Regina Sarah Monferrari - 201835007

Lista 02 - Capítulo 2

1- Dividindo por casos, temos:

I) $a = 3k$,
logo $3|3k$

II) a deixa resto 1
$a = 3k+1$
$a+2 = (3k+1)+2$
$= 3k+3$
$3(k+1)$
$3|3(k+1)$

III) a deixa resto 2
$a = 3k+2$
$a+4 = (3k+2)+4$
$= 3k+6$
$= 3(k+2)$
$3|3(k+2)$

Então, em todos os três casos, a, $a+2$, ou $a+4$ é divisível por 3.

2 - a) Vamos dividir em 2 casos: $a = 2k$ e $a = 2k+1$.
Quando temos $a = 2k$, então $(2k+1)2k$, isto é divisível por 2
E quando $a = 2k+1$, então $(2k+1)(2k+2)$
$4k^2+6k+2$
$2(2k^2+3k+1)$, então é também divisível por 2

b) Dividiremos em 3 casos, $a = 3k$, $a = 3k+1$ e $a = 3k+2$
Em $a = 3k$, a equação $a(a+1)(a+2)$ é divisível por 3, pois $3|3k(3k+1)(3k+2)$

Em $a = 3k+1$, temos
$(3k+1)(3k+2)(3k+3)$
$(9k^2+9k+2)(3k+3)$
$27k^3+54k^2+33k+6$
$3(9k^3+18k^2+11k+2)$
logo, é divisível por 3

Em $a = 3k+2$, temos
$(3k+2)(3k+3)(3k+4)$
$(9k^2+12k+6)(3k+4)$
$3(3k^2+4k+2)(3k+4)$
Então, é divisível por 3

Dessa forma, provamos que $3 | a(a+1)(a+2)$

3- Vamos mostrar que se $a \mid (2x-3y)$ e $a \mid (4x-5y)$, então $a \mid y$ com $a, x, y \in \mathbb{Z}$

$$2x - 3y = q_1 a \ \text{(I)} \quad \text{e} \quad 4x - 5y = q_2 a \ \text{(II)}$$

$x = \dfrac{q_1 a + 3y}{2}$, substituindo x na equação (II):

$$4\left(\frac{q_1 a + 3y}{2}\right) - 5y = q_2 a \Rightarrow 2q_1 a + 6y - 5y = q_2 a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = q_2 a - 2q_1 a \Rightarrow y = a(q_2 - 2q_1), \text{ logo } a \mid y$$

4- Para $a^2 - b^2$ ser divisível por 8, sendo a e b ímpares

$a = 2k + 1$ e $b = 2l + 1$

$(2k+1)^2 - (2l+1)^2 = 8 \cdot q$

$4k^2 + 4k + 1 - 4l^2 - 4l - 1 = 8q$

$4(k^2 + k - l^2 - l) = 8q$

$(k^2 + k - l^2 - l) = 2q$

$\Rightarrow$ Para $(k^2 + k - l^2 - l)$ ser divis por 2

Temos: $k = 2m$ ou $k = 2m+1$ e

$l = 2n$ ou $l = 2n+1$

Por $2n$ e $2m$, a eq. é divisível por 2

Por $2n+1$ e $2m+1$, Temos

$(2m+1)^2 + (2m+1) - (2n+1)^2 - (2n-1) = 2q$

$2(2m^2 + 2m + m - 2n^2 - 2n - n) = 2q$

Provamos, desta forma, que $a^2 - b^2$ é divisível por 8.

5- Vamos mostrar que $m \mid b-a$ e $r_a = r_b$ quando divididos por m

$b = mq_1 + r_1$ e $a = mq_2 + r_2$

$b - a = mq_1 + r_1 - (mq_2 + r_2)$

$= m(q_1 - q_2) + r_1 - r_2$

Para $b-a$ ser divisível por m então $b - a = mq$

$\Rightarrow m(q_1 - q_2) + r_1 - r_2 = mq_3 + 0$

Como $m(q_1 - q_2) = mq_3$

então $r_1 - r_2 = 0$

$r_1 = r_2$

6- a) e b) Faremos a e b ao mesmo Tempo:

Todo número inteiro se escreve de uma das seguintes formas: $5k$, $5k \pm 1$, $5k+2$, $5k+3$ e $5k+4$. Vamos elevar ao quadrado p/ Tentarmos obter-mos os quadrados perfeitos:

$$(5k)^2 = 25k^2 = 5m$$
$$(5k+1)^2 = 25k^2 + 10m + 1 = 5m+1$$
$$(5k-1)^2 = 25k^2 - 10m + 1 = 5m-1$$
$$(5k+2)^2 = 25k^2 + 20k + 4 = 5m+4$$
$$(5k+3)^2 = 25k^2 + 30k + 9 = 5m+4$$
$$(5k+4)^2 = 25k^2 + 40k + 16 = 5m+1$$

Os algorismos que Terminam em um quadrado perfeito é ± 1 e ± 4

c) Se nenhum dos números a, b ou c for múltiplo de 5, então $a^2 + b^2 + c^2$ não é múltiplo de 5, logo pelo item a e b são da forma $5k \pm 1$ ou $5k \pm 4$.

Então, a soma $b^2 + c^2$ resulta em um número da forma $5k+2$ ou $5k+3$, então $a^2 = b^2 + c^2$ é também da forma $5k+2$ ou $5k+3$ o que é uma contradição do item a e b.

Regina Sarah Monferrari - 201835007

Lista 02 - Capítulo 2

1- Dividindo por casos, temos:

I) $a = 3k$, logo $3 \mid 3k$

II) a deixa resto 1
$a = 3k+1$
$a+2 = (3k+1)+2$
$= 3k+3$
$3(k+1)$
$3 \mid 3(k+1)$

III) a deixa resto 2
$a = 3k+2$
$a+4 = (3k+2)+4$
$= 3k+6$
$= 3(k+2)$
$3 \mid 3(k+2)$

Então, em todos os três casos, a, a+2, ou a+4 é divisível por 3.

2 - a) Vamos dividir em 2 casos: $a = 2k$ e $a = 2k+1$.
Quando temos $a = 2k$, então $(2k+1)2k$, isto é divisível por 2
E quando $a = 2k+1$, então $(2k+1)(2k+2)$
$4k^2+6k+2$
$2(2k^2+3k+1)$, então é também divisível por 2

b) Dividiremos em 3 casos, $a = 3k$, $a = 3k+1$ e $a = 3k+2$
Em $a = 3k$, a equação $a(a+1)(a+2)$ é divisível por 3, pois $3 \mid 3k(3k+1)(3k+2)$

Em $a = 3k+1$, temos
$(3k+1)(3k+2)(3k+3)$
$(9k^2+9k+2)(3k+3)$
$27k^3+54k^2+33k+6$
$3(9k^3+18k^2+11k+2)$
logo, é divisível por 3

Em $a = 3k+2$, Temos
$(3k+2)(3k+3)(3k+4)$
$(9k^2+12k+6)(3k+4)$
$3(3k^2+4k+2)(3k+4)$
Então, é divisível por 3

Dessa forma, provamos que $3 \mid a(a+1)(a+2)$

3- Vamos mostrar que se $a|(2x-3y)$ e $a|(4x-5y)$, então $a|y$ com $a, x, y \in \mathbb{Z}$

$2x - 3y = q_1 a$ (I) e $4x - 5y = q_2 a$ (II)

$x = \frac{q_1 a + 3y}{2}$, substituindo x na equação (II):

$4\left(\frac{q_1 a + 3y}{2}\right) - 5y = q_2 a \Rightarrow 2q_1 a + 6y - 5y = q_2 a \Rightarrow$

$\Rightarrow y = q_2 a - 2q_1 a \Rightarrow y = a(q_2 - 2q_1)$, logo $a|y$

4- Para $a^2 - b^2$ ser divisível por 8, sendo a e b ímpares

$a = 2k+1$ e $b = 2l+1$

$(2k+1)^2 - (2l+1)^2 = 8 \cdot q$

$4k^2 + 4k + 1 - 4l^2 - 4l - 1 = 8q$

$4(k^2 + k - l^2 - l) = 8q$

$(k^2 + k - l^2 - l) = 2q$

$\Rightarrow$ Para $(k^2 + k - l^2 - l)$ ser divis por 2

Temos: $k = 2m$ ou $k = 2m+1$ e

$l = 2n$ ou $l = 2n+1$

Por $2n$ e $2m$, a eq. é divisível por 2

Por $2m+1$ e $2m+1$, Temos

$(2m+1)^2 + (2m+1) - (2n+1)^2 - (2n-1) = 2q$

$2(2m^2 + 2m + m - 2n^2 - 2n - n) = 2q$

Provamos, desta forma, que $a^2 - b^2$ é divisível por 8.

5- Vamos mostrar que $m | b-a$ e $r_a = r_b$ quando divididos por m

$b = mq_1 + r_1$ e $a = mq_2 + r_2$

$b - a = mq_1 + r_1 - (mq_2 + r_2)$

$= m(q_1 - q_2) + r_1 - r_2$

Para $b-a$ ser divisível por m então $b - a = m q$

$\Rightarrow m(q_1 - q_2) + r_1 - r_2 = mq_3 + 0$

Como $m(q_1 - q_2) = mq_3$

então $r_1 - r_2 = 0$

$r_1 = r_2$

6- a) e b) Faremos a e b ao mesmo tempo:

Todo número inteiro se escreve de uma das seguintes formas: $5k$, $5k \pm 1$, $5k+2$, $5k+3$ e $5k+4$. Vamos elevar ao quadrado p/ tentarmos obter-mos os quadrados perfeitos:

$$(5k)^2 = 25k^2 = 5m$$

$$(5k+1)^2 = 25k^2 + 10m + 1 = 5m+1$$

$$(5k-1)^2 = 25k^2 - 10m + 1 = 5m-1$$

$$(5k+2)^2 = 25k^2 + 20k + 4 = 5m+4$$

$$(5k+3)^2 = 25k^2 + 30k + 9 = 5m+4$$

$$(5k+4)^2 = 25k^2 + 40k + 16 = 5m+1$$

Os algarismos que terminam em um quadrado perfeito é ± 1 e ± 4

c) Se nenhum dos números a, b ou c for múltiplo de 5, então $a^2 + b^2 + c^2$ não é múltiplo de 5, logo pelo item a e b são da forma $5k \pm 1$ ou $5k \pm 4$.

Então, a soma $b^2 + c^2$ resulta em um número da forma $5k+2$ ou $5k+3$, então $a^2 = b^2 + c^2$ é também da forma $5k+2$ ou $5k+3$ o que é uma contradição do item a e b.