Université Libre de Bruxelles

Synthèse

Compléments de mathématiques
MATH-H301

Auteur :
Nicolas Englebert

Année 2015 - 2016

Appel à contribution

Synthèse OpenSource

Ce document est grandement inspiré de l'excellent cours donné par Anne Delandtsheer à l'EPB (École Polytechnique de Bruxelles), faculté de l'ULB (Université Libre de Bruxelles). Il est écrit par les auteurs susnommés avec l'aide de tous les autres étudiants et votre aide est la bienvenue ! En effet, il y a toujours moyen de l'améliorer surtout que si le cours change, la synthèse doit être changée en conséquence. On peut retrouver le code source à l'adresse suivante

`https://github.com/nenglebert/Syntheses`

Pour contribuer à cette synthèse, il vous suffira de créer un compte sur *Github.com*. De légères modifications (petites coquilles, orthographe, ...) peuvent directement être faites sur le site ! Vous avez vu une petite faute ? Si oui, la corriger de cette façon ne prendra que quelques secondes, une bonne raison de le faire !

Pour de plus longues modifications, il est intéressant de disposer des fichiers : il vous faudra pour cela installer LaTeX, mais aussi *git*. Si cela pose problème, nous sommes évidemment ouverts à des contributeurs envoyant leur changement par mail ou n'importe quel autre moyen.

Le lien donné ci-dessus contient aussi le `README` contient de plus amples informations, vous êtes invités à le lire si vous voulez faire avancer ce projet !

Licence Creative Commons

Merci !

Chapitre 18

Méthode des approximations successives pour problèmes de Cauchy

18.4 Principe de contraction de Banach

18.4.1 Contraction (de constante α)

Le principe d'une contraction est que si deux points sont à une distance d, la distance entre leur image par la contraction sera inférieure à αd où $\alpha < 1$.

Définition : Contraction de Banach
Une application $T : E \to E$ est une **contraction de constante** α ssi

$$\begin{cases} (i) & \forall x, x' \in E : \|Tx - Tx'\| \leq \alpha \|x - x'\| \\ (ii) & \alpha < 1 \end{cases} \tag{18.1}$$

Ainsi, une fonction lipschitzienne de constante strictement inférieure à 1 est une contraction.

Il est intéressant de travailler dans un espace de Banach (par exemple V), c'est à dire un espace vectoriel réel normé (on aura besoin de la notion de distance) **complet**. V est dit complet ssi toute suite dite de Cauchy converge. Pour rappel :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N : \forall n \geq N, \forall l > 0 : \|u_{n+l} - u_n\| < \epsilon \tag{18.2}$$

On travaille souvent avec des fermés. Si E est fermé dans V alors toute suite d'éléments de E converge dans E !

18.4.2 Théorème de contraction de Banach

Théorème : Principe de contraction de Banach
Si $T : E \to E$ est une contraction de constante α, alors

1. T admet **un** et **un** seul point fixe $\tilde{x}$
2. $\forall x \in E : T^n(x) \to \tilde{x}$
3. $\forall x \in E : \|T^n(x) - \tilde{x}\| \leq \frac{\alpha^n}{-1\alpha} \|Tx - x\|$

De façon francisée, cela signifie que :

1. On admet un point fixe
2. D'où que l'on parte, pour chaque $x \in E$ $(T^1, \dots T^n)$ cette suite converge vers ce point fixe
3. Quel que soit $x \in E$, si j'ai appliqué n fois la contraction je suis à une distance du point fixe majorée par le longueur du premier pas multiplié par ... Comme $\alpha < 1$, cela tend fortement vers zéro

Démonstration.
Prouvons d'abord qu'il s'agit d'une suite de Cauchy.
Soit $x_0 \in E, x_n := T^n(x_0)$. On peut écrire

$$\|x_{n+l} - x_n\| = \|T^{n+l}(x_0\text{à} - T^n(x_0)\| \tag{18.3}$$

L'idée à exploiter est que $T^n(x_0) = T(T^{n-1}(x_0))$. Je peux alors appliquer une majoration en sachant que appliquer T, c'est multiplier par α

$$\begin{aligned} \|x_{n+l} - x_n\| \quad & \leq \alpha\|T^{n+l-1}(x_0) - T^{n-1}(x_0)\| \\ & \leq \alpha^2\|T^{n+l-2}(x_0) - T^{n-2}(x_0)\| \\ & \leq \dots \\ & \leq \alpha^n\|T^l(x_0) - x_0\| \end{aligned} \tag{18.4}$$

On a alors

$$\|x_{n+l} - x_n\| \leq \alpha^n.\|x_l - x_0\| \qquad\qquad (*) \tag{18.5}$$

En appliquant l'inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} \|x_l - x_0\| \quad & \leq \|x_l - x_{l-1}\| + \dots + \|x_2 - x_1\| + \|x_1 - x_0\| \\ & \leq \underbrace{(\alpha^{l-1} + \dots + \alpha^1 + \alpha^0)}_{\frac{1-\alpha^l}{1-\alpha} \leq \frac{1}{1-\alpha}} \|x_1 - x_0\| \end{aligned} \tag{18.6}$$

On a alors

$$\|x_l - x_0\| \leq \frac{1}{1-\alpha}\|x_1 - x_0\| \qquad\qquad (**) \tag{18.7}$$

En rassemblant $(*)$ et $(**)$:

$$\|x_{n+l} - x_n\| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\|x_1 - x_0\| \qquad\qquad \underbrace{< \epsilon}_{\text{dès que } n \text{ grand } (l \geq 0)} \tag{18.8}$$

Ceci démontre que x_n est une suite de Cauchy.

Cette suite converge, car par hypothèse $V, +, \|\|$ est complet. Comme x_n est une suite de Cauchy, $x_n \to \tilde{x} \in V$. Par hypothèse E est fermé dans V. Comme $\underbrace{x_n}_{\in E\ \forall n} \to \tilde{x} \in V \Rightarrow \tilde{x} \in E$.[1]

Il faut maintenant prouver que $\tilde{x}$ est fixe : $T(\tilde{x}) = \tilde{x}$. Par continuité de la contraction :

$$T(\lim_{n\to\infty} x_n) \underbrace{=}_{T \in C^0} = \lim_{n\to\infty} T(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n = \tilde{x} \tag{18.9}$$

1. x_n est une suite d'éléments dans E, elle converge forcément dans E : sa "limite", $\tilde{x} \in E$.

Prouvons maintenant l'unicité de ce point fixe par l'absurde.
Soit $\tilde{x}, \tilde{y}$ fixés par T contraction de sorte que $\|\tilde{x}-\tilde{y}\| \neq 0$. Alors

$$\|\tilde{x}-\tilde{y}\| = \|T(\tilde{x}) - T(\tilde{y})\| \leq \alpha\|\tilde{x}-\tilde{y}\| < \|\tilde{x}-\tilde{y}\| \tag{18.10}$$

On peut éviter la contradiction si $\|\tilde{x}-\tilde{y}\| = 0$ impliquant l' unicité du point fixe.

Il ne reste qu'a prouver la qualité de approximation :

$$\begin{aligned} \|x_n - \tilde{x}\| &= \|x_n - \lim_{l\to\infty} x_{n+l}\| \\ &= \lim_{l\to\infty} \|x_n - x_{n+l}\| \\ &\leq \left(\lim_{l\to\infty}\right) \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\|x_1 - x_0\| \end{aligned} \tag{18.11}$$

On peut donc dire que $\tilde{x} \approx x_n$ avec une erreur $\leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\|x_1 - x_0|$ soit la longueur du premier pas. □

18.1 EDO normale du premier ordre

18.1.1 Attention

Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} xy' + 2y &= 4x^2 \\ y(0) &= 1 \end{cases} \tag{18.12}$$

n'admet pas de solution car 0 est un point singulier ! Il faut faire attention à pas confondre une ED implicite avec une ED explicite ($y' = f(x,y)$).

18.1.2 Solution maximale et globale dans un cylindre

Considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' &= f(t,y) \\ y_0 &= y(t_0) \end{cases} \tag{18.13}$$

Si l'ED est scalaire, considérons un domaine rectangulaire et un cylindre s'il s'agit d'un SD. Les différents types de solutions sont :

- **Maximale** ; Une solution est dite maximale ssi elle ne peut pas être prolongée en une autre solution, c'est à dire qu'on ne peut la prolonger sur un intervalle plus grand (Pas de solution dans un domaine plus étendu restant dans le domaine de f)
- **Globale** ; Une solution est globale ssi la solution au problème de Cauchy est définie sur I tout entier.
- **Locale** ; Une solution est locale ssi il existe un voisinage $\mathcal{V}$ du point de la C.I. tel que la fonction est définie dans un sous-intervalle de I.

Exemple. Soit l'EDO $y' = y^2$. Sa solution générale est $y(t) = -\frac{1}{t+C}$. A cause de l'asymptote, toutes ces solutions sont maximales mais seule la solution nulle est globale.

18.1.3 Régularité des solutions d'une EDO

PROPOSITION
Si $\vec{\varphi}$ est solution de $\vec{y}' = \vec{f}(t, \vec{y})$ pour $\vec{f} \in C^k$, alors $\vec{\varphi} \in C^{k+1}$

Démonstration.
Comme φ est solution d'EDO, il est dérivable (et donc C^0).

- Supposons $k = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \varphi \in C^0 \\ f \in C^0 \end{array}\right\} \Rightarrow t \mapsto f(t, \varphi(t)) \in C^0 \tag{18.14}$$

  Or $f(t, \varphi(t)) = \varphi'(t) \Rightarrow \phi \in C^1$.
- Récurrence [2]. Supposons vrai pour $k-1$ et montrons vrai pour k

$$\left.\begin{array}{l} \text{Vrai pour } k-1 \\ C^k \subset C^{k-1} \\ \vec{f} \in C^k \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{\varphi} \in C^k \Rightarrow t \mapsto \vec{f}(t, \vec{\varphi}(t)) \in C^k \tag{18.15}$$

  Or $\vec{\varphi}'(t) = \vec{f}(t, \vec{\varphi}(t))$, d'où $\vec{\varphi}' \in C^k$ c'est-à-dire $\vec{\varphi} \in C^{k+1}$

□

18.1.4 Équation intégrale d'un problème de Cauchy

PROPOSITION
φ est solution du problème de Cauchy sur I

$$\left\{\begin{array}{ll} y' & = f(t, y) \\ y(t_0) & = y_0 \end{array}\right. \tag{18.16}$$

ssi

$$\left\{\begin{array}{l} \varphi \in C^0(I) \\ \forall t \in I : \varphi(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau \end{array}\right. \tag{18.17}$$

Démonstration.
Sens direct : $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$ par hypothèse, il suffit d'intégrer les deux membres de t_0 à t.

Sens indirect : $\varphi \in C^0 \Longrightarrow \tau \mapsto f(\tau, \varphi(\tau)) \in C^0$, d'où $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$ en dérivant l'équation intégrale. □

18.2 Théorème de résolubilité locale

18.2.1 Théorème

THÉORÈME : CAUCHY-PAENO-ARZELA
Le problème de Cauchy

$$\left\{\begin{array}{ll} y' & = f(t, y) \\ y(t_0) & = y_0 \end{array}\right. \tag{18.18}$$

où $f \in C^0(\mathcal{U})$ ($\mathcal{U}$ étant ouvert) et $(t_0, y_0) \in \mathcal{U}$ admet **au moins** une solution locale.

2. ??

18.3 L'opérateur intégral de Picard

18.3.1 L'opérateur intégral de Picard

Inspiré par l'écriture intégrale d'un problème de Cauchy :

$$\vec{\varphi}(t) = \vec{y_0} + \int_{t_0}^{t} \vec{f}(\tau, \varphi(\tau))d\tau \tag{18.19}$$

On définit l'opérateur intégral de Picard :

DÉFINITION : OPÉRATEUR INTÉGRAL DE PICARD

$$\begin{array}{rl} T : z \mapsto & T(z) \\ & T(z)|_t := \vec{y_0} + \int_{t_0}^{t} \vec{f}(\tau, z(\tau))d\tau \end{array} \tag{18.20}$$

T est l'opérateur intégral de Picard **associé au problème de Cauchy** ci-dessus. Les solutions de l'équation intégrale du problème de Cauchy sont donc exactement les points fixes de cet opérateur, c'est-à-dire les fonctions $\vec{\varphi}$ telles que $\vec{\varphi} = T(\vec{\varphi})$.

18.3.9 Erreur d'une approximation de la solution

Étudions la différence entre la solution exacte et l'approximation

$$\begin{array}{rl} |y(t) - y_n(t)| & = |y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau))d\tau - y_0 - \int_{t_0}^{t} f(\tau, y_n(\tau))d\tau| \\ & = |\int_{t_0}^{t}(f(\tau, y(\tau)) - f(\tau, y_n(\tau)))d\tau| \\ & \leq \sup_t |t - t_0|; \sup_\tau |f(\tau, y(\tau)) - f(\tau, y_n(\tau))| \end{array} \tag{18.21}$$

Pour que l'erreur soit petite, il faut que t soit proche de t_0, que l'on parte d'une bonne approximation et aussi que f ne varie pas trop vite en sa deuxième variable y (c'est à dire sup $|\partial f/\partial y|$ petit si f est "brave" (c'est-à-dire lipschitzienne)).

18.4 Condition de Lipschitz

18.4.1 Fonction totalement ou partiellement lipschitzienne

DÉFINITION : FONCTION LIPSCHITZIENNE
$f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite **lipschitzienne** ssi

$$\exists M \in \mathbb{R}(= V) : \forall x, \tilde{x} \in A : |f(x) - f(\tilde{x}) \leq M|x - \tilde{x}| \tag{18.22}$$

Ceci signifie que M majore toutes les valeurs absolues de pentes de cordes du graphe de f. Être lipschitzienne est plus fort qu'être continue, mais cela n'implique pas la dérivabilité. Par contre si une fonction est dérivable à dérivée bornée alors elle est lipschitzienne.

On peut généraliser dans le cas où $V = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ en considérant une condition de Lipschitz "partielle", avec $\vec{x}$ constant

DÉFINITION :
$\vec{f} : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ est $\Lambda-$ **lipschitzienne** en $\vec{y}$ (sur $\mathcal{U}$) ssi

$$\forall (x, y), (x, \tilde{y}) \in \mathcal{U} : ||f(x, y) - f(x, \tilde{y})|| \leq \Lambda ||y - \tilde{y}|| \tag{18.23}$$

On remarque bien qu'ici x est fixé, constant.

18.4.2 Fonctions localement lipschitzienne

Comme être lipschitzienne est fort contraignant, on ne demande parfois que localement. La définition est presque identique, sauf que l'on se limite à comparer les points de même abscisse en restant dans un voisinage $\mathcal{V}_0$.

DÉFINITION :
$\forall (x_0, y_0) \in \mathcal{U}, \exists \mathcal{V}_0$ voisinage de $(x_0, y_0), \exists \Lambda_0 \in \mathbb{R}$:

$$\forall (x, y), (x, \tilde{y}) \in \mathcal{V}_0 \cap \mathcal{U} : |f(x, y) - f(x, \tilde{y}| \leq \Lambda_0 |y - \tilde{y}| \tag{18.24}$$

Ceci se généralise aux fonction vectorielles en changeant $|\ |$ par $\|\ \|$.

18.4.4 CNS pour Lipschitz : composante par composante

PROPOSITION
$\vec{f}$ est lipschitzienne en $\vec{y}$ ssi $\forall i = 1, \ldots, p : f_i$ est lipschitzienne en $\vec{y}$

Démonstration. Flemme, voir slide 38 ou page 20 (**important pour l'examen !**). □

18.4.5 C^1 garantit localement Lipschitz

LEMME :
Si $\vec{f}$ est différentiable sur $\text{int}(\mathcal{U})$ et continue sur $\mathcal{U}$ et que ses fonctions dérivées $\frac{\partial \vec{f}}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial \vec{f}}{\partial y_m}$ sont bornées sur $\text{int}(\mathcal{U})$, alors $\vec{f}$ est lipschitzienne en $\vec{y}$ sur $\mathcal{U}$.

Démonstration. Inclure 18.66 □

PROPOSITION
Si $\vec{f} \in C^1(\mathcal{U})$, alors $\vec{f}$ est localement lipschitzienne sur $\text{int}(\mathcal{U})$.

Démonstration. Non vu ? □