



ECOLE
POLYTECHNIQUE
DE BRUXELLES

UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES

SYNTHÈSE

Physique des lasers

PHYS-H-410

Auteur :
Nicolas ENGLEBERT

Professeur :
Simon-Pierre GORZA

Année 2016 - 2017

Appel à contribution

Synthèse Open Source



Ce document est grandement inspiré de l'excellent cours donné par Simon-Pierre GORZA à l'EPB (École Polytechnique de Bruxelles), faculté de l'ULB (Université Libre de Bruxelles). Il est écrit par les auteurs susnommés avec l'aide de tous les autres étudiants et votre aide est la bienvenue ! En effet, il y a toujours moyen de l'améliorer

surtout que si le cours change, la synthèse doit être changée en conséquence. On peut retrouver le code source à l'adresse suivante

<https://github.com/nenglebert/Syntheses>

Pour contribuer à cette synthèse, il vous suffira de créer un compte sur *Github.com*. De légères modifications (petites coquilles, orthographe, ...) peuvent directement être faites sur le site ! Vous avez vu une petite faute ? Si oui, la corriger de cette façon ne prendra que quelques secondes, une bonne raison de le faire !

Pour de plus longues modifications, il est intéressant de disposer des fichiers : il vous faudra pour cela installer L^AT_EX, mais aussi *git*. Si cela pose problème, nous sommes évidemment ouverts à des contributeurs envoyant leur changement par mail ou n'importe quel autre moyen.

Le lien donné ci-dessus contient aussi un README contenant de plus amples informations, vous êtes invités à le lire si vous voulez faire avancer ce projet !

Licence Creative Commons

Le contenu de ce document est sous la licence Creative Commons : *Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International (CC BY-NC-SA 4.0)*. Celle-ci vous autorise à l'exploiter pleinement, compte tenu de trois choses :



1. *Attribution* ; si vous utilisez/modifiez ce document vous devez signaler le(s) nom(s) de(s) auteur(s).
2. *Non Commercial* ; interdiction de tirer un profit commercial de l'œuvre sans autorisation de l'auteur
3. *Share alike* ; partage de l'œuvre, avec obligation de rediffuser selon la même licence ou une licence similaire

Si vous voulez en savoir plus sur cette licence :

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Merci !

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Principe des lasers	1
1.2	Caractéristiques des sources lasers	3
1.2.1	Cohérence temporelle	4
1.2.2	Cohérence spatiale	4
2	Interactions lumière-matière	6
2.1	Propagation d'onde EM dans un milieu diélectrique	6
2.1.1	Approche "particulaire"	6
2.1.2	Modèle de l'oscillateur harmonique	8
2.2	Particule de lumière	11
2.2.1	Équations de Maxwell : onde électromagnétique	11
2.2.2	Lumière : un ensemble de photons	11
2.2.3	Description simplifiée de la quantification des champs EM	11
2.2.4	Flux de photon \mathcal{J} et densité n_p	12
2.3	Cavité radiative	13
2.3.1	Spectre de la cavité radiative	14
2.4	Interactions dans un milieu à deux niveaux	16

Chapitre 1

Introduction

1.1 Principe des lasers

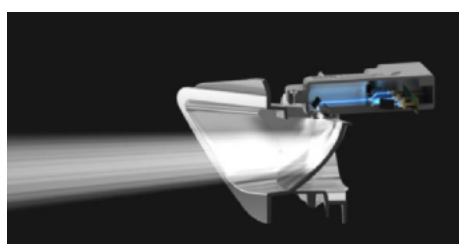


FIGURE 1.1

Avant d'en venir au principe des lasers, demandons-nous ce qu'est un laser, et qu'est-ce qu'une "lumière laser"? Le "phare laser" utilisé dans les Audi est-il une émission laser? En réalité non car la lumière est non monochromatique et non cohérente : l'appellation vient du fait que ce phare utilise un laser bleu pour pomper, la conversion optique/électrique étant importante.

Un **laser** est un *oscillateur optique faisant recours à l'émission stimulée*. Afin de clarifier la notion d'oscillateur, voici un exemple d'oscillateur acoustique avec l'effet Larsen. L'effet Larsen est une oscillation acoustique auto-entretenue dans une boucle constituée d'un microphone et d'un haut-parleur. Si le microphone est trop près du haut-parleur, une partie va être captée et amplifiée (seulement les fréquences de 20 à 20 kHz) via la rétroaction.

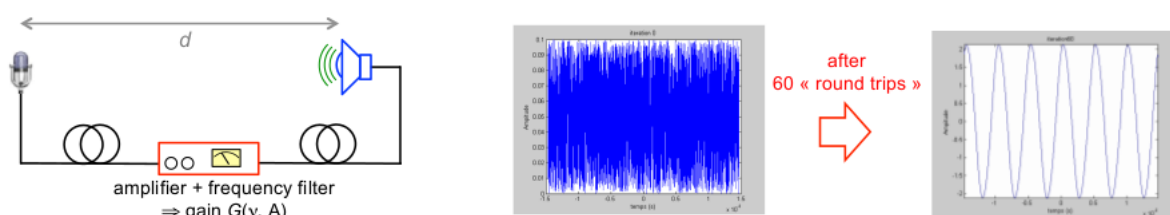


FIGURE 1.2

En modélisant numériquement le système et en lui fournissant un bruit en entrée, après une soixantaine de passages dans la boucle on observe un signal sinusoïdal : c'est le sens strident entendu. Ceci n'est possible que si il y a amplification, le "bruit" ayant une faible amplitude.

Essayons de modéliser une telle boucle. Si le gain sur une boucle est supérieur aux pertes, nous aurons bien une amplification même si les perturbations sont petites. Cependant, le gain ne peut pas augmenter de façon infinie. On modélise cette **saturation**

$$G = \frac{G_0}{1 + \frac{A}{A_S}} \quad (1.1)$$

où A_0 est le gain à petit signaux. Limiter le gain n'est pas suffisant : il faut que le système se stabilise vers un état stationnaire. Imaginons qu'à un moment, le microphone capte une onde acoustique monofréquence :

$$\delta P_n = A \cos(2\pi\nu t) \quad (1.2)$$

Après un premier tour dans la boucle, on obtient

$$\delta P_{n+1} = A \cos(2\pi\nu t + \delta\varphi) G(\nu) \alpha(\nu, d) \quad (1.3)$$

où l'on a pris un certain déphasage qui peut s'exprimer

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi d}{\lambda} + \phi_{elec} \quad (1.4)$$

où ϕ_{elec} est le déphasage induit par l'amplificateur et où $\lambda_0\nu_0 = c$. Ce déphasage est multiplié par un gain G mais nous avons aussi une certaine atténuation par propagation (seule une petite partie est captée par le microphone).

Nous serons en condition stationnaire à la fréquence ν_0 lorsque

$$\delta P_n = \delta P_{n+1} \quad (1.5)$$

Ceci n'est possible que si les gains sont équivalents aux pertes et si le déphasage est un multiple de 2π .

$$\begin{cases} \text{Amplitude} & : G(\nu_0)\alpha(\nu_0, d) & = 1 \\ \text{Phase} & : \Delta\varphi & = m2\pi \\ & : (m - \phi_{elec}/2\pi)\lambda_0 & = d \end{cases} \quad (1.6)$$

Un laser en régime sera dans une telle situation. Mais pour avoir un laser, il faut un gain et une rétroaction positive. Pour avoir du *feedback* en acoustique, on utilise un microphone. En optique, nous l'obtiendrons à l'aide de miroirs formant une cavité optique (*résonateur*). Deux d'entre eux sont largement répandus : la cavité linéaire de Fabry-Perot et la cavité circulaire

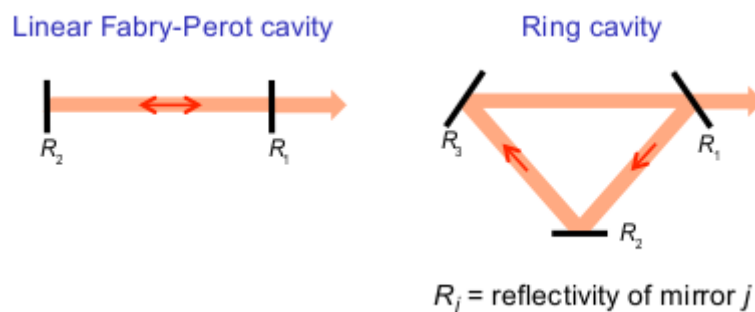


FIGURE 1.3

Avec un Fabry-Perot, on peut placer un milieu à gain pour avoir un effet de rétroaction. De façon générale, Fabry-Perot désigne un résonateur où la lumière fait des allers-retours.

La *condition de résonance* s'énonce

$$kL = \frac{2\pi}{\lambda}L = m2\pi \quad \Leftrightarrow \quad \nu = l \frac{c}{L} \quad (1.7)$$

où L est la longueur de la cavité¹ Dans un laser, seulement quelques fréquences optiques peuvent en sortir : ce sont celles qui satisfont cette condition. Ils portent le nom de *modes*. Ainsi, cette condition établit la fréquence des modes longitudinaux dans le résonateur optique. Notons que pour être dans le visible, les ordres doivent être très élevés.

1. Prendre le double de la longueur entre deux miroirs pour un Fabry-Perot.

Une cavité n'est pas suffisante pour avoir un laser, il faut aussi un gain optique. En effet, 'Laser' est l'acronyme de **l**ight **a**mplification by **s**timulated **e**mission **r**adiation. Or, il manque quelque chose dans cet acronyme; l'émission stimulée, postulée par Einstein. Si les atomes peuvent capturer de la lumière, ils peuvent également en émettre. Dès lors, si l'énergie d'un photon est proche de la différence entre deux niveaux d'énergie (E_1 et E_2), il est émis un photon indistinguishable du photon incident (même fréquence, même direction, même état de polarisation et phase identique).

En pratique, on utilise un milieu à gain : un paquet d'atomes excités dans l'état E_2 grâce à un mécanisme de pompage.

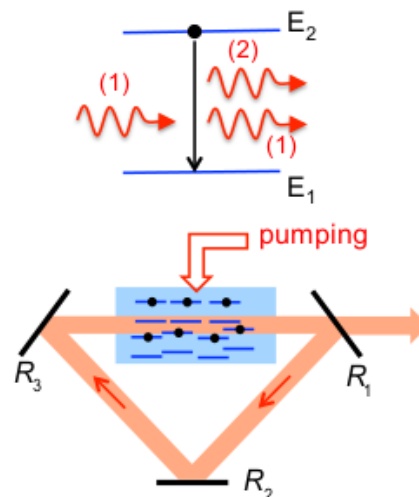


FIGURE 1.4

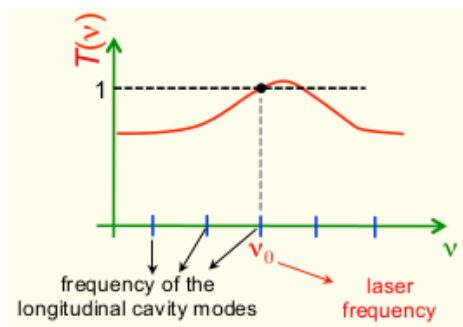


FIGURE 1.5

Considérons le produit pertes-gain

$$T(\nu) = R_1 R_2 R_3 \exp(-\alpha_i L) \exp(\mathcal{G}d) = 1 \quad (1.8)$$

où d est la longueur du milieu à gain, α_i les pertes internes (diffusion d'un laser dans l'eau, ...), R_i les coefficients de réflectivité et \mathcal{G} le gain.

Si $T(\nu) > 1$, il y a plus de gain que de perte : amplification du gain dans la cavité. L'intensité va augmenter mais le gain diminuer (saturation) de sorte à évoluer vers le cas stationnaire.

Cependant, il faut que l'effet laser démarre : ceci sera possible grâce à l'émission spontanée. Ce principe est très général mais est applicable à tous les lasers. La diversité de lasers est donc très importante :

Taille du laser : quelques micromètres à des centaines de kilomètres

Milieu à gain : gaz, ions, semi-conducteurs, ...

Pompage : pompage laser (on utilise un laser pour exciter les atomes du milieu à gain le temps qu'un photon arrive pour provoquer une émission), électrique (énergie des électrons), ...

1.2 Caractéristiques des sources lasers

Une source laser n'est certainement pas équivalente à une source thermique. On retrouve pour les sources laser :

- Quasi-monochromatique²
- Grande directivité

Ces deux caractéristiques se cachent sous le nom de *cohérence spatiale et temporelle*.

2. Pas nécessairement monochromatique, mais dépasse le cadre du cours.

1.2.1 Cohérence temporelle

Soit $\cos(\omega t)$. Si après certains temps on ne peut plus prédire la phase de l'onde, la lumière n'est plus *temporellement cohérente*. Si on observe des sauts de phase, elle sera dite *partiellement cohérente*. La cohérence temporelle est donc l'intervalle temporel dans lequel on peut prédire la phase.

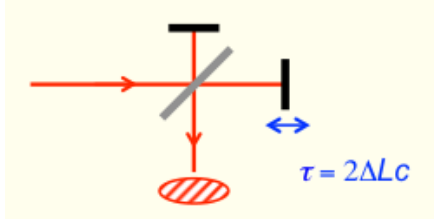


FIGURE 1.6

Si les deux bras d'un interféromètre n'ont pas la même longueur, un délai temporel va apparaître et il est possible d'observer des franges d'interférences. Mais plus on éloigne le miroir, plus cette visibilité diminue jusqu'à ce que l'on observe plus rien³. Ceci est la longueur de cohérence L_C , liée par la relation

$$\tau_c = L_C c \quad (1.9)$$

Il existe un lien entre τ_c et la largeur spectrale de la source :

$$\delta\nu \approx \frac{1}{\tau_c} \quad (1.10)$$

Pour le soleil $\Delta\nu = 4 * 10^{14} \text{ Hz} \rightarrow \tau_c = 2.5 \text{ fs}, L_C = 0.7 \text{ }\mu\text{m}$. Pour l'émission d'une raie Néon à 633 nm, on trouve une longueur de cohérence de 2 cm. Ces deux longueurs sont trop court pour des applications comme de l'interférométrie. Par contre, à l'aide d'un laser qui possède une largeur spectrale de $\Delta\nu = 500 \text{ Hz}$, on trouve $L_C = 600 \text{ km}$ ce qui est beaucoup plus intéressant !

1.2.2 Cohérence spatiale

Nous regardons cette fois-ci dans l'espace. Connaissant le champ à un endroit, sommes-nous capable de le prédire à un autre ? Considérons une source composée de points sources indépendants les uns des autres et plaçons un plan Σ possédant deux trous à une distance D de la source. Plaçons ensuite un écran Σ_0 comme le suggère l'image ci-dessous

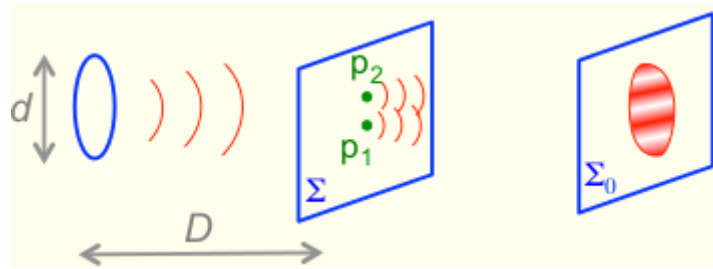


FIGURE 1.7

3. Ceci est du à un défilement trop rapide des franges d'interférences.

Si les franges sur Σ_0 sont fixes, c'est que la phase est constante : si ce n'est pas le cas, les franges défilent et les points p_1 et p_2 seront dit incohérent l'un par rapport à l'autre. Il est possible démontrer que les franges sont visibles sur Σ_0 si

$$\nu = 2 \left| \frac{J_1 \left(\frac{\pi \Delta x d}{\bar{\lambda} D} \right)}{\left(\frac{\pi \Delta x d}{\bar{\lambda} D} \right)} \right| \quad (1.11)$$

où J_1 est la fonction de Bessel, $\overline{p_1 p_2} = \Delta x$ et $\bar{\lambda}$ est la longueur d'onde moyenne.

Si à $D = 1m$ et $|p_1 - p_2| < 30 \mu m$ on verra les franges de Young : ce n'est pas très cohérent. Par contre en grossissant la sortie d'un laser on peut avoir deux mètre d'écart pour Δx ce qui est bien mieux.

Application

La fin du chapitre illustre les différentes applications que l'on peut trouver avec des lasers.

Chapitre 2

Interactions lumière-matière

Ce modèle est loin de la réalité mais "correct" en pratique. Il est donc intéressant pour développer une certaine intuition du problème.

2.1 Propagation d'onde EM dans un milieu diélectrique

2.1.1 Approche "particulaire"

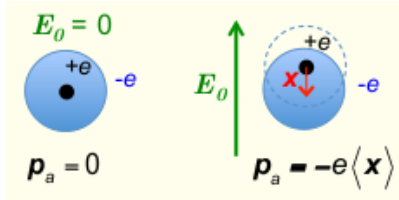


FIGURE 2.1

Si la lumière se propage dans un milieu non vide, il y aura des interactions : comment on pourrait décrire ces interactions et d'où elles viennent ? Lorsque l'on applique un champ électrique \vec{E} à un système de charges, elles ont la possibilité de bouger : le nuage électronique se déforme et il apparaît un moment dipolaire électrique

$$\vec{p}_a = - \int e|\psi|^2 \vec{r} d\vec{r} \quad (2.1)$$

où $-e|\psi|^2 d\vec{r}$ est l'élément de charge à la position \vec{r} donnant lieu à une intégrale non nulle¹. Dans un milieu contenant N atome par unité de volume, la polarisation (macroscopique) est donnée par

$$\vec{P} = N\vec{p}_a \quad (2.2)$$

soit la densité atomique multiplié par le moment dipolaire de chaque atome (on suppose que tous les dipôles sont orientés dans le même sens).

Pour illustrer, penchons-nous sur le cas du condensateur en prenant l'hypothèse d'un milieu linéaire et isotrope (sans quoi la susceptibilité χ serait un tenseur). Dans ce cas, la polarisation va être proportionnelle à l'amplitude du champ total $E = E_0 + E'_0$ où E_0 est le champ initial et E'_0 le champ induit.

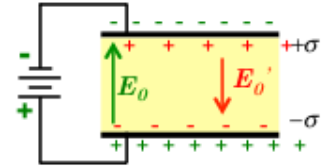


FIGURE 2.2 (2.3)

$$\begin{cases} \vec{E}'_0 &= -\vec{P}/\epsilon_0 \\ \vec{E} &= \vec{E}_0 - \vec{P}/\epsilon_0 \end{cases} \Rightarrow \vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$$

où χ est la **susceptibilité électrique**.

Calculons la divergence de ce champ électrique total

$$\nabla \cdot \vec{E} = \nabla \cdot (\vec{E}_0 - \vec{P}/\epsilon_0) \Leftrightarrow \nabla \cdot (\vec{E} + \vec{P}/\epsilon_0) = \nabla \cdot (\vec{E}_0) \quad (2.4)$$

1. Si cette intégrale est nulle lorsque $\vec{E} = \vec{0}$, c'est dû au fait que la fonction d'onde est antisymétrique.

Dans le vide $\nabla \cdot (\vec{E}_0) = \rho_{libre}/\epsilon_0$. Pour tenir compte de l'apparition des dipôles, on introduit un **champ de déplacement** \vec{D} de sorte à pouvoir écrire une formule de divergence "classique". Par définition

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0(1 + \chi) \vec{E} = \epsilon \vec{E} \quad (2.5)$$

où $\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0 = (1 + \chi)$. On peut alors écrire

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_{libre} \quad (2.6)$$

En toute généralité, cette susceptibilité χ sera complexe : absorption, gain, ... en découleront. En toute généralité, le champ électrique peut varier dans le temps. On définit alors la **densité de courant** (densité d'électron * charge * variation de la position de cette charge) : \vec{J}

$$J_{liee} = -Ne \frac{d}{dt} \langle x \rangle \Leftrightarrow J_{liee} = N \frac{d}{dt} \vec{p}_a = \frac{d}{dt} \vec{P} \quad (2.7)$$

Il y aura toujours un dipôle accompagné d'un moment dipolaire atomique mais cette fois-ci dépendant du temps.

Partons maintenant des équations de Maxwell et des équations constitutives. Considérons un milieu diélectrique ($\rho_{libre} = 0$) et non magnétique ($\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \\ \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} \\ \nabla \cdot \vec{D} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{D} = \epsilon \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \\ \vec{B} = \mu_0 \vec{H} \end{array} \right. \quad (2.8)$$

En calculant le rotationnel du rotationnel du champ électrique², on trouve l'équation d'onde

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} = \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{P} \quad (2.9)$$

où $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ est la vitesse de la lumière dans le vide.

Trois cas sont particulièrement intéressants

1. Dans le vide : $\vec{P} = \vec{0}$ et on retrouve la solution harmonique, décrite par des ondes planes

$$\vec{E} = \frac{1}{2} (\mathcal{E} \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) \vec{e} + c.c.) \quad (2.10)$$

où \vec{e} est le vecteur de polarisation. Pour que ce soit bien solutions des équations de Maxwell, il faut que $\vec{k} \cdot \vec{e} = 0$ (polarisation transverse) et $|\vec{k}| = \omega/c = 2\pi/\lambda_0$.

2. Dans un diélectrique, la polarisation varie dans le temps : effets de réfractions, de perte et de gain

3. **Indice de réfraction complexe** \mathcal{N} .

Soit la solution harmonique et $\vec{k} = \mathcal{K} \cdot \vec{1}_z$. Jusqu'ici, nous avons toujours considéré que l'indice de réfraction n'était qu'à des effets de phase.

Adoptons des notations en phaseurs

$$\vec{E} = \frac{1}{2} (\mathcal{E} \exp(i(\mathcal{K}z - \omega t)) \vec{e} + c.c.) = \frac{1}{2} (\hat{E} + c.c.), \quad \vec{P} = \frac{1}{2} (\hat{P} + c.c.) \quad (2.11)$$

2. $\text{rot rot} = \nabla \cdot \nabla - \Delta$

où nous avons cette fois-ci autorisé \mathcal{K} à être complexe. En faisant de même pour \hat{P} (par identification) :

$$\hat{P} = \varepsilon_0 \chi \hat{E} = \varepsilon_0 (\chi' + i\chi'') \hat{E} \quad (2.12)$$

Après substitution de ces équations dans l'équation de propagation (la dérivée en z fait apparaître un \mathcal{K}^2).

$$\mathcal{K}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} (1 + \chi' + i\chi'') \quad (2.13)$$

où l'on note $\mathcal{K} = k + i\alpha_E$ où α_E est le coefficient d'atténuation du champ électrique. Si l'on substitue cette nouvelle expression de \mathcal{K} dans l'expression de \vec{E} , on fait apparaître une exponentielle négative

$$\vec{E} = \mathcal{E} \exp(-\alpha_E z) \cos(kz - \omega t) \quad (2.14)$$

On définit le coefficient d'absorption en énergie $\alpha = 2\alpha_E$. Si $\alpha > 0$ il s'agit d'un milieu à pertes (à gain, inversement).

Venons-en à ce qui nous intéresse ici : l'**indice de réfraction complexe** défini

$$\mathcal{N} = \eta + i\kappa \quad (2.15)$$

tel que $\mathcal{K} = \frac{\omega}{c} \mathcal{N}$. Le champ électrique établi ci-dessus devient alors

$$\vec{E} = \vec{\mathcal{E}} \exp\left[-\frac{\omega}{c} \kappa z\right] \cos\left(\frac{\omega}{c} \eta z - \omega t\right) \quad (2.16)$$

L'absorption vaut alors $\alpha = 2\frac{\omega}{c} \kappa$ et la vitesse de phase $v_\phi = \frac{\omega}{c} = \frac{c}{\eta} \rightarrow \lambda = \frac{\lambda_0}{\eta}$. En identifiant la partie réelle et imaginaire :

$$\begin{cases} \eta^2 - \kappa^2 &= 1 + \chi' \\ \eta\kappa &= \chi''/2 \end{cases} \quad (2.17)$$

Souvent on peut entendre que la partie réelle correspond à des effets de phase (\vec{k}) alors que la partie imaginaire correspond à des pertes/gain : ce n'est pas exact, les deux sont "mélangés". Cependant, si $\kappa \ll 1$

$$\begin{cases} \eta &\approx \sqrt{1 + \chi'} \\ \kappa &\approx \chi''/(2\sqrt{1 + \chi'}) \end{cases} \quad (2.18)$$

On remarque que η, κ dépendent de ω . On nomme alors **relation de dispersion** l'équation $\eta = f(\omega)$.

2.1.2 Modèle de l'oscillateur harmonique

Le souci est que nous ne connaissons pas les expressions de η, κ, χ' et χ'' , tous fonction de ω . On va utiliser un modèle qualitativement correct (mais assez loin de la réalité) pour les obtenir dans un milieu diélectrique isotrope (gaz, ions dans un solide, ...)

Considérons un électron élastiquement (constante de rappel k) lié à un noyau infiniment lourd sur lequel on applique $E(t)$. On introduit un terme de relaxation (damping) $m\gamma\dot{x}(t)$ si on veut

une description assez fidèle, le nuage électronique ne peut osciller infiniment³. Il faut donc perdre de l'énergie, ce qui est le rôle de ce terme. Nous obtenons alors

$$\ddot{x}(t) + \omega_a^2(t) + \gamma \dot{x}(t) = -\frac{eE(t)}{m} \quad (2.19)$$

où $\omega_a = \sqrt{k/m}$, $\frac{1}{\gamma}$ est le temps caractéristique de relaxation pour la polarisation \vec{P} et le membre de droite comporte le terme d'oscillation forcée. En utilisant les deux phaseurs

$$E(t) = \frac{\mathcal{E} \exp(-i\omega t) + c.c.}{2}, \quad x(t) = \frac{X \exp(-i\omega t) + c.c.}{2} \quad (2.20)$$

On trouve

$$(\omega_a^2 - \omega^2 - i\gamma\omega)X \exp(-i\omega t) + c.c. = \frac{e\mathcal{E}}{m} \exp(-i\omega t) + c.c. \quad (2.21)$$

Sachant que $\vec{P} = -eN\vec{x}(t) = \frac{\hat{P} + c.c.}{2}$ où $\hat{P} = \varepsilon_0 \chi \hat{E}$, on trouve

$$\chi(\omega) = \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m} \frac{1}{\omega_a^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \quad (2.22)$$

Comme χ est complexe, il peut y avoir un déphasage entre l'excitation et la position du système masse-ressort. Les parties réelles et imaginaires valent alors

$$\chi'(\omega) = \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m} \frac{\omega_a^2 - \omega^2}{(\omega_a^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}, \quad \chi''(\omega) = \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m} \frac{\gamma\omega}{(\omega_a^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \quad (2.23)$$

Jusqu'ici, nous travaillons sans approximations mais ces résultats ne sont pas évidents à interpréter. Pour se faire, nous allons faire l'hypothèse que l'amortissement est lent. Dès lors, \vec{E} fait un grand nombre d'oscillation avant une atténuation totale du système masse-ressort

$$\omega_a^2 - \omega^2 = 2\omega_a(\omega_a - \omega) \quad (2.24)$$

Avec cette hypothèse, χ'' devient directement proportionnel à α et on le montrera. Il s'agit d'une *lorentzienne*

$$\chi''(\omega) = \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m \gamma \omega_a} \frac{1}{1 + \frac{(\omega_a - \omega)^2}{(\gamma/2)^2}} > 0 \quad (2.25)$$

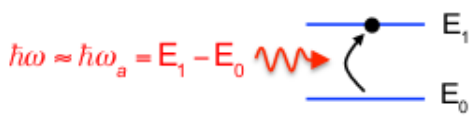


FIGURE 2.3

Cette fonction est positive $\forall \omega$, ce qui implique que α sera toujours positif ce qui correspond à de l'absorption : passage d'un niveau fondamental vers un état excité.

Pour $\chi'(\omega)$, on trouve

$$\chi'(\omega) = \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m \gamma \omega_a} \frac{(\omega_a - \omega)/(\gamma/2)}{1 + \frac{(\omega_a - \omega)^2}{(\gamma/2)^2}} \quad (2.26)$$

Ceci met en évidence une variation de l'indice de réfraction : c'est une relation de dispersion.

3. Une densité de charge liée bougeant agit comme une antenne : émission d'onde EM.

Traçons ces deux courbes. Ci-dessous, en rouge, nous avons une absorptions. En vert, une variation de l'indice de réfraction : nous verrons que s'il y a un effet d'absorption, il y a forcément un effet de réfraction η alors que $\kappa \propto \chi''(\omega)$

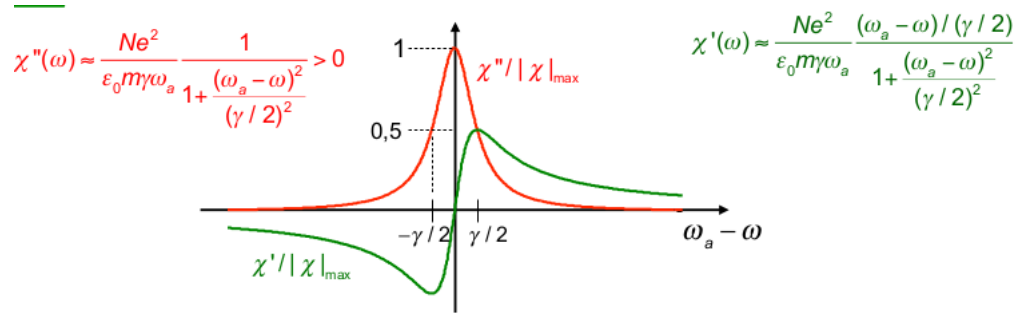


FIGURE 2.4

Si l'on excite le système en balayant sur les fréquences, nous observerons des pics d'absorption (κ) et une modification de η . Le verre se situe entre deux pics : il est transparent car il n'y a pas d'absorption par contre on observe tout de même une variation de l'indice de réfraction permettant de distinguer les différentes couleurs.

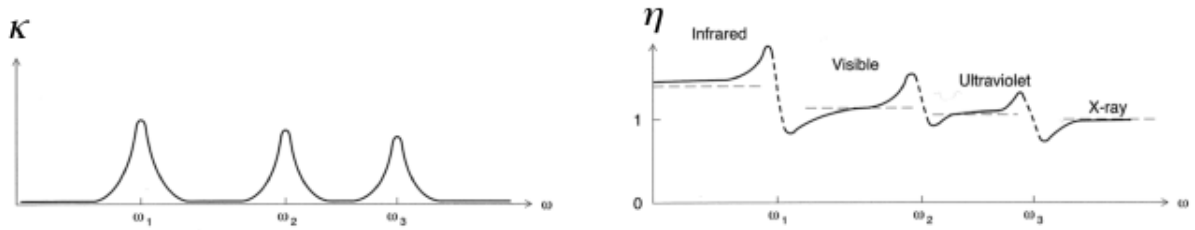


FIGURE 2.5

2.2 Particule de lumière

2.2.1 Équations de Maxwell : onde électromagnétique

Jusqu'ici nous avons utilisé une approche électromagnétique : passons cette fois-ci à une approche corpusculaire. Intéressons-nous à l'énergie (ce qui est quantifié). On s'intéresse à l'intensité (W/m^2) qui est liée au vecteur de Poynting $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ et on en prend la moyenne⁴

$$I = \langle |\vec{S}| \rangle = \langle |\vec{E} \times \vec{H}| \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \eta \mathcal{E}^2 \quad (2.27)$$

La solution harmonique des équations de Maxwell étant

$$\vec{E} = \mathcal{E} \cos(kz - \omega t) \vec{e} \quad (2.28)$$

Nous remarquons qu'il n'y a aucune condition sur l'amplitude \mathcal{E} qui peut varier de façon continue : de même pour l'intensité. Toutes les énergies seraient alors possibles ce qui est faux expérimentalement (effet photoélectrique notamment).

2.2.2 Lumière : un ensemble de photons

Planck par l'étude du corps noir et Einstein avec l'effet photoélectrique ont proposés une quantification du champ électromagnétique : les quanta de lumières ont une énergie $\Delta E = \hbar \omega$.

2.2.3 Description simplifiée de la quantification des champs EM

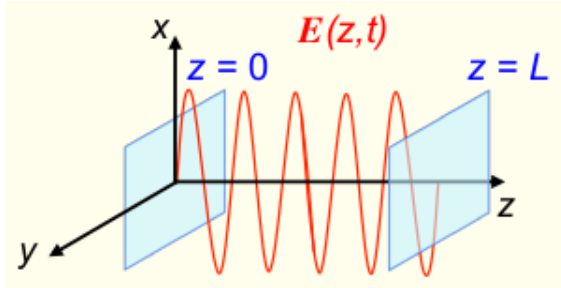


FIGURE 2.6

Supposons une cavité vide (pas de radiation, charge, milieu diélectrique), unidimensionnelle selon z formée de murs parfaitement conducteurs (un miroir parfait, rien ne sort de la cavité) en $z = 0, L$ où passe un champ \vec{E} polarisé selon x . Nous allons toujours appliquer les équations de Maxwell, mais avec ces conditions de cavité

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} E_x(z, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_x(z, t) = 0 \quad (2.29)$$

avec comme CL $E_x = 0$ en $z = 0, L$. La solution n'est rien d'autre que l'harmonique

$$E_x(z, t) = f_0 \sin(kz) q(t), \quad k = \frac{m\pi}{L}; \quad m = 1, 2, \dots \quad (2.30)$$

où E_x dépend de z et t , f_0 est l'amplitude multipliée par la variation spatiale et par une fonction non définie. C'est exactement ce que nous avons obtenu (et heureusement, nous décrivons la même chose). On en tire facilement le champ magnétique

$$B_y(z, t) = \frac{\mu_0 \varepsilon_0}{k} f_0 \cos(kz) \dot{q} \quad (2.31)$$

où $\dot{q} = \frac{dq}{dt}$. Ces deux équations, pour m fixé, forment un **mode de cavité** pour le champ électromagnétique de fréquence angulaire $\omega = m\pi c/L$.

4. Un flux d'énergie oscillant n'a pas de sens.

Intéressons-nous à l'énergie totale d'un mode : il s'agit de la densité d'énergie du champ magnétique et du champ électrique.

$$H = \int \left[\frac{1}{2} \varepsilon_0 E_x^2 + \frac{1}{2\mu_0} B_y^2 \right] dV \quad (2.32)$$

Sachant que V est le volume effectif de la cavité, on trouve

$$H = \frac{1}{4} f_0^2 \varepsilon_0 V \left[\frac{\varepsilon_0 \mu_0}{k^2} \dot{q}^2 \right] \quad (2.33)$$

Pour simplifier, on considère la constante de normalisation $f_0 = \left(\frac{2\omega^2}{\varepsilon_0 V} \right)^2$:

$$H = \frac{1}{2} (p^2 + \omega^2 q^2) \quad (2.34)$$

Ce qui n'est rien d'autre que l'Hamiltonien de l'oscillateur harmonique où q est la position de la masse et où la force de rappel est $F = -\omega^2 q$ (et $p = \dot{q}$). Par analogie, un mode de champ électromagnétique est équivalent à un oscillateur harmonique qui aurait une masse unitaire et où les champs \vec{E} et \vec{B} jouent le même rôle que la position et le moment. L'idée venant naturellement est alors d'essayer de quantifier cette O.H. en utilisant le principe de correspondance $p \rightarrow \hat{p}, q \rightarrow \hat{q}$ tel que $\hat{p} = -i\hbar \nabla$.

Passons donc en mécanique quantique sans se soucier que H est l'énergie d'un cas classique. L'équation de Schrödinger indépendante du temps s'écrit

$$\left(\frac{\hbar^2}{2} \frac{d}{dq^2} + \frac{\omega^2}{2} q^2 \right) \phi(q) = E \phi(q) \quad (2.35)$$

On trouve comme énergie quantifiée

$$E_n = \left(n_p + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega \quad (2.36)$$

où on va interpréter n_p comme le nombre de photons contenus dans la cavité considérée. On nomme E_0 les *fluctuations du vide* qui peuvent être utiles mais pas ici : comme nous allons sommer une infinité de modes, on obtiendrait une énergie infinie. On n'en tiendra donc pas compte.

Nous n'avons pas défini $q(t)$: il s'agit d'une fonction évoluant au cours du temps : celle-ci donnera l'amplitude du champ. L'énergie contenue dans le champ est ainsi proportionnelle au carré de l'amplitude de ce champ ce qui n'est rien d'autre que le cas classique où chaque oscillateur est défini par ω, \vec{k} .

$$\langle q \rangle = \langle \phi | q | \phi \rangle = 0, \quad \langle q^2 \rangle \propto E_n \quad (2.37)$$

2.2.4 Flux de photon \mathcal{J} et densité n_p

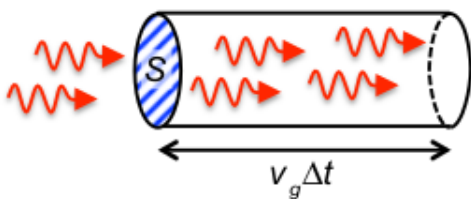


FIGURE 2.7

Nous allons suivre la démarche de Planck, à savoir tenter de quantifier le corps noir. Supposons que les photons soient monochromatiques et qu'ils se déplacent à la vitesse de groupe

$$v_g = \frac{c}{n_g} = \left(\frac{\partial k}{\partial \omega} \right)^{-1} \quad (2.38)$$

Il est dès lors utile de s'intéresser au flux du photon car l'intensité peut facilement s'en déduire : l'intensité est donnée par le produit de l'énergie d'un photon par le flux photonique. La valeur moyenne du vecteur de Poynting donne l'intensité⁵

$$\langle |\vec{S}| \rangle = \mathcal{J} \hbar \omega = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c \eta \mathcal{E}^2 = I \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{J} = \frac{\eta \varepsilon_0 c}{2 \hbar \omega} \mathcal{E}^2 \quad (2.39)$$

où \mathcal{J} est le **flux de photon** [$m^{-2}.s^{-1}$]. On a donc un lien direct entre le flux de photon et le module carré de l'amplitude du champ. A l'aide du schéma ci-dessus, nous pouvons montrer que la **densité de photon** [m^{-3}] vaut

$$\mathcal{J} S \Delta t = n_p S v_G \Delta t \quad \Leftrightarrow \quad n_p = \frac{\mathcal{J}}{v_g} = \frac{\eta n_g \varepsilon_0}{2 \hbar \omega} \mathcal{E}^2 \quad (2.40)$$

ce qui n'est **pas** n_p (nombre de photons).

2.3 Cavité radiative

Le but est d'obtenir la densité d'énergie par unité de fréquence d'un corps noir. Ce que l'on va faire pour y parvenir, c'est faire un tout petit trou en supposant que l'équilibre thermique n'est pas perturbé, et observer ce qui sort. Planck a ainsi trouvé que la probabilité de trouver un mode à une certaine énergie donnée est donnée par la loi de Boltzmann.

La probabilité p_{n_p} qu'un mode (oscillateur) soit dans l'état n_p est donnée par

$$p_{n_p} = \frac{\exp(-E_{n_p}/k_B T)}{\sum_{n_p=0}^{\infty} \exp(-E_{n_p}/k_B T)} \quad (2.41)$$

où la division par la série permet la normalisation et où $E_{n_p} = (n_p + 1/2) \hbar \omega$. Après substitution

$$p_{n_p} = \frac{\exp(-n_p \hbar \omega / k_B T)}{\sum_{n_p=0}^{\infty} \exp(-n_p \hbar \omega / k_B T)} \quad (2.42)$$

Le nombre moyen de photon est donnée par l'espérance mathématique. En adoptant la notation

$$\langle n_p \rangle = \sum_{n_p=0}^{\infty} n_p p_{n_p}, \quad x = \frac{\hbar \omega}{k_B T} \quad (2.43)$$

On trouve

$$\langle n_p \rangle = \frac{\sum_{n_p=0}^{\infty} n_p \exp(-n_p \hbar \omega / k_B T)}{\sum_{n_p=0}^{\infty} \exp(-n_p \hbar \omega / k_B T)} \quad (2.44)$$

Le résultat (numérique et graphique) après résolution des séries est donné ci-dessous.

5. Pq $\mathcal{J} \hbar \omega$?

Average number of photons in the mode

$$\langle n_p \rangle = \frac{1}{\exp(\hbar\omega / k_B T) - 1}$$

Average energy of the mode

$$\langle E \rangle = \frac{\hbar\omega}{\exp(\hbar\omega / k_B T) - 1}$$

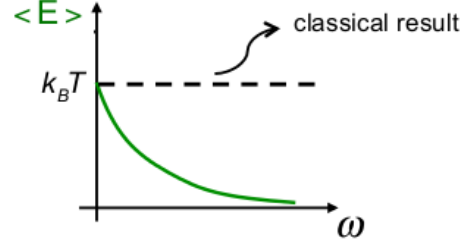
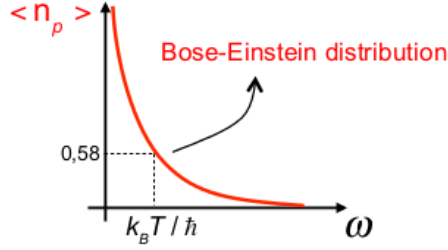


FIGURE 2.8

Le nombre moyen de photons dans un mode est donné par la distribution de Bose-Einstein : sa multiplication par $\hbar\omega$ donne l'énergie moyenne du mode. Il s'agit d'une fonction décroissante tendant vers $k_B T$ lorsque $\omega \rightarrow 0$.

Si l'on effectue le calcul, à température ambiante, il y a à peu près e^{-100} photons visible : ceci est cohérent avec le fait que la lumière ne rayonne pas. Dans un cadre classique, Rayleigh-Jeans avaient obtenu (variation continue d'énergie)

$$\langle E \rangle = \frac{\int_0^\infty E e^{-E/k_B T} dE}{\int_0^\infty e^{-E/k_B T} dE} = k_B T \quad (2.45)$$

Ceci est vrai à faible fréquences, mais totalement faux à hautes fréquences.

2.3.1 Spectre de la cavité radiative

Connaître l'énergie dans un mode n'est que peu intéressant si l'on ne sait pas combien il y a de mode par unité de fréquence. On va émettre l'hypothèse que le spectre de la radiation du corps noir est proportionnel à la **densité spectrale d'énergie** $u(\omega)$ dans la cavité. On va utiliser

$$u(\omega) d\omega \quad (2.46)$$

Il s'agit de la multiplication entre l'énergie moyenne dans un mode par la densité spectrale⁶ en énergie, soit le nombre de mode par unité de volume dans un intervalle $[\omega, \omega + d\omega]$. Dès lors

$$u(\omega) d\omega = \langle E \rangle \rho(\omega) d\omega \quad (2.47)$$

où $\rho(\omega)$ est la densité spectrales des mode dans le champ EM. Intéressons-nous aux nombres de mode par unité de fréquence par unité de volume $\rho(\omega)$ d'une cavité rectangulaire de volume $V = L_1 L_2 L_3$ (on va montrer que c'est indépendant de la géométrie) composée de murs parfaitement conducteurs et à l'équilibre thermique à la température T .

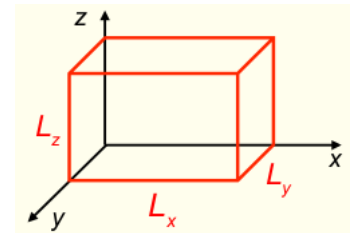


FIGURE 2.9

6. "Combien j'ai de mode par unité de volume par fréquence ω "

Le slide 19 donne la résolution (par séparation de variable) de ce problèmes aux limites. Si l'on fixe l, m et n le vecteur d'onde est fixé : il y aura deux solutions possibles correspondant à deux polarisations orthogonales.

$$k_x = \frac{l\pi}{L_x}, \quad k_y = \frac{m\pi}{L_y}, \quad k_z = \frac{n\pi}{L_z} \quad (2.48)$$

où $l, m, n = 0, 1, 2, \dots$. Nous pouvons maintenant calculer le nombre de mode présent dans l'intervalle de fréquences $[\omega, \omega + d\omega]$: ce calcul est plus simple dans l'espace réciproque car une cellule de cette espace à les dimensions $\pi/L_x, \pi/L_y, \pi/L_z$. En notant ce nombre de mode N_k , on trouve

$$N_k = 2 \frac{1}{8} \frac{4\pi k^2 dk}{\frac{\pi}{L_x} \frac{\pi}{L_y} \frac{\pi}{L_z}} = \frac{k^2 dk}{\pi^2} V \quad (2.49)$$

où nous avons deux états de polarisation, le facteur $1/8$ correspond au huitième de sphère et où l'on a divisé le volume de la calotte sphérique par le volume d'une cellule élémentaire. Sachant que $k^2 = \omega^2/c^2 \rightarrow k dk = \omega d\omega/c^2$

$$\frac{N_\omega}{V} = \rho(\omega) d\omega = \frac{\omega}{c} \frac{\omega d\omega}{\pi^2 c^2} \quad (2.50)$$

où nous avons divisé par le volume, voulant une densité. Après intégration, on trouve la densité spectrale de mode

$$\rho(\omega) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \quad (2.51)$$

En multipliant par l'énergie moyenne (espérance mathématique), on trouve la **loi de radiation de Planck**

$$u(\omega) = \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{\hbar \omega / k_B T} - 1} \quad (2.52)$$

Cette expression est en excellent accord avec l'expérience, impliquant une quantification du champ EM. Cette loi n'est strictement valable que pour une cavité fermée en équilibre thermique. Cependant, elle décrit bien les radiations de sources thermiques non nécessairement à l'équilibre thermique, comme le soleil. Si la cavité n'est pas vide (diélectrique) il suffit de remplacer c par c/η . La généralisation est immédiate

$$u(\omega) = \frac{\hbar \omega^3 \eta^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{\hbar \omega / k_B T} - 1} \quad (2.53)$$

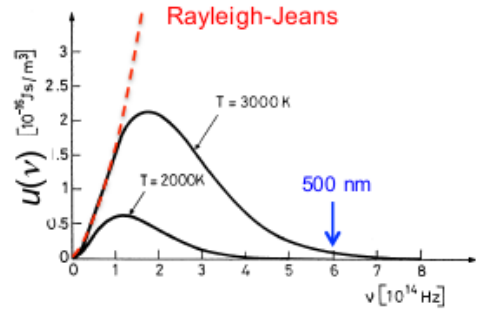


FIGURE 2.10

Il est possible d'obtenir une telle courbe pour le spectre du soleil. Le seul paramètre libre étant la température, il a été possible de mesurer la température du soleil sans devoir y tremper son doigt. Si l'on regarde la courbe de radiation du corps noir à $T = 2.726 K$ on se rend compte que la courbe ne peut pas plus coller les prédictions expérimentales.

2.4 Interactions dans un milieu à deux niveaux atomiques