



ECOLE  
POLYTECHNIQUE  
DE BRUXELLES

UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES

SYNTHÈSE

---

# Physique des semiconducteurs PHYS-H-300

---

*Auteur :*  
Nicolas ENGLEBERT

*Professeur :*  
Alain DUBUS

Année 2015 - 2016

# Appel à contribution

## Synthèse OpenSource



Ce document est grandement inspiré de l'excellent cours donné par Alain Dubus à l'EPB (École Polytechnique de Bruxelles), faculté de l'ULB (Université Libre de Bruxelles). Il est écrit par les auteurs susnommés avec l'aide de tous les autres étudiants et votre aide est la bienvenue ! En effet, il y a toujours moyen de l'améliorer surtout

que si le cours change, la synthèse doit être changée en conséquence. On peut retrouver le code source à l'adresse suivante

<https://github.com/nenglebert/Syntheses>

Pour contribuer à cette synthèse, il vous suffira de créer un compte sur *Github.com*. De légères modifications (petites coquilles, orthographe, ...) peuvent directement être faites sur le site ! Vous avez vu une petite faute ? Si oui, la corriger de cette façon ne prendra que quelques secondes, une bonne raison de le faire !

Pour de plus longues modifications, il est intéressant de disposer des fichiers : il vous faudra pour cela installer  $\text{\LaTeX}$ , mais aussi *git*. Si cela pose problème, nous sommes évidemment ouverts à des contributeurs envoyant leur changement par mail ou n'importe quel autre moyen.

Le lien donné ci-dessus contient aussi le README contient de plus amples informations, vous êtes invités à le lire si vous voulez faire avancer ce projet !

## Licence Creative Commons

Le contenu de ce document est sous la licence Creative Commons : *Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International (CC BY-NC-SA 4.0)*. Celle-ci vous autorise à l'exploiter pleinement, compte- tenu de trois choses :



1. *Attribution* ; si vous utilisez/modifiez ce document vous devez signaler le(s) nom(s) de(s) auteur(s).
2. *Non Commercial* ; interdiction de tirer un profit commercial de l'œuvre sans autorisation de l'auteur
3. *Share alike* ; partage de l'œuvre, avec obligation de rediffuser selon la même licence ou une licence similaire

Si vous voulez en savoir plus sur cette licence :

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

**Merci !**

## Chapitre 2

# Modèles de Drude et de Sommerfeld

### 2.1 Modèle de Drude

#### 2.1.1 Modèle de Drude pour les métaux

Malgré que le modèle de Drude soit ancien (1900) il est toujours utilisé aujourd'hui. A cette époque, l'électron n'a été mis en évidence que depuis trois ans : la physique quantique n'est pas encore connue mais les équations de Maxwell, elles, le sont bien.

Drude a voulu faire un *modèle phénoménologique pour expliquer les propriétés (conductivité électrique et thermique) des solides (essentiellement les métaux)*.

Au vu de la masse de la matière, Drude suppose qu'il existe des *êtres lourds* (cœurs ioniques) autour desquels règne le vide permettant aux électrons de se déplacer.

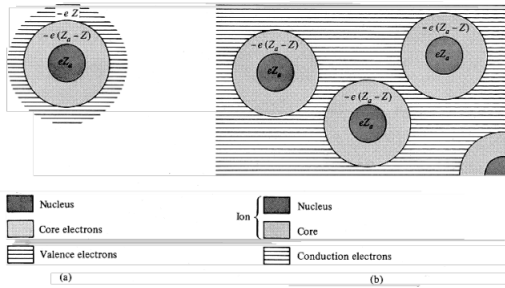


FIGURE 2.1 – Métal dans le modèle de Drude

Pour représenter cette densité, on utilise le paramètre  $r_s = \frac{r_0}{a_0}$  où  $a_0$  est le rayon de Bohr<sup>2</sup> et  $r_0$  le rayon d'une sphère contenant un seul électron. On a alors :

$$V_{\text{sphère}} = \frac{4\pi r_0^3}{3} = \text{Volume d'un électron} = \frac{1e^-}{n} \Rightarrow r_0 = \left( \frac{3}{4\pi n} \right)^{1/3} \Leftrightarrow r_s = \left( \frac{3}{4\pi n a_0^3} \right)^{1/3} \quad (2.2)$$

Ce paramètre est compris entre 2 et 3 pour la majorité des métaux et entre 3 et 6 pour les métaux alcalins.

**Inclure tableau slide** Dans ce tableau, on peut voir  $Z$  comme la valence, c'est à dire le nombre d'électrons qui vont jouer dans le conduction<sup>1</sup>. La densité du gaz d'électron de valence, donnant le nombre d'électrons par volume, s'exprime

$$n = N_A * \frac{Z\rho_m}{A} \approx 10^{22} \frac{e^-}{cm^3} \quad (2.1)$$

où  $N_A$  est le nombre d'Avogadro,  $\rho_m$  la masse spécifique du matériau ([g/cm<sup>3</sup>]) et  $A$  la masse atomique de l'élément.

1. Ne pas confondre avec  $Z_a$ , le numéro atomique. On a donc  $Z_a - Z$  électrons restant liés aux noyaux.

2.  $a_0 = 4\pi\epsilon_0 \frac{\hbar^2}{m_e e^2}$

## 2.2 Hypothèses de base du modèle de Drude

Pour parvenir à son modèle, Drude émet quatre hypothèses

1. On postule l' *approximation des électrons indépendants* qui consiste à négliger l'interaction entre les électrons et l' *approximation des électrons libre* qui consiste à négliger les interactions ion-électron. La première approximation est très pertinente mais la deuxième est à abandonner pour une compréhension qualitative du comportement des métaux. Ces approximations permettent de considérer que les électrons suivent un mouvement "classique" (MRU en l'absence de champ extérieur, etc...).
2. Collisions instantanées : la vitesse d'un électron change brusquement lors d'une collision avec un cœur ionique.
3. C'est l'ingrédient phénoménologique : la probabilité de collision par unité de temps  $1/\tau$  ( $[s^{-1}]$ ) où  $\tau$  est le temps de relaxation, que l'on suppose indépendant de la position et de la vitesse de l'électron<sup>3</sup>.
4. Les collisions amènent à un équilibre thermodynamique local (après un nombre conséquent de collision, une seule ne suffit pas). Immédiatement après une collision, l'électron a une direction aléatoire et une vitesse donnée par la distribution de la théorie cinétique des gaz.

## 2.3 Conductivité électrique "en courant continu" d'un métal

On peut écrire la loi d'Ohm locale<sup>4</sup>

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (2.3)$$

où  $\sigma$  est la conductivité électrique et  $\vec{j}$  est le vecteur densité de courant, la densité de charge qui traverse une surface unitaire par unité de temps.

Soit  $n$  électrons par unité de volume se déplaçant à vitesse moyenne  $\vec{v}$ . Sur  $dt$ , ils parcourent  $vdt$  et donc  $n(vdt)S$  électrons vont traverser une surface  $S$  perpendiculaire au courant. La charge électrique traversant la surface sera  $-envdtS$ . Comme  $I = dQ/dt$ , on a  $I = -nevS$ . Par définition,  $J = I/S$ . La densité de courant vaut alors

$$\vec{j} = -e.n.S.\vec{v}\frac{1}{S} = -ne\vec{v} \quad (2.4)$$

Le temps entre deux collisions est le temps de relaxation. Immédiatement après une collision la vitesse est  $\vec{v}_0$ . A cela nous rajoutons en plus la vitesse due à l'action du champ sur la charge<sup>5</sup> qui est  $-e\vec{E}\tau/m$ . Par l'hypothèse 4,  $\vec{v}_0$  ne contribue pas à la vitesse moyenne (pas de direction privilégiée) :

$$\vec{v}_{moy} = \frac{-e\tau\vec{E}}{m} \quad (2.5)$$

Avec la définition de  $\vec{j}$ , on obtient

$$\vec{j} = \frac{ne^2\tau}{m}\vec{E} \quad (2.6)$$

En en déduit avec la loi d'Ohm locale que

---

3. La probabilité de subir une collision sur un intervalle de temps  $dt$  est  $dt/\tau$ .

4. ou bien  $\vec{j}(E) = \rho \text{vec}(j)$

5.  $f = ma = eE \Leftrightarrow a = \frac{eE}{m} \Leftrightarrow v = \frac{eE\tau}{m}$

**A retenir :**

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m} \quad (2.7)$$

Le **tableau** donne des temps de relaxations  $\tau$  calculés par Drude. A noter que son ordre de grandeur est  $\approx 10^{-14}$  s, ce que Drude avait conclut comme correct. Hélas, la vitesse qu'il a considérée était fautive<sup>6</sup>. La vitesse exacte donne lieu à des distances moyennes entre deux collisions<sup>7</sup> plus grandes qui peuvent encore s'agrandir à basse température : l'hypothèse des collision avec les cœur ionique est donc fautive, mais on peut utiliser ce modèle sans nous poser la question de la cause des collisions.

## 2.4 Effet Hall et magnétorésistance

Considérons un champ électrique  $E_x$  selon  $x$  appliqué au fil avec, en plus, un champ magnétique  $\vec{H}$ <sup>8</sup> dirigé selon  $z$ . La force de Lorentz exercée sur les  $e^-$  vaut

$$-ev_x\vec{1}_x \times B\vec{1}_z \quad (2.8)$$

Les électrons seront défléchis dans le sens  $-y$  et un champ électrique  $E_y$  va s'installer, dirigé vers les  $y$  négatifs<sup>9</sup>. Ce champ à l'équilibre va contrebalancer la force de Lorentz :  $|E_y| = |v_x|B$ .

Deux grandeurs sont remarquables :

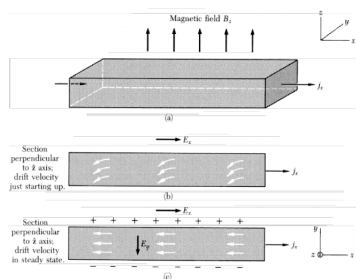
1. Remarquons la résistivité selon l'axe  $x$  :

$$\rho(B) = \frac{E_x}{j_x} \quad (2.9)$$

C'est la *magnétorésistance*<sup>10</sup> *transverse* (car le champ magnétique est perpendiculaire au champ électrique), indépendante de  $B$ .

2. Le champ électrique transversal  $E_y \propto B, j_x$ . On définit le coefficient (ou constante) de Hall :

$$R_H = \frac{E_y}{j_x B} \quad (2.10)$$



Le signe de  $j_x$  est indépendant du signe des porteurs de charge ainsi que de la force de Lorentz. Si les charges sont positives,  $E_y$  et  $R_H$  seront positifs. On peut calculer ce coefficient :

$$-eE_y = ev_x B \Leftrightarrow -neE_y = nev_x B = j_x B \Rightarrow R_H = -\frac{1}{ne} \quad (2.11)$$

où  $R_H$  est négatif car le champ de Hall est en  $-\vec{1}_y$ .

FIGURE 2.2 – Expérience de Hall

6. Car la distribution des vitesses des électrons d'un métal n'est pas maxwellienne

7. calculées à partir de  $\tau$  et  $v_0$

8. C'est bien  $\vec{H}$  le champ magnétique et non  $\vec{B}$  qui est la densité de champ d'induction magnétique ! Biot et Savart permet de calculer  $\vec{H}$  mais pas  $\vec{B}$  (erreur fréquente). Cependant, seul  $\vec{B}$  est mesurable,  $\vec{H}$  "n'existe pas".

9. Attention, la vitesse des électrons est bien opposée à celle de  $\vec{j}$

10. La magnétorésistance est la propriété qu'ont certains matériaux de présenter une résistance qui évolue lorsqu'ils sont soumis à un champ magnétique.

### 2.4.1 Conductivité thermique

Le plus grand succès de ce modèle est d'avoir su expliquer la loi de Wiedemann-Franz disant que  $\kappa/\sigma \propto \alpha T$  où  $\alpha$  est une constante de proportionnalité. Dans son modèle, Drude suppose que la chaleur (courant thermique) est essentiellement transportée par les électrons de conduction.<sup>11</sup> (suivant une distribution de Maxwell).

Pour estimer  $\kappa$ , modélisons un barreau de cuivre avec des température élevé à gauche et faible à droite. Les électrons vont se déplacer plus ou moins rapidement, formant un gradient de température.

$$\vec{j}^Q = -\kappa \vec{\nabla} T \quad (2.12)$$

où  $\vec{j}^Q$  est le courant thermique, soit la chaleur traversant une surface unitaire par unité de temps. Il s'agit de la loi de Fourier où  $\kappa$  est la conductivité thermique. Pour calculer  $\kappa$ , faisons un bilan de courant de chaleur le tout un une dimension  $x$  pour commencer, en considérant une surface transverse à notre belle barre.

- La moitié des électrons vient de gauche, l'autre de droite.
- L'énergie thermique par un électron dans un métal à température d'équilibre  $T$  est noté  $\epsilon(T)$  (l'énergie cinétique dépend de la température).
- Si la dernière collision est en  $x'$ , son énergie thermique est  $\epsilon(T[x'])$ .
- En moyenne, les électrons ont subi leur dernière collision en  $x - v\tau$  et ont une énergie de  $\epsilon(T[x - v\tau])$ .

On obtient alors

$$j^Q = \frac{1}{2}nv[\epsilon(T[x - v\tau]) - \epsilon(T[x + v\tau])] \quad (2.13)$$

où le premier terme représente la contribution au courant thermique des électrons venant de gauche tandis que le second terme représente celle des électrons venant de droite. La variation de température sur un  $\ell_{pm}$ <sup>12</sup> étant faible, on peut développer  $\vec{j}^Q$  en série autour de  $x$ <sup>13</sup> :

$$j^Q = nv^2\tau \frac{d\epsilon}{dT} \left( -\frac{dT}{dx} \right) \quad (2.14)$$

Drude suppose qu'après collision on a distribution isotropique des vitesses. Ainsi, en passant en 3D, il faudra considérer  $v_x^2 = \frac{1}{3}v^2$ , avec  $v^2$  la vitesse quadratique moyenne des électrons. Comme nous avons également

$$n \frac{d\epsilon}{dT} = N/V \frac{d\epsilon}{dT} = \frac{dE/dT}{V} = c_v \quad (2.15)$$

où  $c_v$  est la chaleur spécifique électronique par unité de volume. On a alors

$$\vec{j}^Q = \frac{1}{3}v^2\tau c_v (-\vec{\nabla} T) \quad (2.16)$$

Par identification avec la loi de Fourier

$$\kappa = \frac{1}{3}v^2\tau c_v \quad (2.17)$$

On peut obtenir le rapport suivant :

$$\frac{\kappa}{\sigma} = \frac{1}{3} \frac{c_v m v^2}{n e^2} \quad (2.18)$$

11. Car les métaux conduisent mieux la chaleur.

12. pour rappel,  $\ell_{pm}$  signifie "libre parcours moyen" et est la distance moyenne parcourue par une particule entre deux collisions successives

13. ??

Comme on considère une distribution de Maxwell, la valeur de  $c_v$  et de  $\langle mv^2/2 \rangle$  sont connues (respectivement  $(3/2)nk$  et  $(3/2)k_B T$ ) :

$$\frac{\kappa}{\sigma} = \frac{3}{2} \left( \frac{k}{e} \right)^2 T \quad (2.19)$$

C'est la loi de Wiedemann-Franz. Le nombre de Lorentz  $\kappa/\sigma T$  est bon... à un facteur 2 près. Ceci est dû au fait qu'aucune contribution à la chaleur spécifique due aux électrons n'est observée et que  $\langle v^2 \rangle$  et  $c_v$  ne sont ici pas corrects.

### 2.4.2 Modèle de Sommerfeld

Il s'agit d'un modèle développé directement après l'avènement de la mécanique quantique. Il propose une première approche quantique des matériaux solides : des électrons dans une boîte. Ce modèle réglera le souci du facteur 2 et l'on pourra se passer de la contribution à la chaleur spécifique due aux électrons, fait non-observé expérimentalement.

Le modèle de Sommerfeld est en fait un modèle similaire au modèle de Drude, mais tenant compte de quelques apports de la mécanique quantique. Ainsi au lieu d'utiliser la distribution des vitesses de Maxwell

$$f_M(v) = n \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \quad (2.20)$$

il devient possible d'utiliser la distribution de Fermi-Dirac pour décrire le comportement du gaz de fermions que sont les électrons

$$f_{FD}(v) = \frac{1}{e^{\frac{\frac{mv^2}{2} - kT_0}{kT}} + 1} \quad (2.21)$$

où  $T_0$  est une température à déterminer par la normalisation de

$$n = \int f_{FD}(v) dv. \quad (2.22)$$

Cette modification réalisée par Sommerfeld a permis de tenir compte du principe d'exclusion de Pauli dans la théorie cinétique des gaz et résout l'anomalie thermique du modèle de Drude. Les électrons étant confinés dans un volume  $V$  par l'attraction des charges positives des coeurs ioniques, Sommerfeld va supposer qu'un cristal solide peut être décrit par des puits finis, des cubes de côté  $L$ . En résolvant l'équation d'Erwin

$$\begin{aligned} H\psi &= \epsilon\psi \\ \Leftrightarrow \left( -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V_0 \right) \psi &= \epsilon\psi \\ \Leftrightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi &= (\epsilon + V_0)\psi \end{aligned} \quad (2.23)$$

dont la solution est notée sous la forme d'onde plane :

$$e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (2.24)$$

Ou seulement la partie spatiale<sup>14</sup> :

$$\Psi_k(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (2.25)$$

---

14. ambigu, à reformuler...

avec une énergie quantifiée :<sup>16</sup>

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2m} = (\epsilon - V_0) \quad (2.26)$$

On va choisir des conditions aux limites qui sont un peu arbitraires : il faudrait le faire via la conductivité électrique mais à l'époque ce n'est pas imaginable<sup>17</sup>. L'état de surface d'un cristal n'est pas l'état en volume de ce cristal mais nous nous intéressons ici aux propriétés en volume du cristal. Nous utiliserons des conditions aux limites particulières, appelées conditions aux limites de Born-Von Karman, qui consistent à supposer qu'un électron arrivant à une face du cube réentre par la face opposée plutôt que d'être réfléchi :

$$\begin{aligned} \psi(x + L, y, z) &= \psi(x, y, z) \\ \psi(x, y + L, z) &= \psi(x, y, z) \\ \psi(x, y, z + L) &= \psi(x, y, z) \end{aligned}$$

On ne veut pas que  $\Psi(\vec{r})$  s'annule au bord car cela signifierait la présence d'un état stationnaire alors que le déplacement des électrons ne l'est pas (ondes progressives). On va alors imaginer un "cube" qui se refermerait sur lui même, c'est à dire que la fonction d'onde sur la face gauche du cristal est égal à la fonction d'onde sur la face opposée (droite en 1D) du cristal<sup>18</sup> :

$$e^{ik_x x} = e^{ik_x (x+L)} \quad (2.27)$$

Cela implique que

$$e^{ik_x L} = 1 \quad (2.28)$$

On en tire une équation de quantification imposant que

$$k_x = \frac{2\pi}{L} n_x \quad (2.29)$$

où  $n_x$  est un nombre entier (qui n'est pas forcément le même que  $n_y, n_z$ ). L'espace des vecteur  $\vec{k}$  est un espace réciproque, c'est à dire un espace dual. Seuls les points dont les coordonnées sont des multiples entiers de  $2\pi/L$  sont des vecteurs d'onde autorisés. Cela permet de connaître le nombre d'état possible dans une région de l'espace  $\vec{k}$  plus grande que  $2\pi/L$ . Ces vecteurs  $\vec{k}$  admis vont former un réseau de maille  $\frac{2\pi}{L}$  dans les direction  $k_x, k_y$  et  $k_z$ .

Dans ces condition le nombres de points (états, vecteurs) autorisés est  $\approx$  au volume de l'espace  $\vec{k}$  divisé par le volume de l'espace  $\vec{k}$  contenant un seul point ( $8\pi^3/V$ )<sup>19</sup>. La densité de vecteur  $\vec{k}$  autorisée dans l'espace réciproque vaut alors (l'inverse)

$$\frac{V}{8\pi^3} \quad (2.30)$$

Les électrons sont des fermions : pour chaque vecteur  $\vec{k}$  autorisé, il y a deux états électroniques possible (à cause du spin). Pour un grand nombre d' $e^-$ , la région de l'espace  $\vec{k}$  (réciproque) des

15. Notons que  $\Psi_k(\vec{r})$  est un état propre de l'opérateur  $p = -i\hbar\vec{\nabla}$  de valeur propre  $\hbar k$ , ce qui permet d'interpréter  $p$  comme une impulsion.

16. Le gradient fait apparaître le  $k^2$

17. Que voulais-tu dire Nico ???

18. On peut virer ce paragraphe ?

19. volume d'un cube de côté  $2\pi/L$



états occupé est indissociable d'une sphère dont le rayon  $k_F$  est le *rayon de Fermi*. Son volume dans l'espace  $\vec{k}$  vaut

$$\sigma = \frac{4\pi}{3} k_F^3 \quad (2.31)$$

Le nombre de valeurs possibles de  $\vec{k}$  dans cette sphère vaut

$$\left( \frac{4\pi k_F^3}{3} \right) \left( \frac{V}{8\pi^3} \right) = \frac{k_F^3}{6\pi^2} V \quad (2.32)$$

Il faut multiplier ce résultat par 2 pour tenir compte du spin.

$$N = 2 \frac{k_F^3}{6\pi^2} V = \frac{V k_F^3}{3\pi^2} \quad (2.33)$$

Si l'on a  $N$  électrons dans un volume  $V$ , on obtient comme densité d'électron

$$n = \frac{N}{V} = \frac{k_F^3}{3\pi^2} \quad (2.34)$$

Cette sphère de rayon  $k_F$  est la sphère de Fermi et son rayon est le nombre d'onde de Fermi. Sa surface est la "surface de Fermi" : elle sépare les états occupés des états vides.

On peut évaluer  $k_F$  à partir du paramètre de densité électronique  $r_s$ <sup>20</sup>

$$\frac{3\pi^2}{k_F^3} = \frac{1}{n} = \frac{4\pi}{3} (r_s a_0)^3 \quad (2.35)$$

Le nombre d'onde de Fermi est de l'ordre de l'Å<sup>-1</sup>. La vitesse de Fermi est donnée par  $v_F = \hbar k_F / m$  et vaut  $\approx 1000 \text{ km/s}$ . Notons également que l'énergie de Fermi a un ordre de grandeur d'une dizaine d'eV.<sup>21</sup> Définissons en plus la température de Fermi  $T_F = \epsilon_F / k$

En effectuant des calculs relativement simples mais laborieux, on peut obtenir l'expression de  $c_v$  :

$$c_v = \frac{\pi^2}{2} \left( \frac{k_B T}{\epsilon_F} \right) n k_B \quad (2.36)$$

L'idée est maintenant de calculer la densité d'état en fonction de l'énergie en évaluant le nombre d'états électroniques compris entre deux sphères de rayon  $k$  et  $k'$ . On va être amené à sommer les énergies sur tous les états.<sup>22</sup>

$$\sum_k = \alpha(k) \rightarrow \frac{V}{8\pi^3} \int \alpha(k) d\vec{k} \quad (2.37)$$

Le nombre d'états étant important ( $\approx 10^{22}$ ), on peut approximer cette somme par une majestueuse intégrale. Il y a un certain nombre d'états qui ont l'énergie recherchée dans la bande qui nous intéresse. En dérivant l'expression, on arrive à la densité d'état  $\mathcal{D}(\epsilon)$ .

$$\mathcal{N}(\epsilon' + d\epsilon) - \mathcal{N}(\epsilon') \implies \mathcal{D}(\epsilon) = \frac{d\mathcal{N}(\epsilon)}{d\epsilon} \quad (2.38)$$

20. rappel :  $r_0 = r_s a_0$  est le rayon d'une sphère contenant un seul électron

21. Ces deux grandeurs sont à rattacher à l'impulsion de Fermi  $p_F = \hbar k_F$  qui est l'impulsion maximale des électrons des niveaux occupés.

22. Cette ligne ne veut rien dire!!!

où  $\mathcal{N}(\epsilon)$  est le nombre d'états d'énergie  $\leq \epsilon$ . Cette énergie  $\epsilon$  peut être obtenue via l'équation de quantification de l'énergie :

$$\epsilon = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + V_0 \implies k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(\epsilon - V_0)} \quad (2.39)$$

En multipliant par un facteur deux pour tenir compte du spin, par la densité d'électron et le volume de la sphère de rayon  $k$  on obtient le nombre d'électron  $N(\epsilon)$ .

$$N(\epsilon) = 2 \frac{V}{8\pi^3} \cdot \frac{4}{3} \pi k^3 = \frac{V}{3\pi^2} \frac{(2m)^{3/2}}{\hbar^3} (\epsilon - V)^{3/2} \quad (2.40)$$

Si on dérive ça, on a la densité d'état par rapport à  $\epsilon$  (attention : ne pas confondre  $h$  et  $\hbar$ )<sup>23</sup>

$$\mathcal{D}(\epsilon) = \frac{d\mathcal{N}(\epsilon)}{d\epsilon} = \frac{V}{2\pi^2} \frac{(2m)^{3/2}}{\hbar^3} (\epsilon - V_0)^{1/2} = \frac{4\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} (\epsilon - V_0)^{(1/2)} \quad (2.41)$$

On peut arriver à une autre formulation en exprimant l'énergie en terme de  $\epsilon/k_B T$ <sup>24</sup>.

$$\mathcal{D}(\epsilon) d\epsilon = \mathbb{N} V \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{\epsilon - V_0}{k_B T} \right)^{1/2} \frac{d\epsilon}{k_B T} \quad (2.42)$$

où  $\mathbb{N}$  est la densité effective d'états

$$\mathbb{N} = \frac{2}{h^3} (2\pi m k_B T)^{3/2} \quad (2.43)$$

Pour la température  $T$ , le nombre d'électrons ayant des énergies comprises entre  $\epsilon$  et  $\epsilon + d\epsilon$  vaut

$$\mathcal{D}(\epsilon) f(\epsilon) d\epsilon \quad (2.44)$$

où  $f(\epsilon)$  exprime la probabilité d'occupation d'un état d'énergie  $\epsilon$  grâce à la distribution de Fermi-Dirac.

Comment va-t-on faire à température nulle ? On peut dire que  $\mu = \epsilon_f$  en se basant sur cette même distribution. En effet, comme  $T \rightarrow 0$ , il faut nécessairement que  $\epsilon = \mu$  sans quoi un souci se poserait. La concentration d'électron vaut alors

$$n = \int_{V_0}^{\infty} \mathcal{D}(\epsilon) d\epsilon = \int_{V_0}^{\epsilon_F = \mu} \mathcal{D}(\epsilon) d\epsilon \quad (2.45)$$

A température non-nulle, il suffit de considérer l'infini comme borne supérieure sans oublier de faire apparaître la distribution de FD.

$$n = \int_{V_0}^{\infty} \mathcal{D}(\epsilon) f(\epsilon) d\epsilon \quad (2.46)$$

En explicitant

$$n = \mathbb{N} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{V_0}^{\infty} \frac{1}{e^{(\epsilon - V_0)/k_B T} + 1} \left( \frac{\epsilon - V_0}{k_B T} \right)^{1/2} \frac{d\epsilon}{k_B T} \quad (2.47)$$

Le changement de variable

$$\eta = \frac{\epsilon - V_0}{k_B T} \quad (2.48)$$

---

23. Est-ce que  $Z$  est la fonction de partition ?

24. Il faudrait faire apparaître un facteur 2 pour tenir compte des deux états de spin.

nous donne

$$\frac{n}{\mathbb{N}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\sqrt{\eta}}{e^{(\eta-\zeta)/k_B T} + 1} d\eta \quad (2.49)$$

où  $\zeta(n/\mathbb{N}) = \mu - V_0$ , dont l'ordre de grandeur typique est d'une dizaine d'électron volt. Voyons comment  $\zeta$  dépend de  $n/\mathbb{N}$ .

1.  $\zeta$  fortement négatif (cas non-dégénéré)

L'exponentielle du dénominateur est grande devant 1. En première approximation, cela donne :

$$\frac{n}{\mathbb{N}} \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\eta + \frac{\zeta}{k_B T}} \sqrt{\eta} d\eta = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \underbrace{\int_0^\infty e^{-\eta} \sqrt{\eta} d\eta}_{\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2} \Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}} \cdot e^{\zeta/k_B T} = e^{\zeta/k_B T} \quad (2.50)$$

Ce cas s'applique aux semi-conducteurs ( $n/\mathbb{N} \ll 1$ ). On en déduit que

$$\zeta = k_B T \ln \frac{n}{\mathbb{N}} \quad (2.51)$$

2.  $\zeta$  fortement positif (cas dégénéré)

L'exponentielle du dénominateur est petite devant 1 et ce tant que  $\eta < \zeta/k_B T$ . On approxime en remplaçant l'intégrande par 1 dans un intervalle réduit (de 0 à  $\zeta/k_B T$ ) :

$$\frac{n}{\mathbb{N}} \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\zeta/k_B T} \sqrt{\eta} d\eta = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \left( \frac{\zeta}{k_B T} \right)^{3/2} \quad (2.52)$$

et nous en déduisons cette fois-ci que  $1 \ll \frac{n}{\mathbb{N}}$ . On retrouve ceci dans les métaux.

Notons que dans la plupart des semi conducteurs, on a un  $\zeta$  négatif du aux impuretés que l'ont doit ajouter pour venir peupler la bande de valence.

### 2.4.3 Condition générale d'équilibre thermique

On modélise deux solides différents par le modèle Sommerfeld, c'est-à-dire deux profondeurs de puits différents. On va remplir tous les puits (niveaux d'énergie) jusqu'à une énergie maximale. Il faudrait un miracle pour avoir le même niveau d'énergie dans les deux métaux. On imagine que les électrons vont voir des espaces libres à plus basse énergie dans  $B$  et vont y aller. Si on a par exemple un manque d'électron en  $A$  et un excès en  $B$  on va avoir un champ électrique, créant un potentiel de contact et égalant les niveaux de Fermi. La condition d'équilibre est que le niveau d'énergie de Fermi soit le même dans tout l'espace. *"Je détaille pas trop ici."*

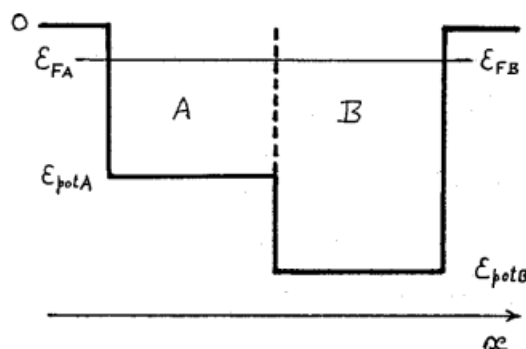


FIGURE 2.3 – Condition générale d'équilibre thermique

## Chapitre 3

# Cristallographie

### 3.1 Réseaux cristallins

Un cristal est un solide dans lequel on peut observer un arrangement périodique des ions le composant.

Pour pouvoir décrire correctement les cristaux nous avons besoin d'introduire la notion de réseaux de Bravais. Ceux-ci spécifient la géométrie sous-jacente des cristaux. On peut définir un réseau de Bravais de deux manières équivalentes :

- Un réseau de Bravais est un ensemble infini de points discrets tel que l'arrangement et l'orientation de ces points apparaît de la même manière quel que soit le point de l'ensemble depuis lequel on regarde celui-ci.
- Un réseau de Bravais consiste en tous les points dont les vecteurs-position  $\vec{R}$  sont donnés par  $\vec{R} = n_1\vec{a}_1 + n_2\vec{a}_2 + n_3\vec{a}_3$ , où  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$  est un triplet quelconque de vecteurs non-coplanaires et  $n_1, n_2, n_3$  sont des nombres entiers.

<b>A retenir :</b> La définition d'un réseau de Bravais
---

Les vecteurs apparaissent dans la deuxième définition sont appelés **vecteurs primitifs** et on dit qu'il **sous-tendent** ou **gènèrent** le réseau. Il est important d'insister sur le fait que non seulement l'arrangement mais aussi l'orientation du réseau doit rester identique en changeant de point de repère. Ainsi, des réseaux cubique simple, cubique faces centrées ou cubique centré sont des réseaux de Bravais alors qu'une structure en nid d'abeilles ne l'est pas.

fig 4.1, 4.2, 4.3

Les cristaux réels ne sont évidemment pas infinis comme les réseaux de Bravais mais la majorité des points sont suffisamment loin de la surface pour ne pas être affectés par son existence. Nous serons toutefois amenés à considérer un solide fini afin de pouvoir construire des fonctions d'ondes normalisées sur un volume  $V$ . Dans ce cas, les valeurs possibles de  $n_1, n_2, n_3$  seront  $0 \leq n_1 \leq N_1, 0 \leq n_2 \leq N_2, 0 \leq n_3 \leq N_3$  avec  $N = N_1.N_2.N_3$  le nombre de point du réseau fini.

Bien que plus précise mathématiquement, la deuxième définition d'un réseau de Bravais possède deux limitations majeures : il existe une infinité de choix non-équivalents pour l'ensemble de vecteurs primitifs et il n'est pas toujours évident de montrer l'existence de vecteurs primitifs satisfaisant la définition du réseau.

fig 4.5, 4.9

Les points d'un réseau qui sont les plus proches d'un point donné sont appelés ses **plus proches voisins**. Etant donné la périodicité du réseau, chaque point a le même nombre de plus proches voisins et ce nombre appelé **nombre de coordination** est une propriété du réseau. A titre informatif, un réseau cubique simple a un nombre de coordination de 6, un réseau cubique centré en a un de 8 et un réseau cubique-face centré en a un de 12.

Une cellule (unitaire) primitive est un volume spatial qui couvre tout l'espace sans trou ni recouvrement lorsqu'il est translaté par tous les vecteurs du réseau de Bravais.

### 3.2 Le réseau réciproque

## Chapitre 4

# Propriétés générales des niveaux électroniques dans un potentiel périodique

Dans un cristal, les ions sont disposés de façon périodique, il faut considérer le problème d'un électron dans un potentiel périodique avec la périodicité du réseau de Bravais :

$$U(\vec{r} + \vec{R}) = U(\vec{r}) \quad \forall \vec{R} \in \text{réseau de Bravais} \quad (4.1)$$

Ceci offre une symétrie de translation, mais uniquement discrètes sinon le potentiel serait constant et la solution de l'équation de Schrödinger serait des ondes planes. Cette périodicité étant proche de la longueur d'onde des électrons, il faut faire intervenir la physique quantique. Hélas, à part ce document, rien n'est parfait : la périodicité parfaite n'existe pas. On procédera en deux étapes :

1. On travaille le cas parfaitement périodique.
2. On traite les dérivation de la périodicité parfaite comme des perturbations.

### 4.1 Le potentiel périodique

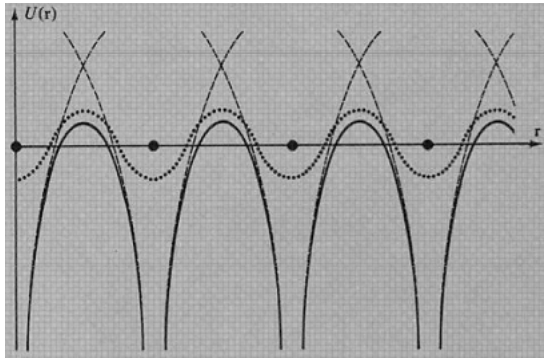


FIGURE 4.1  
le modèle de Sommerfeld.

Si le cristal est périodique, le potentiel vu par les électrons le sera également. Un tel potentiel est représenté ci-contre : il ressemble à des potentiels individuels atomiques. On étudiera ainsi les propriétés de l'équation de Schrödinger d'un électron

$$H\psi = \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U(\vec{r}) \right\} \psi = \varepsilon\psi \quad (4.2)$$

avec  $U(\vec{r})$  périodique. Si  $U(\vec{r}) = 0$ , on retrouve

## 4.2 Théorème de Bloch

### THÉORÈME : BLOCH

Les vecteurs propres  $\psi$  de l'opérateur hamiltonien à un électron  $H = -(\hbar^2/2m)\Delta + U(\vec{r})$  où  $U(\vec{r} + \vec{R}) = U(\vec{r}) \quad \forall \vec{R} \in$  au réseau de Bravais ont la forme d'une onde plane multipliée par une fonction ayant la périodicité du réseau de Bravais :

$$\psi_{n\vec{k}}(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\vec{r}} u_{n\vec{k}}(\vec{r}) \quad (4.3)$$

où  $u_{n\vec{k}}(\vec{r} + \vec{R}) = u_{n\vec{k}}(\vec{r})$ . Notons que (remplacer  $\vec{r}$  par  $\vec{r} + \vec{R}$ , le résultat est immédiat) :

$$\psi_{n\vec{k}}(\vec{r} + \vec{R}) = e^{i\vec{k}\vec{R}} \psi_{n\vec{k}}(\vec{r}) \quad (4.4)$$

Une formulation alternative est : les fonctions propres de  $H$  peuvent être choisies de sorte qu'à tout  $\psi$  on peut associer un vecteur d'onde  $\vec{k}$  tel que

$$\psi(\vec{r} + \vec{R}) = e^{i\vec{k}\vec{R}} \psi(\vec{r}) \quad (4.5)$$

$\forall \vec{R} \in$  au réseau de Bravais. Notons que  $n$  est l'indice de bande.

## 4.3 Première démonstration du théorème de Bloch

Pour tout  $\vec{R} \in$  réseau de Bravais, on définit un opérateur de translation  $T_{\vec{R}}$  qui appliqué donne

$$T_{\vec{R}} f(\vec{r}) = f(\vec{r} + \vec{R}) \quad (4.6)$$

Cet opérateur permute avec  $H$ , qui est périodique

$$T_{\vec{R}} H \psi = H(\vec{r} + \vec{R}) \psi(\vec{r} + \vec{R}) = H(\vec{r}) \psi(\vec{r} + \vec{R}) = H T_{\vec{R}} \psi \implies [H, T_{\vec{R}}] = 0 \quad (4.7)$$

On aura donc une base de fonction propres commune :  $\begin{cases} H\psi = \varepsilon\psi \\ T_{\vec{R}}\psi = c(\vec{R})\psi \end{cases}$ . Remarquons le résultat suivant, de deux translations successives :

$$T_{\vec{R}} T_{\vec{R}'} \psi(\vec{r}) = T_{\vec{R}'} T_{\vec{R}} \psi(\vec{r}) = T_{\vec{R} + \vec{R}'} \psi(\vec{r}) \quad (4.8)$$

L'ensemble des  $T_{\vec{R}}$  commute donc avec  $H$  pour tout  $\vec{R}$ . Les valeurs propres  $c(\vec{R})$  sont ainsi lié à cet opérateur :

$$\left. \begin{aligned} T_{\vec{R}'} T_{\vec{R}} \psi &= c(\vec{R}') T_{\vec{R}} \psi = c(\vec{R}') c(\vec{R}) \psi \\ T_{\vec{R}} T_{\vec{R}'} \psi &= T_{\vec{R} + \vec{R}'} \psi = c(\vec{R}' + \vec{R}) \psi \end{aligned} \right\} \Rightarrow c(\vec{R}) c(\vec{R}') = c(\vec{R} + \vec{R}') \quad (4.9)$$

Les exponentielles répondent à cette égalité. Comme  $|\psi|^2$  doit être au maximum unitaire, cet exponentielle doit forcément être imaginaire. On peut donc toujours écrire  $c(a_i) = e^{2\pi i x_i}$ <sup>1</sup>. Soit  $a_i$ , trois vecteurs primitifs du réseau de Bravais tel que  $\vec{R} = n_1 \vec{a}_1 + n_2 \vec{a}_2 + n_3 \vec{a}_3$  et  $\vec{k} = x_1 \vec{b}_1 + x_2 \vec{b}_2 + x_3 \vec{b}_3$  où  $b_i$  sont les vecteurs primitifs du réseau réciproque. On a alors :

$$c(\vec{R}) = c(a_1)^{n_1} \cdot c(a_2)^{n_2} \cdot c(a_3)^{n_3} = e^{i\vec{k}\vec{R}} \quad (4.10)$$

Ceci démontre le théorème de Bloch :

$$T_{\vec{R}} \psi = \psi(\vec{r} + \vec{R}) = c(\vec{R}) \psi(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\vec{R}} \psi(\vec{r}) \quad (4.11)$$

□

---

1. ?? Facteur  $2\pi$ ?

## 4.4 Les conditions aux limites de Born - von Karman

Il est possible de quantifier  $\vec{k}$  en imposant des conditions aux limites stylées, c'est-à-dire la même que pour Sommerfeld sauf que l'on considèrera cette fois un cristal de volume  $V$  de forme lié à une cellule primitive du réseau de Bravais :

$$\psi(\vec{r} + N_i \vec{a}_i) = \psi(\vec{r}) \quad (4.12)$$

où les  $\vec{a}_i$  sont les vecteurs primitifs du réseau direct et les  $N_i$  des entiers tels que  $N = N_1 N_2 N_3$  est le nombre de cellules primitives dans le cristal. En appliquant Bloch :

$$\psi(\vec{r} + N_i \vec{a}_i)_{n\vec{k}} = e^{i\vec{k} N_i \vec{a}_i} \psi_{n\vec{k}}(\vec{r}) = \psi(\vec{r})_{n\vec{k}} \implies e^{i\vec{k} N_i \vec{a}_i} = 1 \quad (4.13)$$

Inspiré de cette condition et du fait que  $\vec{k} = x_1 \vec{b}_1 + x_2 \vec{b}_2 + x_3 \vec{b}_3$ , on a<sup>2</sup>

$$e^{i2\pi x_i N_i} = 1 \quad (4.14)$$

et on en déduit que  $x_i = \frac{m_i}{N_i}$  :

$$\vec{k} = \frac{m_1}{N_1} \vec{b}_1 + \frac{m_2}{N_2} \vec{b}_2 + \frac{m_3}{N_3} \vec{b}_3 + \dots \quad (4.15)$$

On peut voir ceci comme une généralisation des CL de BVK.

## 4.5 Seconde démonstration du théorème de Bloch

En considérant ??, on peut toujours développer une fonction  $\psi$  satisfaisant les CL de BVK sur l'ensemble des ondes planes satisfaisant ces CL :

$$\psi(\vec{r}) = \sum_{\vec{q}} c_{\vec{q}} e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} \quad (4.16)$$

$U(\vec{r})$  est périodique, il ne contient que des ondes qui ont la périodicité du réseau de Bravais :

$$U(\vec{r}) = \sum_{\vec{K}} U_{\vec{K}} e^{i\vec{K} \cdot \vec{r}} \quad (4.17)$$

où les  $U_{\vec{K}}$  sont les coefficients de Fourier du potentiel périodique par association. On pose  $U_0 = 0$ , la valeur moyenne du potentiel sur une cellule primitive. Comme  $U(\vec{r}) \in \mathbb{R}$  :  $U_{-\vec{K}} = U_{\vec{K}} = U_{\vec{K}}^*$  (on suppose également une symétrie d'inversion).

Introduisons nos développements de  $\psi$  et  $U(\vec{r})$  dans l'équation de Schrödinger :

$$\frac{p^2}{2m} \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi = \sum_{\vec{q}} \frac{\hbar^2}{2m} q^2 c_{\vec{q}} e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} \quad (4.18)$$

On peut écrire le terme de potentiel (en posant  $\vec{q}' = \vec{q} + \vec{K}$  pour avoir une belle exp.) :

$$U\psi = \left( \sum_{\vec{K}} e^{i\vec{K} \cdot \vec{r}} \right) \cdot \left( \sum_{\vec{q}} c_{\vec{q}} e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} \right) = \sum_{\vec{K}, \vec{q}} U_{\vec{K}} \cdot c_{\vec{q}} \cdot e^{i(\vec{K} + \vec{q}) \cdot \vec{r}} = \sum_{\vec{K}, \vec{q}'} U_{\vec{K}} c_{\vec{q}' - \vec{K}} e^{i\vec{q}' \cdot \vec{r}} \quad (4.19)$$

---

2. A éclaircir



En posant  $\vec{q}' = \vec{q}$ ,  $\vec{K}' = \vec{K}$  (pour avoir des notations similaire au A&M) et comme  $\epsilon\psi = \sum_{\vec{q}} \epsilon c_{\vec{q}} e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}}$ , en remettant tout ensemble on obtient <sup>3</sup>

$$\sum_{\vec{q}} e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \left\{ \left( \frac{\hbar^2}{2m} q^2 - \epsilon \right) c_{\vec{q}} + \sum_{\vec{K}'} U_{\vec{K}'} c_{\vec{q}-\vec{K}'} \right\} = 0 \quad (4.20)$$

Comme les ondes planes sont orthogonales entre elles, on obtient

$$\left( \frac{\hbar^2}{2m} q^2 - \epsilon \right) c_{\vec{q}} + \sum_{\vec{K}'} U_{\vec{K}'} c_{\vec{q}-\vec{K}'} = 0 \quad (4.21)$$

En posant  $\vec{q} = \vec{k} - \vec{K}$  où  $\vec{K}$  est un vecteur du réseau réciproque et  $\vec{k}$  un réseau dans la première zone de Brillouin :

$$\left\{ \frac{\hbar^2}{2m} |\vec{k} - \vec{K}|^2 - \epsilon \right\} c_{\vec{k}-\vec{K}} + \sum_{\vec{K}'} U_{\vec{K}'} c_{\vec{k}-\vec{K}-\vec{K}'} = 0 \quad (4.22)$$

En remplaçant  $\vec{K}' = \vec{K}' - \vec{K}$  :

$$\left\{ \frac{\hbar^2}{2m} |\vec{k} - \vec{K}|^2 - \epsilon \right\} c_{\vec{k}-\vec{K}} + \sum_{\vec{K}'} U_{\vec{K}'-\vec{K}} c_{\vec{k}-\vec{K}'} = 0 \quad (4.23)$$

Cette dernière équation lie  $c_{\vec{k}}, c_{\vec{k}-\vec{K}}, c_{\vec{k}-\vec{K}'}$  soit les coefficients de développement de Fourier différant de vecteurs du réseau réciproque : le problème est séparés en  $N$  problèmes différents indépendants et chacun de ceux-ci a une solution en superposition d'onde planes contenant  $\vec{k}$  différant de vecteurs du réseau réciproque <sup>4</sup>. Les fonctions d'ondes ont alors la forme

$$\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = \sum_{\vec{K}} c_{\vec{k}-\vec{K}} e^{i(\vec{k}-\vec{K})\cdot\vec{r}} = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \sum_{\vec{K}} c_{\vec{k}-\vec{K}} e^{i\vec{K}\cdot\vec{r}} \quad (4.24)$$

Ce qui est la forme de Bloch avec la fonction périodique

$$u_{\vec{k}}(\vec{r}) = \sum_{\vec{K}} C_{\vec{k}-\vec{K}} e^{i\vec{K}\cdot\vec{r}} \quad (4.25)$$

□

## 4.6 Remarques générales à propos du théorème de Bloch

Si l'on fixe un  $\vec{k}$ , on va obtenir  $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots$  numéroté  $\epsilon_n$  où  $n$  est l'indice de bande. Comme les  $\vec{k}$  sont très proches on va considérer une variation continue donnant lieu à une structuration du niveau d'énergie disposés en paquets, des bandes d'énergies dont la différence est le fameux *gap*.

**Attention !** Les fonctions de Bloch sont utilisés pour des états stationnaires ! Dans ce modèle, les surfaces iso-énergétiques ne sont plus sphériques : on redéfinit les *surfaces de Fermi* comme les surfaces séparant les zones occupées des zones inoccupées par les électrons.

## 4.7 La surface de Fermi

Vu ?

3. Ici on ne fait que des math, on n'a fait aucune approximation, juste des remplacements.

4. ??

## Chapitre 5

# Électrons dans un potentiel périodique faible

Avec un tel potentiel, on peut déjà en apprendre beaucoup car il va permettre d'étudier les métaux à "électrons quasi-libre", car on part du modèle de Sommerfeld auquel on rajoute une faible périodicité. Même si ce n'est pas exact, deux raisons on l'effet d'un potentiel faible :

1. Interaction ion-électron forte à petite distance mais par Pauli, les électrons de conduction ne peuvent rentrer dans le voisinage immédiat des ions à cause des électrons de cœur.
2. La mobilité des électrons dans les régions autorisées diminue le potentiel car ils peuvent faire écran aux ions chargés positivement.

### 5.1 Approche générale de l'équation de Schrödinger lorsque le potentiel est faible

On peut écrire une équation de Schrödinger modifiée

$$H_{\vec{k}} u_{\vec{k}}(\vec{r}) = \left( \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{1}{i} \vec{\nabla} + \vec{k} \right)^2 + U(\vec{r}) \right) u_{\vec{k}}(\vec{r}) = \epsilon_{\vec{k}} u_{\vec{k}}(\vec{r}) \quad (5.1)$$

On voit apparaître l'hamiltonien modifié, toujours un opérateur hermitique impliquant que  $\epsilon \in \mathbb{R}$ . Dès lors  $H_{\vec{k}}^* u_{\vec{k}}^* = \epsilon u_{\vec{k}}^*$ . Comme la seule partie imaginaire est  $\frac{1}{i} \vec{\nabla}$ , on en déduit que

$$H_{\vec{k}}^* = H_{-\vec{k}} \quad (5.2)$$

Il en découle que  $\epsilon(\vec{k}) = \epsilon(-\vec{k})$ , soit une symétrie de translation de  $\vec{k}$ . Si l'on considère  $\vec{K} \in$  réseau réciproque, il en vient que  $\epsilon(\vec{k} \pm \vec{K}) = \epsilon(\vec{k})$ .

Comme il n'y a pas de discontinuité à l'origine,  $\epsilon(0)$  est bien continu en cette origine.

Avant de passer à la démonstration, commençons par un léger préambule.

Dans le modèle de Sommerfeld, nous considérons un potentiel constant, décrit par l'équation de Schrödinger stationnaire

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_0 \right) \psi = E \psi \rightarrow \psi(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad \ddagger \quad \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \epsilon - V_0 \quad (5.3)$$

Une solution  $\dagger$  de  $\frac{1}{\sqrt{V}}e^{i(\vec{k}-\vec{k}_0)\cdot\vec{r}}$  est également acceptable :  $\frac{\hbar^2}{2m}|\vec{k}-\vec{k}_0|^2 = \epsilon - V_0$ .

On peut imposer la forme de la fonction de Bloch  $\psi_{n,\vec{k}}(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}u_{n,\vec{k}}(\vec{r})$  où

$$u_{n,\vec{k}}(\vec{r}) = \sum_{\vec{K}} c_{\vec{k}-\vec{K}} e^{i\vec{K}\cdot\vec{r}} \rightarrow \psi_{n,\vec{k}}(\vec{r}) = \sum_{\vec{K}} c_{\vec{k}-\vec{K}} e^{i(\vec{k}-\vec{K})\cdot\vec{r}} \quad (5.4)$$

$\triangle$  Il faut que  $\frac{\hbar^2}{2m}|\vec{k}-\vec{k}_0|^2$  soit identique  $\forall \vec{K}$  dans la combili, sans quoi ce ne serait pas un état propre du même hamiltonien.

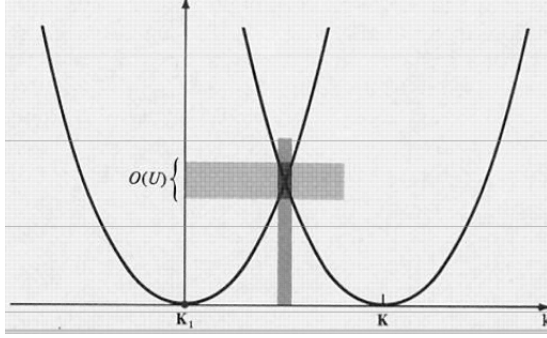


FIGURE 5.1

Il est toujours possible de restreindre  $\vec{k}$  à la première zone, c'est-à-dire que l'on peut centrer la parabole à électron libre en tous les vecteurs  $\vec{K}$  du réseau réciproque<sup>2</sup>. Cette limitation à la première zone laisse apparaître une structure en bandes.

#### DÉMONSTRATION DE LA STRUCTURE EN BANDE

Reprenons notre potentiel périodique faible. Faible veut dire petit par rapport à l'énergie cinétique des électrons. Ainsi, si  $U$  varie faiblement

$$U_{\vec{K}'-\vec{K}} \ll E_C \quad \rightsquigarrow \quad \text{Approximation des électrons quasi-libres} \quad (5.5)$$

Si le potentiel périodique est nul, les solutions sont des ondes planes. Un bon point de départ pour les potentiels périodiques faibles est le développement en solution exacte d'ondes planes. Ainsi, reprenons l'expression apparaissant à la fin de la démonstration du théorème de Bloch :

$$\left\{ \frac{\hbar^2}{2m}|\vec{k}-\vec{K}|^2 - \epsilon \right\} c_{\vec{k}-\vec{K}} + \underbrace{\sum_{\vec{K}'} U_{\vec{K}'-\vec{K}} c_{\vec{k}-\vec{K}'}}_{(*)} = 0 \quad (5.6)$$

L'approximation des électrons quasi libre implique que  $(*)$  est petit (et même nul dans le modèle de Sommerfeld). Nous avons ici une infinité d'ondes, mais certaines ont un coefficient prépondérant.

Si (approx électrons libres) les composantes de Fourier  $U_{\vec{K}}$  sont nuls, on peut ré-écrire l'expression comme

$$\left( \epsilon_{\vec{k}-\vec{K}}^0 - \epsilon \right) c_{\vec{k}-\vec{K}} = 0 \quad (5.7)$$

Cette équation implique que  $c_{\vec{k}-\vec{K}} = 0$  ou  $\epsilon_{\vec{k}-\vec{K}}^0 = \epsilon$ . Ce dernier cas se produit pour un seul  $\vec{K}$  sauf si  $\epsilon_{\vec{k}-\vec{K}}^0$  est égaux pour différents  $\vec{K}$ . Si cette dégénérescence ne se produit pas, les solutions

1. Le  $V_0$  disparaît dans une période ??

2. La seconde parabole sur le schéma ci-dessus est équivalente à la première par translation.

sont

$$\varepsilon = \varepsilon_{\vec{k}-\vec{K}}^0, \quad \psi_{\vec{k}}(\vec{r}) \approx e^{i(\vec{k}-\vec{K})\vec{r}} \quad (5.8)$$

Hélas, si  $U_{\vec{K}} \neq 0$  mais petit, c'est plus subtil et il faut traiter deux cas : le cas non-dégénéré et le cas dégénéré (seul le premier a été vu en cours, seule le résultat du second sera exposé ici).

### 5.1.1 Cas 1 : quasi non-dégénérescence

Soit  $\vec{k}$  fixé. Considérons  $\vec{K}_1 : \varepsilon_{\vec{k}-\vec{K}_1}^0 \neq \varepsilon_{\vec{k}-\vec{K}}^0 \quad \forall \vec{K} \neq \vec{K}_1$ . On a bien évidemment

$$U \ll |\varepsilon_{\vec{k}-\vec{K}_1}^0 - \varepsilon_{\vec{k}-\vec{K}}^0| \quad (5.9)$$

En posant  $\vec{K} = \vec{K}_1$  dans notre expression du théorème de Bloch, on obtient

$$\left( \varepsilon - \varepsilon_{\vec{k}-\vec{K}_1}^0 \right) = \sum_{\vec{K} \neq \vec{K}_1} U_{\vec{K}-\vec{K}_1} c_{\vec{k}-\vec{K}} \quad (5.10)$$

On utilise une constante additive afin que  $U_0 = 0$ . On peut faire ressortir de la somme notre terme en  $\vec{K}_1$  pour avoir un membre de droite du second ordre en  $U$ .

$$c_{\vec{k}-\vec{K}} = \frac{U_{\vec{K}_1-\vec{K}} c_{\vec{k}-\vec{K}_1}}{\varepsilon - \varepsilon_{\vec{k}-\vec{K}}^0} + \sum_{\vec{K}' \neq \vec{K}_1} \frac{U_{\vec{K}'-\vec{K}} c_{\vec{k}-\vec{K}'}}{\varepsilon - \varepsilon_{\vec{k}-\vec{K}}^0} \quad (5.11)$$

Cette mise en évidence prend du sens car  $c_{\vec{k}-\vec{K}_1}$  est d'un ordre de grandeur supérieur aux autres termes<sup>3</sup>. S'il n'y a pas de dégénérescence :

$$c_{\vec{k}-\vec{K}} = \frac{U_{\vec{K}_1-\vec{K}} c_{\vec{k}-\vec{K}_1}}{\varepsilon - \varepsilon_{\vec{k}-\vec{K}}^0} + \mathcal{O}(U^2) \quad (5.12)$$

En substituant :

$$\left( \varepsilon - \varepsilon_{\vec{k}-\vec{K}_1}^0 \right) c_{\vec{k}-\vec{K}_1} = \sum_{\vec{K} \neq \vec{K}_1} \frac{U_{\vec{K}-\vec{K}_1} U_{\vec{K}_1-\vec{K}}}{\varepsilon - \varepsilon_{\vec{k}-\vec{K}}^0} c_{\vec{k}-\vec{K}_1} + \mathcal{O}(U^3) \quad (5.13)$$

Le niveau d'énergie perturbé<sup>4</sup>  $\varepsilon$  diffère de  $\varepsilon_{\vec{k}-\vec{K}_1}^0$  par des termes d'ordre  $U^2$ . On remplace ainsi  $\varepsilon$  par  $\varepsilon - \varepsilon_{\vec{k}-\vec{K}_1}^0$  pour avoir

$$\varepsilon = \varepsilon_{\vec{k}-\vec{K}_1}^0 + \sum_{\vec{K} \neq \vec{K}_1} \frac{|U_{\vec{K}-\vec{K}_1}|^2}{\varepsilon_{\vec{k}-\vec{K}_1}^0 - \varepsilon_{\vec{k}-\vec{K}}^0} + \mathcal{O}(U^3) \quad (5.14)$$

Cette expression exprime que les bandes non-dégénérées se repoussent. Ce qu'il faut retenir est que dans le cas de quasi non-dégénérescence l'énergie est décalée par rapport à l'énergie d'électrons libre de termes en  $|U|^2$ .

### 5.1.2 Cas 2 : quasi dégénérescence

En faisant des calculs similaires, on peut déterminer à une précision de l'ordre de  $U^2$  les décalages des  $m$  niveaux quasi-dégénérés en résolvant  $m$  équations. Cette expression peut être simplifiée en

$$\left( \varepsilon - \varepsilon_{\vec{k}-\vec{K}_i}^0 \right) c_{\vec{k}-\vec{K}_i} = \sum_{j=1}^m U_{\vec{K}_j-\vec{K}_i} c_{\vec{k}-\vec{K}_j} \quad (5.15)$$

---

3. Pq ?? Et pq  $U^2$  ?

4. ?

## 5.2 Niveaux d'énergie près d'un plan de Bragg unique

Considérons deux niveaux distincts de l'ordre de  $U$  l'un de l'autre, mais très différent des autres : on a donc un cas de quasi-dégénérescence et ?? se déduit à

$$\begin{pmatrix} \varepsilon - \varepsilon_{\vec{k}-\vec{K}_1}^0 \\ \varepsilon - \varepsilon_{\vec{k}-\vec{K}_2}^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{\vec{k}-\vec{K}_1} \\ c_{\vec{k}-\vec{K}_2} \end{pmatrix} = U_{\vec{K}_2-\vec{K}_1} \begin{pmatrix} c_{\vec{k}-\vec{K}_1} \\ c_{\vec{k}-\vec{K}_2} \end{pmatrix} \quad (5.16)$$

Comme il n'y a que deux niveaux, introduisons des notations plus simples :  $\vec{q} = \vec{k} - \vec{K}_1$  et  $\vec{K} = \vec{K}_2 - \vec{K}_1$  pour avoir :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon - \varepsilon_{\vec{q}}^0 \\ \varepsilon - \varepsilon_{\vec{q}-\vec{K}}^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{\vec{q}} \\ c_{\vec{q}-\vec{K}} \end{pmatrix} = U_{\vec{K}} \begin{pmatrix} c_{\vec{q}} \\ c_{\vec{q}-\vec{K}} \end{pmatrix} \quad (5.17)$$

On a  $\varepsilon_{\vec{q}}^0 = \varepsilon_{\vec{q}-\vec{K}}^0 \Leftrightarrow |\vec{q}| = |\vec{q}-\vec{K}|$  impliquant que  $\vec{q}$  soit se trouver sur le plan de Bragg. Cela signifie donc que  $\vec{k}$  est proche du plan de Bragg mais pas d'un point où ces plans se coupent. LE cas de deux niveaux générés s'applique à un électron dont le vecteur d'onde  $\vec{k}$  satisfait approximativement la condition pour une diffraction de Bragg unique.

Les niveaux quasi-dégénérés sont les plus affecté par un potentiel périodique. Ce potentiel à ses effets principaux sur les niveaux d'électrons libres dont les vecteurs d'onde sont proche de ceux pour lesquels les réflexion de Bragg peuvent se produire. Examinons la structure des niveaux avec une diffraction de Bragg unique :

$$\begin{vmatrix} \varepsilon - \varepsilon_{\vec{q}}^0 & -U_{\vec{K}} \\ -U_{\vec{K}}^* & \varepsilon - \varepsilon_{\vec{q}-\vec{K}}^0 \end{vmatrix} = 0 \quad (5.18)$$

Les deux solutions de cette équations sont

$$\varepsilon = \frac{1}{2} (\varepsilon_{\vec{q}}^0 + \varepsilon_{\vec{q}-\vec{K}}^0) \pm \left[ \left( \frac{\varepsilon_{\vec{q}}^0 - \varepsilon_{\vec{q}-\vec{K}}^0}{2} \right)^2 + |U_{\vec{K}}|^2 \right]^{1/2} \quad (5.19)$$

Sur les plans de Bragg, on a une égalité entre les  $\varepsilon$  donnant lieu à

$$\varepsilon = \varepsilon_{\vec{q}}^0 \pm |U_{\vec{K}}| \quad (5.20)$$

sur le plan de Bragg simple. En tout point sur le plan de Bragg, un niveau est augmenté de  $|U_{\vec{K}}|$  et l'autre diminué de  $|U_{\vec{K}}|$  : ceci provoque une levée de la dégénérescence et un gap de  $2|U_{\vec{K}}|$ .

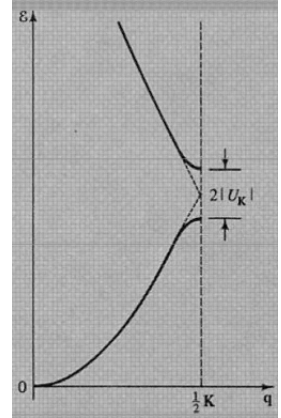


FIGURE 5.2

## 5.3 Bandes d'énergies à une dimension

Seule les doubles dégénérescences peuvent se produire. Sans interactions, les niveaux sont paraboliques. Avec, c'est presque pareil sauf près des plans de Bragg (point en 1D) où on lève la dégénérescence de  $2|U_{\vec{K}}|$ . La courbe originale est modifiée de façon à inclure ces coefficients de Fourier et cette représentation (e) est le *schéma en zone étendue*. Si l'on les représente tous dans la première zone de Brillouin (e) on a le *schéma en zone réduite*. On peut également insister sur la périodicité (g) avec le *schéma en zone répétée*.

## 5.4 Courbes énergies : $\vec{k}$ en 3D

Plus informatif, lire la page 115.

## 5.5 Le gap en énergie

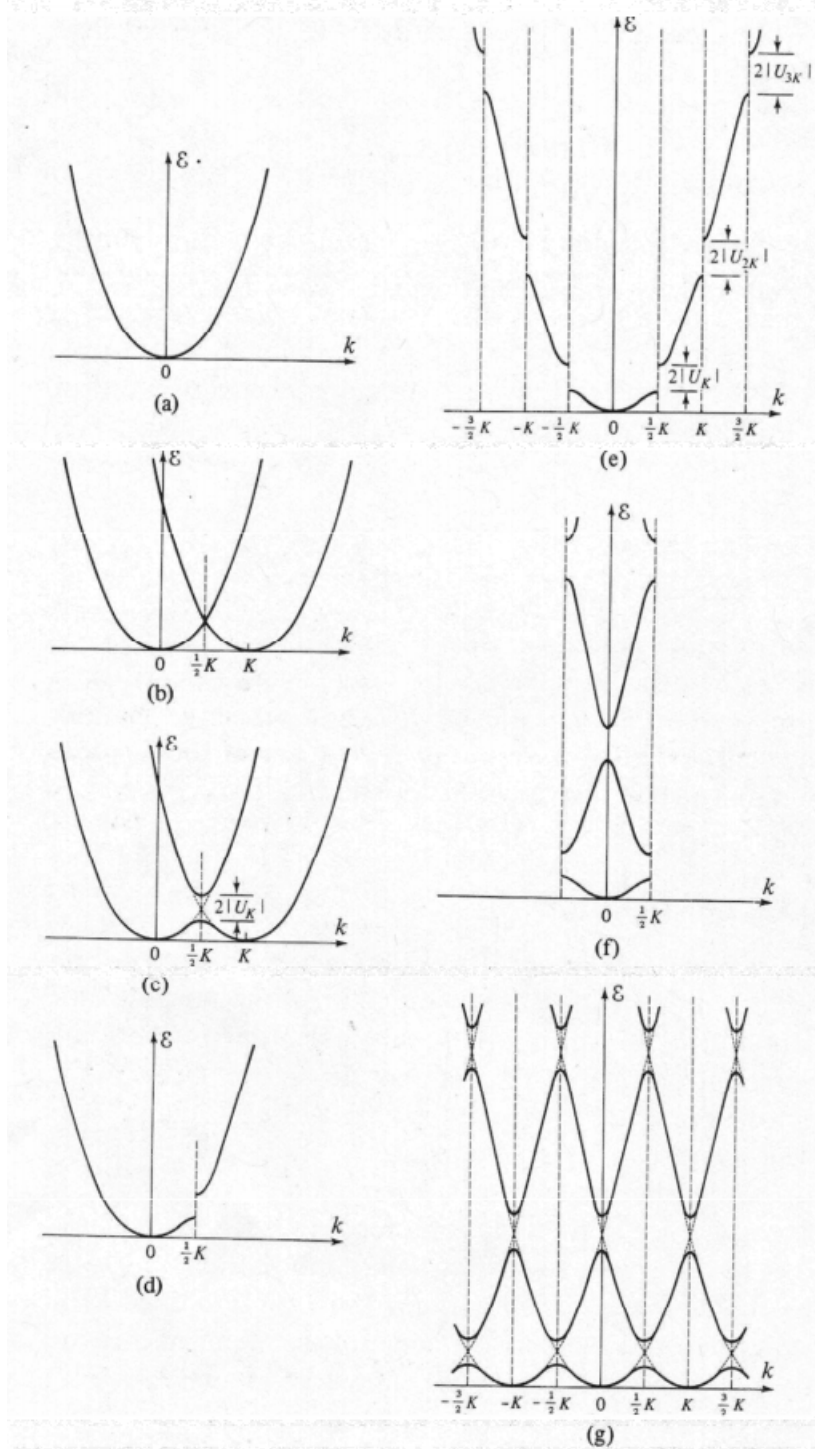


FIGURE 5.3

Le potentiel faible introduit un gap en énergie aux plan de Bragg : l'énergie varie de façon discontinue d'au moins  $2|U_{\vec{K}}|$ .

En (a), nous avons une parabole en  $k = 0$ . En (b), deux paraboles qui n'ont qu'une seule intersection. En (c), si on considère en ce point la levée de la dégénérescence du au potentiel périodique faible, les deux courbes se séparent et une forme de structure en bande apparaît. Si on applique ceci en tous les points (e), on voit de façon claire la structure en bande, c'est le schéma en zone étendue (chaque parabole est dans une zone de Brillouin différente). On peut translater chacune parabole de  $\vec{K}$  pour obtenir (f), le schéma en zone restreinte (car  $\vec{k}$  est restreint à la première zone). Ces deux schémas sont équivalents. On peut répéter cette structure dans chaque zone (g), mais on représentera alors plusieurs fois le même état physique.

Il existe d'autres représentation des niveaux d'énergies du modèle de Sommerfeld. Le schéma suivant est obtenu en suivant des lignes de symétrie à l'intérieur des zones de Brillouin.  $\Gamma$  est le centre de la première zone de Brillouin. Entre  $\Gamma$  et  $L$ , on a suivi une direction de symétrie (on a été de  $\Gamma$  vers le centre d'une zone hexagonale, qui est un point  $L$ ).

Les bandes d'énergies représentées sont celles d'une énergie  $\frac{\hbar^2}{2m}|\vec{k} - \vec{K}|^2$ . On suit ainsi un chemin  $XWKL$  pour représenter ces bandes d'énergies : il s'agit du modèle de Sommerfeld, ce qui se passe quand on considère un potentiel faible mais non constant. Notons que la zone de Fermi se voit modifié aux plans de Bragg.

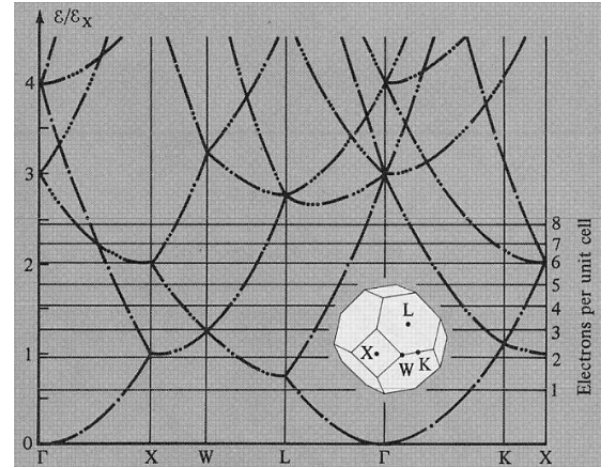


FIGURE 5.4

## 5.6 Zone de Brillouin