teoria geométrica das folheações

Conteúdo

INTRODUÇÃO

A idéia intuitiva de folheação corresponde a decomposição de uma variedade numa união de subvariedades conexas, disjuntas, de mesma dimensão chamadas folhas, as quais se acumulam localmente como as folhas de um livro.

A teoria das folheações, como é conhecida atualmente, se iniciou com os trabalhos de C. Ehresmann e G. Reeb na década de 1940, embora, como Reeb mesmo observou, já no fim do século passado P. Painlevé percebeu a necessidade de se criar uma teoria geométrica (das folheações) para melhor compreender os problemas relativos ao estudo das soluções de equações diferenciais holomorfas no campo complexo.

O desenvolvimento da teoria das folheações foi provocado, no entanto, pela seguinte pergunta sobre topologia das variedades proposta por H. Hopf na década de 1930: "Existe na esfera euclidiana S^3 um campo de vetores completamente integrável, isto é, um campo X tal que $X \cdot \operatorname{rot} X = 0$?". Pelo Teorema de Frobenius, esta pergunta é equivalente à seguinte: "Existe na esfera S^3 uma folheação de dimensão dois?".

Esta questão foi respondida afirmativamente por Reeb na sua tese, onde ele exibe um exemplo de folheação em S^3 com as seguintes características. Existe uma folha compacta homeomorfa ao toro bidimensional, enquanto, todas as outras folhas são homeomorfas a planos bidimensionais se acumulando assintoticamente na folha compacta. Além disso a folheação é de classe C^∞. Neste trabalho também são demonstrados os teoremas de estabilidade, um dos quais, válido para dimensão qualquer, afirma que se uma folha é compacta e tem grupo fundamental finito então ela possui uma vizinhança constituída por folhas compactas com grupo fundamental finito. A tese de Reeb motivou pesquisas de outros matemáticos, entre os quais A. Haefliger, que demonstrou na sua tese em 1958 que não existem folheações analíticas de dimensão 2 em S^3. Na realidade o teorema de Haefliger é válido em dimensões superiores.

O exemplo de Reeb e outros, que vieram a ser posteriormente construídos, tornaram a seguinte questão folclórica no meio matemático: "É verdade que toda folheação de dimensão dois de S^3 possui uma folha compacta?" Esta questão veio a ser respondida afírmativamente por S. P. Novikov em 1965, utilizando em parte os métodos introduzidos por Haefliger na sua tese. Na realidade o teorema de Novikov é mais forte. Ele afirma que em qualquer variedade de dimensão três, compacta e simplesmente conexa, existe uma folha compacta homeomorfa ao toro bidimensional, limitando um toro sólido, onde as folhas são homeomorfas a planos bidimensionais que se acumulam na folha compacta, da mesma forma que na folheação de Reeb de S^3.

Presume-se que a questão inicialmente proposta por Hopf foi motivada pela intuição de que deviam existir invariantes não homotópicos que servissem para classificar as variedades de dimensão três. Afinal essa questão não foi bem sucedida neste objetivo, já que qualquer variedade de dimensão três admite uma folheação de dimensão dois. No entanto, um refinamento proposto por J. Milnor, ainda com a mesma motivação, teve melhores resultados. Com efeito, Milnor definiu o posto de uma variedade como o número máximo de campos de vetores que é possível construir na variedade, dois a dois comutativos, e linearmente independentes em todo ponto. Este conceito se traduz naturalmente em termos de folheações associadas a ações do grupo $\mathbb{R}^n$. O problema proposto por Milnor foi o de calcular o posto de S^3. Este problema foi resolvido por E. Lima em 1963 ao mostrar que o posto de uma variedade compacta e simplesmente conexa de dimensão três é um. Posteriormente, H. Rosenberg, R. Roussarie e D. Weil classificaram as variedades compactas tridimensionais de posto dois.

Neste livro pretendemos expor ao leitor, de uma maneira sistemática, a linha de resultados mencionados acima. O desenvolvimento posterior da teoria das folheações foi bastante acentuado, especialmente nos últimos dez anos. Esperamos que este livro motive a leitura de trabalhos não tratados aqui. Alguns destes são indicados na bibliografia das quatro últimas referências do texto.

Desejamos expressar aqui o nosso agradecimento a Airton Medeiros e Roberto Mendes por várias sugestões e especialmente a Paulo Sad pela sua colaboração na leitura e crítica do texto.

Rio de Janeiro, maio de 1979.

César Camacho
Alcides Lins Neto

CAPÍTULO I

VARIEDADES DIFERENCIÁVEIS

Neste capítulo recordaremos os resultados básicos da teoria de variedades e aplicações diferenciáveis com o intuito de fixar os enunciados dos principais teoremas e as notações conforme serão usados no livro.

§1 Variedades diferenciáveis

Assim como os espaços topológicos formam o domínio natural das funções contínuas, as variedades diferenciáveis são o domínio natural das aplicações diferenciáveis. Para compreender melhor a definição de variedade comecemos então recordando alguns aspectos do cálculo diferencial.

Uma aplicação $f : U \to \mathbb{R}^n$ de um aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}^n$ é diferenciável em $xe \in U$ se existe uma transformação linear $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ que aproxima f numa vizinhança de x no seguinte sentido:

$$f(x+v) = f(x) + T \cdot v + R(v) \quad \text{e} \quad \lim_{v \to 0} \frac{R(v)}{|v|} = 0$$

para todo $v \in \mathbb{R}^m$ suficientemente pequeno.

A aplicação T quando existe é única. Ela é chamada derivada de f em x e denotada $Df(x)$.

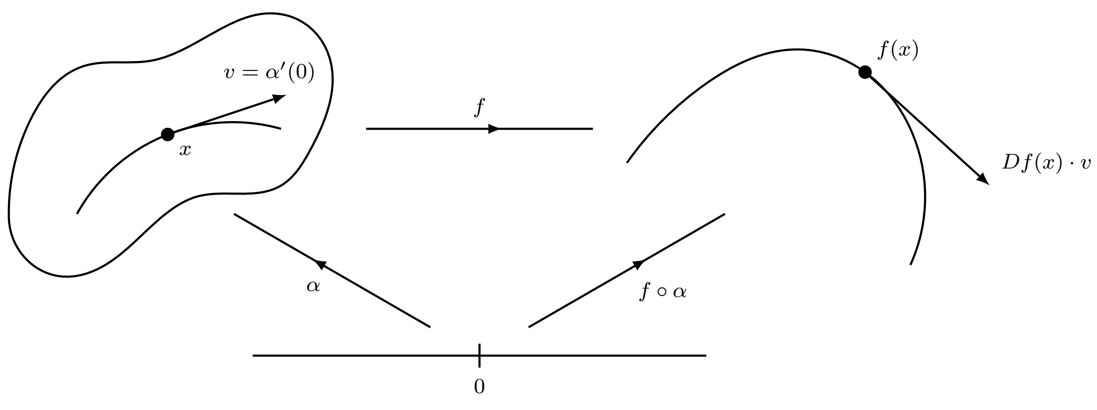

Figura 1

§2 A derivada

Introduziremos a seguir a noção de derivada de uma aplicação diferenciável entre duas variedades, tomando como modelo a interpretação geométrica da derivada de uma aplicação diferenciável em Rm dada no começo.

§3 Imersões e submersões

Dada uma aplicação C^r $(r \geq 1)$, $f : M \to N$, diremos que f *é uma imersão* se para todo $x \in M$, $Df(x) : T_xM \to T_yN$, $y = f(x)$, é injetiva. Dizemos que f é *uma submersão* se para todo $x \in M$, $Df(x) : T_xM \to T_yN$ é sobrejetiva.

§4 Subvariedades

Um subconjunto $N \subset M^m$ é chamado subvariedade de M de dimensão n e classe C^r $(r \geq 1)$, se para todo $p \in N$ existe uma carta local C^r, (U, φ), com $\varphi(U) = V \times W$ onde $0 \in V \subset \mathbb{R}^n$, $0 \in W \subset \mathbb{R}^{m-n}$ são bolas euclidianas, tal que $\varphi(N \cap U) = V \times 0$. Na situação acima dizemos também que a codimensão de N é $m - n = \dim(M) - \dim(N)$.

§5 Valores regulares

Seja $f : M \to N$ de classe C^r $(r \geq 1)$. Quando $p \in M$ for tal que $Df(p) : T_pM \to T_qN$, $q = f(p)$, é sobrejetiva diremos que p é *ponto regular* de f. Quando $q \in N$ for tal que $f^{-1}(q) = \varnothing$ ou $f^{-1}(q)$ é constituído apenas de pontos regulares, diremos que q é *valor regular de* f. Um ponto $q \in N$ que não é valor regular de f será chamado um *valor crítico* de f.

O resultado abaixo é consequência imediata da forma local das submersões.

§6 Transversalidade

§7 Partição da unidade

CAPÍTULO II

FOLHEAÇÕES

CAPÍTULO III

TOPOLOGIA DAS FOLHAS

CAPÍTULO IV

HOLONOMIA E OS TEOREMAS DE ESTABILIDADE

CAPÍTULO V

ESPAÇOS FIBRADOS E FOLHEAÇÕES

CAPÍTULO VI

FOLHEAÇÕES ANALÍTICAS DE CODIMENSÃO UM

CAPÍTULO VII

O TEOREMA DE NOVIKOV

CAPÍTULO VIII

ASPECTOS TOPOLÓGICOS DA TEORIA DE AÇÕES DE GRUPOS

APÊNDICE A

GRUPO FUNDAMENTAL E ESPAÇOS DE RECOBRIMENTO

APÊNDICE B

O TEOREMA DE FROBENIUS

§1 Campos de vetores e colchete de Lie

§2 O teorema de Frobenius

§3 Campos de planos definidos por formas diferenciais

EXERCÍCIOS

Bibliografia

[1] R. ABRAHAM e J. ROBBIN — Transversal mappings and flows, W. A. Benjamin, Inc., N. Y., 1967.

[2] D. V. ANOSOV — Geodesic flows on closed riemannian manifolds of negative curvature, Proc. Steklov Math. Inst. vol. 90, 1967, An. Math. Soc. Transl., 1969.

[3] V. I. ARNOLD e A. AVEZ — Problèmes ergodiques de la mécanique classique, Gauthier-Villars, Paris, 1967.

[4] P. BOHL — Uber díe hinsichtlich der unabhängigen und abhängigen variabeln periodisch differentialgleichung erster Ordnung, Acta Math. 40 (1916), pg. 321-336.

[5] C. CAMACHO — Slructural stability theorems for integrable differential forms on 3-manifolds, Topology vol. 17, 1978, pg. 143-155.

[6] C. CAMACHO — Poincaré-Bendixson theorem for $\mathbb{R}^2$-actions, Boi. da Soc. Bras. de Mat., vol. 5, n.º 1, 1974, pg. 11-16.

Índice