# Thème G

# Nombres complexes

## G.1 Introduction

Les nombres complexes ont été introduits au cours d'algèbre dans le secondaire. Cependant, ils ne sont pas qu'une curiosité mathématique, leurs propriétés en font un outil puissant en sciences et leur utilisation dépasse de loin le seul cadre de l'algèbre. Vous les emploierez tout au long de votre cursus d'ingénieur et plus tard dans votre carrière d'ingénieur. Les nombres complexes sont utilisés dans des domaines aussi variés que l'électricité et l'électromagnétisme, l'étude de phénomènes ondulatoires, l'automatique, la mécanique quantique etc. De ce fait, il est fondamental de savoir les manipuler correctement et d'en maîtriser les propriétés. Le but de ce thème est de rappeler ces propriétés, de vous familiariser avec les diverses représentations des nombres complexes et de vous entraîner à les utiliser.

## G.2 L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes

L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes est défini comme suit:

$$\mathbb{C} = \left\{ z = a + bi \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } i^2 = -1 \right\}.$$

Dans la notation $z = a + bi$, $a$ est la *partie réelle* du nombre complexe $z$, notée $\mathrm{Re}(z)$ et $b$ est la *partie imaginaire* de $z$, notée $\mathrm{Im}(z)$.

Un nombre complexe est réel ssi sa partie imaginaire est nulle:

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C} : \mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) = 0\}.$$

Un nombre complexe dont la partie réelle est nulle, est appelé *imaginaire pur*, l'ensemble des nombres imaginaires purs est parfois noté $i\mathbb{R}$.

**Remarque.** *Dans les cours d'électricité, le symbole $i$ désigne habituellement l'intensité de courant électrique. Pour éviter toute confusion, l'unité imaginaire y est donc traditionnellement notée $j$. On écrira dans ce cas: $z = a + bj$.*

# G.3 Opérations dans $\mathbb{C}$

## G.3.1 Égalité

Deux nombres complexes seront égaux ssi ils ont même partie réelle et même partie imaginaire:

$$\begin{aligned}\forall\ z_1 = a+bi \in \mathbb{C} \text{ et } z_2 = c+di \in \mathbb{C} : z_1 = z_2 \quad &\Leftrightarrow \quad (a+bi) = (c+di) \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}\end{aligned}$$

## G.3.2 Addition

L'addition de deux nombres complexes se fait en additionnant leurs parties réelles et leurs parties imaginaires deux à deux:

$$\forall\ z_1 = a+bi \in \mathbb{C} \text{ et } z_2 = c+di \in \mathbb{C} : z_1 + z_2 = (a+c) + i(b+d)$$

L'addition présente les mêmes propriétés que l'addition dans $\mathbb{R}$:

- commutativité: $\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
- associativité: $\forall (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3, (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$
- existence et unicité du neutre pour l'addition: $\forall z \in \mathbb{C}, z + 0 = z = 0 + z$
- existence et unicité de l'opposé: $\forall z \in \mathbb{C}, \exists 1!\ z' \in \mathbb{C} \mid z + z' = 0 = z' + z$

## G.3.3 Multiplication

Pour multiplier deux nombres complexes, on procède comme dans $\mathbb{R}$ en appliquant les règles habituelles de distributivité et en tenant compte que $i^2 = -1$:

$$\begin{aligned}\forall\ z_1 = a+bi \in \mathbb{C} \text{ et } z_2 = c+di \in \mathbb{C} : z_1.z_2 \quad &= \quad (a+bi).(c+di) \\ &= \quad ac + adi + bci + i^2 bd \\ &= \quad (ac - bd) + i(ad + bc)\end{aligned}$$

Comme l'addition, la multiplication dans $\mathbb{C}$ présente les mêmes propriétés que dans $\mathbb{R}$:

- commutativité: $\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, z_1 z_2 = z_2 z_1$
- associativité: $\forall (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3, (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$
- existence et unicité du neutre pour la multiplication: $\forall z \in \mathbb{C}, z.1 = z = 1.z$
- existence et unicité de l'inverse: $\forall z \in \mathbb{C}_0, \exists 1!\ z^{-1} \in \mathbb{C} \mid z z^{-1} = 1 = z^{-1} z$
- distributivité par rapport à l'addition: $\forall (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3, z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

Les propriétés mentionnées ci-dessus font de l'ensemble des nombres complexes muni de l'addition et de la multiplication $(\mathbb{C}, +, .)$ un corps commutatif (voir cours d'Algèbre).

## G.4 Plan de Gauss

La bijection $\mathbb{C} \to \mathbb{R}^2, a + bi \mapsto (a, b)$ permet une représentation géométrique des nombres complexes dans le plan muni d'un repère orthonormé. Ce plan, appelé *plan de Gauss* ou plan complexe est représenté à la Fig. G.1. Dans ce plan, l'addition de deux nombres complexes s'interprète comme la somme de deux vecteurs dans $\mathbb{R}^2$ (voir Sec. G.10).

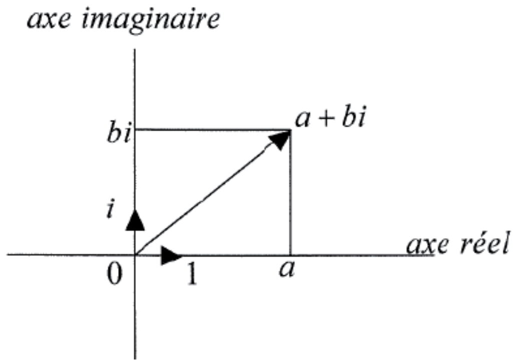



Figure G.1: Représentation d'un nombre complexe dans le plan de Gauss ou plan complexe.

## G.5 Conjugué d'un nombre complexe

Soit le nombre complexe $z = a + bi \in \mathbb{C}$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on appelle *conjugué* de $z$, noté $z^*$ ($\bar{z}$ ou $\widetilde{z}$), le nombre complexe défini par $z^* = a - bi$. Ce que l'on peut exprimer par: "on remplace $i$ par $-i$".

**Propriétés**

- $\forall z \in \mathbb{C}, (z^*)^* = z$
- $\forall z \in \mathbb{C}, (z^{-1})^* = (z^*)^{-1}$, où $z^{-1}$ est l'inverse de $z$.
- $\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, (z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$
- $\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, (z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$
  et donc $(z_1/z_2)^* = z_1^*/z_2^*$
- $\forall z \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(z) = (z + z^*)/2$ et $\mathrm{Im}(z) = (z - z^*)/2i$
- $\forall z \in \mathbb{C}, zz^* \in \mathbb{R}^+$

Dans le plan de Gauss, $z^*$ est le symétrique de $z$ par rapport à $Ox$.

## G.6 Module d'un nombre complexe

Soit le nombre complexe $z = a + bi \in \mathbb{C}$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on appelle *module* de $z$, noté $|z|$, le nombre réel positif

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}. \tag{G.1}$$

Si $z \in \mathbb{R}$, son module est égal à sa valeur absolue. En effet, si $z = a + 0i$ avec $a \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{a^2} \\ &= |a|. \end{aligned}$$

Le module (G.1) est également donné par

$$|z| = \sqrt{zz^*} \tag{G.2}$$

qui correspond à la racine carrée du produit du nombre complexe par son conjugué. Cette deuxième expression peut s'avérer beaucoup plus simple pour calculer le module que la définition (G.1).

### Démonstration

Soit $z = a + bi \in \mathbb{C}$, avec $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} zz^* &= (a + bi).(a - bi) \\ &= a^2 - abi + abi + b^2 \\ &= a^2 + b^2 \\ &= |z|^2. \end{aligned}$$

### Propriétés

- $\forall z \in \mathbb{C}, |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- $\forall z \in \mathbb{C}, |z^*| = |z|$
- Calcul de l'inverse: $\forall z \in \mathbb{C}_0$,

  $$z^{-1} = \frac{z^*}{|z|^2}.$$

  On a en effet

  $$\begin{aligned} zz^{-1} &= \frac{zz^*}{|z|^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

  On peut en déduire une manière simple de calculer le quotient d'un nombre complexe $z_1$ par un autre $z_2$ non nul:

  $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z_2^*}{|z_2|^2}$$

- $\forall z \in \mathbb{C}_0, |z^{-1}| = 1/|z|$
- $\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, |z_1 z_2| = |z_1||z_2|$
  et donc $|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$
- Inégalité triangulaire: $\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Dans le plan de Gauss, $|z|$ est la distance entre le point représentant $z$ et l'origine $O$ des axes.

# G.7 Formes trigonométrique et exponentielle

## G.7.1 Forme trigonométrique

La définition du module à la section précédente suggère une autre façon de représenter les nombres complexes en utilisant les coordonnées polaires plutôt que cartésiennes dans le plan de Gauss. On écrira donc

$$z = \rho\,[\cos(\theta) + i\sin(\theta)] \tag{G.3}$$

où $\rho = |z| > 0$ est le module de $z$ et $\theta \in \mathbb{R}$ est l'*argument* de $z$. Cette expression (G.3) est appelée *forme trigonométrique* ou *polaire* de $z$. Elle est illustrée à la Fig. G.2.

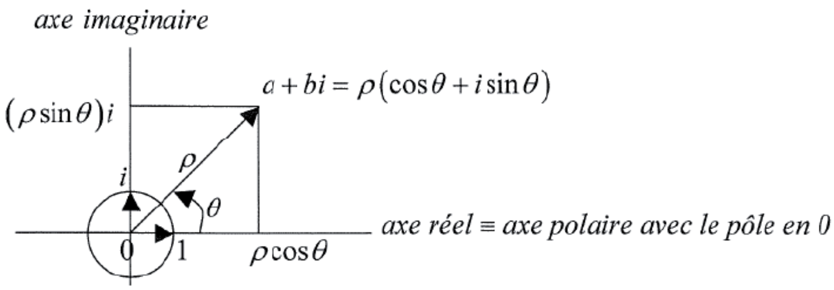



Figure G.2: Forme trigonométrique ou polaire d'un nombre complexe représentée dans le plan de Gauss.

Bien que l'argument $\theta \in \mathbb{R}$, c'est un angle défini à modulo $2\pi$ (voir Fig. G.2). L'unique réel $\theta \in [0, 2\pi[$ qui défini $z$ suivant sa forme trigonométrique (G.3), est appelé *argument principal* de $z$ et est noté $\arg(z)$.

## G.7.2 Formule d'Euler

La formule d'Euler établit le lien entre l'exponentielle d'un nombre imaginaire pur et les fonctions trigonométriques cos et sin:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta) \qquad \forall\theta \in \mathbb{R}. \tag{G.4}$$

#### Démonstration

Une ébauche de démonstration peut être obtenue en considérant le développement en série de Taylor de l'exponentielle. D'après (F.7), on a

$$\begin{aligned}
e^{i\theta} &= 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \ldots \\
&= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!} + \ldots \\
&= 1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{4!} \ldots + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \ldots\right) \\
&= \cos(\theta) + i\sin(\theta),
\end{aligned}$$

puisque les développements de Taylor des fonctions trigonométriques sont, respectivement

$$\begin{aligned}\cos(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{(2n)}}{(2n)!} \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots \\ \sin(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{(2n+1)}}{(2n+1)!} \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots\end{aligned}$$

La formule d'Euler (G.4) peut être inversée pour donner l'expression des fonctions trigonométriques à partir d'exponentielles imaginaires:

$$\begin{aligned}\cos(\theta) &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \\ \sin(\theta) &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.\end{aligned}$$

On en déduit également

$$\left|e^{i\theta}\right| = 1,$$

puisque $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$.

**Remarque.** *La formule (G.4) mène aussi à l'élégante expression qui regroupe cinq des plus importants nombres en mathématiques:* $0, 1, e, \pi$ *et* $i$*:*

$$1 + e^{i\pi} = 0.$$

### G.7.3 Forme exponentielle

De l'expression (G.4), on peut dériver une troisième forme des nombres complexes, la *forme exponentielle*:

$$z = |z|\ e^{i\theta}. \tag{G.5}$$

Cette forme est très souvent utilisée dans les cours de sciences et notamment en Physique Générale pour exprimer la notion de *phaseur*, très pratique dans les calculs de circuits électriques. Grâce à la présence de l'exponentielle imaginaire, elle présente le grand avantage de mener à des calculs extrêmement simples dans l'évaluation de produits et quotients de nombres complexes. À partir de l'expression (G.5) et des propriétés des exponentielles (voir Sec. F.2.3), il est aisé de démontrer les propriétés suivantes:

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|e^{i(\theta_1+\theta_2)} \qquad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \tag{G.6}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}e^{i(\theta_1-\theta_2)} \qquad \forall z_1 \in \mathbb{C}, z_2 \in \mathbb{C}_0. \tag{G.7}$$

Le module du produit (quotient) de deux nombres complexe est donc simplement le produit (quotient) des modules, et son argument est la somme (différences) des arguments. Ce qui s'interprète facilement dans le plan de Gauss (voir Fig. G.6 Sec. G.10).

**Exemples**

$$\begin{aligned} i &= e^{i\frac{\pi}{2}} \\ -1 &= e^{i\pi} \\ -i &= e^{i\frac{3\pi}{2}} \\ 1 &= e^{2i\pi} \end{aligned}$$

La forme exponentielle permet également un calcul aisé de puissances et racines d'un nombre complexe, comme nous allons le voir dans la section suivante. Dans les cours de sciences, cette forme est souvent préférée à la forme en parties réelle et imaginaire. Il est donc fondamental qu'elle soit bien comprise et puisse être exploitée par les étudiants.

## G.8 Puissances et racines d'un nombre complexe

### G.8.1 Formule de De Moivre et puissance $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe

La formule de De Moivre permet de calculer aisément les puissances entières d'un nombre complexe écrit sous forme trigonométrique (G.3) ou exponentielle (G.5). Celle-ci s'écrit

$$\begin{aligned} [\cos(\theta) + i\sin(\theta)]^n &= \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) \qquad \forall\theta \in \mathbb{R} \text{ et } n \in \mathbb{Z} \\ \text{ou encore } \left(e^{i\theta}\right)^n &= e^{in\theta}. \end{aligned}$$

La puissance $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe s'obtient donc aisément lorsqu'il est écrit sous sa forme exponentielle:

$$z^n = |z|^n e^{in\theta}.$$

Il faut donc prendre la $n^{\text{ième}}$ puissance du module et multiplier l'argument par $n$. Cette façon de procéder peut être étendue au cas où $n$ est rationnel, c'est-à-dire au cas des racines $n^{\text{ièmes}}$.

### G.8.2 Racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe

Les racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre $z \in \mathbb{C}$, où $n \in \mathbb{N}_0$ sont les $n$ nombres complexes $z'$ tels que

$$(z')^n = z.$$

On notera que contrairement aux nombres réels, tout nombre complexe différent de 0 possède toujours $n$ racines $n^{\text{ièmes}}$. Par exemple, dans $\mathbb{R}$, le nombre réel strictement négatif $x$ ne possède pas de racine carrée, alors que dans $\mathbb{C}$ ce nombre possède les deux racines carrées imaginaires $i\sqrt{|x|}$ et $-i\sqrt{|x|}$. En effet:

$$\begin{aligned} \left(\pm i\sqrt{|x|}\right)^2 &= i^2|x| \\ &= -|x| \\ &= x, \end{aligned}$$

puisque $x < 0$.

On en déduit que dans $\mathbb{C}$ toute équation du second degré $az^2+bz+c=0$, avec $a \neq 0$, possède toujours deux solutions données par (voir aussi Sec. G.9)

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

**Exemple**

$$\begin{aligned} z^2+3z+6 &= 0 \\ \Leftrightarrow z &= \frac{-3 \pm \sqrt{9-24}}{2} \\ \Leftrightarrow z &= \frac{-3 \pm i\sqrt{15}}{2} \\ &\Rightarrow \quad ES = \left\{ \frac{-3+i\sqrt{15}}{2}, \frac{-3-i\sqrt{15}}{2} \right\} \end{aligned}$$

Comme $z = |z|e^{i\theta+2k\pi}$, où $k \in \mathbb{Z}$, ses $n$ racines $n^{\text{ièmes}}$ sont les $n$ nombres complexes

$$\left\{ \sqrt[n]{|z|} \exp\left(i\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) \middle| \; k=0,\ldots,n-1 \right\} \qquad n \in \mathbb{N}_0$$

Ces $n$ racines ont même module mais diffèrent par l'argument. Elles forment donc un polygone régulier inscrit au cercle de rayon $\sqrt[n]{|z|}$ centré sur l'origine.

**Exemple**

Les trois racines cubiques de l'unité sont

$$\begin{aligned} \left\{ e^{i\left(\frac{2k\pi}{3}\right)} \middle| \, k=0,1,2 \right\} &= \left\{ 1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{4\pi}{3}} \right\} \\ &= \left\{ 1, -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \right\}. \end{aligned}$$

Elles forment un triangle équilatéral inscrit au cercle de rayon 1 centré sur l'origine dans le plan complexe comme illustré à la Fig. G.3.

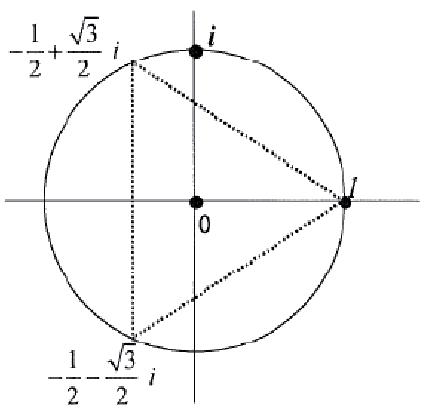



Figure G.3: Représentation dans le plan de Gauss des trois racines cubiques de l'unité.

## G.9 Théorème fondamental de l'algèbre

Nous avons vu à la section précédente que dans $\mathbb{C}$, toute équation du second degré admet toujours deux solutions. Ce résultat est généralisable aux équations de n'importe quel degré $n \in \mathbb{N}_0$.

**Théorème.** *L'équation algébrique à coefficients complexes:*

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0 \text{ et } \forall a_s \in \mathbb{C} \ \ (s = 0, 1, \ldots, n; a_n \neq 0)$$

*admet exactement $n$ racines complexes, certaines pouvant être confondues.*

*Si $z_1, \ldots, z_n$ sont les racines de cette équation, alors*

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n = a_n (z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_n).$$

Ce théorème affirme donc que tout polynôme $P(z)$ de degré $n$ peut se décomposer en le produit de $n$ facteurs linéaires, multipliés par un facteur égal au coefficient de $z^n$. Lorsque plusieurs racines de l'équation $P(z) = 0$ sont confondues, on parle d'une racine du polynôme de *multiplicité* supérieure à 1. *La multiplicité algébrique* d'une racine $z_0$ du polynôme à coefficients complexes

$$P : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \to P(z) = \sum_{s=0}^{n} a_s z^s,$$

notée $m_a(z_0)$, est l'exposant $p \in \mathbb{N}_0$ tel que $(z - z_0)^p$ divise $P$ et que $(z - z_0)^{p+1}$ ne divise pas $P$. En d'autres mots, si $z_0$ est une racine de $P$ de multiplicité $p$, alors il existe un polynôme $Q$ tel que $P(z) = Q(z)(z - z_0)^p$.

### Exemple

Si $P(z) = (z-1)^6 (z-i)^3 (z+1-i)^2$,
alors $m_a(1) = 6$, $m_a(i) = 3$ et $m_a(-1+i) = 2$.

## G.10 Représentation dans le plan de Gauss des opérations élémentaires sur les nombres complexes

- *L'addition* de deux nombres complexes s'effectue dans le plan de Gauss comme l'addition de deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ (que nous aborderons au thème K), en appliquant la *règle du parallélogramme*. Leur soustraction s'effectue de la même manière.

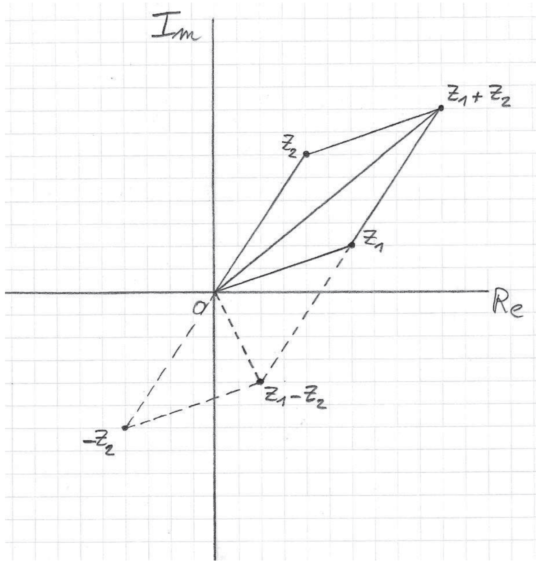



Figure G.4: Représentation graphique de l'addition et de la soustraction de deux nombres complexes.

- La multiplication d'un nombre complexe par un réel $r$ s'effectue à nouveau comme la multiplication d'un vecteur de $\mathbb{R}^2$ par un réel.

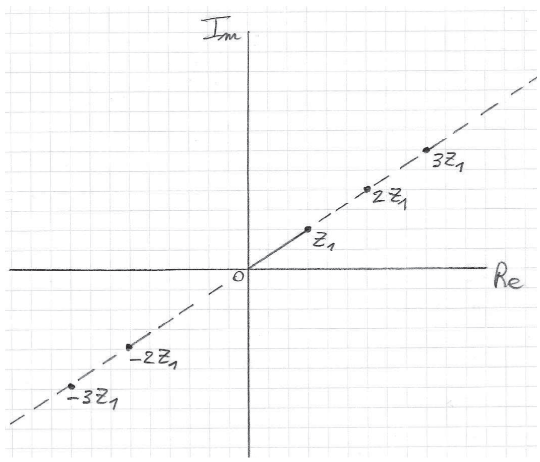



Figure G.5: Représentation graphique de la multiplication d'un nombre complexe par un réel.

- *Le produit* de deux nombres complexes s'effectue dans le plan de Gauss en utilisant la forme exponentielle (ou trigonométrique): on multiplie les modules et on somme les arguments.

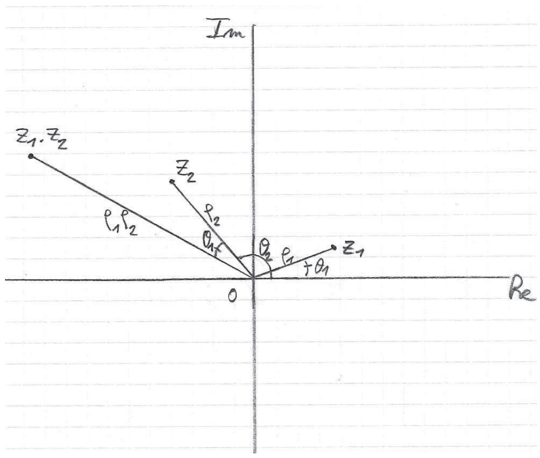



Figure G.6: Représentation graphique de la multiplication de deux nombres complexes.

- Cas particulier du produit de deux nombres complexes conjugués l'un de l'autre. La méthode ci-dessus appliquée au produit $zz^*$ donne bien pour résultat le réel $|z|^2 = \rho^2$.

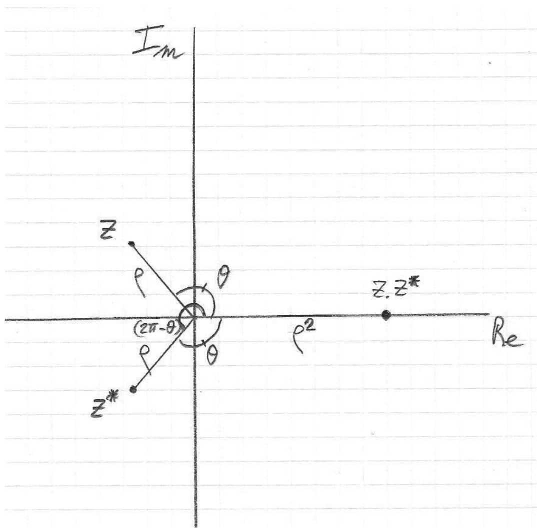



Figure G.7: Représentation graphique de la multiplication $zz^*$.

## S.7 Séance 7

1. Dans $\mathbb{C}$, effectuer les opérations suivantes:

| | | |
|---|---|---|
| (a) $(1+i)+(3-2i)-(2i)=$ | (f) $\frac{1}{3-5i}=$ | (k) $\|3-4i\|=$ |
| (b) $5i\,(2-i)=$ | (g) $\frac{2+i}{4-3i}=$ | (l) $\|3-4i\|-\|4+3i\|=$ |
| (c) $(2-3i)\,(3-2i)=$ | (h) $\frac{1-i}{i}=$ | (m) $\|3-4i\|\,\|4+3i\|=$ |
| (d) $(3+2i)^2=$ | (i) $\frac{5}{3-4i}+\frac{10}{4+3i}=$ | (n) $\left\|\frac{1}{1+3i}-\frac{1}{1-3i}\right\|=$ |
| (e) $(3-2i)^3=$ | (j) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{10}=$ | |

2. Mettre les nombres complexes suivants sous forme exponentielle:

   (a) $z=-3i$

   (b) $z=-\sqrt{6}-\sqrt{2}i$

   (c) $z=2+2\sqrt{3}i$

   (d) $z=12\,[\cos(40°)+i\sin(40°)]\,[\cos(80°)+i\sin(80°)]$

   (e) $z=\dfrac{(2\,[\cos(15°)+i\sin(15°)])^7}{(4\,[\cos(45°)+i\sin(45°)])^3}$

3. Effectuer $\left(\dfrac{1}{1+i}\right)\sum\limits_{k=0}^{50} i^k=$

4. Démontrer que

   (a) si la somme et le produit de deux nombres complexes $z_1$ et $z_2$ sont réels, alors soit $z_1$ et $z_2$ sont réels, soit $z_1$ et $z_2$ sont des complexes conjugués;

   (b) la somme de deux complexes conjugués est égale au double de leur partie réelle;

   (c) la différence d'un nombre complexe et de son conjugué est égale au double de sa partie imaginaire multiplié par $i$;

   (d) le module du produit de deux nombres complexes est égal au produit de leurs modules;

   (e) le module de $\frac{1-it}{1+it}$ (où $t\in\mathbb{R}$) est indépendant de $t$.

5. Décrire et représenter graphiquement les courbes planes représentées par les équations à coefficients complexes suivantes

   (a) $|z-i|=2$

   (b) $|z+2i|^2+|z-2i|^2=6$

   (c) $|z-3|^2-|z+3|^2=4$

   (d) $z\,(\widetilde{z}+2)=3$

   (e) $\mathrm{Im}\,(z^2)=4$

6. Déterminer

   (a) le (ou les) nombre(s) complexe(s) $z$ égal (égaux) à $e^{\frac{\pi}{2i}}$;

   (b) le module de $e^{ix}\,(x\in\mathbb{R})$;

   (c) le module de $e^{iz}\,(z\in\mathbb{C})$;

(d) le module de $e^{2ix}$ ($x \in \mathbb{R}$);

(e) le module de $e^{a+ibx}$ ($a, b, x \in \mathbb{R}$).

7. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses?
(si vrai : le démontrer; si faux : donner un contre-exemple ; on suppose $x, y \in \mathbb{C}$)

(a) $e^{ix} = e^{i(x+2k\pi)} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

(b) $e^{x+iy} = e^{x+i(y+2k\pi)} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

(c) $e^{x} = e^{(x+2k\pi)} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$.

8. Démontrer en utilisant la formule d'Euler:

(a) $\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$

(b) $\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

(c) $\sin^3(\theta) = \frac{3}{4}\sin(\theta) - \frac{1}{4}\sin(3\theta)$

(d) $\cos^4(\theta) = \frac{1}{8}\cos(4\theta) + \frac{1}{2}\cos(2\theta) + \frac{3}{8}$

(e) $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{10} = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

(f) $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

(g) $\int e^{-x}\cos(x)dx = \frac{e^{-x}}{2}\left[\sin(x) - \cos(x)\right] + C$

(h) $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$

(i) $\int e^{3x}\sin(8x)dx = \frac{e^{3x}}{73}\left[3\sin(8x) - 8\cos(8x)\right] + C$

9. Calculer en utilisant la formule d'Euler

$$\int e^{ax}\sin(bx)\,dx \;\left(a, b \in \mathbb{R}^{+}\right)$$

10. Dans le plan de Gauss ci-dessous, où est donné le nombre complexe $z$, représentez:

(a) $2z$

(b) $z*$

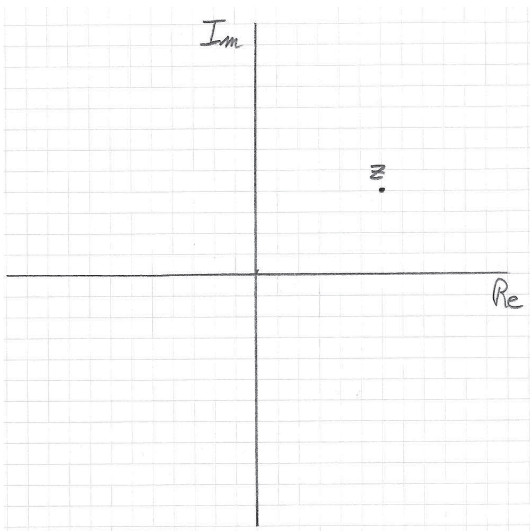
(c) $-z*$

(d) $z - z*$

(e) $|z|$

(f) $iz$

(g) $\frac{z}{i}$




**Exercices de base: 1, 2, 6, 8, 10**

**Exercices avancés: 3, 5, 7**

**Exercices supplémentaires: 4, 9**

## S.8 Séance 8

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes:
   (a) $6x^2 - 12x + 7 = 0$
   (b) $2x^4 + x^2 - 1 = 0$
   (c) $x^2 - (4-i)\,x + 5 + i = 0$
   (d) $x^2 + x + 3\sqrt{2}i = 0$
   (e) $(2+i)\,x^2 - (5-i)\,x + (2-2i) = 0$
   (f) $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$
   (g) $x^3 = 1$
   (h) $x^4 + 6x^3 + 9x^2 + 100 = 0$
   (i) $x^2 = -21 + 20i$
   (j) $x^3 = 2 + 2\sqrt{3}i$
   (k) $x^4 = 1 + \sqrt{3}i$
2. Trouver tous les nombres complexes $z$ tels que $z^2$ est une racine carrée de $z$.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}^2$ les systèmes d'équations suivants (en discutant s'il y a lieu):
   (a) $\begin{cases} (1+i)\,x + 2y = 1 - i \\ x - iy = i \end{cases}$ (b) $\begin{cases} xy = 1 \\ xy^* = 1 \end{cases}$
4. Soit $f : \mathbb{C}_0 \to \mathbb{C}_0 : z \to \frac{1}{z}$, décrire les sous-ensemble $A$ et $f(A)$ du plan de Gauss, sachant que:
   (a) $A = \{2 + 6i\}$
   (b) $A = \{z = x + iy \,|\, y = 3x \text{ et } x \neq 0\}$
   (c) $A = \{z = x + iy \,|\, x + y = 1\}$
5. Résoudre le système suivant dans $\mathbb{C}^3$ en utilisant la méthode d'élimination de Gauss: (revoir Thème B et Séance 2)

$$\begin{cases} -2ix - y + (3+i)\,z & = & a \\ (3-i)\,x + 3iz & = & b \\ ix + (3-i)\,y + (-1+i)\,z & = & c \end{cases} \qquad (a, b, c \in \mathbb{C})$$

**Exercices de base: 1 a) b) f) g), 2, 3**
**Exercices avancés: 1 c) d) e) j), 4**
**Exercices supplémentaires: 1 h) i) k),5**