



ECOLE  
POLYTECHNIQUE  
DE BRUXELLES

UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES

SYNTHÈSE

---

# Mécanique des solides et des fluides

## CNST-H-202

---

*Auteur :*  
Nicolas ENGLEBERT

*Rappels théoriques :*  
Enes ULUSOY

Année 2014 - 2015

# Appel à contribution

## Synthèse OpenSource



Ce document est grandement inspiré de l'excellent cours donné par Guy Warzée à l'EPB (École Polytechnique de Bruxelles), faculté de l'ULB (Université Libre de Bruxelles). Il est écrit par les auteurs susnommés avec l'aide de tous les autres étudiants et votre aide est la bienvenue ! En effet, il y a toujours moyen de l'améliorer

surtout que si le cours change, la synthèse doit être changée en conséquence. On peut retrouver le code source à l'adresse suivante

<https://github.com/nenglebert/Syntheses>

Pour contribuer à cette synthèse, il vous suffira de créer un compte sur *Github.com*. De légères modifications (petites coquilles, orthographe, ...) peuvent directement être faites sur le site ! Vous avez vu une petite faute ? Si oui, la corriger de cette façon ne prendra que quelques secondes, une bonne raison de le faire !

Pour de plus longues modifications, il est intéressant de disposer des fichiers : il vous faudra pour cela installer  $\text{\LaTeX}$ , mais aussi *git*. Si cela pose problème, nous sommes évidemment ouverts à des contributeurs envoyant leur changement par mail ou n'importe quel autre moyen.

Le lien donné ci-dessus contient aussi le README contient de plus amples informations, vous êtes invités à le lire si vous voulez faire avancer ce projet !

## Licence Creative Commons

Le contenu de ce document est sous la licence Creative Commons : *Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International (CC BY-NC-SA 4.0)*. Celle-ci vous autorise à l'exploiter pleinement, compte- tenu de trois choses :



1. *Attribution* ; si vous utilisez/modifiez ce document vous devez signaler le(s) nom(s) de(s) auteur(s).
2. *Non Commercial* ; interdiction de tirer un profit commercial de l'œuvre sans autorisation de l'auteur
3. *Share alike* ; partage de l'œuvre, avec obligation de rediffuser selon la même licence ou une licence similaire

Si vous voulez en savoir plus sur cette licence :

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

**Merci !**

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>vi</b>
<b>1 Calcul tensoriel</b>	<b>1</b>
1.1 Notation indicielle . . . . .	1
1.1.1 Définition et exemple . . . . .	1
1.1.2 Rotation des axes . . . . .	2
1.1.3 Le symbole de Kronecker . . . . .	2
1.2 Opérateurs . . . . .	3
1.3 Scalaire et vecteur . . . . .	3
1.3.1 Scalaire . . . . .	3
1.3.2 Vecteur . . . . .	3
1.4 Tenseur du second ordre . . . . .	4
1.4.1 Définition . . . . .	4
1.4.2 Changement d'axes . . . . .	4
1.5 Autre choses à savoir sur les tenseurs . . . . .	4
1.5.1 Tenseur symétrique et antisymétrique . . . . .	4
1.5.2 Remarque concernant $\alpha_{Pi}$ . . . . .	5
1.6 Théorèmes de Gauss . . . . .	5
1.6.1 Théorème de Gauss 3D . . . . .	5
1.7 Notion de débit . . . . .	6
<b>2 Les contraintes</b>	<b>7</b>
2.1 Tenseur des contraintes : définition . . . . .	7
2.1.1 Définition . . . . .	7
2.1.2 La loi de Cauchy . . . . .	8
2.1.3 Le tenseur des contraintes . . . . .	8
2.2 La dérivée matérielle . . . . .	9
2.2.1 Définition . . . . .	9
2.2.2 Dérivée matérielle d'une grandeur locale . . . . .	9
2.2.3 Dérivée matérielle d'une intégrale de volume . . . . .	9
2.3 Les lois fondamentales . . . . .	9
2.3.1 Conservation de la masse . . . . .	9
2.3.2 Loi de la résultante cinétique . . . . .	10
2.3.3 Loi du moment cinétique . . . . .	11
2.3.4 Théorème de Cauchy - Poisson . . . . .	11
2.4 Valeurs principales et directions principales . . . . .	12
2.4.1 Valeurs propres et directions principales . . . . .	12
2.4.2 Propriétés du tenseur des contraintes . . . . .	12
2.5 Changement d'axes : cercle de Mohr . . . . .	13

2.5.1	Construction du cercle de Mohr . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Cinématique des milieux continus</b>	<b>17</b>
3.1	Les vitesses de déformation . . . . .	17
3.1.1	Vitesse de rotation . . . . .	17
3.1.2	Tenseur des vitesses de déformation . . . . .	18
3.2	Les déformations . . . . .	19
3.2.1	Tenseur des déformations de Green . . . . .	19
3.2.2	Tenseur des déformations évanouissantes . . . . .	19
<b>4</b>	<b>Les lois universelles des milieux continus</b>	<b>21</b>
4.1	Conservation de la masse . . . . .	21
4.1.1	Forme locale et intégrale de l'équation de continuité . . . . .	21
4.1.2	Autre forme locale de l'équation de continuité . . . . .	21
4.1.3	Cas particuliers . . . . .	22
4.1.4	Conclusion . . . . .	22
4.2	Loi de la résultante cinétique . . . . .	23
4.2.1	Calcul de l'action exercée par un fluide sur un obstacle . . . . .	23
4.3	Loi du moment cinétique . . . . .	23
4.4	Théorème de l'énergie cinétique . . . . .	23
<b>5</b>	<b>Lois de comportement</b>	<b>24</b>
5.1	Pourquoi en a-t-on besoin ? . . . . .	24
5.2	Les fluides : les fluides parfaits et les fluides visqueux newtoniens . . . . .	25
5.2.1	Le fluide parfait . . . . .	25
5.2.2	Le fluide visqueux newtonien . . . . .	25
5.3	Les solides : élasticité linéaire . . . . .	26
5.3.1	Loi de Hooke . . . . .	27
<b>6</b>	<b>Théorèmes des travaux virtuels</b>	<b>28</b>
6.1	Pourquoi les travaux virtuels ? . . . . .	28
6.1.1	Problème à résoudre . . . . .	28
6.1.2	Equations à résoudre . . . . .	28
6.2	Travail virtuel . . . . .	28
6.2.1	Travail virtuel des forces extérieurs . . . . .	28
6.2.2	Calculs préliminaires . . . . .	28
6.3	Théorème . . . . .	29
6.3.1	Le théorème direct . . . . .	29
6.3.2	Le théorème réciproque . . . . .	29
<b>7</b>	<b>Statique des fluides</b>	<b>30</b>
7.1	Équations générales . . . . .	30
7.1.1	Force massique . . . . .	30
7.1.2	Force dérivant d'un potentiel . . . . .	30
7.1.3	Définition de la fonction $P$ . . . . .	31
7.2	Principe d'Archimède . . . . .	31
7.2.1	Énoncé . . . . .	31
7.3	Équilibre des fluides incompressibles . . . . .	32
7.3.1	Fluides homogènes . . . . .	32
7.3.2	Le principe de Pascal . . . . .	34

<b>8</b>	<b>Equations générales de cinématique des fluides</b>	<b>35</b>
8.1	Le tourbillon . . . . .	35
8.1.1	Tube de tourbillon . . . . .	35
<b>9</b>	<b>Dynamique des fluides parfaits</b>	<b>37</b>
9.1	Introduction . . . . .	37
9.2	Équation du mouvement . . . . .	37
9.2.1	Équations d'Euler . . . . .	37
9.2.2	La pression motrice . . . . .	38
9.2.3	Équations de Lamb . . . . .	38
9.2.4	Energie spécifique totale - charge . . . . .	39
9.3	Ecoulement permanant d'un fluide parfait . . . . .	40
9.3.1	Théorème de Bernoulli 1 . . . . .	40
9.3.2	Théorème de Bernoulli 2 . . . . .	40
<b>10</b>	<b>Dynamique des fluides visqueux</b>	<b>41</b>
10.1	Introduction . . . . .	41
10.1.1	Interprétation physique . . . . .	41
10.1.2	Unités . . . . .	41
10.2	Equation de mouvement . . . . .	42
10.2.1	Equation de Navier-Stokes . . . . .	42
10.2.2	Pression motrice . . . . .	43
10.2.3	Conditions aux limites . . . . .	43
10.3	Mouvement turbulent . . . . .	43
10.3.1	Nombre de Reynolds . . . . .	43
10.3.2	Contrainte de turbulence . . . . .	44
10.3.3	Equations de Navier-Stokes moyennées . . . . .	45
10.4	Les théorèmes de Bernoulli . . . . .	46
10.4.1	Rappels des deux premiers théorèmes . . . . .	46
10.4.2	Le théorème de Bernoulli 3 . . . . .	46
10.4.3	Le théorème de Bernoulli 4 . . . . .	46
10.4.4	Les pertes de charge . . . . .	47
<b>11</b>	<b>Dynamique des fluides parfaits</b>	<b>48</b>
<b>A</b>	<b>Rappels théoriques</b>	<b>49</b>

# Introduction

## Les deux approches

Afin d'aborder la mécanique des fluides, deux approches sont possibles :

1. Approche de d'Alembert
2. Approche d'Euler

La première approche, celle de d'Alembert consiste à retrouver les équations de mouvements et d'après y appliquer les théorèmes généraux (Cf. *Mécanique Rationnelle II*) en partant d'une série de postulats : les postulats de d'Alembert. De façon synthétique :

Travaux/puissances virtuels  $\Rightarrow$  Équations de mouvements  $\Rightarrow$  Théorèmes généraux

La seconde approche, celle d'Euler, est celle qui sera suivie tout au long de ce cours. Elle se présente de façon synthétique de la sorte :

Théorèmes généraux  $\Rightarrow$  Équations de mouvements  $\Rightarrow$  Travaux/puissances virtuels

## Hypothèses de continuité

Un milieu est *continu* si on peut définir mathématiquement des densités de propriétés physiques qui sont des *fonctions continues* des coordonnées spatiales.

L'échelle des problèmes à traiter peut avoir son importance : depuis l'espace, le sable peut être vu comme un milieu continu, mais pas à "échelle humaine".

Il existe une série d'hypothèses de continuité. Une des plus importantes peut s'énoncer : *deux points matériels infiniment voisins à l'instant  $t_0$  restent infiniment voisins à tout instant  $t > t_0$  et réciproquement*. Selon ce principe, un cylindre n'est pas continu ; je peux en effet rejoindre les extrémités.

Il existe bien d'autres hypothèses de continuité :

- Continuité de la transformation par rapport au temps.
- Tout ensemble continu de points matériels à l'instant  $t_0$  reste continu à l'instant  $t$  et réciproquement. Un ensemble fermé reste fermé.
- Les points matériels à l'intérieur d'une surface fermée restent à l'intérieur de cette surface déformée (surface matérielle) qui ne contiendra aucun autre point matériel.
- A l'intérieur d'une surface matérielle fermée, la quantité de masse est constante au cours du temps
- Les points matériels constituant la frontière d'un milieu continu à un instant  $t_0$ , en forment la frontière en tout autre instant  $t$ .

Ces hypothèses montrent que des trous, fissures, failles, sillages et des chocs sont des phénomènes ne respectant pas les hypothèses de continuité.

## Notion de base et hypothèses

La masse est distribuée de façon continue :

$$\rho = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{M}{V} \quad (1)$$

où  $\rho$  est la masse volumique,  $M$  la masse et  $V$  le volume. Cette relation nous montre que le béton armé n'est pas continu car il faudrait considérer deux  $\rho$  différents.

Il existe deux types de forces :

**À distance** ; ce sont les forces réparties en volume. Le poids d'une table ne vient pas d'une force sur la table mais de la gravité.

**De contact** ; ce sont les forces réparties en surface, par exemple moi appuyant sur une table. Je ne peux ainsi "causer" que ce type de forces, et jamais celles à distance.

## Définition de la résultante cinétique

La quantité de mouvement élémentaire est définie comme  $\vec{v}dm = \vec{v}\rho dV$ . Celle-ci permet de définir la résultante cinétique :

$$\vec{\mathcal{R}} = \int_M \vec{v} dm = \int_M \vec{v}\rho dV \quad (2)$$

## Définition du moment cinétique

Le moment cinétique (ou "moment des quantités de mouvement") est défini par rapport à un point fixe. Son expression est :

$$\vec{\mathcal{M}} = \int_M \vec{r} \times \vec{v} dm = \int_M \vec{r} \times \vec{v}\rho dV \quad (3)$$





# Chapitre 1

## Calcul tensoriel

### 1.1 Notation indicielle

#### 1.1.1 Définition et exemple

Dans le cadre de ce cours, on utilisera les notations indicielles, où un indice représente un *numéro de composante*. Dans une équation, un indice peut apparaître :

**1x** ; il doit apparaître une fois dans tous les termes de l'équation. C'est un *indice libre*.

**2x** ; il représente une sommation. C'est un *indice muet*.

Un indice ne peut donc **jamais** apparaître plus de deux fois dans un même terme.

#### Exemples

Le produit scalaire  $q = \vec{u} \cdot \vec{n} = u_x n_x + u_y v_y + u_z v_z$  s'écrit en notation indicielle :

$$q = u_k n_k \quad (1.1)$$

Le produit vectoriel,  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$  s'écrit dès lors :

$$c_i = \delta_{ijk} a_j b_k \quad (1.2)$$

On voit ici que  $i$  est indice libre à gauche et à droite. S'il n'y a pas d'indice libre d'un côté, il ne peut **pas** y en avoir de l'autre côté.

Pour illustrer, voici deux équations **fausses**

1.  $\tau_{kk} = 2\mu a_{kk} + \lambda \delta_{kk} a_{kk}$

2.  $k_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$

#### Remarque

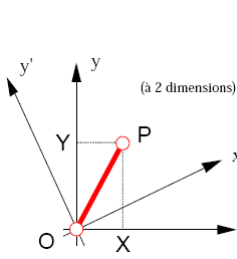
Pour les dérivées partielles, on placera l'indice  $i$  en indice après la virgule :

$$\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i} \equiv (\dots)_{,i} \quad (1.3)$$

Pour les dérivée temporelle, on utilise l'indice 0 qui n'obéit **pas** à la règle de la notation indicielle !

$$\partial_0 \equiv \frac{\partial}{\partial t} \quad (1.4)$$

### 1.1.2 Rotation des axes



Considérons les axes  $\vec{1}_x, \vec{1}_y$  et  $\vec{1}_z$ . Définissons  $x = OX, y = OY, z = OZ$ . Le vecteur  $\vec{OP}$  peut s'écrire :

$$\vec{OP} = x\vec{1}_x + y\vec{1}_y + z\vec{1}_z \quad (1.5)$$

mais ça, c'était avant ! Avec notre superbe notation indicielle, on trouve (où  $x = \vec{OP} \cdot \vec{1}_x, y = \dots$ ) :

$$\vec{OP} = x_i \vec{1}_{x_i} \quad (1.6)$$

FIGURE 1.1 – Rotation d'axe

Considérons maintenant un système d'axe  $\vec{1}_{x'}, \vec{1}_{y'}$  et  $\vec{1}_{z'}$ . Notre vecteur  $x' = \vec{OP} \cdot \vec{1}_{x'}$  avec  $\vec{OP} = x\vec{1}_x + y\vec{1}_y + z\vec{1}_z$ . On trouve donc :

$$x' = (x\vec{1}_x + y\vec{1}_y + z\vec{1}_z) \cdot \vec{1}_{x'} = x(\vec{1}_x \cdot \vec{1}_{x'}) + y(\vec{1}_y \cdot \vec{1}_{x'}) + z(\vec{1}_z \cdot \vec{1}_{x'}) \quad (1.7)$$

En notant  $\cos(x, x') = (\vec{1}_x \cdot \vec{1}_{x'})^1$  et avec  $\cos(y', x) = \cos(x, y')$  :

$$\begin{cases} x' = x \cos(x, x') + y \cos(y, x') + z \cos(z, x') \\ y' = x \cos(x, y') + y \cos(y, y') + z \cos(z, y') \\ z' = x \cos(x, z') + y \cos(y, z') + z \cos(z, z') \end{cases} \quad (1.8)$$

Ce qui donne, en notation indicielle (c'est dégueu et bien à la fois) :

$$x'_i = x_j \cos(x_j, x'_i) \quad (1.9)$$

et, similairement :

$$x_i = x'_j \cos(x'_j, x_i) \quad (1.10)$$

Il s'agit de **trois** équations ( $i = 1, 2, 3$  avec, dans chacune, une **somme** sur  $j = 1, 2, 3$ ).

Posons  $\alpha_{ij} = \cos(x'_j, x_i)$  de sorte que  $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$  avec  $\cos(x'_j, x_i) = \cos(x_i, x'_j)$ . **Si** on permute aussi "anciens axes" et "nouveaux axes" (on notera le nouvel axe en majuscule pour éviter toute confusion), on a :

$$X'_I = \alpha_{Ij} x_j \quad \text{avec} \quad \alpha_{Ij} = \cos(x'_I, x_j) \quad (1.11)$$

Un exemple d'utilisation est donné slide 13.

### 1.1.3 Le symbole de Kronecker

Déjà vu à de maintes et maintes reprises, celui-ci est défini

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (1.12)$$

**Attention** à l'utilisation des règles indicielles :  $\delta_{22} = 1$  mais  $\delta_{jj} = 3$  !

On peut obtenir celui-ci en notation indicielle de la façon suivante :

$$\left. \begin{aligned} x_j &= \alpha_{Kj} x'_K \\ x'_K &= \alpha_{Ki} x_i \end{aligned} \right\} \rightarrow x_j = \alpha_{Kj} \alpha_{Ki} x_i \Rightarrow \delta_{ij} = \alpha_{Kj} \alpha_{Ki} \quad (1.13)$$

1. Le produit scalaire de deux vecteurs unitaires donne le cosinus de l'angle entre les deux

## Le symbole de Kronecker $\delta_{ijk}$

Il s'agit de la généralisation à trois dimensions

$$\delta_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{Si } ijk \text{ est une permutation de } 1\ 2\ 3 \\ -1 & \text{Si } ijk \text{ est une permutation de } 3\ 2\ 1 \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases} \quad (1.14)$$

Cette notation permet d'écrire la  $i$ ème composante du produit vectoriel  $\vec{a} = \vec{b} \times \vec{c}$  de la sorte :  $a_i = \delta_{ijk} b_j c_k$ .

## 1.2 Opérateurs

Les différents opérateurs peuvent également s'écrire en notation indicielle. Pour le plus grand bonheur de tous, les voici

Opérateur	Notation symbolique	Notation usuelle	Notation indicielle
Gradient	$\overrightarrow{grad} \phi$	$\vec{\nabla} \phi$	$\partial_i \phi = \phi_{,i}$
Divergence	$\overrightarrow{div} \vec{v}$	$(\vec{\nabla} \cdot \vec{v})$	$\partial_i v_i = v_{i,i}$
Rotationnel	$\overrightarrow{rot} \vec{v}$	$\vec{\nabla} \times \vec{v}$	$\delta_{ijk} \partial_j v_k$
Laplacien	$\Delta \phi$	$(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \phi$	$\partial_{ii} \phi = \phi_{,ii}$

Tableau 1.1 – Notation des opérateurs en notation hostile

## 1.3 Scalaire et vecteur

### 1.3.1 Scalaire

Il s'agit d'un tenseur d'ordre zéro. Un scalaire est une grandeur mesurée par un nombre *indépendant* du choix des axes de coordonnées (l'énergie cinétique par exemple). Lors d'un changement d'axe, la valeur du scalaire n'est pas modifiée.

### 1.3.2 Vecteur

Il s'agit d'un tenseur d'ordre un. Un vecteur est une grandeur mesurée par trois composantes qui se transforme selon

$$v'_K = \alpha_{Kj} v_j \quad (1.15)$$

pour tout changement d'axes de coordonnées (par exemple la vitesse ou la force).

### Amusons-nous avec les vecteurs

Soit un vecteur  $\vec{v}$  défini par ses composantes<sup>2</sup> :

$$\vec{v} = v_i \vec{1}_{x_i} \quad (1.16)$$

et soit une direction définie par le vecteur unitaire :

$$\vec{1}_\mu = \cos(\mu, x_i) \vec{1}_{x_i} \quad (1.17)$$

---

2. Je note tout en notation indicielle car c'est vraiment un truc de flemmard, et j'aime ça !

La projection du vecteur  $\vec{v}$  sur la direction  $\vec{1}_\mu$  s'écrit :

$$\vec{v} \cdot \vec{1}_\mu \equiv v^{(\mu)} = v_i \cos(\mu, x_i) \quad (1.18)$$

On voit donc qu'un vecteur associe un scalaire  $v^{(\mu)}$  à toute direction, par une combinaison linéaire des cosinus directeurs de cette direction.

La valeur du scalaire est évidemment indépendante du système d'axe ; un tenseur d'ordre 1 associe un tenseur d'ordre 0 à toute direction par ...

## 1.4 Tenseur du second ordre

### 1.4.1 Définition

En généralisation la définition d'un vecteur, on a :

*Un tenseur associe un vecteur à toute direction, par une combinaison linéaire des cosinus directeurs de cette direction*

$$\vec{T}^{(n)} = \bar{T}_i \cos(n, x_i) \quad (1.19)$$

Avec l'équation  $n_i = \cos(n, x_i)$ , l'expression devient :

$$\vec{T}^{(n)} = \bar{T}_i n_i \quad (1.20)$$

En exprimant ces vecteurs  $\vec{T}_i$  en fonction de leurs composantes :

$$\begin{cases} \vec{T}_1 &= T_{11}\vec{1}_{x_1} + T_{12}\vec{1}_{x_2} + T_{13}\vec{1}_{x_3} \\ \vec{T}_2 &= T_{21}\vec{1}_{x_1} + T_{22}\vec{1}_{x_2} + T_{23}\vec{1}_{x_3} \\ \vec{T}_3 &= T_{31}\vec{1}_{x_1} + T_{32}\vec{1}_{x_2} + T_{33}\vec{1}_{x_3} \end{cases} \Rightarrow \vec{T}_1 = T_{ij}\vec{1}_{x_j} \quad (1.21)$$

Un tenseur d'ordre 2 est donc défini par 9 composantes. La composante  $j$  de  $T^{(n)} = T_i n_i$  s'écrit  $T_j^{(n)} = T_{ij} n_i$  définissant les 9 composantes de  $T_{ij}$ .

### 1.4.2 Changement d'axes

Le changement d'axe d'un tenseur d'ordre 2 (du à une rotation) est similaire à celle vue au cours de *Mécanique rationnelle II*.

$$T'_{PQ} = \alpha_{Pi} \alpha_{Qj} T_{ij} \quad (1.22)$$

Un tenseur est ainsi une grandeur mesurée par 9 composantes qui se transforme selon la formule énoncée ci-dessus pour tout changement d'axe. Par exemple, le tenseur d'inertie (<3), le tenseur des contraintes, des déformations, ...

## 1.5 Autre choses à savoir sur les tenseurs

### 1.5.1 Tenseur symétrique et antisymétrique

Avant toute chose, énonçons les deux définitions associées :

1. Tenseur symétrique :  $T_{ij} = T_{ji}$
2. Tenseur antisymétrique :  $T_{ij} = -T_{ji}$

Tout tenseur peut être décomposé en une partie symétrique et une partie antisymétrique

$$T_{ij} = \underbrace{\frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji})}_{\text{symétrique}} + \underbrace{\frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji})}_{\text{antisymétrique}} \quad (1.23)$$

Afin de s'y retrouver, la partie symétrique sera notée à l'aide de  $()$  et la partie antisymétrique à l'aide de  $[]$  de la sorte

$$T_{ij} = T_{(ij)} + T_{[ij]} \quad (1.24)$$

On démontre aisément que le caractère symétrique ou antisymétrique d'un tenseur est indépendant du système d'axes. Il en découle alors la propriété suivante :

Si  $S_{ij}$  est un tenseur symétrique et  $A_{ij}$  est un tenseur antisymétrique alors

$$S_{ij}A_{ij} = 0 \quad (1.25)$$

Cela signifie que  $T_{11} + T_{22} + T_{33} = 0$ . On ne va pas s'attarder la dessus car dans le cadre de ce cours cela ne sera que peu utile<sup>3</sup> (comprenez : "passez moi" ? :D)

### 1.5.2 Remarque concernant $\alpha_{Pi}$

Il faut faire attention à ce qu'est  $\alpha_{Pi}$ . Celui-ci lie les deux systèmes d'axes mais n'est pas défini en tant que tel dans un système : son rôle est de "lier" les axes entres eux mais ce n'est **pas** un tenseur !

## 1.6 Théorèmes de Gauss

### 1.6.1 Théorème de Gauss 3D

Déjà vu en long et en large au cours de *Physique Générale*, le théorème de Gauss s'applique dans un volume  $V$  limité par une surface fermée  $S$ <sup>4</sup>. On l'énonce

$$\int_V \partial_i T \dots dV = \oint_S T \dots n_i dS \quad (1.26)$$

où  $T \dots$  représente un scalaire, vecteur ou tenseur quelconque et  $\vec{n}$  la normale unitaire **extérieure au volume** ! Pour retenir ce théorème, il suffit de savoir que pour passer de  $dV$  à  $dS$  on remplace  $\partial_i$  par  $n_i$ . Comment alors retenir de quel côté est l'un ou l'autre ? Il suffit de savoir que l'on ne peut pas avoir de normale à l'intérieur d'un volume :  $n_i$  doit alors forcément se trouver dans l'intégrale de surface.

*Démonstration.* Démontrons le théorème pour  $i = 1$

Je considère un petit rectangle  $dx_2 dx_3$ , ce qui me permet de traverser tout mon volume en passant par la surface notée  $B$  et en sortant par la surface  $A$ <sup>5</sup>. En partant de la définition de l'intégrale de volume :

$$\int_V \partial_1 T \dots dV = \iiint \partial_1 T \dots dx_1 dx_2 dx_3 \quad (1.27)$$

3. Pareil pour la partie "Des invariants d'un tenseur"

4. Suffisamment régulière.

5. Ceci justifie l'intérêt d'avoir une forme "suffisamment régulière".

Ceci est équivalent à

$$\iint dx_2 dx_3 \int_B^A \partial_1 T \dots dx_1 \quad (1.28)$$

L'intégrale de la dérivée donne

$$\iint (T_A - T_B) dx_2 dx_3 \quad (1.29)$$

Étudions le signe de nos vecteurs normaux

$$\begin{cases} (dx_2 dx_3)_A & n_1 dS_A & \text{car } n_1 > 0 \\ (dx_2 dx_3)_B & -n_1 dS_B & \text{car } n_1 < 0 \end{cases} \quad (1.30)$$

Notre intégrale devient

$$\int_V \partial T \dots dV = \iint (T_A - T_B) dx_2 dx_3 \quad (1.31)$$

Définitions (voir schéma ci-dessous)  $S'$  la partie de  $S$  où  $n_1 > 0$  et  $S''$  la partie de  $S$  où  $n_1 < 0$ . On démontre ainsi le théorème

$$\iiint \partial_1 T \dots dx_1 dx_2 dx_3 = \int_{S'} T \dots n_1 dS' + \int_{S''} T \dots n_1 dS'' = \oint_S T \dots n_1 dS \quad (1.32)$$

□

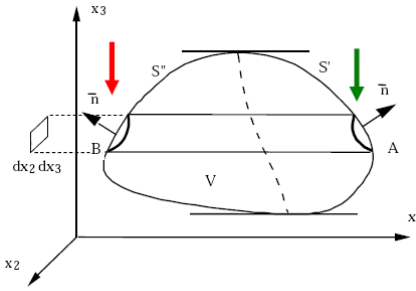


FIGURE 1.2 – Schéma de la démonstration

## 1.7 Notion de débit

Considérons une surface  $S$  de normale  $\vec{n}$ , la vitesse  $\vec{v}$  des points matériels traversant cette surface ainsi qu'une grandeur  $A$  attachée à ces points matériels.

Le **débit de la grandeur**  $A$  au travers de la surface  $S$  est la quantité de cette grandeur traversant la surface par unité de temps.

En considérant le système après un temps  $dt$ , les particules se sont déplacées de  $\vec{v}dt$ . Le volume de particules ayant traversé la surface  $dS$  est le volume hachuré (base \* hauteur) sur le schéma ci-contre :  $[\vec{n} \cdot \vec{v}dt]dS$ .

Le **débit élémentaire** (volume par unité de temps) de la grandeur  $A$  est

$$dq = A \vec{v} \cdot \vec{n} dS \quad (1.33)$$

où l'on remarque que seule la composante normale contribue au débit.

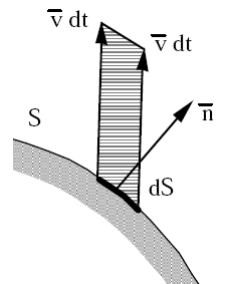


FIGURE 1.3 – Notion de débit

# Chapitre 2

## Les contraintes

### 2.1 Tenseur des contraintes : définition

#### 2.1.1 Définition

Considérons un volume  $V$  délimité par une surface fermée  $S$  et considérons à l'intérieur un petit  $\Delta V$ . Quels méchants couples agissent sur lui ? Il faut avant tout savoir qu'il existe trois types de contraintes

1. *Les forces de volume* :  $\vec{f}\Delta V$ , appelées "forces à distance"). L'exemple le plus connu est celui de la force de pesanteur  $\vec{f} = \rho\vec{g}$ .
2. *Les couples de volume* :  $\vec{\mu}\Delta V$  ne seront pas ici pris en compte. Il s'agit par exemple du couple créé par un champ  $\vec{E}$ .
3. *Les forces de surface agissant sur  $\Delta S$*  : il s'agit des "forces de contact", elles représentent l'action du reste du volume  $V$  sur l'élément  $\Delta V$  isolé

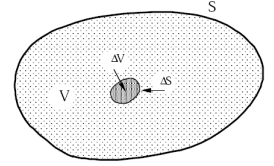
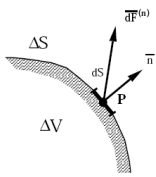


FIGURE 2.1 – Exemple considéré

#### Forces de surface agissant sur $\Delta S$



Je désigne par  $\overline{dF}^{(n)}$  l'action de l'extérieur sur la surface de sorte que l'action sur  $dS^1$  de la matière soit située du côté de  $\vec{n}$ .

On va postuler que  $\overline{dF}^{(n)}$  dépend de la normale  $\vec{n}$ . Si je considère une autre surface, j'aurai une autre normale et un vecteur  $\overline{dF}^{(n)}$  différent.

On **admet** que  $\overline{dF}^{(n)}$  est appliquée au centre de  $dS$ .

FIGURE 2.2 – Force de S.

On admet également que

$$\lim_{dS \rightarrow 0} \frac{\overline{dF}^{(n)}}{dS} = \overline{T}^{(n)} \quad (2.1)$$

est une fonction du point  $P$  et **non** des points voisins, impliquant que le couple réparti en surface est nul. La dernière partie de l'égalité est le *vecteur contrainte*, au point  $P$ , associé à la *facette*<sup>2</sup> de normale  $\vec{n}$ .

La force dépend bien de  $\vec{n}$  mais durant les secondaires celle-ci était toujours parallèle à  $\vec{n}$  ce qui ne sera plus forcément le cas ici.

---

1. Portion élémentaire de  $dS$ .  
2. Petite surface.

### 2.1.2 La loi de Cauchy

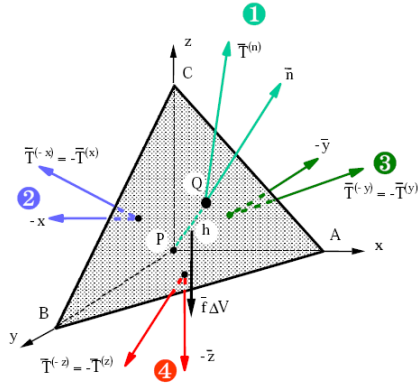


FIGURE 2.3 – Loi de Cauchy  
Chaque surface vaut alors

1. Face ABC : aire =  $\Delta S$  (Par hypothèse)
2. Face PBC : aire =  $\Delta S \cos(\vec{n}, \vec{x}) = \Delta S n_x$
3. Face PCA : aire =  $\Delta S \cos(\vec{n}, \vec{y}) = \Delta S n_y$
4. Face PAB : aire =  $\Delta S \cos(\vec{n}, \vec{z}) = \Delta S n_z$

En appliquant la loi de la résultante cinétique<sup>3</sup> au volume élémentaire du tétraèdre, on obtiens

$$\left[ \rho \vec{v} \left( \frac{1}{3} h \Delta S \right) \right]^{\bullet} = \vec{f} \left( \frac{1}{3} h \Delta S \right) + \underbrace{\bar{T}^{(n)} \Delta S}_1 + \underbrace{\bar{T}^{(-x)} \Delta S_x}_2 + \underbrace{\bar{T}^{(-y)} \Delta S_y}_3 + \underbrace{\bar{T}^{(-z)} \Delta S_z}_4 \quad (2.2)$$

ou encre

$$\left[ \rho \vec{v} \left( \frac{1}{3} h \Delta S \right) \right]^{\bullet} - \vec{f} \left( \frac{1}{3} h \Delta S \right) = \left[ \bar{T}^{(n)} + \bar{T}^{(-x)} n_x + \bar{T}^{(-y)} n_y + \bar{T}^{(-z)} n_z \right] \Delta S \quad (2.3)$$

En effectuant  $\Delta S \rightarrow 0$  (en faisant tendre  $h$  vers 0) il reste

$$0 = \left[ \bar{T}^{(n)} + \bar{T}^{(-x)} n_x + \bar{T}^{(-y)} n_y + \bar{T}^{(-z)} n_z \right] \Delta S \quad (2.4)$$

Ce qui donne

<div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div>LOI DE CAUCHY</div> <div> <math display="block">\bar{T}^{(n)} = \bar{T}^{(x)} n_x + \bar{T}^{(y)} n_y + \bar{T}^{(z)} n_z \quad (2.5)</math> </div> </div>
--

Cette loi montre un qu'un vecteur est associé à toute direction par une combili des consinus directeur de cette direction : il s'agit d'un tenseur !

### 2.1.3 Le tenseur des contraintes

En projetant les vecteurs  $\bar{T}^{(x)}$ ,  $\bar{T}^{(y)}$  et  $\bar{T}^{(z)}$  sur les axes de coordonnées et en appelant  $\tau_{ij}$  la composante selon l'axe  $j$  du vecteur contrainte agissant sur la facette normale  $i$  on obtient la **relation de Cauchy**

$$T_j^{(n)} = \tau_{ij} n_i \quad (2.6)$$

où  $\tau_{ij}$  sont les composantes d'un tenseur du second ordre : le **tenseur des contraintes**.

---

3.  $\frac{d\vec{R}}{dt} = \sum \vec{F}_e$



Par exemple, si  $\vec{n} \parallel \vec{1}_{x_1} : \vec{n} = (1, 0, 0) \rightarrow \overline{T}^{(n)} = \overline{T}_1 = \overline{T}^{(1)}$ . Cela montre que  $\overline{T}^{(i)}$  est le vecteur contrainte agissant sur la facette de normale  $x_i$ .

Les valeurs de  $\tau_{ij}$  sont les 9 composantes du tenseur des contraintes : l'indice  $i$  représente la normale à la facette considérée et l'indice  $j$  la direction sur laquelle on projette la contrainte correspondant à cette facette. Un peu de vocabulaire à présent :

- Lorsque deux indices sont égaux : *composante normale* notée  $\sigma$ .
- Lorsque deux indices sont différents : *composante tangentielle*.

## 2.2 La dérivée matérielle

### 2.2.1 Définition

La dérivée matérielle est la dérivée par rapport au temps, prise en suivant la particule dans son mouvement (par exemple, le calcul de l'accélération de ta merco). Si une particule est en  $\vec{x}$  à l'instant  $t$  et en  $\vec{x}'$  en  $t + dt$ , on a par définition

$$T_k^\bullet{}_{l\dots} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{T_{k\ l\dots}(\vec{x}', t + dt) - T_{k\ l\dots}(\vec{x}, t)}{dt} \quad (2.7)$$

### 2.2.2 Dérivée matérielle d'une grandeur locale

La position  $\vec{x}$  dépend de  $t \rightarrow T_{kl\dots}(\vec{x}, t)$ . Dès lors

$$T_k^\bullet{}_{l\dots} = \frac{\partial T_{k\ l\dots}}{\partial t} + \frac{T_{k\ l\dots}}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \partial_0 &= \frac{\partial}{\partial t} \\ v_i &= \frac{dx_i}{dt} \end{cases} \quad (2.8)$$

Ce qui nous donne

$$T_k^\bullet{}_{l\dots} = \partial_0 T_{k\ l\dots} + v_i \partial_i T_{k\ l\dots} = T_k^\bullet{}_{l\dots} = \partial_0 T_{k\ l\dots} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad}) T_{k\ l\dots} \quad (2.9)$$

### 2.2.3 Dérivée matérielle d'une intégrale de volume

La "démonstrations" des différentes formules est très calculatoire. On obtient trois équations pour une même dérivée qu'il faudra utiliser selon le contexte

$$\begin{cases} I^\bullet &= \int_V \partial_0 T_{k\ l\dots} dV + \oint_S T_{k\ l\dots} v_i n_i dS \\ I^\bullet &= \int_V [\partial_0 T_{k\ l\dots} + \partial_i (v_i T_{k\ l\dots})] dV \\ I^\bullet &= [T_k^\bullet{}_{l\dots} + T_{k\ l\dots} (\partial_i v_i)] dV \end{cases} \quad (2.10)$$

## 2.3 Les lois fondamentales

Il existe trois grandes lois de "conversation" ou "bilan" : la conservation de la masse, de la résultante cinétique et du moment cinétique.

### 2.3.1 Conservation de la masse

Soit un volume  $V$  de masse  $M$  t.q.  $M = \int_V \rho dV$ . La masse est onstante dans le temps, sa dérivée matérielle est forcément nulle. La dérivée matérielle d'une intégrale de volume étant :  $I^\bullet = \int_V [\partial_0 T_{k\ l\dots} + \partial_i (v_i T_{k\ l\dots})] dV$ , on trouve :

$$\dot{M} = \int_V [\partial_0 \rho + \partial_i (v_i \rho)] dV = 0 \quad (2.11)$$

On trouve alors l'équation locale de conservation de la masse<sup>4</sup>, l'équation de continuité :

ÉQUATION DE CONTINUITÉ DE LA MASSE

$$\partial_0 \rho + \partial_i (v_i \rho) = 0 \quad (2.12)$$

Plusieurs forme peuvent exister, car

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x_i} v_i \quad (2.13)$$

On retrouve facilement cette conservation sur un rectangle élémentaire ; comme cette loi doit être vrai pour tout volume, cela concerne aussi ce rectangle. La variation de masse au cours du temps c'est la masse qui rentre à laquelle on soustrait la masse qui sort (tronqué au premier ordre). En faisant de même sur les deux autres face :

$$\frac{d\rho}{dt} dx dy = \rho u du + \rho v dx - \left( \rho u + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) dx \right) dy - \left( \rho v + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v) dy \right) dx \quad (2.14)$$

Après simplification, on retrouve le St-Graal :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) = 0 \quad (2.15)$$

Ceci a des conséquence pour le calcul de la dérivée matériel d'une intégrale de volume. Comme  $I = \int_V T \dots \rho dV = \int_M T \dots dM$ , on trouve :

$$\dot{I} = \underbrace{\int_M \dot{T} \dots dM}_1 = \underbrace{\int_V \dot{T} \dots \rho dV}_2 \quad (2.16)$$

1. On peut dériver sous l'intégrale car la masse est constante.
2. On peut dériver sous l'intégrale en groupant  $\rho dV$ .

### 2.3.2 Loi de la résultante cinétique

Par définition,  $\bar{\mathcal{R}} = \int_V \vec{v} \cdot dM = \int_V \vec{v} \cdot \rho dV$  ? On a donc de façon directe :

$$\dot{\bar{\mathcal{R}}} = \int_V \dot{\vec{v}} \cdot \rho dV \quad (2.17)$$

et la loi de la résultante cinétique (Cf. *Mécanique Rationnelle II*) s'écrit en égalant à cette expressions les différentes forces externes, à savoir de volume et de surface :

$$\int_V \rho \dot{v}_i dV = \int_V f_i dV + \oint_S T_i^{(n)} dS \quad (2.18)$$

Par application de la loi de Cauchy  $T_i^{(n)} = \tau_{ji} n_j$  suivi de la loi de Gauss :

$$\oint_S T_i^{(n)} dS = \int_V \partial_j \tau_{ji} dV \quad (2.19)$$

On à donc :

$$\int_V \rho \dot{v}_i dV = \int_V [f_i + \partial_j \tau_{ji}] dV \quad (2.20)$$

4. Remarquons que  $\rho$  se trouve dans l'expression de la dérivée, c'est parce que ce n'est pas forcément une constante.

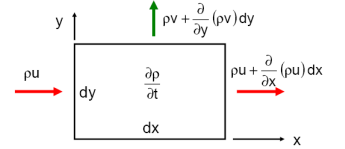


FIGURE 2.4 – Conservation de la masse

On peut en déduire les trois équations de mouvements :

ÉQUATIONS DU MOUVEMENT (DYNAMIQUE) :

$$\rho[\partial_0 v_i + v_k \partial_k v_i] = f_i + \partial_j \tau_{ji} \quad (2.21)$$

où le premier membre est nul si l'on se trouve à l'**équilibre de translation** (statique) :

$$f_i + \tau_{ji,j} = 0 \quad (2.22)$$

### 2.3.3 Loi du moment cinétique

"C'est le plus chiant à faire". Pour y aller simplement, je prends un poin géométrique par rapport auquel je prends tous mes moments : *bras de levier*  $\times \vec{r}$ . Par définition :

$$\overline{\mathcal{M}} = \int_M (\vec{r} \times \vec{v}) \cdot \rho \, dV \quad (2.23)$$

On a donc directement :

$$\dot{\overline{\mathcal{M}}} = \int_M (\vec{r} \times \vec{v})^\bullet \cdot \rho \, dV \quad (2.24)$$

ou :

$$\dot{\overline{\mathcal{M}}} = \int_M \underbrace{[(\vec{v} \times \vec{v})]}_{\vec{0}} + (\vec{r} \times \vec{v}^\bullet) \rho \, dV \quad (2.25)$$

On trouve alors la fameuse loi :

LOI DU MOMENT CINÉTIQUE :

$$\int_V \underbrace{(\vec{r} \times \dot{\vec{v}}) \rho \, dV}_1 = \underbrace{\int_V (\vec{r} \times \vec{f}) \, dV}_2 + \underbrace{\oint_S (\vec{r} \times \vec{T}^{(n)}) \, dS}_3 \quad (2.26)$$

1. Dérivée du moment cinétique
2. Moment des forces de volume
3. Moment des forces de surface

En essayant de nettoyer cette expression (relation de Cauchy puis Gauss, simplification des dérivées par symbole de Kronecker, ...) on trouve finalement la relation <sup>5</sup>

$$\tau_{jk} = \tau_{kj} \quad (2.27)$$

impliquant l'équilibre de rotation <sup>6</sup>.

### 2.3.4 Théorème de Cauchy - Poisson

Ce double théorème lie les équations d'équilibres en volume et en surface avec les lois de la résultante et du moment cinétique.

THÉORÈME DE CAUCHY - POISSON

$$T_j^{(n)} = \tau_{ij} n_i \quad \rho \dot{v}_i = \tau_{ij,j} + f_i \quad \tau_{ij} = \tau_{ji} \quad (2.28)$$

5. Cf. slide 43-48.

6. Aussi bien valide en statique qu'en dynamique.

## 2.4 Valeurs principales et directions principales

Cette section va donner réponse aux deux questions suivantes, concernant les propriétés du tenseur des contraintes :

1. Existe-t-il des directions pour lesquelles le vecteur contrainte est aligné selon la normale ?
2. Existe-t-il des directions pour lesquelles la composante normale du vecteur contrainte est extrémum ?

### 2.4.1 Valeurs propres et directions principales

Occupons nous de la première question. Le vecteur des contrainte est aligné selon la normale si  $\bar{T}^{(n)} = \lambda \bar{n}$ , c'est à dire si :

$$\tau_{ij}n_j = \lambda n_i \quad (2.29)$$

Après réorganisation, on trouve  $(\tau_{ij} - \lambda \delta_{ij}) = 0$  ; il s'agit d'un système algébrique dont les inconnus sont  $n_j$ . La solution triviale n'est pas acceptée,  $\bar{n}$  étant unitaire. On doit donc avoir :

$$\det|\tau_{ij} - \lambda \delta_{ij}| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \sigma_x - \lambda & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \lambda & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (2.30)$$

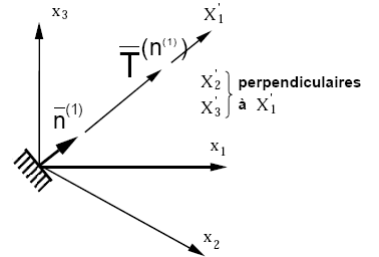


FIGURE 2.5 –  $\bar{n} / \bar{T}^{(n)}$

Ceci donne lieu à une équation du 3<sup>e</sup> degré  $\rightarrow$  il y a au moins une racine réelle ( $\lambda_1$ ). Pour cette racine, le système est compatible et il y a au moins une solution, notée  $\bar{n}^{(1)}$ . Qu'en est-il des deux autres ?

Effectuons un changement de repère :  $\{x_1, x_2, x_3\} \rightarrow \{X'_1, X'_2, X'_3\}$  tel que  $X'_2$  et  $X'_3$  soient  $\perp$  à  $X'_1$ . Le changement d'axe s'effectue grace à  $\tau'_{PQ} = \alpha_{Pi}\alpha_{Qj}\tau_{ij}$ . On obtient (avec  $\tau'_{12} = \tau'_{13} = 0$  car  $X'_1 / n^{(1)}$ ) :

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \sigma'_y - \lambda & \tau'_{yz} \\ 0 & \tau'_{yz} & \sigma'_z - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (2.31)$$

La calcul du déterminant fait apparaître un polynôme du second ordre dont le discriminant est toujours positif ou nul  $\rightarrow \lambda_2$  et  $\lambda_3$  sont aussi réelle. Nos trois racines sont ainsi réelles, ce qui permet de répondre à la question initiale en énonçant la propriété :

1. Il existe au moins trois directions pour lesquelles  $\bar{n} / \bar{T}^{(n)}$
2. Les directions  $\bar{n}^{(1)}$  et  $\bar{n}^{(2)}$  correspondant à  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  sont orthogonales.
3. Les directions  $\bar{n}^{(1)}$  et  $\bar{n}^{(2)}$  correspondant à  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda^*$  définissent un plan où toutes les directions sont principales.

$\Rightarrow$  **toutes** les directions du plan  $\bar{n}^{(1)} \bar{n}^{(2)}$  sont donc principales et on peut y **choisir** deux directions orthogonales, ce qui généralise la propriété.

### 2.4.2 Propriétés du tenseur des contraintes

Répondons maintenant à la deuxième question. Soit la composante perpendiculaire  $\sigma_n = \bar{T}^{(n)} \cdot \bar{n}$ , ce qui peut s'expliciter :

$$\sigma_n = \tau_{ij}n_jn_i \quad (2.32)$$

Il s'agit d'un extrémum lié par la condition  $n_i n_j = 1$ . On peut le rendre libre à l'aide des multiplicateur de Lagrange :

$$(\tau_{ij} n_j) n_i - \lambda (n_i n_i - 1) \quad (2.33)$$

Afin de (trouver l'extrémum?), dérivons notre expressions et égalons la à zéro :

$$\frac{\partial}{\partial n_k} [(\tau_{ij} n_j) n_i - \lambda (n_i n_i - 1)] = 0 \quad (2.34)$$

On remarque que  $\frac{\partial n_i}{\partial n_i} = 1$  si  $i = 1$  et 0 sinon. On peut donc dire que  $\frac{\partial n_i}{\partial n_k} = \delta_{ik}$ , ce qui donne

$$\tau_{ij} n_j \delta_{ik} + \tau_{ij} n_i \delta_{jk} - 2\lambda n_i \delta_{ik} = 0 \quad (2.35)$$

Ou encore :

$$\tau_{ij} n_j + \tau_{ij} n_i - 2\lambda n_i = 0 \quad (2.36)$$

Après ménage, on trouve les vecteurs propres du problème. Pour le tenseur des contraintes, on appelle ça les *directions principales* :

$$(\tau_{kj} - \lambda \delta_{kj}) n_j = 0 \quad (2.37)$$

Nous avons jusqu'ici travaillé sur des vecteurs. Par extension, de tout tenseur symétrique du second ordre :

LE TENSEUR DES CONTRAINTES :

- Possède trois directions principales (au moins 3)
- Ces directions sont orthogonales
- Les valeurs principales sont les contraintes principales (les contraintes normales selon ces directions)
- Pour ces directions, la contrainte normale est extrémum

## Invariants du tenseur des contraintes

On peut définir trois invariants :

$$\begin{cases} I_1 &= \tau_{ii} \\ I_2 &= \frac{1}{2}(\tau_{ij} \tau_{ji} - \tau_{ii} \tau_{jj}) \\ I_3 &= \frac{1}{6} \delta_{pqr} \tau_{ijk} \tau_{pi} \tau_{qj} \tau_{rk} \end{cases} \quad (2.38)$$

Ceux-ci amènent l'équation caractéristique sous la forme :

$$\lambda^3 = I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda + I_3 \quad (2.39)$$

Le Th. Hamilton-Cayley démontre que tous les invariants d'ordre supérieurs s'expriment en fonction de ceux-ci.

## 2.5 Changement d'axes : cercle de Mohr

### 2.5.1 Construction du cercle de Mohr

Il s'agit d'une *construction graphique* traduisant les lois de changement d'axes pour les composantes du tenseur en un point. Il permet :

- de trouver les composantes du tenseur des contraintes, pour 'importe quelle orientation de normale (de facette)
- de trouver les valeurs des contraintes principales et les directions correspondantes
- de trouver les valeurs des contraintes tangentielle extrémum et les directions correspondantes
- de vérifier rapidement des résultats obtenus par calculs

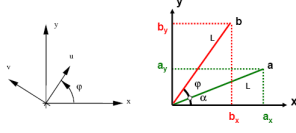


FIGURE 2.6 – Rotation d'axes

Pour obtenir le cercle de Mohr, le point de départ est la formule de changement d'axe appliquée à une rotation d'angle  $\varphi$  autour de l'axe  $z$ , dans le sens trigonométrique. En distribuant termes à termes, on peut faire apparaître un facteur  $2\phi$ <sup>7</sup> :

$$\begin{cases} \sigma_u &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi \\ \sigma_v &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi - \tau_{xy} \sin 2\varphi \\ \tau_{uv} &= -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi \end{cases} \quad (2.40)$$

En comparant ces relations avec celles d'une rotation d'un vecteur de longueur  $L$  (voir schéma), on trouve à toujours :

$$\begin{aligned} \sigma_u &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi \\ \tau_{uv} &= -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi \end{aligned} \quad (2.41)$$

avec pour différence :

- Une rotation d'angle  $\varphi$  dans le plan correspond à une rotation de  $-2\varphi$ .
- Dans le plan, le centre de rotation est  $(0,0)$  alors qu'ici nous avons  $(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0)$ .

Le sens de rotation n'étant pas le même, les interprétations physiques peuvent être plus délicates. Pour résoudre ce problème, on définit l'axe  $\tau$  du plan des contraintes vers le bas.

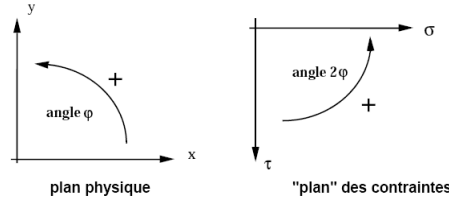


FIGURE 2.7 – Inversion du sens de l'axe  $\tau$

Construisons dès à présent le cercle de Mohr connaissant l'état de contrainte dans les axes  $x$  et  $y$ .

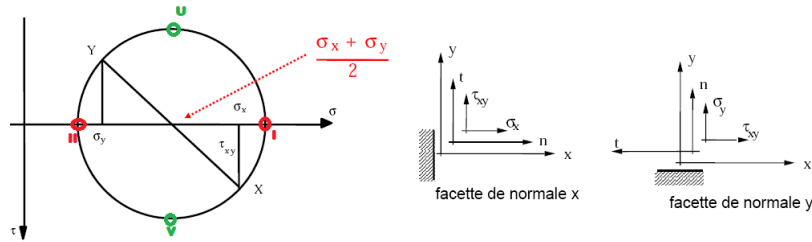


FIGURE 2.8 – Construction du cercle de Mohr

Sur le cercle de Mohr ci-dessus, le point représentatif (dans les axes locaux  $n, t$  (axes des différentes facettes à droite du cercle))  $x$  est donné par  $\sigma_x, \tau_{xy}$  et le point  $y$  par  $\sigma_y, -\tau_{xy}$ . Ceci défini, on obtient le fameux cercle : chaque point situé sur celui-ci donne l'information sur la composante normale et tangentielle du vecteur contrainte associée à la direction correspondante.

7. Il faut appliquer la définition de  $\tau_{ij}$ , exprimer les  $2\phi$ , ... Rien de compliqué, mais fastidieux.

## Rotation de 180 degrés

Si l'on venait à imposer une rotation de notre facette de  $\pi$  radians, on se déplacerait de  $2\pi$  radians sur le cercle de Mohr, c'est à dire le même point. Ceci est évident si l'on se rappelle que  $\bar{T}^{(u)} = -\bar{T}^{(-u)}$ .

## Contraintes principales et direction principales

Par convention,  $I$  est à droite et  $II$  à gauche. Ces deux points montrent qu'il n'y a pas de contraintes tangentielles sur ces deux directions : il n'agit respectivement que  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ . On peut directement obtenir les contraintes principales à partir du cercle de Mohr : La somme des contraintes divisée par deux me place au centre du cercle, il me suffit d'appliquer pythagore :

$$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (2.42)$$

L'angle étant défini par la relation

$$\tan 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (2.43)$$

Attention tout de même à l'utilisation de cette formule pour le calcul de  $\theta$ . On a en effet, de façon explicite

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right) \pm k \frac{\pi}{2} \quad (2.44)$$

où la valeur de  $k$  est telle que  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  et  $\text{sign}(\theta) = \text{sign}(\tau_{xy})$ .

## Contraintes tangentielle extrémum

Cette fois-ci, les points  $U$  et  $V$  sont les points où se trouve la plus grande composante tangentielle.

## Composantes après changement d'axe

Comment trouver les composantes après un changement d'axe? Les axes d'origines sont pointés par une boule rouge, et je suppose que mes composantes  $\sigma_x$  et  $\sigma_y$  m'amènent à cet endroit sur le cercle.

Je trouve mes nouveaux axes (étoile verte) en faisant une rotation d'angle  $\varphi$ . Pour tenir en compte ce changement d'axe, il suffit de tourner d'un angle  $2\varphi$ .

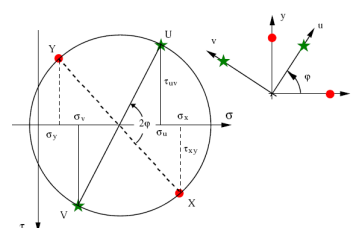


FIGURE 2.9 – Changement d'axes

## Signe des contraintes tangentielles

Qu'est ce qui se passe quand  $\varphi$  augmente légèrement? Reprenons les relation analytiques :

$$\begin{aligned} \sigma_u &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi \\ \tau_{uv} &= -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi \end{aligned} \quad (2.45)$$

On trouve, après ré-écriture que

$$\frac{\partial \sigma_u}{\partial \varphi} = 2\tau_{uv} \quad (2.46)$$

Soit les directions  $I$  et  $II$ , ou je n'ai que des composantes normales. Si je suis sur l'axe  $I$  et que j'augmente l'angle, la composante  $\sigma$  ne peut que diminuer. Cela signifie que  $\tau < 0$  et c'est pour ça qu'il pointe vers le bas :  $\tau$  *pointe toujours vers la direction de contrainte maximale*.

**Point de rayonnement ?**

## Exemples

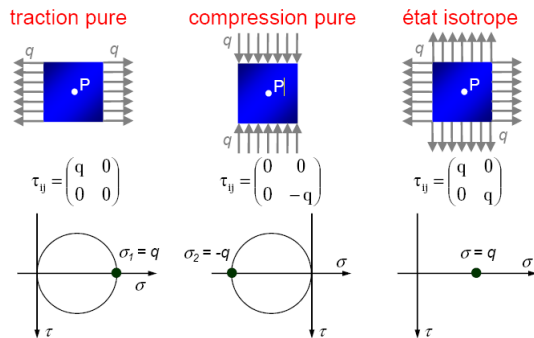


FIGURE 2.10 – Exemples de cercles de Mohr

Reprenons les trois exemples du slide 35 :

- En traction pure, je n'ai que  $\sigma$ , pas de composantes tangentielle.
- En compression pure,  $\sigma_x = 0$  de même que mes contraintes tangentielle. Par contre,  $\sigma_y = -q$ , car  $q$  est toujours positif.
- Dans le cas isotrope,  $\sigma_x = \sigma_y$  et le cercle de Mohr se réduit à un point. C'est, par exemple, la pression dans un fluide.



## Chapitre 3

# Cinématique des milieux continus

### 3.1 Les vitesses de déformation

#### 3.1.1 Vitesse de rotation

Si je malaxe mon chewing-gum, il se déforme et il faut bien que je puisse le quantifier. Pour se faire, considérons deux points voisins  $P$  et  $Q$  et exprimons la vitesse de  $Q$  en fonction de  $P$  (développement en série tronqué au premier ordre) :

$$v_i(Q) = v_i(P) + \left[ \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right]_P dx_j + \dots = v_i(P) + v_{i,j} dx_j + \dots \quad (3.1)$$

On trouve donc  $dv_i = v_i(Q) - v_i(P) = v_{i,j} dx_j$ .

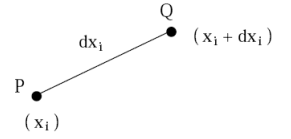


FIGURE 3.1  
— Milieu continu

Décomposons le tenseur  $v_{i,j}$  en sa partie symétrique et antisymétrique afin d'étudier séparément l'interprétation physique de chacune des parties.

$$v_{i,j} = v_{(i,j)} + v_{[i,j]} \quad \text{où} \quad \begin{cases} v_{(i,j)} &= \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}) \\ v_{[i,j]} &= \frac{1}{2}(v_{i,j} - v_{j,i}) \end{cases} \quad (3.2)$$

On notera alors  $dv_i = dv_i^* + dv_i^{**}$  (distribution de la partie sym. et antisym.).

#### Étude de la partie antisymétrique

Pour se faire, on va utiliser le vecteur rotationnel en définissant le *vecteur tourbillon* :  $\vec{\omega} = \frac{1}{2} \overline{rot} \vec{v}$ , ou en notation indicielle :

$$\omega_i = \frac{1}{2} \delta_{ijk} \partial_j v_k \quad (3.3)$$

Pour garder la composante antisymétrique introduite par le produit vectoriel, on va multiplier l'expression du vecteur tourbillon par  $\delta_{ipq}$  pour avoir :

$$\delta_{ipq} \omega_i = \frac{1}{2} \delta_{ipq} \delta_{ijk} \partial_j v_k \quad (3.4)$$

Le produits des  $\delta$  avec le premier indice en commun me permet d'écrire ( $\delta$  en première position -  $\delta$  avec indice croisé) (formule d'expulsion) :

$$\delta_{ipq} \omega_i = \frac{1}{2} (\delta_{pj} \delta_{qk} - \delta_{pk} \delta_{qj}) v_{[p,q]} \quad (3.5)$$

Où encore :

$$\delta_{ipq}\omega_i = \frac{1}{2}(v_{[q,p]} - v_{[p,q]}) = v_{[q,p]} \quad (3.6)$$

$\Rightarrow$  seule la partie antisymétrique des dérivées de la vitesse intervient.

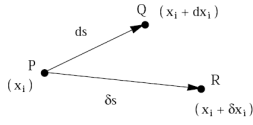
Compte tenu de cette expression, on peut ré-écrire notre partie antisymétrique :

$$dv_i^{**} = v_{[i,j]}dx_j = \delta_{ijk}\omega_j dx_k \quad (3.7)$$

ou, en notation vectorielle :  $\overline{dv}^{**} = \overline{\omega} \times \overline{PQ}$ .

La partie antisymétrique représente donc un mouvement de rotation de corps indéformable autour du point  $P$ . Et la déformabilité ? Elle se cache forcément dans la partie symétrique.

### Étude de la partie symétrique



Si j'ai une vitesse d'allongement, je vais avoir déformation. Considérons deux points  $Q$  et  $R$  voisins de  $P$  tel que<sup>1</sup>

$$dv_i = v_i(Q) - v_i(P) = v_{i,j}dx_j \quad \delta v_i = v_i(R) - v_i(P) = v_{i,j}\delta x_j \quad (3.8)$$

La dérivée du produit scalaire  $(ds.\delta s)$  permettra de caractériser celle-ci<sup>2</sup>. En effectuant (détails slide 11), on obtient<sup>3</sup> :

$$(dx_i \delta x_i)^\bullet = 2v_{(i,j)}dx_i\delta x_j \quad (3.9)$$

#### 3.1.2 Tenseur des vitesses de déformation

Nous avons ainsi trouvé que  $(dx_i \delta x_i)^\bullet = 2v_{(i,j)}dx_i\delta x_j$  avec :

$$V_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}) = v_{(i,j)} \quad (3.10)$$

$\Rightarrow$  il s'agit d'un tenseur symétrique du second ordre et possède toutes les propriétés établies pour le tenseur des contraintes (valeurs/directions principales, Mohr, formule analytique de changements d'axes, ...). Il s'agit d'une fonction linéaire !

#### Signification physique des composantes de $V_{ij}$

Dérivons le même produit scalaire qu'un peu plus haut, mais formulé de façon différente (bien entendu équivalente)

$$(dx_i \delta x_i)^\bullet = (\vec{ds}.\vec{\delta s})^\bullet = (ds \delta s \cos \theta)^\bullet \quad (3.11)$$

Après avoir mis en évidence  $ds \delta s$ , je divise par ces termes mis en évidence pour obtenir<sup>4</sup> :

$$\left[ \left( \frac{\dot{ds}}{ds} + \frac{\dot{\delta s}}{\delta s} \right) \cos \theta - \dot{\theta} \sin \theta \right] \quad (3.12)$$

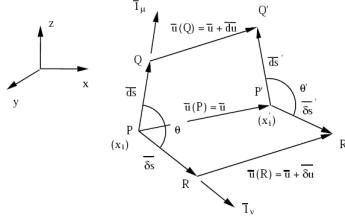
Je trouve alors :

$$\left[ \left( \frac{\dot{ds}}{ds} + \frac{\dot{\delta s}}{\delta s} \right) \cos \theta - \dot{\theta} \sin \theta \right] = 2V_{ij}\mu_i\nu_j \quad (3.13)$$

1. Le  $\delta$  est là pour éviter les confusions.
2. Ce produit scalaire ne change que si une des longueurs (ou l'angle) change.
3. Aide pour ceux qui veulent le calculer : Les indices étant muets, on peut les permuter pour obtenir  $dx_i\delta x_j$  afin de le mettre en évidence.
4. 'Détails' slide 13.

## 3.2 Les déformations

### 3.2.1 Tenseur des déformations de Green



Considérons une fois de plus le déplacement d'un point  $P$  et de deux points  $Q, R$  infiniment voisins ( $u \rightarrow u + du, \theta \rightarrow \theta', \dots$ ). Evaluons les nouvelles coordonnées :

$$\begin{aligned} x'_i(Q') &= x_i(Q) + u_i(Q) \\ x'_i(P') &= x_i(P) + u_i(P) \end{aligned} \quad (3.14)$$

En soustrayant ces deux équations :

$$[x'_i(Q') - x'_i(P')] = [x_i(Q) - x_i(P)] + [u_i(Q) - u_i(P)] \equiv dx'_i = dx_i + du_i \quad (3.15)$$

Ici je ne vais plus travailler en décomposant la partie symétrique et antisymétrique, mais je vais regarder la valeur de mon produit scalaire avant et après :

$$\overline{ds'} \cdot \overline{\delta s'} - \overline{ds} \cdot \overline{\delta s} = ds' \cdot \delta s' \cos \theta - ds \cdot \delta s \cos \theta \quad (3.16)$$

En effectuant ce produit scalaire d'une autre façon, on arrive à :

$$\begin{aligned} \overline{ds'} \cdot \overline{\delta s'} - \overline{ds} \cdot \overline{\delta s} &= dx'_i \cdot \delta x'_i - dx_i \cdot \delta x_i \\ &= [dx_i + u_{i,j} dx_j] [\delta x_i + u_{i,k} \delta x_k] - dx_i \cdot \delta x_i \\ &= [u_{k,j} + u_{j,k} + u_{i,j} u_{i,k}] dx_j \delta x_k \\ &= 2L_{jk} dx_j \delta x_k \end{aligned} \quad (3.17)$$

Pour arriver à ce résultat, il faut effectuer le double produit de la deuxième équation pour ensuite mettre  $dx_k \delta x_k$  en évidence (je peux "tripoter" mes indices car ceux-ci sont muets, ça n'a pas d'importance). Le crochet de l'avant dernière ligne est nommé  $2L_{jk}$ , soit deux fois le *tenseur des déformations de Green* qui vaut :

$$L_{jk} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right] \quad (3.18)$$

Le dernier terme de ce tenseur n'est **pas** linéaire, si je multiplie  $L_{jk}$  par 2, il serait multiplié par 4. Le caractère non-linéaire fait que l'on n'est pas certain qu'une solution existe et que si on en trouve une, qu'elle soit unique.

Etant un tenseur, on retrouve cependant bien toutes les propriétés associées (Mohr, valeurs principales, ...)

En égalant nos deux expressions du produit scalaire et après division par  $ds \cdot \delta s$  :

$$\frac{ds'}{ds} \cdot \frac{\delta s'}{\delta s} \cos \theta' - \cos \theta = 2L_{jk} \mu_j \nu_k \quad (3.19)$$

### 3.2.2 Tenseur des déformations évanouissantes

Supposons que les dérivées de déplacement sont négligeables devant 1, et que les positions avant et après déformations peuvent être confondues : cela permet de négliger le dernier terme du tenseur de Green et que  $L_{jk}$  devienne une fonction linéaire des déplacements :

$$a_{jk} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right] \quad (3.20)$$

Souvent,  $a_{ij}(=u_{(i,j)})$  est appelé  $\epsilon_{ij}$ . Le facteur deux trouvera son interprétation plus tard. Pour s'y retrouver, on utilisera  $\epsilon$  dans la diagonale et  $\gamma$  hors de celle-ci (**attention** au facteur 1/2!) :

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \epsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \epsilon_z \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

### Signification physique des composantes de $a_{ij}$

Considérons que les deux vecteurs soient orientés selon la direction  $\vec{1}_x$

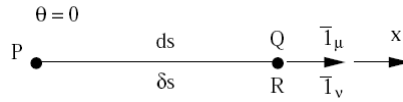


FIGURE 3.4 – Vecteurs alignés selon l'axe  $x$

En appliquant  $\frac{ds'}{ds} \cdot \frac{\delta s'}{\delta s} \cos \theta' - \cos \theta = 2a_{jk}\mu_j\nu_k$  (où  $\theta = 0$  comme  $Q = R$  et  $\mu_i = \nu_i = (1, 0, 0)$ ) :

$$\left(\frac{dx'}{dx}\right)^2 - 1 = 2a_{xx} \quad (3.22)$$

Ce qui donne :

$$1 + 2a_{xx} = \left(\frac{dx'}{dx}\right)^2 = \left(\frac{dx' - dx}{dx} + 1\right)^2 = \delta_x^2 + 2\delta_x + 1 \quad (3.23)$$

L'allongement relatif dans la direction  $x$  est alors donné par

$$a_{xx} = \frac{dx' - dx}{dx} = \delta_x \quad (3.24)$$

Considérons maintenant comme direction  $\mu_i = (1, 0, 0)$  et  $\nu_i = (0, 1, 0)$ , avec donc un angle de 90 deg. En appliquant notre égalité ci-dessus, on a cette fois

$$\frac{dx'}{dx} \cdot \frac{\delta y'}{\delta y} \cos \theta' = 2a_{xy} \quad (3.25)$$

"Je vous fais grâce des calculs (à faire chez soi après avoir pris une aspirine)". On trouve dès lors :

$$2a_{xy} = -\delta_\theta \quad (3.26)$$

ce qui montre une diminution de l'angle initialement droit entre  $x$  et  $y$ .

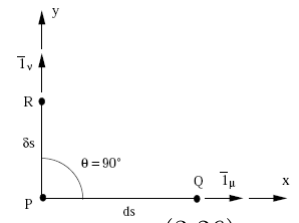


FIGURE 3.5 – Direction  $\perp$

### Les unités du tenseur des déformations

La composante  $\epsilon_x = \partial u / \partial x$ , soit une longueur sur une longueur. Le tenseur des déformations est donc dimensionnel, souvent de l'ordre du micron. On introduit ainsi l'unité adimensionnelle, le *microstain* (stain voulant dire déformation)

$$1\mu S \equiv 10^{-6} \quad (3.27)$$

## Chapitre 4

# Les lois universelles des milieux continus

### 4.1 Conservation de la masse

#### 4.1.1 Forme locale et intégrale de l'équation de continuité

Par hypothèse de continuité, si je prends un volume  $v$  et que je le suis dans son mouvement je retrouverai les mêmes particules : la masse définie par  $M = \int_V \rho \, dV$  ne varie pas, sa dérivée matérielle est ainsi nulle

$$M^\bullet = \int_V [\partial_0 \rho + \partial_i(\rho v_i)] \, dV = 0 \quad \forall V \quad (4.1)$$

En peut en déduire l'équation de continuité de la masse<sup>1</sup> :

$$\begin{cases} \partial_0 \rho + \partial_i(\rho v_i) &= 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) &= 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

Si  $\rho$  est dans la divergence, c'est parce qu'il n'est pas nécessairement constant, comme dans un gaz par exemple. En utilisant l'équation définissant la dérivée matérielle  $\rho^\bullet = \partial_0 \rho + v_k \cdot \partial_k \rho$ , on trouve :

$$\begin{cases} \rho^\bullet + \rho \partial_i v_i &= 0 \\ \rho^\bullet + \rho \text{div}(\vec{v}) &= 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

#### 4.1.2 Autre forme locale de l'équation de continuité

Repartons de  $M^\bullet = \int_V [\partial_0 \rho + \partial_i(\rho v_i)] \, dV = 0$  et appliquons Gauss à la deuxième intégrale :

$$\int_V [\partial_0 \rho] \, dV + \oint_S \rho v_i n_i \, dS = 0 \quad (4.4)$$

- Dans le premier terme, si  $\rho$  varie la masse fait de même : cela ne peut provenir que si de la masse entre par la surface. C'est la vitesse d'accroissement de la masse dans le volume  $V$  du à la variation de  $t$ .
- Le deuxième terme est le débit massique sortant au travers de la surface fermée  $S$  entourant le volume  $V$ . Le débit est sortant car la normale est orientée à l'extérieur du volume.

On en conclut que tout accroissement de masse ne peut provenir **que** d'un débit de masse entrant par la surface  $S$ .

---

1. Les deux équations sont équivalentes.

### 4.1.3 Cas particuliers

#### Fluide incompressible

C'est le cas où une même masse est toujours contenue dans un même volume : la masse étant constante, on aura pour définition de l'incompressibilité :

$$\rho^\bullet = 0 \quad (4.5)$$

En repartant de l'équation de continuité :

$$\underbrace{\rho^\bullet}_0 + \rho \operatorname{div}(\vec{v}) = 0 \Rightarrow \rho \operatorname{div}(\vec{v}) = 0 \Rightarrow v_{i,i} = 0 \Rightarrow V_{ii} = 0 \quad (4.6)$$

Comme la divergence est  $\partial_i v_i$ , soit  $v_{i,i}$  en composante de la vitesse et  $V_{ii}$  en composante du tenseur (def.).

#### Écoulement permanent

L'écoulement est dit permanent lorsque, en un point géométrique, les grandeurs ne varient pas en fonction du temps ;  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ . C'est par exemple, le point de vue d'un gendarme au bord de la route : le matin et le soir, il voit la même photo. En repartant de l'équation de continuité :

$$\partial_0 \rho + \partial_i(\rho v_i) = 0 \Rightarrow \partial_i(\rho v_i) = 0 \Rightarrow \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (4.7)$$

Ce n'est pas la même chose que la dérivée matérielle en suivant les particules dans leurs mouvements. Comme on considère un point fixe, la dérivée est bien partielle.

Reprenons la forme précédente de l'intégrale en choisissant comme volume un tube de courant :  $\int_V [\partial_0 \rho] dV + \oint_S \rho v_i n_i dS = 0$ . Dans notre cas :

$$\oint_S \rho v_i n_i dS = 0 \quad (4.8)$$

En séparant mon intégrale sur un contour fermé (où  $n'$ ,  $n''$  sont tous deux sortants) :

$$\int_{S'} \rho' \vec{v}' \cdot \vec{n}' dS' + \int_{S''} \rho'' \vec{v}'' \cdot \vec{n}'' dS'' = 0 \quad (4.9)$$

ou encore :

$$\int_{S'} -\rho' \vec{v}'_n dS' + \int_{S''} \rho'' \vec{v}''_n dS'' = 0 \quad (4.10)$$

La vitesse étant tangente aux bords de mon tube, pour les vitesses latérales on trouve :

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \quad (4.11)$$

### 4.1.4 Conclusion

La loi de conservation de la masse n'est **pas** une loi universelle ( $E = mc^2$  nous le montre) ; c'est la loi de conservation de l'énergie qui en est une ! Cependant, dans le cadre de ce cours, on stipulera qu'elle est conservée (Les slides 11 - 14 illustrent que la faible variation de masse est négligeable).

## 4.2 Loi de la résultante cinétique

Précédemment, nous avons obtenu la loi de la résultante cinétique :

$$\left[ \int_v \rho v_i dV \right]^\bullet = \int_v f_i dV + \oint_S T_i^{(n)} dS \quad (4.12)$$

On peut développer l'expression de la dérivée matérielle dans l'intégrale de volume pour avoir :

$$\int_v [\partial_0(\rho v_i) + \partial_j(v_j \rho v_i)] dV = \int_v f_i dV + \oint_S \tau_{ij} n_j dS \quad (4.13)$$

En appliquant Gauss aux deuxième terme du membre de gauche et en le faisant passer de l'autre côté de l'égalité, on obtient :

$$\int_v \partial_0(\rho v_i) dV = \int_v f_i dV + \oint_S (\tau_{ij} - \rho v_i v_j) n_j dS \quad (4.14)$$

### 4.2.1 Calcul de l'action exercée par un fluide sur un obstacle

L'idée est de considérer un volume  $V$  de fluide tel que la surface fermée autour de ce volume contient au moins la surface de contact et aussi autre chose. En faisant ceci, il ne faut pas connaître la forme de l'obstacle, ni même la répartition du tenseur des contraintes sur celui-ci

$$A_i = \int_{\text{Surface de contact}} T_i^{(n)} dS \quad (4.15)$$

où  $n$  est la normale intérieure au volume du fluide ! Il faudra donc inverser les signes lors de l'écriture de l'expression suivante, la normale étant ici extérieure au volume du fluide :

$$\int_v \partial_0(\rho v_i) dV = \int_v f_i dV + \oint_S (\tau_{ij} - \rho v_i v_j) n_j dS \quad (4.16)$$

Un exemple d'application de cette loi est donnée aux slides 17-18.

## 4.3 Loi du moment cinétique

On pourrait l'utiliser en pratique pour connaître les points d'applications qui ne sont pas données par la loi de la résultante cinétique mais ce n'est pas utilisé en pratique. Notons simplement que cela permet de démontrer que le tenseur des contraintes est symétrique.

## 4.4 Théorème de l'énergie cinétique

Ce théorème stipule que la dérivée de l'énergie cinétique est égale à la somme des puissances de toutes les forces (externes et internes). Pour obtenir cette loi, il faut partir des équations du mouvement, les multiplier scalairement par  $v_i$  et **ensuite** intégrer au volume  $V$  :

$$\rho v_i^\bullet = f_i + \partial_j \tau_{ij} \Rightarrow \rho v_i^\bullet v_i = f_i v_i + v_i \partial_j \tau_{ij} \Rightarrow \frac{1}{2} \int_V \rho (v_i v_i)^\bullet dV = \int_V v_i f_i dV + \int_V v_i \partial_j \tau_{ij} dV \quad (4.17)$$

*J'ai la flemme de commencer une nouvelle page : cf. slide 29-30 pour obtenir une nouvelle forme du théorème, en utilisant le théorème de Gauss.*

# Chapitre 5

## Lois de comportement

### 5.1 Pourquoi en a-t-on besoin ?

La réponse en trois points :

1. *Décompte des équations et des inconnues* ; trop d'inconnues et pas assez d'équations.
2. *Liaison statique*  $\leftrightarrow$  *cinématique* ; lier les forces aux déplacements.
3. *Nature du milieu continu* ; comportement différent en fonction du matériau.

Ayant établi les équations pour tous les milieux continus, nous avons <sup>1</sup> :

Equation	Nombre d'équations	Inconnues	Nombre d'inconnues
$\rho^\bullet + \rho \partial_i v_i = 0$	1	$\rho, v_i$	4
$\rho v_i^\bullet = f_i + \tau_{ij,j}$ $\tau_{ij} = \tau_{ji}$	3	$\tau_{(ij)}$	6
	4 équations		10 inconnues

Tableau 5.1 – Récapitulatif

Attention au décompte, les forces de volumes  $f_i$  ne sont pas toujours connues : un gaz peut avoir plusieurs quantités différentes de masse ! Mais comme  $f_i = \rho F_i$  et que  $F_i$  est connu et que  $\rho$  a déjà été compté, *le compte est bon* si j'ose dire.

Dix inconnues pour quatre équations ? Problem ? No ! Car le tenseur des contraintes, symétrique, possède six composantes. Les composantes du tenseur permettent de lier les variables "cinématique" à des variables "statiques" :

- $\tau_{ij}$  (contraintes) = fonction de  $L_{ij}$  (déformations)
- $\tau_{ij}$  (contraintes) = fonction de  $V_{ij}$  (vitesses de déformations)

On trouvera deux grandes catégories de lois de comportements : les fluides (dont les six compos du vecteur de contraintes sont des fonctions des vitesses de déformations) et les solides (où les compos sont fonction des déformations évanouissantes).

---

1.  $\tau$  est une pression. La dérivée d'une pression par rapport à une composante spatiale donne bien une force par volume, comme le reste des termes de cette équation.



## 5.2 Les fluides : les fluides parfaits et les fluides visqueux newtoniens

### 5.2.1 Le fluide parfait

La loi de comportement du fluide parfait est :

$$\tau_{ij} = -p \delta_{ij} \quad (5.1)$$

où  $p$  est la pression extérieure (voir schéma ci-contre pour le signe).  
On trouve alors :

$$T_i^{(n)} = \tau_{ij} n_j = -p n_i \quad \text{ou} \quad \bar{T}^{(n)} = -p \bar{n} \quad (5.2)$$

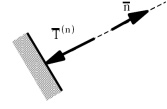


FIGURE 5.1 –  
Dessin pour  $p > 0$

Ceci est valable pour toute direction ! En "déballant"  $\tau_{ij}$ , on s'aperçoit que le fluide ne transmet que des contraintes normales et **jamais** de tangentes ; le cercle de Mohr se réduit à un point.

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

### 5.2.2 Le fluide visqueux newtonien

Pour ce "type" de fluide, on cherche à établir une loi de comportement de la forme

$$\tau_{ij} = f(V_{kl}) \quad (5.4)$$

où  $f(V_{kl})$  est linéaire, c'est à dire tel que :

$$\tau_{ij} = C_{ij} + D_{ijkl} V_{kl} \quad (5.5)$$

Il s'agit d'un tenseur du 4<sup>e</sup> ordre. On peut démontrer (admis) qu'un tel tenseur isotrope peut s'exprimer en fonction de tenseurs isotropes du second ordre. Comme  $C_{ij} = \alpha \delta_{ij}$  on trouve :

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= \alpha \delta_{ij} + \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} V_{kl} + \beta \delta_{ik} \delta_{jl} V_{kl} + \beta' \delta_{il} \delta_{jk} V_{kl} \\ &= \alpha \delta_{ij} + \lambda \delta_{ij} V_{kk} + \underbrace{\beta V_{ij} + \beta' V_{ji}}_{V_{ij}=V_{ji}} \end{aligned} \quad (5.6)$$

Avec  $\alpha = -p$  et  $2\mu = \beta + \beta'$  on trouve :

$$\tau_{ij} = p \delta_{ij} + \lambda \delta_{ij} V_{kk} + 2\mu V_{ij} \quad (5.7)$$

où  $p$  est la pression et  $\lambda, \mu$  les coefficients de viscosité. Les propriétés de  $V_{ij} = v_{(i,j)} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i})$  restent vérifiées.

Pour un fluide visqueux au repos ou en mouvement de corps rigide, on trouve  $V_{ij} = 0$ , on a donc :

$$\tau_{ij} = -p \delta_{ij} \quad (5.8)$$

On retrouve exactement la même expression que précédemment ! Au repos ou en mouvement de corps rigide, le fluide ne transmet que des contraintes normales et pas de contraintes tangentielles.

## Equations de Stokes

Partons de  $\tau_{ij} = p\delta_{ij} + \lambda\delta_{ij}V_{kk} + 2\mu V_{ij}$ , mais évaluons le <sup>2</sup> en  $\tau_{kk}$  :

$$\frac{1}{3}\tau_{kk} = -p + \frac{1}{3}(3\lambda + 2\mu)V_{kk} \quad (5.9)$$

Considérons un fluide incompressible, c'est-à-dire que sa masse volumique ne varie pas au cours du temps, donc :  $\rho^\bullet = 0$ . L'équation de continuité devient :

$$\rho^\bullet + \rho\partial_i v_i = 0 \quad \Rightarrow V_{kk} = 0 \quad (5.10)$$

Avec  $V_{kk} = 0$ , l'équation ci-dessus devient :

$$\frac{1}{3}\tau_{kk} = -p \quad (5.11)$$

L'hypothèse de Stokes consiste à supposer que, même pour un fluide incompressible :

$$\frac{1}{3}\tau_{kk} \rightarrow 3\lambda + 2\mu = 0 \quad \Leftrightarrow \frac{\lambda}{\mu} = -\frac{2}{3} \quad (5.12)$$

La loi de comportement devient alors :

ÉQUATION DE STOKES

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu \left( V_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}V_{kk} \right) \quad (5.13)$$

## L'équation d'état

Dans  $\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu \left( V_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}V_{kk} \right)$  la pression est une inconnue supplémentaire<sup>3</sup> ; il faut une équation supplémentaire : l'équation d'état  $F(p, \rho, \theta) = 0$ .

## L'équation d'état

La température - absolue - présente dans l'équation d'état étant inconnue il nous faut (encore) une nouvelle équation : l'équation d'évolution qui est pour un gaz parfait :

$$\frac{p}{\rho} = R\theta \quad (5.14)$$

Notons qu'un fluide est en *évolution barotrope* lorsque l'équation d'état ne dépend pas de la température. Son équation d'état est alors

$$F(p, \rho) = 0 \quad (5.15)$$

## 5.3 Les solides : élasticité linéaire

On souhaite que le problème soit linéaire afin de garantir l'existence et l'unicité de la solution, mais aussi pour utiliser le principe de superposition. Pour s'assurer de la linéarité, **toutes** les relations doivent être linéaires. Pour garantir ceci, trois hypothèses sont faites :

1. Les déplacements sont petits (volume déformé assimilable au volume initial)
2. Relations déformation-déplacements linéaires (c-à-d évanouissantes)
3. Relations contraintes-déformations linéaires (du 1<sup>e</sup> degré homogène ; existence d' un état neutre)

---

2. Le facteur 3 viens de  $\delta_{kk}$ .

3. Ce n'est pas une caractéristique matérielle du fluide.

### 5.3.1 Loi de Hooke

#### Première méthode

Considérons comme précédemment  $\tau_{ij} = B_{ijkl}a_{kl}$ . Si le solide est isotrope, le système d'axes est sans importance (cela ne veut pas dire que le tenseur l'est également !). On a donc :

$$B_{ijkl} = \alpha\delta_{ij}\delta_{kl} + \beta\delta_{ik}\delta_{jl} + \gamma\delta_{il}\delta_{jk} \quad (5.16)$$

On a donc :

$$\tau_{ij} = \alpha\delta_{ij}a_{kk} + \beta a_{ij} + \gamma a_{ji} \quad (5.17)$$

Ce qui peut donner :

$$\tau_{ij} = 2\mu a_{ij} + \lambda\delta_{ij}a_{kk} \quad (5.18)$$

où  $\lambda, \mu$  sont les constantes de Lamé. Une conséquence importante de cette loi est que, pour un solide linéaire élastique, celle-ci ne dépendra que de deux caractéristiques physique du matériau, ni plus, ni moins.

#### Deuxième méthode

Soit la magnifique éprouvette représentée ci-contre. Considérons un carré loin des bords. Supposons que l'on tire sur l'éprouvette supposée cylindrique avec deux forces opposées suivant l'axe (1). Les flèches rouges (pleines) représentent le tenseur des contraintes et les bleues le déplacement.

Selon l'axe (1), il apparaît des contraintes  $\sigma_1$  et des déformations  $\epsilon_1$  liées par :

$$\sigma_1 = E\epsilon_1 \quad (5.19)$$

où  $E$  est le module de Young, toujours positif. Du à la symétrie de révolution, le tenseur des contraintes n'a qu'une composante axiale ((1) est une direction principale du tenseur des contraintes, mais aussi du tenseur des déformations, par symétrie), les autres  $\tau_{ij}$  sont tous nuls : pas de contraintes de frottement.

L'expérience montre qu'en plus de la déformation  $\epsilon_1$ , il apparaît une contraction latérale proportionnelle à  $\sigma_1$  (par exemple, l'iPhone 6 ! En prenant l'iPhone 5 et en tirant dessus, on obtient quelque chose de plus fin et plus long ! Une telle innovation justifie bien évidemment son prix) :

$$\epsilon_2 = \epsilon_3 = -\frac{\nu}{E}\sigma_1 = -\nu\epsilon_1 \leftrightarrow \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} = -\nu \text{ et } \frac{\epsilon_3}{\epsilon_1} = -\nu \quad (5.20)$$

où  $\nu$  est le coefficient de Poisson, compris entre 0 et 0,5. Quand celui-ci vaut 0,5, il s'agit d' l'incompressibilité (le caoutchouc est déformable, mais incompressible par exemple). Ce coefficient est très difficile à calculer en pratique.

Des "cas particuliers" sont vus dans les slides en fin de chapitre, à consulter !

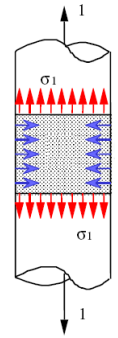


FIGURE 5.2  
– Éprouvette

## Chapitre 6

# Théorèmes des travaux virtuels

### 6.1 Pourquoi les travaux virtuels ?

#### 6.1.1 Problème à résoudre

Récapitulons les différentes forces, contraintes et déplacements rencontrés jusqu'ici :

- $f_i$  ; les forces de volumes
- $T_i^{(n)}$  ; les forces de surfaces associées à  $\vec{n}$
- $u_i$  ; les déplacements résultant de ces forces
- $\tau_{ij}$  ; les contraintes résultant de ces forces

#### 6.1.2 Equations à résoudre

Le théorème des travaux virtuels permettra notamment de résoudre des :

- Equations d'équilibre en volume
  - Translation :  $\tau_{ji,j} + f_i = 0$
  - Rotation :  $\tau_{[ij]} = 0$
- Des lois de comportement
- Des équations de compatibilité

### 6.2 Travail virtuel

#### 6.2.1 Travail virtuel des forces extérieures

Considérons deux ensembles :

1. Virtuel : les déplacement  $u'_i$
2. Réel : les forces de volume  $f_i dV$  et de surface  $T_i^{(n)} dS$

Le travail virtuel des forces extérieures est **défini** par :

$$T'_{ext} \equiv \int_V f_i u'_i dV + \oint_S T_i^{(n)} u'_i dS \quad (6.1)$$

#### 6.2.2 Calculs préliminaires

On va ici restreindre les déplacements virtuels à des déplacement **infinitésimaux** de corps **indéformables**. Comme pour le cours de *Mécanique Rationnelle II*, nous avons :

$$\vec{u}'_P = \vec{u}'_Q + \vec{\theta}' \times \vec{QP} \quad (6.2)$$

La rotation **doit** être infinitésimale afin de pouvoir conserver le produit vectoriel. On a dès lors :

$$T'_{ext} \equiv \int_V \vec{f}(u'_Q + \vec{\theta}' \times \vec{Q}P) dV + \oint_S \vec{T}^{(n)}(u'_Q + \vec{\theta}' \times \vec{Q}P) dS \quad (6.3)$$

On réorganise :

$$T'_{ext} \approx u'_Q \underbrace{\left[ \int_V \vec{f} dV + \oint_S \vec{T}^{(n)} \right]}_{\vec{R}} + \vec{\theta}' \underbrace{\left[ \int_V (\vec{Q}P \times \vec{f}) + \oint_S (\vec{Q}P \times \vec{T}^{(n)}) dS \right]}_{\vec{C}_Q} \quad (6.4)$$

On reconnaît dans cette expression la résultante des forces, ainsi que le moment résultant des forces par rapport au point  $Q$  nous permettant de ré-écrire :

$$T'_{ext} \equiv u'_Q \cdot \vec{R} + \vec{\theta}' \cdot \vec{C}_Q \quad (6.5)$$

## 6.3 Théorème

THÉORÈME : TRAV.VIRT. POUR DES DÉP. INFINITÉSIMAUX DE CORPS INDÉFORMABLES  
A l'équilibre, le travail virtuel des forces extérieures est nul pour tout déplacement virtuel **infinitésimal** de corps indéformable, et réciproquement.

$$T'_{ext} \equiv u'_Q \cdot \vec{R} + \vec{\theta}' \cdot \vec{C}_Q \quad (6.6)$$

### 6.3.1 Le théorème direct

Si l'on se trouve à l'équilibre, alors le travail virtuel des forces extérieures est nul pour tout déplacement virtuel infinitésimal de corps indéformable.

Equilibre  $\rightarrow \vec{R} = \vec{0}, \vec{C}_Q = \vec{0} \Rightarrow T'_{ext} = 0$  et ce quelque soit le déplacement virtuel de corps indéformable.

### 6.3.2 Le théorème réciproque

Forcément, ici c'est  $T'_{ext} = 0 \Rightarrow U'_Q \cdot \vec{R} + \vec{\theta}' \cdot \vec{C}_Q = 0 \quad \forall u'_Q, \vec{\theta}'$ .

Ce résultat s'obtient facilement : pour une translation virtuelle quelconque  $\vec{\theta}' = \vec{0}$ . Pour que l'équation ci-dessus soit bien nulle, il faut forcément que  $\vec{R} = \vec{0}$ . En choisissant une rotation virtuelle quelconque  $u'_Q = \vec{0}$  et le raisonnement est similaire.

# Chapitre 7

## Statique des fluides

### 7.1 Équations générales

Au cours des précédents chapitre, nous avons obtenus quatre *équations générales* :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Équation de continuité :} & \frac{\partial \rho}{\partial t} + \partial_i(\rho v_i) = 0 \\ \text{Équation d'équilibre :} & \tau_{ij,j} + f_i = 0 \\ \text{Loi de comportement :} & \tau_{ij} = -p\delta_{ij} \\ \text{Équation d'état :} & F(\rho, p, \theta) = 0 \end{array} \right. \quad (7.1)$$

Sans faire plus d'hypothèse, en combinant l'équation d'équilibre avec la loi de comportement, on trouve :

$$-\frac{\partial p}{\partial x_j}\delta_{ij} + f_i = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial p}{\partial x_i} = f_i \quad (7.2)$$

Pour atteindre un équilibre, les forces de volume ne peuvent pas être quelconques :

$$\vec{f} = \overline{\text{grad}} p \Leftrightarrow \overline{\text{rot}} \vec{f} = \vec{0} \quad (7.3)$$

#### 7.1.1 Force massique

Reprenons la définition des forces par unité de masse :  $\vec{f}dV = \vec{F}dm = \vec{F}\rho dV$ , ce qui peut s'écrire  $f_i = \rho F_i$ . La condition  $\overline{\text{rot}} \vec{f} = \vec{0}$  s'écrit :

$$\overline{\text{rot}} (\rho \vec{F}) = \vec{0} \quad \text{ou} \quad \delta_{ijk}\partial_j(\rho F_k) = 0 \quad (7.4)$$

Par les propriétés du rotationnel, on peut également obtenir

$$\overline{\text{grad}} \rho \times \vec{F} + \rho \overline{\text{rot}} \vec{F} = \vec{0} \quad (7.5)$$

#### 7.1.2 Force dérivant d'un potentiel

Lorsque les forces massiques dépendent d'un potentiel, on retrouve l'expression tant convoitée d'*Analyse I, Physique générale, Mécanique rationnelle I,...* à savoir  $\vec{F} = -\overline{\text{grad}} U \rightarrow \overline{\text{rot}} \vec{F} = \vec{0}$ .

Cette condition implique

$$\vec{F} \times \overline{\text{grad}} \rho = 0 \quad (7.6)$$

Cela signifie que les surfaces  $\rho = C^{ste}$  sont des surfaces  $U = C^{ste}$ . Dans le cas de la pesanteur, les valeurs de  $U$  constantes sont des plans horizontaux où la valeur de  $\rho$  est constante.

Les équation d'équilibres :

$$\begin{cases} \vec{f} &= \overline{\text{grad}} p \\ \vec{F} &= -\overline{\text{grad}} U \end{cases} \quad (7.7)$$

donnent

$$\rho \vec{F} = \overline{\text{grad}} p \Rightarrow -\rho \overline{\text{grad}} U = \overline{\text{grad}} p \quad (7.8)$$

Cette nouvelle implication nous permet de conclure que :

- les surfaces  $U = C^{ste}$  sont des surfaces  $p = C^{ste}$ .
- les surfaces  $\rho = C^{ste}$  sont des surfaces  $U = C^{ste}$ .

Avec l'équation d'état  $F(\rho, p, \theta) = 0$ , on obtient

$$\begin{cases} p &= p(U) \\ \rho &= \rho(U) \\ \theta &= \theta(U) \end{cases} \quad (7.9)$$

Compte-tenu des deux conclusions énoncées ci-dessus,  $p(U)$  donne  $\partial_i p = \frac{dp}{dU} \partial_i U$  ou encore  $\overline{\text{grad}} p = \frac{dp}{dU} \overline{\text{grad}} U$ . Cette nouvelle relation permet de définir  $\rho(U)$  :

$$\begin{cases} \overline{\text{grad}} p &= \frac{dp}{dU} \overline{\text{grad}} U \\ -\rho \overline{\text{grad}} U &= \overline{\text{grad}} p \end{cases} \Rightarrow \rho = -\frac{dp}{dU} \quad (7.10)$$

### 7.1.3 Définition de la fonction $P$

Les équations d'équilibres peuvent s'écrire sous la forme de deux gradients :

$$\overline{\text{grad}} U + \frac{1}{\rho} \overline{\text{grad}} p = 0 \quad (7.11)$$

Supposons pouvoir définir une fonction  $P$  telle que

$$\overline{\text{grad}} P = \frac{1}{\rho} \overline{\text{grad}} p \quad \text{ou} \quad \partial_i P = \frac{1}{\rho} \partial_i p \quad (7.12)$$

Les équations d'équilibres s'écrivent alors :

$$\overline{\text{grad}} P + \overline{\text{grad}} U = 0 \quad (7.13)$$

ou encore  $P + U = C^{ste}$ .

## 7.2 Principe d'Archimède

### 7.2.1 Énoncé

L'origine du problème vient du calcul de la résultante des forces de pression exercée par un fluide sur un corps immergé en équilibre ; même si la distribution de pression est connue, avec la forme géométrique de la surface  $S$  compliquée, bonne chance pour calculer

$$\vec{A} = \oint \vec{T}^{(n)} dS = \oint -p \vec{n} dS \quad (7.14)$$

Pour régler le problème, on définit un postulat : *l'équilibre du fluide n'est pas changé si on remplace le corps immergé par du fluide*. L'équilibre de volume  $V$  du fluide s'écrit alors :

$$\underbrace{\int_V (-\rho g) \vec{1}_z dV}_1 + \underbrace{\oint_S (-p) \vec{n} dS}_2 = 0 \quad (7.15)$$

1. Poids du fluide remplaçant le corps immergé
2. Postulat : on a gardé la distribution de pression inchangée

Comme  $\vec{A} = \oint -p\vec{n} dS$ , en faisant passer l'autre terme de l'autre côté de l'égalité, après inversion du signe on trouve

$$\vec{A} = \int_V (\rho g) \vec{1}_z dV \quad (7.16)$$

Ce qui n'est rien d'autre que l'action du fluide sur le corps immergé, soit la poussée d'Archimède qui est une force :

- Dirigée vers le haut.
- De module égale au poids de fluide déplacé.
- Appliqué au centre de masse de ce fluide : le centre de poussée.

**Attention !** Il ne faut pas baisser sa garde et garder en têtes deux choses :

1. La poussée d'Archimède traduit  $\oint_S (-p)\vec{n} dS$ , il ne faut donc pas appliquer la poussée d'Archimède **et** la résultante des pressions !
2. Ce principe ne s'applique **pas** si l'équilibre est modifié !

## Le ballon

Un exemple d'application du principe, slide 15-17

## Le bateau

Un exemple réel, slide 22

## 7.3 Équilibre des fluides incompressibles

### 7.3.1 Fluides homogènes

Un fluide incompressible - petit rappel - ne l'est que si le volume qu'il occupe ne change pas de mesure au cours du temps, c'est à dire :  $\rho^\bullet = 0$ . Par ailleurs, le fluide est dit homogène si  $\rho = \rho_0$ <sup>1</sup>. La définition de  $P$  devient :

$$\overline{\text{grad}} P = \frac{1}{\rho_0} \overline{\text{grad}} p \quad (7.17)$$

ou encore  $P = \frac{p}{\rho_0}$ . Les équations d'équilibres deviennent

$$\overline{\text{grad}} (U + P) = 0 \quad \text{ou} \quad U + \frac{p}{\rho_0} = C^{ste} \quad (7.18)$$

Considérons comme potentiel la pesanteur  $U = gz$ . Les équation d'équilibres se modifient facilement :

$$gz + \frac{p}{\rho_0} = C^{ste} \quad \text{ou} \quad p + \rho_0 gz = C^{ste} \quad (7.19)$$

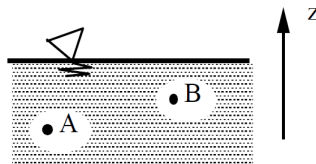


FIGURE 7.1 – Equilibre des fluides incompressibles

1. L'huile remonte à la surface de l'eau ; dépendance en  $x \rightarrow$  non homogène.



Considérons deux points  $A$  et  $B$  à une coordonnée de hauteur respectivement  $z_a$  et  $z_b$ <sup>2</sup> :

$$p_a + \rho_0 g z_a = p_b + \rho_0 g z_b \quad (7.20)$$

Il suffit d'un point où la pression est connue pour fournir la valeur de la constante. Notons que la surface libre d'un liquide (où la pression est constante) pesant est horizontale.

### Exemple 1 : les vases communicants

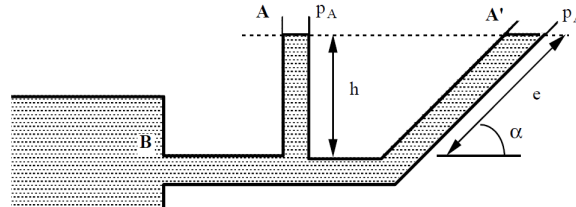


FIGURE 7.2 – Les vases communicants

Le principe est de mesurer une différence de pression en mesurant une différence de hauteur liquide : la différence de niveau  $z_a - z_b$  permet de calculer la différence de pression.

$$p_b - p_a = \rho_0 g (z_a - z_b) \quad (7.21)$$

Si comme ici le tuyau est incliné, c'est toujours au même  $z_a$  que l'on se réfère.

### Exemple 2 : répartition des pressions sur une paroi

Si ici  $p + \rho_0 g z = C^{ste}$ , c'est parce que nous sommes face à un gradient. Le niveau de référence peut être fixé librement :  $z = 0$  à la surface et tant qu'on y est  $p = 0$ .

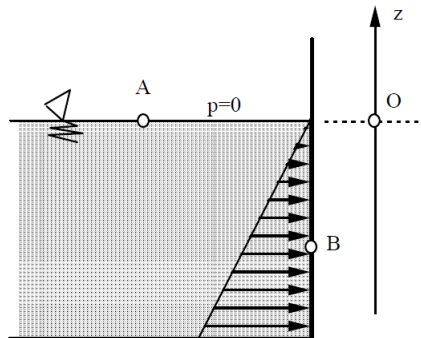


FIGURE 7.3 – Répartition des pressions sur une parois

Considérons un point  $A$  de la surface libre (car  $p$  et  $z$  est connu en ce point) ainsi qu'un point  $B$  d'une certaine "altitude"  $z$ . En écrivant ma loi :

$$\underbrace{p_A}_{=0} + \underbrace{\rho_0 g z_A}_{z_A=0} = \underbrace{p_B}_{?} + \underbrace{\rho_0 g z_B}_{z_B=z} \quad (7.22)$$

On trouve alors  $p = -\rho_0 g z$ . **Attention !** Les pressions agissent perpendiculairement aux parois, il ne faut pas se tromper lors des représentations !

2. Simple application de  $p + \rho_0 g z = C^{ste}$ .

### 7.3.2 Le principe de Pascal

*Si en un point  $A$  d'une fluide incompressible homogène, la pression est accrue de  $\Delta p$ , tous les points du fluide subissent le même accroissement de pression  $\Delta p$ .*

## Chapitre 8

# Equations générales de cinématique des fluides

Ce petit chapitre présente quelques équations générales valables quelle que soit la loi de comportement (fluides parfaits/visqueux).

### 8.1 Le tourbillon

Le champ de tourbillon est défini par  $\vec{\omega} = \frac{1}{2} \overline{\text{rot}} \vec{v}$  ou encore en notation indicielle :  $\omega_i = \frac{1}{2} \delta_{ijk} \partial_j v_k$ . Si  $\omega$  est un rotationnel, sa divergence est forcément nulle :

$$\text{div } \vec{\omega} = 0 \quad \text{ou} \quad \omega_{i,i} = 0 \quad (8.1)$$

En passant l'intégrale de part et d'autre et après application du théorème de Gauss, le tourbillon est dit "conservatif" :

$$\int_v \omega_{i,i} dV = 0 \Rightarrow \oint_S \omega_i n_i dS = 0 \quad (8.2)$$

c'est-à-dire que le flux de tourbillon au travers d'une surface fermée est nul<sup>1</sup>.

#### 8.1.1 Tube de tourbillon

Un peu de vocabulaire pour le bien de tous :

**Ligne de tourbillon** : courbe enveloppe du vecteur tourbillon.

**Surface de tourbillon** : surface engendrée par les lignes de tourbillon s'appuyant sur une courbe quelconque.

**Tube de tourbillon** : surface engendrée par une courbe fermée ( *filament de tourbillon* si la courbe est "élémentaire")

Le tube de tourbillon fonctionne exactement comme celui de courant si ce n'est qu'ici c'est le vecteur tourbillon qui est parallèle à la surface latérale.

#### Filament de tourbillon

On imagine un tuyau d'arrosage qui au lieu de conduire l'eau, conduit des tourbillons. Ainsi, exactement comme pour le tube de courant :

$$\omega' S' = \omega'' S'' \quad (8.3)$$

---

1. Ce qui rentre est égal à ce qui sort.

car le vecteur tourbillon est tangent à la surface latérale  $\Sigma$ .

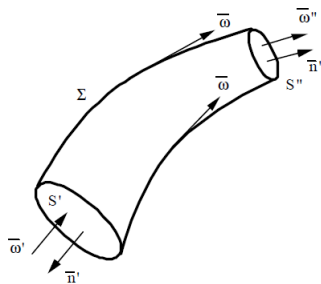


FIGURE 8.1 – Tube de tourbillon

### Tube de tourbillon

Comme précédemment mais pour le tourbillon :

$$\int_S \omega \cdot \vec{n} \, dS = C^{ste} \quad (8.4)$$

pour toute section  $S$  du tube de tourbillon.

### Circulation de la vitesse

Considérons une section dans un tube de tourbillon : on obtient une surface  $S$  limitée par la courbe fermée  $\mathcal{C}$ . Le long de cette section constante, on considère le vecteur  $d\vec{L}$  tangent à cette courbe pour en calculer l'intégrale suivante, donnant la circulation de la vitesse le long de la courbe fermée  $\mathcal{C}$  :

$$\Gamma = \oint_{\mathcal{C}} \vec{v} \cdot d\vec{L} \quad (8.5)$$

Appliquons le théorème de Stokes :

$$\Gamma = \oint_{\mathcal{C}} \vec{v} \cdot d\vec{L} = \int_S \text{rot } \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS \quad (8.6)$$

On obtient alors :

$$\Gamma = \int_S 2\vec{\omega} \cdot \vec{n} \, dS = C^{ste} \quad (8.7)$$

Ceci montre que cette intégrale est constante : la circulation  $\Gamma$  de la vitesse le long d'une courbe fermée  $\mathcal{C}$  sur un tube de tourbillon est une constante quelle que soit la section.

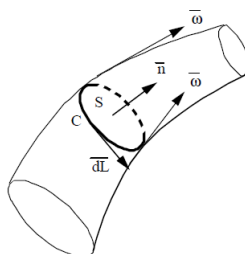


FIGURE 8.2 – Circulation de la vitesse

## Chapitre 9

# Dynamique des fluides parfaits

### 9.1 Introduction

Grande innovation ! A partir de maintenant ce ne sont plus les  $V_{ij}$  qui sont nuls, mais  $\mu$ <sup>1</sup> : un fluide parfait est un milieu isotrope dont la loi de comportement est :

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} \quad (9.1)$$

où  $p$  est la pression, une inconnue qui sera donnée par une équation d'état (  $p/\rho = R\theta$  pour un gaz parfait ).

**Attention !** Il ne faut pas confondre :

1. Un fluide parfait : défini par sa *loi de comportement* de fluide de viscosité nulle ( $\mu = 0$ )
2. Un gaz parfait : défini par son *équation d'état* qui peut avoir de la viscosité
3. Un gars parfait : moi, tout simplement.

Ceci pour dire qu'un gaz parfait n'est donc **pas** nécessairement un fluide parfait ! Dans ce chapitre, on considère donc un **fluide parfait sans viscosité**, quelque soit son équation d'état.

### 9.2 Équation du mouvement

#### 9.2.1 Équations d'Euler

Partons des équations générales du mouvement :

$$\rho \dot{v}_i = f_i + \partial_j \tau_{ij} \quad (9.2)$$

On développe la dérivée matérielle :

$$\rho [\partial_0 v_i + v_k \partial_k v_i] = f_i + \partial_j \tau_{ij} \quad (9.3)$$

Le tenseur des contraintes étant  $\tau_{ij} = -p\delta_{ij}$ , on trouve les équations d'Euler 1<sup>ère</sup> forme :

ÉQUATION D'EULER - PREMIÈRE FORME

$$\rho [\partial_0 v_i + v_k \partial_k v_i] = f_i - \partial_i p \quad (9.4)$$

Ces équations sont parfaitement correctes mais non résolvable analytiquement car non linéaires (à cause du terme  $u \frac{\partial u}{\partial x}$  si on développe la notation.)

---

1. Dans l'équation  $\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu(\dots)$

Le souci de cette forme est que la dérivée ne porte pas sur l'entière des termes. Transformons :

$$\begin{aligned}\rho \partial_0 v_i &\Rightarrow \partial_0(\rho v_i) - v_i \partial_0 \rho \\ \rho v_k \partial_k v_i &\Rightarrow \partial_k(\rho v_i v_k) - v_i \partial_k(\rho v_k)\end{aligned}\quad (9.5)$$

Ce qui nous donne :

$$\partial_0(\rho v_i) - \underline{v_i \partial_0 \rho} + \partial_k(\rho v_i v_k) - \underline{v_i \partial_k(\rho v_k)} = f_i - \partial_i p \quad (9.6)$$

En utilisant l'équation de la continuité  $\partial_0 \rho + \partial_k(\rho v_k) = 0$  on trouve :

<p>ÉQUATION D'EULER - DEUXIÈME FORME</p> $\partial_0(\rho v_i) + \partial_k(\rho v_i v_k) + \partial_i p = f_i \quad (9.7)$
---

### 9.2.2 La pression motrice

Dans le cas le plus courant où la force de volume est la force de pesanteur, on a (avec  $z$  l'axe vertical positif vers le haut) :

$$\rho_0 \vec{F} = -\rho_0 g \vec{1}_z \quad \vec{F} = -\overline{\text{grad}} U \quad U = gz \quad (9.8)$$

L'équation du mouvement s'écrit :

$$\rho_0 v_i^\bullet = \rho_0 F_i - \partial_i p \quad \text{ou} \quad \rho_0 \vec{v}^\bullet = -\overline{\text{grad}} \hat{p} \quad (9.9)$$

Où  $\hat{p}$  est défini comme la pression motrice :

$$\hat{p} = p + \rho_0 g z \quad (9.10)$$

### Exemple : écoulement unidimensionnel

Voir slides 18-21.

### 9.2.3 Équations de Lamb

L'idée est de repartir de l'équation du mouvement, mais de développer autrement la dérivée matérielle en commençant par additionner et soustraire un terme et utiliser  $v_{[i,k]} = \frac{1}{2}(\partial_k v_i - \partial_i v_k)$  :

$$\begin{aligned}v_i^\bullet &= \partial_0 v_i + v_k \partial_k v_i \\ &= \partial_0 v_i + v_k (\partial_k v_i - \partial_i v_k) + v_k \partial_i v_k \\ &= \partial_0 v_i + v_k 2v_{[i,k]} + v_k \partial_i v_k\end{aligned}\quad (9.11)$$

Mais <sup>2</sup>  $\vec{\omega} = \frac{1}{2} \overline{\text{rot}} \vec{v} \rightarrow v_{[i,k]} = \delta_{ipk} \omega_p$ . En remplaçant :

$$v_i^\bullet = \partial_0 v_i + 2\delta_{ipk} \omega_p v_k + \frac{1}{2} \partial_i (v_k v_k) \quad (9.12)$$

Ce qui nous donne les...

<p>EQUATIONS DE LAMB</p> $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + 2(\vec{\omega} \times \vec{v}) + \overline{\text{grad}} \left( \frac{v^2}{2} \right) = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \overline{\text{grad}} p \quad \text{avec} \quad \vec{f} = \rho \vec{F} \quad (9.13)$
---

**Attention !** Il faut bien garder en tête que  $v_k v_k \neq v_k^2$  !

---

2. Note : d'où ?

### 9.2.4 Energie spécifique totale - charge

Considérons le cas particulier où les 3 conditions suivantes sont vérifiées :

1. Les forces dérivent d'un potentiel :  $\vec{F} = -\overline{\text{grad}} U$ .
2. Le fluide est barotrope :  $\rho = \rho(p)$

$$\overline{\text{grad}} P = \frac{1}{\rho} \overline{\text{grad}} p \quad \text{ou} \quad P = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho} \quad (9.14)$$

3. Si le fluide est homogène et incompressible :  $\rho = \rho_0 = C^{ste}$  :

$$P = \frac{p}{\rho_0} \quad (9.15)$$

Dans ce cas, en effectuant les changements renseignés ci-dessus, l'équation de Lamb devient :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + 2(\vec{\omega} \times \vec{v}) = -\overline{\text{grad}} \left[ U + P + \frac{v^2}{2} \right] \quad (9.16)$$

L'objectif est que le terme de gauche soit nul impliquant un gradient nul qui lui impliquerait que le terme entre crochet n'est qu'une constante (notre rêve).

### L'énergie spécifique totale

Soit l'énergie spécifique totale (par unité de masse) :

$$\epsilon = U + P + \frac{v^2}{2} \quad (9.17)$$

avec, pour chacun des termes :

- $\frac{v^2}{2}$  ; l'énergie cinétique par unité de masse
- $U$  ; l'énergie potentielle par unité de masse
- $P$  ; l'énergie de pression par unité de masse

### La charge

On définit la charge  $H$  comme :

$$\epsilon = g \left[ z + \frac{P}{g} + \frac{v^2}{2g} \right] = gH \quad (9.18)$$

C'est à dire :

$$H = z + \frac{P}{g} + \frac{v^2}{2g} \quad (9.19)$$

- $\frac{v^2}{2g}$  ; la hauteur de vitesse
- $z$  ; la hauteur géométrique
- $\frac{P}{g}$  ; la hauteur de pression

## 9.3 Écoulement permanent d'un fluide parfait

### 9.3.1 Théorème de Bernoulli 1

Ce théorème s'applique dans le cas d'un écoulement permanent d'un fluide parfait soumis à des forces massiques dérivant d'un potentiel. Reprenons :

$$\epsilon = U + P + \frac{v^2}{2} \quad (9.20)$$

où  $\epsilon$  est constant le long d'une ligne de courant<sup>3</sup>.

Pour établir le théorème, on part de l'équation de Lamb :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + 2(\vec{\omega} \times \vec{v}) = -\overline{\text{grad}} \epsilon \quad (9.21)$$

Les dérivées temporelles sont nulles, étant dans le cas de l'écoulement permanent. Multiplions scalairement par  $\vec{v}$  pour annuler le produit vectoriel  $\rightarrow \vec{v} \cdot \overline{\text{grad}} \epsilon = 0$ . Cela montre que  $\overline{\text{grad}} \epsilon$  est perpendiculaire aux surfaces et donc  $\epsilon$  est constant le long d'une ligne de courant mais également, par un raisonnement similaire (en multipliant scalairement par  $\vec{\omega}$ ), le long d'une ligne de tourbillon.

### Application : le tube de Pitot

Le tube de Pitot permet de mesurer une vitesse par différence de pression. Historiquement utilisé en 1730 pour mesurer la vitesse du courant de la Seine, on l'utilise encore aujourd'hui pour calculer la vitesse des avions. Plus d'infos slide 42 !

### 9.3.2 Théorème de Bernoulli 2

Prenons comme hypothèses :

- Écoulement permanent
- **Irrotationnel**
- Fluide parfait
- Soumis à des forces massiques dérivant d'un potentiel ;  $\epsilon = U + P + \frac{v^2}{2}$
- Constant dans tout l'écoulement

Pour établir le théorème, on part de l'équation de Lamb :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + 2(\vec{\omega} \times \vec{v}) = -\overline{\text{grad}} \epsilon \quad (9.22)$$

L'écoulement étant permanent, la dérivée par rapport au temps est nulle, de même pour  $\vec{\omega}$ , étant dans le cas irrotationnel. On obtient donc :

$$\overline{\text{grad}} \epsilon = 0 \quad \Rightarrow \quad \epsilon = C^{ste} \text{ dans tout l'écoulement} \quad (9.23)$$

### Application : vidange d'un réservoir

Petite application sympathique slide 48-50.

---

3. Courbe dont les tangentes sont les vitesses.



# Chapitre 10

## Dynamique des fluides visqueux

### 10.1 Introduction

Le chapitre 5 nous avait montré que le fluide visqueux newtonien était défini par (5.7) ou (5.13). Ces deux équations mettent en évidence les deux coefficients de viscosité  $\lambda$  et  $\mu$ . Lorsque le fluide était incompressible, il y avait une relation entre ces deux coefficients de nos deux équations : si on ajoute l'hypothèse de Stokes, ces relations sont vérifiées même si le fluide n'est pas incompressible.

#### 10.1.1 Interprétation physique

Considérons  $\vec{V}$  la vitesse de la plaque et  $\vec{v}$  la vitesse du fluide. Le long de la plaque mobile  $\vec{v} = \vec{V}$  : le fluide visqueux colle et est entraîné par la paroi, s'il était parfait ça ne serait pas le cas. Le long de la plaque fixe,  $\vec{v} = \vec{0}$ .

On verra (spoiler) que sous certaines conditions que

$$\vec{V} = V \frac{z}{L} \vec{1}_x \quad (10.1)$$

Reprenons la loi de comportement (5.13) :

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu \left( V_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}V_{kk} \right) \quad (10.2)$$

où la vitesse est donnée par (10.1). Nous avons donc (où  $w$ , la vitesse selon  $z$  est nulle (vitesse est toujours horizontale)) :

$$\tau_{xz} = 2\mu V_{xz} \Leftrightarrow \tau_{xz} = 2\mu \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \underbrace{\frac{\partial w}{\partial x}}_{=0} \right) \Leftrightarrow \tau_{xz} = \mu \frac{\partial u}{\partial z} \quad (10.3)$$

où  $\tau_{xz}$  est la contrainte tangentielle de frottement entre les filets fluides voisins, due à la différence de vitesse de ces filets fluides.

#### 10.1.2 Unités

Inclure tableau slide 7

## 10.2 Equation de mouvement

### 10.2.1 Equation de Navier-Stokes

La démarche est identique que celle suivie pour établir les équations d'Euler pour un fluide parfait. Partons des équations générales du mouvement

$$\rho v_i^\bullet = f_i + \partial_j \tau_{ij} \quad (10.4)$$

Notre loi de comportement est toujours donnée par l'équation de Stokes (5.13). La vitesse de déformation est donnée par

$$V_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}) \quad (10.5)$$

Le fluide étant incompressible,  $\rho^\bullet = 0$  :

$$\rho^\bullet + \rho \partial_i v_i = 0 \rightarrow V_{ii} = 0 \rightarrow V_{kk} = 0 \quad (10.6)$$

On peut alors se débarrasser de  $V_{kk}$  dans (5.13).

Introduisons la définition de  $\tau_{ij}$  dans les équations du mouvement :

$$\rho v_i^\bullet = f_i + \partial_j [-p \delta_{ij} + 2\mu V_{ij}] \quad (10.7)$$

En tenant compte de la définition des vitesses de déformations :

$$\rho v_i^\bullet = f_i - \partial_i p + \mu \partial_j (\partial_i v_j + \partial_j v_i) \quad (10.8)$$

En effectuant la distribution, compte-tenu du résultat que nous venons d'obtenir ( $\rho \partial_i v_i = 0$ ), le terme  $\mu \partial_i \partial_j v_j$  s'annule pour donner :

EQUATIONS DE NAVIER-STOKES

$$\rho v_i^\bullet = f_i - \partial_i p + \mu \partial_j \partial_j v_i \quad (10.9)$$

### Exemple : écoulement entre deux plaques parallèles

Commençons par énoncer ce que nous avons :

1. Ecoulement permanent  $\rightarrow \frac{\partial}{\partial t} = 0$
2. Fluide incompressible :  $\rho^\bullet = 0 \rightarrow \rho^\bullet + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0 \rightarrow \operatorname{div} \vec{v} = 0$
3. Fluide visqueux  $\rightarrow$  équation de Navier-Stokes
4. Ecoulement unidimensionnel  $\rightarrow \vec{v} = (u, 0, 0)$

Comme nous avons  $\operatorname{div} \vec{v} = 0$  où  $\vec{v} = (u, 0, 0)$ , cela implique :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \Rightarrow u = u(z) \quad (10.10)$$

Comme nous sommes en stationnaire et en unidimensionnel, les équations de Stokes développées se simplifient fortement :

$$\begin{cases} \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= \frac{\partial p}{\partial x} \\ 0 &= \frac{\partial p}{\partial y} \\ 0 &= \frac{\partial p}{\partial z} \end{cases} \quad (10.11)$$

Imposons les conditions aux limites  $u(0) = 0, u(L) = V$  et considérons la première équation de notre système : le premier membre est fonction de  $z$  et le second de  $x$  impliquant que les deux fonctions doivent être constantes.

$$\frac{d\hat{p}}{dx} = 0 \Rightarrow \hat{p} = ax + b \quad (10.12)$$

Deux cas s'offrent à nous :

1.  $a = 0$

$$u = V \frac{z}{L} \quad ; \quad v = 0; \quad w = 0 \quad (10.13)$$

2.  $a \neq 0$

$$u = \frac{az}{2\mu}(z - L) + V \frac{z}{L} \quad ; \quad v = 0; \quad w = 0 \quad (10.14)$$

**Inclure schéma slide 25** et interprétation.

### 10.2.2 Pression motrice

Fréquemment, la force de volume est la pesanteur. En définissant  $z$  comme l'axe vertical positif vers le haut :

$$\rho \vec{F} = -\rho g \vec{1}_z, \quad \vec{F} = -\overline{\text{grad}} U, \quad U = gz \quad (10.15)$$

L'équation du mouvement s'écrit

$$\rho v_i^\bullet = \rho F_i - \partial_i p + \mu \partial_j \partial_j v_i = -\overline{\text{grad}} \hat{p} + \mu \Delta \vec{v} \quad (10.16)$$

où l'on utilise la pression motrice  $\hat{p} = p + \rho gz$ .

Un bel exemple sur l'*écoulement unidimensionnel* est donné slide 27-30. Même si je ne le reprends pas ici, notons :

- Attention, ne pas oublier que le  $z$  caché dans  $\hat{p}$  est dirigé vers le haut.
- $\hat{p}$  est constant le long de la perpendiculaire à l'écoulement ; quand les lignes de courants sont parallèles dans un écoulement,  $\hat{p}$  est perpendiculaire à la direction de l'écoulement.

### 10.2.3 Conditions aux limites

Intéressons nous aux ordres des équations d'un fluide parfait (Euler) et d'un fluide visqueux newtonien incompressible :

$$\begin{aligned} \rho(\partial_0 v_i + v_k \partial_k v_i) &= f_i - \partial_i p \\ \rho(\partial_0 v_i + v_k \partial_k v_i) &= f_i - \partial_i p + \mu \Delta v_i \end{aligned} \quad (10.17)$$

Le seul terme différent est dû à la viscosité qui, pas de bol, est le terme d'ordre le plus élevé : si l'on rajoute de la viscosité, on change les équations **et aussi** (ne pas oublier !) les conditions aux limites !

## 10.3 Mouvement turbulent

### 10.3.1 Nombre de Reynolds

Faisons une expérience de la pensée ! *Considérons un tuyau d'arrosage cylindrique, transparent et en plastique. On s'arrange pour que l'eau entre d'un côté et sorte de l'autre. Injectons*

un liquide coloré (d'où l'importance du plastique, sinon trop dur (TWSS)). Si la vitesse d'écoulement est faible, il va colorer la ligne de courant. C'est l'écoulement **laminaire**; chaque ligne de courant est indépendante d'une de l'autre.

Assez joué, augmentons la vitesse du fluide! L aligne de courant va se mettre à onduler à cause de la viscosité des coefficients de frottements, mais cela reste laminaire. Si on augmente encore le débit l'eau claire va devenir totalement mélangée avec notre liquide coloré; c'est l'écoulement **turbulent**.

Le passage de l'état laminaire à l'état turbulent peut être prédit par la valeur d'un nombre sans dimensions : le nombre de Reynolds<sup>1</sup>

Pour un tube circulaire :

$$Re = \frac{UD}{\nu} \quad (10.18)$$

où  $U$  est la vitesse débitante (débit/section),  $D$  le diamètre du tube et  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$  la viscosité cinématique.

Le nombre de Reynolds est tel que pour chaque cas particuliers, il existe une valeur limite pour laquelle, si on est au dessus ou en dessous on est soit en laminaire soit en turbulent. On le définit à l'aide d'une vitesse caractéristique de l'écoulement (vitesse débitante et de la longueur caractéristique de l'écoulement (pas la longueur du tuyau mais le diamètre!) :

$$Re = \frac{\text{vitesse caractéristique} \quad \text{longueur caractéristique}}{\text{viscosité cinématique}} \quad (10.19)$$

Ainsi, pour un tube cylindriques :  $U$  est la vitesse moyenne et  $D$  le diamètre du tube. Pour une aile d'avion,  $U$  est la vitesse de l'avion et  $D$  la corde de l'aile.

Les vitesses, qu'on soit en laminaire ou turbulent, sont solutions des équations de Navier- Stokes ; comme elles ne sont pas linéaires, on numérise!

### 10.3.2 Contrainte de turbulence

Considérons une grandeur  $A(t)$  quelconque liée à l'écoulement, représenté par la courbe verte. La courbe courbe rouge est la valeur moyenne de  $A(t)$  définie par<sup>2</sup> : est donné par

$$\bar{A}(t) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A(t + \tau) d\tau \quad (10.20)$$

**INCLUDE IMAGE SLIDE 37** On peut voir la courbe verte comme étant la courbe rouge avec des fluctuations. On va choisir un intervalle  $T$  sur lequel la moyenne doit être :

- Assez grande pour que  $\bar{A}(t)$  ne dépende pas de  $T$ .
- Petite par rapport aux constantes de temps de l'écoulement moyen.

La moyenne des fluctuations doit alors être égale à zéro. En décomposant  $A(t)$  :

$$A(t) = \bar{A}(t) + \underbrace{A'(t)}_0 \quad (10.21)$$

1. Remarquons que le symbole des nombres sans dimensions ont 'toujours' deux lettres! Comme Mach,  $Ma$  notamment.

2. Si  $T$  est grand, cette courbe sera lisse.

### 10.3.3 Equations de Navier-Stokes moyennées

Avant tout, passons en revue quelques propriétés mathématiques. Dans le cas d'un produit de deux grandeurs  $A$  et  $B$ <sup>3</sup> :

$$\overline{AB} = \overline{(\overline{A} + A')(\overline{B} + B')} = \overline{AB} + \overline{A'B'} \quad (10.22)$$

Dans le cas des dérivées :

$$\frac{\partial \overline{A}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \overline{A} \quad \frac{\partial \overline{A}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{A} \quad (10.23)$$

Reprenons : partons des équations de Navier-Stokes :

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_k \partial_k v_i = f_i - \partial_i p + \mu \Delta v_i \quad (10.24)$$

Comme nous sommes dans le cas incompressible,  $\rho$  est constant : on peut le sortir lorsqu'on moyenne :

$$\rho \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial t} + \rho \overline{v_k \partial_k v_i} = f_i - \partial_i \overline{p} + \mu \Delta \overline{v_i} \quad (10.25)$$

Comme  $\overline{AB} = \overline{AB} + \overline{A'B'}$  (et la propriété pour la dérivée) on trouve :

$$\rho \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial t} + \rho \overline{v_k} \partial_k \overline{v_i} + \rho \overline{v'_k \partial_k v'_i} = f_i - \partial_i \overline{p} + \mu \Delta \overline{v_i} \quad (10.26)$$

Un troisième terme s'est rajouté dans le membre de gauche :  $\rho \overline{v'_k \partial_k v'_i}$ . Pour le calculer, repartons de l'équation de continuité moyennée :

$$\partial_i \overline{v_i} = 0 \Leftrightarrow \partial_i \overline{v_i} = 0 \Rightarrow \partial_i v'_i = 0 \quad (10.27)$$

Après quelques calculs assez fastidieux, on trouve :

<p>ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES MOYENNÉES</p> $\rho \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial t} + \rho \overline{v_k} \partial_k \overline{v_i} = f_i - \partial_i \overline{p} + \partial_j \tau'_{ij} + \mu \Delta \overline{v_i} \quad (10.28)$
---

L'apparition des contraintes de turbulence signifie que les équations ont été moyennées<sup>4</sup> ; on peut supprimer les barres des moyennes :

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_k \partial_k v_i = f_i - \partial_i p + \partial_j \tau'_{ij} + \mu \Delta v_i \quad (10.29)$$

La viscosité se traduit par le terme "laplacien" et par les contraintes de turbulence. Tout se retrouve en effet dans ce terme de viscosité :

- Les contraintes de turbulence résultent de l'échange de quantité de mouvement entre des filets fluides voisins, lorsque les particules passent par turbulence d'un filet de courant au filet voisin.
- Un fluide parfait est donc toujours en écoulement laminaire puisque ces échanges sont dus à la viscosité.

3. "La moyenne d'un produit c'est ça. Je suis un peu rapide mais acceptez-le, vous les verrez en MA1".

4. Notons qu'il n'y a pas de viscosité pour un fluide parfait.

## 10.4 Les théorèmes de Bernoulli

Les slides commencent par un rappel des équations de Lamb ainsi que des effets sur la viscosité. Venons-en directement aux faits :

### 10.4.1 Rappels des deux premiers théorèmes

Pour un fluide parfait, homogène, incompressible et dans la pesanteur.

#### Théorème de Bernoulli 1

Dans un écoulement permanent d'un fluide parfait homogène dans le champ de la pesanteur, l'énergie spécifique totale est constante le long d'une ligne de courant.

$$\varepsilon = p + \rho_0 g z + \rho_0 \frac{v^2}{2} : C^{ste} \quad (10.30)$$

#### Théorème de Bernoulli 2

Dans un écoulement permanent irrotationnel d'un fluide parfait homogène dans le champ de la pesanteur, l'énergie spécifique totale est constante dans tout l'écoulement.

$$\varepsilon = p + \rho_0 g z + \rho_0 \frac{v^2}{2} : C^{ste} \quad (10.31)$$

### 10.4.2 Le théorème de Bernoulli 3

Identifions une ligne de courant d'un écoulement permanent d'un fluide et calculons la charge en un point puis après déplacement en un autre point, ... Si le fluide est parfait, la charge sera constante. Si le fluide est visqueux, la charge en un point "plus haut" est plus élevée qu'en un point "plus bas" : il y a *perte de charge*.

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + 2\rho_0(\vec{\omega} \times \vec{v}) = -\overline{\text{grad}} \rho_0 g \left[ \underbrace{\frac{p}{\rho_0 g} + z + \frac{v^2}{2g}}_H \right] + \vec{f}' \quad (10.32)$$

où  $H$  est la charge. Cette démonstration n'est pas à connaître "tellement elle est évidente avec pleins de *voir MA1*".

**AJOUTER IMAGE SLIDE 51**

### 10.4.3 Le théorème de Bernoulli 4

Le théorème 3 est à utiliser dans un écoulement dans l'air, dans l'eau, ... mais **pas** dans un tuyau ! En effet :

1. La répartition des vitesses n'est pas uniforme dans une section transversale (la vitesse est nulle le long des parois).
2. La seule grandeur utile est le débit, et pas les vitesses locales.

On va donc cette fois s'intéresser non pas à une ligne de courant, mais à un *tube de courant*. La démonstration se trouve dans les slides 53 à 59. On conclut :

Le théorème de Bernoulli 4 s'énonce comme le 3, à condition :

- De remplacer la vitesse  $v$  par la vitesse débitante  $U$ .
- D'ajouter le coefficient  $\alpha$  qui tient compte de la répartition non-uniforme des vitesses dans chaque section<sup>5</sup>.

THÉORÈME DE BERNOULLI 4

$$\left[ \alpha_1 \frac{U_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 \right] = \left[ \alpha_2 \frac{U_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 \right] = \Delta H_{1-2} \quad (10.33)$$

#### 10.4.4 Les pertes de charge

En pratique, il existe deux types de pertes de charge :

##### Perte de charge répartie

Il s'agit de la perte de charge entre deux sections, proportionnelle à la distance entre ces deux sections :

$$\Delta H = \frac{\lambda}{D} L \frac{U^2}{2g} \quad (10.34)$$

##### Perte de charge concentrée

On trouve également des pertes de charge locales en raison des perturbations locales (tuyaux a forte courbe en un endroit, ...) :

$$\Delta H = K \frac{U_{ref}^2}{2g} \quad (10.35)$$

où  $K$  est le coefficient dépendant du type de perturbation et  $U_{ref}$  la vitesse caractéristique de chaque type de configuration.

---

5. Dès que l'on voit un  $\alpha$ , on est d'office dans le cas d'un tube de courant et on a une vitesse moyenne.

## Chapitre 11

# Dynamique des fluides parfaits

Ce chapitre ne fait pas partie de la matière d'examen. Matière finie donc !



# Annexe A

## Rappels théoriques

### TP 1 : Notations indicielles

#### Notation indicielles

- Indice libre :
  - N'apparaît qu'une seule fois
  - Représente une composante
  - Doit apparaître dans tous les termes
- Indice muet :
  - Apparaît deux fois
  - Représente une sommation

#### Symbole de Kronecker

- A 2 indices :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

- A 3 indices :

$$\delta_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si permutation paire des indices} \\ -1 & \text{si permutation impaires des indices} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

- Formule d'expulsion

$$\delta_{ijk}\delta_{ipq} = \delta_{jp}\delta_{kq} - \delta_{jq}\delta_{kp} \quad (\text{A.3})$$

#### Tenseur d'ordre 2

Le tenseur des contraintes est défini comme

Matriciellement cela revient à

$$\overline{T}^{(n)} = \overline{T}_i n_i = T_{ij} \overline{1x}_j \cdot n_i \quad (\text{A.4}) \quad \overline{T}^{(n)} = \overline{n} \overline{\overline{T}} \quad (\text{A.5})$$

Ce qui nous donne en fait la composante en j du tenseur

$$T_j^{(n)} = T_{ij} n_i \rightarrow \overline{T}^{(n)} = T_j^{(n)} \overline{1x}_j \quad (\text{A.6})$$

- Propriétés :
  - Changement d'axe :  $T'_{pq} = \alpha_{pi} \alpha_{qj} T_{ij}$
  - Tenseur symétrique :  $T_{ij} = T_{ji}$
  - Tenseur antisymétrique :  $T_{ij} = -T_{ji}$

#### Divers

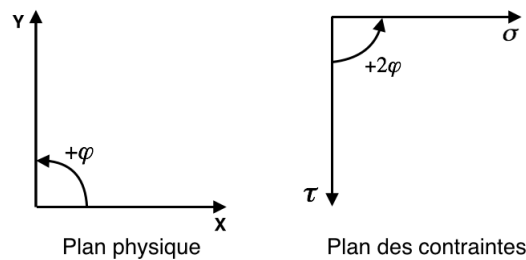
- Gradient :  $\partial_i \varphi$
- Divergence :  $\partial_i \varphi_i = \varphi_{i,i}$
- Rotationnel :  $\delta_{ijk} \partial_j \varphi_k$
- Laplacien :  $\partial_{ii} \varphi$
- Produit scalaire :  $a \cdot b = a_i b_i$
- Produit vectoriel :  $a \times b = \delta_{ijk} a_j b_k$

## TP 2 : Cercle de Mohr (tenseur des contraintes)

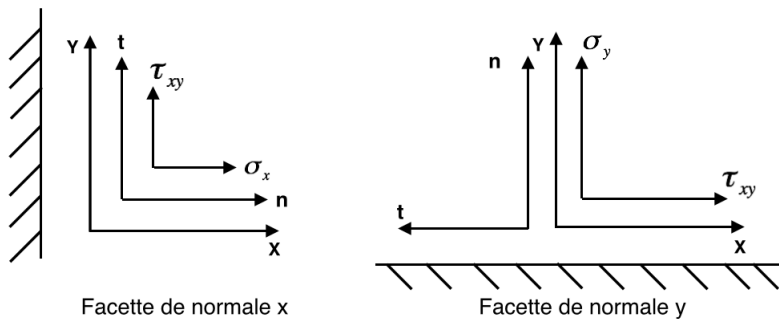
- Représentation de l'état de contrainte en un point considéré
- Il faut donc connaître le tenseur de contrainte  $\bar{\bar{T}}$
- Rappel :  $\bar{\bar{T}} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix}$  est symétrique

### Conventions

Attention à l'angle qu'il faut diviser par 2 pour avoir l'équivalent dans le physique.



Dans le plan physique, l'orientation de la facette est celle de  $\sigma$  et  $\tau$  est perpendiculaire, pointant vers la contrainte de plus grand module !



### Construction

$$\bar{\bar{T}} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix} \text{ est connu} \quad (\text{A.7})$$

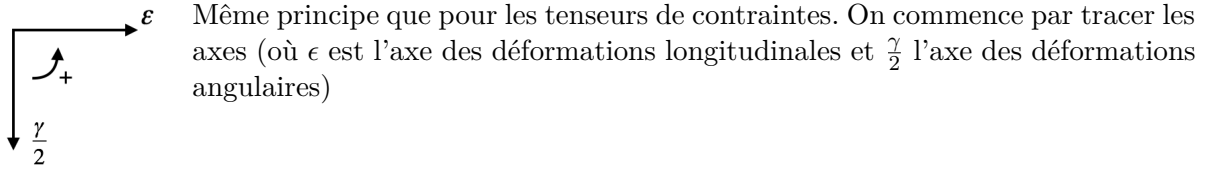
Les composants de la matrice sont les composants du tenseur dans le cercle de Mohr. De cette manière,  $x$  est représentatif de la facette de normale  $x$  et  $y$  pour la facette de normale  $y$ . On a

$$x(\sigma_x, \tau_{xy}) \quad y(\sigma_y, -\tau_{xy}) \quad (\text{A.8})$$

- Valeurs principales :  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$
- Directions principales : angle entre l'horizontale et  $x$
- Valeurs extrémales :  $\tau_{max}$  et  $\tau_{min}$

## TP 3 : Cercle de Mohr (tenseur des déformations)

### Tracé



Même principe que pour les tenseurs de contraintes. On commence par tracer les axes (où  $\epsilon$  est l'axe des déformations longitudinales et  $\frac{\gamma}{2}$  l'axe des déformations angulaires)

- On connaît cette fois  $a_{ij} = \begin{pmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \epsilon_y \end{pmatrix}$
- On représente  $x(\epsilon_x, \gamma_{xy})$  et  $y(\epsilon_y, \gamma_{xy})$  dont les composants sont en *microstrenght*

### Tenseurs des déformations évanouissantes

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \epsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \epsilon_z \end{pmatrix} \quad a_{ij} = \frac{1}{2}(a_{i,j} + a_{j,i}) \quad (\text{A.9})$$

### Formules utiles

- Tenseur des rotations

$$\mu_{[i,j]} = \frac{1}{2}(\mu_{i,j} - \mu_{j,i}) \quad (\text{A.10})$$

- Déformation axiale dans la direction  $\vec{\nu}$

$$\vec{\nu} = \nu_i \bar{1}_{x_i} \rightarrow \epsilon_{\nu} = a_{ij} \nu_j \nu_i \quad (\text{A.11})$$

- Angle après déformation

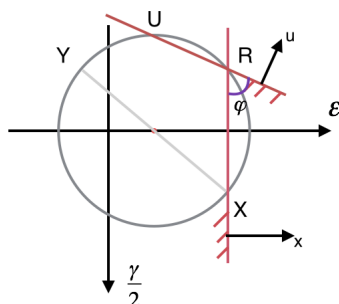
$$\gamma_{\nu\mu} = 2a_{\nu\mu} = 2a_{ij} \nu_j \mu_i \rightarrow \text{angle} = \frac{\pi}{2} - \gamma_{\nu\mu} \quad (\text{A.12})$$

**Remarque :**  $\Delta L = L \cdot \epsilon$

- Loi de Hooke

$$a_{ij} = \frac{1}{E} [(1 + \nu)\tau_{ij} - \nu\delta_{ij}\tau_{kk}] \quad (\text{A.13})$$

### Remarque



Durant ce tp on utilise le *point de rayonnement* (intersection de la verticale passant par  $x$  avec le cercle). Cela nous permet de mesurer directement l'angle  $\varphi$  et non  $2\varphi$ , mais aussi de représenter directement le plan physique sur le dessin (généralement on représente le vecteur physique du même côté que le point).

## TP 4 - 5 : Hydrostatique

### Principe d'Archimède

- Soit  $\bar{A}$  l'action du fluide sur le corps

$$\bar{A} = \oint_S (-p) \bar{n} dS \quad (\text{A.14})$$

- Equilibre du corps immergé :  $\bar{A} + \bar{R} = 0$
- $\bar{R}$  : Résultante des forces exercées sur le corps sous l'action du fluide
- $\bar{A}$  : Résultante des forces de pression exercées par le fluide sur le corps
- **Postulat** : *L'équilibre ne change pas si on remplace le corps immergé par du fluide*

$$\int_V -\rho_f g \bar{I}_z dV + \bar{A} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{A} = \int_V \rho_f g \bar{I}_z dV \quad (\text{A.15})$$

- **Attention** : il faut que tout le volume soit immergé pour appliquer Archimède

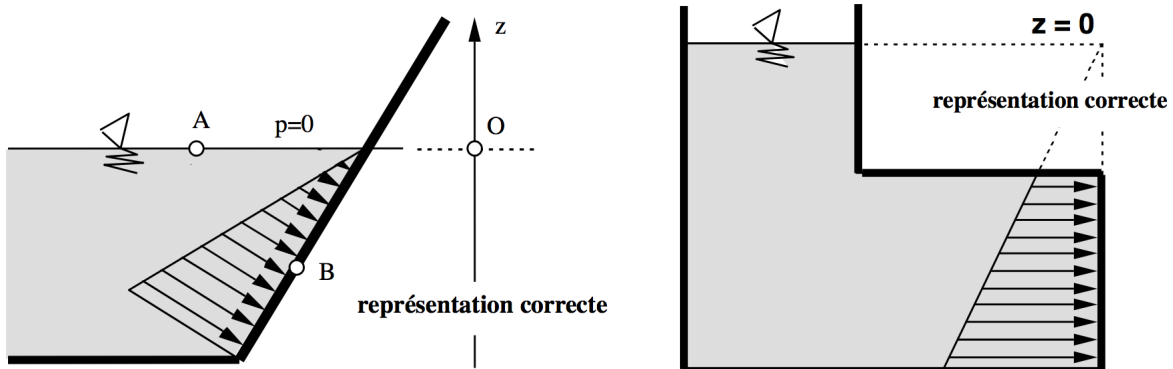
### Principe de Pascal

$$p + \rho g z = \text{cst} \quad (\text{A.16})$$

Si en un point du fluide incompressible en équilibre isotherme, la pression est accrue de  $\Delta p$ , tous les points subissent cet accroissement

### Répartition des pressions sur un obstacle

- La pression est toujours orienté selon la normale à la surface
- On choisit une pression de référence :  $p_{ref} = 0$  ou  $p_{ref} = p_{atm} = 101325 \text{ Pa}$
- On trouve l'évolution de la pression grâce au principe de Pascal



## TP 6 - 7 : Cinématique des fluides parfaits

### Loi de comportement générale des fluides

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda\delta_{ij}V_{kk} + 2\mu V_{ij} \quad (\text{A.17})$$

où  $\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de viscosité.

### Théorème de Bernouilli

- Hypothèses :
  - Fluide parfait  $\Rightarrow \tau_{ij} = -p\delta_{ij}$
  - Fluide incompressible  $\Rightarrow \rho^\bullet = 0$
  - Ecoulement permanent  $\Rightarrow \partial_0 v_i = 0$
- Théorème :

Dans un écoulement permanent d'un fluide parfait soumis à un champ de force massique dérivant d'un potentiel, l'énergie spécifique totale est constante le long d'une ligne de courant.

$$\epsilon = gz + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = cst \quad (\text{A.18})$$

le long d'une ligne de courant.

**Attention :**  $\epsilon$  est une énergie par unité de masse  $[J/kg] = [m^2/s^2]$

- Charge :

$$H = \frac{\epsilon}{g} = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} \quad (\text{A.19})$$

### Conservation du débit

Permet de calculer la vitesse du fluide si la surface de passage change

$$Q = vS = cst \quad (\text{A.20})$$

### Cavitation

- Correspond au changement de phase dans un fluide
- Si  $p \searrow \Rightarrow T \nearrow$ , formation de bulles dû à la faible pression et il y a formation de bulles.  
Il y a donc cavitation lorsque  $p < p_{vap}$  (tension de vapeur)
- Ecoulement impossible

### Remarque

- Si le réservoir est grand on considère que l'écoulement est assez lent que pour faire varier la hauteur
- Le *principe de Pascal* ne s'applique qu'en statique ! En dynamique on utilise *Bernouilli*

### Ligne de charge, piézométrique et de courant

- La première est juste la représentation de H en fonction de l'endroit (cst)
- La deuxième consiste à reporter  $v^2/(2g)$  selon l'endroit **mais par rapport à la charge !**
- La dernière est la représentation de la hauteur de la ligne d'écoulement en fonction de l'endroit. **La différence avec la courbe piézométrique donne  $p/\rho g$ .**

