Instituto Tecnológico de Ciudad Madero

Trayectorias y circuitos Eulerianos

Dr. Laura Cruz Reyes

Dra. Claudia G. Gómez Santillán

Trayectorias y circuitos eulerianos

Trayectorias y circuitos eulerianos

En honor de Leonhard Euler, se llama una **trayectoria de Euler** a una trayectoria que recorre **todas** las aristas de una gráfica conexa. Análogamente, un **circuito de Euler** es un circuito que recorre **todas** las aristas de una gráfica conexa.

Teoremas de Euler

Teorema de Euler

Existencia de trayectorias de Euler

a) ***Si una gráfica tiene más de dos vértices de grado impar, entonces no puede tener una trayectoria de Euler.***

b) ***Si una gráfica conexa tiene exactamente dos vértices de grado impar, entonces tiene por lo menos una trayectoria de Euler. Cualquier trayectoria de Euler debe iniciar en uno de los vértices de grado impar y terminar en el otro.***

Teorema de Euler

Existencia de circuitos de Euler

a) *Si en una gráfica algún vértice tiene grado impar, entonces no puede haber un circuito de Euler.*

b) *Si todos los vértices de una gráfica conexa tienen grado par, entonces hay por lo menos un circuito de Euler.*

Circuito de Euler
Algoritmo de Fleury

Algoritmo de Fleury

Regla 1. Cerciórate que la gráfica sea conexa y que todos sus vértices tengan grado par.

Regla 2. Elige un vértice inicial (de manera arbitraria).

Regla 3. En cada paso, recorre cualquier arista disponible, eligiendo un puente sólo cuando no haya alternativa.

Regla 4. Después de recorrer cualquier arista, bórrala y recorre otra arista disponible. Borra los vértices de grado cero que resulten.

Regla 5. Cuando ya no puedas seguir el recorrido, para.

(¡Habrás encontrado un circuito de Euler!)

Ejemplo: Algoritmo Fleury

Ilustraremos el uso del algoritmo de Fleury considerando algunos ejemplos.

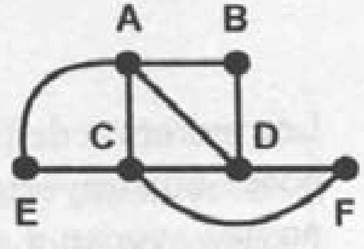
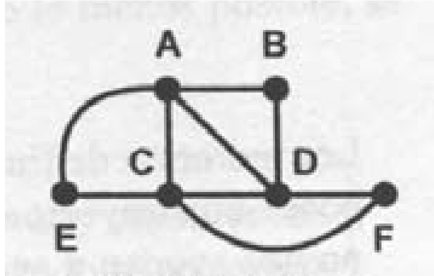


Figura 1.23

Ejemplo 8

La gráfica de la figura 1.23 tiene un circuito de Euler. Sabemos esto porque todos los vértices tienen grado par. Aunque esta gráfica es muy simple y podemos encontrar un circuito de Euler por ensayo y error, lo encontraremos usando el algoritmo de Fleury para entender cómo funciona. ¡Comencemos! (figura 1.24).

Ejemplo: Algoritmo Fleury



Inicio: **Elegimos el vértice F.**

Pudimos haber elegido cualquier vértice.

Paso 1: **Elegimos la arista FC.**

Desde F hay dos aristas disponibles. La arista FC y la arista FD. Como ninguna es un puente, se puede elegir cualquiera. Ahora borramos FC.

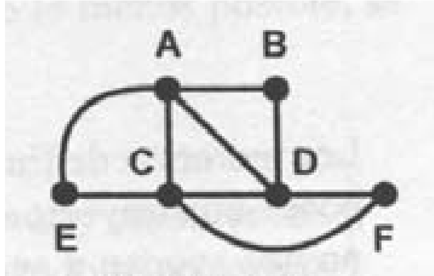
Paso 2: **Elegimos la arista CD.**

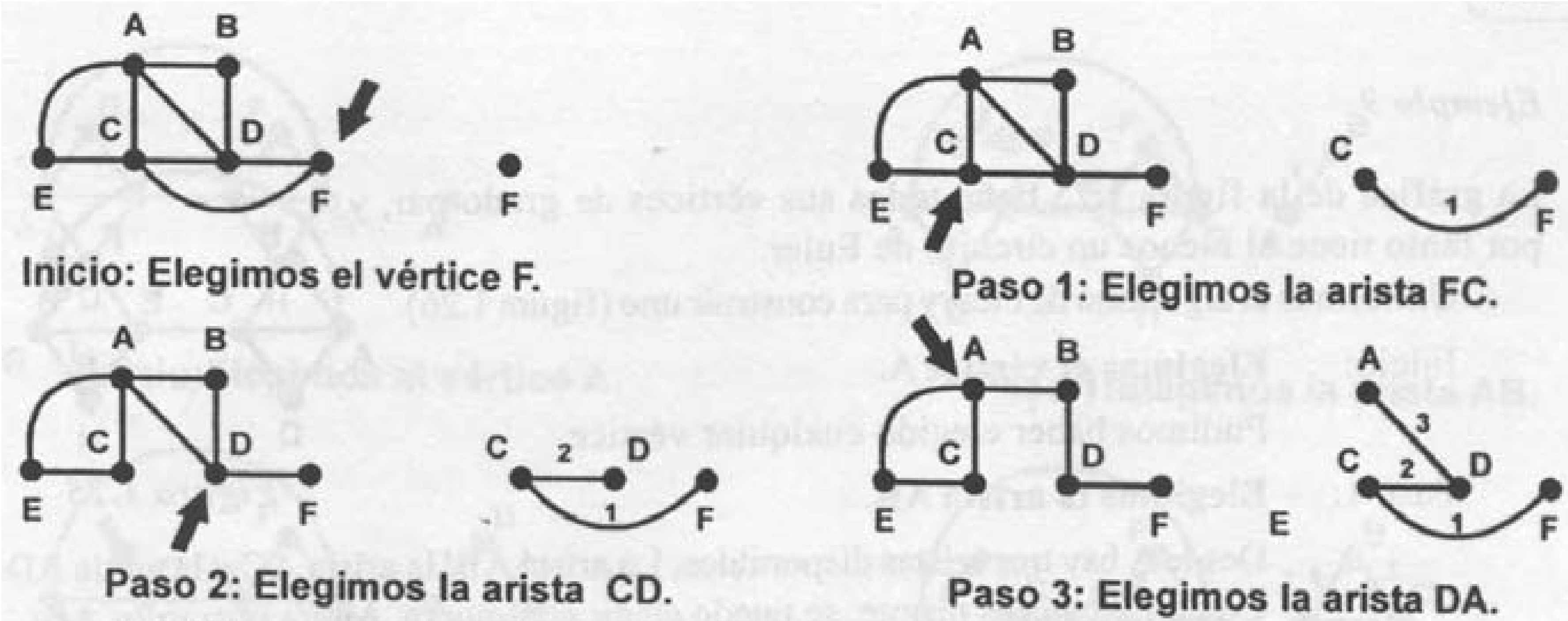
Desde C hay tres aristas disponibles. La arista CD, la arista CA y la arista CE. Como ninguna es un puente, se puede elegir cualquiera. Ahora borramos CD.

Paso 3: **Elegimos la arista DA.**

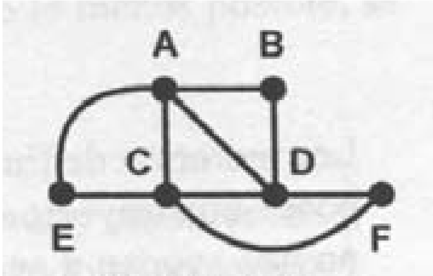
Desde D hay tres aristas disponibles. La arista DA, la arista DB y la arista DF. Como las aristas DA y DB no son puentes, se puede elegir cualquiera de ellas. La arista DF no se puede elegir porque es puente. Ahora borramos la arista DA.

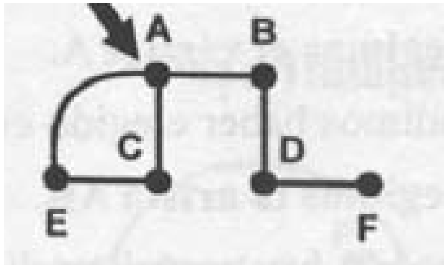
Ejemplo: Algoritmo Fleury





Ejemplo:



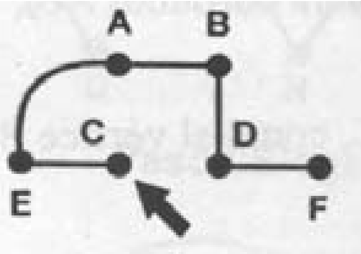


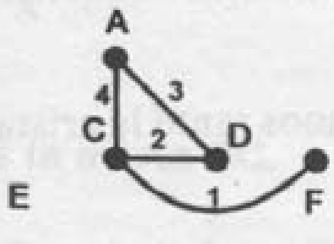
Paso 4: **Elegimos la arista AC.**

Desde A hay tres aristas disponibles. La arista AC, la arista AE y la arista AB. Como las aristas AC y AE no son puentes, se puede elegir cualquiera de ellas. La arista AB no se puede elegir porque es puente. Ahora borramos la arista AC.

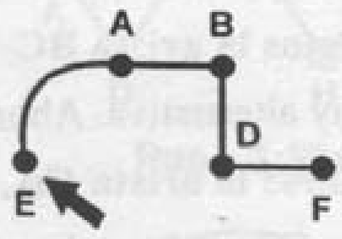
Paso 5: **Elegimos la arista CE.**

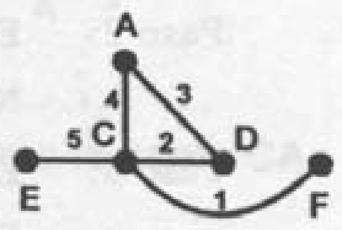
¡No hay alternativa! Ahora borramos tanto la arista CE, como el vértice C.





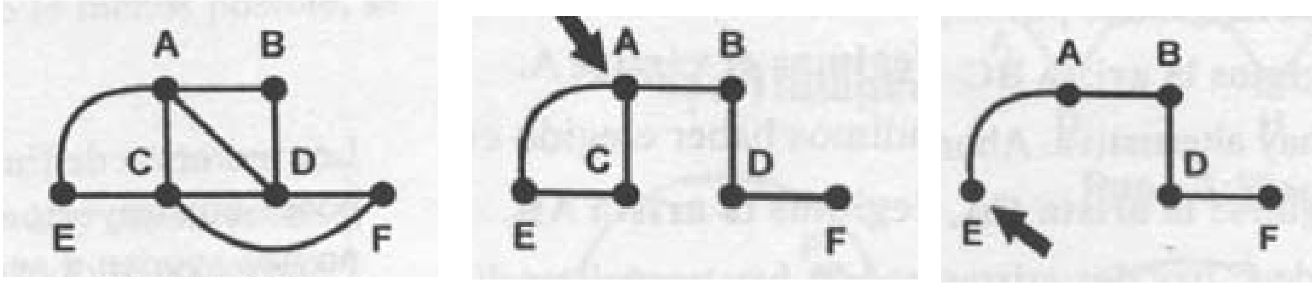
Paso 4: Elegimos la arista AC.





Paso 5: Elegimos la arista CE.

Ejemplo:



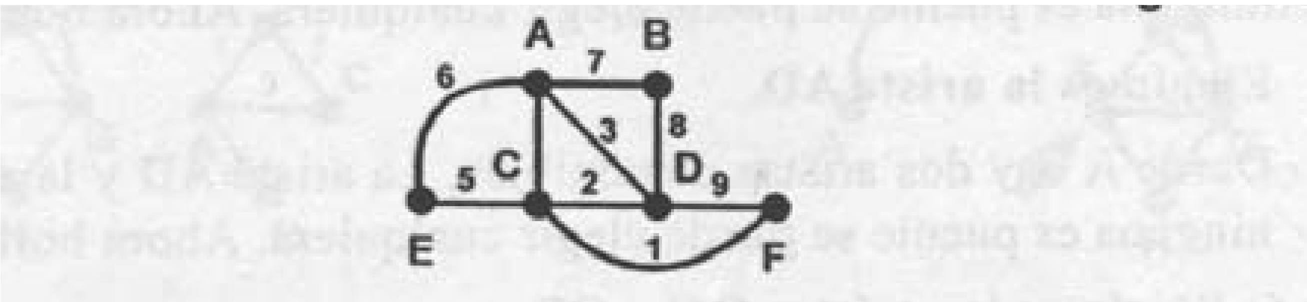
Pasos 6, 7, 8 y 9: **Elegimos las aristas EA, AB, BD y DF.**

No hay alternativa en cada paso.

Como ya no podemos seguir, ¡hemos terminado! El circuito de Euler que obtuvimos es

F, C, D, A, C, E, A, B, D, F

que es uno de los varios circuitos posibles.



Paso 6,7,8 y 9: Elegimos las aristas EA.AB.BD y DF.

Trayectorias de Euler
Algoritmo de Fleury modificado

Usamos el algoritmo de Fleury para encontrar **circuitos de Euler**. ¿Qué pasa en el caso de **trayectorias de Euler**? Si una gráfica conexa tiene exactamente dos vértices de grado impar, entonces sabemos por los teoremas de Euler que no tiene un circuito de Euler pero sí tiene al menos una trayectoria de Euler que empieza y termina en dichos vértices. Podemos encontrar una trayectoria de Euler usando una versión modificada del **algoritmo de Fleury**. Esta modificación consiste en dejar las Reglas 3, 4 y 5 exactamente como están y cambiar las Reglas 1 y 2 por:

Regla 1 modificada. Cerciórate que la gráfica sea conexa y que tenga exactamente dos vértices de grado impar

Regla 2 modificada. Elige como vértice inicial uno de los vértices de grado impar.

¡Cuando se apliquen estas reglas, el recorrido terminará en el otro vértice de grado impar!

Trayectorias de Euler: AFM

Algoritmo de Fleury

Regla 1. Cerciórate que la gráfica sea conexa y que todos sus vértices tengan grado par.

Regla 2. Elige un vértice inicial (de manera arbitraria).

Regla 3. En cada paso, recorre cualquier arista disponible, eligiendo un puente sólo cuando no haya alternativa.

Regla 4. Después de recorrer cualquier arista, bórrala y recorre otra arista disponible. Borra los vértices de grado cero que resulten.

Regla 5. Cuando ya no puedas seguir el recorrido, para.

(¡Habrás encontrado un circuito de Euler!)

Regla 1 modificada. Cerciórate que la gráfica sea conexa y que tenga exactamente dos vértices de grado impar

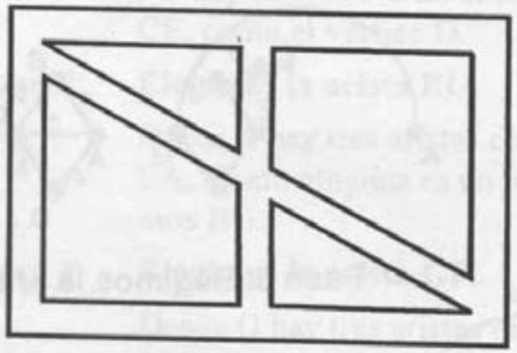
Regla 2 modificada. Elige como vértice inicial uno de los vértices de grado impar.

¡Cuando se apliquen estas reglas, el recorrido terminará en el otro vértice de grado impar!

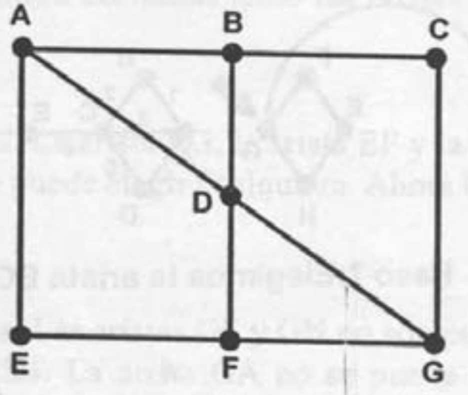
Semi-eulerización

Eulerización y semi-eulerización de gráficas

Supongamos que necesitamos diseñar una ruta eficiente para un camión recolector de basura que debe recorrer todas las calles del mapa de la figura 1.27(a).



(a)



(b)

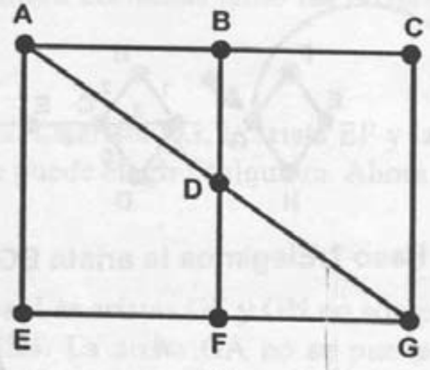
Figura 1.27

Como vimos anteriormente, la gráfica de la figura 1.27(b), en donde cada arista representa una calle y cada intersección de calles está representada por un vértice, constituye un modelo matemático para el problema.

En términos de la gráfica, el problema de diseñar la ruta *más eficiente* para el camión recolector de basura se traduce en:

¿Podemos encontrar un circuito de Euler o una trayectoria de Euler en la gráfica de la figura 1.27(b)?

Semi-eulerización



(b)

¿Podemos encontrar un circuito de Euler o una trayectoria de Euler en la gráfica de la figura 1.27(b)?

Como la gráfica tiene cuatro vértices de grado impar (A, B, F y G), la respuesta es no. Esto significa que no es posible diseñar una ruta para el camión recolector de basura que cubra todas las calles sin que se tengan que volver a recorrer algunas de ellas. Esto nos lleva a hacernos la siguiente pregunta.

¿Cómo encontrar una ruta que cubra todas las calles y en la que el número de calles que se tengan que volver a recorrer sea el menor posible?

Semi-eulerización

La figura 1.28(a) muestra la gráfica que se obtiene al agregarle una copia de cada una de las aristas AB y FG a la gráfica de la figura 1.27(b)

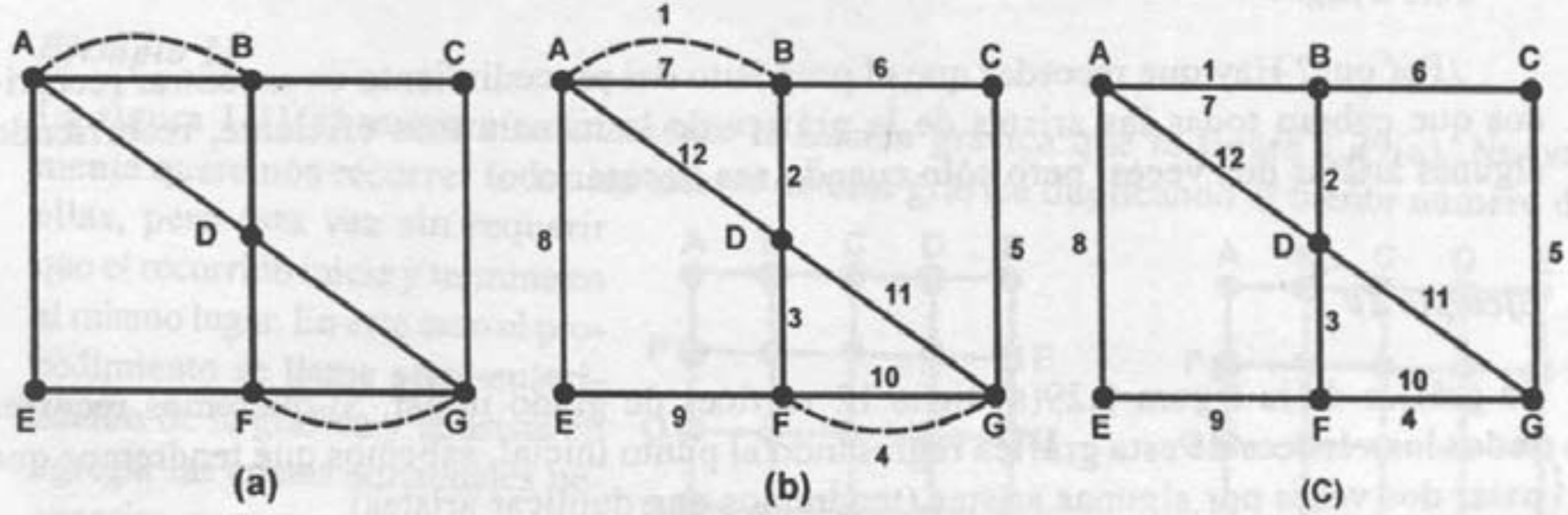
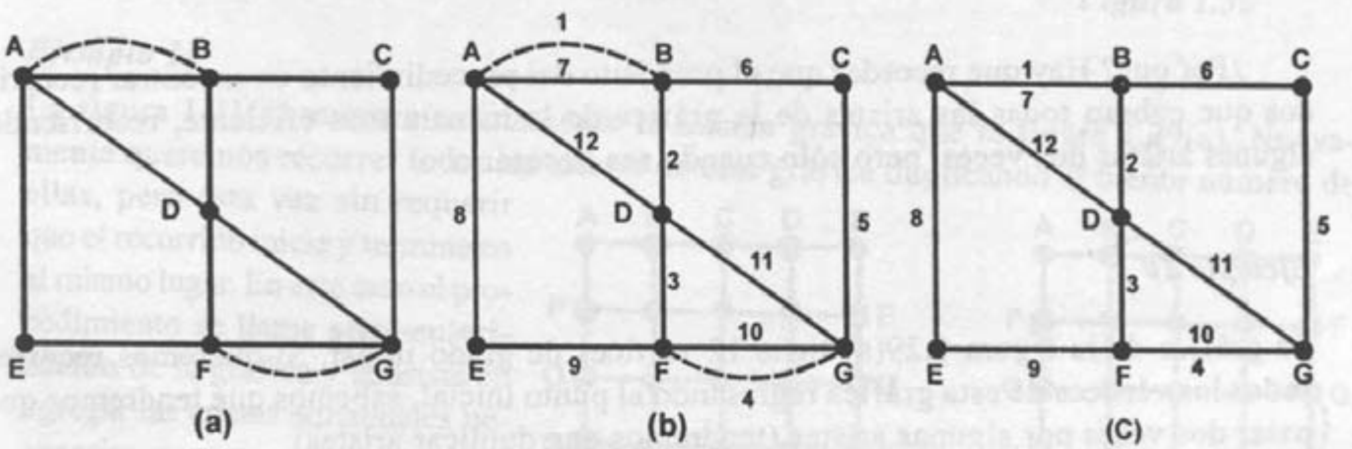


Figura 1.28

Semi-eulerización

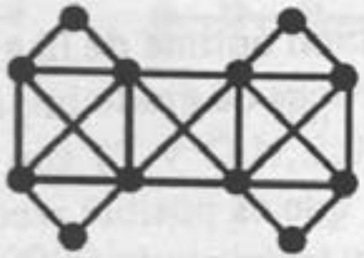


El efecto de agregar dos aristas a la gráfica 1.27(b) es el de eliminar los 4 vértices de grado impar. Todos los vértices de la gráfica 1.28(a) son de grado par y por tanto tiene un circuito de Euler. La figura 1.28(b) muestra un circuito de Euler. (Recorre las aristas como están numeradas.) El circuito de Euler en la figura 1.28(b) puede ser interpretado como un recorrido en la gráfica original 1.27(b), como se muestra en la figura 1.28(c). En este recorrido estamos viajando a lo largo de **todas** las aristas de la gráfica, pero estamos pasando dos veces por las aristas AB y FG. A pesar de que éste no es un circuito de Euler para la gráfica original 1.27(b), es un circuito que describe el recorrido **más eficiente** (con el menor número de aristas duplicadas) que cubre toda la gráfica y que inicia y termina en el vértice A.

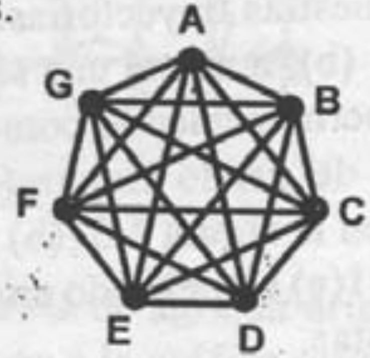
Ejercicios

Ejercicios

17. Usa el algoritmo de Fleury para encontrar un circuito de Euler en cada una de las siguientes gráficas.



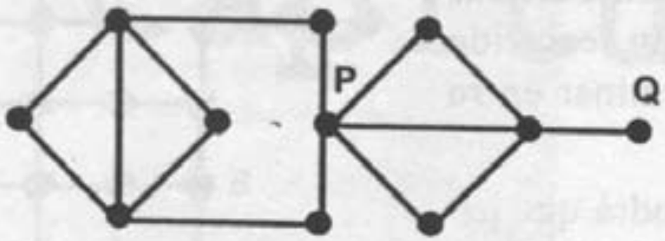
(a)



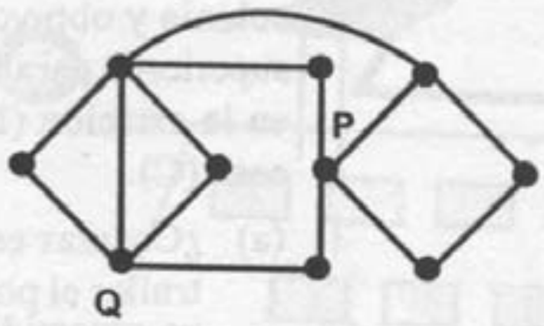
(b)

Ejercicios

18. Usa el algoritmo de Fleury para encontrar una trayectoria de Euler (que empiece en P y termine en Q) en cada una de las siguientes gráficas.



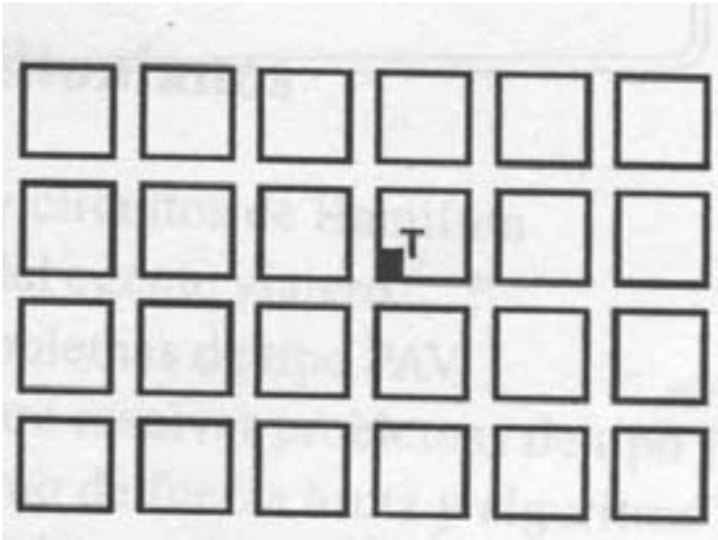
(a)



(b)

Ejercicios

19. Diseña una ruta **óptima** (que empiece y termine en el tiradero de basura T) para un camión recolector de basura, que debe recorrer todas las calles del siguiente mapa.



Ejercicios

20. Encuentra una ruta óptima para el problema chino del cartero, que empiece y termine en la oficina de correos de la colonia representada en el mapa de la figura 1.20. (Usa la gráfica de la figura 1.22.)

le una pequeña
lebe planear la
staría que los
en su acepción

Figura 1.20

ado para este
e en la que se

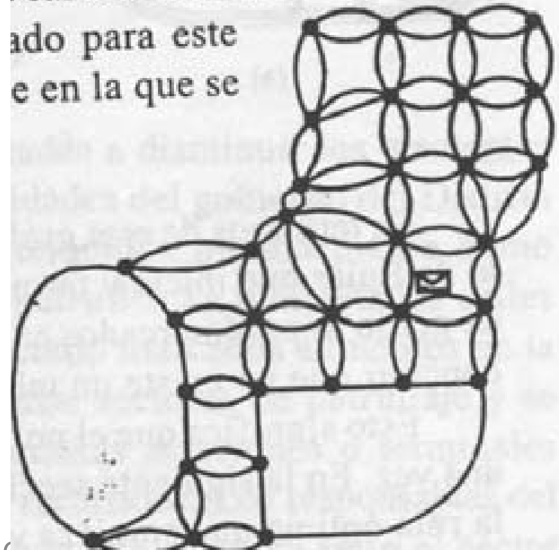
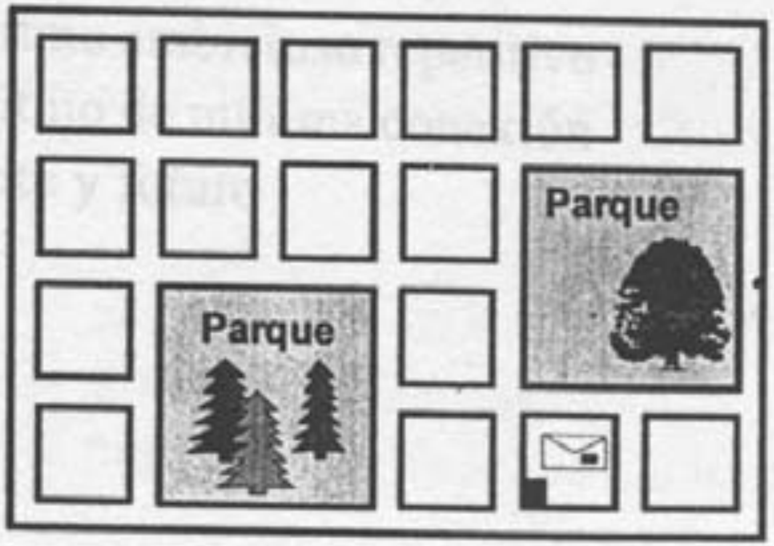


Figura 1.22

Ejercicios

21. Encuentra una ruta óptima para el problema chino del cartero, que empiece y termine en la oficina de correos representada en el siguiente mapa.



Haz lo siguiente:

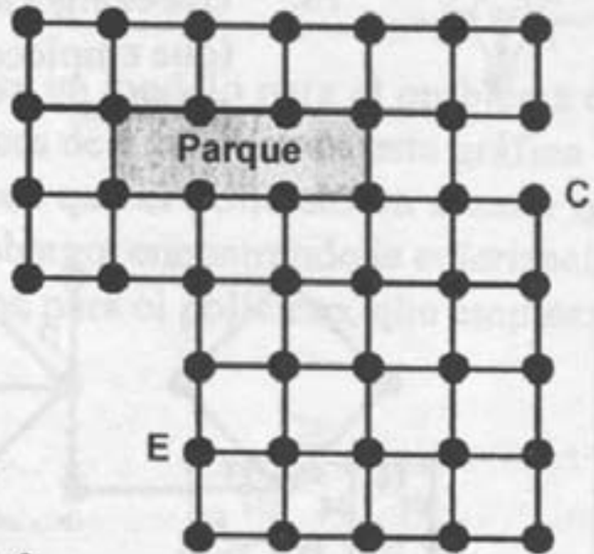
a) Dibuja una gráfica que sea un modelo para el problema.

b) Encuentra una eulerización óptima de la gráfica en (a).

c) Describe una ruta óptima para el cartero.

Ejercicios

22. Un policleto tiene que patrullar en su bici las calles de la colonia representada por la siguiente gráfica.



En este caso el policleto vive en la colonia y obtuvo un permiso de sus superiores para iniciar su recorrido en la estación (**E**) y terminar en su casa (**C**).

(a) ¿Cuántas calles tendrá que patrullar el policleto dos veces en un recorrido óptimo por la colonia?

(b) Describe un recorrido óptimo. Etiqueta las aristas 1, 2, 3,... en el orden en que el policleto tiene que recorrerlas.