Université Libre de Bruxelles

Synthèse

Physique des télécommunications
ELEC-H-304

Auteur :
Nicolas Englebert

Professeur :
Philippe De Doncker

Année 2015 - 2016

Appel à contribution

Synthèse Open Source

Ce document est grandement inspiré de l'excellent cours donné par Philippe De Doncker à l'EPB (École Polytechnique de Bruxelles), faculté de l'ULB (Université Libre de Bruxelles). Il est écrit par les auteurs susnommés avec l'aide de tous les autres étudiants et votre aide est la bienvenue ! En effet, il y a toujours moyen de l'améliorer surtout que si le cours change, la synthèse doit être changée en conséquence. On peut retrouver le code source à l'adresse suivante

`https://github.com/nenglebert/Syntheses`

Pour contribuer à cette synthèse, il vous suffira de créer un compte sur *Github.com*. De légères modifications (petites coquilles, orthographe, ...) peuvent directement être faites sur le site ! Vous avez vu une petite faute ? Si oui, la corriger de cette façon ne prendra que quelques secondes, une bonne raison de le faire !

Pour de plus longues modifications, il est intéressant de disposer des fichiers : il vous faudra pour cela installer LaTeX, mais aussi *git*. Si cela pose problème, nous sommes évidemment ouverts à des contributeurs envoyant leur changement par mail ou n'importe quel autre moyen.

Le lien donné ci-dessus contient aussi le `README` contient de plus amples informations, vous êtes invités à le lire si vous voulez faire avancer ce projet !

Licence Creative Commons

Merci !

Chapitre 1

L'électrodynamique

1.1 Les équations de Maxwell

Soit les densités de charges ρ et de courant $\vec{J}$. Ces équations s'écrivent **dans le vide**

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\vec{E}(\vec{r},t) &= -\tfrac{\partial\vec{B}(\vec{r},t)}{\partial t}\\
\operatorname{rot}\vec{B}(\vec{r},t) &= \mu_0\vec{J}(\vec{r},t)+\epsilon_0\mu_0\tfrac{\partial\vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t}\\
\boldsymbol{\nabla}\cdot\vec{B}(\vec{r},t) &= 0\\
\boldsymbol{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{r},t) &= \tfrac{\rho(\vec{r},t)}{\epsilon_0}
\end{aligned} \tag{1.1}$$

où $\epsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi}\ F/m$ et $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}\ H/m$. Celles-ci sont locales : en un $\vec{r}$ et t donnés. Souvent, à l'endroit où l'on souhaite résoudre ces équations il n'y a pas de ρ et $\vec{J}$. Dès lors, à l'instant t :

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\vec{E}(\vec{r},t) &= -\tfrac{\partial\vec{B}(\vec{r},t)}{\partial t}\\
\operatorname{rot}\vec{B}(\vec{r},t) &= \epsilon_0\mu_0\tfrac{\partial\vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t}\\
\boldsymbol{\nabla}\cdot\vec{B}(\vec{r},t) &= 0\\
\boldsymbol{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{r},t) &= 0
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Ces équations sont bien locales ; les champs satisfont à cette équation, mais il faut bien avoir une source quelque part : il y en a forcément (au moins) une, mais elle n'apparaît pas localement.

⚠Il peut exister $\vec{J}$ en un point en l'absence de ρ en ce point, car ρ est la densité **totale** de charge en un point : on somme toutes les charges + et - ce qui donne un résultat généralement nul. C'est typiquement le cas dans un fil conducteur ou le courant circule, mais $\rho = 0$. Cependant, $\vec{J}$ et ρ sont liés par l'équation de continuité

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\vec{J}(\vec{r},t) = -\frac{\partial\rho(\vec{r},t)}{\partial t} \tag{1.3}$$

Considérons un courant traversé par un courant. Si la quantité sortante est inférieure à la quantité entrante, il y a accumulation : c'est ce que nous montre cette équation.

Tenir compte du milieu est difficile (courant, charges de polarisation, ...). Pour régler ça facilement, on procède à un astuce mathématique en remplaçant μ_0 et ϵ_0 par μ et ϵ possédant les caractéristique du milieu. Il s'agit d'un formalisme plus simple, mais la physique se voit être "cachée".

1.1.1 La statique

Dans ce cas, on obtient deux équations d'électrostatique et deux équations de magnétisme

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r}) &= 0, & \boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} \\ \operatorname{rot} \vec{B}(\vec{r}) &= \mu_0 \vec{J}(\vec{r}), & \boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}) &= 0 \end{aligned} \tag{1.4}$$

Pour résoudre ces équations, il existe deux méthodes

1. Résolution directe
2. Méthode des potentiels

La première méthode n'étant efficace que pour des géométries simples, intéressons-nous à la seconde méthode. La petite difficulté est qu'il faut considérer en plus des équations le potentiel scalaire V et vecteur $\vec{A}$. Il suffit de voir ceci comme une méthode de résolution des ED sans donner plus d'importance à ces potentiels. Pour résoudre les équations il faut premièrement calculer les potentiels

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{D}} \frac{\rho(\vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|} dV', \qquad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{D}} \frac{\vec{J}(\vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|} dV' \tag{1.5}$$

Et en déduire les champs

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\boldsymbol{\nabla} V(\vec{r}), \qquad \vec{B}(\vec{r}) = \operatorname{rot} \vec{A}(\vec{r}) \tag{1.6}$$

Physiquement, c'est plus facilement interprétable que les équations de Maxwell car on peut clairement voir le lien de cause à effet. En effet, si le circuit possède une densité de charge ρ et que l'on veut le potentiel scalaire au point r, on peut facilement deviner que celui-ci sera $\propto \rho$ et diminuera avec la distance. Pour avoir le potentiel en tout point, il suffira d'intégrer.

1.1.2 L'électrodynamique

Les équations ne peuvent plus être découplées : "*bon chance*" pour la résolution analytique. La méthode des potentiels reste d'application dans un cas général si on déduit les champ à partir de :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\boldsymbol{\nabla} V(\vec{r}, t) - \frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t}, \qquad \vec{B}(\vec{r}, t) = \operatorname{rot} \vec{A}(\vec{r}, t) \tag{1.7}$$

où le "terme correcteur" traduit le couplage entre $\vec{E}$ et $\vec{B}$. Jusqu'ici nous avions considérer une approche quasi-statique en supposant que V à l'instant t dépendait de la densité de charge à ce même instant, de même pour $\vec{A}$ négligeant ainsi le temps de propagation.

La nouveauté, c'est qu'à partir de maintenant on considérera que s'il y a une cause quelque part, l'effet ne peut se faire ressentir qu'ultérieurement. Ainsi V et $\vec{A}$ ne peuvent dépendre des sources qu'à un moment un peu ultérieur : le temps de propagation. On peut postuler le délai de propagation

$$t_p = \frac{|\vec{r} - \vec{r'}|}{c} \tag{1.8}$$

soit la distance divisée par la vitesse de la lumière. Pour tenir compte de ces délais, il faut réadapter nos définitions

A retenir *: Tout l'électromagnétisme en une box*

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{D}} \frac{\rho(\vec{r'}, t - \frac{|\vec{r} - \vec{r''}|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r'}|} dV', \qquad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{D}} \frac{\vec{J}(\vec{r'}, t - \frac{|\vec{r} - \vec{r''}|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r'}|} dV' \tag{1.9}$$

On les dénomme les **potentiels retardés**.

Il est utile de savoir lorsque l'approximation quasi-statique peut être utilisée. Soit τ l'échelle de temps caractéristique de variation des sources et L la dimension caractéristique du système étudié. Le retard doit être pris en compte s'il est de l'ordre du temps caractéristique : $L/c \sim \tau$, ou encore

$$L \sim c\tau \tag{1.10}$$

Si la source est sinusoïdale de fréquence f, on peut considérer que τ est la période d'oscillation ($\tau = 1/f$) de sorte à écrire la précédente équation

$$L \sim \frac{c}{f} = \lambda \tag{1.11}$$

En résumé

A retenir *:* La modélisation quasi-statique n'est plus applicable si les dimensions du système sont comparables ou supérieures à la longueur d'onde

$$L \sim \lambda$$

Pour 1 GHz, la longueur d'onde dans le vide vaut 30cm. On fera ainsi l'approximation quasi-statique lorsque $L/\lambda \ll 1$.

Région	f (Hz)	λ (m)
ELF	< 300	$> 10^6$
ULF	300 -3000	10^5 - 10^6
radio	$3\ 10^3$ - $3\ 10^9$	0,1 - 10^5
micro-ondes	$3\ 10^9$ - $3\ 10^{11}$	10^{-3} - 10^{-1}
infrarouge	$3\ 10^{11}$ - $4\ 10^{14}$	$7\ 10^{-7}$ - 10^{-3}
lumière visible	$4\ 10^{14}$ - $7{,}5\ 10^{14}$	$4\ 10^{-7}$ - $7\ 10^{-7}$
ultra-violet	$7{,}5\ 10^{14}$ - $3\ 10^{16}$	10^{-8} - $4\ 10^{-7}$
rayons X	$3\ 10^{16}$ - $3\ 10^{19}$	10^{-11} - 10^{-8}
rayons gamma	$> 3\ 10^{19}$	$< 10^{-11}$

Tableau 1.1 – Régions du spectre électromagnétique

Nous nous intéresserons à la zone radio/micro-onde ou $\lambda \approx$ 30cm. Pour un GSM, la taille de ce-dernier n'est pas négligeable par rapport à ce λ de même pour le wifi à 5.5GHz où $\lambda \approx$ 12cm. C'est aussi vrai dans l'infrarouge, mais il existe un formalisme plus simple à hautes fréquences.

"*En fait, passer de la quasi-statique à l'électrodynamique revient à déplacer la modélisation physique des charges et courants vers les champs.*"

1.2 Énergétique

1.2.1 L'énergie électrique

Il existe dans tout l'espace une densité d'énergie électrique, venant de la "séparation" des charges électriques (énergie potentielle pouvant être libérée) :

$$w_e(\vec{r},t) = \frac{1}{2}\epsilon|\vec{E}(\vec{r},t)|^2 \tag{1.12}$$

On obtient l'énergie électrique du système de charge par intégration.

1.2.2 L'énergie magnétique

Déplacer des charges pour créer un courant exige de fournir un travail stocké sous la forme "d'énergie cinétique" : on définit une densité d'énergie magnétique :

$$w_m(\vec{r},t) = \frac{1}{2\mu}|\vec{B}(\vec{r},t)|^2 \tag{1.13}$$

Chapitre 2

Les lignes de transmission

2.1 Résultat numérique

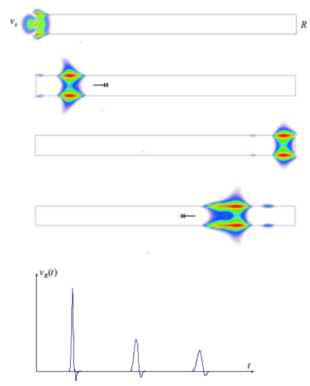

FIGURE 2.1

Considérons un circuit composé uniquement d'une source de tension s et d'une résistance R. Dans l'approximation quasi-statique

$$v_R(t) = v_s(t) \tag{2.1}$$

Sortons de cette approximation et considérons que la tension de la source est gaussienne. Ci-dessous, coloré, la norme de la composante verticale du champ électrique. La ou il est non-nul, une ddp se crée : une *onde de tension* se propage. Après R, une partie est *réfléchie* vers la source. Elle peut ainsi faire plusieurs aller-retours. La **ligne de transmission** relie la source à la charge. Ce vocable est utilisé lorsque l'approximation quasi-statique ne s'applique plus. Trois types de lignes différentes sont représentées ci-dessous.

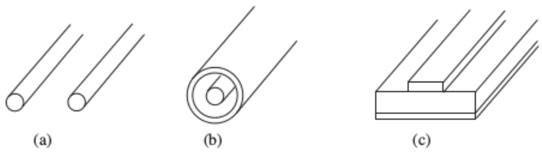

FIGURE 2.2 – (a) Ligne bifilaire (b) ligne coaxiale (c) ligne micro-ruban (microstrip). Notons que l'on désigne le *plan de masse* la ligne du dessous.

2.2 Propagation sur une ligne infinie

La ligne infinie permet de se débarrasser des "aller-retours". Considérons une source "continue" de type créneau. La nouveauté est que l'on considère ici les fils : nous avons vu que la ddp entre ceux-ci dépend de la position et du temps : $v = v(z, t)$.
Considérons une source idéale v_s. Avant enclenchement, la ligne est neutre. Une fois celle-ci allumée, sous l'effet d'un champ électrique, il apparaît des densités de charges induites créant une ddp v_s. Ces charges induites provoquent l'apparition d'un champ électrique un peu plus loin sur la ligne : ce dernier se propage sans être atténué. Le signal n'est donc pas donné par le mouvement des e^- (qui eux sont "plaqués" à l'extérieur de la ligne) mais par le déplacement du champ électrique. La ligne sert ainsi de *guide* pour le champ électrique par apparition de charges induites.

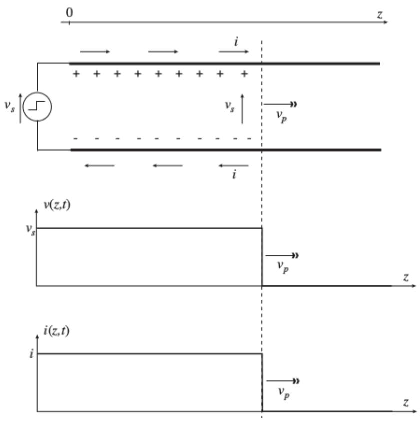

FIGURE 2.3

Cette ddp $v(z,t)$ est liée à la densité de charge induite $q_l(z,t)$ par la capacité linéique de la ligne C_1

$$v(z,t) = \frac{q_l(z,t)}{C_1} \tag{2.2}$$

En tenant compte du délai de propagation

$$v(z,t) = v_s(t - z/v_p) \tag{2.3}$$

où v_s est la vitesse de propagation (inconnue). On en tire

$$\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{v_p}\frac{\partial v}{\partial t} \tag{2.4}$$

La densité de charge induite est nulle lorsque le font d'onde n'est pas passé et vaut $v_s C_1$ la ou il est déjà passé : la ligne se charge. La ou le front d'onde est passé, les e^- ont subi un déplacement microscopique formant un champ qui lui même, crée un courant : *onde de courant*. Celle-ci doit satisfaire

$$\frac{\partial i}{\partial z} = -\frac{1}{v_p}\frac{\partial i}{\partial t} \tag{2.5}$$

Avec cette relation et la conservation de la charge $\frac{\partial i}{\partial z} = -\frac{\partial q_l}{\partial t}$ on obtient après intégration (charge initiale et courant initial nuls $\forall z$)

$$i(z,t) = v_p q_l(z,t) \tag{2.6}$$

En utilisant cette relation de (2.2) on remarque que le rapport tension/courant est constant en tout point de la ligne [1]

$$\frac{v(z,t)}{i(z,t)} = \frac{1}{v_p C_1} \triangleq Z_C \tag{2.7}$$

où Z_C est l'**impédance caractéristique** de la ligne : vraie pour la source en $z = 0$ et équivalente pour la ligne infinie à une résistance de cette valeur : la ligne absorbe en permanence un courant v_s/Z_c.

2.3 Les équations des lignes

Il faut procéder à une décomposition infinitésimale car pas d'effet de retard. Considérons un tel tronçon. On peut voir un tel tronçon comme une capacité valant $C_1 dz$. Comme un courant génère un $\vec{B}$, le tronçon captera un flux : apparition d'une inductance par unité de longueur

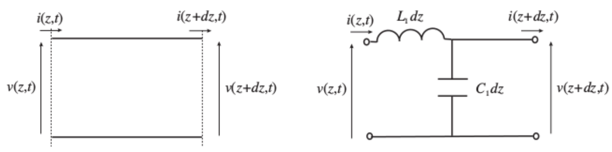

FIGURE 2.4

$$L_1 = \frac{\phi_1}{i} \tag{2.8}$$

Comme le tronçon est infinitésimal, la théorie des circuit s'applique. Le circuit équivalent peut s'écrire mathématiquement

$$\begin{aligned} v(z+dz,t) &= v(z,t) - L_1 dz \frac{\partial i(z,t)}{\partial t} \\ i(z+dz,t) &= i(z,t) - C_1 dz \frac{\partial v(z,t)}{\partial t} \end{aligned} \tag{2.9}$$

1. Pour une onde de tension/courant donnée.

où encore

A retenir : **équations des télégraphistes**.

$$\begin{aligned}\frac{\partial v(z,t)}{\partial z} &= -L_1\frac{\partial i(z,t)}{\partial t}\\ \frac{\partial i(z,t)}{\partial z} &= -C_1\frac{\partial v(z,t)}{\partial t}\end{aligned} \tag{2.10}$$

Ces équations montre que le courant correspond au courant injecté, diminué du courant de fuite dans les capacités. En découplant le système (remplace l'une dans l'autre après en avoir dérivée une) en augmentant l'ordre, on retrouve les équations d'ondes

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2} &= L_1C_1\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial t^2}\\ \frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial z^2} &= L_1C_1\frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial t^2}\end{aligned} \tag{2.11}$$

Les tensions et courants se propagent donc à la vitesse

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{L_1C_1}} \tag{2.12}$$

On peut écrire, à partir de la définition (2.7) de Z_C

A retenir :

$$Z_C = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \tag{2.13}$$

La solution de ces équations est bien connues : il s'agit d'ondes progressives (droite) ou régressives (gauche) se déplaçant à vitesse constante. Le premier type de solution à la forme

$$v_+(z,t) = V_+f(t - z/v_p) \qquad V_+ \in \mathbb{R} \tag{2.14}$$

où f est une fonction quelconque. Cette solution satisfaisant (2.4) correspond à une tension se propageant le long de la ligne sans atténuation ni déformation. Pour trouver le courant $i_+(z,t)$ associé, on utilise

$$\left\{\begin{array}{l}(2.4)\\(2.10)\end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial i_+(z,t)}{\partial t} = \frac{1}{v_pL_1}\frac{\partial v_+(z,t)}{\partial t} \tag{2.15}$$

Après intégration

$$i_+(z,t) = \frac{v_+(z,t)}{Z_c} \tag{2.16}$$

Le second type de solution (régressive) est de la forme

$$v_+(z,t) = V_-g(t + z/v_p) \qquad V_- \in \mathbb{R} \tag{2.17}$$

On peut déduire le courant $i_-(z,t)$ (conventionnellement choisi opposé à $i(z,t)$, le courant étant défini positif de gauche à droite sur la ligne supérieur) associé à cette onde par résolution de l'ED suivante (similairement au cas de l'onde progressive)

$$\frac{\partial i_(z,t)}{\partial t} = -\frac{\partial i(z,t)}{\partial t} = \frac{1}{v_pL_1}\frac{\partial v_-(z,t)}{\partial t} \tag{2.18}$$

Après intégration