведующей кафедрой ПМИ

__________________ Е.В.Разова

ПРИЛОЖЕНИЯ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ К РЕШЕНИЮ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Курсовой проект по дисциплине «Проектная и научно-исследовательская деятельность»

Выполнил студент группы ПМИб-2301-52-00 __________________ /Г.Е. Ступников/

Руководитель к.ф-м.н. доцент кафедры ПМИ __________________ /И.А. Пушкарев/

Работа защищена с оценкой ____________ _____._____.2022

КИРОВ 2022 г.

Оглавление

Введение

В настоящее время в большом количестве прикладных и научных областей возникает необходимость решения геометрических задач. Основные из них - производство различных деталей и конструкций, моделирование различных объектов и явлений. В данных областях возникает потребность поиска эффективного решения поставленных задач, что подразумевает выборку оптимального метода решения или соотношения между ними. Основные методы решения задач следующие[2]:

1. Аналитический. Состоит в представлении входных и требуемых данных в виде набора переменных и констант и взаимосвязи между ними в виде алгебраических уравнений с последующим их решением.

2. Графический. Состоит в построении рисунка, полноценно отражающего набор необходимых для решения задачи входных данных и взаимосвязей между ними. Решение состоит в последовательном применении известных фактов и теорем, приводящих к получению ответа.

3. Комбинация двух предыдущих. При ручном решении применяется чаще всего.

Метод комплексных чисел является расширением аналитического метода (метод №1). Он позволяет представить геометрические объекты 2-мерной плоскости в виде набора комплексных чисел и равенств, отражающих взаимосвязи между ними.
Данный метод достаточно контринтуитивен и сложен для самостоятельного изучения (особенно непривычно выглядит спиральное подобие как геом. ипостась умножения),при этом он не рассматривается в школах на уровне основной программы[4],[1, стр.6].
Проблема состоит в том, что для данного метода отсутствуют материалы для внедрения в среду самостоятельного и школьного обучения, включающие программы, облегчающие изучение метода.
Целью данной работы является изучение метода комплексных чисел при решении

геометрических задач, реализация программной верификации решения выбранных задач.

Для достижения цели необходимо выполнить следующие задачи:

1. Изучить имеющиеся способы применения алгебры комплексных чисел при решении геометрических задач.

2. Выбрать задачи, на которых будет рассматриваться практическое применение метода.

3. Решение задач с применением метода комплексных чисел

4. Реализация программной верификации решения задач с применением метода.

Основы метода комплексных чисел

Комплексное число z – число вида $x + iy$, где $x, y \in \mathbf{R}, i = \sqrt{-1}, z \in \mathbf{C}, \mathbf{C}$ - поле комплексных чисел. У числа z можно выделить действительную $x = Re(z)$ и мнимую $y = Im(z)$ части.

На плоскости зададим прямоугольную декартову систему координат Oxy и отображение $f : M(x; y) \leftrightarrow z = x + iy$, где $M \in \mathbf{P}$ – точка плоскости с координатами $x, y \in \mathbf{R}, \mathbf{P}$ – множество точек евклидовой плоскости. Комплексное число z называют комплексной координатой соответствующей точки M и пишут $M(z)$

Отображение f биективно. Метод комплексных чисел основан на данном факте. Таким образом, свойства и операции комплексных чисел можно перенести на прямоугольную декартову систему координат евклидовой плоскости.

Для примера рассмотрим некоторые из свойств:

1. Модуль числа $z = |z| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = r$ – расстояние между точкой O и M (рис. 1).

2. Если $\angle\varphi$ - ориентированный, образованный $\overrightarrow{OM}$ с осью Ox, то $x_0 = r\cos\varphi,\ y_0 = r\sin\varphi$. Тогда $z_0 = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

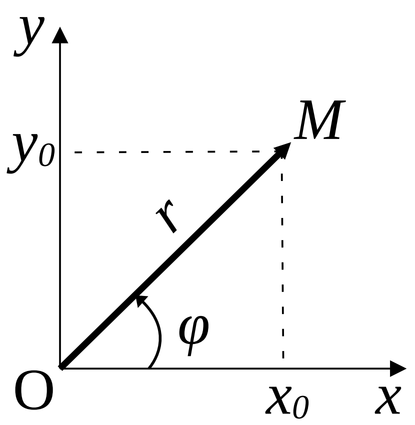

Рис. 1: Изображение числа z на плоскости

Решение и разбор задач с применением метода

Задача 1

Постановка задачи: Доказать, что если некоторая прямая пересекает прямые, содержащие стороны BC, CA, AB треугольника ABC, в точках A_1 , B_1 , C_1 соответственно, то середины отрезков AA_1 , BB_1 , CC_1 коллинеарны.

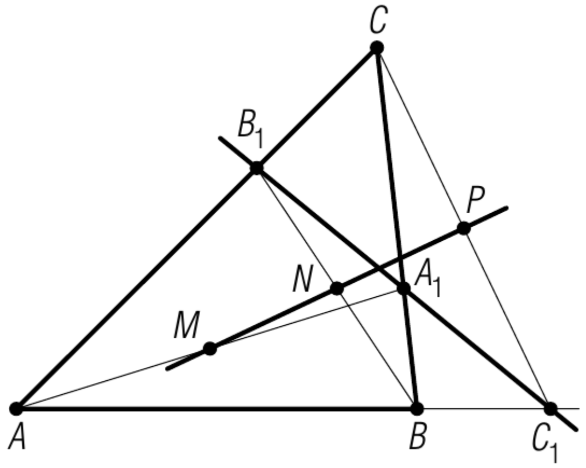

Рис. 2: Иллюстрация к задаче

Решение задачи: Условие коллинеарности троек точек A, B_1, C; C, A_1, B; B, C_1, A; A_1, B_1, C_1:

$$\begin{cases} a(\bar{b_1} - \bar{c}) + b_1(\bar{c} - \bar{a}) + c(\bar{a} - \bar{b_1}) = 0 \\ b(\bar{c_1} - \bar{a}) + c_1(\bar{a} - \bar{b}) + a(\bar{b} - \bar{c_1}) = 0 \\ c(\bar{a_1} - \bar{b}) + a_1(\bar{b} - \bar{c}) + b(\bar{c} - \bar{a_1}) = 0 \\ a_1(\bar{b_1} - \bar{a_1}) + b_1(\bar{a_1} - \bar{a_1}) + a_1(\bar{a_1} - \bar{b_1}) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Если M, N, P – середины отрезков AA_1, BB_1, CC_1, то предстоит показать, что

$$m(\bar{n} - \bar{p}) + n(\bar{p} - \bar{m}) + p(\bar{m} - \bar{n}) = 0, \tag{2}$$

Так как $m = \dfrac{1}{2}(a + a_1),\ n = \dfrac{1}{2}(b + b_1),\ p = \dfrac{1}{2}(c + c_1)$, то доказываемое равенство (2) эквивалентно такому:

$$(a + a_1)(\bar{b} + \bar{b_1} - \bar{c} - \bar{c_1}) + (b + b_1)(\bar{c} + \bar{c_1} - \bar{a} - \bar{a_1}) + (c + c_1)(\bar{a} + \bar{a_1} - \bar{b} - \bar{b_1}) = 0,$$

или, после перемножения,

$$\begin{gathered} a(\bar{b_1} - \bar{c}) + a(\bar{b} - \bar{c_1}) + a_1(\bar{b_1} - \bar{c_1}) + a_1(\bar{b} - \bar{c}) + b(\bar{c_1} - \bar{a}) + b(\bar{c} - \bar{a_1}) + \\ + b_1(\bar{c_1} - \bar{a_1}) + b_1(\bar{c} - \bar{a}) + c(\bar{a_1} - \bar{b}) + c(\bar{a} - \bar{b_1}) + c_1(\bar{a_1} - \bar{b_1}) + c_1(\bar{a} - \bar{b}) = 0. \end{gathered} \tag{3}$$

Теперь легко видеть, что (3) получается при почленном сложении равенств (1)

Алгоритм программного решения задачи: На вход программы передаются координаты свободных точек комплексной плоскости, в данном примере это координаты точек A, B, C, A_1, B_1. Если A_1, B_1 лежат на треугольнике, то по данным входным данным строится прямая, соответствующая условиям задачи. Далее производится проверка того, что середины отрезков AA_1, BB_1, CC_1 коллинеарны. Если условие выполняется,то задача считается решенной для данных входных данных и на экран выводятся координаты точек M, N, P, а также координаты всех остальных. Блок-схема алгоритма приведена на Рис. 3.

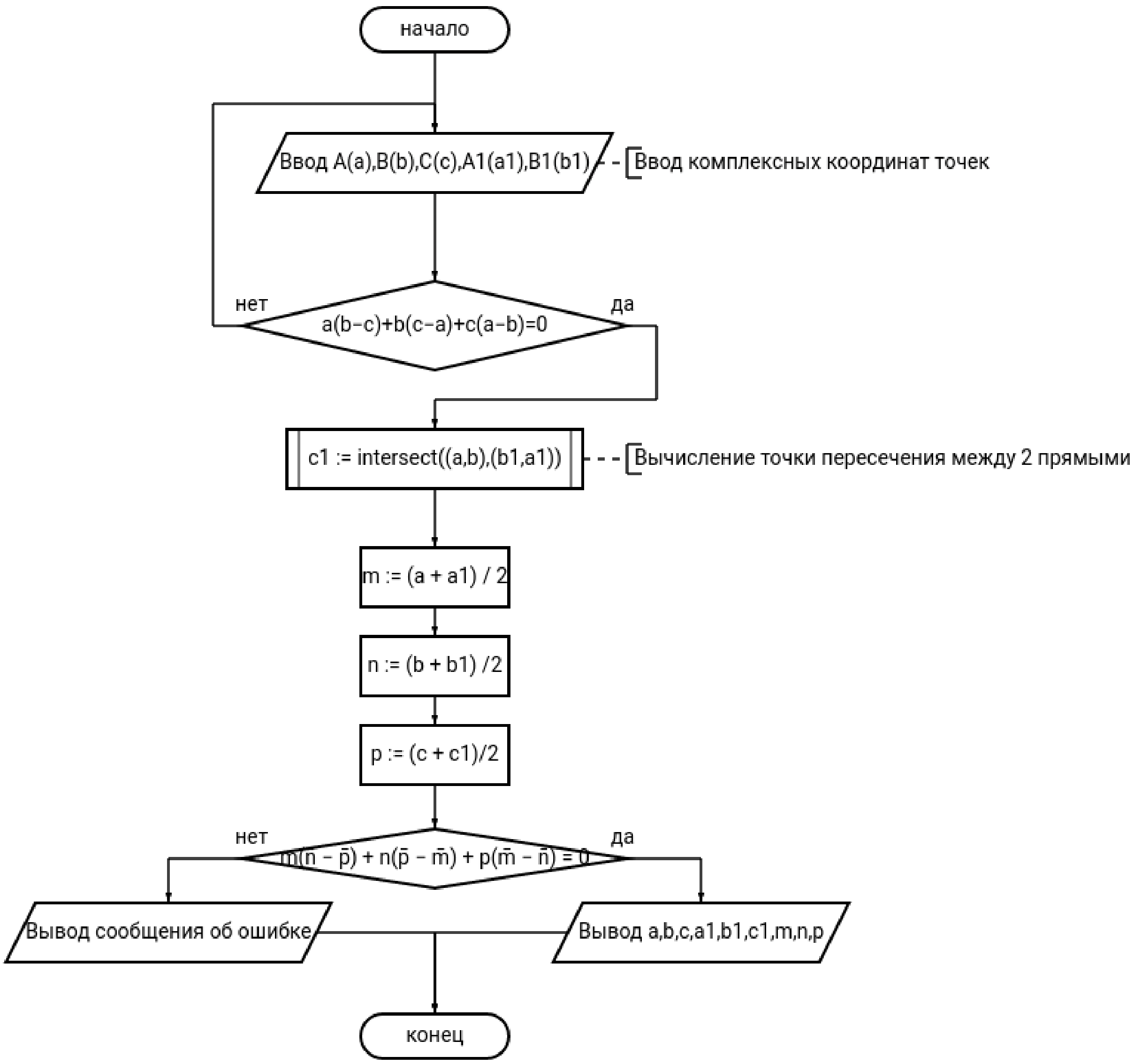

Рис. 3: Блок-схема алгоритма программы

Программная реализация задачи: Решение задачи написано на языке C++ в как часть программы для решения задач из данной работы. Реализация алгоритма программы предоставлена в функции task1 (файл main.cpp):

```
void task1()
{
    const int numbersCount = 9;
    ComplexNumber numbers[numbersCount];
    ComplexNumber &a = numbers[0], // References for readability
        &b = numbers[1],
                  &c = numbers[2],
                  &a1 = numbers[3],
```

```
            &b1 = numbers[4],
            &c1 = numbers[5],
            &m = numbers[6],
            &n = numbers[7],
            &p = numbers[8];

    Task1_ReadNumbersFromUser(numbers);

    std::pair<ComplexNumber, ComplexNumber> pairs[2] { { a, b }, { b1, a1 } };

    c1 = intersect(pairs[0], pairs[1]);
    m = ComplexNumber::middle(a, a1);
    n = ComplexNumber::middle(b, b1);
    p = ComplexNumber::middle(c, c1);

    if (ComplexNumber::isOnSameLine(m, n, p)) {
        for (size_t i = 0; i < numbersCount; i++) {
            std::cout << numbers[i] << "\n";
        }
    }
}
```

Листинг 1: Функция task1

Демонстрация работы: Здесь будут скриншоты работы.

Задача 2

Задача 3

Заключение

В ходе выполнения работы изложены основы метода комплексных чисел, было проиллюстрировано его применение при решении 3 задач. Каждая задача имеет решение на языке C++.

Таким образом, все поставленные задачи были успешно выполнены, цель достигнута.

Литература

[1] Алгебра комплексных чисел в геометрических задачах: Книга для учащихся математических классов школ, учителей и студентов педагогических вузов. – М.: МЦНМО, 2004. – 160 с.

[2] Обучение методам решения геометрических задач https://cyberleninka.ru/article/n/obuchenie-metodam-resheniya-geometricheskih-zadach/viewer

[3] Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов.– 13-е изд., исправленное. – М.: Наука,Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 544 с.

[4] Жмурова И. Ю. Изучение комплексных чисел в общеобразовательной школе / И. Ю. Жмурова, С. В. Баринова. // Молодой ученый. – 2020. – № 5 (295). – С. 312-314. – URL: https://moluch.ru/archive/295/67123/ (дата обращения: 17.05.2022).