Séminaire BOURBAKI
(Mai 1957)

THÉORÈMES DE DUALITÉ POUR LES FAISCEAUX ALGÉBRIQUES COHÉRENTS

par

Alexandre GROTHENDIECK

Table des matières

Les résultats qui suivent, inspirés par le « théorème de dualité algébrique » de Serre, ont été trouvés en hiver 1955 et hiver 1956. Ils s'établissent très simplement à l'aide de résultats assez élémentaires sur la eohomologie des espaces projectifs [3], et l'utilisation intensive de l'algèbre homologique de Cartan–Eilenberg, sous la forme [2].

1. Les Ext de faisceaux de modules ([2] — chap. 3 et 4).

Soit X un espace topologique muni d'un faisceau $\underline{\mathcal{O}}$ d'anneaux avec unité (non nécessairement commutatifs). On considère la catégorie abélienne $C^{\underline{\mathcal{O}}}$ des faisceaux de $\underline{\mathcal{O}}$-Modules, appelés aussi $\underline{\mathcal{O}}$-Modules. On sait que tout objet de cette catégorie admet une résolution injective, ce qui permet d'y définir les foncteurs Ext ayant les propriétés formelles bien connues. De façon précise, pour éviter des confusions, nous désignons par $\mathrm{Hom}_{\underline{\mathcal{O}}}(X;A,B)$ ou simplement $\mathrm{Hom}(X;A,B)$ le <u>groupe</u> abélien des $\underline{\mathcal{O}}$-homomorphismes de A dans B, tandis que $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}}$ désignera le <u>faisceau</u> des germes d'homomorphismes de A dans B ($A, B \in C^{\underline{\mathcal{O}}}$). On définit pour $A \in C^{\underline{\mathcal{O}}}$ fixé des foncteurs h_A et $\underline{h}_A$ à valeurs respectivement foncteurs dans la catégorie $\mathcal{C}$ des groupes abéliens et la catégorie $\mathcal{C}^Z$ des faisceaux abéliens sur X, par les formules :

$$h_A(B) = \mathrm{Hom}_{\underline{\mathcal{O}}}(X;A,B) \qquad \underline{h}_A(B) = \underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{\mathcal{O}}}(A,B) \tag{1.1}$$

Les foncteurs $h_A(B)$ et $\underline{h}_A(B)$ sont des foncteurs covariants exacts à gauche, dont on considère les foncteurs dérives droits, notés respectivement $\mathrm{Ext}^p_{\underline{\mathcal{O}}}(X;A,B)$ et $\underline{\mathrm{Ext}}^p_{\underline{\mathcal{O}}}(A,B)$. On a donc par définition

$$\begin{cases} \mathrm{Ext}^p_{\underline{\mathcal{O}}}(X;A,B) = (R^p h_A)(B) = H^p\left(\mathrm{Hom}_{\underline{\mathcal{O}}}(X;A,C(B))\right) \\ \underline{\mathrm{Ext}}^p_{\underline{\mathcal{O}}}(A,B) = (R^p \underline{h}_A)(B) = H^p\left(\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{\mathcal{O}}}(A,C(B))\right) \end{cases} \tag{1.2}$$

où le symbole R^p désigne le passage aux foncteurs dérives droits, et où $C(B)$ désigne une résolution injective arbitraire de B dans $C^{\underline{\mathcal{O}}}$. Désignons par $r : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^Z$ le foncteur « sections ». Rappelons que ses foncteurs dérivés droits sont notés par $B \longrightarrow H^p(X,B)$:

$$H^p(X,B) = (R^p r)(B) = H^p(r(C(B))) \tag{1.3}$$

On a évidemment $h_A = r\underline{h}_A$; d'autre part on vérifie que h_A transforme objets injectifs en objets acycliques pour r. On en conclut de façon bien connue :

PROPOSITION 1. — *Il existe pour tout $\underline{\mathcal{O}}$-Module A un foncteur spectral cohomologique sur $C^{\underline{\mathcal{O}}}$, aboutissant au foncteur gradué $(\mathrm{Ext}^\star_{\underline{\mathcal{O}}}(X;A,B))$, et dont le terme initial est*

$$E_2^{p,q}(A,B) = H^p(X, \underline{\mathrm{Ext}}^q_{\underline{\mathcal{O}}}(A,B)) \tag{1.4}$$

On en déduit des « edge-homomorphisms » et une suite exacte à cinq termes que nous n'écrirons pas.

Bibliographie

[1] CARTIER (Pierre). — Les groupes $\mathrm{Ext}^s(A, B)$, Séminaire A. Grothendieck : Algèbre homologique, t. 1, 1957, n° 3.

[2] GROTHENDIECK (Alexandre). — Sur quelques points d'algèbre homologique, Tohoku math. J., t. 9, 1957, p. 119–183.

[3] SERRE (Jean–Pierre). — Faisceaux algébriques cohérents, Annals of Math., t. 61, 1955, p. 197–278.

[4] SERRE (Jean–Pierre). — Sur la dimension homologique des anneaux et des modules noethériens, Proc. Intern. Symp. on alg. number Theory [1955. Tokyo et Nikko] — Tokyo, Science Council of Japan, 1956 ; p. 175–189.