

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
ВЯТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ  
ФАКУЛЬТЕТ КОМПЬЮТЕРНЫХ И ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК  
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Допущена к защите  
Заведующей кафедрой ПМИ  
\_\_\_\_\_ Е.В.Разова

## ПРИЛОЖЕНИЯ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ К РЕШЕНИЮ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Курсовой проект по дисциплине «Проектная и научно-исследовательская  
деятельность»

Выполнил студент группы ПМИб-2301-52-00 \_\_\_\_\_ /Г.Е. Ступников/  
Руководитель к.ф-м.н. доцент кафедры ПМИ \_\_\_\_\_ /И.А. Пушкарев/

Работа защищена с оценкой \_\_\_\_\_ . \_\_\_\_\_.2022

КИРОВ 2022 г.

# Оглавление

Введение	3
Теория метода комплексных чисел	5
Решение и разбор задач с применением метода	7
Заключение	16
Список литературы	17
Приложения	18
А    Листинг программы . . . . .	18

# Введение

В настоящее время в большом количестве прикладных и научных областей возникает необходимость решения геометрических задач. Основные из них - производство различных деталей и конструкций, моделирование различных объектов и явлений. В данных областях возникает потребность поиска эффективного решения поставленных задач, что подразумевает выборку оптимального метода решения или соотношения между ними. Основные методы решения задач следующие[2]:

1. Аналитический. Состоит в представлении входных и требуемых данных в виде набора переменных и констант и взаимосвязи между ними в виде алгебраических уравнений с последующим их решением.
2. Графический. Состоит в построении рисунка, полноценно отражающего набор необходимых для решения задачи входных данных и взаимосвязей между ними. Решение состоит в последовательном применении известных фактов и теорем, приводящих к получению ответа.
3. Комбинация двух предыдущих. При ручном решении применяется чаще всего.

Метод комплексных чисел является расширением аналитического метода (метод №1). Он позволяет представить геометрические объекты 2-мерной плоскости в виде набора комплексных чисел и равенств, отражающих взаимосвязи между ними.

Данный метод достаточно контринтуитивен и сложен для самостоятельного изучения (особенно непривычно выглядит спиральное подобие как геом. ипостась умножения), при этом он не рассматривается в школах на уровне основной программы [4],[1, стр.6].

Проблема состоит в том, что для данного метода отсутствуют материалы для внедрения в среду самостоятельного и школьного обучения, включающие программы, облегчающие изучение метода.

Целью данной работы является изучение метода комплексных чисел при решении геометрических задач, реализация программной верификации решения выбранных задач.

Для достижения цели необходимо выполнить следующие задачи:

1. Изучить имеющиеся способы применения алгебры комплексных чисел при решении геометрических задач.
2. Выбрать задачи, на которых будет рассматриваться практическое применение метода.
3. Решение задач с применением метода комплексных чисел
4. Реализация программной верификации решения задач с применением метода.

# Теория метода комплексных чисел

Комплексное число  $z$  – число вида  $x + iy$ , где  $x, y \in \mathbf{R}, i = \sqrt{-1}, z \in \mathbf{C}, \mathbf{C}$  – поле комплексных чисел. У числа  $z$  можно выделить действительную  $x = \operatorname{Re}(z)$  и мнимую  $y = \operatorname{Im}(z)$  части.

На плоскости зададим прямоугольную декартову систему координат  $Oxy$  и отображение  $f : M(x; y) \leftrightarrow z = x + iy$ , где  $M \in \mathbf{P}$  – точка плоскости с координатами  $x, y \in \mathbf{R}, \mathbf{P}$  – множество точек евклидовой плоскости. Комплексное число  $z$  называют комплексной координатой соответствующей точки  $M$  и пишут  $M(z)$ . Отображение  $f$  биективно. Метод комплексных чисел основан на данном факте. Таким образом, свойства и операции комплексных чисел можно перенести на прямоугольную декартову систему координат евклидовой плоскости.

Для примера рассмотрим некоторые из свойств:

1. Модуль числа  $z = |z| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = r$  – расстояние между точкой  $O$  и  $M$  (рис. 1).
2. Если  $\angle \varphi$  – ориентированный, образованный  $\overrightarrow{OM}$  с осью  $Ox$ , то  $x_0 = r \cos \varphi, y_0 = r \sin \varphi$  (из определения функций). Тогда  $z_0 = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ . Такое представление комплексного числа называют тригонометрическим.
3.  $\arg z = \angle \varphi$
4. Если на плоскости комплексных чисел заданы векторы  $\overrightarrow{OA}$  и  $\overrightarrow{OB}$ , где  $O$  – начало координат,

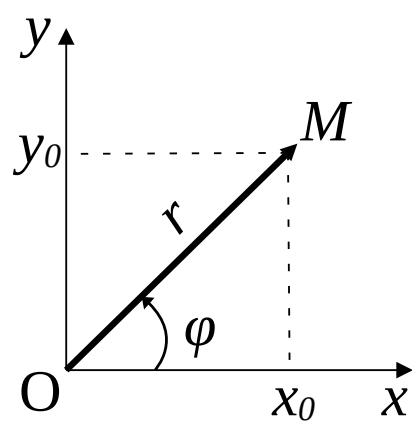


Рис. 1: Изображение числа  $z$  на плоскости

# Решение и разбор задач с применением метода

## Задача 1

**Постановка задачи:** Точка  $D$  симметрична центру описанной около треугольника  $ABC$  окружности, относительно прямой  $AB$ . Доказать, что расстояние  $CD$  выражается формулой

$$CD^2 = R^2 + AC^2 + BC^2 - AB^2 \quad (1)$$

где  $R$  - радиус описанной окружности.



Рис. 2: Иллюстрация к задаче

**Решение задачи:** За начало координат плоскости будем считать точку  $O$  – центр описанной около треугольника  $ABC$  окружности. Уравнение данной окружности имеет вид  $z\bar{z} = |z|^2 = x^2 + y^2 = R^2$ , где  $z \in \mathbb{C}$ . Рассмотрим четырехугольник  $OADB$ :  $OA = AD = OB = BD$  по условию задачи и отрезки  $AB, OD$  пересекаются под прямым углом, следовательно,  $OADB$  – ромб. На основании данного факта верно

следующее утверждение –  $d = a + b$ . Тогда

$$CD^2 = (d-c)(\bar{d}-\bar{c}) = (a+b-c)(\bar{a}+\bar{b}-\bar{c}) = 3R^2 + (a\bar{b} + \bar{a}b) - (a\bar{c} + \bar{a}c) - (b\bar{c} + \bar{b}c). \quad (2)$$

Этому же выражению равна правая часть доказываемого равенства:

$$\begin{aligned} R^2 + AC^2 + BC^2 - AB^2 &= R^2 + (a-c)(\bar{a}-\bar{c}) + (b-c)(\bar{b}-\bar{c}) - (a-b)(\bar{a}-\bar{b}) = \\ &= 3R^2 - (a\bar{c} + \bar{a}c) - (b\bar{c} + \bar{b}c) + (a\bar{b} + \bar{a}b) \end{aligned} \quad (3)$$

Таким образом утверждение 1 верно, что и требовалось доказать.

**Алгоритм программного решения частного случая задачи:** На вход программы передаются координаты свободных точек комплексной плоскости, в данном примере это координаты точек  $A, B, C, A_1, B_1$ . Если  $A_1, B_1$  лежат на треугольнике, то по данным входным данным строится прямая, соответствующая условиям задачи. Далее производится проверка того, что середины отрезков  $AA_1, BB_1, CC_1$  коллинеарны. Если условие выполняется, то задача считается решенной для данных входных данных и на экран выводятся координаты точек  $M, N, P$ , а также координаты всех остальных. Блок-схема алгоритма приведена на Рис. 5.



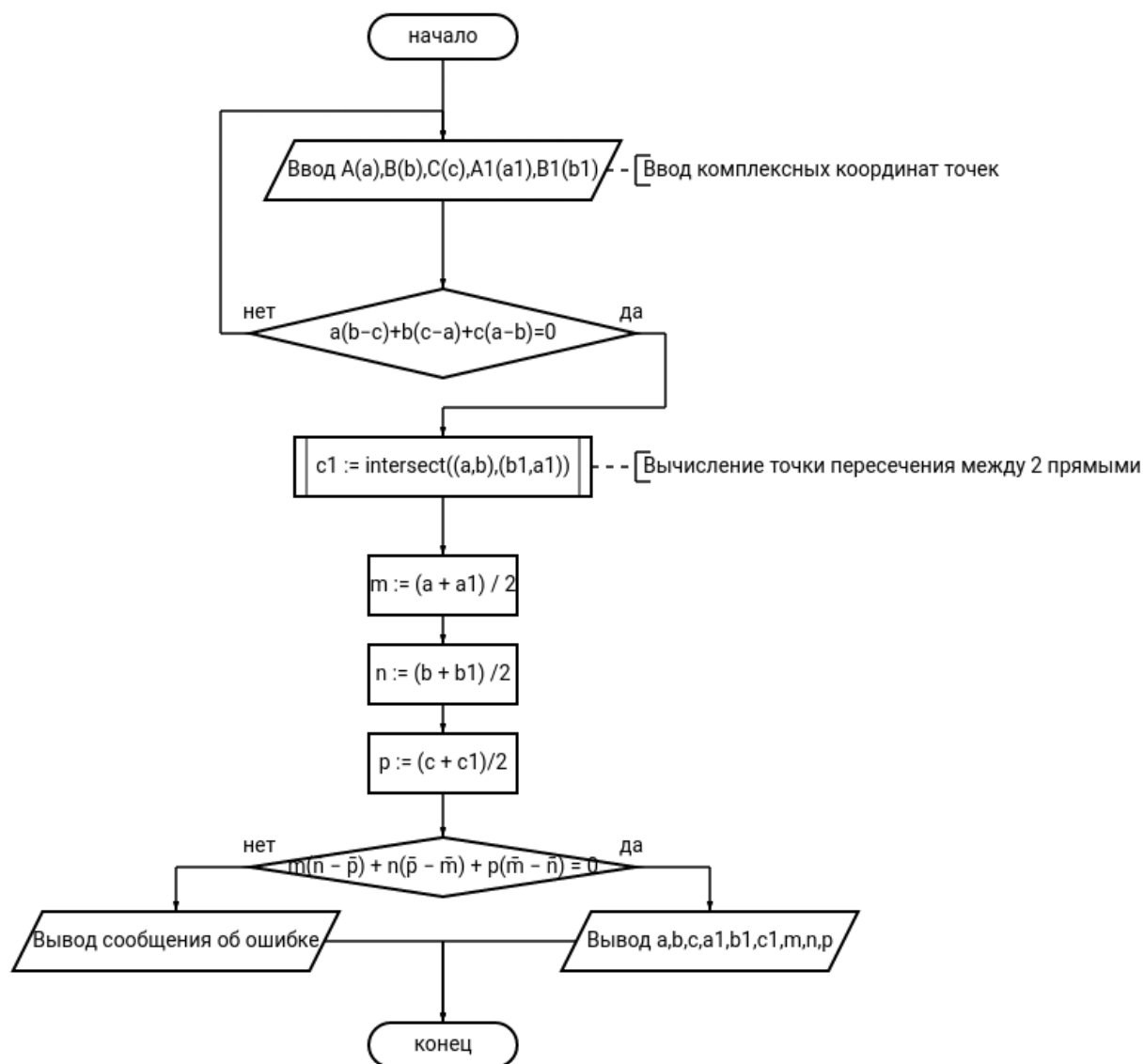


Рис. 3: Блок-схема алгоритма программы

Программная реализация задачи:

## Задача 2

Демонстрация работы:

Постановка задачи:

Решение задачи:

Алгоритм программного решения частного случая задачи:

Программная реализация задачи:

## Задача 3

Демонстрация работы:

Постановка задачи:

Решение задачи:

Алгоритм программного решения частного случая задачи:

Программная реализация задачи:

## Задача 4

Демонстрация работы:

Постановка задачи:

Решение задачи:

Алгоритм программного решения частного случая задачи:

Программная реализация задачи:

## Задача 5

Демонстрация работы:

**Постановка задачи:** Доказать, что если некоторая прямая пересекает прямые, содержащие стороны  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  треугольника  $ABC$ , в точках  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  соответственно, то середины отрезков  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  коллинеарны.

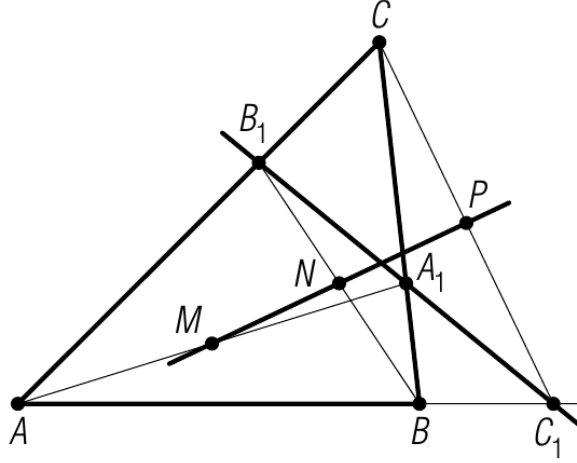


Рис. 4: Иллюстрация к задаче

**Решение задачи:** Условие коллинеарности троек точек  $A, B_1, C$ ;  $C, A_1, B$ ;  $B, C_1, A$ ;  $A_1, B_1, C_1$ :

$$\begin{cases} a(\bar{b}_1 - \bar{c}) + b_1(\bar{c} - \bar{a}) + c(\bar{a} - \bar{b}_1) = 0 \\ b(\bar{c}_1 - \bar{a}) + c_1(\bar{a} - \bar{b}) + a(\bar{b} - \bar{c}_1) = 0 \\ c(\bar{a}_1 - \bar{b}) + a_1(\bar{b} - \bar{c}) + b(\bar{c} - \bar{a}_1) = 0 \\ a_1(\bar{b}_1 - \bar{a}_1) + b_1(\bar{a}_1 - \bar{a}_1) + a_1(\bar{a}_1 - \bar{b}_1) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Если  $M, N, P$  – середины отрезков  $AA_1, BB_1, CC_1$ , то предстоит показать, что

$$m(\bar{n} - \bar{p}) + n(\bar{p} - \bar{m}) + p(\bar{m} - \bar{n}) = 0, \quad (5)$$

Так как  $m = \frac{1}{2}(a + a_1)$ ,  $n = \frac{1}{2}(b + b_1)$ ,  $p = \frac{1}{2}(c + c_1)$ , то доказываемое равенство (5) эквивалентно такому:

$$(a + a_1)(\bar{b} + \bar{b}_1 - \bar{c} - \bar{c}_1) + (b + b_1)(\bar{c} + \bar{c}_1 - \bar{a} - \bar{a}_1) + (c + c_1)(\bar{a} + \bar{a}_1 - \bar{b} - \bar{b}_1) = 0,$$

или, после перемножения,

$$\begin{aligned} & a(\bar{b}_1 - \bar{c}) + a(\bar{b} - \bar{c}_1) + a_1(\bar{b}_1 - \bar{c}_1) + a_1(\bar{b} - \bar{c}) + b(\bar{c}_1 - \bar{a}) + b(\bar{c} - \bar{a}_1) + \\ & + b_1(\bar{c}_1 - \bar{a}_1) + b_1(\bar{c} - \bar{a}) + c(\bar{a}_1 - \bar{b}) + c(\bar{a} - \bar{b}_1) + c_1(\bar{a}_1 - \bar{b}_1) + c_1(\bar{a} - \bar{b}) = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Теперь легко видеть, что (6) получается при почленном сложении равенств (4)

**Алгоритм программного решения частного случая задачи:** На вход программы передаются координаты свободных точек комплексной плоскости, в данном примере это координаты точек  $A, B, C, A_1, B_1$ . Если  $A_1, B_1$  лежат на треугольнике, то по данным входным данным строится прямая, соответствующая условиям задачи. Далее производится проверка того, что середины отрезков  $AA_1, BB_1, CC_1$  коллинеарны. Если условие выполняется, то задача считается решенной для данных входных данных и на экран выводятся координаты точек  $M, N, P$ , а также координаты всех остальных. Блок-схема алгоритма приведена на Рис. 5.

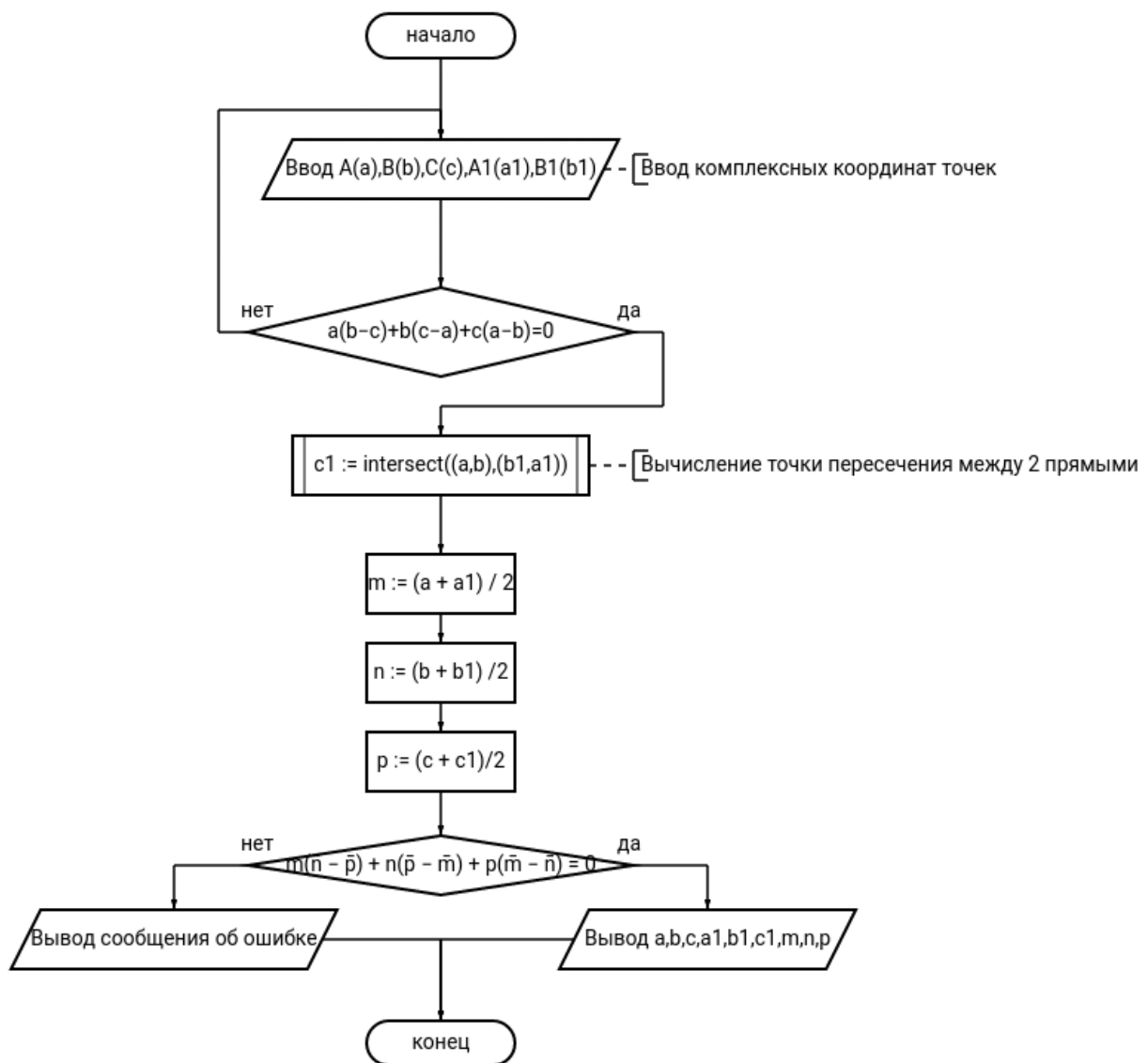


Рис. 5: Блок-схема алгоритма программы

**Программная реализация задачи:** Решение задачи написано на языке C++ в как часть программы для решения задач из данной работы. Реализация алгоритма программы предоставлена в функции task1::solve (файл task1.cpp):

```
inline void task1::solve()
{
    // TODO test on cw-main data (or almost same data)
    const int numbersCount = 9;
    ComplexNumber numbers[numbersCount];
    const std::string labels[9] = { "A", "B", "C", "A1", "B1", "C1", "M", "N", "P" };
    // Reference for readability
    ComplexNumber &a = numbers[0],
                  &b = numbers[1],
                  &c = numbers[2],
                  &a1 = numbers[3],
                  &b1 = numbers[4],
                  &c1 = numbers[5],
                  &m = numbers[6],
                  &n = numbers[7],
                  &p = numbers[8];

    ReadNumbersFromUser(numbers, labels);

    std::pair<ComplexNumber, ComplexNumber> pairs[2] { { a, b }, { b1, a1 } };

    c1 = intersect(pairs[0], pairs[1]);
    m = ComplexNumber::middle(a, a1);
    n = ComplexNumber::middle(b, b1);
    p = ComplexNumber::middle(c, c1);

    if (ComplexNumber::isOnSameLine(m, n, p)) {
        std::cout << "Computed coordinates:\n";
        for (size_t i = 0; i < numbersCount; i++) {
            std::cout << " " + labels[i] + ": " << numbers[i] << "\n";
        }
    } else
        std::cerr << "The computed points M,N,P is not belong to the same line, so\n";
        the Guss's theorem is not true.\n";
}
```

Листинг 1: Функция task1

Демонстрация работы: Здесь будут скриншоты работы.

## Задача 6

Постановка задачи:

Решение задачи:

Алгоритм программного решения частного случая задачи:

Программная реализация задачи:

## Задача 7

Демонстрация работы:

Постановка задачи:

Решение задачи:

Алгоритм программного решения частного случая задачи:

Программная реализация задачи:

## Задача 8

Демонстрация работы:

Постановка задачи:

Решение задачи:

Алгоритм программного решения частного случая задачи:

Программная реализация задачи:

## Задача 9

Демонстрация работы:

Постановка задачи:

Решение задачи:

Алгоритм программного решения частного случая задачи:

Программная реализация задачи:

## Заключение

В ходе выполнения работы изложены основы метода комплексных чисел, было проиллюстрировано его применение при решении 3 задач. Каждая задача имеет решение на языке C++.

Таким образом, все поставленные задачи были успешно выполнены, цель достигнута.



## Список литературы

- [1] Алгебра комплексных чисел в геометрических задачах: Книга для учащихся математических классов школ, учителей и студентов педагогических вузов. – М.: МЦНМО, 2004. – 160 с.
- [2] Кибирев В. В. Обучение методам решения геометрических задач // Вестник БГУ. 2014. №15. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/obuchenie-metodam-resheniya-geometricheskih-zadach> (дата обращения: 19.07.2022).
- [3] Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – 13-е изд., исправленное. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 544 с.
- [4] Жмурова И. Ю. Изучение комплексных чисел в общеобразовательной школе / И. Ю. Жмурова, С. В. Баринова. // Молодой ученый. – 2020. – № 5 (295). – С. 312-314. – URL: <https://moluch.ru/archive/295/67123/> (дата обращения: 17.05.2022).

# Приложения

## Приложение А. Листинг программы

Файл меню main.cpp:

```
#include "ComplexNumber.hpp"
#include "functions.hpp"

#include "task1.cpp"
#include "task2.cpp"
#include "task3.cpp"

#include <iostream>

int main(int argc, char const* argv[])
{
    bool noData = false;
    if (argc == 1) {
        std::cout << "Enter program number to launch: ";
        argc++;
        noData = true;
    }
    for (int i = 1; i < argc; i++) {
        int choice;
        if (noData) {
            std::cin >> choice;
            std::cin.ignore(32767, '\n');
        } else {
            choice = std::stoi(argv[i]);
        }

        switch (choice) {
        case 1:
            std::cout << "Task #1\n";
```

```

        task1::solve();
        std::cout << "-----\n";
        break;
    case 2:
        std::cout << "Task #2\n";
        // task2();
        std::cout << "-----\n";
        break;
    case 3:
        std::cout << "Task #3\n";
        // task3();
        std::cout << "-----\n";
        break;
    default:
        std::cout << "Entered program number is incorrect, retry.\n";
        break;
    }
}
}

```

**task1.cpp:**

```

#include "ComplexNumber.hpp"
#include "functions.hpp"

inline void task1::solve()
{
    // TODO test on cw-main data (or almost same data)
    const int numbersCount = 9;
    ComplexNumber numbers[numbersCount];
    const std::string labels[9] = { "A", "B", "C", "A1", "B1", "C1", "M", "N", "P" };
    // Reference for readability
    ComplexNumber &a = numbers[0],
        &b = numbers[1],
        &c = numbers[2],
        &a1 = numbers[3],
        &b1 = numbers[4],
        &c1 = numbers[5],
        &m = numbers[6],
        &n = numbers[7],
        &p = numbers[8];
}

```

```

ReadNumbersFromUser(numbers, labels);

std::pair<ComplexNumber, ComplexNumber> pairs[2] { { a, b }, { b1, a1 } };

c1 = intersect(pairs[0], pairs[1]);
m = ComplexNumber::middle(a, a1);
n = ComplexNumber::middle(b, b1);
p = ComplexNumber::middle(c, c1);

if (ComplexNumber::isOnSameLine(m, n, p)) {
    std::cout << "Computed coordinates:\n";
    for (size_t i = 0; i < numbersCount; i++) {
        std::cout << " " + labels[i] + ": " << numbers[i] << "\n";
    }
} else
    std::cerr << "The computed points M,N,P is not belong to the same line, so
        the Guss's theorem is not true.\n";
}

```

**task2.cpp:**

```

inline void task2() { }

```

**task3.cpp:**

```

inline void task3() { }

```

**functions.hpp:**

```

/**
 * @file functions.hpp
 * @author Grigory Stupnikov (stud128245@vyatsu.ru)
 * @brief
 * @version 0.1
 * @date 2022-07-14
 *
 * @copyright Copyright © 2022 Grigory Stupnikov. All rights reserved. Licensed
 *         under GNU GPLv3. See https://opensource.org/licenses/GPL-3.0.
 */
#ifndef FUNCTIONS_LIB

```

```

#define FUNCTIONS_LIB

#include "ComplexNumber.hpp"
#include <cmath>
#include <limits>
#include <tuple>

using clineSegment_t = std::pair<ComplexNumber, ComplexNumber>;

/**
 * @brief Intersect of 2 line segments
 * @return ComplexNumber, intersection point of lines
 */
ComplexNumber intersect(clineSegment_t first, clineSegment_t second);

bool isPointBelongsSegment(clineSegment_t segment, ComplexNumber point);

namespace task1 {
void ReadNumbersFromUser(ComplexNumber arr[5], const std::string labels[5]);
void solve();
} // namespace task1

template <class T>
typename std::enable_if<!std::numeric_limits<T>::is_integer, bool>::type
almost_equal(T x, T y, int ulp)
{
    // the machine epsilon has to be scaled to the magnitude of the values used
    // and multiplied by the desired precision in ULPs (units in the last place)
    return std::fabs(x - y) <= std::numeric_limits<T>::epsilon() * std::fabs(x + y)
        * ulp
        // unless the result is subnormal
        || std::fabs(x - y) < std::numeric_limits<T>::min();
}

#endif // FUNCTIONS_LIB

```

**functions.cpp:**

```

#include "functions.hpp"
#include "Line.hpp"

#include <cmath>

```

```

ComplexNumber intersect(clineSegment_t first, clineSegment_t second)
{
    Line firstL(first.first, first.second), secondL(second.first, second.second);

    double x = (secondL.B() - firstL.B()) / (firstL.K() - secondL.K());
    double tmp = firstL.y(x);
    double y = std::isinf(tmp) ? secondL.y(x) : tmp;

    return ComplexNumber(x, y);
}

bool isPointBelongsSegment(clineSegment_t segment, ComplexNumber cpoint)
{
    ComplexNumber &a = segment.first, &b = segment.second;
    Line line(a, b);

    double imMax = std::max(a.Im(), b.Im()), imMin = std::min(a.Im(), b.Im());
    double reMax = std::max(a.Re(), b.Re()), reMin = std::min(a.Re(), b.Re());
    bool isPointInBounds
        = (imMin <= cpoint.Im() && cpoint.Im() <= imMax)
        && (reMin <= cpoint.Re() && cpoint.Re() <= reMax);

    return line.isBelongs(static_cast<Point>(cpoint)) && isPointInBounds;
}

void task1::ReadNumbersFromUser(ComplexNumber arr[5], const std::string labels[5])
{
    const size_t labelsCount = 5;

    ComplexNumber &a = arr[0],
                  &b = arr[1],
                  &c = arr[2],
                  &a1 = arr[3],
                  &b1 = arr[4];

    bool isTriangle = false, isValidA1 = false, isValidB1 = false;
    while (!(isTriangle && isValidA1 && isValidB1)) {
        std::cout << "Enter coordinates of a,b,c,a1,b1 points:\n";
        if (std::cin.fail()) {
            if (std::cin.eof()) {

```

```

        std::cout << "User input was canceled. Aborting...\n";
        return;
    }
    std::cin.ignore();
    std::cin.clear();
}
for (size_t i = 0; i < labelsCount; i++) {
    std::cout << " " << labels[i] << ": ";
    std::cin >> arr[i];
}
isTriangle = a * (b - c) + b * (c - a) + c * (a - b)
            == ComplexNumber::getZero();

isValidA1 = isPointBelongsSegment({ b, c }, a1);
isValidB1 = isPointBelongsSegment({ a, c }, b1);

if (!isTriangle)
    std::cerr << "Incorrect a,b,c. Must be points of the triangle ABC\n";
if (!isValidA1)
    std::cerr << "The a1 is incorrect. Must belong to segment of line BC\n";
if (!isValidB1)
    std::cerr << "The b1 is incorrect. Must belong to segment of line AC\n";
}
}

```

## ComplexNumber.hpp:

```

#ifndef COMPLEXN_LIB
#define COMPLEXN_LIB

#include "Point.hpp"
#include <iostream>

// TODO write comments

class ComplexNumber {
private:
    double _imaginary;
    double _real;
    friend std::ostream& operator<<(std::ostream& out, const ComplexNumber& number);
    friend std::istream& operator>>(std::istream& in, ComplexNumber& number);
}

```

```

public:
    ComplexNumber(double real = 0, double imaginary = 0);
    ComplexNumber(const ComplexNumber& source);

    ComplexNumber& operator=(const ComplexNumber& b);

    ComplexNumber operator+(const ComplexNumber& b) const;
    ComplexNumber operator-(const ComplexNumber& b) const;
    ComplexNumber operator*(const ComplexNumber& b) const;
    // TODO ComplexNumber operator/(const ComplexNumber& b) const;

    explicit operator Point() const { return Point(Re(), Im()); }

    bool operator==(const ComplexNumber& b) const;
    bool operator!=(const ComplexNumber& b) const;

    static bool isCollinear(const ComplexNumber& a, const ComplexNumber& b);
    static bool isOnSameLine(const ComplexNumber& a, const ComplexNumber& b, const
        ComplexNumber& c);

    static ComplexNumber middle(const ComplexNumber& a, const ComplexNumber& b);

    const double& Re() const { return _real; }
    const double& Im() const { return _imaginary; }

    static ComplexNumber getZero()
    {
        return ComplexNumber(0, 0);
    }
};

#endif // COMPLEXN_LIB

```

## ComplexNumber.cpp:

```

#include "ComplexNumber.hpp"
#include "Line.hpp"

static const ComplexNumber zero = ComplexNumber(0, 0);

ComplexNumber::ComplexNumber(double real, double imaginary) : _imaginary(imaginary),

```



```

    _real(real)
{
}

ComplexNumber::ComplexNumber(const ComplexNumber& source) : _imaginary(source.Im()),
    _real(source.Re())
{
}

std::ostream& operator<<(std::ostream& out, const ComplexNumber& number)
{
    out << number._real << " + " << number._imaginary << "i";
    return out;
}

std::istream& operator>>(std::istream& in, ComplexNumber& number)
{
    in >> number._real >> number._imaginary;
    return in;
}

ComplexNumber& ComplexNumber::operator=(const ComplexNumber& b)
{
    this->_real = b.Re();
    this->_imaginary = b.Im();
    return *this;
}

ComplexNumber ComplexNumber::operator+(const ComplexNumber& b) const
{
    return ComplexNumber(this->Re() + b.Re(), this->Im() + b.Im());
}

ComplexNumber ComplexNumber::operator-(const ComplexNumber& b) const
{
    return ComplexNumber(this->Re() - b.Re(), this->Im() - b.Im());
}

ComplexNumber ComplexNumber::operator*(const ComplexNumber& b) const
{
    return ComplexNumber(this->Re() * b.Re(), this->Im() * b.Im());
}

```

```

bool ComplexNumber::operator==(const ComplexNumber& b) const
{
    return this->Re() == b.Re() && this->Im() == b.Im();
}

bool ComplexNumber::operator!=(const ComplexNumber& b) const
{
    return !(*this == b);
}

bool ComplexNumber::isCollinear(const ComplexNumber& a, const ComplexNumber& b)
{
    return true;
}

bool ComplexNumber::isOnSameLine(const ComplexNumber& a, const ComplexNumber& b,
    const ComplexNumber& c)
{
    return Line(a, b).isBelongs(static_cast<Point>(c));
}

ComplexNumber ComplexNumber::middle(const ComplexNumber& a, const ComplexNumber& b)
{
    return ComplexNumber((a.Re() + b.Re()) / 2, (a.Im() + b.Im()) / 2);
}

```

## Line.hpp:

```

#ifndef LINE_LIB
#define LINE_LIB

#include "ComplexNumber.hpp"
#include "Point.hpp"
#include <tuple>

enum class LineType {
    CONST_Y, // y = const
    CONST_X, // x = const
    NORMAL // y = kx + b
};

/**

```

```

* @brief This namespace contain implentation details only , don't use it!
*/
namespace implementation
{
class LineEquation {
private:
    Point _pointA, _pointB;
    double _k, _b, _x, _y;
    double xDiff, yDiff;
    bool _initied = false;
    LineType type;

    void initByLineType();

public:
    LineEquation() {};
    LineEquation(const Point& a, const Point& b);
    LineEquation(const ComplexNumber& a, const ComplexNumber& b);

    double K() const { return _k; }
    double B() const { return _b; }

    double xConst() const { return _x; }
    double yConst() const { return _y; }

    bool isInitied() const { return _initied; }

    LineType getType() const { return type; }
};
} // namespace implementation

/**
* @brief Represents line by equation 'y = kx + b'
*/
class Line {
private:
    double _k, _b;

    /**
    * @brief Defines y or x constant value if _type is CONST_X or CONST_Y. This is
    reference for memory optimization.

```

```

    */
    double &_x = _b, &_y = _k;
    LineType _type;

    static double getKFromPoints(const Point& a, const Point& b);
    static double getBFromPoints(const Point& a, const Point& b);
    void finishInit(const implementation::LineEquation& initEquation);

public:
    Line(double k, double b) : _k(k), _b(b) { }
    Line(const std::pair<Point, Point>& pair);
    Line(const Point& first, const Point& second) : Line(std::make_pair(first,
        second)) { }

    /**
     * @brief Construct a new Line object (algorithm is same as for the two Points)
     */
    Line(const ComplexNumber& first, const ComplexNumber& second);

    LineType getType() const { return _type; }

    double y(double x) const;
    double x(double y) const;

    const double& K() const { return _k; }
    const double& B() const { return _b; }

    bool isInX(double x) const;
    bool isInY(double y) const;

    bool isBelongs(Point point);
};

#endif // LINE_LIB

```

## Line.cpp:

```

#include "Line.hpp"
#include "functions.hpp"
#include <cmath>
#include <limits>
#include <stdexcept>

```

```

void Line::finishInit(const implementation::LineEquation& initEquation)
{
    if (!initEquation.isInit())
        throw std::runtime_error("Cannot finish line initialization with not init
            equation!");

    _k = initEquation.K();
    _b = initEquation.B();
    _type = initEquation.getType();
    switch (_type) {
    case LineType::CONST_X:
        _x = initEquation.xConst();
        break;
    case LineType::CONST_Y:
        _y = initEquation.yConst();
        break;
    default:
        break;
    }
}

Line::Line(const std::pair<Point, Point>& pair)
{
    implementation::LineEquation equation = implementation::LineEquation(pair.first,
        pair.second);
    finishInit(equation);
}

Line::Line(const ComplexNumber& first, const ComplexNumber& second)
{
    implementation::LineEquation equation = implementation::LineEquation(first,
        second);
    finishInit(equation);
}

double Line::y(double x) const
{
    switch (_type) {
    case LineType::CONST_X:
        return (_x == x)

```

```

        ? std::numeric_limits<double>::infinity()
        : 0;
case LineType::CONST_Y:
    return _y;
case LineType::NORMAL:
    return _k * x + _b;
default:
    return 0;
}
}

double Line::x(double y) const
{
    switch (_type) {
case LineType::CONST_X:
    return _x;
case LineType::CONST_Y:
    return (_y == y)
        ? std::numeric_limits<double>::infinity()
        : 0;
case LineType::NORMAL:
    return (y - _b) / _k;
default:
    return 0;
}
}

bool Line::isInX(double x) const
{
    switch (_type) {
case LineType::CONST_X:
    return _x == x;
case LineType::CONST_Y:
case LineType::NORMAL:
    return true;
default:
    return false;
}
}

bool Line::isInY(double y) const

```

```

{
    switch (_type) {
    case LineType::CONST_X:
    case LineType::NORMAL:
        return true;
    case LineType::CONST_Y:
        return _y == y;
    default:
        return 0;
    }
}

bool Line::isBelongs(Point point)
{
    switch (_type) {
    case LineType::CONST_X:
        return _x == point.X();
    case LineType::CONST_Y:
        return _y == point.Y();
    case LineType::NORMAL:
        return almost_equal(y(point.X()), point.Y(), 2);
    default:
        return false;
    }
}

// implementation section
namespace implementation {
void LineEquation::initByLineType()
{
    switch (type) {
    case LineType::CONST_X:
        // Y may be any, x = const
        _k = 0;
        _b = std::numeric_limits<double>::infinity();
        _x = _pointB.X();
        break;
    case LineType::CONST_Y:
        // X may be any, y = const
        _k = 0;
        _b = 0;

```

```

        _y = _pointB.Y();
        break;
    case LineType::NORMAL:
        // Normal line,  $y = kx + b$ 
        _k = yDiff / xDiff;
        _b = (-_pointA.X() * yDiff + _pointA.Y() * xDiff) / xDiff;
        break;
    default:
        break;
}
}

LineEquation::LineEquation(const ComplexNumber& a, const ComplexNumber& b) :
    LineEquation(static_cast<Point>(a), static_cast<Point>(b)) { }

LineEquation::LineEquation(const Point& a, const Point& b)
{
    if (a == b
        || std::isinf(a.X())
        || std::isinf(b.X())
        || std::isinf(a.Y())
        || std::isinf(b.Y()))
        throw std::runtime_error("Cannot create line from 2 equal points, or
            coordinates incorrect (a.e. Inf)");

    _pointA = a, _pointB = b;

    yDiff = _pointB.Y() - _pointA.Y();
    xDiff = _pointB.X() - _pointA.X();
    type = (xDiff == 0)
        ? LineType::CONST_X
        : ((yDiff == 0) ? LineType::CONST_Y : LineType::NORMAL);

    initByLineType();
    _inited = true;
    return;
}
} // namespace implementation

```

Определение класса Point (header-only):



## Point.hpp:

```
#ifndef POINT_LIB
#define POINT_LIB

class Point {
private:
    double _x, _y;

public:
    Point(double x = 0, double y = 0) : _x(x), _y(y) {};

    bool operator==(const Point& a) const { return X() == a.X() && Y() == a.Y(); }
    bool operator!=(const Point& a) const { return !(*this == a); }

    const double& X() const { return _x; }
    const double& Y() const { return _y; }
};

#endif // POINT_LIB
```