

## Глава 3

# Демпфирование колебаний

Динамические характеристики МЭМС существенно зависят от их демпфирующих свойств. Обеспечение заданного демпфирования является одной из задач при разработке прибора. При этом следует разделять вязкое демпфирование (за счёт вязкости среды) и демпфирование конструкционное [8—10]. Рассмотрим оба вида демпфирования.

**Таблица 3.1.** Вязкость газов  $\mu \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{с}/\text{м}^2$

Газ	Температура, °C						
	−50	−20	0	20	50	100	100
Азот	0,014	0,015	0,016	0,017	0,018	0,021	—
Воздух	0,015	0,016	0,017	0,018	0,02	0,022	0,03
Водород	0,0075	0,008	0,0085	0,009	0,0095	0,01	0,0139

В газовом зазоре между движущейся и неподвижной поверхностями скорость газа непрерывно меняется, т. е. является функцией  $z$  (см. рис. 3.2). Производная по  $z$  называется градиентом скорости. Поскольку все промежуточные слои находятся в одинаковых условиях, скорость от слоя к слою изменяется на одинаковую величину, т. е. градиент скорости есть величина постоянная

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{V_0}{d}. \quad (3.1)$$

С другой стороны, все слои друг относительно друга движутся с постоянной скоростью. Следовательно, сумма тангенциальных сил, действующих на слой газа, должна быть равна нулю. Это значит, что на любую горизонтальную площадку  $S$ , лежащую на границе данного слоя, со стороны другого слоя действует та же сила, что и на пластины, к которым прилегает слой газа, т. е. сила  $F$ . Заменяя в (3.1)  $V_0/d$  градиентом  $\frac{\partial V}{\partial z}$  имеем

$$F = \mu S \frac{\partial V}{\partial z} = \tau S,$$

т. е. сила, действующая на единицу площади (аналогично касательному напряжению в упругих телах), равна

$$\tau = \mu \frac{\partial V}{\partial z}.$$

Изложенные выше положения относятся к вязкости газа при нормальном давлении. В микросистемах давление газа может быть значительно ниже атмосферного. В этом случае вязкость зависит от давления газа. Больцманом для определения вязкости предложена формула

$$\mu = 0,3502 \rho V \lambda. \quad (3.2)$$

где  $\rho$  — плотность газа;  $V$  — средняя скорость газа;  $\lambda$  — длина свободного пробега газовой молекулы.

Длиной свободного пробега называется путь  $\lambda$ , проходимый газовой молекулой между соударениями с другими молекулами [10]:

$$\lambda = \frac{KT}{\sqrt{2}\pi d_m^2 p}, \quad (3.3)$$

где  $K = 1,38066 \cdot 10^{-23}$  Дж/К — постоянная Больцмана;  $T$  — температура, К;  $p$  — давление газа;  $d_m$  — диаметр газовой молекулы.

Так как в азоте ( $d_m = 3,7 \cdot 10^{-10}$  м) [5] при давлении  $p = 1$  атм имеем  $\lambda = 65,68 \cdot 10^{-9}$  м, при  $p = 1$  Торр  $\lambda = 49,92 \cdot 10^{-6}$  м = 50 мкм. Из приведённых значений следует, что средний пробег молекулы при давлении 1 Торр соизмерим с размером элементов микроприбора и их перемещениями.

В [11] приведена зависимость коэффициента вязкости газа от давления

$$\mu = \mu_p p d, \quad (3.4)$$

где  $d$  — расстояние (газовый зазор) между движущимися поверхностями;  $\mu_p$  — коэффициент вязкости, соответствующий низкому давлению (для азота  $\mu_p = 2,776 \cdot 10^{-6}$  с/м).

Тангенциальную силу (силу трения) вязкого течения газа между двумя поверхностями представим в виде

$$F = \mu \frac{V_0}{d} S = b V_0, \quad (3.5)$$

Абсолютный коэффициент демпфирования (вязкого трения) между пластинами с площадью перекрытия  $S$  будет

$$b = \mu S/d. \quad (3.6)$$

С учётом выражения (3.4) для  $\mu$  имеем

$$b = \mu_p S p. \quad (3.7)$$

Следовательно, для параллельно перемещающихся пластин  $b$  не зависит от зазора  $d$ , так как  $\lambda \gg d$ .

В [8, 12] приведены полуэмпирические выражения для расчёта коэффициентов демпфирования при сжатии газа между двумя параллельно сближающимися плоскостями ( $b$ ) и между сближающимися наклонными плоскостями ( $b_\alpha, b_\beta$ ).

Для прямоугольной пластины со сторонами  $a \times b$ , движущейся относительно другой плоскости, имеем

$$b = 2\mu \frac{a^3 b^3}{d^3(a^2 + b^2)}; \quad (3.8)$$

$$b_\alpha = \frac{\mu}{2} \frac{a^3 b^5}{d^3(a^2 + b^2)}; \quad (3.9)$$

$$b_\beta = \frac{\mu}{2} \frac{a^5 b^3}{d^3(a^2 + b^2)}. \quad (3.10)$$

Для квадратной пластины со сторонами  $a$  формулы (3.8) — (3.10) преобразуются к виду

$$b = \mu \frac{a^4}{d^3}; \quad (3.11)$$

$$b_\beta = b_\alpha = \frac{\mu}{4} \frac{a^6}{d^3}. \quad (3.12)$$

С учётом зависимости вязкости газа от давления (3.7) формулы имеют вид:

- для прямоугольной пластины со сторонами  $a \times b$

$$b = \frac{2\mu_p p}{d^2} \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2}; \quad (3.13)$$

$$b_\alpha = \frac{\mu_p p}{2d^2} \frac{a^3 b^5}{(a^2 + b^2)}; \quad (3.14)$$

$$b_\beta = \frac{\mu_p p}{2d^2} \frac{a^3 b^5}{(a^2 + b^2)}; \quad (3.15)$$

- для квадратной пластины со сторонами  $a$

$$b = \mu_p p \frac{a^4}{d^2}; \quad (3.16)$$

$$b_\alpha = b_\beta = \frac{\mu_p p}{4} \frac{a^6}{d^2}. \quad (3.17)$$

**Пример.** Рассчитать абсолютный коэффициент демпфирования квадратного чувствительного элемента акселерометра. Дано:  $a = 8 \cdot 10^{-3}$  м,  $d = 2 \cdot 10^{-5}$  м. Демпфирующая среда — азот при давлении 1 атм. Рабочая температура  $+20^\circ\text{C}$ .

По табл. 3.1 найдём коэффициент вязкости азота при температуре  $20^\circ\text{C}$   $\mu = 1,7 \cdot 10^{-5}$  Н · с/м<sup>2</sup>. Используя формулы (3.11) и (3.12) получим

$$b = \frac{\mu a^4}{d^3} = \frac{1,7 \cdot 10^{-5} (8 \cdot 10^{-3})^4}{(2 \cdot 10^{-5})^3} = 8,7 \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{м}},$$

$$b_\beta = b_\alpha = \frac{1}{4} b a^2 = \frac{1}{4} \cdot 8,7 (8 \cdot 10^{-3})^2 = 1,39 \cdot 10^{-4} \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{м}}.$$

## 3.2. Конструкционное демпфирование

### 3.2.1. Характеристики конструкционного демпфирования колебаний

Колебания реальной системы, вызванные однократным возмущением, постепенно затухают. Причиной затухания, кроме газодинамического сопротивления, являются силы неупругого сопротивления, обусловленные внутренним трением в материале колеблющейся конструкции, трением в кинематических парах и опорах, трением о внешнюю среду. Эти силы вызывают диссипацию (рассеяние) механической энергии. Способность системы поглощать энергию циклического деформирования называют демпфирующей способностью.

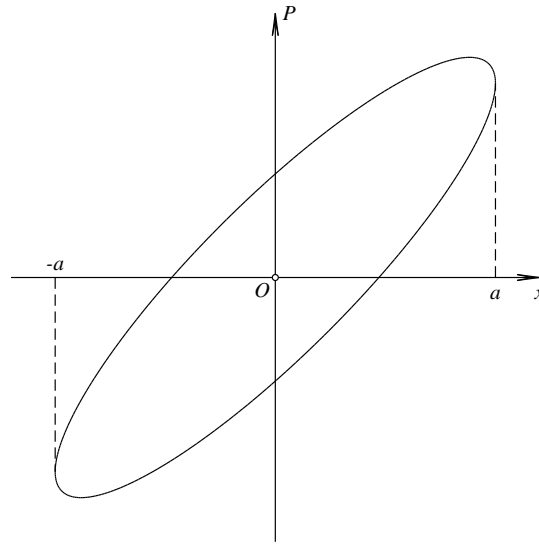
Демпфирующая способность обуславливает затухание свободных колебаний и ограничение амплитуды резонансных колебаний системы и её элементов, что является одним из основных факторов динамической прочности вибрирующих элементов и устойчивой работы микросистемных устройств и микроприборов.

Силы неупругого сопротивления связаны со скоростями  $v$  точек системы, и для их описания используют степенную зависимость

$$P = -k_1 v |v|^{n-1}, \quad (3.18)$$

где  $k_1$ ,  $n$  — опытные постоянные.

При  $n = 1$  выражение (3.18) описывает линейное сопротивление.



**Рис. 3.3.** Петля гистерезиса

Вследствие внутреннего трения при циклическом деформировании материалов наблюдается отклонение от закона Гука, т. е. связь между напряжениями и деформациями описывается не линейной зависимостью, а двумя кривыми, образующими петлю гистерезиса. Это относится и к связи между нагрузкой  $P$  на систему и соответствующим перемещением  $x$  (3.3).

Мерой рассеяния энергии при колебаниях за один цикл является площадь петли гистерезиса  $\Delta W$ , которая определяется только амплитудой перемещения и описывается зависимостью

$$\Delta W = k_2 a^{n+1}, \quad (3.19)$$

где  $a$  — амплитуда перемещения;  $k_2$ ,  $n$  — постоянные, зависящие от материала и типа конструкции.

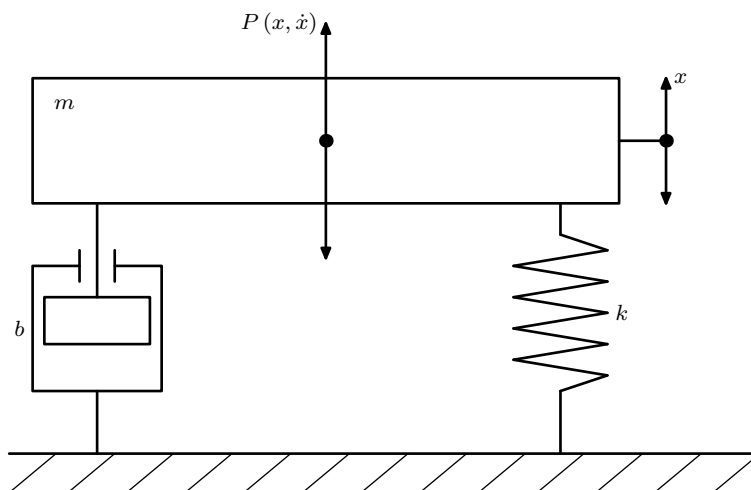
При продольных и изгибных колебаниях нормальные напряжения  $\sigma$  в вязкоупругих материалах связывают с относительной деформацией  $\varepsilon$  равенством

$$\sigma = E \left( \varepsilon + b \frac{d\varepsilon}{dt} \right); \quad (3.20)$$

при крутильных колебаниях касательные напряжения  $\tau$  представляют в виде

$$\tau = G \left( \gamma + b \frac{d\gamma}{dt} \right),$$

где  $E$ ,  $G$  — модули упругости и сдвига;  $\varepsilon$ ,  $\gamma$  — линейная и угловая деформации;  $b$  — коэффициент демпфирования.



**Рис. 3.4.** Модель вязкоупругого тела

Рассмотрим свободные колебания одномассовой системы при линейном сопротивлении на примере вязкоупругой модели, приведённой на рис. 3.4. С учётом сил упругости  $kx$  и линейного вязкого сопротивления  $b\dot{x}$  дифференциальное уравнение движения массы имеет вид

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0, \quad (3.21)$$

где  $m$  — масса;  $b$  — коэффициент демпфирования в системе;  $k$  — жёсткость упругого подвеса массы;  $x$  — перемещение.

Обозначим  $k/m = \omega_0^2$  и  $b/2m = n$ . Здесь коэффициент  $n$  характеризует приведённое демпфирование в системе, его не следует смешивать с показателем степени в уравнениях (3.18) и (3.19).

Запишем дифференциальное уравнение (3.21) в форме

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (3.22)$$

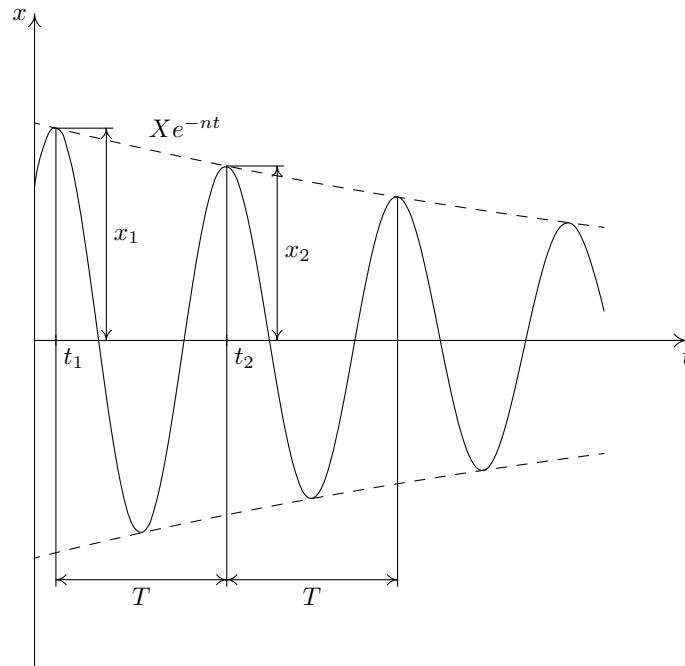
или

$$\ddot{x} + 2\omega_0 \xi \dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

где  $\omega_0$  — собственная круговая частота системы ( $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ ;  $\xi$  — относительный коэффициент демпфирования ( $\xi = n/\omega_0$ )).

Общее решение уравнения (3.22) при соблюдении неравенства  $\omega_0 > n$  может быть представлено в виде

$$x = X e^{-nt} \sin(\omega_1 t + \alpha),$$



**Рис. 3.5.** Кривая затухающих колебаний

где  $X$ ,  $\alpha$  — начальные амплитуда и фазовый угол соответственно;  $\omega_1$  — круговая частота затухающих колебаний;  $n$  — приведённое демпфирование;  $t$  — время.