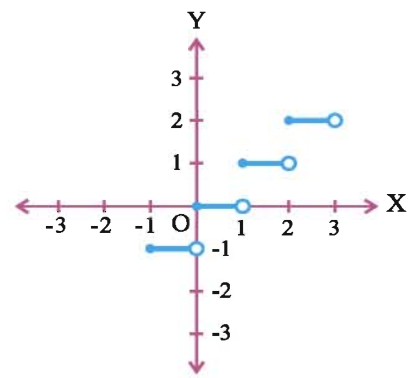
સાતત્ય અને વિકલન 5

Do not worry about your difficulties in mathematics.
I assure you that mine are greater.
– Albert Einstein

The last thing one knows when writing a book is what to put first.
– Blaise Pascal

5.1 પ્રાસ્તાવિક

આપણે ધોરણ XI માં લક્ષ વિષેનો ખ્યાલ મેળવ્યો. સાહજિક અભિગમ અને આલેખાત્મક સમજ આપણને લક્ષનો ખ્યાલ સમજવામાં મદદરૂપ થયાં. ઘણી જગ્યાએ આપણે 'સતત' શબ્દનો નિર્દેશ કરીએ છીએ. 'સતત વિધેય' શું છે ? હવે આપણે લક્ષના અભ્યાસ માટે જરૂરી સાતત્યની સંકલ્પનાનો અભ્યાસ કરવા પ્રયત્ન કરીશું. તે લક્ષ અને વિકલનીયતાને જોડતી કડીરૂપ છે. $f(x) = [x]$, $x \in$ Rનો આલેખ જુઓ. (આકૃતિ 5.1)



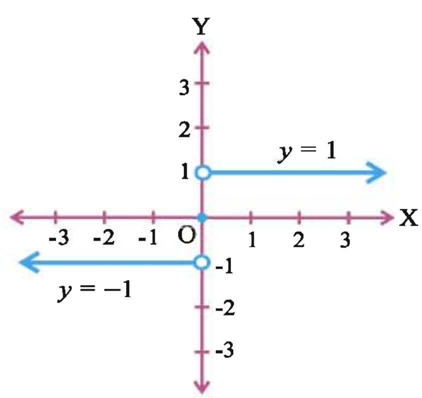
આકૃતિ 5.1

આપણે પેન્સિલ ઉઠાવ્યા વગર કાગળ પર $f(x) = [x]$ નો આલેખ દોરી શકીશું નહીં. આ પરિસ્થિતિનું નિર્માણ જ્યારે x-યામ પૂર્ણાંક હશે ત્યારે થશે. આવી જ પરિસ્થિતિ **ચિહ્ન વિધેય (Signum function)** માટે પણ થશે.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

અથવા

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$



આકૃતિ 5.2

$x = 0$ આગળ આલેખ 'કૂદે' છે. (આકૃતિ 5.2)

અહીં $\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = -1$ અને $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = 1$.

તેથી $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ નું અસ્તિત્વ નથી. $f(x) = [x]$ના ઉદાહરણમાં પણ આલેખ પરથી એવું અનુમાન કરી શકાય.

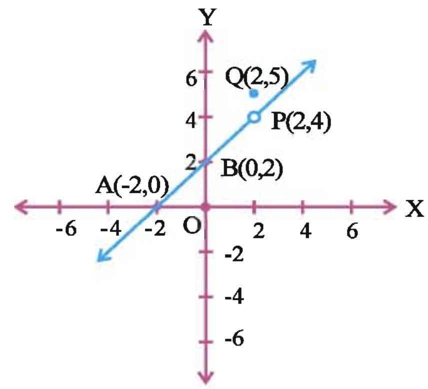
$\lim\limits_{x \to 1-} [x] = 0$, $\lim\limits_{x \to 1+} [x] = 1$.

$\therefore$ $\lim\limits_{x \to 1} [x]$ નું અસ્તિત્વ નથી.

5.2 સાતત્ય

વિધેય $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & x \neq 2 \\ 5 & x = 2 \end{cases}$ લેતાં,

$f(x) = \begin{cases} x+2 & x \neq 2 \\ 5 & x = 2 \end{cases}$ થશે.



આકૃતિ 5.3

અહીં વિધેયનો આલેખ $(\overleftrightarrow{AB} - \{P\}) \cup \{Q\}$નો બનેલો છે.

$$\lim_{x \to 2-} f(x) = \lim_{x \to 2+} f(x) = 4$$

$\therefore \quad \lim_{x \to 2} f(x) = 4$

પરંતુ $f(2) = 5$

$\therefore \quad \lim_{x \to 2} f(x) \neq f(2)$

અહીં પણ કાગળ પરથી પેન્સિલ ઉપાડ્યા વગર $f(x)$નો આલેખ દોરી શકાશે નહીં. આ જ સાતત્યનો ખ્યાલ છે. આલેખ 'તૂટે' છે એટલે કે સતત નથી અથવા આલેખ 'સળંગ' નથી, એટલે વિધેય 'સતત' નથી.

હવે આપણે સાતત્યની વિધિવત્ વ્યાખ્યા આપીએ.

સાતત્ય : વિધેય f એ c ને સમાવતા કોઈક અંતરાલ (a, b) પર વ્યાખ્યાયિત છે. $c \in R$

જો $\lim_{x \to c} f(x)$ નું અસ્તિત્વ હોય અને તે $f(c)$ની બરાબર હોય, તો આપણે કહીશું કે f એ $x = c$ આગળ સતત છે.

બીજા શબ્દોમાં કહીએ તો, $\lim_{x \to c+} f(x)$ અને $\lim_{x \to c-} f(x)$ નું અસ્તિત્વ હોય અને તે બંને $f(c)$ ની બરાબર હોય તો આપણે કહી શકીએ કે વિધેય f એ $x = c$ આગળ સતત છે.

$\therefore$ f એ c આગળ સતત છે $\Leftrightarrow$ $\lim_{x \to c+} f(x)$ તથા $\lim_{x \to c-} f(x)$ નું અસ્તિત્વ છે તથા

$$\lim_{x \to c+} f(x) = \lim_{x \to c-} f(x) = f(c).$$

જો f એ $x = c$ આગળ સતત ન હોય તો આપણે કહીશું કે f એ $x = c$ આગળ અસતત છે.

એટલે કે જો f એ $x = c$ આગળ અસતત હોય, તો નીચેનામાંથી કોઈ એક પરિસ્થિતિનું નિર્માણ થાય :

(1) $\lim_{x \to c+} f(x)$ અથવા $\lim_{x \to c-} f(x)$ નું અસ્તિત્વ ન હોય.

(2) $\lim_{x \to c+} f(x)$ અને $\lim_{x \to c-} f(x)$ નું અસ્તિત્વ હોય પણ તેઓ સમાન ન હોય.

(3) $\lim_{x \to c+} f(x)$ અને $\lim_{x \to c-} f(x)$ નું અસ્તિત્વ હોય તથા સમાન હોય.

એટલે કે $\lim_{x \to c+} f(x) = \lim_{x \to c-} f(x) = \lim_{x \to c} f(x)$

પરંતુ f એ $x = c$ આગળ વ્યાખ્યાયિત ન હોય અથવા $\lim_{x \to c} f(x) \neq f(c)$

જો f એ કોઈક પૃથક બિંદુઓએ વ્યાખ્યાયિત હોય, તો આપણે કહીશું કે f તે બિંદુઓ આગળ સતત છે. પરિણામે જો f એ સાન્ત ગણ $\{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$ પર વ્યાખ્યાયિત હોય તો તે ગણ $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ પર સતત છે.

જ્યારે f એ તેના પ્રદેશના દરેક બિંદુએ સતત હોય ત્યારે આપણે વિધેય f એ તેના પ્રદેશ પર સતત છે એમ કહીશું.

જો f એ $[a, b]$ પર વ્યાખ્યાયિત હોય, અને

(1) f એ (a, b) પરના બધા બિંદુએ સતત હોય.

(2) $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = f(a)$ (f એ $x < a$ માટે વ્યાખ્યાયિત નથી.)

(3) $\lim\limits_{x \to b-} f(x) = f(b)$ (f એ $x > b$ પર વ્યાખ્યાયિત નથી.)

તો f એ $[a, b]$ પર સતત છે.

ઉદાહરણ 1 : $f : R \to R$, $f(x) = 2x - 4$ નું $x = 3$ આગળ સાતત્ય ચકાસો.

ઉકેલ : $f(x) = 2x - 4$ એ x માં બહુપદી છે.

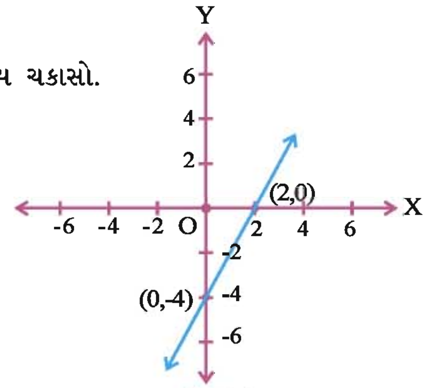
$\therefore \lim\limits_{x \to 3} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} (2x - 4) = 2 \cdot 3 - 4 = 2$

$f(3) = 2 \cdot 3 - 4 = 2$

$\therefore \lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3)$

$\therefore$ f એ $x = 3$ આગળ સતત છે.

fનો આલેખ એક રેખા છે અને તે 'સળંગ' છે.



આકૃતિ 5.4

ઉદાહરણ 2 : $f : R \to R$, $f(x) = x^2$ નું $x = 2$ આગળ સાતત્ય ચકાસો.

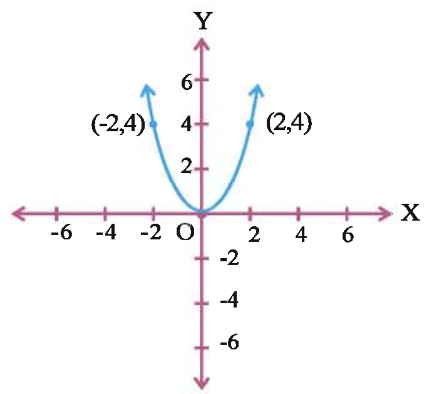
ઉકેલ : $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$, $f(2) = 4$

($f(x) = x^2$ એ બહુપદી વિધેય છે.)

$\therefore \lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$

$\therefore$ $f(x) = x^2$ એ $x = 2$ આગળ સતત છે.

$f(x) = x^2$ નો આલેખ 'સળંગ' છે.



આકૃતિ 5.5

ઉદાહરણ 3 : $f : R \to R$, $f(x) = |x|$ એ R પર સતત છે ?

ઉકેલ : આપણે $|x|$નું સાતત્ય તેના પ્રદેશ પર ચકાસીશું.

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$c > 0$ માટે કોઈક $\delta > 0$ મળે કે જેથી,

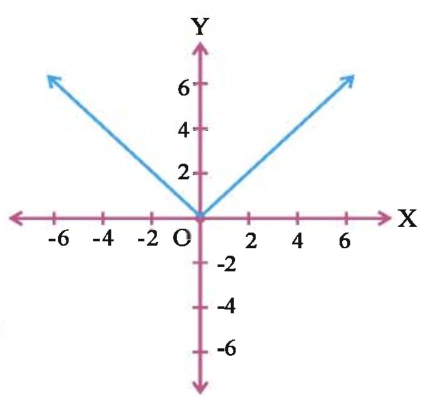
$c - \delta > 0$ (ઉદાહરણ તરીકે, $\delta = \frac{c}{2}$ લેતાં)

$(c - \delta, c + \delta)$માં $f(x) = |x| = x$ $(c - \delta > 0)$

$\therefore \lim\limits_{x \to c} f(x) = \lim\limits_{x \to c} x = c$, $f(c) = |c| = c$ $(c > 0)$

$\therefore \lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$

$\therefore$ f એ પ્રત્યેક $c > 0$ માટે સતત છે.



આકૃતિ 5.6

$c < 0$ લેતાં, કોઈક $\delta > 0$ મળે કે જેથી $c + \delta < 0$. (ઉદાહરણ તરીકે, $\delta = -\frac{c}{3}$ લેતાં)

$\therefore$ $(c - \delta, c + \delta)$ માં $f(x) = |x| = -x$ **$(c + \delta < 0)$**

$\therefore$ $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \lim\limits_{x \to c} (-x) = -c, f(c) = |c| = -c$ **$(c < 0)$**

$\therefore$ $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$

$\therefore$ f એ પ્રત્યેક $c < 0$ માટે સતત છે.

$\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0+} |x| = \lim\limits_{x \to 0+} x = 0$ **$(x > 0)$**

$\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0-} |x| = \lim\limits_{x \to 0-} -x = 0$ **$(x < 0)$**

વળી, $f(0) = |0| = 0$

$\therefore$ $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$

$\therefore$ f એ $x = 0$ આગળ સતત છે.

$\therefore$ f એ પ્રત્યેક $x \in R$ માટે સતત છે.

ઉદાહરણ 4 : અચળ વિધેય $f(x) = k$ ના R પરના સાતત્યની ચર્ચા કરો.

ઉકેલ : $c \in R$ માટે, $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \lim\limits_{x \to c} k = k = f(c)$ **$(\lim\limits_{x \to c} k = k)$**

$\therefore$ અચળ વિધેય R પર સતત છે.

ઉદાહરણ 5 : $f(x) = \begin{cases} x^3 + x^2 + x + 1 & x \neq 0 \\ 5 & x = 0 \end{cases}$

નું $x = 0$ આગળ સાતત્ય ચર્ચો.

ઉકેલ : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (x^3 + x^2 + x + 1) = 1$ **(બહુપદી વિધેયનું લક્ષ)**

$f(0) = 5$

$\therefore$ $\lim\limits_{x \to 0} f(x) \neq f(0)$

$\therefore$ f એ $x = 0$ આગળ અસતત છે.

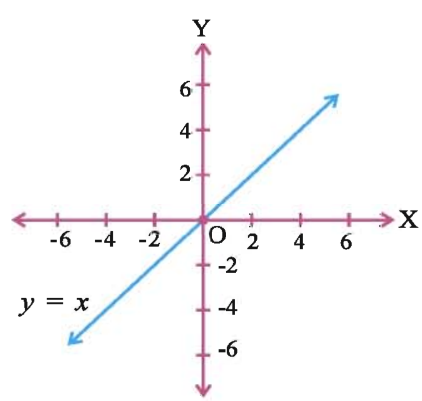
ઉદાહરણ 6 : તદેવ વિધેયનું સાતત્ય R પર ચર્ચો.

ઉકેલ : અહીં $f(x) = x$.

$a \in R$ લેતાં,

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} x = a = f(a)$

$\therefore$ તદેવ વિધેય R પર સતત છે.



આકૃતિ 5.7

ઉદાહરણ 7 : $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in R - \{0\}$ તો fનું સાતત્ય ચર્ચો.

ઉકેલ : $f(x) = \frac{1}{x}$ એ સંમેય વિધેય છે.

$c \neq 0$ લેતાં,

$$\lim_{x \to c} f(x) = \frac{\lim_{x \to c} 1}{\lim_{x \to c} x} = \frac{1}{c}$$

$$f(c) = \frac{1}{c}$$

$$\lim_{x \to c} f(x) = \frac{1}{c} = f(c)$$

$\therefore$ f એ પ્રત્યેક $c \in R - \{0\}$ માટે સતત છે.

નોંધ : $x = 0$ માટે $f(x) = \frac{1}{x}$ વ્યાખ્યાયિત નથી. $f(x)$ ના શૂન્ય આગળના વર્તનનો અભ્યાસ કરીએ.

$x > 0$ લેતાં,

x	0.1	0.01	0.001	10^{-n}
$f(x)$	10	$100 = 10^2$	$1000 = 10^3$	10^n

જો $x \to 0+$ તો $f(x)$ એ અસિમિત વધે છે.

આ વિકલ્પમાં આપણે કહી શકીએ કે $x \to 0+$ તો $f(x) \to \infty$. આપણે $\lim_{x \to 0+} f(x) = \infty$ લખીશું નહીં. $\lim_{x \to 0+} f(x)$ નું અસ્તિત્વ નથી.

વિધેયનું લક્ષ એ **વાસ્તવિક સંખ્યા** છે. ∞ એ વાસ્તવિક સંખ્યા નથી અથવા તો એ વિસ્તૃત વાસ્તવિક સંખ્યા સંહતિનો ઘટક છે.

$x < 0$ લેતાં,

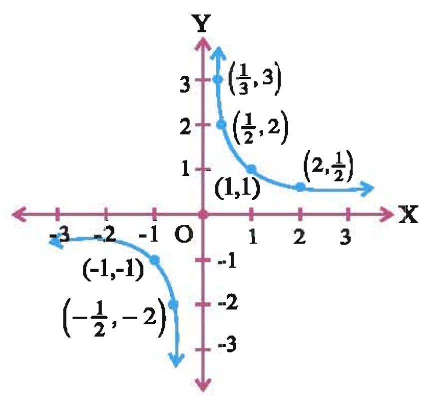
x	-0.1	-0.01	-0.001	-10^{-n}
$f(x)$	-10	$-100 = -10^2$	$-1000 = -10^3$	-10^n

$\therefore$ અહીં x ઘટે છે તેમ $f(x)$ ઘટે છે અને

$x \to 0-$ તેમ $f(x) \to -\infty$.

પુનઃ આપણે $\lim_{x \to 0-} f(x) = -\infty$ લખીશું નહીં.

$\lim_{x \to 0-} f(x)$ નું અસ્તિત્વ નથી.



આકૃતિ 5.8

ઉદાહરણ 8 : $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x \neq 0$નું $x \in R - \{0\}$ આગળ સાતત્ય ચર્ચો.

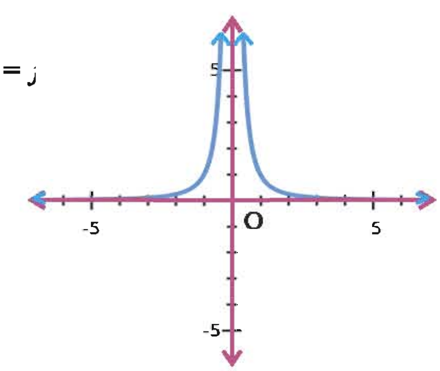
ઉકેલ : $c \neq 0$ લેતાં, $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} \frac{1}{x^2} = \frac{\lim_{x \to c} 1}{\lim_{x \to c} x^2} = \frac{1}{c^2} =$

$\therefore$ f એ પ્રત્યેક $c \in R - \{0\}$ માટે સતત છે.

નોંધ : $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$ નું અસ્તિત્વ નથી.

$x \to 0$ તો $\frac{1}{x^2} \to \infty$

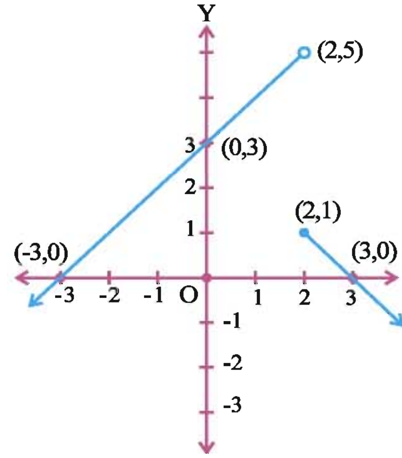
x	-0.1	0.1	-0.01	0.01	$\pm 10^{-n}$
$f(x)$	100	100	10000	10000	10^{2n}



આકૃતિ 5.9

ઉદાહરણ 9 : $f(x) = \begin{cases} x + 3 & x < 2 \\ 3 - x & x \geq 2 \end{cases}$

નું $x \in R$ આગળ સાતત્ય ચકાસો.



આકૃતિ 5.10

ઉકેલ : $a < 2$, તો a ને સમાવતા કોઈક અંતરાલમાં $f(x) = x + 3$ થશે.

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} (x + 3) = a + 3 = f(a)$

$\therefore$ f એ $a < 2$ હોય તેવા પ્રત્યેક $a \in R$ માટે સતત છે.

$a > 2$ તો a ને સમાવતા કોઈક અંતરાલમાં $f(x) = 3 - x$ થશે.

$\therefore$ $f(a) = 3 - a$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} (3 - x) = 3 - a = f(a)$

$\therefore$ f એ $a > 2$ હોય તેવા પ્રત્યેક $a \in R$ માટે સતત છે.

$a = 2$ લેતાં, $\lim\limits_{x \to 2-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2-} (x + 3) = 5$ $(x < 2)$

$\lim\limits_{x \to 2+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2+} (3 - x) = 1$

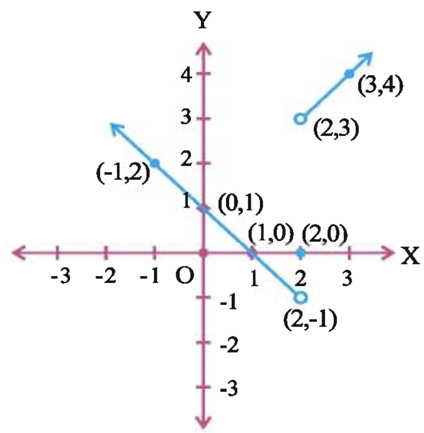
$\therefore$ $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$નું અસ્તિત્વ નથી.

$\therefore$ f એ $x = 2$ સિવાયના પ્રત્યેક $x \in R$ માટે સતત છે.

(**નોંધ :** જ્યારે $f(x)$નું સૂત્ર બદલાતું હોય તે સિવાયના બધાં જ બિંદુઓએ મહદ્ અંશે f સતત હોય છે.)

ઉદાહરણ 10 : $f(x) = \begin{cases} x + 1 & x > 2 \\ 0 & x = 2 \\ 1 - x & x < 2 \end{cases}$

જે બિંદુઓએ f અસતત છે તે બિંદુઓ શોધો.



આકૃતિ 5.11

ઉકેલ : ઉપરની નોંધ અને $y = f(x)$ ના આલેખ પરથી એ સ્પષ્ટ છે કે f એ $x = 2$ સિવાય પ્રત્યેક $x \in R$ માટે સતત છે.

$\lim\limits_{x \to 2-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2-} (1 - x) = 1 - 2 = -1$

$\lim\limits_{x \to 2+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2+} (x + 1) = 2 + 1 = 3$

$\therefore$ $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ નું અસ્તિત્વ નથી.

$\therefore$ f એ $x = 2$ આગળ અસતત છે.

ઉદાહરણ 11 : સાબિત કરો કે $f(x) = \begin{cases} x - 1 & x < 1 \\ 1 - x & x > 1 \end{cases}$ એ $R - \{1\}$ પર સતત છે.

ઉકેલ : $a < 1$ લેતાં, $f(a) = a - 1$ થશે.

કોઈક $\delta > 0$ માટે $a + \delta < 1$ મળે.

$x \in (a - \delta, a + \delta)$ લેતાં, $f(x) = x - 1$

$\therefore \quad \lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} (x - 1) = a - 1 = f(a)$

$\therefore \quad f$ એ $a < 1$ હોય તેવા પ્રત્યેક $a \in$ R માટે સતત છે.

$a > 1$ માટે $f(a) = 1 - a$ થશે.

કોઈક $\delta > 0$ માટે $a - \delta > 1$ મળે.

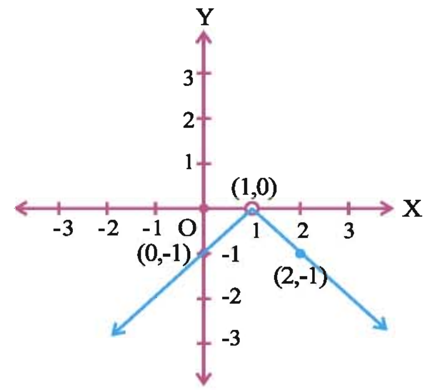
$x \in (a - \delta, a + \delta)$ લેતાં,

$f(x) = 1 - x \qquad (x > 1)$

$\therefore \quad \lim\limits_{x \to a+} f(x) = \lim\limits_{x \to a+} (1 - x) = 1 - a = f(a)$

$\therefore \quad f$ એ $a > 1$ હોય તેવા પ્રત્યેક $a \in$ R માટે સતત છે.

$\therefore \quad f$ એ તેના પ્રદેશ પર સતત છે.



આકૃતિ 5.12

ઉદાહરણ 12 : જો $f(x) = \begin{cases} x - 1 & x < 1 \\ 0 & x = 1 \\ 1 - x & x > 1 \end{cases}$

તો fનું સાતત્ય ચકાસો.

ઉકેલ : ઉદાહરણ 11માં જોયું કે, f એ $x \neq 1$ હોય તેવા પ્રત્યેક $x \in$ R માટે સતત છે.

$$\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1-} (x - 1) = 0, \quad \lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to 1+} (1 - x) = 0$$

$\therefore \quad f(1) = 0$

$\therefore \quad f$ એ $x = 1$ માટે સતત છે.

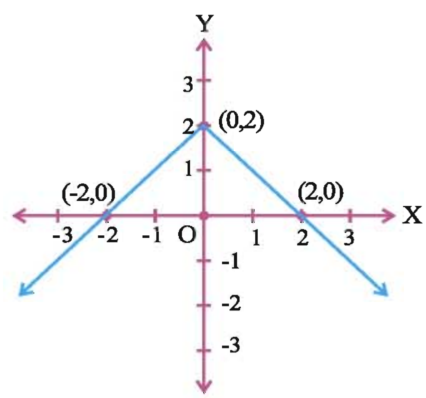
$\therefore \quad f$ એ R પર સતત છે.

નોંધ : શું $f :$ R $\to$ R, $f(x) = -|x - 1|$ નથી ?

ઉદાહરણ 13 : જો $f(x) = \begin{cases} x + 2 & x < 0 \\ 2 - x & x > 0 \\ k & x = 0 \end{cases}$

f એ R પર સતત હોય, તો k મેળવો.

ઉકેલ : fનો આલેખ જોતાં તથા $f(x) = 2 - x, x > 0$ અને $f(x) = x + 2, x < 0$ બહુપદી વિધેયો છે. તેથી f એ પ્રત્યેક $x \in$ R $- \{0\}$ માટે સતત છે જ.



આકૃતિ 5.13

હવે આપણે $x = 0$ આગળ સાતત્ય ચકાસીએ.

$\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0-} (x + 2) = 2$

$\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0+} (2 - x) = 2$

$\therefore \quad \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2$

$\therefore \quad f$ એ $x = 0$ આગળ સતત છે અને તેથી $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2 = f(0)$. $\qquad \left(\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2\right)$

$\therefore \quad f(0) = k = 2$

$\therefore \quad f$ એ પ્રત્યેક $x \in$ R માટે સતત હોય તો $k = 2$.

ઉદાહરણ 14 : સાબિત કરો કે બહુપદી વિધેય સતત છે.

ઉકેલ : $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0$, $a_i \in$ R $(i = 0, 1, 2, ..., n)$ $a_n \neq 0$ એ બહુપદી છે.

આપણે જાણીએ છીએ કે $\lim\limits_{x \to a} x^n = a^n$

$\lim\limits_{x \to a} a_i = a_i$ (અચળ વિધેયનું લક્ષ)

વળી, $\lim\limits_{x \to a} (f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x)) = \lim\limits_{x \to a} f_1(x) + \lim\limits_{x \to a} f_2(x) + ... + \lim\limits_{x \to a} f_n(x)$

હવે, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0)$

$= \lim\limits_{x \to a} a_n \lim\limits_{x \to a} x^n + \lim\limits_{x \to a} a_{n-1} \lim\limits_{x \to a} x^{n-1} + ... + \lim\limits_{x \to a} a_0$

$= a_n a^n + a_{n-1} a^{n-1} + ... + a_0$

$= f(a)$

$\therefore$ બહુપદી વિધેય પ્રત્યેક $x \in R$ માટે સતત છે.

ઉદાહરણ 15 : સાબિત કરો કે પૂર્ણાંકો સિવાયના પ્રત્યેક $x \in R$ માટે $f(x) = [x]$ સતત છે.

ઉકેલ : $f(x) = \begin{cases} ... & .... \\ ... & .... \\ ... & .... \\ -1 & -1 \le x < 0 \\ 0 & 0 \le x < 1 \\ 1 & 1 \le x < 2 \\ ... & .... \\ ... & .... \\ ... & .... \end{cases}$

$\therefore$ f એ $n \in Z$ માટે કોઈ પણ અંતરાલ $(n, n + 1)$ પર અચળ વિધેય છે.

$\therefore$ f એ પ્રત્યેક અંતરાલ $(n, n + 1)$ પર સતત છે. $n \in Z$

હવે, $f(x) = \begin{cases} n - 1 & n - 1 \le x < n \\ n & n \le x < n + 1 \end{cases}$

$n \in Z$ લેતાં,

આપણે $\delta > 0$ એવો પસંદ કરીએ કે જેથી $n - 1 < n - \delta < n$. $(0 < \delta < 1)$

$\therefore$ $\lim\limits_{x \to n-} f(x) = \lim\limits_{x \to n-} n - 1 = n - 1$ $(x \in (n - \delta, n))$

હવે, $\delta > 0$ પસંદ કરો કે જેથી $n < n + \delta < n + 1$. $(0 < \delta < 1)$

$\therefore$ $\lim\limits_{x \to n+} f(x) = \lim\limits_{x \to n+} n = n$ $(x \in (n, n + \delta))$

$\therefore$ $\lim\limits_{x \to n} f(x)$ નું અસ્તિત્વ નથી. (જુઓ આકૃતિ 5.1)

$\therefore$ f એ દરેક પૂર્ણાંક માટે અસતત છે.

$\therefore$ $f(x) = [x]$ એ $R - Z$ પર સતત છે અને પ્રત્યેક $n \in Z$ માટે અસતત છે.

ઉદાહરણ 16 : $f(x) = \begin{cases} kx + 3 & x \le 2 \\ 7 & x > 2 \end{cases}$

f એ $x = 2$ આગળ સતત હોય, તો k શોધો.

ઉકેલ : $\lim\limits_{x \to 2-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2-} (kx + 3) = 2k + 3$

$\lim\limits_{x \to 2+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2+} 7 = 7$

$\therefore$ જો $2k + 3 = 7$ તો $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$નું અસ્તિત્વ હોય.

$\therefore$ $k = 2$ તો $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$નું અસ્તિત્વ હોય તથા તેનું મૂલ્ય 7 હોય.

વળી, $k = 2$ માટે $f(2) = 2 \cdot 2 + 3 = 7$

$\therefore$ $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$

$\therefore$ જો $k = 2$ તો f એ $x = 2$ આગળ સતત છે.

ઉદાહરણ 17 : $f(x) = \begin{cases} 3 & x \le 1 \\ ax + b & 1 < x < 3 \\ 7 & x \ge 3 \end{cases}$

એવા a અને b શોધો કે જેથી f સતત વિધેય થાય.

ઉકેલ : $x \in (1, 3)$ સિવાય f અચળ વિધેય હોવાથી સતત વિધેય છે.

f એ $(1, 3)$માં સુરેખ બહુપદી છે. તેથી સતત વિધેય છે.

તેથી f એ $x \in R - \{1, 3\}$ પર સતત છે, શક્યતઃ $x = 1$ અને 3 સિવાય તે R પર સતત છે.

$\lim\limits_{x \to 1+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1+} (ax + b) = a + b$, $\lim\limits_{x \to 1-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1-} 3 = 3$

f એ $x = 1$ આગળ સતત હોવાથી, $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ નું અસ્તિત્વ હોવું જોઈએ.

$\lim\limits_{x \to 1+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1-} f(x)$

$\therefore$ $a + b = 3$ **(i)**

$\lim\limits_{x \to 3-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3-} (ax + b) = 3a + b$, $\lim\limits_{x \to 3+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3+} 7 = 7$

f એ $x = 3$ આગળ પણ સતત હોવાથી $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ નું અસ્તિત્વ હોવું જોઈએ.

$\lim\limits_{x \to 3+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3-} f(x)$

$\therefore$ $3a + b = 7$ **(ii)**

(i) અને (ii) ઉકેલતાં, $a = 2$, $b = 1$. વળી $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$, $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 7$

હવે, $f(1) = 3$, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3 = f(1)$

$f(3) = 7$, $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 7 = f(3)$

$\therefore$ $a = 2$ અને $b = 1$ લેતાં f એ R પર સતત છે.

ઉદાહરણ 18 : $f(x) = \begin{cases} x + a & x < 0 \\ 2 & 0 \le x < 1 \\ bx - 1 & 1 \le x < 2 \end{cases}$

જો f એ $x = 0$ અને $x = 1$ આગળ સતત હોય, તો a અને b શોધો.

ઉકેલ : $\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0-} (x + a) = a$

$\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0+} 2 = 2.$

f એ $x = 0$ આગળ સતત હોવાથી, $\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0+} f(x)$

$\therefore \quad a = 2$. વળી $f(0) = 2$

$\therefore \quad \lim_{x \to 0-} f(x) = 2 = f(0)$

$\therefore \quad a = 2$ લેતાં f એ $x = 0$ આગળ સતત છે.

$\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1-} 2 = 2$

$\lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to 1+} (bx - 1) = b - 1$

f એ $x = 1$ આગળ સતત હોવાથી, $\lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to 1-} f(x)$

$\therefore \quad b - 1 = 2$

$\therefore \quad b = 3$. આથી $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$

વળી, $f(1) = b - 1 = 3 - 1 = 2$

$\therefore \quad \lim_{x \to 1} f(x) = 2 = f(1)$

$\therefore \quad a = 2$ અને $b = 3$ લેતાં f એ $x = 0$ તથા $x = 1$ માટે સતત છે.

5.3 સતત વિધેયોનું બીજગણિત

સાતત્યની સંકલ્પના લક્ષ પર આધારિત છે, તેથી લક્ષનાં કાર્યનિયમો પ્રમાણે જ આપણને $f \pm g$, $f \times g$, $\frac{f}{g}$ વગેરેના સાતત્યના કાર્યનિયમો મળે.

પ્રમેય 5.1 : ધારો કે f અને g એ $x = c$ માટે સતત છે, જ્યાં (a, b) કોઈક અંતરાલ છે અને $c \in (a, b)$,

તો (1) $f + g$ એ $x = c$ માટે સતત છે.

(2) kf એ $x = c$ માટે સતત છે. $k \in R$

(3) $f - g$ એ $x = c$ માટે સતત છે.

(4) $f \times g$ એ $x = c$ માટે સતત છે.

(5) જો $g(c) \neq 0$ તો $\frac{k}{g}$ એ $x = c$ માટે સતત છે. $k \in R$

(6) જો $g(c) \neq 0$ તો $\frac{f}{g}$ એ $x = c$ માટે સતત છે.

સાબિતી : f અને g એ $x = c$ માટે સતત છે. તેથી $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ અને $\lim_{x \to c} g(x) = g(c)$

(1) $\lim_{x \to c} (f + g)(x) = \lim_{x \to c} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x)$

$= f(c) + g(c)$

$= (f + g)(c)$

$\therefore \quad f + g$ એ $x = c$ આગળ સતત છે.

(2) $\lim_{x \to c} (kf)(x) = \lim_{x \to c} kf(x)$

$= \lim_{x \to c} k \lim_{x \to c} f(x)$

$= kf(c)$

$= (kf)(c)$

$\therefore \quad kf$ એ $x = c$ આગળ સતત છે.

(3) (2)માં $k = -1$ લેતાં, g સતત હોવાથી $-g$ એ $x = c$ આગળ સતત છે.

$\therefore$ $f + (-g) = f - g$ એ $x = c$ આગળ સતત છે.

(4) $$\lim_{x \to c} (f \times g)(x) = \lim_{x \to c} f(x)g(x)$$

$$= \lim_{x \to c} f(x) \lim_{x \to c} g(x)$$

$$= f(c)\, g(c)$$

$$= (f \times g)(c)$$

$\therefore$ $f \times g$ એ $x = c$ આગળ સતત છે.

(5) $$\lim_{x \to c} \left(\frac{k}{g}\right)(x) = \lim_{x \to c} \frac{k}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to c} k}{\lim\limits_{x \to c} g(x)} \qquad (g(x) \neq 0)$$

$$= \frac{k}{g(c)} \qquad (g(c) \neq 0)$$

$\therefore$ $\frac{k}{g}$ એ $x = c$ આગળ સતત છે.

(6) $$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \left(f \times \frac{1}{g}\right)(x)$$

(5)માં $k = 1$ લેતાં, g સતત હોવાથી $\frac{1}{g}$ એ $x = c$ આગળ સતત છે. $(g(x) \neq 0)$

$\left(f \times \frac{1}{g}\right) = \frac{f}{g}$ એ $x = c$ આગળ સતત છે.

અથવા

$$\lim_{x \to c} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to c} f(x)}{\lim\limits_{x \to c} g(x)}$$

$$= \frac{f(c)}{g(c)} \qquad (g(c) \neq 0)$$

$$= \left(\frac{f}{g}\right)(c)$$

$\therefore$ $\frac{f}{g}$ એ $x = c$ આગળ સતત છે.

કેટલાંક અગત્યનાં પરિણામો :

(1) સંમેય વિધેય તેના પ્રદેશ પર સતત છે.

$h(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ એ સંમેય વિધેય છે, જ્યાં $p(x)$ અને $q(x)$ બહુપદી વિધેય છે અને $q(x) \neq 0$

$$\lim_{x \to a} h(x) = \lim_{x \to a} \frac{p(x)}{q(x)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to a} p(x)}{\lim\limits_{x \to a} q(x)}$$

$$= \frac{p(a)}{q(a)} \qquad (q(a) \neq 0)$$

$$= h(a)$$

$\therefore$ h એ તેના પ્રદેશ પર સતત છે.

(2) *sine* વિધેય સતત છે.

ધોરણ XIમાં આપણે જોયું તે પ્રમાણે

આપણે $\lim\limits_{x \to 0} sinx = 0$, $\lim\limits_{x \to 0} cosx = 1$ સ્વીકારી લઈશું.

ધારો કે $a \in R$. $x = a + h$ લેતાં, જેમ $x \to a$ તેમ $h \to 0$ થશે.

$$\lim_{x \to a} sinx = \lim_{h \to 0} sin\,(a + h)$$

$$= \lim_{h \to 0} (sina\ cosh + cosa\ sinh)$$

$$= sina \lim_{h \to 0} cosh + cosa \lim_{h \to 0} sinh$$

$$= sina \cdot 1 + cosa \cdot 0$$

$$= sina$$

$\therefore$ $\lim\limits_{x \to a} sinx = sina$

$\therefore$ *sine* વિધેય સતત છે.

(3) *cosine* વિધેય સતત છે.

ધારો કે $a \in R$. $x = a + h$ લેતાં, જેમ $x \to a$ તેમ $h \to 0$ થશે.

$$\lim_{x \to a} cosx = \lim_{h \to 0} cos(a + h)$$

$$= \lim_{h \to 0} (cosa\ cosh - sina\ sinh)$$

$$= cosa \lim_{h \to 0} cosh - sina \lim_{h \to 0} sinh$$

$$= cosa \cdot 1 - sina \cdot 0$$

$$= cosa$$

$\therefore$ $\lim\limits_{x \to a} cosx = cosa$

$\therefore$ *cosine* વિધેય સતત છે.

(4) *tan* વિધેય સતત છે :

$tanx = \frac{sinx}{cosx}$, $x \in R - \left\{(2k - 1)\frac{\pi}{2} \;\middle|\; k \in Z\right\}$

sine વિધેય સતત છે તથા *cosine* વિધેય સતત છે.

$cosx = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{(2k - 1)\frac{\pi}{2} \;\middle|\; k \in Z\right\}$

$\therefore$ f અને g સતત હોય, તો $\frac{f}{g}$ સતત છે એ કાર્યનિયમ મુજબ *tan* વિધેય તેના પ્રદેશ પર સતત છે.

(5) સંયોજિત વિધેયનું સાતત્ય :

ધારો કે $f : (a, b) \to (c, d)$ અને $g : (c, d) \to (e, f)$ વિધેયો છે અને તેથી gof વ્યાખ્યાયિત છે.

જો f એ $x_1 \in (a, b)$ અને g એ $f(x_1) \in (c, d)$ આગળ સતત હોય, તો gof એ $x_1 \in (a, b)$ આગળ સતત છે.

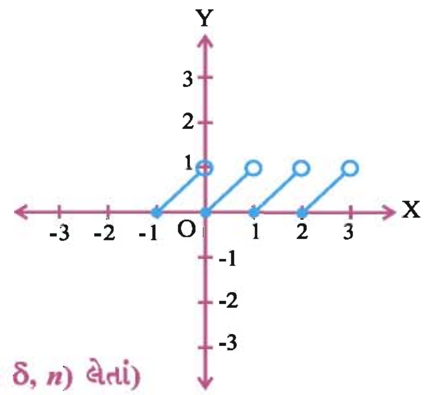
સંયોજિત વિધેયના લક્ષના નિયમ પ્રમાણે (ધોરણ XI, સિમેસ્ટર II).

$$\lim_{x \to x_1} g(f(x)) = g(\lim_{x \to x_1} (f(x)) = g(f(x_1)) = (gof)(x_1)$$

$\therefore$ gof એ $x = x_1$ આગળ સતત છે.

ઉદાહરણ 19 : સાબિત કરો કે પ્રત્યેક $n \in Z$ માટે $f(x) = x - [x]$ એ અસતત છે. $(x \in R)$

ઉકેલ : $f(x) = \begin{cases} \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ x & 0 \le x < 1 \\ x - 1 & 1 \le x < 2 \\ x - 2 & 2 \le x < 3 \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{cases}$



આકૃતિ 5.14

કોઈ પણ $n \in Z$ માટે,

$$\lim_{x \to n-} f(x) = \lim_{x \to n-} (x - [x])$$

$$= \lim_{x \to n-} (x - (n - 1)) \quad (0 < \delta < 1 \text{ માટે } x \in (n - \delta, n) \text{ લેતાં})$$

$$= n - (n - 1)$$

$$= 1$$

અને $f(n) = n - [n] = n - n = 0$

$\therefore$ $\lim_{x \to n-} f(x) \ne f(n) \quad \forall n \in Z$

$\therefore$ $f(x) = x - [x]$ એ $n \in Z$ પર સતત નથી.

નોંધ : $(0, 1), (1, 2),...$ વગેરે અંતરાલ પર $f(x) = x - [x]$ સતત છે. શક્ય હોય તો ધારો કે $n \in Z$ પર પણ $x - [x]$ સતત છે. $g(x) = x$ તો $x \in R$ પર સતત છે જ.

$\therefore$ $f(x) = x - [x]$ તથા $g(x) = x$ એ બંને R પર સતત થાય.

$\therefore$ $g(x) - f(x) = x - (x - [x]) = [x]$ પણ R પર સતત થાય. પરંતુ $[x]$ તો પ્રત્યેક પૂર્ણાંક આગળ અસતત છે.

આથી $f(x) = x - [x]$, $n \in Z$ માટે સતત નથી.

ઉદાહરણ 20 : સાબિત કરો કે $sin\,|x|$ એ R પર સતત છે.

ઉકેલ : $f : R \to R$, $f(x) = |x|$ અને $g : R \to R$, $g(x) = sinx$ સતત છે.

$\therefore$ $gof : R \to R$, $(gof)(x) = g(f(x)) = g(|x|) = sin\,|x|$ એ પ્રત્યેક $x \in R$ માટે સતત છે.

ઉદાહરણ 21 : સાબિત કરો કે $f : R \to R$, $f(x) = |\,1 - x + |x|\,|$ સતત છે.

ઉકેલ : $g : R \to R$, $g(x) = 1 - x$ અને $h : R \to R$, $h(x) = |x|$ એ સતત છે.

$\therefore$ $g(x) + h(x) = 1 - x + |x|$ એ R પર સતત છે.

$\therefore$ h અને $g + h$ એ R પર સતત હોવાથી $ho((g + h)(x)) = h((g + h)(x)) = |\,1 - x + |x|\,|$ એ R પર સતત છે.

ઉદાહરણ 22 : સાબિત કરો કે $cosx^3$ એ R પર સતત છે.

ઉકેલ : $f : R \to R, f(x) = x^3$ અને $g : R \to R, g(x) = cosx$ સતત છે.

$\therefore$ $gof : R \to R, (gof)(x) = g(f(x)) = g(x^3) = cosx^3$ સતત છે.

ઉદાહરણ 23 : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{kcosx}{\pi - 2x} & x \neq \dfrac{\pi}{2} \\ k^2 & x = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

એવો k મળી શકે કે જેથી f એ $x = \frac{\pi}{2}$ આગળ સતત થાય ?

ઉકેલ : $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{kcosx}{2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \lim\limits_{\alpha \to 0} \dfrac{k\sin\alpha}{2\alpha} = \dfrac{k}{2}$ $\left(\alpha = \frac{\pi}{2} - x\right)$

વળી, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = k^2$

f એ $x = \frac{\pi}{2}$ આગળ સતત થાય તે માટે, $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ થવું જોઈએ.

$\therefore$ $\frac{k}{2} = k^2$

$\therefore$ $k = \frac{1}{2}$ અથવા 0

$\therefore$ $k = 0$ અથવા $k = \frac{1}{2}$ લેતાં f એ $x = \frac{\pi}{2}$ આગળ સતત થાય.

(**નોંધ :** $k = 0$ તો પ્રત્યેક $x \in R$ માટે $f(x) = 0$)

ઉદાહરણ 24 : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{sinx}{|x|} & x \neq 0 \\ k & x = 0 \end{cases}$

f એ $x = 0$ આગળ સતત થાય તેવો k શોધી શકાશે ?

ઉકેલ : $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{sinx}{|x|} = \lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{sinx}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0-} \dfrac{sinx}{|x|} = \lim\limits_{x \to 0-} \dfrac{sinx}{-x} = -1$

$\therefore$ $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$નું અસ્તિત્વ નથી.

$\therefore$ એવો કોઈ પણ $k \in R$ મળશે નહીં કે જેથી f એ $x = 0$ આગળ સતત થાય.

ઉદાહરણ 25 : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{sin4x}{9x} & x \neq 0 \\ k^2 & x = 0 \end{cases}$

f એ $x = 0$ આગળ સતત થાય તેવો k શોધો.

ઉકેલ : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sin4x}{9x}$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sin4x}{4x} \dfrac{4}{9}$

$= \dfrac{4}{9}$

$f(0) = k^2$

$\therefore \quad k^2 = \frac{4}{9}$ માટે f એ $x = 0$ આગળ સતત છે.

$\therefore \quad k = \pm\frac{2}{3}$ માટે f એ $x = 0$ આગળ સતત છે.

સ્વાધ્યાય 5.1

1. સાબિત કરો કે *cot, cosec* અને *sec* તેમના પ્રદેશ પર સતત છે.
2. સાબિત કરો કે ન્યૂનતમ પૂર્ણાંક વિધેય $f(x) = \lceil x \rceil$ એ પ્રત્યેક $n \in Z$ માટે અસતત છે.
3. સાબિત કરો કે ચિહ્ન વિધેય $x = 0$ આગળ અસતત છે.

નીચે આપેલાં વિધેયોનું સાતત્ય ચકાસો : (4 થી 12)

4. $f(x) = \begin{cases} x + 3 & x \ge 2 \\ 3 - x & x < 2 \end{cases}$

5. $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \ge 0 \\ x & x < 0 \end{cases}$

6. $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & x < 1 \\ 5 & x = 1 \\ 3x + 2 & x > 1 \end{cases}$

7. $f(x) = \begin{cases} \frac{sinx}{x} & x \ne 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$

8. $f(x) = \begin{cases} \frac{tanx}{x} & x \ne 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$

9. $f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & x < 0 \\ 2 & x = 0 \\ 3x - 2 & x > 0 \end{cases}$

10. $f(x) = \begin{cases} \frac{sinx}{3x} & x \ne 0 \\ \frac{2}{3} & x = 0 \end{cases}$

11. $f(x) = \begin{cases} \frac{2x+3}{3x+2} & x > 0 \\ \frac{sin3x}{2x} & x < 0 \\ \frac{3}{2} & x = 0 \end{cases}$

12. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x^2+1} & x > 0 \\ \frac{sinx}{|x|} & x < 0 \\ -1 & x = 0 \end{cases}$

x ની આપેલ કિંમતો આગળ નીચે આપેલાં વિધેયો સતત હોય, તો k મેળવો. (13 થી 16)

13. $f(x) = \begin{cases} \frac{tan\,kx}{3x} & x \ne 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ $(x = 0)$

14. $f(x) = \begin{cases} \frac{sin5x}{kx} & x \ne 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ $(x = 0)$

15. $f(x) = \begin{cases} \frac{(x+1)\,tan(x-1)}{sin(x^2-1)} & x \ne 1 \\ k & x = 1 \end{cases}$ $(x = 1)$

16. $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + k & x < 0 \\ x^2 - 2k & x \ge 0 \end{cases}$ $(x = 0)$

17. જો આપેલ x ની કિંમતો આગળ f સતત હોય, તો a અને b શોધો :

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & 1 < x < 2 \\ ax + b & 2 \le x < 3 \\ 3x + 2 & 3 \le x \le 4 \end{cases}$$

($x = 2$ અને $x = 3$)

18. સાબિત કરો કે $sin^2x - cos^2x$ એ R પર સતત છે.

19. સાબિત કરો કે $sin2x\ cos3x$ એ R પર સતત છે.

20. સાબિત કરો કે $sin|x|$ એ R પર સતત છે.

21. સાબિત કરો કે $|sinx|$ એ R પર સતત છે.

22. સાબિત કરો કે sin^3x અને $sinx^3$ એ R પર સતત છે.

23. સાબિત કરો કે $cosx^n$ એ R પર સતત છે. ($n \in$ N)

24. સાબિત કરો કે cos^nx એ R પર સતત છે. ($n \in$ N)

25. $$f(x) = \begin{cases} sinx - cosx & x \neq 0 \\ -1 & x = 0 \end{cases}$$

સાબિત કરો કે f એ $x = 0$ પર સતત છે.

26. $$f(x) = \begin{cases} |sinx - cosx| & x \neq 0 \\ -1 & x = 0 \end{cases}$$

f એ $x = 0$ આગળ સતત છે ?

27. $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{sinx - cosx}{x - \frac{\pi}{4}} & x \neq \frac{\pi}{4} \\ k & x = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

જો f એ $x = \frac{\pi}{4}$ આગળ સતત હોય, તો k શોધો.

28. $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^n - 2^n}{x - 2} & x \neq 2 \\ 80 & x = 2 \end{cases}$$

જો f એ $x = 2$ આગળ સતત હોય, તો n શોધો.

*

5.4 ઘાતાંકીય અને લઘુગણકીય વિધેયો

વિધેય $f(x) = x^n$ નો ઉપયોગ બહુપદી વિધેયો અને સંમેય વિધેયોમાં થાય છે.

ધારો કે $f_n(x) = x^n$

$f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = x^3$,..... વગેરે

ચાલો, આપણે નીચે આપેલા આલેખો દોરીએ :

$f_2(x)$ માટે,

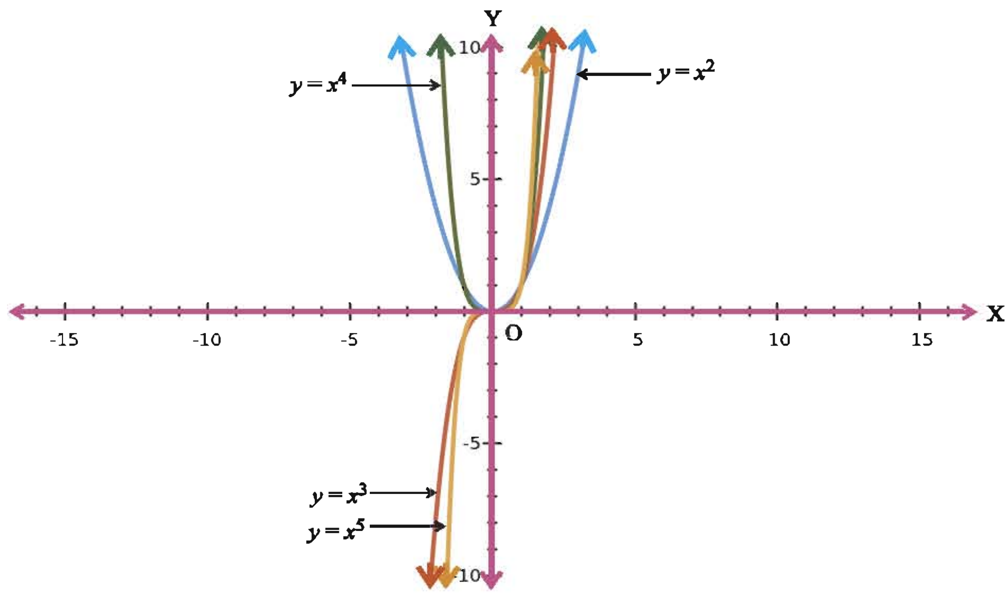
x	1	2	3	4	5	–1	–2	–3
$f_2(x)$	1	4	9	16	25	1	4	9

$f_3(x)$ માટે,

x	1	2	3	4	5	–1	–2	–3
$f_3(x)$	1	8	27	64	125	–1	–8	–27

જેમ x વધે છે તેમ $f_n(x)$ વધે છે. $x > 1$ માટે, xના નિશ્ચિત ઉપચય (વધારા) માટે જેમ n વધે છે તેમ $f_n(x)$ વધે છે. ઉદાહરણ તરીકે x એ 2 થી 3 થાય ત્યારે, $f_{10}(2) = 2^{10}$, $f_{10}(3) = 3^{10}$, $f_{20}(2) = 2^{20}$, $f_{20}(3) = 3^{20}$.

સ્વાભાવિક રીતે, $3^{20} - 2^{20} > 3^{10} - 2^{10}$.



આકૃતિ 5.15

હવે આપણે 'સામાન્ય ઘાતાંકીય વિધેય' $f(x) = 10^x$ લઈએ. આ વિધેય કોઈ પણ વિધેય $f_n(x)$ કરતાં ખૂબ ઝડપથી વધે છે.

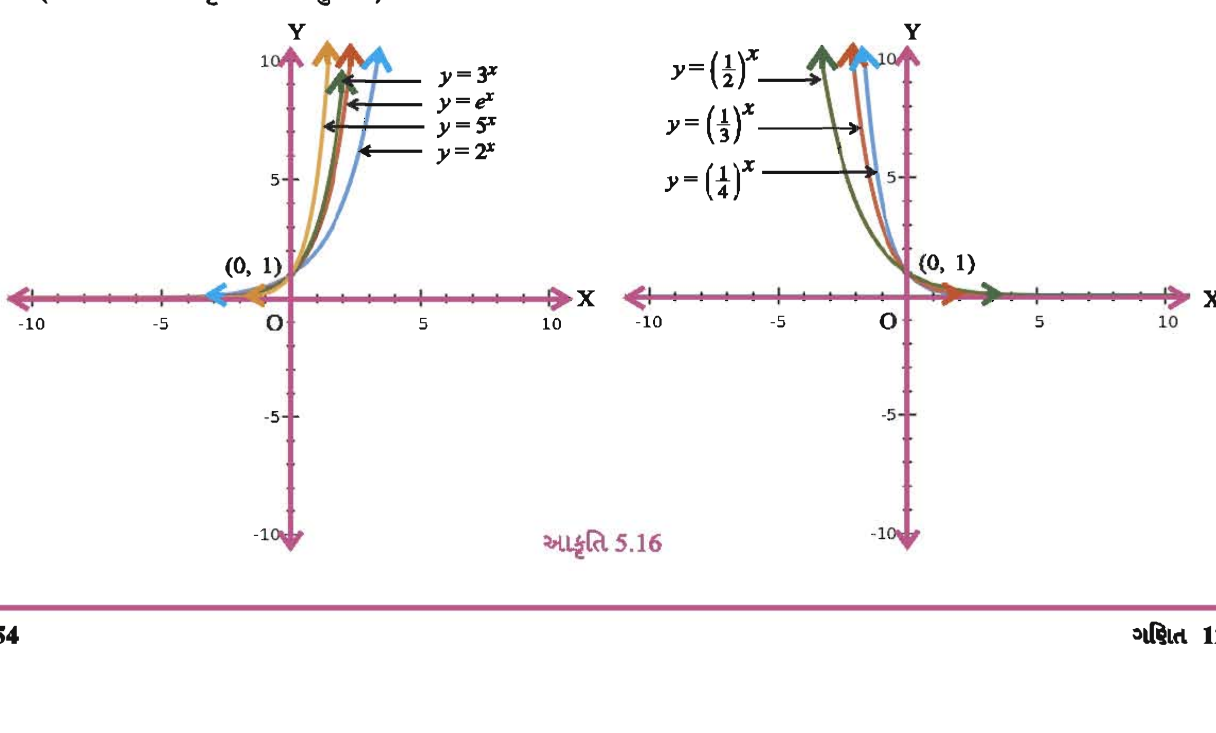
$x = 10^2$ લો. હવે, $f_{100}(x) = x^{100} = (10^2)^{100} = 10^{200}$, $f(x) = 10^{10^2} = 10^{100}$

$x = 10^3$ માટે, $f_{100}(x) = x^{100} = 10^{300}$, $f(x) = 10^{10^3} = 10^{1000}$

$x = 10^4$ માટે, $f_{100}(x) = (10^4)^{100} = 10^{400}$, $f(x) = 10^{10^4} = 10^{10000}$

સામાન્ય રીતે, જો $x > 10^3$, તો $f(x)$ એ $f_{100}(x)$ કરતાં ખૂબ જ ઝડપથી વધે છે.

($2 < e < 3$. પૃષ્ઠ 155 જુઓ.)



આકૃતિ 5.16

ઘાતાંકીય વિધેય : $f(x) = a^x$, $a > 0$, $x \in R$ ને ઘાતાંકીય વિધેય કહે છે.

(1) જો $a > 1$, તો x વધે તેમ $f(x)$ વધે છે.

જો $a < 1$, તો x વધે તેમ $f(x)$ ઘટે છે.

(2) કોઈ પણ $a \in R^+$ માટે fનો આલેખ $(0, 1)$માંથી પસાર થાય છે.

(3) જો $a \neq 1$, તો f એક-એક અને વ્યાપ્ત વિધેય છે.

(4) fનો વિસ્તાર R^+ છે.

(5) જેમ aની કિંમત વધે તેમ, $a > 1$ માટે fનો આલેખ Y-અક્ષ તરફ ઢળે છે.

(6) $a > 1$ માટે જો x ઋણ હોય અને ઘટે તો fનો આલેખ X-અક્ષની નજીકને નજીક આવે છે પરંતુ X-અક્ષને છેદતો નથી.

વાસ્તવિક ઘાતાંકના નિયમો :

(1) $a^x a^y = a^{x+y}$ (2) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

(3) $(a^x)^y = a^{xy}$ (4) $(ab)^x = a^x b^x$ $a, b \in R^+, x, y \in R$

(આ ચર્ચા ફક્ત સમજવા માટે અને હવે પછીની ચર્ચાની કડીરૂપ છે અને પરીક્ષા માટે નથી.).

અચળ e : શ્રેણીનું લક્ષ : વિધેયની માફક જ, કેટલીક શ્રેણીઓને 'લક્ષ' હોય છે.

શ્રેણી $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{100}, \ldots, \frac{1}{n} \ldots$નાં પદો 0ની નજીક અને નજીક જાય છે.

આપણે $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$ કહીશું.

આપણે શ્રેણીનાં લક્ષની વિધિવત્ વ્યાખ્યા આપીશું નહીં. નીચેનાં પરિણામો આપણે સ્વીકારીશું.

(1) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$. $(n \in N)$. આપણે સ્વીકારીએ છીએ કે $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$ $(x \in R)$

(2) $\lim\limits_{n \to \infty} r^n = 0$ $\quad |r| < 1$

દાખલા તરીકે જો $r = \frac{1}{2}$, તો આપણને શ્રેણી $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$ મળે. જેમ nની કિંમત મોટી ને મોટી થાય છે તેમ $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ એ 0ની નજીક અને નજીક પહોંચે છે.

શ્રેણી $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ લઈએ.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \ldots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n}$$

$$= 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{2!\,n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!\,n^3} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots\ldots 1}{n!\,n^n}$$

$$= 1 + 1 + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)}{2!} + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{3!} + \ldots + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)}{n!}$$

$1-\frac{1}{n}, 1-\frac{2}{n}, 1-\frac{3}{n}$ બધાં જ 1 કરતાં નાનાં છે અને જ્યાં જ્યાં તેમનો ગુણાકાર હોય છે ત્યાં આ ગુણાકાર પણ 1 કરતાં નાનો છે.

$$\therefore \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + ... + \frac{1}{n!} \qquad (n \geq 3)$$

$$< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2^{n-1}} \qquad (2^{n-1} < n!)$$

$$\therefore \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1 + \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} \qquad \text{(સમગુણોત્તર શ્રેણી)}$$

$$\therefore \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1 + 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 3 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n < 3 \qquad \text{(i)}$$

સ્વાભાવિક રીતે, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 2$ $\qquad (n > 1)$ (ii)

આપણે શ્રેણી $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ને લક્ષ છે તે સ્વીકારી લઈશું અને તેને e કહીશું. પરિણામ (i) અને (ii) પરથી, $2 < e < 3$

આમ e એ નિશ્ચિત અચળ છે, જે $2 < e < 3$ નું પાલન કરે છે.

આ અચળાંકને નેપિયરનો અચળ કહે છે. તેનું લગભગ મૂલ્ય $e = 2.71828183$ છે.

શ્રેણી $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$નું લક્ષ e છે.

$$\therefore \quad \lim_{n \to \infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

આપણે સાબિત કરી શકીએ, કે શ્રેણી $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ને લક્ષ છે. પરંતુ અહીં તેની સાબિતી આપીશું નહીં.

$\lim_{x \to \infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ અથવા x ના બદલે $\frac{1}{x}$ લેતાં, $\lim_{x \to 0}(1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$ પણ સ્વીકારી લઈશું.

લઘુગણકીય વિધેય :

આપણે જાણીએ છીએ કે ઘાતાંકીય વિધેય $f : R \to R^+$, $f(x) = a^x$ એ $a \in R^+ - \{1\}$ માટે એક-એક **અને વ્યાપ્ત છે. તેના પ્રતિવિધેય $g : R^+ \to R$ ને લઘુગણકીય વિધેય કહે છે. તેથી જો $y = f(x) = a^x$, તો $x = g(y) = \log_a y$**

આપણે જાણીએ છીએ કે, વિધેય $f : A \to B$ અને પ્રતિવિધેય $g : B \to A$ માટે $(fog)(y) = y$, $y \in B$ અને $(gof)(x) = x$, $x \in A$.

હવે, $f(g(y)) = y$

$\therefore \quad f(\log_a y) = y$

$\therefore \quad a^{\log_a y} = y$

અથવા બીજા શબ્દોમાં, **$a^{\log_a x} = x$ જ્યાં $x \in R^+$**

જો $a = 10$, તો $\log_{10} x$ ને સામાન્ય લઘુગણક કહીશું.

આમ, $f : R \to R^+$, $f(x) = 10^x$ તો તેનું પ્રતિવિધેય $g : R^+ \to R$, $g(x) = \log_{10} x$ થાય.

જો $a = e$ તો આપણને પ્રાકૃતિક લઘુગણક મળે અને તેને $\ln_e x$ વડે દર્શાવીશું. આપણે $\ln x$ ને $\log_e x$ અથવા સામાન્ય રીતે $\log x$ લખીશું.

(1) log વિધેયનો પ્રદેશ R^+ અને વિસ્તાર R છે. ફક્ત ધન વાસ્તવિક સંખ્યાઓનો લઘુગણક મેળવી શકાય અને જો $x \in R^+$ તો $\log x$ એ વાસ્તવિક સંખ્યા છે.

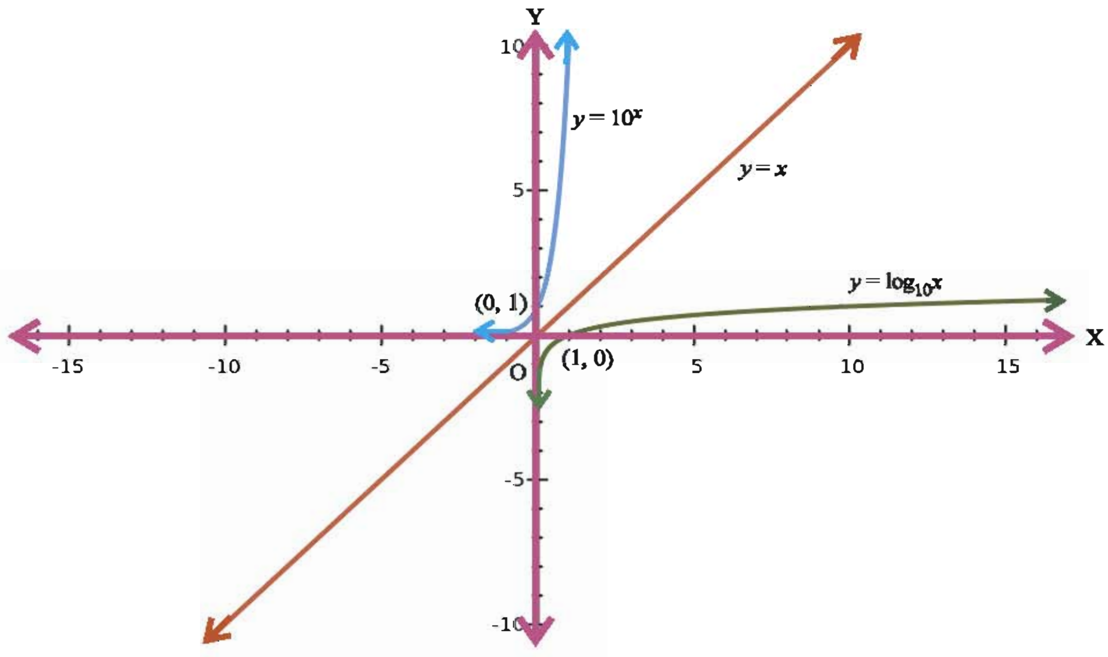
(2) $a^0 = 1$. તેથી $\log_a 1 = 0$

તેથી $\log_e 1 = 0$, $\log_{10} 1 = 0$

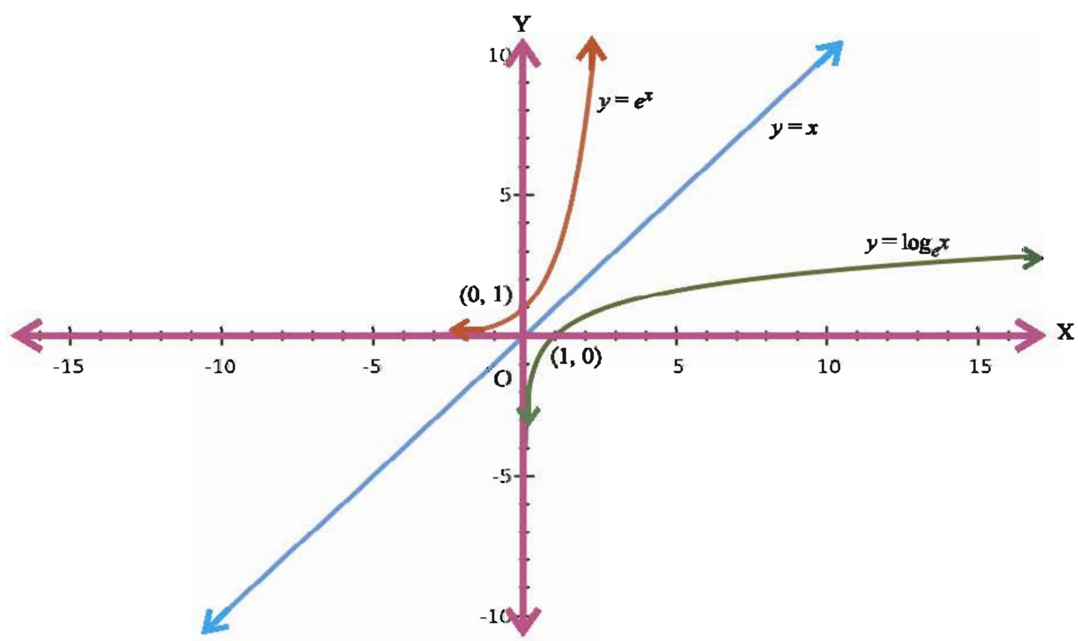
(3) $a^1 = a$. તેથી $\log_a a = 1$

$\therefore \quad \log_e e = 1$, $\log_{10} 10 = 1$

$a^{\log_a x} = x$, $a \in R^+ - \{1\}$ હોવાથી $e^{\log_e x} = x$ થાય.



આકૃતિ 5.17



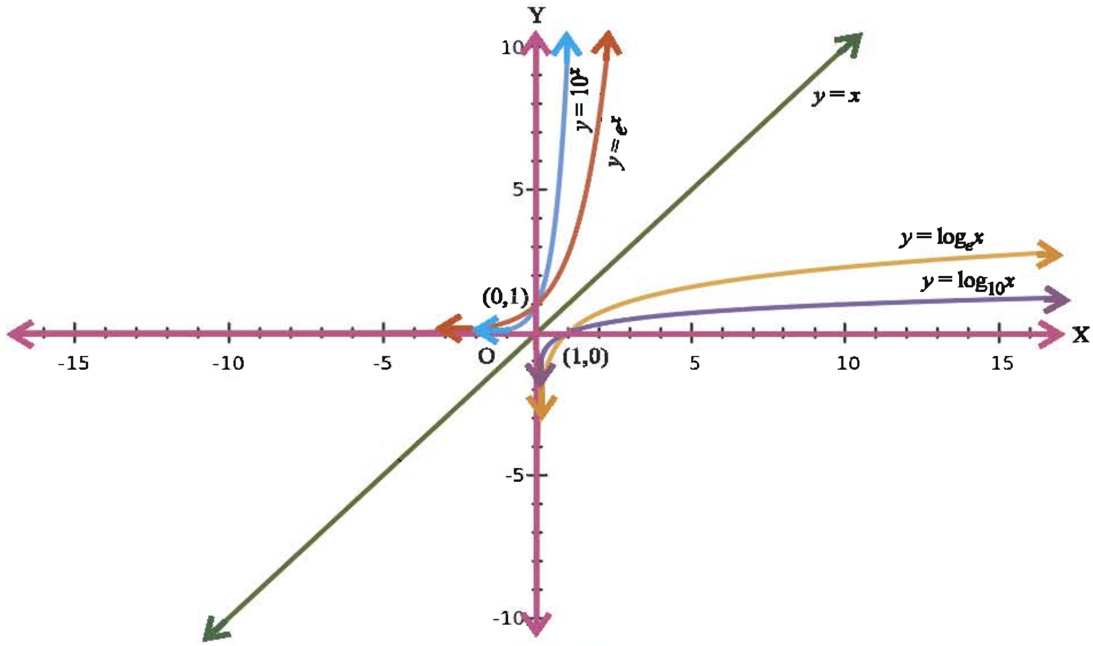
આકૃતિ 5.18

આપણને $f(x) = \log_e x$ અને $f(x) = e^x$ ના આલેખનું અવલોકન કરતાં માલૂમ પડે છે કે તે રેખા $y = x$ અરીસામાં એકબીજાનાં પ્રતિબિંબ છે :

(1) (1, 0) એ log વિધેયના આલેખનો ઘટક છે.

(2) $a > 1$ માટે $f(x) = \log_a x$ વધતું વિધેય છે.

$0 < a < 1$ માટે તે ઘટતું વિધેય છે.



આકૃતિ 5.19

લઘુગણકના કેટલાક નિયમો :

(1) $\log_a mn = \log_a m + \log_a n$ $\quad (m, n \in R^+, a \in R^+ - \{1\})$

ધારો કે $\log_a m = x$, $\log_a n = y$

$\therefore \quad m = a^x, n = a^y$

$\therefore \quad mn = a^x a^y = a^{x+y}$

$\therefore \quad \log_a mn = x + y = \log_a m + \log_a n$

(2) $\log_a \frac{m}{n} = \log_a m - \log_a n$ $\quad (m, n \in R^+, a \in R^+ - \{1\})$

સાબિતી (1) પ્રમાણે મળે.

(3) $\log_a x^n = n\log_a x$ $\quad (x \in R^+, n \in Z, a \in R^+ - \{1\})$

ધારો કે $\log_a x = y$

$\therefore \quad x = a^y$

$\therefore \quad x^n = (a^y)^n = a^{ny}$

$\therefore \quad \log_a x^n = ny$

$\therefore \quad \log_a x^n = n\log_a x$

(4) આધાર પરિવર્તનનો નિયમ : $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ **($b \in R^+$, a, $c \in R^+ - \{1\}$)**

ધારો કે $\log_a b = x$, $\log_c a = y$

$\therefore$ $b = a^x$, $a = c^y$

$\therefore$ $b = (c^y)^x = c^{xy}$

$\therefore$ $\log_c b = xy = \log_a b \times \log_c a$

$\therefore$ $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ **($a \neq 1$ હોવાથી $\log_c a \neq 0$)**

વળી, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\log_e(1+x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} \log_e(1+x)$

$= \lim\limits_{x \to 0} \log_e(1+x)^{\frac{1}{x}}$

$= \log_e\left(\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}\right)$ **(log સતત છે અને સંયોજીત વિધેયનું લક્ષ)**

$= \log_e e$

$= 1$

$\therefore$ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\log(1+x)}{x} = 1$

5.5 વિકલન

આપણે ધોરણ XIમાં વિકલનની સંકલ્પનાનો અભ્યાસ કર્યો. ચાલો આપણે યાદ કરીએ.

વ્યાખ્યા : જો $f : (a, b) \to R$ વિધેય હોય અને $c \in (a, b)$ તથા h એટલો નાનો હોય કે જેથી $c + h \in (a, b)$, $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(c+h) - f(c)}{h}$ નું અસ્તિત્વ હોય, તો આ લક્ષને fનું c આગળનું વિકલિત કહે છે. તેને $f'(c)$ અથવા $\left[\dfrac{d}{dx} f(x)\right]_{x = c}$ અથવા $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{x = c}$ વડે દર્શાવાય છે, જ્યાં $y = f(x)$. જો $x = c$ આગળ fના વિકલિતનું અસ્તિત્વ હોય, તો f એ $x = c$ આગળ વિકલનીય છે તેમ કહેવાય. $\dfrac{dy}{dx}$ માટે y_1 પણ ઉપયોગમાં લેવાય છે.

જો f એ દરેક $x \in A$ પર વિકલનીય હોય ($A \neq \emptyset$) તો, f એ Aમાં વિકલનીય છે તેમ કહેવાય.

f એ $c \in (a, b)$ પર વિકલનીય છે નો અર્થ $\lim\limits_{h \to 0+} \dfrac{f(c+h) - f(c)}{h}$ અને $\lim\limits_{h \to 0-} \dfrac{f(c+h) - f(c)}{h}$ નું અસ્તિત્વ છે તથા તેઓ સમાન છે.

ધારો કે f એ $[a, b]$ પર વ્યાખ્યાયિત છે. f એ $[a, b]$ પર વિકલનીય છે એનો અર્થ છે કે,

(1) f એ (a, b) પર વિકલનીય છે.

(2) $\lim\limits_{h \to 0+} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ નું અસ્તિત્વ છે.

આપણે f એ $x = a$ આગળ જમણી બાજુથી વિકલનીય છે તેમ કહીશું અને આ લક્ષને $f'(a+)$ લખીશું.

(3) $\lim\limits_{h \to 0-} \dfrac{f(b+h) - f(b)}{h}$ નું અસ્તિત્વ છે.

આપણે f એ $x = b$ આગળ ડાબી બાજુથી વિકલનીય છે તેમ કહીશું અને આ લક્ષને $f'(b-)$ વડે દર્શાવીશું.

આપણે નીચેના કાર્યનિયમો અને પ્રમાણિત રૂપો સ્વીકારી લઈશું.

જો f અને g એ x આગળ વિકલનીય હોય, તો

(1) $f \pm g$ એ x આગળ વિકલનીય છે અને $\frac{d}{dx}(f(x) \pm g(x)) = \frac{d}{dx}f(x) \pm \frac{d}{dx}g(x)$

(2) $f \times g$ એ x આગળ વિકલનીય છે અને $\frac{d}{dx}f(x)\, g(x)) = f(x)\, \frac{d}{dx}g(x) + g(x)\, \frac{d}{dx}f(x)$

(3) જો $g(x) \neq 0$, તો $\frac{f}{g}$ એ x આગળ વિકલનીય છે અને $\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x)\frac{d}{dx}f(x) - f(x)\frac{d}{dx}g(x)}{[g(x)]^2}$

(4) $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$ $\qquad n \in \mathbf{R}, x \in \mathbf{R}^+$

(5) $\frac{d}{dx}sinx = cosx$ $\qquad x \in \mathbf{R}$

(6) $\frac{d}{dx}cosx = -sinx$ $\qquad x \in \mathbf{R}$

(7) $\frac{d}{dx}tanx = sec^2x$ $\qquad x \in \mathbf{R} - \left\{(2k-1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$

(8) $\frac{d}{dx}secx = secx\ tanx$ $\qquad x \in \mathbf{R} - \left\{(2k-1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$

(9) $\frac{d}{dx}cotx = -cosec^2x$ $\qquad x \in \mathbf{R} - \{k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$

(10) $\frac{d}{dx}cosecx = -cosecx\ cotx$ $\qquad x \in \mathbf{R} - \{k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$

હવે આપણે નીચેનું પ્રમેય સાબિત કરીશું.

પ્રમેય 5.2 : જો f એ $x = c$ આગળ વિકલનીય હોય તો તે $x = c$ આગળ સતત છે. $c \in (a, b)$

સાબિતી : ધારો કે f એ $x = c$ આગળ વિકલનીય છે.

$\therefore \lim_{x \to c}\frac{f(x) - f(c)}{x - c}$ નું અસ્તિત્વ છે.

હવે, $x \neq c$ માટે $f(x) - f(c) = \left(\frac{f(x) - f(c)}{x - c}\right)(x - c)$

$$\lim_{x \to c}(f(x) - f(c)) = \lim_{x \to c}\frac{f(x) - f(c)}{x - c}\ \lim_{x \to c}(x - c)$$

(કારણ કે f એ વિકલનીય હોવાથી બંને લક્ષનું અસ્તિત્વ છે.)

$$= f'(c) \cdot 0 = 0$$

($f'(c)$નું અસ્તિત્વ છે.)

$$\lim_{x \to c}f(x) = \lim_{x \to c}(f(x) - f(c) + f(c))$$

$$= \lim_{x \to c}(f(x) - f(c)) + \lim_{x \to c}f(c)$$

(બંને લક્ષનું અસ્તિત્વ છે.)

$$= 0 + f(c)$$

$$= f(c)$$

$\therefore$ f એ $x = c$ આગળ સતત છે.

પરંતુ સતત વિધેય વિકલનીય ન પણ હોય તે શક્ય છે.

$f(x) = |x|$ લઈએ.

$$\lim_{x \to 0+} |x| = \lim_{x \to 0+} x = 0, \quad \lim_{x \to 0-} |x| = \lim_{x \to 0-} (-x) = 0, \; f(0) = |0| = 0$$

$\therefore$ f એ $x = 0$ આગળ સતત છે.

પરંતુ, $\lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{|x|}{x} = \lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{x}{x} = 1$

$$\lim_{x \to 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0-} \frac{-x}{x} = -1$$

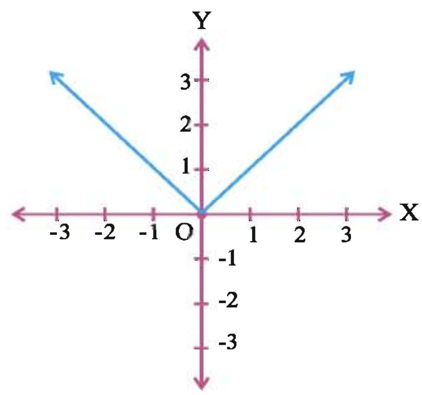
આમ, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ નું અસ્તિત્વ નથી.

$\therefore$ $|x|$ એ $x = 0$ આગળ સતત છે, પરંતુ $x = 0$ આગળ વિકલનીય નથી.

શું આપણે આ પરિસ્થિતિ સમજાવી શકીશું ?

આપણે જોયું કે $f'(c)$ એ વક્ર $y = f(x)$ ના $x = c$ આગળના સ્પર્શકનો ઢાળ છે.

$f(x) = |x|$ નો આલેખ જુઓ. તે (0, 0) ઉદ્ભવબિંદુવાળા બે કિરણોનો બનેલો છે અને (0, 0) આગળ તેને કોઈ સ્પર્શક મળતો નથી. તે કિરણો એક ખૂણો બનાવે છે.



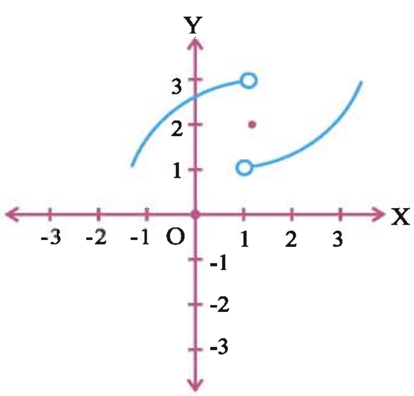
આકૃતિ 5.20

વિધેય ક્યારે વિકલનીય ન હોય ?

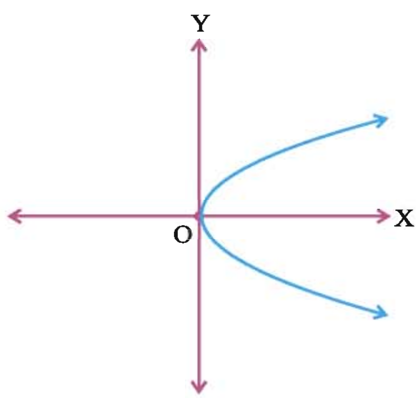
(1) વિધેય તે બિંદુએ સતત ન હોય. (આકૃતિ 5.21)

(2) $x = c$ આગળનો સ્પર્શક શિરોલંબ હોય. (આકૃતિ 5.22)

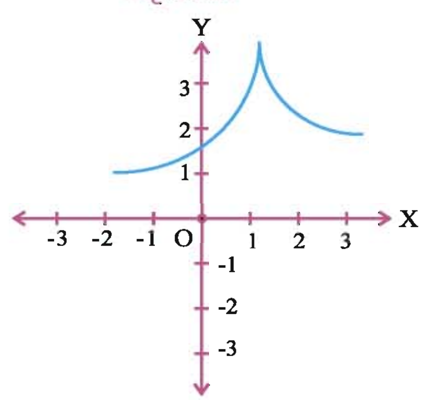
(3) $x = c$ આગળ સ્પર્શક ન હોય. (આકૃતિ 5.23)



આકૃતિ 5.21



આકૃતિ 5.22



આકૃતિ 5.23

સ્વાધ્યાય 5.2

1. સાબિત કરો કે $f(x) = |x - 1| + |x - 2| + |x - 3|$ એ R પર સતત છે પરંતુ ફક્ત $x = 1, 2$ અને 3 માટે વિકલનીય નથી.

2. સાબિત કરો કે $f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0, \end{cases}$ એ $x = 0$ આગળ સતત છે પરંતુ વિકલનીય નથી.

3. $f(x) = \begin{cases} x^2 sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$ સાબિત કરો કે $f'(0) = 0$ તથા તે પરથી દર્શાવો કે f એ $x = 0$ આગળ સતત છે.

4. $f'(x)$ શોધો : (1) $f(x) = sin^2x$, (2) $f(x) = tan^2x$, (3) $f(x) = x^4$, (4) $f(x) = cos^4x$

*

5.6 સાંકળનો નિયમ અથવા સંયોજિત વિધેયનું વિકલિત

આપણે જોઈ ગયા છીએ કે ગુણાકારના નિયમથી sin^2x અથવા tan^3x નો વિકલિત કેવી રીતે મેળવી શકાય અથવા ત્રિકોણમિતિનાં સૂત્રો જેવાં કે $sin2x = 2sinx\ cosx$, $cos2x = cos^2x - sin^2x$ નો ઉપયોગ ગુણાકારના નિયમ સાથે કરીને $sin2x$ અથવા $cos2x$નો વિકલિત મેળવી શકાય. પરંતુ આ તો સરળ છે.

આપણે $tan^5(x^2 - x + 1)$નો વિકલિત શોધવાનો હોય, તો તે ધારીએ તેટલું સરળ નથી.

ચાલો, આપણે એક ઉદાહરણ લઈએ.

ધારો કે $f(x) = (2x + 1)^4$

$$= 16x^4 + 32x^3 + 24x^2 + 8x + 1$$

$$f'(x) = 64x^3 + 96x^2 + 48x + 8$$

$$= 8(8x^3 + 12x^2 + 6x + 1)$$

$$= 8(2x + 1)^3$$

$$= 2 \cdot 4\,(2x + 1)^3$$

હવે, ધારો કે $g(t) = t^4$ તથા $t = h(x) = 2x + 1$. આથી $g(h(x)) = g(2x + 1) = (2x + 1)^4 = f(x)$

$\therefore\ f(x) = g(h(x))$

હવે, $g'(t) = 4t^3$ અને $\frac{dt}{dx} = h'(x) = 2$

વળી, $f'(x) = 8(2x + 1)^3 = 4(2x + 1)^3 \cdot 2$

$$= 4t^3 \cdot 2 = g'(t)\frac{dt}{dx} = g'(t)\ h'(x)$$

એટલે કે $\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}g(h(x)) = g'(t)\,h'(x) = g'(h(x))\ h'(x)$

અહીં આપણે $f(x)$ ને બે વિધેયો $g(t) = t^4$ અને $h(x) = 2x + 1$ ના સંયોજિત વિધેય તરીકે દર્શાવેલ છે કે જેથી તેમનો વિકલિત ખૂબ સરળ રીતે શોધી શકાય.

ચાલો આપણે તે નિયમ જાણીએ.

સાંકળનો નિયમ (Chain Rule) : $f : (a, b) \to (c, d)$ એ x આગળ અને $g : (c, d) \to (e, f)$ એ $f(x)$ આગળ વિકલનીય વિધેયો છે.

$$(gof)(x) = g(f(x)) \text{ તો } (gof)'(x) = g'(f(x))\ f'(x)$$

બીજી રીતે કહીએ તો ધારો કે $h(x) = (gof)(x) = g(f(x))$. અહીં $f(x) = t$ લેતાં,

$$h'(x) = (gof)'(x) = g'(f(x))\ f'(x) = g'(t)\ f'(x)$$

$$\therefore\ \frac{d}{dx}g(f(x)) = \frac{d}{dt}g(t)\frac{d}{dx}f(x), \text{ જ્યાં } t = f(x)$$

આમ, $\frac{d}{dx} g(f(x)) = \frac{du}{dt} \frac{dt}{dx}$. જ્યાં $u = g(t)$ અને $t = f(x)$.

તેથી $\frac{du}{dx} = \frac{du}{dt} \frac{dt}{dx}$, $u = g(t)$ અને $t = f(x)$ અને તેથી $u = g(f(x))$.

આમ જો u એ t નું વિધેય અને t એ x નું વિધેય હોય, તો u એ x નું સંયોજિત વિધેય છે.

અને $\frac{du}{dx} = \frac{du}{dt} \frac{dt}{dx}$

આ નિયમને સાંકળનો નિયમ કહે છે.

આ જ પ્રમાણે, $\frac{du}{dx} = \frac{du}{dt} \frac{dt}{ds} \frac{ds}{dv} \frac{dv}{dx}$

અહીં u એ t નું, t એ s નું, s એ v નું, v એ x નું વિધેય છે. આમ u એ x નું વિધેય છે.

ઉદાહરણ 26 : $f(x) = sin(tan\ x)$ હોય, તો $f'(x)$ શોધો.

ઉકેલ : $g(t) = sin\ t$ અને $t = h(x) = tanx$ લઈએ.

$\therefore \quad f(x) = (goh)(x) = g(h(x)) = g(tanx) = sin(tanx)$

$\therefore \quad f'(x) = g'(h(x))\ h'(x)$

$= g'(t)\ h'(x)$

$= cost \cdot h'(x)$

$= cos(tanx)\ sec^2x$ $\qquad (t = tanx)$

$\therefore \quad f'(x) = cos(tanx)\ sec^2x$

મહદ્અંશે આપણે મૌખિક ગણતરી કરીશું.

પ્રથમ બહારનું વિધેય પસંદ કરી તેનું વિકલન તેના ચલને સાપેક્ષ કરો અને જ્યાં સુધી ચલ સુધી ન પહોંચીએ ત્યાં સુધી બહારથી અંદર તરફ આ રીતે વિકલન કરતા જાઓ અને આ બધાં વિકલિતોનો ગુણાકાર કરો.

ધારો કે, $f(x) = sin(cos(2x + 3))$

$\therefore \quad f'(x) = \underbrace{cos\ (cos(2x + 3))}_{\text{સૌથી બહારના વિધેયનું વિકલિત તેના ચલ આગળ}} \quad \underbrace{(-sin(2x + 3))}_{\text{(અંદરની બાજુના } cos(2x+3)\text{નું વિકલિત}} \cdot \underbrace{2}_{\text{(અંતિમ વિધેય } 2x+3\text{નું વિકલિત}}$

$= -2sin\ (2x + 3)\ cos(cos(2x + 3))$ (પદોનું પુનર્ગઠન)

ધારો કે $f(x) = sin(tan\ (cos\ (x^2 - 3x + 51)))$

$\therefore \quad f'(x) = \underbrace{cos(tan\ (cos\ (x^2 - 3x + 51)))}_{\text{તબક્કો 1}}\ \underbrace{(sec^2\ (cos\ (x^2 - 3x + 51)))}_{\text{તબક્કો 2}}\ \underbrace{(-sin\ (x^2 - 3x + 51))}_{\text{તબક્કો 3}} \times \underbrace{(2x - 3)}_{\text{તબક્કો 4}}$

$= -(2x - 3)\ sin(x^2 - 3x + 51)\ sec^2\ (cos\ (x^2 - 3x + 51))\ cos(tan(cos(x^2 - 3x + 51)))$

(પદોની પુનઃ ગોઠવણી કરતાં)

ઉદાહરણ 27 : $y = sin^3x\ cos^5x$ તો, $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

ઉકેલ : $$\frac{dy}{dx} = sin^3x \frac{d}{dx} cos^5x + cos^5x \frac{d}{dx} sin^3x$$

$$= sin^3x \frac{d}{dx} (cosx)^5 + cos^5x \frac{d}{dx} (sinx)^3$$

$$= sin^3x \cdot 5cos^4x\ (-sinx) + cos^5x \cdot 3sin^2x\ cosx$$

$$= -5sin^4x\ cos^4x + 3sin^2x\ cos^6x$$

[નોંધ : sin^nx માં $sin^nx = (sinx)^n$ હોવાથી ઘાત એ 'બહાર'નું વિધેય છે.]

ઉદાહરણ 28 : $\frac{d}{dx} sin^3(x^2 - x + 1)$ શોધો.

ઉકેલ : $$\frac{d}{dx} sin^3(x^2 - x + 1) = \frac{d}{dx} [sin(x^2 - x + 1)]^3$$

$$= 3sin^2(x^2 - x + 1)\ cos(x^2 - x + 1)\ (2x - 1)$$

$$= 3(2x - 1)\ sin^2(x^2 - x + 1)\ cos(x^2 - x + 1)$$

ઉદાહરણ 29 : $\frac{d}{dx} \sqrt{sinx^3}$ શોધો.

ઉકેલ : $$\frac{d}{dx} \sqrt{sinx^3} = \frac{d}{dx} (sinx^3)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}(sinx^3)^{-\frac{1}{2}} \cdot cosx^3 \cdot 3x^2$$ ($\sqrt{\ }$ સૌથી બહારનું વિધેય)

$$= \frac{3}{2} \frac{x^2\ cosx^3}{\sqrt{sinx^3}}$$

(નોંધ : યાદ રાખો $\frac{d}{dx} \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$)

ઉદાહરણ 30 : $\frac{d}{dx} \sqrt[4]{sin^3x}$ શોધો.

ઉકેલ : $$\frac{d}{dx} \sqrt[4]{sin^3x} = \frac{d}{dx} [(sinx)^3]^{\frac{1}{4}} = \frac{d}{dx} (sinx)^{\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{3}{4} sin^{-\frac{1}{4}}x \cdot cosx$$

$$= \frac{3cosx}{4\sqrt[4]{sinx}}$$

સ્વાધ્યાય 5.3

યોગ્ય પ્રદેશ પર વ્યાખ્યાયિત નીચે આપેલાં વિધેયોનાં વિકલિત મેળવો :

1. $sin^3(2x + 3)$ **2.** tan^3x **3.** $sin^3x\ cos^5x$

4. $cos(sin(sec(2x + 3)))$ **5.** $sec(cot(x^3 - x + 2))$

6. નિત્યસમ $sin3x = 3sinx - 4sin^3x$ નું વિકલન કરો. તમે શું નિરીક્ષણ કર્યું ?

7. $\frac{d}{dx}(2x + 3)^m (3x + 2)^n$ શોધો.

8. $\frac{d}{dx}(sin^n x - cos^n x)$ શોધો.

9. $\frac{d}{dx} sin^3x \ cos^3x$ શોધો.

10. $\frac{d}{dx} sin^3(4x - 1) \ cos^3(2x + 3)$ શોધો.

*

5.7 પ્રતિવિધેયોનું વિકલિત

આપણે પ્રકરણ 2માં ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેયોનો અભ્યાસ કર્યો. હવે આપણે તેમનું વિકલિત મેળવીશું.

પ્રતિવિધેયોનું વિકલિત : ધારો કે $f : (a, b) \to (c, d)$ એક-એક અને વ્યાપ્ત વિધેય છે. તેથી તેના પ્રતિવિધેયનું અસ્તિત્વ છે. તેનું પ્રતિવિધેય, $g : (c, d) \to (a, b)$ છે.

જો $y = f(x)$ તો $x = g(y) = f^{-1}(y)$નું પાલન થાય છે.

આપણે સ્વીકારીશું કે $f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$ અથવા $f'(x) = \frac{1}{\frac{d}{dy}f^{-1}(y)}$

$\therefore [f^{-1}(y)]' = \frac{1}{f'(x)}$

$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

કેટલાંક પ્રમાણિત રૂપો :

(1) $\frac{d}{dx} sin^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad |x| < 1$

જો $y = sin^{-1}x$. તો $x = siny$, $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ $\qquad$ ($y \neq \pm\frac{\pi}{2}$ કારણ કે $x \neq \pm 1$)

$\frac{dx}{dy} = cosy = \sqrt{1-sin^2y}$ $\qquad$ ($cosy > 0$ કારણકે $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$)

$= \sqrt{1-x^2}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\therefore \frac{d}{dx} sin^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(2) $\frac{d}{dx} cos^{-1}x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad |x| < 1$

જો $y = cos^{-1}x$. તો $x = cosy$, $y \in (0, \pi)$ $\qquad$ ($y \neq 0, \pi$ કારણકે $x \neq \pm 1$)

$\frac{dx}{dy} = -siny = -\sqrt{1-cos^2y}$ $\qquad$ ($siny > 0$ કારણકે $y \in (0, \pi)$)

$= -\sqrt{1-x^2}$

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\therefore \quad \frac{d}{dx} cos^{-1}x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

અથવા બીજી રીતે

$sin^{-1}x + cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}$

$\therefore \quad \frac{d}{dx} sin^{-1}x + \frac{d}{dx} cos^{-1}x = \frac{d}{dx}\frac{\pi}{2} = 0$

$\therefore \quad \frac{d}{dx} cos^{-1}x = -\frac{d}{dx} sin^{-1}x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad |x| < 1$

(3) $\frac{d}{dx} tan^{-1}x = \frac{1}{1+x^2} \qquad x \in R$

જો $y = tan^{-1}x$ તો $x = tany, \quad y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore \quad \frac{dx}{dy} = sec^2y$

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{sec^2y} = \frac{1}{1+tan^2y} = \frac{1}{1+x^2}$

$\therefore \quad \frac{d}{dx} tan^{-1}x = \frac{1}{1+x^2}$

(4) $\frac{d}{dx} cot^{-1}x = -\frac{1}{1+x^2} \qquad x \in R$

આપણે (3) પ્રમાણે સાબિત કરી શકીએ **અથવા** $tan^{-1}x + cot^{-1}x = \frac{\pi}{2}$ લઈ પરિણામ મેળવી શકીએ.

(5) $\frac{d}{dx} sec^{-1}x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \qquad |x| > 1$

જો $y = sec^{-1}x$ તો, $x = secy, \quad y \in (0, \pi) - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ **(કેમ $y \neq 0, y \neq \pi$?)**

$\therefore \quad \frac{dx}{dy} = secy \; tany$

હવે, $secy = x, \quad y \in (0, \pi) - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

આપણને બે વિકલ્પ મળે. $y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ અથવા $y \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

(i) $y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore \quad x = secy > 0$ તથા $tany > 0$ હોવાથી $tany = \sqrt{x^2-1}$

$\therefore \quad \frac{dx}{dy} = secy \; tany = x\sqrt{x^2-1} = |x|\sqrt{x^2-1}$ કારણ કે $x > 0$ હોવાથી $|x| = x$

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

(ii) $y \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

$\therefore \quad x = secy < 0$. તેથી $|x| = -x$

$tany < 0$ હોવાથી $tany = -\sqrt{x^2-1}$,

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{secy\ tany} = \frac{1}{-x\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$ ($|x| = -x$ કારણ કે $x < 0$)

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \qquad |x| > 1$

(6) તે જ પ્રમાણે આપણે, $\frac{d}{dx} cosec^{-1}x = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$ સાબિત કરી શકીએ, $|x| > 1$

અથવા $sec^{-1}x + cosec^{-1}x = \frac{\pi}{2}$ હોવાથી,

$\frac{d}{dx} sec^{-1}x + \frac{d}{dx} cosec^{-1}x = \frac{d}{dx}\frac{\pi}{2} = 0$

$\frac{d}{dx} cosec^{-1}x = -\frac{d}{dx} sec^{-1}x = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$ $\quad |x| > 1$

આપણે આ પ્રકરણમાં e નો પરિચય મેળવ્યો છે. $2 < e < 3$, e એ પ્રાકૃતિક લઘુગણકનો આધાર છે.

$\lim\limits_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = 1$ આપણે સ્વીકારી લઈશું.

આપણે જાણીએ છીએ કે $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$ **(i)**

ધારો કે $\log_e(1+x) = h$. તેથી $x = e^h - 1$.

$\therefore$ (i) નો ઉપયોગ કરતાં,

$\lim\limits_{h\to 0} \frac{h}{e^h-1} = 1$ $\quad (x \to 0, h = \log(1+x) \to 0)$

$\therefore \quad \lim\limits_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = 1$

(7) $\frac{d}{dx} e^x = e^x$ $\quad x \in R$

$\therefore \quad \frac{d}{dx} e^x = \lim\limits_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \lim\limits_{h\to 0} e^x \lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{e^h-1}{h}\right) = e^x \cdot 1 = e^x$

$\therefore \quad \frac{d}{dx} e^x = e^x$

(8) $\frac{d}{dx} a^x = a^x \log_e a$ $\quad a > 0, x \in R$

આપણે જાણીએ છીએ કે, $a = e^{\log_e a}$

$\therefore \quad a^x = (e^{\log_e a})^x = e^{x\log_e a}$

$a^x = e^t$. અહીં, $t = x\log_e a$

સાંકળ નિયમ પ્રમાણે $\frac{d}{dx} a^x = \frac{d}{dt} e^t \cdot \frac{dt}{dx}$

$= e^t \cdot \log_e a$ $\quad (\frac{d}{dx} kx = k)$

$= a^x \log_e a$

$\therefore \quad \frac{d}{dx} a^x = a^x \log_e a$

નોંધ : સાંકળના નિયમના ઉપયોગથી $\frac{d}{dx} e^{\sin x} = e^{\sin x} \cos x$.

તે $e^{\sin x} = \exp(\sin x)$ પ્રમાણે છે. **(વાંચીશું એક્સ્પોનેન્શિયલ ($\sin x$))**

સૌથી બહારનું વિધેય exp. છે. $\frac{d}{dx}(\exp x) = \frac{d}{dx} e^x = e^x = \exp x$

$\therefore \quad \frac{d}{dx} e^{\sin x} = \frac{d}{dx} \exp(\sin x) = \exp(\sin x) \frac{d}{dx} \sin x = e^{\sin x} \cos x$

$$\frac{d}{dx} e^{\tan 2x} = e^{\tan 2x} \frac{d}{dx} \tan 2x$$
$$= 2e^{\tan 2x} \sec^2 2x$$

(9) $\frac{d}{dx} \log_e x = \frac{1}{x}$ $\qquad x \in \mathbf{R}^+$

ધારો કે, $y = \log_e x$

$\therefore \quad x = e^y$

$\therefore \quad \frac{dx}{dy} = e^y$

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$

$\therefore \quad \frac{d}{dx} \log_e x = \frac{1}{x}$

ઉદાહરણ 31 : $\frac{d}{dx} \tan^{-1} \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2}$ શોધો. $\qquad |x| < \frac{1}{\sqrt{3}}$

ઉકેલ : ધારોકે $\theta = \tan^{-1}x$, $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. આથી $x = \tan\theta$

$$|x| < \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$\Rightarrow \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) < \tan\theta < \tan\frac{\pi}{6}$$
$$\Rightarrow -\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{6}$$

($\tan$ એ $\left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right) \subset \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ માં વધતું વિધેય છે.)

$$\Rightarrow -\frac{\pi}{2} < 3\theta < \frac{\pi}{2}$$

હવે, $y = \tan^{-1} \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} = \tan^{-1}\left(\frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta}\right)$

$= \tan^{-1}(\tan 3\theta)$ $\qquad \left(3\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right)$

$= 3\theta$

$= 3\tan^{-1}x$

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{3}{1 + x^2}$

ઉદાહરણ 32 : $\frac{d}{dx} sin^{-1} 2x\sqrt{1-x^2}$ શોધો. $|x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$

ઉકેલ : ધારો કે $\theta = sin^{-1}x$. $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$. તેથી, $x = sin\theta$

$|x| < \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore \quad sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) < sin\theta < sin\frac{\pi}{4}$

$\therefore \quad -\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}$ $\left(\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)\right.$ માં sin એ $\left.\uparrow\right)$

$\therefore \quad -\frac{\pi}{2} < 2\theta < \frac{\pi}{2}$

$\therefore \quad y = sin^{-1} 2x\sqrt{1-x^2}$

$= sin^{-1}(2sin\theta\ cos\theta)$ $\left(\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-sin^2\theta} = cos\theta\right.$ કારણ કે $\left.\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right)$

$= sin^{-1}(sin2\theta)$

$= 2\theta$ $\left(2\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right)$

$\therefore \quad y = 2sin^{-1}x$

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$

ઉદાહરણ 33 : $\frac{d}{dx} sec^{-1} \frac{1}{2x^2-1}$ શોધો. $0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$

ઉકેલ : ધારો કે $\theta = cos^{-1}x$. $\theta \in (0, \pi)$. તેથી, $x = cos\theta$ (કેમ $\theta \ne 0$ અથવા π ?)

$\therefore \quad y = sec^{-1}\frac{1}{2x^2-1} = sec^{-1}\frac{1}{2cos^2\theta-1} = sec^{-1}\frac{1}{cos\,2\theta}$

$\therefore \quad y = sec^{-1}(sec2\theta)$

હવે, $0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow cos\frac{\pi}{2} < cos\theta < cos\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$ $(cos \downarrow)$

$\Rightarrow \frac{\pi}{2} < 2\theta < \pi$

$\therefore \quad y = sec^{-1}(sec2\theta) = 2\theta = 2cos^{-1}x$ $\left(2\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \subset [0, \pi]\right)$

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-2}{\sqrt{1-x^2}}$

ઉદાહરણ 34 : (1) $\frac{1}{2} < x < 1$ (2) $0 < x < \frac{1}{2}$ માટે $\frac{d}{dx} cos^{-1}(4x^3 - 3x)$ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે $\theta = cos^{-1}x$. $0 < \theta < \pi$. તેથી, $x = cos\theta$ $(x \ne \pm 1)$

$\therefore \quad y = cos^{-1}(4x^3 - 3x) = cos^{-1}(4cos^3\theta - 3cos\theta)$

$y = cos^{-1}(cos3\theta)$

(1) $\frac{1}{2} < x < 1 \Rightarrow cos\frac{\pi}{3} < cos\theta < cos0$

$\Rightarrow 0 < \theta < \frac{\pi}{3}$ $(cos \downarrow)$

$\Rightarrow 0 < 3\theta < \pi$

$\therefore$ $y = cos^{-1}(cos3\theta) = 3\theta = 3cos^{-1}x$ $(3\theta \in (0, \pi))$

$\therefore$ $\frac{dy}{dx} = \frac{-3}{\sqrt{1-x^2}}$

(2) $0 < x < \frac{1}{2} \Rightarrow cos\frac{\pi}{2} < cos\theta < cos\frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow \frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{2}$ $(cos \downarrow)$

$\Rightarrow \pi < 3\theta < \frac{3\pi}{2}$

$\Rightarrow 0 < 3\theta - \pi < \frac{\pi}{2}$

$\therefore$ $y = cos^{-1}(cos3\theta) = cos^{-1}(-cos(\pi - 3\theta))$

$= \pi - cos^{-1}(cos(\pi - 3\theta))$

$= \pi - cos^{-1}(cos(3\theta - \pi))$

$= \pi - (3\theta - \pi)$ $\left((3\theta - \pi) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \subset [0, \pi]\right)$

$= 2\pi - 3\theta$

$= 2\pi - 3cos^{-1}x$

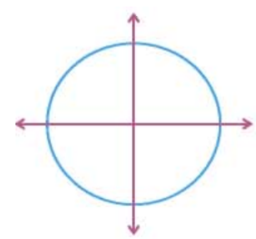
$\therefore$ $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}$

5.8 ગૂઢ વિધેયનું વિકલિત

કેટલીક વખત ઉપયોગમાં $f(x, y) = 0$ જેવાં સમીકરણ મળી જાય છે, કે જેમાં આપણે y ને x ના વિધેય તરીકે મેળવી શકીએ અથવા ન પણ મેળવી શકીએ. $y = sin^2x$ પ્રકારનું વિધેય એ x નું વિધેય છે, પરંતુ $3y - sin2x = 0$ પરથી $y = \frac{1}{3}sin2x$ મળશે.

આ ઉદાહરણ y એ x ના ગૂઢ વિધેયનું છે.

વર્તુળ $x^2 + y^2 = 1$ લો.



આકૃતિ 5.24

આકૃતિ 5.24 એ વિધેયનો આલેખ નથી. પરંતુ $x^2 + y^2 - 1 = 0$ સંબંધ પરથી વ્યાખ્યાયિત થતાં બે ગૂઢ વિધેયો $y = \sqrt{1-x^2}$ અને $y = -\sqrt{1-x^2}$ ના આલેખ એ એકમ વર્તુળ બનાવે છે.

આમ, આપણને બે **ગૂઢ વિધેય (Implict function)** મળે છે. જુઓ કે કોઈ પણ શિરોલંબ રેખા, આ વર્તુળને બે બિંદુમાં મળે છે. તે X-અક્ષથી બનતા દરેક અર્ધતલના અર્ધવર્તુળોને ફક્ત એક બિંદુમાં મળે છે. તેથી જ દરેક અર્ધવર્તુળ એ ગૂઢ વિધેયનો આલેખ છે.

પરંતુ કેટલાંક સમીકરણોનો ઉકેલ મેળવવો સરળ નથી.

$x^3 + y^3 = 3axy$ એ આવું જ સમીકરણ છે. આવા y ના ગૂઢ વિધેયનું વિકલિત કેવી રીતે શોધીશું ? y એ xનું ગૂઢ વિધેય છે તેમ ધારીને સાંકળ નિયમનો ઉપયોગ કરી આવા સમીકરણ (સંબંધ)નું વિકલિત મેળવીશું.

ઉદાહરણ તરીકે $\frac{d}{dx}x^4 = 4x^3$

જ્યારે, $\frac{d}{dx}y^4 = \frac{d}{dy}\ y^4\ \frac{dy}{dx}\ = 4y^3\frac{dy}{dx}$

તેથી, જ્યારે કોઈ પદમાં ચલ y હોય અને તેનું x વિશે વિકલન કરવાનું હોય, તો આપણે વિકલનના સામાન્ય નિયમોનો ઉપયોગ કરીશું અને મળતા પરિણામને $\frac{dy}{dx}$ વડે ગુણીશું.

ચાલો આપણે કેટલાંક ઉદાહરણો લઈએ.

ઉદાહરણ 35 : $x + y = sinxy$ તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

ઉકેલ : સમીકરણનું વિકલન કરતાં,

$$\frac{d}{dx}x + \frac{d}{dx}\ y\ = \frac{d}{dx}\ sinxy$$

$$\therefore \quad 1 + \frac{dy}{dx}\ = cosxy\ \frac{d}{dx}\ (xy) \qquad \text{(સાંકળનો નિયમ)}$$

$$= cosxy\ \left(x\frac{d}{dx}y + y \cdot 1\right) \qquad \text{(ગુણાકારનો નિયમ)}$$

$$\therefore \quad 1 + \frac{dy}{dx}\ = x\,cosxy\ \frac{dy}{dx}\ + ycos\ xy$$

$$\therefore \quad (1 - xcos\ xy)\ \frac{dy}{dx}\ = y\,cosxy - 1$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}\ = \frac{ycosxy\ -1}{1-xcosxy}$$

ઉદાહરણ 36 : $x^3 + y^3 = 3axy$, તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

ઉકેલ : $3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 3a\left(x\frac{dy}{dx} + y \cdot 1\right)$

$$\therefore \quad (y^2 - ax)\frac{dy}{dx} = ay - x^2$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{ay-x^2}{y^2-ax}$$

ઉદાહરણ 37 : $ax^2 + 2hxy + by^2 = 100$, તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

ઉકેલ : $2ax + 2h\left(x\frac{dy}{dx} + y\right) + 2by\frac{dy}{dx} = 0$

$$\therefore \quad (hx + by)\frac{dy}{dx} = -(ax + hy)$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\left(\frac{ax+hy}{hx+by}\right)$$

ઉદાહરણ 38 : $sin^2x + sin^2y = 1$, તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

ઉકેલ : $2sinx\ cosx + 2siny\ cosy\frac{dy}{dx} = 0$

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-sin\, 2x}{sin\, 2y}$

અથવા

$sin^2y = 1 - sin^2x = cos^2x$

$\therefore \quad siny = \pm\, cosx$ (બે વિધેયો)

$\therefore \quad cosy \frac{dy}{dx} = \mp\, sinx$

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \pm \frac{sinx}{cosy}$

નોંધ : જો $sin^2x + sin^2y = 2$ હોય તો $sin^2x = sin^2y = 1$ થાય કારણ કે $|sinx| \le 1, |siny| \le 1$. કોઈ વિધેય ના મળે. $sin^2x + sin^2y = 3$ હોય તો $\frac{dy}{dx} = \frac{-sin\, 2x}{sin\, 2y}$ લખી શકાય ?

ના. કારણ કે $sin^2x + sin^2y \le 2$. ગૂઢ વિધેય મળે જ નહીં. આપણે ધારણામાં ગૂઢ વિધેય મળે તે સ્વીકારીને વિકલન કરવાનું છે. પરંતુ આવી પરિસ્થિતિમાં ગૂઢ વિધેય જ ન મળે તે શક્ય છે.

સ્વાધ્યાય 5.4

$\frac{dy}{dx}$ શોધો : (1 થી 10)

1. $x^2 + y^2 = 1$ **2.** $x + sinx = siny$ **3.** $sin(x + y) = x - y$

4. $2x^2 + 3xy + y^2 = 1$ **5.** $sinx + siny = tanxy$ **6.** $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$

7. $y^2 = 10x$ **8.** $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$ **9.** $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 25 = 0$

10. $sinx = siny$

વિકલિત શોધો : (11 થી 16)

11. $y = sin^{-1}(3x - 4x^3), \quad 0 < x < \frac{1}{2}$ **12.** $y = tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}, \quad x \ne \pm 1$

13. $y = cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}$ **14.** $y = sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$

15. $y = tan^{-1}\frac{3x - x^3}{1 - 3x^2}, \quad |x| > \frac{1}{\sqrt{3}}$ **16.** $y = sin^{-1} 2x\sqrt{1-x^2}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} < x < 1$

*

5.9 પ્રચલ વિધેયનું વિકલન

કેટલીક વખત x અને y એ કોઈ અન્ય ચલનાં વિધેય હોય છે, માનો કે t નાં. તે ચલ t ને **પ્રચલ** કહે છે.

ધારો કે $x = f(t) \quad y = g(t)$

ધારો કે $t = f^{-1}(x)$ મળે છે અને તેને $y = g(t)$માં મૂકતાં $y = g(f^{-1}(x))$ મળે છે, તેથી y એ xનું વિધેય છે.

પરંતુ આ પ્રમાણે ઉકેલ મેળવીને વિકલિત મેળવવાની ક્રિયા મુશ્કેલ છે. આપણે નીચે આપેલા નિયમને અનુસરીશું.

પ્રચલ વિધેયના વિકલિતનો નિયમ :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)} \quad \text{જ્યાં } f'(t) \neq 0$$

ઉદાહરણ 39 : જો $x = a\cos\theta$, $y = b\sin\theta$, તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

ઉકેલ : $\frac{dx}{d\theta} = -a\sin\theta$, $\frac{dy}{d\theta} = b\cos\theta$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = -\frac{b\cos\theta}{a\sin\theta} = \frac{-b}{a}\cot\theta$$

વળી, $\frac{dy}{dx} = -\frac{b\cos\theta}{a\sin\theta} = \frac{-b}{a}\left(\frac{\frac{x}{a}}{\frac{y}{b}}\right) = -\frac{b^2x}{a^2y}$

અથવા $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$$\therefore \quad \frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}$$

ઉદાહરણ 40 : જો $x = at^2$, $y = 2at$, તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

ઉકેલ : $\frac{dx}{dt} = 2at$, $\frac{dy}{dt} = 2a$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2a}{2at} = \frac{1}{t} \quad (t \neq 0)$$

ઉદાહરણ 41 : જો $x = a\sin^3\theta$, $y = b\cos^3\theta$, તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

ઉકેલ : $\frac{dx}{d\theta} = 3a\sin^2\theta\,\cos\theta$, $\frac{dy}{d\theta} = 3b\cos^2\theta\,(-\sin\theta)$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-3b\cos^2\theta\sin\theta}{3a\sin^2\theta\cos\theta} = \frac{-b}{a}\cot\theta$$

$\cot^3\theta = \frac{\cos^3\theta}{\sin^3\theta} = \frac{ay}{bx}$. તેથી $\cot\theta = \left(\frac{ay}{bx}\right)^{\frac{1}{3}}$.

તેથી $\frac{dy}{dx} = \frac{-b}{a}\left(\frac{ay}{bx}\right)^{\frac{1}{3}}$

$$= -\frac{b^{\frac{2}{3}}\,y^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}\,x^{\frac{1}{3}}}$$

અથવા $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$\therefore \quad \frac{2}{3}\frac{x^{-\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}} + \frac{2}{3}\frac{y^{-\frac{1}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}}\frac{dy}{dx} = 0$

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{b^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}} x^{\frac{1}{3}}}$

સ્વાધ્યાય 5.5

$\frac{dy}{dx}$ શોધો : (y એ xના વિધેય તરીકે વ્યાખ્યાયિત છે અને $\frac{dx}{dt}$ અથવા $\frac{dx}{d\theta} \neq 0$) (1 થી 6)

1. $x = a\sec\theta, \ y = b\tan\theta \qquad \theta \in R - \left[\left\{(2k-1)\frac{\pi}{2} \mid k \in Z\right\} \cup \{k\pi \mid k \in Z\}\right]$
2. $x = \cos\theta - \cos2\theta \qquad y = \sin\theta - \sin2\theta \qquad \theta \in R - \{k\pi \mid k \in Z\}, \cos\theta \neq \frac{1}{4}$
3. $x = a(\theta - \sin\theta), \qquad y = a(1 - \cos\theta)$
4. $x = a(\cos t + \log \tan\frac{t}{2}), \qquad y = a\sin t$
5. $x = a(\cos\theta + \theta\sin\theta), \qquad y = a(\sin\theta - \theta\cos\theta)$
6. $x = \frac{a}{t^2}, \ y = bt$
7. જો $x = \sqrt{a^{\sin^{-1}t}}, \quad y = \sqrt{a^{\cos^{-1}t}}$, તો સાબિત કરો કે, $\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x} \qquad |t| < 1$

*

5.10 લઘુગણકીય વિકલન

કેટલીક વખત આપણે કેટલાંક વિધેયોના ગુણાકારનું અથવા જટિલ ગુણાકાર અથવા $[f(x)]^{g(x)}$ પ્રકારનાં વિધેયોનું વિકલિત મેળવવાનું હોય છે.

આવા કિસ્સાઓમાં લઘુગણક લેતાં આપણને $\frac{dy}{dx}$ શોધવામાં સુગમતા રહે છે.

ઉદાહરણ 42 : જો $y = \sqrt{\frac{(2x+3)(3x-4)}{(4x+9)(x-8)}}$ તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

ઉકેલ : $\log y = \frac{1}{2}[\log(2x+3) + \log(3x-4) - \log(4x+9) - \log(x-8)]$

$\therefore \quad \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{2x+3} + \frac{3}{3x-4} - \frac{4}{4x+9} - \frac{1}{x-8}\right]$

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{2}\left[\frac{2}{2x+3} + \frac{3}{3x-4} - \frac{4}{4x+9} - \frac{1}{x-8}\right]$

ઉદાહરણ 43 : જો $y = x^{\sin x}$ હોય, તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

ઉકેલ : $\log y = \sin x \log x$

$\therefore \quad \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \sin x \cdot \frac{1}{x} + \cos x \log x$

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \left[\frac{\sin x}{x} + \cos x \log x\right] y$

ઉદાહરણ 44 : જો $x^y + y^x + a^x + x^a = 1$ તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે $u = x^y$, $v = y^x$, $w = a^x + x^a$

હવે, $\log u = y \log x$

$$\therefore \quad \frac{1}{u}\frac{du}{dx} = \frac{y}{x} + \log x \frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \quad \frac{du}{dx} = \left(\frac{y}{x} + \log x \frac{dy}{dx}\right) x^y$$

હવે, $v = y^x$

$$\therefore \quad \log v = x \log y$$

$$\therefore \quad \frac{1}{v}\frac{dv}{dx} = \frac{x}{y}\frac{dy}{dx} + \log y$$

$$\therefore \quad \frac{dv}{dx} = \left(\frac{x}{y}\frac{dy}{dx} + \log y\right) y^x$$

હવે, $u + v + w = 1$

$$\therefore \quad \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dx} = 0$$

$$\left(\frac{y}{x} + \log x \frac{dy}{dx}\right) x^y + \left(\frac{x}{y}\frac{dy}{dx} + \log y\right) y^x + a^x \log_e a + ax^{a-1} = 0$$

$$\left(x^y \log x + \frac{x}{y} y^x\right)\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{x^y \cdot y}{x} + y^x \log y + a^x \log a + ax^{a-1}\right)$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-(yx^{y-1} + y^x \log y + a^x \log_e a + ax^{a-1})}{xy^{x-1} + x^y \log x}$$

ઉદાહરણ 45 : જો $y = (sinx)^x + sinx^x$ તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે $u = (sinx)^x = e^{x \log sinx}$

કારણ કે $a = e^{\log_e a}$ હોવાથી, $sinx = e^{\log sinx}$

$$\therefore \quad \frac{du}{dx} = e^{x \log sinx}\frac{d}{dx}(x \log sinx)$$

$$= e^{x \log sinx}\left(1 \cdot \log sinx + \frac{xcosx}{sinx}\right)$$

$$= (sinx)^x (\log sinx + xcot\, x)$$

$$\frac{d}{dx} sinx^x = cosx^x \frac{d}{dx} x^x$$

$$= cosx^x \frac{d}{dx} e^{x \log x}$$

$$= cosx^x \cdot e^{x \log x}\left(x \frac{1}{x} + \log x\right)$$

$$= x^x\, cosx^x (1 + \log x)$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = (sinx)^x (\log sinx + xcot\, x) + x^x\, cosx^x (1 + \log x)$$

(**નોંધ :** $a = e^{\log_e a}$ ના ઉપયોગથી સરળતા દેખાય ત્યાં લઘુગણક લેવાનું ટાળી શકાય.)

સ્વાધ્યાય 5.6

$\frac{dy}{dx}$ શોધો : (1 થી 14)

1. $y = \left(x+\frac{1}{x}\right)^x + \left(x+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$

2. $y = cosx^x + sinx^x$

3. $y = \sqrt[3]{\frac{(2x+1)^3 (4x+3)^5}{(7x-1)^6}}$

4. $y = (\log x)^{cosx}$

5. $y = (x + 1)^2 (x + 2)^3 (x + 3)^4$

6. $y = (\log x)^x + \log x^x$

7. $y = x^{x \sin x} + (\sin x)^x$

8. $y = x^{\left(x+\frac{1}{x}\right)}$

9. $y = (\sin x)^x + \left(\frac{1}{x}\right)^{cosx}$

10. $y = 3^{sinx} + 4^{cosx}$

11. $y^x = x^y$

12. $xy = e^{x-y}$

13. $x^y y^x = 1$

14. $y = (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)(1 + x^8)$

15. જો $y = (x^2 - 2x + 3)(x^2 - 3x + 15)$, તો

(1) ગુણાકારના નિયમથી

(2) ગુણાકાર કરી બહુપદીના નિયમથી

(3) લઘુગણકીય વિકલનથી

$\frac{dy}{dx}$ શોધો અને તેમની સરખામણી કરો.

*

5.11 દ્વિતીય વિકલિત

જો f એ (a, b) પરનું x નું વિકલનીય વિધેય હોય અને $f'(x)$ પણ (a, b) પર x નું વિકલનીય વિધેય હોય, તો $f'(x)$ નાં વિકલિતને f નો દ્વિતીય વિકલિત કહે છે તથા તેને $f''(x)$ અથવા $\frac{d^2y}{dx^2}$ અથવા y_2 વડે દર્શાવાય છે, જ્યાં $y = f(x)$ છે.

આમ, $\frac{d}{dx}f'(x) = f''(x)$ અથવા $\frac{d^2y}{dx^2}$ અથવા y_2. અહીં y_1 એ $f'(x)$ અથવા $\frac{dy}{dx}$ દર્શાવે છે.

આપણે નીચે પ્રમાણે સાંકળના નિયમનો ઉપયોગ કરીશું :

$$\frac{d}{dx} y^2 = \frac{d}{dy} y^2 \frac{dy}{dx} = 2y \frac{dy}{dx} = 2yy_1$$

$$\frac{d}{dx} {y_1}^2 = \frac{d}{dy_1} {y_1}^2 \frac{d}{dx} y_1 = 2y_1 \frac{dy_1}{dx} = 2y_1y_2$$

યાદ રાખો કે $\frac{d}{dx} y^2 = 2yy_1$, $\frac{d}{dx} {y_1}^2 = 2y_1y_2$

ઉદાહરણ 46 : જો $y = acosx + bsinx$, તો સાબિત કરો કે $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

ઉકેલ : $y = acosx + bsinx$

$\therefore \quad y_1 = -asinx + bcosx$

$\therefore \quad y_2 = -acosx - bsinx = -y$

$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

ઉદાહરણ 47 : $y = ae^{4x} + be^{5x}$ તો સાબિત કરો કે $y_2 - 9y_1 + 20y = 0$

ઉકેલ : $y = ae^{4x} + be^{5x}$

$\therefore \quad y_1 = 4ae^{4x} + 5be^{5x}$

$\therefore \quad y_2 = 16ae^{4x} + 25be^{5x}$

$\therefore \quad y_2 - 9y_1 + 20y = [(16ae^{4x} + 25be^{5x}) - 9(4ae^{4x} + 5be^{5x}) + 20(ae^{4x} + be^{5x})]$

$= (16 - 36 + 20)\, ae^{4x} + (25 - 45 + 20)\, be^{5x} = 0$

$\therefore \quad y_2 - 9y_1 + 20y = 0$

ઉદાહરણ 48 : $y = x^4 + sin^3x$, તો $\frac{d^2y}{dx^2}$ શોધો.

ઉકેલ : $y = x^4 + sin^3x$

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = 4x^3 + 3sin^2x\ cosx$

$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 12x^2 + 6sinx\ cos^2x + 3sin^2x\ (-sinx)$ $\quad \left(\frac{d}{dx} sin^2x = 2sinx\ cosx\right)$

$= 12x^2 + 6sinx\ cos^2x - 3sin^3x$

ઉદાહરણ 49 : $y = \log(\log x)$, તો $\frac{d^2y}{dx^2}$ શોધો.

ઉકેલ : $y = \log(\log x)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\log(\log x) = \frac{1}{\log x}\frac{1}{x} = \frac{1}{x\log x}$

$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2}\log(\log x) = \frac{(x\log x)\, 0 - 1\cdot(1\log x + x\cdot\frac{1}{x})}{(x\log x)^2}$

$= \frac{-(1+\log x)}{(x\log x)^2}$

ઉદાહરણ 50 : જો $y = acos(\log x) + bsin(\log x)$, તો સાબિત કરો કે $x^2y_2 + xy_1 + y = 0$.

ઉકેલ : $y = acos(\log x) + bsin(\log x)$

$\therefore \quad y_1 = \frac{-asin(\log x)}{x} + \frac{bcos(\log x)}{x}$

$\therefore \quad xy_1 = -asin(\log x) + bcos(\log x)$

$\therefore \quad \frac{d}{dx}(xy_1) = \frac{-acos(\log x)}{x} - \frac{bsin(\log x)}{x}$

$\therefore \quad x(xy_2 + 1\cdot y_1) = -acos(\log x) - bsin(\log x) = -y$

$\therefore \quad x^2y_2 + xy_1 + y = 0$

ઉદાહરણ 51 : જો $y = cos^{-1}x$, તો સાબિત કરો કે $(1 - x^2)y_2 - xy_1 = 0$.

ઉકેલ : $y = cos^{-1}x$

$\therefore \quad y_1 = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\therefore \quad (1 - x^2)y_1^2 = 1$

$\therefore \quad \frac{d}{dx}(1 - x^2)y_1^2 = 0$

$\therefore \quad (1 - x^2)2y_1y_2 + (-2xy_1^2) = 0$

$\therefore \quad (1 - x^2)y_2 - xy_1 = 0$ $\qquad (y_1 \neq 0)$

ઉદાહરણ 52 : જો $y = tan^{-1}x$ તો સાબિત કરો કે $(1 + x^2)y_2 + 2xy_1 = 0$.

ઉકેલ : $y = tan^{-1}x$

$\therefore \quad y_1 = \frac{1}{1+x^2}$

$\therefore \quad (1 + x^2)y_1 = 1$

$\therefore \quad (1 + x^2)y_2 + 2xy_1 = 0$

ઉદાહરણ 53 : જો $y = ae^{px} + be^{qx}$ તો સાબિત કરો કે $y_2 - (p + q)y_1 + pqy = 0$.

ઉકેલ : $y_1 = ape^{px} + bqe^{qx}$

$y_2 = ap^2e^{px} + bq^2e^{qx}$

$ape^{px} + bqe^{qx} - y_1 = 0$ $\qquad$ (i)

$ap^2e^{px} + bq^2e^{qx} - y_2 = 0$ $\qquad$ (ii)

e^{px} અને e^{qx} માટે (i) તથા (ii)ને ઉકેલતાં,

$e^{px} = \frac{-bqy_2 + bq^2y_1}{abpq^2 - abp^2q}$

$\therefore \quad e^{px} = \frac{-y_2 + qy_1}{ap(q-p)}$

$e^{qx} = -\frac{-apy_2 + ap^2y_1}{abpq(q-p)}$

$e^{qx} = -\frac{-y_2 + py_1}{bq(q-p)}$

$\therefore \quad y = ae^{px} + be^{qx}$ માં આ મૂલ્યો મૂકતાં,

$$y = \left(\frac{-y_2 + qy_1}{p(q-p)}\right) - \left(\frac{-y_2 + py_1}{q(q-p)}\right)$$

$\therefore \quad pq(q - p)y = -qy_2 + q^2y_1 + py_2 - p^2y_1$

$\qquad = (p - q)y_2 - (p^2 - q^2)y_1$

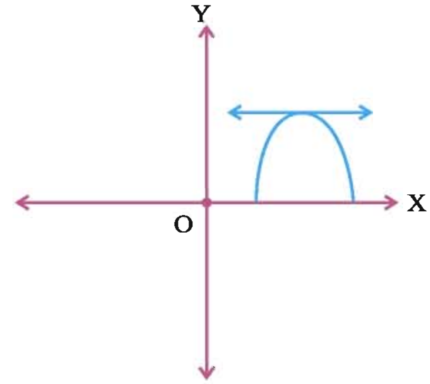
$\therefore \quad y_2 - (p + q)y_1 + pqy = 0$

5.12 મધ્યકમાન પ્રમેયો

વિકલનીય કલનશાસ્ત્રમાં કેટલાંક અગત્યનાં પ્રમેયો છે, જેમને મધ્યકમાન પ્રમેયો કહે છે.

રોલનું પ્રમેય : જો f એ $[a, b]$ પર સતત હોય અને (a, b) પર વિકલનીય હોય તથા $f(a) = f(b)$ થાય તો કોઈક $c \in (a, b)$ મળે કે જેથી $f'(c) = 0$ થાય.

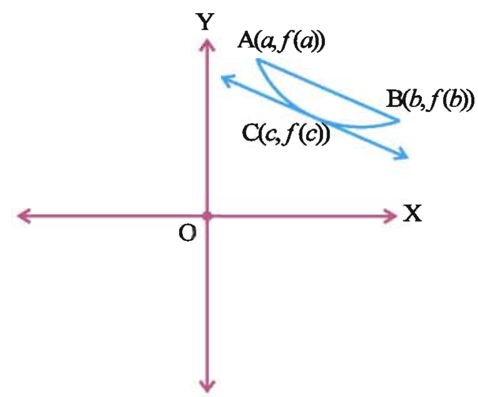
ભૌમિતિક અર્થઘટન : જો વિધેય $y = f(x)$ નો આલેખ $[a, b]$માં 'સળંગ' હોય અને દરેક $(x, f(x))$, $x \in (a, b)$ આગળ તેના સ્પર્શકનો ઢાળ મળે તથા જો $f(a) = f(b)$ થાય, તો કોઈક $c \in (a, b)$ એવો મળે કે જેથી વક્ર $y = f(x)$ નો $(c, f(c))$ બિંદુ આગળનો સ્પર્શક સમક્ષિતિજ થાય અથવા આપણે કહી શકીએ કે તે X-અક્ષ અથવા X-અક્ષને સમાંતર છે.



આકૃતિ 5.25

મધ્યકમાન પ્રમેય (લાગ્રાન્જે) : જો f એ $[a, b]$ માં સતત હોય અને (a, b) માં વિકલનીય હોય તો કોઈક $c \in (a, b)$ મળે કે જેથી $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ થાય.

ભૌમિતિક અર્થઘટન : જો વિધેય $y = f(x)$નો આલેખ $[a, b]$ માં 'સળંગ' હોય અને આલેખના દરેક બિંદુ $(x, f(x))$, $x \in (a, b)$ આગળ $y = f(x)$ના સ્પર્શકના ઢાળનું અસ્તિત્વ હોય, તો $\exists c \in (a, b)$ કે જેથી $(c, f(c))$ બિંદુ આગળનો સ્પર્શક એ બિંદુઓ $A(a, f(a))$ અને $B(b, f(b))$ને જોડતી છેદિકાને સમાંતર હોય.



આકૃતિ 5.26

આપણે જાણીએ છીએ કે $\overleftrightarrow{AB}$નો ઢાળ $= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

અને $(c, f(c))$ બિંદુ આગળના સ્પર્શકનો ઢાળ $= f'(c)$ અને તેથી ઉપરનું પરિણામ મળે છે.

ઉદાહરણ 54 : $f(x) = x^2 - 4x + 3$ માટે $[1, 3]$ માં રોલનું પ્રમેય ચકાસો.

ઉકેલ : f એ બહુપદી વિધેય હોવાથી $[1, 3]$ પર સતત અને $(1, 3)$ પર વિકલનીય છે.

$f(1) = 0, f(3) = 9 - 12 + 3 = 0$

$\therefore \quad \exists c \in (1, 3)$ કે જેથી $f'(c) = 0$

હવે, $f'(c) = 2c - 4 = 0 \Rightarrow c = 2$ અને $2 \in (1, 3)$

$\therefore \quad c = 2$

ઉદાહરણ 55 : $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ માટે $[1, 3]$ માં રોલનું પ્રમેય ચકાસો.

ઉકેલ : f એ $[1, 3]$ પર સતત અને $(1, 3)$ પર વિકલનીય છે તથા $f(1) = 0 = f(3)$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 11 = 0 \Rightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 132}}{6}$$

$\therefore \quad x = 2 \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \in (1, 3)$

$\therefore \quad c$ ની બે કિંમતો છે. $2 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$. વળી, $2 \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \in (1, 3)$. **$(c \in (1, 3))$**

ઉદાહરણ 56 : $f(x) = sinx$ માટે $[0, \pi]$માં રોલનું પ્રમેય ચકાસો.

ઉકેલ : $sine$ એ $[0, \pi]$ માં સતત અને $(0, \pi)$ માં વિકલનીય છે તથા $sin\,0 = sin\pi = 0$

$$f'(x) = cosx = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

$\therefore \quad c = \frac{\pi}{2}$ અને $\frac{\pi}{2} \in (0, \pi)$. **$(c \in (0, \pi))$**

ઉદાહરણ 57 : $f(x) = cos x, x \in [0, \pi]$ પર મધ્યકમાન પ્રમેય લગાડો.

ઉકેલ : cos એ $[0, \pi]$ પર સતત અને $(0, \pi)$ પર વિકલનીય છે.

$a = 0, b = \pi$

હવે, $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$. તેથી $\frac{cos\pi - cos 0}{\pi - 0} = -sinc$

$\therefore \quad \frac{-1-1}{\pi} = -sinc$

$sinc = \frac{2}{\pi}$. વળી, $0 < \frac{2}{\pi} < 1$.

તેથી $\exists c, 0 < c < \pi$ કે જેથી $sinc = \frac{2}{\pi}$

[ખરેખર $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ અને $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ દરેકમાં એક એમ c ની બે કિંમતો મળે કે જેથી $sinc = \frac{2}{\pi}$

જો આપણે $c = sin^{-1}\frac{2}{\pi}$ લઈએ તો, આપણને $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ માં c ની ફક્ત એક કિંમત મળે.]

ઉદાહરણ 58 : $f(x) = e^x$ ને $[0, 1]$ પર મધ્યકમાન પ્રમેય લગાડો.

ઉકેલ : $f(x) = e^x$ એ $[0, 1]$ પર સતત અને $(0, 1)$ પર વિકલનીય છે. $a = 0, b = 1$.

હવે, $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$. તેથી $\frac{e-1}{1-0} = e^c$

$\therefore \quad e^c = e - 1$

$\therefore \quad c = \log_e(e - 1)$

હવે, $2 < e < 3$

$\therefore \quad 1 < e - 1 < 2$

$\therefore \quad 0 < \log(e - 1) < \log_e 2 < \log_e e = 1$ $\qquad (e > 2)$

$\therefore \quad c \in (0, 1)$ અને $c = \log_e(e - 1)$

ઉદાહરણ 59 : $f(x) = \log x$ ને $[1, e]$ પર મધ્યકમાન પ્રમેય લગાડો.

ઉકેલ : લઘુગણકીય વિધેય એ $[1, e]$ પર સતત અને $(1, e)$ પર વિકલનીય છે.

$a = 1, b = e, f'(x) = \frac{1}{x}$

$\therefore \quad \frac{\log e - \log 1}{e - 1} = \frac{1}{c}$

$\therefore \quad \frac{1}{c} = \frac{1}{e-1}$ $\qquad (\log 1 = 0, \log_e e = 1)$

$\therefore \quad c = e - 1$

વળી, $1 < e - 1 < e$ કારણ કે $e > 2$

$\therefore \quad c = e - 1$ $\qquad (c \in (0, e))$

ઉદાહરણ 60 : $f(x) = [x]$ ને $[-2, 2]$ માં મધ્યકમાન પ્રમેય અને રોલનું પ્રમેય લગાડી શકાય ?

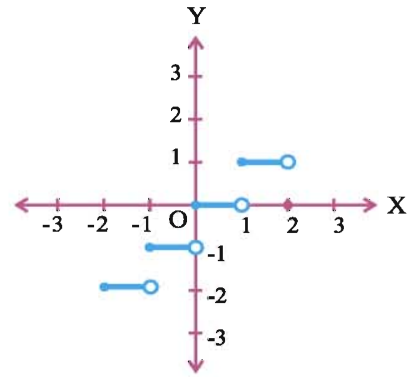
ઉકેલ : f એ $-1, 0, 1$ અને 2 પર અસતત છે. (-2 પર શા માટે નહીં ?)

f એ $(-2, 2)$માં $-1, 0, 1$ આગળ વિકલનીય નથી.

$$f(x) = \begin{cases} -2 & -2 \le x < -1 \\ -1 & -1 \le x < 0 \\ 0 & 0 \le x < 1 \\ 1 & 1 \le x < 2 \\ 2 & x = 2 \end{cases}$$

$\therefore \quad f'(x) = 0, x \in (-2, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, 2)$

(અચળ વિધેય)



આકૃતિ 5.27

કારણ કે f આ અંતરાલોમાં અચળ વિધેય છે. રોલના પ્રમેયની શરતોનું પાલન ન થતું હોવા છતાં 'ઘણા બધાં' x માટે $f'(x) = 0$ છે.

$\therefore$ રોલના પ્રમેયની શરતો પર્યાપ્ત છે પરંતુ જરૂરી નથી.

કોઈ પણ $c \in (-2, 2)$. માટે $f'(c) \neq \frac{f(2) - f(-2)}{2 - (-2)} = \frac{2 - (-2)}{4} = 1$

(ખરેખર તો $f'(c)$નું અસ્તિત્વ નથી અથવા $f'(c) = 0$, જ્યાં $c \in (-2, 2)$.)

(પૂર્ણાંક સંખ્યા ન ધરાવતા કોઈ પણ અંતરાલ $[a, b]$ માં f સતત વિધેય છે અને તેથી રોલનું પ્રમેય અને મધ્યકમાન પ્રમેય ચકાસાય છે પરંતુ તે સિવાય નહીં.)

સ્વાધ્યાય 5.7

રોલનું પ્રમેય ચકાસો : (1 થી 8)

1. $f(x) = x(x - 3)^2 \qquad x \in [0, 3]$
2. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \qquad x \in [2, 3]$
3. $f(x) = \sqrt{9 - x^2} \qquad x \in [-3, 3]$
4. $f(x) = \log\left(\frac{x^2 + ab}{x(a + b)}\right) \qquad x \in [a, b] \quad 0 < a < b$
5. $f(x) = sinx + cosx - 1 \qquad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
6. $f(x) = e^x (sinx - cosx) \qquad x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$
7. $f(x) = a^{sinx} \qquad x \in [0, \pi], a > 0$
8. $f(x) = e^x cosx \qquad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

મધ્યકમાન પ્રમેય ચકાસો : (9-10)

9. $f(x) = x - 2sinx, \quad x \in [-\pi, \pi]$
10. $f(x) = \log_e x, \quad x \in [1, 2]$
11. મધ્યકમાન પ્રમેયનો ઉપયોગ કરી, $f(x) = \log_e x$ લઈ સાબિત કરો કે $\frac{x - y}{x} < \log_e \frac{x}{y} < \frac{x - y}{y}, \ 0 < y < x$

12. મધ્યકમાન પ્રમેય ચકાસો અને c મેળવો :

(1) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ $\quad x \in [1, 3]$

(2) $f(x) = tan^{-1}x$ $\quad x \in [0, 1]$

13. સાબિત કરો કે $sec^2a < \frac{tanb - tana}{b - a} < sec^2b$ $\qquad 0 < a < b < \frac{\pi}{2}$

14. $y = (x - 4)^2$ ના આલેખ પર એવું બિંદુ શોધો જ્યાં સ્પર્શક A(4, 0) તથા B(5, 1)ને જોડતી છેદિકાને સમાંતર હોય.

*

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો :

ઉદાહરણ 61 : $\frac{d}{dx} \log_7 (\log_7 x)$ શોધો.

ઉકેલ : $y = \log_7 \left(\frac{\log x}{\log 7}\right) = \log_7(\log x) - \log_7(\log 7)$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \log_7 (\log x).$ $\qquad \left(\frac{d}{dx} \log_7 (\log 7) = 0\right)$

$= \frac{d}{dx} \frac{\log (\log x)}{\log 7}$

$= \frac{1}{\log 7} \frac{d}{dx} \log (\log x)$

$= \frac{1}{\log 7} \frac{1}{\log x} \frac{1}{x}$

$= \frac{1}{x \log x \log 7}$

ઉદાહરણ 62 : $\frac{d}{dx} tan^{-1} \left(\frac{sinx}{1 + cosx}\right)$ શોધો. $\qquad \pi < x < 2\pi$

ઉકેલ : $y = tan^{-1} \left(\frac{sinx}{1 + cosx}\right)$

$= tan^{-1} \left(\frac{2 sin \frac{x}{2} cos \frac{x}{2}}{2cos^2 \frac{x}{2}}\right)$

$= tan^{-1} \left(tan \frac{x}{2}\right)$ $\qquad \frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} < \pi$

હવે, $\frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} < \pi \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} - \pi < 0$

હવે, $y = tan^{-1} \left(tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) = tan^{-1} \left(tan\left(\frac{x}{2} - \pi\right)\right) = \frac{x}{2} - \pi$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$

ઉદાહરણ 63 : જો $f(x) = cos^{-1} \frac{1 - 9^x}{1 + 9^x}$, તો $f'(x)$ શોધો. $\quad x \in R$

ઉકેલ : $t = 3^x$ લો. $cos^{-1} \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$ નો વિચાર કરીએ.

ધારો કે, $\theta = tan^{-1}t$, $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$.

આથી $t = tan\theta$, $\quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

$3^x > 0$ હોવાથી $t > 0$. આથી $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

$\therefore \quad 0 < 2\theta < \pi$

$$\therefore \quad cos^{-1}\frac{1-t^2}{1+t^2} = cos^{-1}\left(\frac{1-tan^2\theta}{1+tan^2\theta}\right)$$

$$= cos^{-1}(cos2\theta)$$

$$= 2\theta \qquad (0 < 2\theta < \pi)$$

$$= 2tan^{-1}t$$

$$\therefore \quad cos^{-1}\frac{1-9^x}{1+9^x} = 2tan^{-1}3^x \qquad (t = 3^x \text{ લેતાં})$$

$$\therefore \quad f(x) = cos^{-1}\frac{1-9^x}{1+9^x} = 2tan^{-1}3^x$$

$$\therefore \quad f'(x) = \frac{2 \cdot 3^x \log_e 3}{1+(3^x)^2} = \frac{2 \cdot 3^x \log_e 3}{1+3^{2x}}$$

ઉદાહરણ 64 : જો $x = a(cost + tsint)$, $y = a(sint - tcost)$, તો $\frac{d^2y}{dx^2}$ શોધો.

ઉકેલ : $\frac{dx}{dt} = a(-sint + tcost + sint) = at\ cost$

$$\frac{dy}{dt} = a(cost - cost + tsint) = at\ sint$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = tant$$

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}(tant)$$

$$= \frac{d}{dt}(tant)\frac{dt}{dx}$$

$$= \frac{sec^2t}{\frac{dx}{dt}}$$

$$= \frac{sec^2t}{a\ t\ cost} = \frac{sec^3t}{at}$$

ઉદાહરણ 65 : જો $y = e^{asin^{-1}x}$, $|x| \le 1$, તો સાબિત કરો કે $(1-x^2)y_2 - xy_1 - a^2y = 0$.

ઉકેલ : $\frac{dy}{dx} = y_1 = e^{asin^{-1}x}\frac{a}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{ay}{\sqrt{1-x^2}}$

$\therefore \quad (1 - x^2){y_1}^2 = a^2y^2$

$\therefore \quad (1 - x^2)2y_1y_2 + (-2x){y_1}^2 = a^2 2yy_1$ $\quad \left(\frac{d}{dx}y^2 = 2yy_1,\ \frac{d}{dx}{y_1}^2 = 2y_1y_2\right)$

$\therefore \quad (1 - x^2)y_2 - xy_1 - a^2y = 0$ $\quad (y_1 \neq 0)$

ઉદાહરણ 66 : એવું કોઈ વિધેય અસ્તિત્વ ધરાવે છે કે જે દરેક વાસ્તવિક સંખ્યા માટે સતત હોય પરંતુ બરાબર n વાસ્તવિક સંખ્યાઓ માટે વિકલનીય ન હોય ?

ઉકેલ : ધારો કે $f(x) = |x - 1| + |x - 2| + |x - 3| + ... + |x - n|$

$\therefore$ $|x|$ એ R પર સતત છે. તેથી $|x - 1|, |x - 2|, ..., |x - n|$ માંનું દરેક R પર સતત છે. કારણ કે સતત વિધેયોનું સંયોજિત વિધેય એ સતત છે.

તેથી $f(x)$ એ R પર સતત છે. કારણ કે સતત વિધેયોનો સરવાળો સતત છે.

$|x - 1|, |x - 2|, ..., |x - n|$ માંનું દરેક અનુક્રમે $x = 1, x = 2, ..., x = n$ સિવાયની પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા માટે વિકલનીય છે.

$|x - 2|, |x - 3|, ..., |x - n|$ એ $x = 1$ આગળ વિકલનીય છે.

$\therefore$ $g(x) = |x - 2| + |x - 3| + ... + |x - n|$ એ $x = 1$ આગળ વિકલનીય છે.

જો $f(x) = |x - 1| + |x - 2| + ... + |x - n|$ એ $x = 1$ આગળ વિકલનીય હોય, તો

$f(x) - g(x) = |x - 1|$ એ $x = 1$ આગળ વિકલનીય થવું જોઈએ.

પરંતુ $|x - 1|$ એ $x = 1$ આગળ વિકલનીય નથી.

$\therefore$ $f(x) = |x - 1| + |x - 2| + ... + |x - n|$ એ $x = 1$ આગળ વિકલનીય નથી.

તે જ પ્રમાણે $|x - 1| + |x - 2| + ... + |x - n|$ એ $x = 2, 3, ..., n$ આગળ વિકલનીય નથી.

$\therefore$ f એ R પર સતત હોવા છતાં $x = 1, 2, 3, ..., n$ પર વિકલનીય નથી.

ઉદાહરણ 67 : જો $\sin y = x\sin(a + y)$, તો સાબિત કરો કે $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin^2(a + y)}{\sin a}$

ઉકેલ : $\cos y \frac{dy}{dx} = \sin(a + y) + x\cos(a + y)\frac{dy}{dx}$

$\therefore \quad [\cos y - x\cos(a + y]\frac{dy}{dx} = \sin(a + y)$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\sin(a + y)}{\cos y - x\cos(a + y)}$$

$$= \frac{\sin(a + y)}{\cos y - \frac{\sin y}{\sin(a + y)}\cos(a + y)}$$

$$= \frac{\sin^2(a + y)}{\sin(a + y)\cos y - \cos(a + y)\sin y}$$

$$= \frac{\sin^2(a+y)}{\sin a}$$

$(\sin(a + y)\cos y - \cos(a + y)\sin y = \sin(a + y - y) = \sin a)$

અથવા

$$x = \frac{\sin y}{\sin(a+y)}$$

$$\therefore \quad \frac{dx}{dy} = \frac{\sin(a+y)\cos y - \sin y\cos(a+y)}{\sin^2(a+y)} = \frac{\sin a}{\sin^2(a+y)}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\sin^2(a+y)}{\sin a}$$

ઉદાહરણ 68 : જો $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, તો સાબિત કરો કે $\left|\frac{(1+{y_1}^2)^{\frac{3}{2}}}{y_2}\right|$ અચળ છે.

ઉકેલ : $2(x - a) + 2(y - b)y_1 = 0$

$$\therefore \quad y_1 = -\frac{x-a}{y-b}$$

$$\therefore \quad y_2 = -\frac{(y-b)\cdot 1-(x-a)y_1}{(y-b)^2}$$

$$= -\frac{(y-b)+\frac{(x-a)(x-a)}{y-b}}{(y-b)^2}$$

$$= -\frac{(x-a)^2+(y-b)^2}{(y-b)^3}$$

$$= -\frac{r^2}{(y-b)^3}$$

$$\therefore \quad \left|\frac{(1+{y_1}^2)^{\frac{3}{2}}}{y_2}\right| = \left|\frac{\left[1+\frac{(x-a)^2}{(y-b)^2}\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{-r^2}{(y-b)^3}}\right|$$

$$= \left|\frac{[(x-a)^2+(y-b)^2]^{\frac{3}{2}}}{-r^2}\right|$$

$= \left|-\frac{r^3}{r^2}\right| = |\,r\,|$ જે અચળ છે.

($\left|\frac{(1+{y_1}^2)^{\frac{3}{2}}}{y_2}\right|$ ને વક્ર $y = f(x)$ ના કોઈ પણ બિંદુ $(x, f(x))$ આગળની વક્રત્રિજ્યા કહે છે. વર્તુળ એ દરેક બિંદુએ એકરૂપ વક્રત્રિજ્યાવાળો વક્ર છે.)

ઉદાહરણ 69 : યોગ્ય પ્રદેશ પર વ્યાખ્યાયિત વિધેય માટે $\frac{d}{dx}(\log x)^{\log x}$ શોધો.

ઉકેલ : $y = (\log x)^{\log x}$

$$\therefore \quad \log y = \log x\, (\log (\log x))$$

$$\therefore \quad \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\log(\log x) + \frac{\log x}{\log x}\,\frac{1}{x}$$

$$= \frac{\log(\log x)+1}{x}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \left(\frac{1+\log(\log x)}{x}\right)(\log x)^{\log x}$$

ઉદાહરણ 70 : વ્યાખ્યાની (પ્રથમ સિદ્ધાંતથી) મદદથી $\left[\frac{d}{dx}sec^{-1}x\right]_{x=-2}$ મેળવો.

ઉકેલ : $\left[\frac{d}{dx}sec^{-1}x\right] = \lim\limits_{x\to -2}\frac{sec^{-1}x - sec^{-1}(-2)}{x-(-2)}$

$$= \lim_{t\to\frac{2\pi}{3}}\frac{t-(\pi - sec^{-1}2)}{sect+2} \qquad (t = sec^{-1}x)$$

$$= \lim_{t\to\frac{2\pi}{3}}\frac{t-\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)}{sect+2}$$

$$= \lim_{t\to\frac{2\pi}{3}}\frac{t-\frac{2\pi}{3}}{sect+2}$$

$$= \lim_{t\to\frac{2\pi}{3}}\frac{t-\frac{2\pi}{3}}{2sect\left(cost - cos\frac{2\pi}{3}\right)}$$

$$= \lim_{t\to\frac{2\pi}{3}}\frac{t-\frac{2\pi}{3}}{2sect\left(-2\,sin\frac{t+\frac{2\pi}{3}}{2}\,sin\frac{t-\frac{2\pi}{3}}{2}\right)}$$

$$= \lim_{t\to\frac{2\pi}{3}}\frac{\left(t-\frac{2\pi}{3}\right)/2}{-2sect\cdot sin\frac{t+\frac{2\pi}{3}}{2}\,sin\frac{t-\frac{2\pi}{3}}{2}}$$

$$= \frac{-1}{2sec\frac{2\pi}{3}\,sin\frac{2\pi}{3}}$$

$$= \frac{-1}{2(-2)\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

ચકાસો : $\left(\frac{d}{dx}sec^{-1}x\right)_{x=-2} = \left(\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}\right)_{x=-2} = \frac{1}{|-2|\sqrt{4-1}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$

સ્વાધ્યાય 5

નીચે આપેલાં વિધેયોમાંથી જે વિધેયો જે બિંદુએ અસતત હોય તે બિંદુઓ શોધો : (1 થી 4)

1. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 27}{x - 3} & x \neq 3 \\ 5 & x = 3 \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} \frac{sin\,(x - 1)}{|x - 1|} & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x + 1} & x \neq -1 \\ -1 & x = -1 \end{cases}$

4. $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x} - e^4}{e^x - e^2} & x \neq 2 \\ e^2 & x = 2 \end{cases}$

આપેલ x આગળ વિધેયો સતત હોય, તો k શોધો : (5 થી 8)

5. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} & x \neq 3 \\ k & x = 3, \end{cases}$ $x = 3$ આગળ

6. $f(x) = \begin{cases} kx^2 & x < 1 \\ x^2 + 1 & x \geq 1, \end{cases}$ $x = 1$ આગળ

7. $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & x < 2 \\ k & x = 2 \\ 3x + 1 & x > 2 \end{cases}$ $x = 2$ આગળ

8. $f(x) = \begin{cases} cosx & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ k^2 - 4 & x = \frac{\pi}{2}, \\ sinx - 1 & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$ $x = \frac{\pi}{2}$ આગળ

નીચે આપેલાં વિધેયો સતત હોય, તો a અને b શોધો : (9 થી 10)

9. $f(x) = \begin{cases} asinx + b & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ cosx & \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \\ tanx + b & \pi < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$

10. $f(x) = \begin{cases} ax + b & 0 \leq x < 1 \\ 2x + 3 & 1 \leq x < 2 \\ x + a & x \geq 2 \end{cases}$

યોગ્ય પ્રદેશ પર વ્યાખ્યાયિત x નાં વિધેયો y માટે $\frac{dy}{dx}$ શોધો :

11. $y = \log_{10}(x^2 + 1)$

12. $y = cot^{-1}\frac{2x}{1 - x^2}$, $x \neq \pm 1$

13. $y = sin\,(\log\,(cosx))$

14. $x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2} = a$, $|x| < 1$, $|y| < 1$

15. $y = (sinx)^{sinx}$

16. $y = (sinx - cosx)^{sinx - cosx}$

17. $y = x^x + \left(x + \frac{1}{x}\right)^x$

18. $y = x^{\left(x + \frac{1}{x}\right)}$

19. $y = cos(x^x) + (tanx)^x$

20. $y = sin^{-1}x + sin^{-1}\sqrt{1 - x^2}$, $|x| < 1$

21. $y = tan^{-1}x + cot^{-1}x$, $x \in R$

22. $x = (cost)^t$, $y = (sint)^t$ $\quad 0 < t < \frac{\pi}{2}$

23. સાબિત કરો કે $\frac{d}{dx}\,e^{ax}cos\,(bx + c) = re^{ax}cos\,(bx + c + \alpha)$ જ્યાં $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $cos\alpha = \frac{a}{r}$, $sin\alpha = \frac{b}{r}$

અને $\frac{d^2}{dx^2}\,e^{ax}cos\,(bx + c) = r^2e^{ax}cos\,(bx + c + 2\alpha)$ સાબિત કરો.

24. $\dfrac{d}{dx}\ tan^{-1}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$, $x \in R - \{0\}$ શોધો.

25. $\dfrac{d}{dx}\ tan^{-1}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$ શોધો. $|x| < 1$

26. $\dfrac{d}{dx}\ tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1+sinx}{1-sinx}}$ શોધો. $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$

27. જો $y = (cos^{-1}x)^2$, તો સાબિત કરો કે $(1 - x^2)y_2 - xy_1 = 2$

28. જો $y = sinpt$, $x = sint$, તો સાબિત કરો કે $(1 - x^2)y_2 - xy_1 + p^2y = 0$

29. જો $y = e^{mtan^{-1}x}$, તો સાબિત કરો કે $(1 + x^2)y_2 + (2x - m)y_1 = 0$

30. જો $2x = y^{\frac{1}{m}} + y^{-\frac{1}{m}}$ $(x \ge 1)$, તો સાબિત કરો કે $(x^2 - 1)y_2 + xy_1 = m^2y$

31. જો $y = (x + \sqrt{x^2-1})^m$, તો સાબિત કરો કે $(x^2 - 1)y_2 + xy_1 = m^2y$

32. જો $x^y = e^{x-y}$, તો સાબિત કરો કે $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\log x}{(\log x + 1)^2}$

33. જો $y = e^{ax}\ sinbx$, તો સાબિત કરો કે $y_2 - 2ay_1 + (a^2 + b^2)y = 0$

34. જો $(a - bcosy)(a + bcosx) = a^2 - b^2$, તો સાબિત કરો કે $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+bcosx}$, $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$

35. જો $y = (tan^{-1}x)^2$, તો સાબિત કરો કે $(1 + x^2)^2y_2 + 2x(1 + x^2)y_1 = 2$

36. જો $y = x \log \dfrac{x}{a+bx}$, તો સાબિત કરો કે $x^3y_2 = (xy_1 - y)^2$

37. જો $x = asint - bcost$, $y = acost + bsint$, તો y_2 શોધો.

38. જો $y = sin(sinx)$, તો સાબિત કરો કે $y_2 + tanx \cdot y_1 + ycos^2x = 0$

39. જો $y = cos^{-1}\ \dfrac{3+5cosx}{5+3cosx}$, તો સાબિત કરો કે $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4}{5+3cosx}$.

40. $tan^{-1}\ \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ નું $sin^{-1}\ (2x\sqrt{1-x^2})$ને સાપેક્ષ વિકલન કરો, જ્યાં $0 < x < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

41. $cos^{-1}\ \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ નું $sin^{-1}\ \dfrac{2x}{1+x^2}$ ને સાપેક્ષ વિકલન કરો. $(0 < x < 1)$

42. $\left[\dfrac{d}{dx}(cosec^{-1}x)\right]_{x\,=\,-2}$ વ્યાખ્યાથી મેળવો.

43. $\dfrac{d}{dx}\left(sin^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} + cos^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$ શોધો. $x > 0$

44. $\dfrac{d}{dx}\ tan^{-1}\ \dfrac{4x}{1+21x^2}$ શોધો. $x > 0$

45. $\frac{d}{dx}\ tan^{-1}\frac{a+bx}{b-ax}$ શોધો.

46. $\frac{d}{dx}\ tan^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}$, $|x| < 1$ શોધો.

47. $\frac{d}{dx}\ tan^{-1}(secx\ -\ tanx)$ શોધો.

48. **નીચે આપેલું દરેક વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલા વિકલ્પો (a), (b), (c) અથવા (d) માંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરીને ☐ માં લખો :**

વિભાગ A (1 ગુણ)

(1) $\left[\frac{d}{dx}sec^{-1}x\right]_{x\ =\ -3}$ = ... ☐

(a) $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ (b) $-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ (c) $\frac{1}{6\sqrt{2}}$ (d) $\frac{-1}{6\sqrt{2}}$

(2) $\frac{d}{dx}x^x$ = ... $(x > 0)$ ☐

(a) x^{x-1} (b) x^x (c) 0 (d) $x^x(1 + \log x)$

(3) $\frac{d}{dx}(sin^{-1}x + cos^{-1}x)$ = ... $(|x| < 1)$ ☐

(a) 0 (b) $\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$ (c) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (d) અસ્તિત્વ નથી.

(4) $\frac{d}{dx}a^a$ = ... $(a > 0)$ ☐

(a) $a^a(1 + \log a)$ (b) 0 (c) a^a (d) અસ્તિત્વ નથી.

(5) $\frac{d}{dx}e^{5x}$ = ... ☐

(a) e^{5x} (b) $5e^{5x}$ (c) $5x\ e^{5x-1}$ (d) 0

(6) $\frac{d}{dx}\log|x|$ = ... $(x \neq 0)$ ☐

(a) $\frac{1}{|x|}$ (b) $\frac{1}{x}$ (c) અસ્તિત્વ નથી. (d) e^x

(7) $\frac{d}{dx}sin^3x$ = ... ☐

(a) $3sin^2x$ (b) $3cos^2x$ (c) $3sin^2x\ cosx$ (d) $-3cos^2x\ sinx$

(8) $\frac{d}{dx}tan^nx$ = ... ☐

(a) $ntan^{n-1}x$ (b) $ntan^{n-1}x\,sec^2x$ (c) $n\,sec^{2n}x$ (d) $ntan^{n-1}x\ sec^{n-1}x$

(9) જો $f(x) = \begin{cases} ax + b & 1 \le x < 5 \\ 7x - 5 & 5 \le x < 10 \\ bx + 3a & x \ge 10 \end{cases}$

સતત હોય, તો $(a, b) =$ ......

(a) (5, 10) (b) (5, 5) (c) (10, 5) (d) (0, 0)

(10) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{a} - a & x < a \\ 0 & x = a \\ a - \frac{x^2}{a} & x > a \end{cases}$ માટે

(a) $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = a$ (b) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -a$

(c) f એ $x = a$ આગળ સતત છે. (d) f એ $x = a$ આગળ વિકલનીય છે.

(11) જો $f(x) = \begin{cases} x & x \in (0, 1) \\ 1 & x \ge 1 \end{cases}$

(a) f એ ફક્ત $x = 1$ આગળ સતત છે. (b) f એ ફક્ત $x = 1$ આગળ અસતત છે.

(c) f એ R^+ પર સતત છે. (d) f એ $x = 1$ આગળ વ્યાખ્યાયિત નથી.

(12) $\frac{d}{dx} \frac{1}{\log |x|} =$ ....

(a) $\frac{1}{|x|}$ (b) $\frac{1}{(\log x)^2}$ (c) $-\frac{1}{x(\log |x|)^2}$ (d) e^x

(13) જો $y = asinx + bcosx$, તો $y^2 + (y_1)^2 =$ .... $(a^2 + b^2 \ne 0)$

(a) $acosx - bsinx$ (b) $(asinx - bcosx)^2$ (c) $a^2 + b^2$ (d) 0

(14) $\frac{d}{dx} (x^2 + sin^2x)^3 =$ ....

(a) $3(x^2 + sin^2x)$ (b) $3(x^2 + sin^2x)^2 (2x + sin2x)$

(c) $2x + 2sinx\ cosx$ (d) 0

(15) $\frac{d}{dx} \sqrt{xsinx} =$ .... $0 < x < \pi$

(a) $\frac{xsinx + cosx}{\sqrt{xsinx}}$ (b) $\frac{xcosx}{2\sqrt{xsinx}}$ (c) $\frac{xcosx + sinx}{2\sqrt{xsinx}}$ (d) $\frac{1}{2\sqrt{xsinx}}$

વિભાગ B (2 ગુણ)

(16) $\frac{d}{dx} tan^{-1} \frac{1-x}{1+x} =$ ....

(a) $\frac{-1}{1+x^2}$ (b) $\frac{1}{1+x^2}$ (c) $\frac{1+x}{1-x}$ (d) $\frac{2}{1+x^2}$

(17) $\frac{d}{dx} tan^{-1}\sqrt{\frac{1-cosx}{1+cosx}}$ = ... $\pi < x < 2\pi$

(a) $\frac{1}{1+cos^2x}$ (b) $-\frac{1}{1+cos^2x}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) $-\frac{1}{2}$

(18) જો $x = e^{tan^{-1}\frac{y-x^2}{x^2}}$, તો $\frac{dy}{dx}$ = ...

(a) $2x\,(tan\,(\log x) + 1)$ (b) $2x\,(tan\,(\log x) + 1) + x\,sec^2\,(\log x)$

(c) $2x\,(tan\,(\log x) + 1) + x^2 sec\,(\log x)$ (d) 0

(19) $\frac{d}{dx} sin^{-1}\left(\frac{3x}{5}+\frac{4}{5}\sqrt{1-x^2}\right)$ = ... $(0 < x < \frac{3}{5})$

(a) $\frac{3}{5} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (b) $\frac{4}{5}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (c) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

(20) $\frac{d}{dx} tan^{-1}\left(\frac{x+a}{1-xa}\right)$ = ... $(x,\ a \in R^+,\ xa > 1)$

(a) $\frac{1}{1+x^2}$ (b) $\frac{1}{1+a^2}$ (c) $\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+a^2}$ (d) $\frac{1}{1+x^2a^2}$

(21) જો $f(x) = \log_7(\log_3 x)$, તો $f'(x)$ = ...

(a) $\frac{1}{x\log 7\log 3}$ (b) $\frac{1}{\log 3\log x}$ (c) $\frac{1}{x\log x\log 7}$ (d) $\frac{1}{x\log x}$

(22) $\frac{d}{dx} x|x|$ = ... $(x < 0)$

(a) $2x$ (b) $-2x$ (c) $|x|$ (d) 0

(23) જો $x = \frac{2t}{1+t^2}$, $y = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, તો $\frac{dy}{dx}$ = ...

(a) $\frac{2t^2}{1-t^2}$ (b) $\frac{2t}{1+t^2}$ (c) $2t$ (d) $\frac{-2t}{1-t^2}$

(24) $\frac{d}{dx} e^{x\log x}$ = ...

(a) $x^x(1 + \log x)$ (b) x^x (c) $1 + \log x$ (d) x^{x-1}

(25) $\frac{tan^{-1}x}{1+tan^{-1}x}$ નો $tan^{-1}x$ ને સાપેક્ષ વિકલિત = ...

(a) $\frac{1}{1+tan^{-1}x}$ (b) $\frac{1}{(1+tan^{-1}x)^2}$ (c) $\frac{1}{1+x^2}$ (d) $\frac{-1}{1+x^2}$

વિભાગ C (3 ગુણ)

(26) જો $x = at^2$, $y = 2at$, તો $\frac{d^2y}{dx^2}$ = ...

(a) $\frac{-1}{t^2}$ (b) $\frac{1}{t^2}$ (c) $\frac{-1}{2at^3}$ (d) $\frac{1}{2at^3}$

(27) $\dfrac{d}{dx}\, cot^{-1} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$ = ..., $x \in$ R $-$ {0}

(a) $\dfrac{1}{1+x^2}$ (b) $\dfrac{-1}{2(1+x^2)}$ (c) $\dfrac{2}{1+x^2}$ (d) $-\dfrac{1}{1+x^2}$

(28) $\dfrac{d^2x}{dy^2}$ = ...

(a) $\dfrac{1}{\frac{d^2y}{dx^2}}$ (b) $\dfrac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ (c) $-\dfrac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ (d) $-\dfrac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^3}\dfrac{d^2y}{dx^2}$

(29) વક્ર $f(x) = (x - 3)^2$ ને [2, 4] પર મધ્યકમાન પ્રમેય લગાડતાં ...... બિંદુ આગળનો સ્પર્શક, A(2, 1) અને B(4, 1)ને જોડતી જીવાને સમાંતર છે.

(a) (1, 0) (b) (4, 3) (c) (2, 3) (d) (3, 0)

(30) વિધેય $f(x) = x^3$ ને [-1, 1] પર મધ્યકમાન પ્રમેય લગાડતાં c = ... થાય.

(a) $\pm \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ (b) $\pm \sqrt{3}$ (c) ± 1 (d) 0

(31) $f(x) = e^x sin\, x$ $x \in$ [0, π] માટે રોલના પ્રમેયનો ઉપયોગ કરતાં c = ...

(a) $\dfrac{3\pi}{4}$ (b) $\dfrac{5\pi}{4}$ (c) $\dfrac{\pi}{4}$ (d) $\dfrac{7\pi}{4}$

(32) $f(x) = x^3 - 4x$, $x \in$ [0, 2] ને માટે રોલના પ્રમેયનો ઉપયોગ કરતાં c = ...

(a) $\sqrt{3}$ (b) 2 (c) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ (d) -2

વિભાગ D (4 ગુણ)

(33) જો $x = sec\theta - cos\theta$, $y = sec^n\theta - cos^n\theta$, તો...

(a) $(x^2 + 4)\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = n^2 (y^2 + 4)$ (b) $(x^2 - 4)\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = n^2 (y^2 - 4)$

(c) $(x^2 + 4)\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = 1$ (d) $(x^2 + 4)\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = y^2 + 4$

(34) $\dfrac{d}{dx}\, tan^{-1} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x^2}}$ = ... $|x| < 1$

(a) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^4}}$ (b) $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^4}}$ (c) $\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^4}}$ (d) $\dfrac{x^2}{1-x^4}$

(35) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \dfrac{a^2}{2}\, sin^{-1}\dfrac{x}{a}\right)$ = ... ($a > 0$)

(a) $\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ (b) $\sqrt{a^2-x^2}$ (c) $\sqrt{x^2-a^2}$ (d) $\sqrt{x^2+a^2}$

(36) ...... વિધેય [-1, 1]માં મધ્યકમાન પ્રમેયની શરતોનું પાલન કરતું નથી.

(a) $f(x) = |x|$ (b) $f(x) = x^3$ (c) $f(x) = sinx$ (d) $f(x) = x^2$

(37) વિધેય $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $x \in [1, 3]$ પર મધ્યકમાન પ્રમેય લગાડતાં અને વિધેય $f(x) = x^2 - 4x + 3$ પર રોલનું પ્રમેય લગાડતાં c નાં મૂલ્ય ...... મળે.

(a) $\sqrt{3}$, 1 (b) 2, 1 (c) $\sqrt{3}$, 2 (d) 2, $\sqrt{3}$

(38) $y = x \log x$ નો $(c, f(x))$ આગળ સ્પર્શક A(1, 0) તથા B(e, e) ને જોડતી રેખાને સમાંતર હોય તો c = ...

(a) $\frac{e-1}{e}$ (b) $\log \frac{e-1}{e}$ (c) $e^{\frac{1}{1-e}}$ (d) $e^{\frac{1}{e-1}}$

(39) $f(x) = 2\sin x + \sin 2x$ માટે $[0, \pi]$ પર મધ્યકમાનનું પ્રમેય ચકાસતાં મળતી c ની કિંમત ....

(a) π (b) $\frac{\pi}{4}$ (c) $\frac{\pi}{2}$ (d) $\frac{\pi}{3}$

(40) $f(x) = \begin{cases} 2 + x^3 & x \le 1 \\ 3x & x > 1 \end{cases}$ $x \in [-1, 2]$

તો મધ્યકમાન પ્રમેય અનુસાર c નું મૂલ્ય...

(a) 2 (b) 0 (c) 1 (d) $\frac{\sqrt{5}}{3}$

*

સારાંશ

આ પ્રકરણમાં આપણે નીચે આપેલા મુદ્દાઓ શીખ્યા :

1. સતત વિધેયો
2. સતત વિધેયોનું બીજગણિત
3. વિકલનીયતા અને સાતત્ય
4. ઘાતાંકીય વિધેય
5. લઘુગણકીય વિધેય
6. સાંકળનો નિયમ
7. પ્રતિવિધેયના વિકલિતનો નિયમ
8. ગૂઢ વિધેયનું વિકલિત
9. પ્રચલ વિધેયનું વિકલિત
10. લઘુગણકીય વિકલન
11. દ્વિતીય વિકલિત
12. મધ્યકમાન પ્રમેય

Prehistory

Excavations at Harappa, Mohenjo-daro and other sites of the Indus Valley Civilization have uncovered evidence of the use of "practical mathematics". The people of the IVC manufactured bricks whose dimensions were in the proportion 4:2:1, considered favorable for the stability of a brick structure. They used a standardized system of weights based on the ratios: 1/20, 1/10, 1/5, 1/2, 1, 2, 5, 10, 20, 50, 100, 200, and 500, with the unit weight equal to approximately 28 grams (and approximately equal to the English ounce or Greek uncia). They mass produced weights in regular geometrical shapes, which included hexahedra, barrels, cones, and cylinders, thereby demonstrating knowledge of basic geometry.

The inhabitants of Indus civilization also tried to standardize measurement of length to a high degree of accuracy. They designed a ruler—the Mohenjo-daro ruler—whose unit of length (approximately 1.32 inches or 3.4 centimetres) was divided into ten equal parts. Bricks manufactured in ancient Mohenjo-daro often had dimensions that were integral multiples of this unit of length.