



**ВЯТСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ**

Приложения комплексных чисел к решению геометрических задач

Студент ПМИБ-2301-52-00 Ступников Григорий Евгеньевич
К.ф-м.н Пушкарев Игорь Александрович

ФГБОУ ВО «Вятский государственный университет»

22 августа 2022 г.

План доклада

- 1 Введение
- 2 Основы метода
- 3 Задачи
 - Задача 1
 - Задача 2
 - Задача 3
 - Задача 4
 - Задача 5
 - Задача 6
- 4 О программной реализации задач
- 5 Заключение

Введение

Метод комплексных чисел – это расширение алгебраического метода.

- ① Проблема состоит в том, что для данного метода отсутствуют программные материалы для внедрения в среду самостоятельного и школьного обучения.
- ② Целью данной работы является изучение метода комплексных чисел при решении геометрических задач, реализация программной верификации решения выбранных задач. Для достижения цели необходимо выполнить следующие задачи:
 - Изучить имеющиеся способы применения алгебры комплексных чисел при решении геометрических задач.
 - Выбрать задачи, на которых будет рассматриваться практическое применение метода.
 - Решение задач с применением метода комплексных чисел и без них
 - Сравнение решений задач.
 - Реализация программной верификации решения задач с применением метода.

Основы метода

Комплексное число z – число вида $x + iy$. У числа z можно выделить действительную $x = \operatorname{Re}(z)$ и мнимую $y = \operatorname{Im}(z)$ части. Каждое комплексное число представимо в виде точки на декартовой плоскости и наоборот. В таком случае точка обозначается как $M(z)$, где z — комплексные координаты точки M .

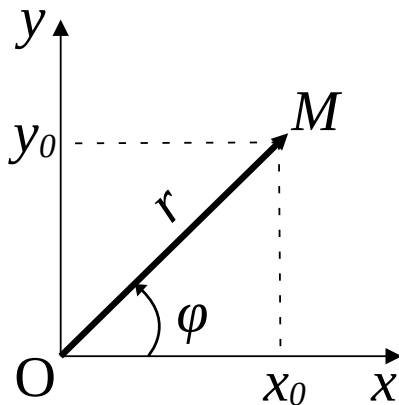


Рис. 1: Изображение точки $M(z)$ на плоскости

Задачи

Задача 1. Постановка задачи:

Точка D симметрична центру описанной около треугольника ABC окружности, относительно прямой AB . Доказать, что расстояние CD выражается формулой

$$CD^2 = R^2 + AC^2 + BC^2 - AB^2 \quad (1)$$

где R - радиус описанной окружности.

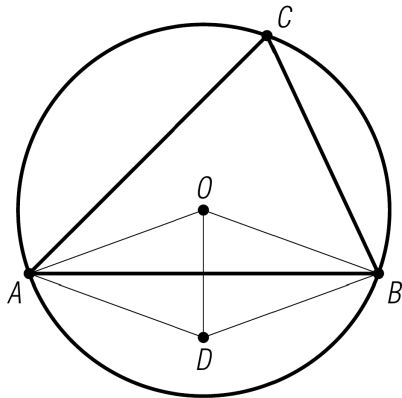


Рис. 2: Иллюстрация к задаче

Задача 1. Решение задачи:

Т.к $d = a + b$, то верно следующее:

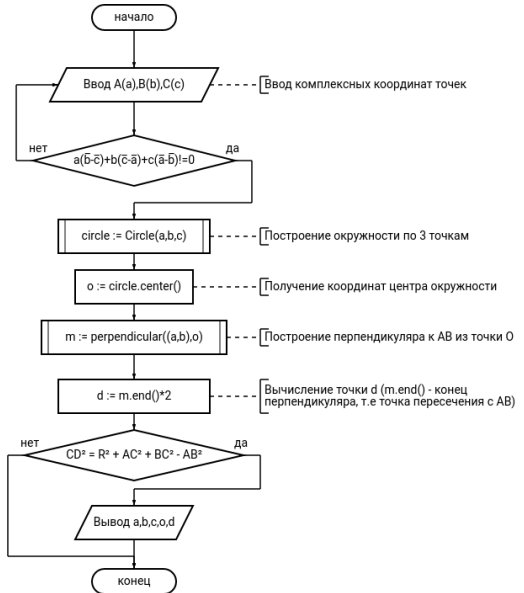
$$CD^2 = 3R^2 + (a\bar{b} + \bar{a}b) - (a\bar{c} + \bar{a}c) - (b\bar{c} + \bar{b}c).$$

Этому же выражению равна правая часть доказываемого равенства:

$$R^2 + AC^2 + BC^2 - AB^2 = 3R^2 + (a\bar{b} + \bar{a}b) - (a\bar{c} + \bar{a}c) - (b\bar{c} + \bar{b}c)$$

Таким образом утверждение (1) верно, что и требовалось доказать.

Задача 1.
Вычислительная
иллюстрация на частном
случае:



Демонстрация работы программной реализации алгоритма:

```
[codetest] ./realease.app 1
```

Task #1

Enter coordinates of triangle's points:

A: 0 0

B: 4 0

C: 2 3.24

Computed coordinates:

A: 0 + 0i

B: 4 + 0i

C: 2 + 3.24i

D: 2 + -1i

O: 2 + 1i

Задача 2

Постановка задачи: Точка M — середина дуги AB окружности.
Доказать, что для произвольной точки N этой окружности имеет место равенство

$$|AM^2 - MN^2| = AN \cdot BN. \quad (2)$$

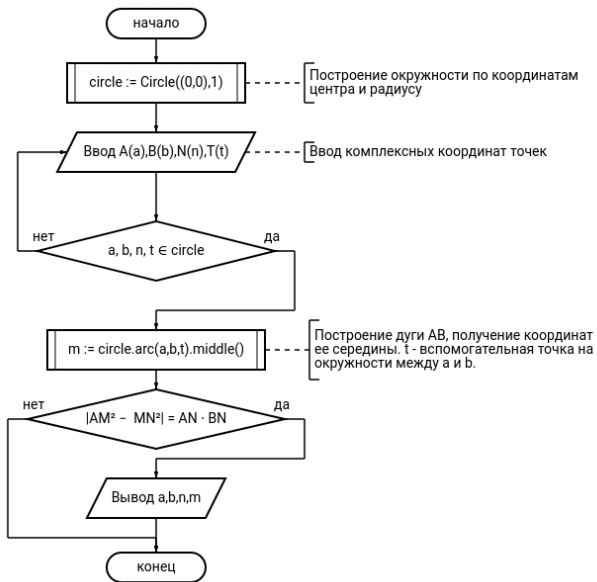
Решение задачи:

Находим: $AN \cdot BN = |a - n| \cdot |b - n| = |(a - n)(\bar{a} - n)| =$
 $|a\bar{a} - na - n\bar{a} + n^2| = |1 + n^2 - n(a + \bar{a})|.$

Так как $AM^2 = (a - 1)(\bar{a} - 1)$ и $MN^2 = (n - 1)(\bar{n} - 1)$, то
 $|AM^2 - MN^2| = |n + \bar{n} - (a + \bar{a})|$. Умножив это равенство на $|n| = 1$,
получим:

$$|AM^2 - MN^2| = |n^2 + 1 - n(a + \bar{a})| = AN \cdot BN.$$

Задача 2.
Вычислительная
иллюстрация на
частном случае:



Демонстрация работы программной реализации алгоритма:

```
[codetest] ./realease.app 2
```

Task #2

Enter coordinates of a,b,n,t points (must conform $x^2+y^2 = 1$, t between a and b):

A: 0.5 0.866

B: 0.5 -0.866

N: -1 0

T: 0.707 0.707

Computed coordinates:

A: 0.5 + 0.87i

B: 0.5 + -0.87i

N: -1 + 0i

T: 0.71 + 0.71i

M: 1 + 0i

Задача 3. Постановка задачи:

Докажите, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон (Рис. 3). Таким образом, требуется доказать, что

$$AD^2 + BC^2 = AB^2 + CD^2 + BD^2 + AC^2 \quad (3)$$

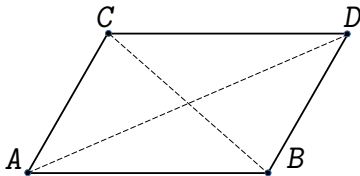
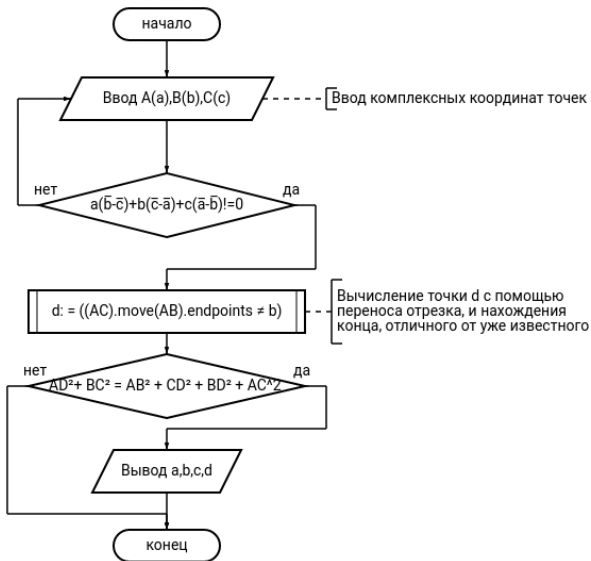


Рис. 3: Иллюстрация к задаче

Задача 3. Решение задачи: Кратко

Задача 3.
Вычислительная
иллюстрация на
частном случае:



Демонстрация работы программной реализации алгоритма:

```
[codetest] ./realease.app 3
```

```
Task #3
```

```
Enter coordinates of triangle's points:
```

```
A: 1 0
```

```
B: 5 0
```

```
C: 2 3
```

```
Computed coordinates:
```

```
A: 1 + 0i
```

```
B: 5 + 0i
```

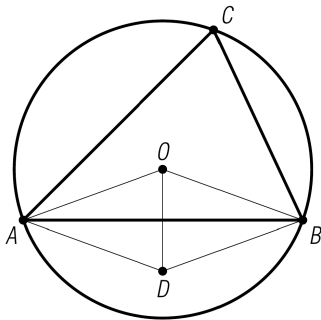
```
C: 2 + 3i
```

```
D: 6 + 3i
```

```
-----
```

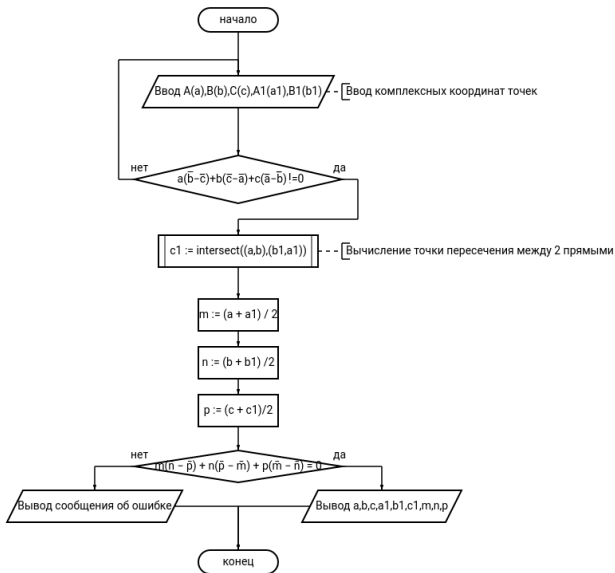
Задача 4. Постановка задачи:

Доказать, что если некоторая прямая пересекает прямые, содержащие стороны BC , CA , AB треугольника ABC , в точках A_1 , B_1 , C_1 соответственно, то середины отрезков AA_1 , BB_1 , CC_1 коллинеарны.



Задача 4. Решение задачи: Кратко

Задача 4.
Вычислительная
иллюстрация на
частном случае:



Демонстрация работы программной реализации алгоритма:

```
[codetest] ./realease.app 4
```

Task #4

Enter coordinates of a,b,c,a1,b1 points:

A: 0 0

B: 10 0

C: 8 10

A1: 9.5 2.5

B1: 4 5

Computed coordinates:

A: $0 + 0i$

B: $10 + 0i$

C: $8 + 10i$

A1: $9.5 + 2.5i$

B1: $4 + 5i$

C1: $15 + 0i$

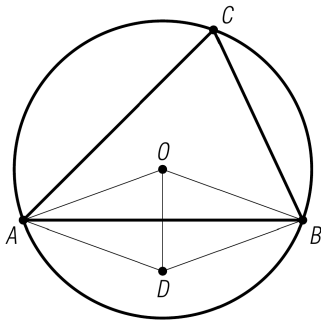
M: $4.75 + 1.25i$

N: $7 + 2.5i$

P: $11.5 + 5i$

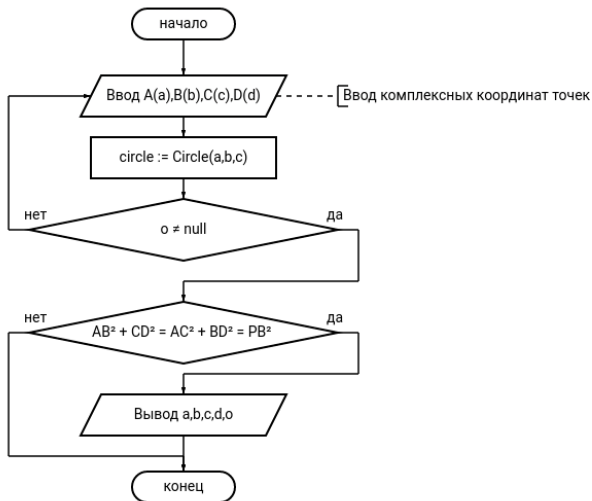
Задача 5. Постановка задачи:

Доказать, что если некоторая прямая пересекает прямые, содержащие стороны BC , CA , AB треугольника ABC , в точках A_1 , B_1 , C_1 соответственно, то середины отрезков AA_1 , BB_1 , CC_1 коллинеарны.



Задача 5. Решение задачи: Кратко

Задача 5.
Вычислительная
иллюстрация на
частном случае:



Демонстрация работы программной реализации алгоритма:

```
[codetest] ./realease.app 5
```

Task #5

Enter coordinates of a,b,c,d points (must be
points of quadrilateral):

A: 0 -1

B: 2 -1

C: 0 1

D: 2 1

Computed coordinates:

A: 0 + -1i

B: 2 + -1i

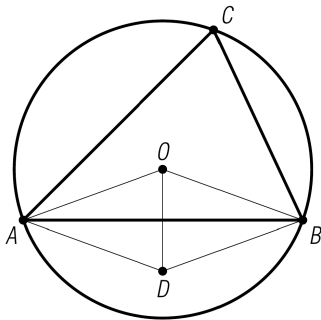
C: 0 + 1i

D: 2 + 1i

O: 1 + 0i

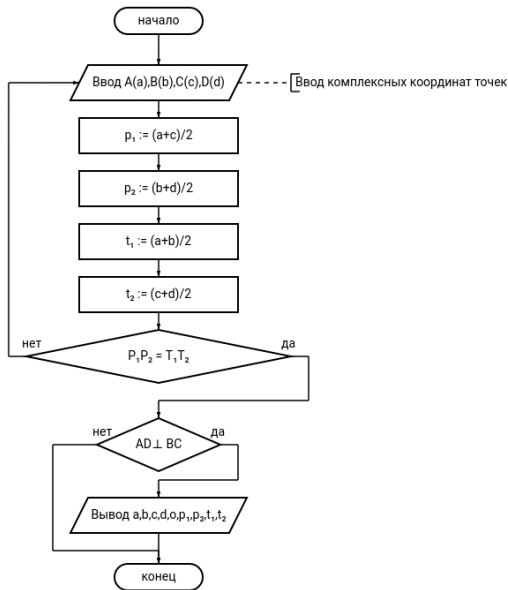
Задача 6. Постановка задачи:

Доказать, что если некоторая прямая пересекает прямые, содержащие стороны BC , CA , AB треугольника ABC , в точках A_1 , B_1 , C_1 соответственно, то середины отрезков AA_1 , BB_1 , CC_1 коллинеарны.



Задача 6. Решение задачи: Кратко

Задача 6.
Вычислительная
иллюстрация на
частном случае:



Демонстрация работы программной реализации алгоритма:

```
[codetest] ./realease.app 6
```

Task #6

Enter coordinates of a,b,c,d points (must be
points of quadrilateral):

A: 1 0

B: 3 0

C: 1 2

D: 3 2

Computed coordinates:

A: 1 + 0i

B: 3 + 0i

C: 1 + 2i

D: 3 + 2i

O: 2 + 1i

P1: 1 + 1i

P2: 3 + 1i

T1: 2 + 0i

T2: 2 + 2i

О программной реализации задач

Решение всех задач написано на языке C++ в виде части программы для решения задач из данной работы. Программа (содержащая решение всех задач) поддерживает следующие функции (кроме решения задач):

- запуск нескольких задач из командной строки
- вывод информации в виде, пригодном для обработки сторонними программами.

Кроме того, для тестирования программы написана программа тестирования и тесты к ней.



Заключение

Спасибо за внимание!