

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ВЯТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ  
ФАКУЛЬТЕТ КОМПЬЮТЕРНЫХ И ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК  
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

## **Приложения комплексных чисел к решению геометрических задач**

# Оглавление

Введение	3
Основы метода комплексных чисел	5
Решение и разбор задач с применением метода	6
Список литературы	7

# Введение

В настоящее время в большом количестве прикладных и научных областей возникает необходимость решения геометрических задач. Основные из них - производство различных деталей и конструкций, моделирование различных объектов и явлений. В данных областях возникает потребность поиска эффективного решения поставленных задач, что подразумевает выборку оптимального метода решения или соотношения между ними. Основные методы решения задач следующие[2]:

1. Аналитический. Состоит в представлении входных и требуемых данных в виде набора переменных и констант и взаимосвязи между ними в виде алгебраических уравнений с последующим их решением.
2. Графический. Состоит в построении рисунка, полноценно отражающего набор необходимых для решения задачи входных данных и взаимосвязей между ними. Решение состоит в последовательном применении известных фактов и теорем, приводящих к получению ответа.
3. Комбинация двух предыдущих. При ручном решении применяется чаще всего.

Метод комплексных чисел является расширением аналитического метода (метод №1). Он позволяет представить геометрические объекты 2-мерной плоскости в виде набора комплексных чисел и равенств, отражающих взаимосвязи между ними.

При этом данный метод рассматривается в школах только как материал для самостоятельного изучения[4],[1, стр.6]. Особенность данного метода состоит в его контринтуитивности и сложности (например, спирального подобия – одной из основ метода)

Проблема состоит в том, что для данного метода отсутствуют программные материалы для внедрения в среду самостоятельного и школьного обучения.

Целью данной работы является изучение метода комплексных чисел при решении геометрических задач, реализация программной верификации решения выбранных задач.

Для достижения цели необходимо выполнить следующие задачи:

1. Изучить имеющиеся способы применения алгебры комплексных чисел при решении геометрических задач.
2. Выбрать задачи, на которых будет рассматриваться практическое применение метода.

3. Решение задач с применением метода комплексных чисел и без них
4. Сравнение решений задач.
5. Реализация программной верификации решения задач с применением метода.

# Основы метода комплексных чисел

Комплексное число  $z$  – число вида  $x + iy$ , где  $x, y \in \mathbf{R}, i = \sqrt{-1}, z \in \mathbf{C}, \mathbf{C}$  – поле комплексных чисел. У числа  $z$  можно выделить действительную  $x = \operatorname{Re}(z)$  и мнимую  $y = \operatorname{Im}(z)$  части.

На плоскости зададим прямоугольную декартову систему координат  $Oxy$  и отображение  $f : M(x; y) \leftrightarrow z = x + iy$ , где  $M \in \mathbf{P}$  – точка плоскости с координатами  $x, y \in \mathbf{R}, \mathbf{P}$  – множество точек евклидовой плоскости.

Отображение  $f$  биективно. Метод комплексных чисел основан на данном факте. Таким образом, свойства и операции комплексных чисел можно перенести на прямоугольную декартову систему координат евклидовой плоскости.

Для примера рассмотрим некоторые из свойств:

1. Модуль числа  $z = |z| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = r$  – расстояние между точкой  $O$  и  $M$  (рис. 1).
2. Если  $\angle \varphi$  – ориентированный, образованный  $\overrightarrow{OM}$  с осью  $Ox$ , то  $x_0 = r \cos \varphi, y_0 = r \sin \varphi$ . Тогда  $z_0 = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$

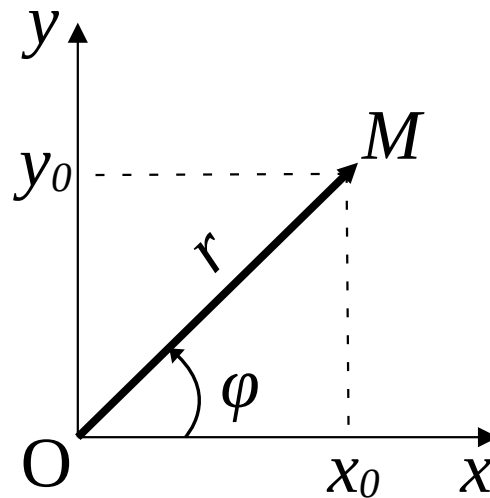


Рис. 1: Изображение числа  $z$  на плоскости

# Решение и разбор задач с применением метода

## Задача 1

**Постановка задачи:** Доказать, что если некоторая прямая пересекает прямые, содержащие стороны  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  треугольника  $ABC$ , в точках  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  соответственно, то середины отрезков  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  коллинеарны.

**Решение задачи:** Условие коллинеарности троек точек  $A, B_1, C$ ;  $C, A_1, B$ ;  $B, C_1, A$ ;  $A_1, B_1, C_1$ :

$$\begin{cases} a(\bar{b}_1 - \bar{c}) + b_1(\bar{c} - \bar{a}) + c(\bar{a} - \bar{b}_1) = 0 \\ b(\bar{c}_1 - \bar{a}) + c_1(\bar{a} - \bar{b}) + a(\bar{b} - \bar{c}_1) = 0 \\ c(\bar{a}_1 - \bar{b}) + a_1(\bar{b} - \bar{c}) + b(\bar{c} - \bar{a}_1) = 0 \\ a_1(\bar{b}_1 - \bar{a}_1) + b_1(\bar{a}_1 - \bar{a}_1) + a_1(\bar{a}_1 - \bar{b}_1) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Если  $M, N, P$  – середины отрезков  $AA_1, BB_1, CC_1$ , то предстоит показать, что

$$m(\bar{n} - \bar{p}) + n(\bar{p} - \bar{m}) + p(\bar{m} - \bar{n}) = 0, \quad (2)$$

Так как  $m = \frac{1}{2}(a + a_1)$ ,  $n = \frac{1}{2}(b + b_1)$ ,  $p = \frac{1}{2}(c + c_1)$ , то доказываемое равенство (2) эквивалентно такому:

$(a + a_1)(\bar{b} + \bar{b}_1 - \bar{c} - \bar{c}_1) + (b + b_1)(\bar{c} + \bar{c}_1 - \bar{a} - \bar{a}_1) + (c + c_1)(\bar{a} + \bar{a}_1 - \bar{b} - \bar{b}_1) = 0$ ,  
или, после перемножения,

$$\begin{aligned} & a(\bar{b}_1 - \bar{c}) + a(\bar{b} - \bar{c}_1) + a_1(\bar{b}_1 - \bar{c}_1) + a_1(\bar{b} - \bar{c}) + b(\bar{c}_1 - \bar{a}) + b(\bar{c} - \bar{a}_1) + \\ & + b_1(\bar{c}_1 - \bar{a}_1) + b_1(\bar{c} - \bar{a}) + c(\bar{a}_1 - \bar{b}) + c(\bar{a} - \bar{b}_1) + c_1(\bar{a}_1 - \bar{b}_1) + c_1(\bar{a} - \bar{b}) = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Теперь легко видеть, что (3) получается при почленном сложении равенств (1)

**Алгоритм программного решения задачи:** На вход программы передаются координаты свободных точек, в данном примере это координаты точек  $A, B, C, A_1$ . По данным входным данным строится прямая, соответствующая условиям задачи.

## Литература

- [1] Алгебра комплексных чисел в геометрических задачах: Книга для учащихся математических классов школ, учителей и студентов педагогических вузов. – М.: МЦНМО, 2004. – 160 с.
- [2] Обучение методам решения геометрических задач  
<https://cyberleninka.ru/article/n/obuchenie-metodam-resheniya-geometricheskih-zadach/viewer>
- [3] Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – 13-е изд., исправленное. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 544 с.
- [4] Жмурова И. Ю. Изучение комплексных чисел в общеобразовательной школе / И. Ю. Жмурова, С. В. Барина. // Молодой ученый. – 2020. – № 5 (295). – С. 312-314. – URL: <https://moluch.ru/archive/295/67123/> (дата обращения: 17.05.2022).