



ECOLE
POLYTECHNIQUE
DE BRUXELLES

UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES

SYNTHÈSE

Circuits logiques et numériques ELEC-H-305

Auteur :
Cédric HANNOTIER

Professeur :
Dragomir MILOJEVIC

Année 2015 - 2016

Appel à contribution

Synthèse OpenSource



Ce document est grandement inspiré de l'excellent cours donné par Dragomir Milojevic à l'EPB (École Polytechnique de Bruxelles), faculté de l'ULB (Université Libre de Bruxelles). Il est écrit par les auteurs susnommés avec l'aide de tous les autres étudiants et votre aide est la bienvenue! En effet, il y a toujours moyen de

l'améliorer surtout que si le cours change, la synthèse doit être changée en conséquence. On peut retrouver le code source à l'adresse suivante

<https://github.com/nenglebert/Syntheses>

Pour contribuer à cette synthèse, il vous suffira de créer un compte sur *Github.com*. De légères modifications (petites coquilles, orthographe, ...) peuvent directement être faites sur le site! Vous avez vu une petite faute? Si oui, la corriger de cette façon ne prendra que quelques secondes, une bonne raison de le faire!

Pour de plus longues modifications, il est intéressant de disposer des fichiers : il vous faudra pour cela installer \LaTeX , mais aussi *git*. Si cela pose problème, nous sommes évidemment ouverts à des contributeurs envoyant leur changement par mail ou n'importe quel autre moyen.

Le lien donné ci-dessus contient aussi le README contient de plus amples informations, vous êtes invités à le lire si vous voulez faire avancer ce projet!

Licence Creative Commons

Le contenu de ce document est sous la licence Creative Commons : *Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International (CC BY-NC-SA 4.0)*. Celle-ci vous autorise à l'exploiter pleinement, compte- tenu de trois choses :



1. *Attribution* ; si vous utilisez/modifiez ce document vous devez signaler le(s) nom(s) de(s) auteur(s).
2. *Non Commercial* ; interdiction de tirer un profit commercial de l'œuvre sans autorisation de l'auteur
3. *Share alike* ; partage de l'œuvre, avec obligation de rediffuser selon la même licence ou une licence similaire

Si vous voulez en savoir plus sur cette licence :

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Merci !

Table des matières

1	Systèmes de numérotation	1
1.1	Représentation des nombres	1
1.2	Conversions	1
1.3	Opération arithmétiques	3
1.4	Nombres négatifs	3
1.4.1	Signe et Valeur Absolue (SVA)	3
1.4.2	Complément à la base	3
1.4.3	Overflow en C_2	4
1.5	Virgule flottante : Forme généralisée	4
1.5.1	Standard IEEE 754	5
2	Codes et Algèbre de Boole	6
2.1	Code	6
2.1.1	Codes pondérés	6
2.1.2	Codes non-pondérés	7
2.1.3	Codes correcteurs	8
2.2	Algèbre de Boole	9
2.2.1	Définition	9
2.2.2	Algèbre de Boole à 2 valeurs	9
2.3	Fonctions logiques	11
2.3.1	Représentation des fonctions logiques	11
2.4	Réalisation matérielle	14
3	Expressions logiques	15
4	Simplification des fonctions logiques	16
5	Synthèse des systèmes combinatoires	17
6	Synthèse des systèmes séquentiels asynchrones	18
7	Synthèse des systèmes séquentiels synchrones	19

Chapitre 1

Systèmes de numérotation

1.1 Représentation des nombres

Soit un nombre N en base r , sa forme généralisé s'écrit :

$$N = \underbrace{\sum_{i=0}^{i=n} a_i r^i}_{\text{Partie entière}} + \underbrace{\sum_{j=1}^{j=m} b_j r^{-j}}_{\text{Partie fractionnaire}} \quad (1.1)$$

Les indexes i, j s'appellent les poids. On distingue 2 parties :

- Partie entière : $n + 1$ chiffres (a_0, \dots, a_n)
 - $i = n$: bit de poids plus fort (Most Significant Bit (MSB))
 - $i = 0$: bit de poids le plus faible (Least Significant Bit (LSB), donné par $\frac{N-a_0}{r}$)
- Partie fractionnaire : m chiffres (b_1, \dots, b_m)

Parmi l'infinité de bases r possibles, on en distingue 4 :

1.2 Conversions

De manière générale, pour passer d'une base p à une base q , on fera $(N)_p \rightarrow (N)_{10} \rightarrow (N)_q$.

Pour passer de la base p à la base 10, il suffit de réécrire le nombre sous sa forme générale et de calculer le résultat.

Pour passer de la base 10 à la base q , il faut séparer la partie entière de la fractionnaire :

- Partie entière : diviser par la base q , noter le reste de la division et répéter l'opération jusqu'à ce que le nombre soit plus petit que q . Une fois le résultat obtenu, le chiffre résultant se lit dans le sens **contraire** que celui du calcul. Exemple :

Type	Base
Décimale	$\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$
Binaire	$\{0,1\}$
Octal	$\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$
Hexadécimal	$\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F\}$

Tableau 1.1 – Bases utiles

	245	:8	5	
	30	:8	6	
	3	:8	3	
	0			

Sens de calcul
Sens de lecture

- Partie fractionnaire : écrire la partie fractionnaire sous la forme $0.xxx...$, la multiplier par q , noter le chiffre avant le $.$ du résultat, réinitialiser ce chiffre à 0 et répéter l'opération. Le nombre résultant se lit dans le **même** sens que celui du calcul. Exemple :

	.4375	x5	2.1875	2	
	.1875	x5	0.9375	0	
	.9375	x5	4.6875	4	
	.6875	x5	3.4375	3	
	.4375	x5	2.1875	2	
	.1875	x5	0.9375	0	

Sens de calcul
Sens de lecture

⚠ Faire gaffe avec l'hexadécimal, ne pas oublier de remplacer les chiffres > 9 par les lettres correspondantes

Néanmoins, dans le cas des bases utiles (Tableau 1.1), on préférera passer par la base 2. En effet, il suffit de regrouper les chiffres par groupe de x où x vaut l'exposant entre 2 bases (exemple : $x = 4$ pour les bases $2 \leftrightarrow 16$). On regroupera les chiffres en partant de part et d'autre de la virgule.

Base	Nombre		
10	245		
2	11110101		
Par 3	11	110	101
8	3	6	5
Par 4		1111	0101
16		F	5

Base	Nombre		
16	1F2		
2	0001 1111 0010		
Par 3	111	110	010
8	7	6	2

FIGURE 1.1 – Conversion entre bases utiles

⚠ Surtout ne pas oublier les chiffres manquants pour la partie fractionnaire sinon un $(110)_2$ se transformera en $((0)11)_2$

Astuce En binaire, lorsqu'un nombre est composé majoritairement de 1 et qu'on veut sa valeur, comme le nombre 111110010, comptez le nombre de chiffre $\Rightarrow x$ et faire $2^x - 1$ et

soustraire 2^i pour chaque 0. Dans notre exemple :

$$(111110010)_2 = (?)_{10} \quad (1.2)$$

$$x = 9 \quad (1.3)$$

$$2^9 - 1 = (511)_{10} \quad (1.4)$$

$$511 - 2^0 - 2^2 - 2^3 = (498)_{10} \quad (1.5)$$

$$(111110010)_2 = (498)_{10} \quad (1.6)$$

1.3 Opération arithmétiques

Les additions, soustractions, multiplications et divisions se déroulent comme en base 10, si ce n'est qu'au lieu de reporter quand on arrive au-dessus de 9, on reporte quand on arrive au dessus de la base-1 (grosso modo). Voir TP 1

Remarque dans le cas de codage binaire sur 8 bits (chiffre maximum 255), si l'on fait $236 + 170$, nous obtenons un chiffre au-dessus de la limite pour 8 bits, nous aurons donc un 9^{ème} bit. Le résultat sera donc tronqué car codé sur 8 bits. Ce problème de débordement s'appelle l'*overflow*

1.4 Nombres négatifs

En binaire, il existe 3 modes de représentation pour les nombres négatifs :

1. Signe et Valeur Absolue (SVA)
2. Complément à la base (C_1)
3. Complément à 2 (C_2)

1.4.1 Signe et Valeur Absolue (SVA)

Par convention :

- 1 bit réservé pour le signe tel que :
 - 0 = positif
 - 1 = négatif
- le reste réservé pour la valeur absolue

Ainsi, sur un mode à 8 bits, on peut représenter des chiffres $\in [-127, 127]$

Pour faire des opérations arithmétiques avec cette notation, il faut :

1. Comparer les signes pour déterminer le signe des résultats
2. Comparer la magnitude des nombres pour déterminer le sens ($A < B \rightarrow B - A$,
 $A > B \rightarrow A - B$)

Niveau matériel, c'est galère...

1.4.2 Complément à la base

Complément à 1 (C_1)

Cette notation est valeur \forall base. Le principe est de faire la soustraction comme une addition. Soit 2 nombre A et B , en base r , codés sur m chiffres

$$A - B = A + (-B) \quad (1.7)$$

$$= A + (r^m - B) = A + B' \quad (1.8)$$

$$\text{où } \begin{array}{l} B' = \text{complément à la base } r \\ B + B' = r^m \end{array}$$

Mais pour arriver à ça, il faut quand même faire la soustraction $r^m - B$. Réorganisons

$$B' = (r^m - B) = ((r^m - 1) - B) + 1 \quad (1.9)$$

$(r^m - 1) - B$ est un complément de chaque chiffre de B

$$(r^m - 1) - B = \underbrace{((r-1)(r-1)\dots(r-1))}_{\triangle \text{Concaténation}} - (b_{m-1}b_{m-2}\dots b_0) \quad (1.10)$$

$$= ((r-1) - b_{m-1})((r-1) - b_{m-2})\dots((r-1) - b_0) \quad (1.11)$$

$$= b'_{m-1}b'_{m-2}\dots b'_0 \quad (1.12)$$

Cette méthode est très pratique en **binaire**, chaque chiffre est simplement inversé! Seul problème, nous avons 2 manière de représenter le 0 (sur 8 bits : 0000000 et 1111111). Les opérations arithmétique en C_1 sont faisable mais comporte parfois quelques cas particuliers.

Complément à 2 (C_2)

Au lieu d'utiliser le complément à 1 $B' = (r^m - 1) - B$, on utilise le complément à 2 $B' = (r^m - 1) - B + 1$. Grosso modo, on ajoute 1 au complément à 1. Contrairement à C_1 et SAV, on peut représenter les nombre $\in [-128, 127]$ et nous n'avons qu'une notation pour 0. La conséquence de tout ça est qu'il sera beaucoup plus facile de faire des opération arithmétique (soustraction \Rightarrow sommation). Seul problème, l'overflow...

Méthode de conversion pour complément

Nous utiliserons la plupart du temps le complément à 2. Pour convertir un nombre en complément à 1 ou 2 rien de plus simple :

1. Prendre la valeur absolue du nombre en **base 2** et compléter avec des 0 pour avoir les m bits demandés
2. Si le nombre est négatif :
 - (a) Inverser chaque bit $\Rightarrow C_1$
 - (b) $C_1 + 1 \Rightarrow C_2$

1.4.3 Overflow en C_2

une règle très simple permet de savoir si nous somme en overflow ou si le bit débordant peut être oublié sans risque

Si les 2 derniers bits du résultats sont **différent** (01 ou 10) \Rightarrow **OK**

Si Si les 2 derniers bits du résultats sont **les mêmes** (11 ou 00) \Rightarrow **Overflow**

1.5 Virgule flottante : Forme généralisée

Les nombres en virgule fixe à 32 ou 64 bits limitent fortement les calculs et augmenter le nombre de bit n'est pas une solution \rightarrow Nombre en virgule flottante :

$$N = \text{mantisse} \times (\text{base})^{\text{exposant}} \quad (1.13)$$

1.5.1 Standard IEEE 754

On distingue 2 type de précision :

— Simple précision : 32 bits

Nombre de bits	1	8	23
Type	Signe de la mantisse	Exposant (0 à 255)	Fraction normalisée
Biais		127	

Tableau 1.2 – IEEE 754 - Simple Précision

— Double précision : 64 bits

Nombre de bits	1	11	52
Type	Signe de la mantisse	Exposant (0 à 2047)	Fraction normalisée
Biais		1023	

Tableau 1.3 – IEEE 754 - Double Précision

Pour convertir un chiffre en virgule flottante il faut :

1. Convertir le nombre en binaire
2. Mettre sous forme $1.abcd... (\times x)$
3. Déterminer le signe (0 ou 1, voir sous-section 1.4.1)
4. Calculer l'exposant : $E = x + biais$
5. Écrire la mantisse ($abcd...$)

△ Le 1 de $1.abcd...$ n'est pas à écrire dans la mantisse

Chapitre 2

Codes et Algèbre de Boole

2.1 Code

Pour pouvoir, en binaire, représenter les chiffres de 0 à 9, il nous faut au minimum 4 bits ($\log_2 10$). Donc, nous perdons 6 codes du à l'arrondissement à 4 bits (1010, 1011, 1100, 1101, 1110 et 1111). En octal et hexadécimal, c'est plus pratique car il n'y a pas de perte du à l'arrondissement ($\log_2 8 = 3$ et $\log_2 16 = 4$). Il y a donc, d'autres façons de coder en fonction de l'utilisation qu'on en fait. On en distingue 3 classes :

1. Codes pondérés (*weighted codes*)
 - 8421 *Binary coded Decimal* (BCD) où chaque chiffre est codé séparément
 - Codes auto-complémentaires
 - 2421 Code
 - Code excédent 3 (Excess 3)
2. Codes non-pondérés
 - Code Gray (code cyclique)
 - *American Standard Code for Information Interchange* (code ASCII)
3. Code détecteurs d'erreur

2.1.1 Codes pondérés

Voici une table pour bien comprendre comment fonctionnent les codes auto-complémentaires (le $-$ de -3 correspond au chiffre négatif)

Décimal	8421 (BCD)	2421	642-3
0	0000	0000	0000
1	0001	0001	0101
2	0010	0010	0010
3	0011	0011	1001
4	0100	0100	0100
5	0101	1011	1011
6	0110	1100	0110
7	0111	1101	1101
8	1000	1110	1010
9	1001	1111	1111

Tableau 2.1 – Code auto-complémentaire

Addition en BCD

L'addition en BCD est simple, on additionne par 4 bits (chaque chiffre composant la base 10). Si le chiffre est ≥ 10 , on ajoute $+6$ (0110)₂ car cela correspond à un report de 10 en binaire. En effet, regroupé par 4 correspond à de l'hexadécimal, du coup, pour passer de 10 à 0, il faut ajouter 6 ($A \xrightarrow{+1} B \xrightarrow{+1} \dots \xrightarrow{+1} F \xrightarrow{+1} 0$). Exemple :

$$\begin{array}{rcccc}
 532 & 0101 & 0011 & 0010 \\
 +268 & +0010 & 0110 & 1000 \\
 & 1 & 1 & \\
 \hline
 800 & 1000 & 1010 & 1010 \\
 & & 0110 & 0110 \\
 \hline
 & (1000 & 0000 & 0000)_2 \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 \hline
 & (8 & 0 & 0)_{10}
 \end{array}$$

2.1.2 Codes non-pondérés

Code Gray

Le code Gray est un code suivant le principe de *Look-up Table*, c'est-à-dire que la conversion ne suit pas une règle mais une table de correspondance associant des valeurs. Le principe du Gray est que 2 codes voisins ne diffèrent que par la valeur d'un bit.

Décimal	Gray
0	000
1	001
2	011
3	010
4	110
5	111
6	101
7	100

Tableau 2.2 – Code Gray

Code ASCII

Le code ASCII est utilisé pour coder les caractères dans des systèmes de traitement numérique, comme les majuscules, les signes de ponctuation et cetera. Le code est basé sur 8 bits, donc 256 possibilités, mais en réalité, on en utilise que 128.

Decimal	Hex	Char	Decimal	Hex	Char	Decimal	Hex	Char	Decimal	Hex	Char
0	0	[NULL]	32	20	[SPACE]	64	40	@	96	60	`
1	1	[START OF HEADING]	33	21	!	65	41	A	97	61	a
2	2	[START OF TEXT]	34	22	"	66	42	B	98	62	b
3	3	[END OF TEXT]	35	23	#	67	43	C	99	63	c
4	4	[END OF TRANSMISSION]	36	24	\$	68	44	D	100	64	d
5	5	[ENQUIRY]	37	25	%	69	45	E	101	65	e
6	6	[ACKNOWLEDGE]	38	26	&	70	46	F	102	66	f
7	7	[BELL]	39	27	'	71	47	G	103	67	g
8	8	[BACKSPACE]	40	28	(72	48	H	104	68	h
9	9	[HORIZONTAL TAB]	41	29)	73	49	I	105	69	i
10	A	[LINE FEED]	42	2A	*	74	4A	J	106	6A	j
11	B	[VERTICAL TAB]	43	2B	+	75	4B	K	107	6B	k
12	C	[FORM FEED]	44	2C	,	76	4C	L	108	6C	l
13	D	[CARRIAGE RETURN]	45	2D	-	77	4D	M	109	6D	m
14	E	[SHIFT OUT]	46	2E	.	78	4E	N	110	6E	n
15	F	[SHIFT IN]	47	2F	/	79	4F	O	111	6F	o
16	10	[DATA LINK ESCAPE]	48	30	0	80	50	P	112	70	p
17	11	[DEVICE CONTROL 1]	49	31	1	81	51	Q	113	71	q
18	12	[DEVICE CONTROL 2]	50	32	2	82	52	R	114	72	r
19	13	[DEVICE CONTROL 3]	51	33	3	83	53	S	115	73	s
20	14	[DEVICE CONTROL 4]	52	34	4	84	54	T	116	74	t
21	15	[NEGATIVE ACKNOWLEDGE]	53	35	5	85	55	U	117	75	u
22	16	[SYNCHRONOUS IDLE]	54	36	6	86	56	V	118	76	v
23	17	[ENG OF TRANS. BLOCK]	55	37	7	87	57	W	119	77	w
24	18	[CANCEL]	56	38	8	88	58	X	120	78	x
25	19	[END OF MEDIUM]	57	39	9	89	59	Y	121	79	y
26	1A	[SUBSTITUTE]	58	3A	:	90	5A	Z	122	7A	z
27	1B	[ESCAPE]	59	3B	;	91	5B	[123	7B	{
28	1C	[FILE SEPARATOR]	60	3C	<	92	5C	\	124	7C	
29	1D	[GROUP SEPARATOR]	61	3D	=	93	5D]	125	7D	}
30	1E	[RECORD SEPARATOR]	62	3E	>	94	5E	^	126	7E	~
31	1F	[UNIT SEPARATOR]	63	3F	?	95	5F	_	127	7F	[DEL]

FIGURE 2.1 – Table ASCII

2.1.3 Codes correcteurs

Distance de Hamming quantifie la distance (la différence) entre 2 séquences de symboles (ex : $d(0111, 1010) = 3$).

n-cube cube à n dimensions (2^n sommets) où chaque n -bit string est représenté par un des sommets. Les sommets adjacents ont une distance de Hamming de 1.

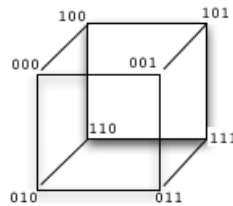


FIGURE 2.2 – n-cube pour $n = 3$

Principe général

Sur n -bits, on peut coder 2^n mots différents, si on rajoute 1 bit, nous avons n mots supplémentaires. Nous pouvons donc grâce à cela, définir n mots qualifiés d'erronés, ce qui sera utile pour détecter les erreurs (comme des erreurs de transmission).

Codes de parité paire ou impaire (*even (odd) parity codes*)

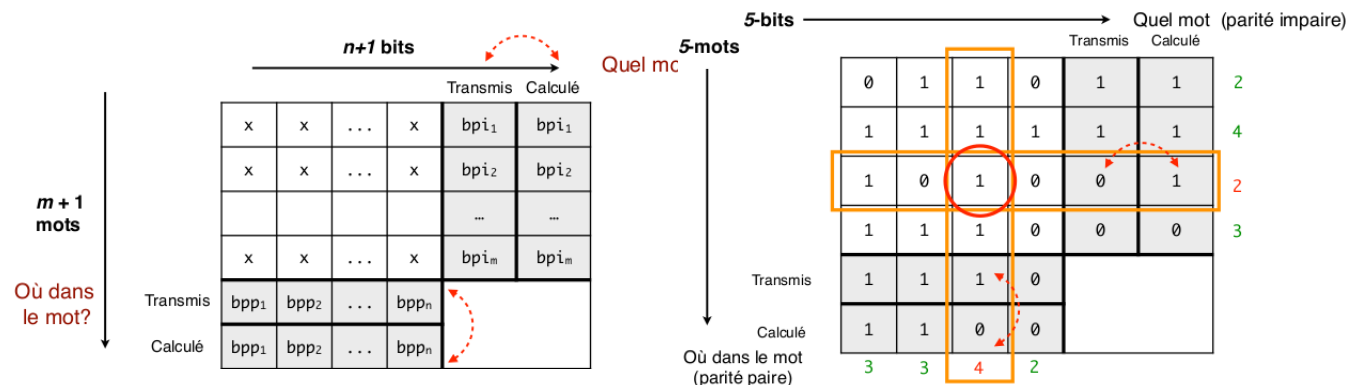
On code les mots de n -bits sur $(n + 1)$ bits, ainsi nous avons autant de mots corrects que d'erronés. Le critère de correction est défini par le $(n + 1)^{\text{ème}}$ bit.

Il faut compter le nombre de **1** et suivre la convention définie. Les 2 conventions sont :

- Bit de parité paire : 1 si c'est un nombre **impair**
- Bit de parité impair : 1 si c'est un nombre **pair**

Lors du calcul de parité, on peut ou non tenir compte du bit de parité (le $(n + 1)^{\text{ème}}$). Ici, on en tiendra pas compte.

Ce qui est intéressant, c'est de rajouter un bit de parité pour chaque poids (pour m-mots de n-bits, nous aurions donc des mots de $n + 1$ pour le bit de parité et $m + 1$ mot pour le bit de parité de poids). Ainsi, nous pourrions déterminer exactement le bit qui est erroné.



2.2 Algèbre de Boole

2.2.1 Définition

Algèbre de Boole est un quadruplet $\{B, ', \cdot, +\}$ où

- B est un ensemble de 2 valeurs
- $'$ est l'opérateur de complément (parfois symbole $-$)
- \cdot est l'opérateur **et**
- $+$ est l'opérateur **ou**

En fonction des définitions des opérateurs, on peut définir plusieurs algèbre de Boole. On ne s'intéressera ici que de celle-ci pour 2 valeurs.

2.2.2 Algèbre de Boole à 2 valeurs

Définition

L'algèbre de Boole à 2 valeurs est défini par (introduite par SHANNON) :

- $B = \{0, 1\}$
- $0 = \text{faux}$
- $1 = \text{vrai}$
- $+$ ou inclusif (or)
- \cdot et (and)

Les opérateurs $+$ et \cdot peuvent être définis par **Tables de Vérités** (TdV) suivantes :

x	y	$x \cdot y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

x	y	$x + y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Le nombre de variables ($= a$) détermine le nombre de lignes de la TdV (2^a). On remarque entre autre une petite propriété des TdV sur la valeur de chaque variable. Le LSD (ici y), se définit comme : 0, 1, 0, 1, ... ensuite (ici x) : 00, 11, 00, 11, ... et encore après 0000, 1111, 0000, ... Donc chaque variable répète sa valeur 2^n fois où n = poids de chaque variable.

Axiomes

E. V. HUNTINGTON posa 6 axiomes pour le cas de l'algèbre de Boole à 2 valeurs $B = \{0, 1\}$. Ces axiomes sont vérifiables par TdV. Les axiomes sont :

- Axiome 1. B est **fermé** pour $+$ et pour \cdot

x	x'	x	y	$x \cdot y$	x	y	$x + y$
0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	1	1
1	0	1	0	0	1	0	1
1	0	1	1	1	1	1	1

- Axiome 2. B a un **neutre** pour $+$ (noté 0) et pour \cdot (noté 1)

$$\begin{array}{l} 0 + 0 = 0 \\ 1 + 0 = 1 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{l} 0 \cdot 1 = 0 \\ 1 \cdot 1 = 1 \end{array} \quad (2.1)$$

- Axiome 3. B est **commutatif** par rapport à $+$ et \cdot

$$x + y = y + x \quad \text{et} \quad x \cdot y = y \cdot x \quad (2.2)$$

- Axiome 4. \cdot **distribue** $+$ et $+$ distribue \cdot

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \quad \text{et} \quad x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z) \quad (2.3)$$

Preuve par TdV

- Axiome 5. \exists **complément** de x (noté x' , \bar{x} ou $\text{not}(x)$)
- Axiome 6. Il y a au moins 2 éléments x, y du B tels que $x \neq y$

Théorèmes

À partir de ces axiomes, nous pouvons définir les théorèmes suivant (à droite, les théorèmes issus du Principe de dualité) :

Normaux

- Théorème 1. Indempotence pour $+$ et \cdot

$$x + x = x \quad \text{et} \quad x \cdot x = x \quad (2.4)$$

- Théorème 2.

$$x + 1 = 1 \quad \text{et} \quad x \cdot 0 = 0 \quad (2.5)$$

- Théorème 3. Absorption

$$x \cdot (x + y) = x \quad (2.6)$$

- Théorème 4. Involution

$$(x')' = x \quad (2.7)$$

Duaux

- Théorème 1. Indempotence pour $+$ et \cdot

$$x \cdot x = x \quad \text{et} \quad x + x = x \quad (2.4)$$

- Théorème 2.

$$x \cdot 0 = 0 \quad \text{et} \quad x + 1 = 1 \quad (2.5)$$

- Théorème 3. Absorption

$$x + (x \cdot y) = x \quad (2.6)$$

- Théorème 4. Involution

$$(x')' = x \quad (2.7)$$

– Théorème 5. Associativité

$$\begin{aligned}(x + y) + z &= x + (y + z) \\ \text{et} \\ (x \cdot y) \cdot z &= x \cdot (y \cdot z)\end{aligned}\quad (2.8)$$

– Théorème 6. Lois de DE MORGAN

$$\begin{aligned}(x + y)' &= x' \cdot y' \\ \text{et} \\ (x \cdot y)' &= x' + y'\end{aligned}\quad (2.9)$$

– Théorème 7. Consensus

$$x \cdot y + x' \cdot z + y \cdot z = x \cdot y + x' \cdot z \quad (2.10)$$

– Théorème 5. Associativité

$$\begin{aligned}(x \cdot y) \cdot z &= x \cdot (y \cdot z) \\ \text{et} \\ (x + y) + z &= x + (y + z)\end{aligned}\quad (2.8)$$

– Théorème 6. Lois de DE MORGAN

$$\begin{aligned}(x \cdot y)' &= x' + y' \\ \text{et} \\ (x + y)' &= x' \cdot y'\end{aligned}\quad (2.9)$$

– Théorème 7. Consensus

$$(x + y) \cdot (x' + z) \cdot (y + z) = (x + y) \cdot (x' + z) \quad (2.10)$$

Principe de dualité

Dans l'algèbre de Boole, tout résultat peut se présenter sous 2 formes dites duales.

Soit S un résultat, son dual S^* est obtenu en **permutant** :

- les opérateurs $+$ et \cdot
- les symboles 0 et 1 de B

**Si un résultat S est vrai dans l'algèbre de Boole,
il en est de même pour son dual**

Nous pouvons bien évidemment généraliser ce principe pour une expression Booléenne à n -variables

2.3 Fonctions logiques

Entrées arguments d'une fonction logique

Sorties évaluation de(s) la(es) fonction(s)

Chaque sortie aura une fonction logique qui lui est propre

2.3.1 Représentation des fonctions logiques

Il y a différentes formes pour représenter des fonctions logiques :

- **Fonctions logiques** : représentation compacte pour un faible nombre de variables. Pratique pour une manipulation manuelle ou «crayon et papier».
- **Tables de Vérité** : représentation tabulaire, proche de la représentation de type mémoire numérique (style *Look-up-Table*).
- **Schématique** : représentation graphique ; proche du monde de la réalisation physique ; facile à comprendre (mais peut être très compliqué pour un grand nombre d'arguments).
- **Diagrammes de Venn** : représentation graphique.

Peut importe la forme initiale, la fonction peut être transformée d'une forme à l'autre.

Exemple de fonction logique :

$$F = xz + xy'z + x'yz' \quad (2.11)$$

$$= x \cdot z + x \cdot y' \cdot z' + x' \cdot y \cdot z' \quad (2.12)$$

Une fonction logique peut s'écrire sous forme de Somme de Produit (*SdP*) ou sous forme de Produit de Somme (*PdS*)

Table de Vérité vers SdP

x	y	z	F		F vaut 1 lorsque (x ET y ET z) valent quelque chose:
0	0	0	1	+	0 ET 0 ET 0
0	0	1	1	+	ou
0	1	0	0		0 ET 0 ET 1
0	1	1	1	+	ou
1	0	0	0		0 ET 1 ET 1
1	0	1	0		...
1	1	0	1	+	
1	1	1	1	+	

Pour écrire sous forme SdP, il suffit de prendre toutes les lignes où $F = 1$ de réunir les variables d'une même ligne par \cdot et joindre chaque colonne par $+$ en transformant les variables de cette manière :

- a si $a = 1$
- a' si $a = 0$

Ainsi, la SdP est :

$$F = x' \cdot y' \cdot z' + x' \cdot y' \cdot z + x' \cdot y \cdot z + x \cdot y \cdot z' + x \cdot y \cdot z \quad (2.13)$$

Table de Vérité vers PdS

x	y	z	F		En partant à l'envers:
0	0	0	1		F vaut 1 lorsque xyz ne valent pas
0	0	1	1		010 ...
0	1	0	0	•	
0	1	1	1		F = (x'yz')'
1	0	0	0	•	(xy'z')'
1	0	1	0	•	(xy'z)'
1	1	0	1		
1	1	1	1		

Pour écrire sous forme PdS, il suffit de prendre toutes les lignes où $F = 0$ de réunir les variables d'une même ligne par + et joindre chaque colonne par \cdot en transformant les variables de cette manière :

- a si $a = 0$
- a' si $a = 1$

Ainsi, la PdS est :

$$F = (x + y' + z) \cdot (x' + y + z) \cdot (x' + y + z') \quad (2.14)$$

OU BIEN

On peut aussi faire la SdP pour $F = 0$ (en gardant bien les conventions pour *SdP*) et noté F' au lieu de F et ensuite faire De Morgan ($(F')' = F$)

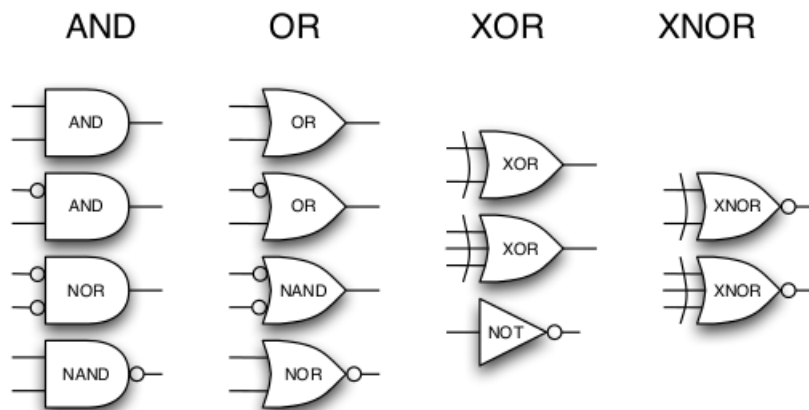
$$F' = x' \cdot y \cdot z' + x \cdot y' \cdot z' + x \cdot y \cdot z \quad (2.15)$$

$$F = (F')' = (x' \cdot y \cdot z')' \cdot (x \cdot y' \cdot z')' \cdot (x \cdot y \cdot z)' \quad (2.16)$$

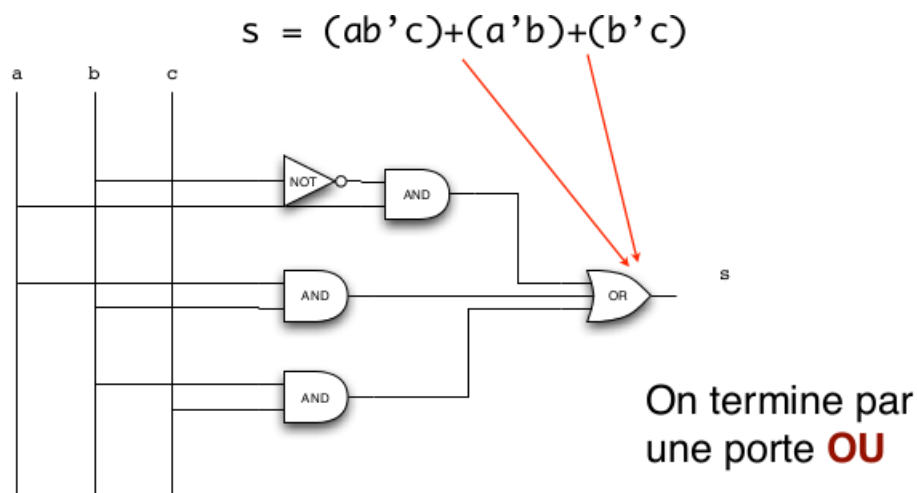
$$= (x + y' + z) \cdot (x' + y + z) \cdot (x' + y + z') \quad (2.17)$$

Schématique (logigrammes)

Voici les différents symboles pour les opérateurs :

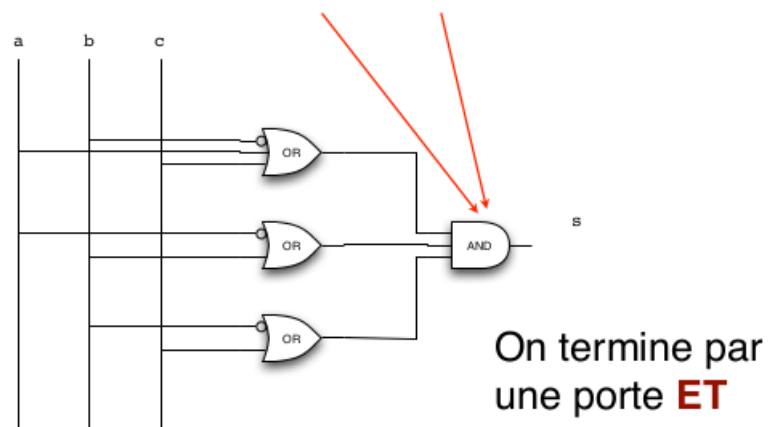


Dans un circuit en forme de SdP, on finit par une porte OU



Dans un circuit en forme de PdS, on finit par une porte ET

$$s = (a+b'+c)(a'+b)(b'+c)$$



2.4 Réalisation matérielle

Chapitre 3

Expressions logiques

Chapitre 4

Simplification des fonctions logiques

Chapitre 5

Synthèse des systèmes combinatoires

Chapitre 6

Synthèse des systèmes séquentiels asynchrones

Chapitre 7

Synthèse des systèmes séquentiels synchrones