Université Libre de Bruxelles

Synthèse

Résistance des matériaux
CNST-H-300

Auteur :
Nicolas Englebert

Professeur :
Guy Warzee

Année 2015 - 2016

Appel à contribution

Synthèse OpenSource

Ce document est grandement inspiré de l'excellent cours donné par Guy Warzee à l'EPB (École Polytechnique de Bruxelles), faculté de l'ULB (Université Libre de Bruxelles). Il est écrit par les auteurs susnommés avec l'aide de tous les autres étudiants et votre aide est la bienvenue ! En effet, il y a toujours moyen de l'améliorer surtout que si le cours change, la synthèse doit être changée en conséquence. On peut retrouver le code source à l'adresse suivante

`https://github.com/nenglebert/Syntheses`

Pour contribuer à cette synthèse, il vous suffira de créer un compte sur *Github.com*. De légères modifications (petites coquilles, orthographe, ...) peuvent directement être faites sur le site ! Vous avez vu une petite faute ? Si oui, la corriger de cette façon ne prendra que quelques secondes, une bonne raison de le faire !

Pour de plus longues modifications, il est intéressant de disposer des fichiers : il vous faudra pour cela installer LaTeX, mais aussi *git*. Si cela pose problème, nous sommes évidemment ouverts à des contributeurs envoyant leur changement par mail ou n'importe quel autre moyen.

Le lien donné ci-dessus contient aussi le `README` contient de plus amples informations, vous êtes invités à le lire si vous voulez faire avancer ce projet !

Licence Creative Commons

Le contenu de ce document est sous la licence Creative Commons : *Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International (CC BY-NC-SA 4.0)*. Celle-ci vous autorise à l'exploiter pleinement, compte- tenu de trois choses :

1. *Attribution* ; si vous utilisez/modifiez ce document vous devez signaler le(s) nom(s) de(s) auteur(s).
2. *Non Commercial* ; interdiction de tirer un profit commercial de l'œuvre sans autorisation de l'auteur
3. *Share alike* ; partage de l'œuvre, avec obligation de rediffuser selon la même licence ou une licence similaire

Si vous voulez en savoir plus sur cette licence :

`http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/`

Merci !

Chapitre 1

Introduction

1.1 Éléments structuraux

Afin de décrire les différents éléments, on va baser nos hypothèses simplificatrices sur une cinématique (déplacement) simplifiée et liées aux caractéristiques géométriques. On classera ensuite les différentes structures en :

- *Solides 3D*
  Il n'existe pas de simplifications "directe", si les dimensions de l'objet sont similaires dans les trois directions. Les suivants • possèdent des simplifications car une dimension, appelée **épaisseur** est plus petite que les autres.
- *Plaques et coques* (minces ou épaisses)
  Si la structure est **plane**, on aura la subdivision suivante
  — Si les efforts sont tous dans le plan : **membrane** ; si l'on a de la *tension.*
  — Si les efforts sont tous hors plan : **plaque** ; si l'on a *flexion* et *cisaillement*
  — Si les efforts dans le plan et hors plan : **coque plane** ; si l'on a *tension, flexion* et *cisaillement*
  On remarque que dès qu'il y a flexion, il y a cisaillement et si en plus on rajoute de la flexion on a une coque plane, par exemple une voile.
- *Membranes* (états plans, état axisymétrique) Si la structure est **courbe**, on aura la subdivision suivante
  — **Membrane**
  — **Coque**

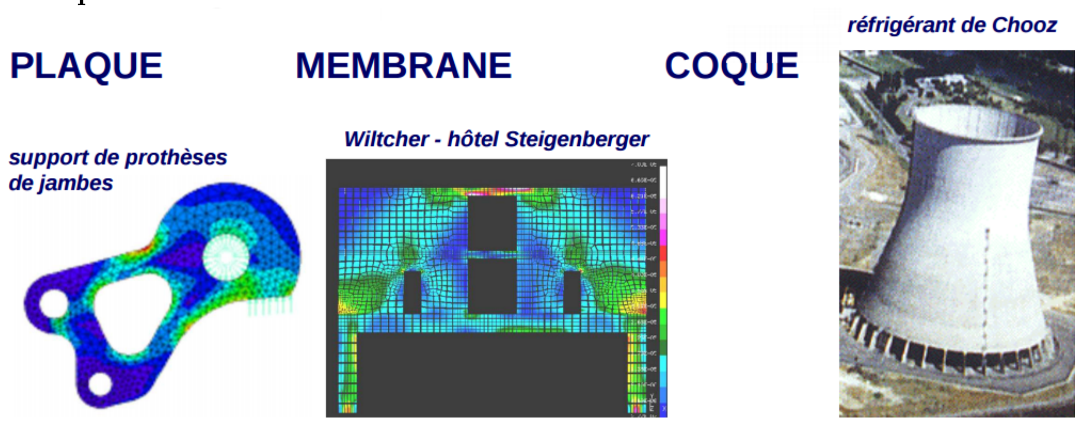


Figure 1.1 – Exemples

- *Poutres, arcs* (minces ou épais), *barres et câbles*
  Si la structure est **rectiligne** :
  — Si les efforts sont uniquement selon l'axe : **barre** ; si l'on a un effort *normal*, de *flexion* et de *cisaillement*
  — Si les efforts sont uniquement hors axe : **poutre** ; si l'on a un effort de *compression* et de *traction*
  — **cable** ; si l'on a un effort uniquement dans l'axe sans résistance à la compression ; *traction*
  Si la structure est **courbe** :
  — **Arc** : *flexion + tension + cisaillement*

Figure 1.2 – Exemples

1.2 Principe de Barré de Saint-Venant

Si l'on considère une section **éloignée** des points d'application des forces, les contraintes ne sont fonction que de la résultante et du moment résultant du systèmes de ces forces.
La conséquence - que l'on appliquera toujours - est la suivante :

A retenir *:* Si on ne s'intéresse pas à la zone proche [a] des forces, on peut remplacer celles-ci par leur résultante et leurs moments résultants

a. A moins de deux fois la plus grande dimension transversale.

Chapitre 2

Titre A Donner

2.1 Appuis et liaisons

2.1.1 Appuis usuels

Les trois appuis usuels sont ceux découverts au cours de *Mécanique rationnelle I*, à savoir l'appui à dilatation (rouleau), l'articulation et l'encastrement.

Appuie à dilatation : rouleau

Le *rouleau* permet le déplacement dans une direction ainsi que la rotation. Ce genre d'appui est fréquent sous les ponts, souvent de chemins de fer. En 2D, il possède une unique réaction de liaison, les deux autres "mouvements" étant libres.

Articulation

L'*articulation* permet la rotation mais sans déplacement. Il possède deux réactions de liaisons, bloquant le déplacement.

Encastrement

L'*encastrement* ne permet ni le déplacement, ni la liaison. En bref, plus rien ne bouge : il possède dès lors trois réactions de liaisons associée. Une éolienne plantée est un bel encastrement.

2.1.2 Appui déformable et élastique

Appui déformable

Par définition, il s'agit d'un appui subissant un déplacement **dépendant** de la valeur de la réaction de liaison reprise.
Plus francisé, il s'agit d'un appui qui tolère un déplacement et ce dernier dépend de l'appui. La force d'Archimède est le plus bel exemple.

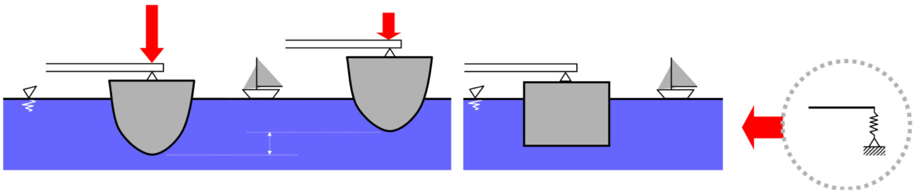
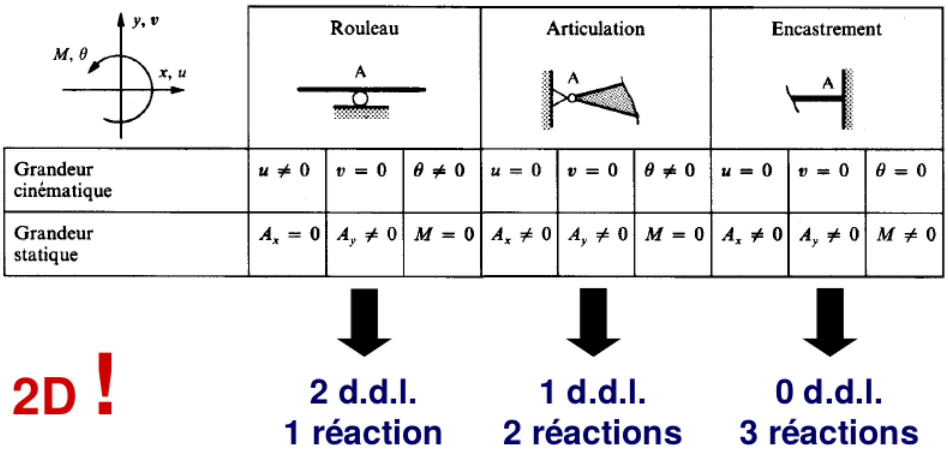


FIGURE 2.1 – Appui déformable (gauche) et élastique (droite)

Appuie élastique

Par définition, si le déplacement est **proportionnel** à la réaction de liaison l'appui est dit élastique. On représente ce bo-goss d'appui par un ressort.

De par ces deux définition, en en déduit que tout appui élastique est forcément déformable, mais pas l'inverse !
Pour bien finir la section, voici un petit tableau récapitulatif (en 2D !) :



	Rouleau			Articulation			Encastrement		
Grandeur cinématique	$u \neq 0$	$v = 0$	$\theta \neq 0$	$u = 0$	$v = 0$	$\theta \neq 0$	$u = 0$	$v = 0$	$\theta = 0$
Grandeur statique	$A_x = 0$	$A_y \neq 0$	$M = 0$	$A_x \neq 0$	$A_y \neq 0$	$M = 0$	$A_x \neq 0$	$A_y \neq 0$	$M \neq 0$

FIGURE 2.2

Un degré de liberté (d.d.l.) n'est rien d'autre qu'une composante de déplacement de libre.

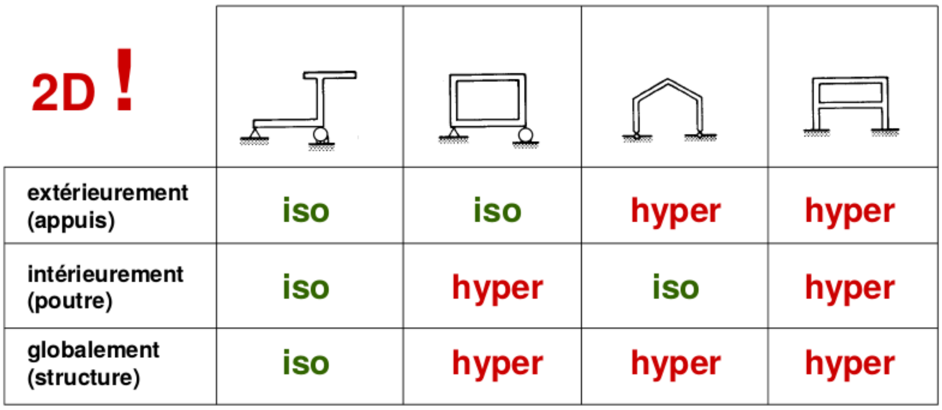
2.2 Isostaticité - Hyperstaticité

Avant toute chose, reprenons les deux définitions :

isostatique : le problème peut être résolu avec les seules équations d'équilibre.

hyperstatique : il y a plus d'inconnues que d'équations d'équilibre.

Voici un petit tableau pleins d'exemples de nos deux définitions :



2D !				
extérieurement (appuis)	iso	iso	hyper	hyper
intérieurement (poutre)	iso	hyper	iso	hyper
globalement (structure)	iso	hyper	hyper	hyper

FIGURE 2.3

2.3 Théorie des poutres

2.3.1 La poutre : géométrie

La définition d'une poutre c'est le volume engendré par une surface plane A dont le centre O se déplace le long d'une courbe en restant perpendiculaire à celle-ci. La figure A peut varier mais seulement de façon lente et ses dimensions sont petites comparée à la longueur de la poutre.

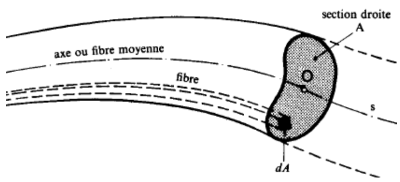


FIGURE 2.4

2.3.2 Rappel : notion de contrainte

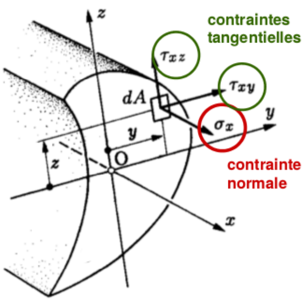


FIGURE 2.5

Considérons un volume quelconque que je coupe afin de regarder un élément de surface dA de normale $\vec{n}$. A cause de cette coupe, il apparaît par conservation une force $d\vec{F}$. Or, comme $dA \to 0$, on retrouve bien le vecteur contrainte $\vec{T}^{(n)}$ associé à la normale $\vec{n}$ possédant une composante normale σ et une composante tangentielle τ.

$$\vec{T}^{(n)} = \lim_{dA\to 0} \frac{d\vec{F}^{(n)}}{dA} \qquad \Longrightarrow \qquad T_i^{(n)} = \tau_{ij} n_j \tag{2.1}$$

où τ_{ij} est le tenseur des contraintes.
La composante tangentielle τ peut être décomposée selon les axes x et y : τ_{xy} et τ_{xz}.

2.3.3 Poutre : efforts internes (éléments de réduction)

Comme nous le verrons, les couples et résultantes nous permettrons de "résumer" toutes nos forces/couples en un(e) seul(e) : calculons premièrement nos résultantes :

$$\begin{aligned}
&\text{Résultante selon } x : && R_x = \int_A \sigma_x \, dA && \Rightarrow N; && \text{Effort normal} \\
&\text{Résultante selon } y : && R_y = \int_A \tau_{xy} \, dA && \Rightarrow T_y; && \text{Effort tranchant} \\
&\text{Résultante selon } y : && R_z = \int_A \tau_{zy} \, dA && \Rightarrow T_z; && \text{Effort tranchant}
\end{aligned} \tag{2.2}$$

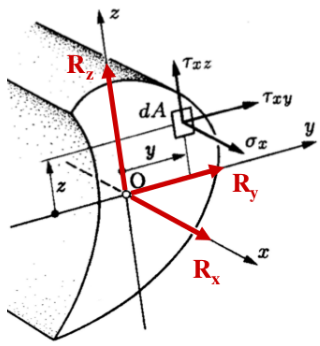


FIGURE 2.6

Néanmoins, nous avons coupé notre volume en deux, comment savoir si j'ai pris la partie gauche ou droite ? On se débarrasse de cette ambiguïté en définissant la convention de signe (pour la 2D) présentée sur le schéma ci-contre.

Pour le moment résultant, l'idée est la même et il existe également une convention de signe si l'on est en 2D (semblable à celle pour les résultantes mais avec des couples.

$$\vec{C} = \int_A \begin{vmatrix} \vec{1_x} & \vec{1_y} & \vec{1_z} \\ 0 & y & z \\ \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \end{vmatrix} dA \tag{2.3}$$

Ceci nous donne trois moments résultants :

$$\begin{array}{lll}
\text{Moment résultant selon } x : & C_x = \int_A (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z)\, dA & \Rightarrow M_x ; \text{Moment de torsion} \\
\text{Moment résultant selon } y : & C_x = \int_A \sigma_x z \, dA & \Rightarrow M_y ; \text{Moment fléchissant} \\
\text{Moment résultant selon } z : & C_x = -\int_A \sigma_x y \, dA & \Rightarrow M_z ; \text{Moment fléchissant}
\end{array} \tag{2.4}$$

2.4 Représentations

2.4.1 Conventions de signes des efforts internes en 2D (éléments de réductions)

En 3D on va travailler avec les axes x, y et z. Pour se faciliter la tâche, en 2D, on travaille avec M, N et T ainsi que des conventions de signes particulières. Il s'agit des fameux éléments de réductions :

M	: moment fléchissant (M_y ou M_z) ;	Positif si les fibres tendues sont "en dessous"
N	: effort normal ;	Positif si l'on est en traction
T	: effort tranchant [1] (T_y où T_z) ;	Positif si la partie de droite descend

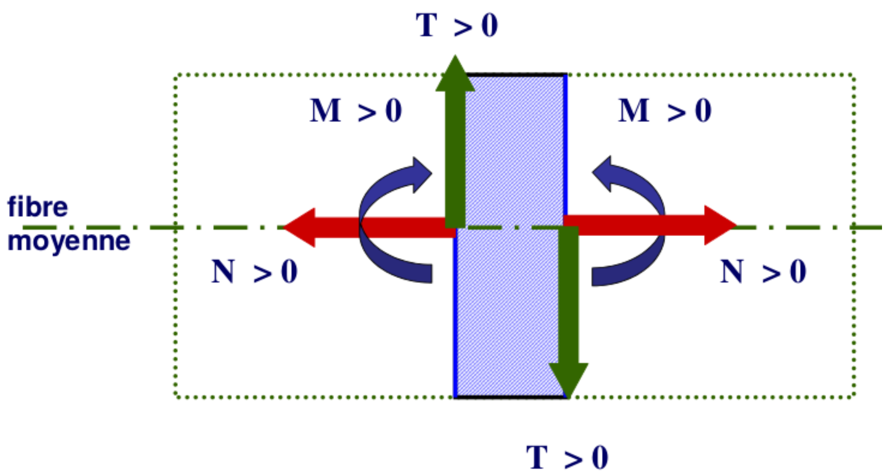


FIGURE 2.7

Imaginons que je plie une latte en U. La partie supérieure (le creux du U) va se mettre en compression et celle du dessous en traction.

⚠Dans ce cours, le **signe** est aussi important que la valeur numérique !

2.4.2 Conventions de représentation des diagrammes M, N, T en 2D

Il faut suivre une règle pratique : les valeurs positives du moment fléchissant M (c'est-à-dire si les fibres sont tendues) sont portées **vers le bas** : le diagramme M est donc forcément porté du côté des fibres tendues, pas besoin de préciser d'autres conventions. Pour uniformiser le tout, on dessine les autres diagrammes avec des valeurs positives vers le bas. Histoire d'être sur, on rajoute dans les diagramme un plus ou un moins, indiquant le signe de la résultante. Il existe d'autres moyen d'indiquer le signe : voir TP et slides 29-30.

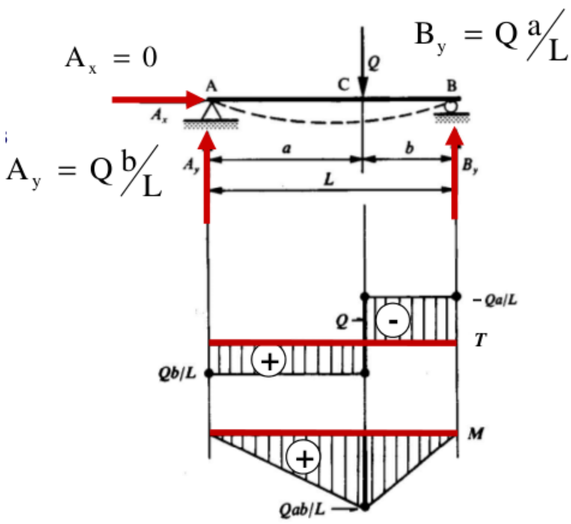


FIGURE 2.8

La grande question est de savoir qu'est ce qu'on appelle "haut" et "bas". Par **convention**, on le définit de la façon suivante (et même un exemple en prime, à droite) :

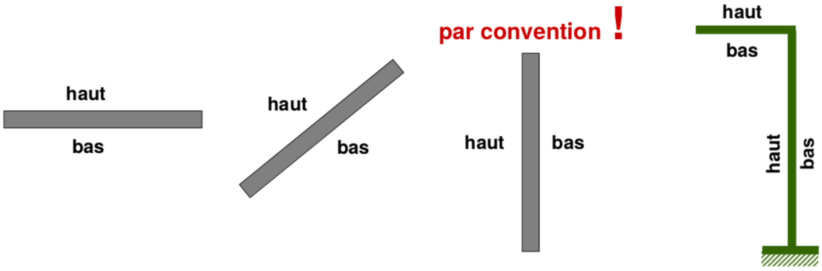


FIGURE 2.9

Résumons brièvement ce que nous venons de définir :

- Les conventions pour M, N, T ne nécessite pas l'utilisation de système d'axe, ni même de préciser si l'on travaille avec la partie "gauche" ou "droite".
- Ces conventions sont liées au comportement structural.
- Ces conventions ne sont pas cruciales, l'important est dans l'interprétation du diagramme pour la compréhension du comportement structural.

N	T_y	T_z	M_x	M_y	M_z	
●	0	0	0	0	0	**traction simple**
0	0	0	0	0	●	**flexion pure**
0	●	0	0	0	●	**flexion simple**
●	●	0	0	0	●	**flexion composée**
0	●	●	0	●	●	**flexion oblique**
0	0	0	●	0	0	**torsion** (autre condition sur l'axe x ...)

FIGURE 2.10

Il existe évidemment plein de conventions, mais celles-ci sont les plus couramment utilisées. Elles nous permettront de traiter tous les cas figurant dans le tableau ci-contre (l'objet des prochains chapitres).

2.5 Revenons à notre poutre

2.5.1 Poutre rectiligne en 2D : relation $T \leftrightarrow q(x)$

On cherche à lier notre effort tranchant T à une charge répartie. Considérons un morceau de quelque chose et regardons ce qui agit dessus : un moment fléchissant ainsi qu'un effort tranchant. Si je considère l'équilibre de translation vertical :

$$-T + q(x)\ dx + (T + dT) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{dT}{dx} = -q(x) \tag{2.5}$$

Cette précieuse relation nous informe que si nous avons un tronçons sur laquelle je n'ai pas de charge répartie, $dT/dx = 0$ impliquant que l'effort tranchant est constant. Ceci est vrai en 3D, pour autant que l'on considère des axes cohérents.
⚠Retenir que l'effort tranchant est proportionnel à la charge et ensuite regarder sur le dessin pour le signe.

2.5.2 Poutre rectiligne en 2D : relation $M \leftrightarrow T$

Cette fois-ci, je vais écrire l'équilibre de rotation autour du point C. Le choix de ce point est arbitraire, mais C permet de se débarrasser du $T + dT$. Nous avons donc

$$M + T\ dx - q(x)\ dx\frac{dx}{2} - (M + dM) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{dM}{dx} = T \tag{2.6}$$

En effet, les M s'annulent et le produit de dx tend plus rapidement vers 0 que le reste. Ceci à pour conséquence que le moment fléchissant est **extrémum** si T est nul. Il s'agit bien évidemment d'une relation linéaire et les conditions pour passer en 3D sont les mêmes.

2.5.3 Conséquences pour les diagrammes M et T en 2D

Si il n'y a pas de charge répartie ($q(x) = 0$), l'effort tranchant T est constant et le moment fléchissant M varie linéairement (degré 1). Si par contre il y a réparation de charge uniforme ($q(x) = cste$), T varie linéairement et M quadratiquement.

Si la charge est concentrée (P), l'effort tranchant sera discontinu et la dérivée du moment fléchissant le sera également (la pente de M sera discontinue) :

$$T_{gauche} - T_{droite} = P \tag{2.7}$$

Cette discontinuité est bien celle que nous avions observée pour T sur la Figure 2.8.