МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВЯТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ
ФАКУЛЬТЕТ КОМПЬЮТЕРНЫХ И ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

# Приложения комплексных чисел к решению геометрических задач

# Оглавление

# Введение

В настоящее время в большом количестве прикладных и научных областей возникает необходимость решения геометрических задач. Основные из них - производство различных деталей и конструкций, моделирование различных объектов и явлений. В данных областях возникает потребность поиска эффективного решения поставленных задач, что подразумевает выборку оптимального метода решения или соотношения между ними. Основные методы решения задач следующие[2]:

1. Аналитический. Состоит в представлении входных и требуемых данных в виде набора переменных и констант и взаимосвязи между ними в виде алгебраических уравнений с последующим их решением.

2. Графический. Состоит в построении рисунка, полноценно отражающего набор необходимых для решения задачи входных данных и взаимосвязей между ними. Решение состоит в последовательном применении известных фактов и теорем, приводящих к получению ответа.

3. Комбинация двух предыдущих. При ручном решении применяется чаще всего.

Метод комплексных чисел является расширением аналитического метода (метод №1). Он позволяет представить геометрические объекты 2-мерной плоскости в виде набора комплексных чисел и равенств, отражающих взаимосвязи между ними.
При этом данный метод рассматривается в школах только как материал для самостоятельного изучения[4],[1, стр.6]. Особенность данного метода состоит в его контринтуитивности и сложности (например, спиральное подобия – части основ метода)
Проблема состоит в том, что для данного метода отсутствуют программные материалы для внедрения в среду самостоятельного обучения.
Целью данной работы является изучение метода комплексных чисел при решении геометрических задач, реализация программной верификации решения выбранных задач.
Для достижения цели необходимо выполнить следующие задачи:

1. Изучить имеющиеся способы применения алгебры комплексных чисел при решении геометрических задач.

2. Выбрать задачи, на которых будет рассматриваться практическое применение метода.

3. Решение задач с применением метода комплексных чисел и без них

4. Сравнение решений задач.

5. Реализация программной верификации решения задач с применением метода.

# Основы метода комплексных чисел

Комплексное число $z$ – число вида $x + iy$, где $x, y \in \mathbf{R}, i = \sqrt{-1}, z \in \mathbf{C}, \mathbf{C}$ - поле комплексных чисел. У числа $z$ можно выделить действительную $x = Re(z)$ и мнимую $y = Im(z)$ части.

На плоскости зададим прямоугольную декартову систему координат $Oxy$ и отображение $f : M(x; y) \leftrightarrow z = x + iy$, где $M \in \mathbf{P}$ – точка плоскости с координатами $x, y \in \mathbf{R}, \mathbf{P}$ – множество точек евклидовой плоскости.

Отображение $f$ биективно. Метод комплексных чисел основан на данном факте. Таким образом, свойства и операции комплексных чисел можно перенести на прямоугольную декартову систему координат евклидовой плоскости.

Для примера рассмотрим некоторые из свойств:

1. Модуль числа $z = |z| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = r$ – расстояние между точкой $O$ и $M$ (рис. 1).

2. Если $\angle\varphi$ - ориентированный, образованный $\overrightarrow{OM}$ с осью $Ox$, то $x_0 = r\cos\varphi,\ y_0 = r\sin\varphi$. Тогда $z_0 = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

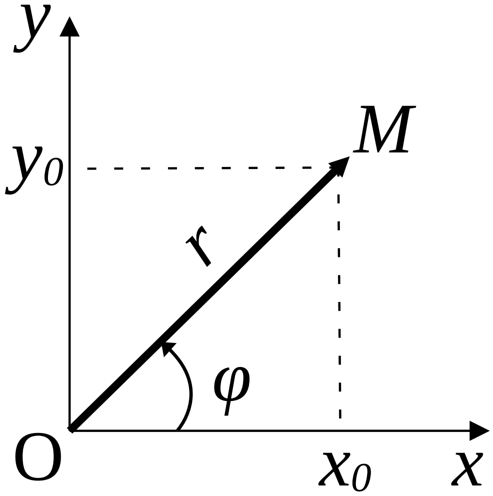


Рис. 1: Изображение числа $z$ на плоскости

# Решение и разбор задач с применением метода

## Задача 1

**Постановка задачи:** Доказать, что если некоторая прямая пересекает прямые, содержащие стороны $BC$, $CA$, $AB$ треугольника $ABC$, в точках $A_1$ , $B_1$ , $C_1$ соответственно, то середины отрезков $AA_1$ , $BB_1$ , $CC_1$ коллинеарны.

**Решение задачи:** Условие коллинеарности троек точек $A, B_1, C$; $C, A_1, B$; $B, C_1, A$; $A_1, B_1, C_1$:

$$\begin{cases} a(\bar{b_1} - \bar{c}) + b_1(\bar{c} - \bar{a}) + c(\bar{a} - \bar{b_1}) = 0 \\ b(\bar{c_1} - \bar{a}) + c_1(\bar{a} - \bar{b}) + a(\bar{b} - \bar{c_1}) = 0 \\ c(\bar{a_1} - \bar{b}) + a_1(\bar{b} - \bar{c}) + b(\bar{c} - \bar{a_1}) = 0 \\ a_1(\bar{b_1} - \bar{a_1}) + b_1(\bar{a_1} - \bar{a_1}) + a_1(\bar{a_1} - \bar{b_1}) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Если $M, N, P$ – середины отрезков $AA_1, BB_1, CC_1$, то предстоит показать, что

$$m(\bar{n} - \bar{p}) + n(\bar{p} - \bar{m}) + p(\bar{m} - \bar{n}) = 0, \tag{2}$$

Так как $m = \dfrac{1}{2}(a + a_1),\ n = \dfrac{1}{2}(b + b_1),\ p = \dfrac{1}{2}(c + c_1)$, то доказываемое равенство (2) эквивалентно такому:

$$(a + a_1)(\bar{b} + \bar{b_1} - \bar{c} - \bar{c_1}) + (b + b_1)(\bar{c} + \bar{c_1} - \bar{a} - \bar{a_1}) + (c + c_1)(\bar{a} + \bar{a_1} - \bar{b} - \bar{b_1}) = 0,$$

или, после перемножения,

$$\begin{aligned} &a(\bar{b_1} - \bar{c}) + a(\bar{b} - \bar{c_1}) + a_1(\bar{b_1} - \bar{c_1}) + a_1(\bar{b} - \bar{c}) + b(\bar{c_1} - \bar{a}) + b(\bar{c} - \bar{a_1}) + \\ &+ b_1(\bar{c_1} - \bar{a_1}) + b_1(\bar{c} - \bar{a}) + c(\bar{a_1} - \bar{b}) + c(\bar{a} - \bar{b_1}) + c_1(\bar{a_1} - \bar{b_1}) + c_1(\bar{a} - \bar{b}) = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Теперь легко видеть, что (3) получается при почленном сложении равенств (1)

**Алгоритм программного решения задачи:** На вход программы передаются координаты свободных точек, в данном примере это координаты точек $A, B, C, A_1$. По данным входным данным строится прямая, соответствующая условиям задачи.

# Литература

[1] Алгебра комплексных чисел в геометрических задачах: Книга для учащихся математических классов школ, учителей и студентов педагогических вузов. – М.: МЦНМО, 2004. – 160 с.

[2] Обучение методам решения геометрических задач
https://cyberleninka.ru/article/n/obuchenie-metodam-resheniya-geometricheskih-zadach/viewer

[3] Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов.– 13-е изд., исправленное. – М.: Наука,Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 544 с.

[4] Жмурова И. Ю. Изучение комплексных чисел в общеобразовательной школе / И. Ю. Жмурова, С. В. Баринова. // Молодой ученый. – 2020. – № 5 (295). – С. 312-314. – URL: https://moluch.ru/archive/295/67123/ (дата обращения: 17.05.2022).