

UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES

SYNTHÈSE

---

[SYNTHESE EN RÉÉCRITURE]

**Électricité appliquées  
ELEC-H-3001**

---

*Auteur :*  
Nicolas ENGLEBERT

*Professeur :*  
Jean-Claude MAUN

Année 2015 - 2016

# Appel à contribution

## Synthèse Open Source



Ce document est grandement inspiré de l'excellent cours donné par Jean-Claude Maun à l'EPB (École Polytechnique de Bruxelles), faculté de l'ULB (Université Libre de Bruxelles). Il est écrit par les auteurs susnommés avec l'aide de tous les autres étudiants et votre aide est la bienvenue! En effet, il y a toujours moyen de

l'améliorer surtout que si le cours change, la synthèse doit être changée en conséquence. On peut retrouver le code source à l'adresse suivante

<https://github.com/nenglebert/Syntheses>

Pour contribuer à cette synthèse, il vous suffira de créer un compte sur *Github.com*. De légères modifications (petites coquilles, orthographe, ...) peuvent directement être faites sur le site! Vous avez vu une petite faute? Si oui, la corriger de cette façon ne prendra que quelques secondes, une bonne raison de le faire!

Pour de plus longues modifications, il est intéressant de disposer des fichiers : il vous faudra pour cela installer  $\text{\LaTeX}$ , mais aussi *git*. Si cela pose problème, nous sommes évidemment ouverts à des contributeurs envoyant leur changement par mail ou n'importe quel autre moyen.

Le lien donné ci-dessus contient aussi le README contient de plus amples informations, vous êtes invités à le lire si vous voulez faire avancer ce projet!

## Licence Creative Commons

Le contenu de ce document est sous la licence Creative Commons : *Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International (CC BY-NC-SA 4.0)*. Celle-ci vous autorise à l'exploiter pleinement, compte- tenu de trois choses :



1. *Attribution* ; si vous utilisez/modifiez ce document vous devez signaler le(s) nom(s) de(s) auteur(s).
2. *Non Commercial* ; interdiction de tirer un profit commercial de l'œuvre sans autorisation de l'auteur
3. *Share alike* ; partage de l'œuvre, avec obligation de rediffuser selon la même licence ou une licence similaire

Si vous voulez en savoir plus sur cette licence :

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

**Merci !**

# Chapitre 1

## Le triphasé

### 1.1 Notations - Conventions

#### 1.1.1 Conventions

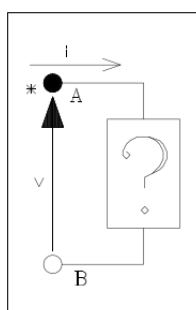


FIGURE 1.1

On utilisera la convention *récepteur* : la puissance est positive lorsqu'elle est absorbée par la machine. Pour une source de tension  $v$ , c'est le contraire : le courant, défini par les charges positives, sera dans le sens de la flèche.

L'astérisque ou un cercle plein marque la borne d'entrée d'un dipôle.

Dernière convention : la flèche de tension désigne la borne à laquelle il faut appliquer une tension positive pour faire circuler un courant positif.

#### 1.1.2 Notations

$a = a(t)$	: valeur instantanée
$\underline{a}(t)$	: valeur instantanée complexe ; vecteur tournant dont la projection sur un axe de référence fournit la valeur instantanée d'une grandeur sinusoïdale de pulsation $\omega$ ; $a(t) = \Re(\underline{a}(t))$
$\underline{A} = A\angle\alpha$	: nombre complexe de module $A$ et d'argument $\alpha$ .
$A_M$	: valeur de crête ou maximale dans le temps : $A_M = a\sqrt{2}$
$\overline{A}$	: vecteur spatial de module $A$
$A^M$	: valeur maximale d'une grandeur variant dans l'espace
$i_{ab}$	: courant circulant de $A$ vers $B$ ( $A \rightarrow B$ )
$v_{ba} = v_a - v_b$	: potentiel de $A$ par rapport à $B$ ( $B \rightarrow A$ )

### 1.2 Rappel de quelques notions relatives aux courants alternatifs

#### 1.2.1 Représentation des fonctions sinusoïdale du temps

Une telle grandeur, de pulsation  $\omega$  est représentée par :

$$\begin{aligned} v &= V_M \cos(\omega t + \xi_v) && \text{où } V_M \text{ est la valeur de crête} \\ &= V\sqrt{2} \cos(\omega t + \xi_v) && \text{où } V \text{ est la valeur efficace} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Ceci peut s'écrire

$$\begin{aligned} v &= \Re(V\sqrt{2}\cos(\omega t + \xi_v) + jV\sqrt{2}\sin(\omega t + \xi_v)) \\ &= \Re(V\sqrt{2}e^{j(\omega t + \xi_v)}) \end{aligned} \quad (1.2)$$

La **valeur instantannée complexe**  $\underline{v}$  est définie par

$$\begin{aligned} \underline{v} &= V\sqrt{2}e^{j(\omega t + \xi_v)} \\ &= V e^{j\xi_v} \sqrt{2}e^{j\omega t} \end{aligned} \quad (1.3)$$

où le **phaseur**  $\underline{V}$  est

$$\underline{V} = V e^{j\xi_v} \quad (1.4)$$

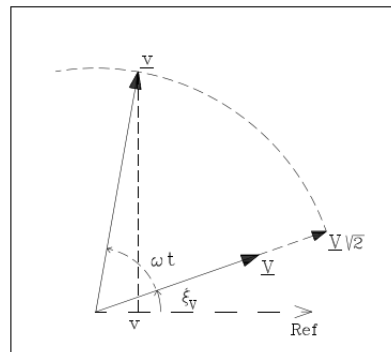


FIGURE 1.2

Dans le plan de Gauss  $\underline{V}$  a un module valant la valeur efficace de la grandeur et un argument valant  $\xi_V$ , c'est un vecteur FIXE. La valeur instantannée complexe  $\underline{v}$  a un module  $V\sqrt{2}$  et est décalée de  $\omega t$  par rapport à  $\underline{V}$  : c'est un vecteur TOURNANT (à vitesse  $\omega$ ). On obtient la valeur instantannée en projetant la valeur instantannée complexe sur l'axe réel :  $v = \Re(\underline{v})$ .

Pour une même pulsation, les déphasages entre grandeurs de nature différente sont constants : on définit l'**angle de charge**  $\varphi$  comme argument de la tension par rapport à un courant  $\underline{I}$  pris comme référence.

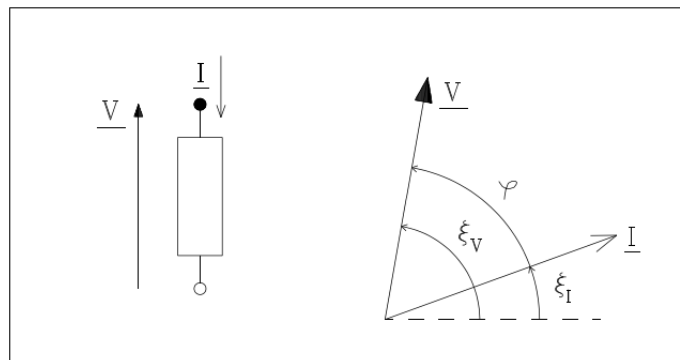


FIGURE 1.3

Si l'on applique la tension  $\underline{V} = V\angle\xi_V$  à une impédance  $\underline{Z} = R + jX = Z\angle\xi$ , le courant vaut

$$\underline{I} = \frac{\underline{V}}{\underline{Z}} = \frac{V}{Z} \angle \xi_V - \xi \quad (1.5)$$

On remarque avec l'argument du courant qu'une impédance inductive ( $X > 0, \xi > 0$ ) déphase le courant en arrière par rapport à la tension ( $\xi_I < \xi_V$ ) et l'inverse pour une impédance capacitive.

## 1.2.2 Représentation de la puissance

### Puissance active

Cherchons à calculer la puissance de  $A$  vers  $B$  au point  $X$ . Nous avons  $v = V_M \cos(\omega t + \xi_V)$  et  $i = I_M \cos(\omega t + \xi_I)$ . La valeur instantanée de la puissance vaut :

$$\begin{aligned}
 p &= v i \\
 &= V_M I_M \cos(\omega t + \xi_V) \cos(\omega t + \xi_I) \\
 &= \frac{V_M I_M}{2} (\cos(\xi_V - \xi_I) + \cos(2\omega t + \xi_V + \xi_I)) \\
 &= \underbrace{VI \cos \varphi}_1 + \underbrace{VI \cos(2\omega t + \xi_V + \xi_I)}_2
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

Cette expression contient deux termes :

1. La puissance active, c'est la valeur moyenne de  $p$ .
2. Un terme de moyenne nulle sur un nombre entier de périodes pouvant causer des vibrations indésirables.

La **puissance utile** est celle correspondant à un travail effectué, donc la puissance active :

$$P = VI \cos \varphi \tag{1.7}$$

### Puissance apparente

Par définition (attention à  $I^*$  qui est le complexe conjugué)

$$\begin{aligned}
 \underline{S} &\equiv \underline{VI}^* \\
 &= VI \angle \xi_V - \xi_I \\
 &= VI \angle \varphi
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

Si la tension est constante, la puissance apparente est proportionnelle au courant.

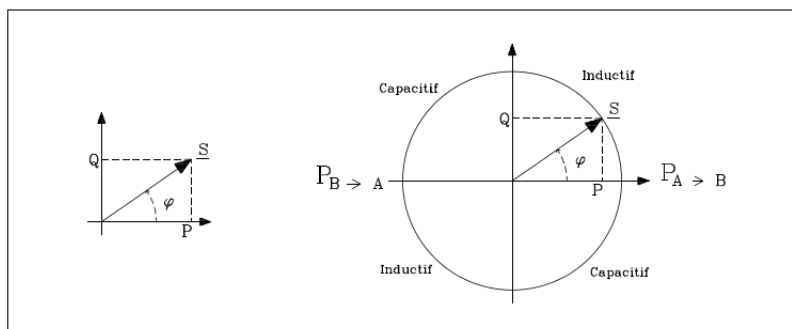


FIGURE 1.4

### Puissance réactive

Dans l'expression,  $P = VI \cos \varphi = \Re(\underline{S})$ . On définit alors la **puissance réactive** :

$$Q = VI \sin \varphi = \Im(\underline{S}) \tag{1.9}$$

tel que  $\underline{S} = P + jQ$ .

Si  $P > 0, Q > 0$  si  $\varphi > 0$  c'est à dire que la charge est inductive.

Si  $P > 0, Q < 0$  si  $\varphi < 0$  c'est à dire que la charge est capacitive.

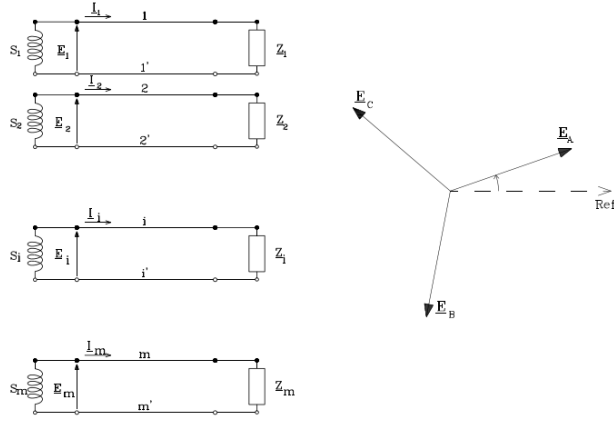
La puissance réactive ne correspond à aucun travail effectif et est une notion difficile à saisir. Retenons juste que sa circulation amène des pertes et des chutes de tension. Cette puissance n'apparaît que si la charge est réactive, c'est-à-dire peut stocker de l'énergie. Pour une image plus intuitive, reprenons l'expression (1.6) et jouons avec

$$\begin{aligned}
 p &= \frac{V_M I_M}{2} (\cos(\xi_V - \xi_I) + \cos(2\omega t + \xi_V + \xi_I)) \\
 &= VI(\cos \varphi + \cos(2\omega t + 2\xi_V - \phi)) \\
 &= VI(\cos \varphi + \cos \varphi \cos(2\omega t + 2\xi_V) + \sin \varphi \sin(2\omega t + 2\xi_V)) \\
 &= P(1 + \cos(2\omega t + 2\xi_V)) + Q \sin(2\omega t + 2\xi_V)
 \end{aligned} \tag{1.10}$$

On voit que le terme qui affecte **P** est toujours positif. Son produit avec **P** représente la puissance qui s'écoule toujours dans le même sens. Alors que le terme qui affecte **Q** est alternative. Son produit avec **Q** représente la puissance alternativement échangée dans les deux sens entre la source et la charge.

## 1.3 Caractéristiques d'un système polyphasé

### 1.3.1 Modes de couplage des circuits polyphasés



Soit  $m$  sources électrique indépendantes  $S_1, S_2, \dots, S_m$  dont les tensions ont la même valeur efficace et sont déphasées de  $2\pi/m$  : système  $m$ -phasé équilibré d'ordre direct :

$$\underline{E}_i = E_1 \angle - (i - 1) \frac{2\pi}{m} \quad (1.11)$$

CONVENTION : la phase 2 est située en arrière de la phase 1 et ainsi de suite (en arrière dans le temps).

FIGURE 1.5

Ci-dessus, un schéma de principe pour un tel système. Chacun des enroulements d'induit est raccordé par deux fils, il faudrait donc  $2m$  conducteurs. Il existe deux moyens d'économiser le métal conducteur :

#### a. Couplage en étoile avec fil neutre

L'idée est d'utiliser un conducteur de retour commun à tous les circuits en réunissant les extrémités. On appelle  $O$ , le fil neutre parcouru par la somme des courants débités par toutes les sources. Nécessitant  $m + 1$  fil de ligne, il s'agit du couplage *étoilé avec fil neutre*.

La **tension simple** (ou de **phase**) d'un conducteur est la différence de potentiel entre le conducteur et le neutre. Par exemple :  $\underline{V}_1 = \underline{V}_1 - \underline{V}_0$ . La **tension composée** (ou **entre phases**) est la différence de potentiel entre deux conducteurs. Par exemple :  $\underline{U}_{12} = \underline{V}_2 - \underline{V}_1$ .

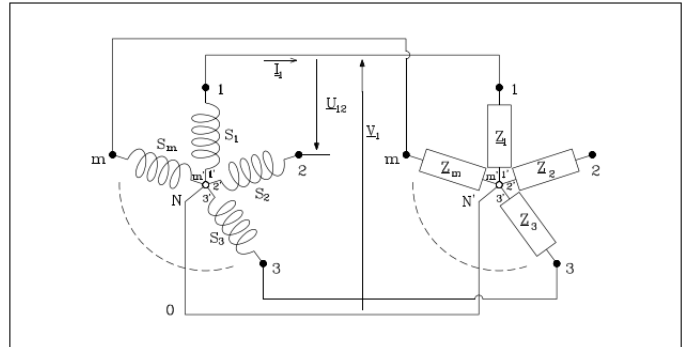


FIGURE 1.6

#### b. Couplage en étoile sans fil neutre

Si toutes les impédances sont identiques, le circuit est équilibré et la somme des courants de ligne est nulle (voir le montage comme des phaseurs de courant en étoile) :  $\sum_{i=1}^m i_i = 0$ . Comme le neutre n'est plus parcouru, on peut le supprimer. Le point  $N'$ , neutre, possède le même potentiel que le point  $N$  par symétrie :  $N$  est un point neutre artificiel. Cette installation comporte  $m$  fils.

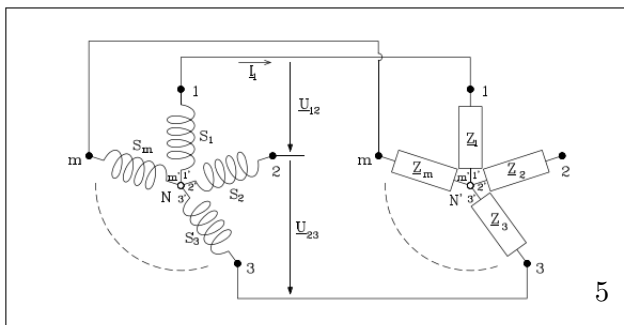


FIGURE 1.7

Spoil : si les charges sont déséquilibrées on peut conserver ce montage mais la tension de  $N' \neq N$ . Cherchons maintenant les relations liant tension et phase.

Soit  $\underline{V}_1, \underline{V}_2$  les tensions mesurées entre neutre de phase consécutives 1 et 2. Par

symétries, elle sont égales en tension efficace mais déphasées de  $2\pi/m$  radians. Si  $\underline{V}_1$  est la référence :

$$\begin{aligned}\underline{V}_1 &= V \angle 0 \\ \underline{V}_2 &= V \angle -\frac{2\pi}{m}\end{aligned}\quad (1.12)$$

Le phaseur de la tension mesurée entre les phases 1 et 2 s'écrit

$$\underline{U}_{12} = \underline{V}_2 - \underline{V}_1 \quad (1.13)$$

On voit que <sup>1</sup>

$$\begin{aligned}U_{12} &= 2V_1 \sin \frac{\pi}{m} \\ \underline{U}_{12} &= 2\underline{V}_1 \sin \frac{\pi}{m} e^{-j(\frac{\pi}{m} + \frac{\pi}{2})}\end{aligned}\quad (1.14)$$

La puissance transportée par une ligne équilibrée vaudra alors

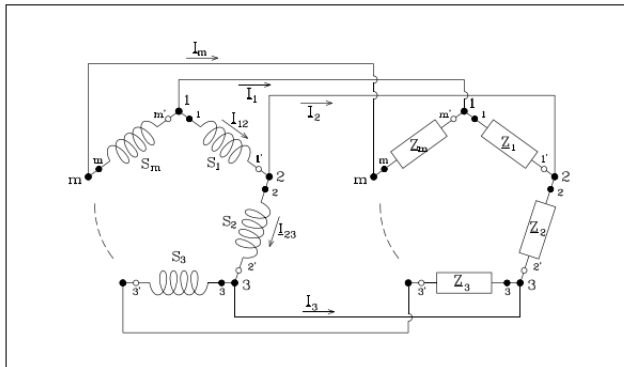
$$P = \Re(m\underline{V}_1 \underline{I}_1^*) = mV_1 I_1 \cos \varphi \quad (1.15)$$

Si le point neutre n'est pas accessible, la seule tension mesurable est  $U_{12}$ . En remplaçant dans  $P$ , la valeur  $V_1$  tirée de  $U_{12}$  :

$$P = \frac{m}{2 \sin \frac{\pi}{m}} U_{12} I_1 \cos \varphi \quad (1.16)$$

**Attention :**  $\varphi$  est le déphasage entre tension **simple** et courant et rien d'autre !

### c. Couplage en polygone



On peut connecter la sortie de chacune des phases du générateur à l'entrée de la phase contiguë et de même pour le récepteur. La somme des f.e.m. alternatives équilibrées engendrées dans les phases du générateurs étant nulles, on peut les connecter pour former un **polygone fermé** (le courant ne circulera pas). On aura pour ça besoin de  $m$  conducteurs distincts.

FIGURE 1.8

Soit  $\underline{I}_{12}$  et  $\underline{I}_{23}$  les courants qui circulent dans deux phases consécutives du générateur et  $\underline{I}_2$ , le courant traversant la ligne commune. Par Kirchoff :

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_{12} - \underline{I}_{23} \quad (1.17)$$

Or  $\underline{I}_{12}$  et  $\underline{I}_{23}$  sont égaux en grandeur et entre eux se trouve un angle de  $2\pi/m$ . Par les relations vectorielles :

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_{12} \sin \frac{\pi}{m} e^{-j(\frac{\pi}{m} - \frac{\pi}{2})} \quad (1.18)$$

Les tensions entre phases  $U_{12}, \dots$  sont bien sûr égales entre elles, ainsi que les tensions simples  $V_1, \dots$

1. D'abord, se souvenir que  $\sin = \text{opposé/hypoténuse}$ . Ensuite, pour l'exponentielle, retrouver l'angle formé entre  $V_1$  et  $U_{12}$  en se souvenant que la somme des angles dans un triangle vaut  $180^\circ$ .



#### d. Puissance électrique transportée par une ligne

Cette puissance s'exprime par

$$P = \Re(m \underline{U}_{12} I_{12}^*) = m U_{12} I_{12} \cos \varphi = \frac{m}{2 \sin \frac{\pi}{m}} U_{12} I_1 \cos \varphi \quad (1.19)$$

La puissance transmise est bien indépendante du mode de couplage du générateur / récepteur.

#### 1.3.2 Cas particulier de couplage : le système triphasé

Les trois tensions seront égales, mais décalées de  $2\pi/3$ . On pourra les exprimer :

$$\begin{aligned} e_A &= E\sqrt{2} \cos(\omega t + \xi_V) \\ e_B &= E\sqrt{2} \cos(\omega t + \xi_V - \frac{2\pi}{3}) \\ e_C &= E\sqrt{2} \cos(\omega t + \xi_V + \frac{2\pi}{3}) \end{aligned} \quad (1.20)$$

Soit  $\underline{E}_A = E \angle \xi_v$ , définissons l'opérateur de déphasage  $\underline{\alpha} = \angle \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$  tel que  $\underline{E}_B = \underline{\alpha}^2 \underline{E}_A$  et  $\underline{E}_C = \underline{\alpha} \underline{E}_A$ .

Des relations intéressantes sont reprises en (1.3-19). Notons juste que la somme des courants est bien nulle :  $1 + \underline{\alpha} + \underline{\alpha}^2 = 0$ .

#### Couplage en étoile

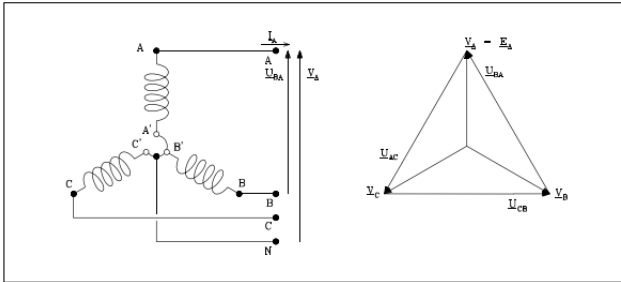


FIGURE 1.9

On peut relier  $A', B', C'$  en un point neutre  $N$  et  $A, B, C$  sont les sorties de l'alternateur raccordées aux fils de lignes. Les tensions sont égales aux f.e.m. engendrées et sont dès lors également un système triphasé équilibré. Pour les tensions composées, on les obtient par composition vectorielle :

$$\begin{aligned} \underline{U}_{BA} &= \underline{V}_A - \underline{V}_B = \underline{V}_A(1 - \underline{\alpha}^2) = \underline{V}_A \sqrt{3} \angle \frac{\pi}{6} \\ \underline{U}_{CB} &= \underline{V}_B - \underline{V}_C = \underline{V}_A(\underline{\alpha}^2 - \underline{\alpha}) = \underline{V}_A \sqrt{3} \angle -\frac{\pi}{2} \\ \underline{U}_{AC} &= \underline{V}_C - \underline{V}_A = \underline{V}_A(\underline{\alpha} - 1) = \underline{V}_A \sqrt{3} \angle \frac{5\pi}{6} \end{aligned} \quad (1.21)$$

$\Rightarrow U = V\sqrt{3}$ . La puissance est donnée par  $P = 3VI \cos \varphi$ .

#### Couplage en triangle

La borne  $C'$  de la phase  $C$  est reliée à la borne  $A$  de la phase  $A$  de la ligne :

$$\underline{U}_{BA} = \underline{E}_A, \quad \underline{U}_{CB} = \underline{E}_B, \quad \underline{U}_{AC} = \underline{E}_C. \quad (1.22)$$

Le centre de gravité du triangle des tensions peut représenter le potentiel d'un neutre fictif  $N$  pour définir un système de tension simple. Pour les résultats, voir page 1.23.

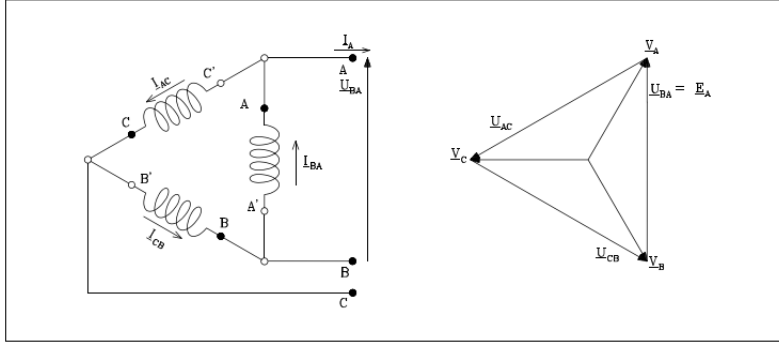


FIGURE 1.10

### 1.3.3 Influence des harmoniques dans les circuits polyphasés

Les tensions ne sont pas toujours sinusoïdales. On peut décomposer une courbe périodique par une somme de sinusoïdes. Ici, les fonctions du temps présentent deux alternances identiques, c'est-à-dire superposables par retournement :

$$f\left(t + \frac{T}{2}\right) = -f(t) \quad (1.23)$$

Une fonction qui satisfait ceci n'a que des coefficients de Fourier impairs dans son développement. Intéressons-nous au cas du triphasé.

Soit la f.e.m.  $e_A$  sous la forme d'une série de Fourier :

$$e_A = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \cos(i\omega t + \xi_i) \quad (1.24)$$

avec  $i$  impair. Les f.e.m. développées par les phases  $e_B$  et  $e_C$  s'obtiennent en remplaçant  $\omega t$  par  $\omega t - 2\pi/3$  et  $\omega t + 2\pi/3$ .

Cas du couplage triangle et étoile vu en cours ? Passé ici.

### 1.3.4 Mesure de la puissance dans les circuits polyphasés

#### Méthode des $m$ wattmètres - Circuit sans fil neutre

Soit un circuit polyphasé à  $m$  phases sans fil neutre disposé en étoile au neutre accessible. Pour mesurer la puissance, on introduit dans chaque ligne un wattmètre (connecté entre la phase et le neutre). La puissance totale est alors la somme des  $m$  mesures. Si le système est équilibré, tous les wattmètres indiqueront la même puissance. La puissance débitée vaut alors

$$p = \sum_{j=1}^m W_j = \sum_{j=1}^m (v_j - v_n) i_j = \sum_{j=1}^m v_j i_j - v_n \sum_{j=1}^m i_j \quad (1.25)$$

Si le neutre n'est pas connecté, la somme des courants est nulle et le potentiel de  $N$  peut être remplacé par celui d'un point quelconque. Les indications de chaque wattmètre seront modifiées, mais pas leur somme.

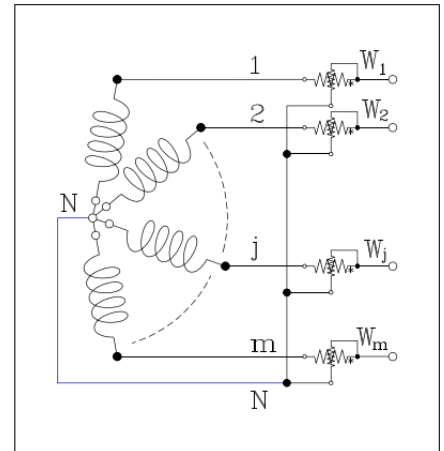


FIGURE 1.11

### Méthode des $m - 1$ wattmètres

Comme on peut choisir  $N'$  quelconque, portons le retour des wattmètres sur la  $m^{\text{ème}}$  phase. Le wattmètre  $m$  ne sert plus à rien car la tension à ses bornes est annulée : il ne faut plus que  $m - 1$  wattmètres.

### 1.3.5 Facteur de puissance

Il faut avant tout un équilibre des phases et dans ce cas, ce facteur n'est autre que  $\cos \varphi$  de l'un des circuit :

$$P_A = V_A I_A \cos \varphi \quad (1.26)$$

La puissance totale débitée vaut alors  $P = m P_A$ . Quand les phases sont équilibrés, on peut toujours écrire

$$P = \sum_1^m V_j I_j \cos \varphi_j \quad (1.27)$$

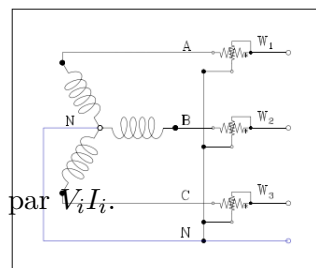
Comme  $\varphi_j$  peut être différent dans chacune des phases : on ne peut plus définir un  $\cos \varphi$  global mais un facteur de puissance :

$$FP = \frac{P}{S} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}} \quad (1.28)$$

Notons que  $\tan \varphi = \frac{Q}{P}$ .

### 1.3.6 Mesure de la puissance dans les circuits triphasés

#### a. Circuit triphasé étoile avec fil neutre



Soit un alternateur triphasé connecté en étoile avec un neutre  $N$  débitant sur un circuit triphasé étoile ou triangle. Quel que soit le déséquilibre, la puissance sera donnée par la somme des valeurs des trois wattmètres. Le facteur de puissance est alors le rapport entre la puissance totale mesurée et la puissance apparente donnée

FIGURE 1.12

#### b. Circuit triphasé sans fil neutre

Cette fois-ci on n'a pas de neutre. On peut utiliser la méthode des trois wattmètres : la borne d'entrée de chaque wattmètre est connectée à chacun des fils de lignes et toutes les bornes de sorties sont connectées ensemble de façon à former un point neutre artificiel  $N'$ . Si les wattmètres sont identiques, alors  $N' = N$ . Sinon, le potentiel de  $N'$  est quelconque mais la puissance totale est la somme de tous les wattmètres. Si le circuit est équilibré, une seule mesure est suffisante.

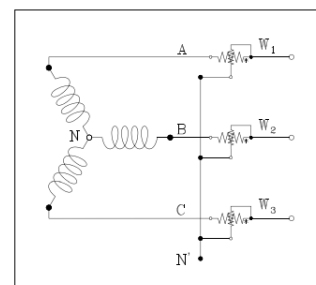


FIGURE 1.13

#### MÉTHODE DES DEUX WATTMÈTRES

On insère les wattmètres en  $A$  et  $B$  et leur sortie, commune en  $C$ .

Si le circuit est parfaitement équilibré d'ordre *direct*, la tension de la phase  $C$  retarde de  $2\pi/3$

sur celle de  $B$  qui elle même retarde de  $2\pi/3$  sur celle de  $A$ . On a alors

$$\begin{aligned}
 \underline{V}_A &= V \angle 0 \\
 \underline{V}_B &= V \angle -\frac{2\pi}{3} \\
 \underline{V}_C &= V \angle \frac{2\pi}{3} \\
 \underline{I}_A &= I \angle -\varphi \\
 \underline{I}_B &= I \angle -\varphi - \frac{2\pi}{3} \\
 \underline{I}_C &= I \angle -\varphi + \frac{2\pi}{3} \\
 \underline{U}_{CA} &= \underline{V}_A - \underline{V}_C = V\sqrt{3} \angle -\frac{\pi}{6} \\
 \underline{U}_{CB} &= \underline{V}_B - \underline{V}_C = V\sqrt{3} \angle -\frac{\pi}{2}
 \end{aligned} \tag{1.29}$$

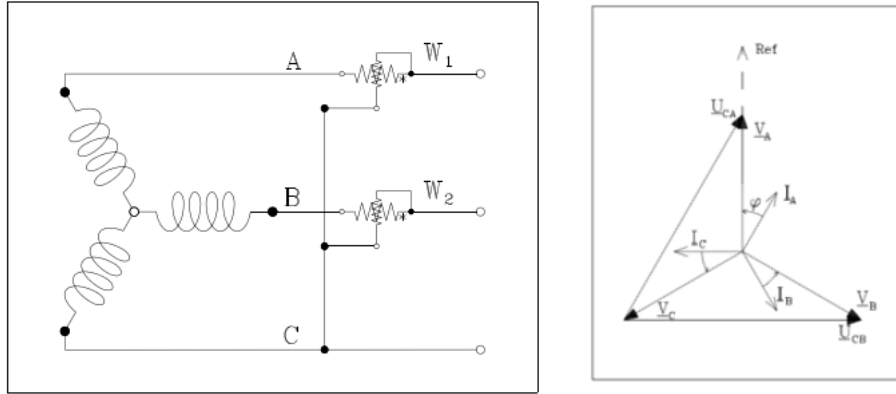


FIGURE 1.14

Les indications des deux wattmètres vaudront alors forcément

$$\begin{aligned}
 W_1 &= \Re(\underline{U}_{CA} \underline{I}_A^*) = UI \cos(-\frac{\pi}{6} + \varphi) \\
 W_2 &= \Re(\underline{U}_{CB} \underline{I}_B^*) = UI \cos(-\frac{\pi}{2} + \varphi + \frac{2\pi}{3}) \\
 &= UI \cos(\frac{\pi}{6} + \varphi)
 \end{aligned} \tag{1.30}$$

La puissance totale vaut évidemment

$$P = W_1 + W_2 = \sqrt{3}UI \cos \varphi \tag{1.31}$$

## Chapitre 2

# Les machines électriques - Généralités

### 2.1 Introduction

#### 2.1.1 Classification des machines électriques

Tout se base sur l'interaction des courants électriques et des champs magnétiques. On classe ces bêtes en trois catégories :

1. *Les machines génératrices.* Elles se basent sur l'induction d'un courant électrique dans un circuit conducteur par **déplacement relatif** de celui-ci et d'un champ magnétique. La dynamo et l'alternateur sont de ce type.
2. *Les moteurs électriques.* Ils sont basés sur l'obtention d'un effort mécanique sur un circuit traversé pour un courant extérieur (pouvant donner lieu à un champ magnétique). Nous pouvons parler ici du moteur à courant continu ou alternatif.
3. *Les machines transformatrices.* Leur rôle est de modifier la grandeur des courants et tensions alternatifs. Le transformateur est le grand classique.

#### 2.1.2 Intérêt des moteurs électriques

Ceux-ci ont pas mal d'avantages sur les moteurs thermiques : moins polluants, bruyants, démarrent seuls, facilité d'emploi, régularité du couple utile, possibilité de l'inversion du sens de rotation, fort couple vitesse à faible vitesse et même à l'arrêt, ... Le dernier point est très important car cela les affranchit, par exemple, de boîte à vitesses. En effet, les moteurs thermiques ne disposent pas de cette jouissante propriété et possèdent tout un dispositif mécanique à engrenages, dissipant de l'énergie.

#### 2.1.3 Le moteur asynchrone

C'est le moteur le plus utilisé. Il fonctionne directement en tension alternative. Celle-ci génère un courant circulant dans le stator constituant la seule source externe de champ magnétique, le rotor n'a pas à être relié à une source d'énergie. Cependant, il existe des courants rotorique mais ceux-ci sont **induits** : on parle parfois de **moteur d'induction**. Ce moteur équipe la quasi totalité des machines-outils classique (tours, fraiseuses, ...)

### 2.1.4 Le moteur synchrone

Afin de les utiliser, il faut d'abord les faire "roter" à leur vitesse nominale avant de les coupler au réseau, nécessitant un moteur auxiliaire. La seule différence avec le moteur asynchrone se situe dans la conception du rotor. Ce-dernier est constitué d'aimants (ou alimenté en courant continu). Après le démarrage, le moteur tourne en synchronisme avec le champ tournant. Ces moteurs ne dépendent donc que du réseau qui les alimente et sont ainsi utilisés lorsqu'une rotation uniforme est primordiale.<sup>1</sup>

### 2.1.5 Les moteurs à courant continu

Ils sont les champions dans les très faibles puissances (jouets, essuie-glaces. . .). Leur atout majeur est de posséder une remarquable capacité de variation de vitesse. Ils jouent un rôle important dans la traction électrique et sont utilisés en tant que moteurs "série".

### 2.1.6 Les autres types de machines électriques

#### LES MOTEURS UNIVERSELS

On les trouve dans les robots ménagers, ventilateurs, . . .C'est le moteur de la vie domestique. Leur vitesse chute rapidement lorsqu'un couple trop important leur est demandé.

#### LES MOTEURS PAS À PAS

Utilisés dans les dispositifs à positionnement précis et ont l'avantage d'être très simple à la conception.

### 2.1.7 Associations moteurs - électronique

Les moteurs à faible puissance, ou les synchrones auto-pilotés pour les fortes sont souvent associés à des équipement électroniques.

## 2.2 Méthodes d'étude des machines électriques

### 2.2.1 Généralités

Pour étudier les machines, deux méthodes s'offrent à nous :

1. *La méthode de Kirchhoff*. On écrit les équations des circuits, la conservation et l'énergie et on déduit le reste. Le dispositif décrit par les équations se présente comme une boîte noire s'incluant dans une chaîne de régulation. C'est l'optique de l' **automaticien**.
2. *La méthode de Maxwell*. On part des grandeurs physiques et on calcule le reste. C'est l'optique du **constructeur**.

Si l'on se base sur le critère de l'utilité pratique, en Belgique, il est plus intéressant de choisir la méthode de Kirchhoff. D'un point de vue formation, cette méthode est également plus "simple" (car systématique). La préférence va ainsi pour Kirchhoff, mais n'oublions pas pour autant la seconde !

---

1. Différence à plus expliciter plz

### 2.2.2 Choix du phénomène physique exploité

On peut concevoir des moteurs capacitifs (loi de Coulomb) ou inductif (Laplace). Quasi tous les moteurs sont de type inductif car la densité d'énergie potentielle magnétique ( $1/2B^2/\mu_0$ ) est 10,000 fois supérieure à la densité d'énergie potentielle électrique ( $1/2\epsilon_0E^2$ ).

Le dispositif magnétique le plus simple est l'électro-aimant dont la force est donnée par  $f_{em} = \frac{1}{2}I^2 \frac{dL(x)}{dx}$  où  $I$  est le courant parcourant le circuit.

## 2.3 Rappel des lois de l'électromagnétisme

### 2.3.1 Loi de la force magnétomotrice (f.m.m.)

Elle intervient dans le calcul des ampère-tours nécessaires pour magnétiser un circuit magnétique. Sous sa forme locale

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J}_t \quad (2.1)$$

où  $\vec{H}$  est le champ magnétique local et  $\vec{J}_t$  la densité de courant. On peut également exprimer cette loi

$$\mathcal{F} = \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum i \quad (2.2)$$

où  $\mathcal{F}$  est la force électromotrice le long d'un contour fermé embrassant un faisceau de conducteurs parcourus par des courants  $i$ .

### 2.3.2 Loi de Maxwell

Elle exprime la force électromotrice induite dans un **circuit**. Sous sa forme locale

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.3)$$

Sous sa forme intégrale

$$e = ri = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (2.4)$$

La f.e.m. induite  $e$  fait alors circuler un courant  $i$ . Un accroissement du flux fait ainsi circuler un courant négatif<sup>2</sup>. Si le circuit est fixe et l'induction variable on parle de f.e.m. **induite**. Si le circuit est mobile, on dira **engendrée**. Dans ce dernier cas, on écrit alors la loi sous la forme

$$de = -[\vec{B} \times \vec{v}] \cdot d\vec{l} \quad (2.5)$$

où  $\vec{v}$  est la vitesse relative par rapport à un champ d'induction  $\vec{B}$  d'un élément de longueur  $d\vec{l}$  du circuit électrique considéré.

EXEMPLE. Soit un conducteur linéaire de longueur  $l$  se déplaçant à vitesse constante  $\vec{v}$  dans un champ d'induction  $\vec{B}$ . Celle loi devient

$$e = -[\vec{B} \times \vec{v}] \cdot \vec{l} \quad (2.6)$$

Si le déplacement se fait normalement à son axe et à la direction du champ (en valeur absolue) :  $e = Blv$ .

### 2.3.3 Loi de Laplace

Elle donne l'expression de la force sur un conducteur parcouru par un courant plongé dans un champ d'induction  $\vec{B}$ .

---

2. Trigonométrie

## 2.4 Principes de fonctionnement des machines électriques

### 2.4.1 Éléments constitutifs des machines électriques

Quasi toutes contiennent un élément fixe dénommé **stator** et un organe mobile, le **rotor**, séparés par un entrefer. L'**inducteur** est l'organe destiné à créer le flux magnétique, ou par des aimants permanents ou par des courants électriques.

### 2.4.2 Machines hétéropolaires

#### Principes de fonctionnement

Hétéropolaire signifie que  $\vec{B}$  n'a pas le même signe partout dans l'entrefer. Considérons le dispositif suivant, constitué d'un stator métallique portant un circuit inducteur de  $N_S$  spires parcourues par un courant continu  $i_s$  et un rotor lisse composé de la spire 11' constituée de deux conducteurs diamétralement opposés. Les bornes 1 et 1' sont connectées à des disques conducteurs.

#### MÉTHODE DES CHAMPS

Considérons  $i_r = 0$ . On suppose le fer parfait, de perméabilité infinie impliquant que tous les ampère-tours se concentrent dans l'entrefer<sup>3</sup>. En considérant un contour fermé traversant l'entrefer

$$N_S i_S = 2H\delta(\beta) \quad (2.7)$$

où  $\delta(\beta)$  est la largeur de l'entrefer. On a donc

$$B(\beta) = \mu_0 H = \mu_0 \frac{N_S I_S}{2\delta(\beta)} \quad (2.8)$$

Si le rotor tourne à vitesse  $\Omega_r$  constante, il apparaît une f.e.m. aux bornes du conducteur valant

$$e_1 = Blv = B(\beta)lR\Omega_r \quad (2.9)$$

où  $R$  est le rayon du rotor. Comme  $e_{1'} = -e_1$ , on a

$$e_r = e_1 - e_{1'} = 2lRB(\beta)\Omega_r \quad (2.10)$$

On retrouvera cette relation pour tous les types de machines : la f.e.m. engendrée est  $\propto$  flux\*vitesse :  $e_r = c^{te} B(\Omega_r t)$  où  $e_r(t)$  est une fonction périodique qui reproduit dans le temps la répartition spatiale de l'induction.

Notons que pour éviter les problèmes de glissements, on peut échanger les emplacements de l'inducteur et de l'induit avec une structure à pôles lisses ou saillants.

#### MÉTHODE DES CIRCUITS

Vu en cours ?

#### Spire non diamétrale

Si 1' est décalé de  $\theta_1$  par rapport à 1" d'une spire diamétrale, la connexion d'extrémité est plus courte (bien) mais la tension à ses bornes est plus faible (bof).

---

3. En effet,  $H_{fer} = B/\mu$  où  $\mu = \infty$ . On peut donc négliger le champ dans le fer.



## Enroulement

D'un point de vue économique, il est préférable de considérer plusieurs spires. Soit 22', une spire décalée de  $\theta_1$  par rapport à 11' ; le phaseur à ses bornes est lui aussi déphasé de  $\theta_1$  :

$$\underline{E}_{2'2} = \underline{E}_{1'1} e^{j\theta_1} \quad (2.11)$$

**Attention !** On peut mettre ces deux spires en série, mais pas en parallèle<sup>4</sup>.

On peut ajouter  $m$  spires sur un arc  $\theta_m$  du rotor. Néanmoins, il n'est pas économique de dépasser  $\theta_m = \pi/3$ , l'accroissement de tension étant faible. Pour  $\theta_m = \pi/3$ , le rotor peut accueillir trois enroulements indépendants aux bornes desquels on peut obtenir une f.e.m. d'amplitudes égale, mais décalée de  $2\pi/3$  : c'est le système **triphasé équilibré**. Une telle machine a la particularité de posséder l'induit sur le stator. Il s'agit d'une machine synchrone à rotor lisse à une paire de pôles (non-étudié ici).

Au premier chapitre, nous avons vu comment connecter les enroulements pour garantir une distribution économique de l'énergie. Si des impédances égales sont branchées sur les enroulements, le système est triphasé équilibré : un moteur synchrone connecté à ce réseau entraînera une vitesse constante.

## Machine à courant continu

Les extrémités de la spire sont connectées à un secteur conducteur tournant, isolé du précédent. Sur ces secteurs appelés *lames de collecteur* reposent deux balais fixes diamétralement opposés. La commutation est le passage d'un balai d'un secteur à un autre. En bref, si un conducteur en forme de spire, parcouru par un courant, est placé dans un champ magnétique, il est soumis à des forces de Laplace. Ces forces créent un couple de rotation qui fait tourner la spire sur son axe. Quand la spire a fait un demi tour, il faut inverser la polarité pour inverser le sens des forces et continuer le mouvement. ce sera le rôle du collecteur.

## Machine à plusieurs paire de pôles

Simple généralisation : la période d'induction n'est plus de  $2\pi$  mais de  $2\pi/p$ .

## 2.5 Composants des machines électriques

Pour canaliser le champ magnétique on utilise du fer : on forme un circuit magnétique, généralement en cuivre. Pour séparer les composants, un isolant est utilisé. Comme ça chauffe, il sera nécessaire de refroidir toute machine électrique.

### 2.5.1 Circuit magnétique

Son rôle est de conduire le flux qui devra agir sur les courants circulant dans le circuit électrique placé au milieu de l'entrefer. Ce circuit est constitué d'un solide de forte perméabilité magnétique forçant<sup>5</sup> le trajet des lignes de champs d'où le nom *circuit magnétique* par analogie à l'*électrique*.

#### MATÉRIAUX UTILISÉS

L'acier, la fonte, le fer, ... Le plus important et ce peu importe le matériau est la loi qui lie

---

4.  $P_q$  ?

5. Une partie parvient tout de même à s'échapper : le flux de dispersion magnétique.

l'induction au champ magnétique. Ce n'est pas quelque chose de linéaire : la perméabilité d'un matériau varie en fonction du champ qui lui est appliqué. Pour représenter ça, on regarde les *courbes de magnétisation*.

## 2.5.2 Circuit électrique

RAPPEL. L'**inducteur** est chargé de créer le flux utile et l' **induit** chargé de créer les f.e.m.<sup>6</sup>

### Disposition des enroulements

INDUCTEUR

Il peut être situé au rotor. On utilise des aimants permanents pour les petites puissances.

INDUIT

Les conducteurs sont généralement isolés entre eux. On utilise souvent un bobinage.

### Grouperement des conducteurs

L'association des conducteurs d'une machine est le **bobinage**.

**Conducteurs.** On peut utiliser un conducteur (massif ou creux) pour véhiculer un courant  $I$ .

**Spire.** Constituée de deux conducteurs

**Bobine.** Lorsqu'il y a plusieurs conducteurs par encoche.

**Phase.** Un groupe de bobines associées en série ou en parallèle.

### Pertes joules dans les conducteurs

Étudions la densité de courant dans un conducteur d'encoche. Les courants circulants engendrent des pertes ( $P_J = RI^2$  où  $R = \rho l / S$  en continu). Si le conducteur est massif, en continu, la densité de courant  $J = I / S$  est constante. Démontrons par l'absurde que ce n'est pas le cas en alternatif.

Soit un conducteur massif dans une encoche et supposons  $J = \text{cste}$  :

$$\begin{aligned} H(x)d + 0 &= \int_0^x J e dx \\ \Leftrightarrow H(x) &= \frac{J_e}{d} x \end{aligned} \quad (2.12)$$

où  $H$  varie linéairement avec  $x$ . Le flux embrassé par le circuit constitué par cette partie du conducteur et le retour à l'infini vaut, par unité de longueur :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\phi(x)}{\Delta l} &= \text{cste} - \int_0^x B(x) dx \\ &= \text{cste} - \mu_0 \int_0^x H(x) dx \\ &= \text{cste} - \frac{\mu_0 J_e x^2}{d} \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (2.13)$$

La chute de tension inductive par unité de longueur du conducteur dépend de la position du filet de courant (et de la fréquence) : il n'est pas correct de supposer  $J = \text{cste}$  : la densité de

---

6. Wiki : L'inducteur est un organe électrotechnique, généralement un électroaimant, ayant comme fonction d'induire un champ électromagnétique dans un induit servant à chauffer toutes sortes de conducteurs comme des métaux de toutes sortes.

flux est plus importante à la "surface".

La fréquence augmente également les pertes (résistance plus importante). On peut utiliser des barre de Roebel obligeant le courant à passer à la surface et en profondeur de l'encoche pour contrer au maximum cet effet.

### 2.5.3 Isolation des machines

#### Loi de Montsinger - Vieillissement des isolants

La température détériore la qualité de l'isolant. Une loi expérimentale décrit cet effet

$$t = ab^{-\theta} \quad (2.14)$$

où  $t$  est la durée de vie,  $a, b$  des constantes pour un isolant donné et  $\theta$  la température. On peut l'écrire :

$$\log t = \log a - \theta \log b \quad (2.15)$$

où  $\log t$  est une fonction linéaire de  $\theta$ . Ainsi, élever la température de 6 à 10° réduit la durée de vie de moitié!

### 2.5.4 Refroidissement

#### Agents de refroidissement

Le plus courant est d'utiliser l'air, un ventilateur. Des ventilations intérieures ou extérieures (enceinte close) pour une atmosphère fort polluée existent également. L'hydrogène peut également refroidir en le faisant circuler dans les conducteurs. Les diélectriques liquides sont également une option.

## 2.6 Grandeurs caractéristiques des machines électriques

### 2.6.1 Grandeurs nominales

Une grandeur physique est dite  *nominale*  lorsque l'appareil peut fonctionner indéfiniment à celle-ci sans subir d'usure (avec un coefficient de sécurité).

La *puissance nominale* est plus subtile, il faut savoir de quoi on parle :

- C'est la puissance électrique développable (en kW) à ses bornes si on parle d'une génératrice à courant continu.
- Pour un alternateur, c'est la puissance électrique apparente développable (en kVA)
- Pour un moteur, il s'agit de la puissance mécanique disponible (en kW)

### 2.6.2 Rendements des machines

Par définition, on définit le rendement

$$\eta = \frac{P_u}{P_a} \quad (2.16)$$

où  $P_u$  est la puissance utile à la sortie et  $P_a$  la puissance absorbée. On peut écrire cette formule

$$\eta = \frac{P_u}{P_a} = \frac{P_a - p}{P_a} = \frac{P_u}{P_u + p} \quad (2.17)$$

où  $p$  est la perte. Celles-ci ont un terme fixe et un terme variable avec la puissance apparente  $S$ . On utilisera la dernière égalité, plus précise<sup>7</sup>. Les pertes peuvent être mécaniques, due aux

---

7. Pour les machines génératrices,  $P_a$  est mécanique et  $P_u$  électrique. C'est l'inverse pour une machine motrice

fer, ...

Pour le cuivre, les pertes sont variable en fonction de  $I$  :  $P_{p,Cu} = 3RI^2$ . Comme la tension est supposée constante :  $P_{p,Cu} = kV^2I^2 = kS^2$ . Les pertes totales s'expriment ainsi de la forme  $p = a + bS^2$  et, par exemple, on peut écrire l'expression du rendement :<sup>8</sup>

$$\eta = \frac{P_a - p}{P_a} = \frac{S \cos \varphi - a - bS^2}{S \cos \varphi} \quad (2.18)$$

La valeur maximale du rendement est donnée par

$$\frac{d\eta}{dS} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad S = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad (2.19)$$

La forme de la courbe rendement souhaitée dépend de ce que l'on veut faire.

Pour mesurer le rendement, il est plus intéressant de mesurer les pertes que de mesurer la puissance électrique et mécanique. On peut le faire en mesurant l'échauffement ou en mesurer chaque perte une à une, par essai.

### 2.6.3 Caractéristiques des machines tournantes

A lire

GÉNÉRATRICE

A lire

---

8. ???

## Chapitre 3

# Inductances et transformateurs

### 3.1 Tensions appliquées et induites

Si un circuit circulaire fermé est traversé par un flux variant, une f.e.m. induite se créera dans le même sens que le courant  $i$  qu'elle génère :  $e = -\frac{d\phi}{dt}$ . Par la convention récepteur, la tension qui équilibre cette force doit avoir un sens opposé au courant. On a donc

$$\begin{aligned} v &= Ri - e \\ &= Ri + \frac{d\phi}{dt} \end{aligned} \quad (3.1)$$

On considérera que  $e$  est définie dans le même sens que  $v$  (on la voit comme une tension appliquée).

### 3.2 Le transformateur idéal

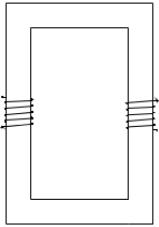


FIGURE 3.1

Soit l'illustration ci-contre avec  $N_1$  et  $N_2$  spires à gauche et à droite. Supposons que la résistivité du fer soit nulle : tout le flux va passer dans le fer et le flux perçu par les deux bobines sera identique. On définit alors le **flux totalisé**  $\Psi$  comme le flux enserré par l'ensemble des  $N$  spires d'un enroulement :

$$\Psi = N\phi \quad (3.2)$$

où  $\phi$  est le flux d'une spire. La loi de Maxwell ((3.1) où  $R = 0$ ) devient  $v = \frac{d\Psi}{dt} = N\frac{d\phi}{dt}$ . Comme le flux est le même dans les deux enroulements

$$\frac{\Psi_1}{\Psi_2} = \frac{N_1}{N_2}, \quad \frac{v_1}{v_2} = \frac{N_1}{N_2} = \mu. \quad (3.3)$$

où  $\mu$  est le rapport théorique des tensions. La loi des f.m.m donne

$$N_1 i_1 + N_2 i_2 = \underbrace{\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l}}_{=0 \Leftrightarrow \mu_{Fe} = \infty} \quad (3.4)$$

On sait que  $\mu_0 \ll \mu_{Fe}$ . Poussons le bouchon un peu plus loin :  $\mu_{Fe} = \infty$ . Imposer  $v_1$  au montage donne un champ d'induction fini, mais un champ magnétique tendant vers 0 : dans un fer parfait, il faut une très petite force magnétomotrice ( $\sum i$ ) pour faire circuler un flux. On a alors

$$N_1 i_1 + N_2 i_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{i_1}{i_2} = -\frac{N_2}{N_1} = -\frac{1}{\mu} \quad (3.5)$$

Ceci décrit le transformateur idéal.

### 3.3 Inductances

#### 3.3.1 Inductances monophasées dans l'air

##### Cas d'une seule spire

Le flux passant à travers une spire est donné par  $\phi = LI$  où  $L$  est l'inductance du circuit.

EXEMPLE : CALCUL DE  $L$ . Si la spire est constituée de deux conducteurs infini de rayon  $a$ , distant de  $d$ , véhiculant un courant  $i$ , on peut calculer l'inductance de ce circuit

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum i \Rightarrow \begin{cases} H_A = \frac{i}{2\pi x} \\ H_{A'} = \frac{i}{2\pi(d-x)} \end{cases} \quad (3.6)$$

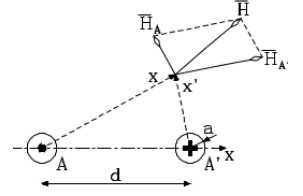


FIGURE 3.2

Comme  $\int \vec{B} \cdot d\vec{S} = \phi = \mu_0 \int \vec{H} \cdot d\vec{S}$  :

$$\phi = \frac{\mu_0}{2\pi} \int_a^{d-a} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right) i \, dx = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{d-a}{a} i \quad (3.7)$$

L'inductance **par unité de longueur** vaut alors (par identification avec  $\phi = Li$ )

$$l = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{d-a}{a} \approx \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{d}{a} \quad (3.8)$$

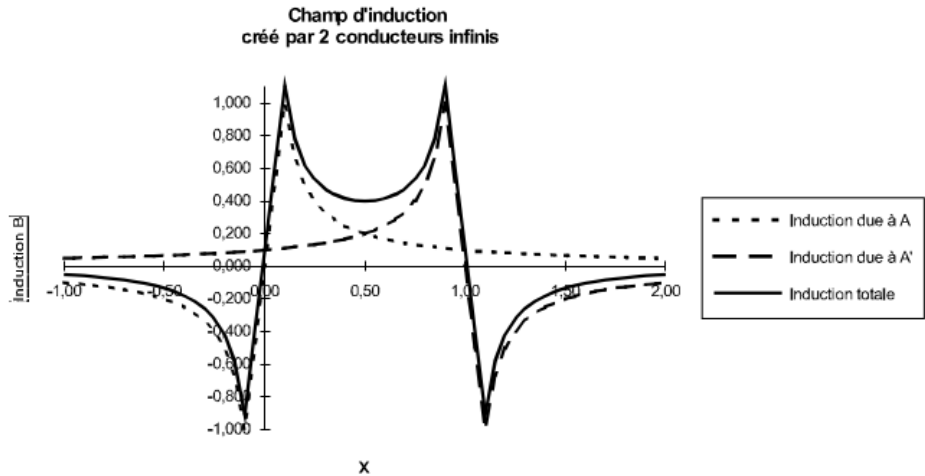
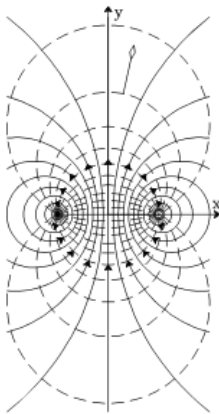


FIGURE 3.3

Les lignes de champ sont perpendiculaires au plan du conducteur. Les cercles interrompus délimitent une même distance de la source ; il s'agit d'équipotentielle magnétique. Sur une de ces lignes, à n'importe quel point, la consommation en ampère-tour est la même

$$\int \vec{H} \cdot d\vec{l} = I = \text{identique} \quad (3.9)$$

Les lignes de champ se bouclent toujours, ou divergent à l'infini ( $\text{div } \vec{B} = 0$ ). Sur le schéma de droite ci-dessus est représenté  $B$  en fonction de la distance par rapports aux conducteurs  $A$  et  $A'$ , placés là où  $B = 0$ . L' (champ) induction totale n'est que la somme des inductions. On suppose également que le conducteur a un certain rayon dans lequel on observe une croissance linéaire. Pour retrouver  $L$  à partir de ce graphique, il faut l'intégrer (aire sous la courbe) et diviser par  $I$ .

## Cas de plusieurs spires - Notions de flux totalisé

La généralisation à  $N$  spires est immédiate :  $\Psi = N\phi$  où  $\phi$  est le flux d'une seule spire. Maxwell se généralise de la même façon :

$$v = \frac{d\Psi}{dt} = N \frac{d\phi}{dt} \quad \left( \begin{array}{l} e_{\text{spire}} = \frac{d\phi}{dt} \\ e_{\text{bobine}} = N \frac{d\phi}{dt} = \frac{d\Psi}{dt} \end{array} \right) \quad (3.10)$$

Le milieu restant linéaire  $\Psi = Li$ . Grâce aux notions du circuit magnétique et à la relation des Ampère-tours, on peut écrire  $Ni = \mathfrak{R}\phi$  où  $\mathfrak{R}$  est la **réductance** du circuit d'induction. La valeur de l'inductance se calcule alors<sup>1</sup>

$$\Psi = Li = N\phi \quad \Leftrightarrow \quad L = \frac{\Psi}{i} = N \frac{\phi}{i} \quad (3.11)$$

Or,  $Ni = \mathfrak{R}\phi$  :

$$\frac{\phi}{i} = \frac{N}{\mathfrak{R}} \quad \longrightarrow \quad L = \frac{N^2}{\mathfrak{R}} = N^2 \mathcal{P} \quad (3.12)$$

où  $\mathcal{P} = 1/\mathfrak{R}$  est la perméance du circuit.

△ Si les spires ne sont pas confondues la relation  $\Psi = N\phi$  n'est **plus** valable ! En effet, le flux ne sera pas le même pour chaque spire : on appelle flux de dispersion le flux non-commun. Bonne nouvelle : on est encore dans une phase linéaire. En effet, nous sommes toujours dans l'air qui est un milieu linéaire dans lequel on peut appliquer le principe de superposition : flux  $\propto I$ . La relation  $\Psi = Li$  reste valable (et  $L$  est constant tant que rien ne bouge).

Petit rappel de vocabulaire : le flux "commun" sera dit de **magnétisation** alors que le flux "non-commun" est dit de **dispersion**.

### 3.3.2 Inductances monophasées à noyau magnétique

#### Flux et inductance

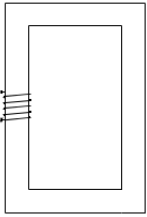


FIGURE 3.4  
— Referred  
sur lui-même  
pour avoir une  
inductance

Soit un circuit magnétique fermé de longueur  $l$  et de section constante  $S$ , constitué de  $N$  spires. On suppose que le flux reste entièrement canalisé dans le fer<sup>2</sup> de sorte que  $\Psi = N\phi$  reste valable<sup>3</sup>.

Le souci vient de l'imperfectibilité du fer : la relation entre  $\Psi$  et  $i$  n'est plus linéaire :  $\Psi = N\phi = BNS$  et  $i = Hl/N$ . Cette dernière relation est obtenue par la courbe d'hystérèse magnétique qui n'est ni linéaire, ni univoque.

Appliquons une tension sinusoïdale ALTERNATIVE  $v = V_M \cos \omega t = V\sqrt{2} \cos \omega t$  à l'enroulement. Le flux résultant sera sinusoïdal car  $v = d\psi/dt$ . En première approximation, notre tension vaut (toujours vrai) :

$$v = Ri + \frac{d\Psi}{dt} \quad (3.13)$$

---

1. On retrouve les mêmes formules, mais avec  $\Psi$ .  
 2. Très bonne approximation  
 3. On fait l'hypothèse que l'on a le même flux dans chaque spires, même si celles-ci ne sont pas au même endroit.

Si la résistance est non-nulle, il faut résoudre un système à deux inconnues<sup>4</sup> (dont une équation est donnée par le cycle d'hystérèse, Oh joie), la présence de  $i$  compliquant l'ED. Par contre, si  $R = 0$  :

$$\phi = \frac{\Psi}{N} = \frac{1}{N} \int_0^t v \, dt + \text{cste} \quad (3.14)$$

ce qui vaut<sup>5</sup>  $\phi = \frac{V_M}{N\omega} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$ . Le phaseur  $\phi$  est déphasé de  $-\frac{\pi}{2}$  par rapport à  $\underline{V}$ . Grâce à la relation  $\phi = Li$ , on peut voir ça intuitivement comme " $I$  est en retard sur  $V$  et on pourra modéliser ça par... une self!

Comme  $V_M = N\omega\phi_M$  :<sup>6</sup>

$$\phi_M = \frac{\sqrt{2}}{2\pi f N} V \quad (3.15)$$

Si la tension appliquée est sinusoïdale, la tension et donc l'induction le sera également, mais le courant absorbé par la bobine ne l'est pas. On remarque que la valeur maximale de l'induction ne dépend pas des propriétés du matériau.

### Courant absorbé

Sur le schéma ci-contre,  $i_m$  est le courant obtenu en ne considérant que la courbe d'aimantation moyenne auquel il faut ajouter  $i_{pH}$ , le courant de pertes hystériques pour donner le courant total  $i$ .

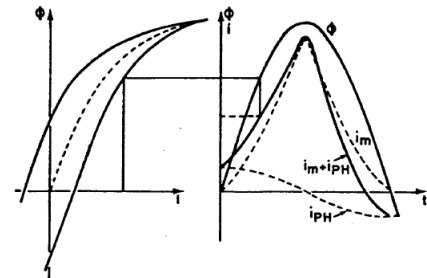


FIGURE 3.5 – Savoir expliquer ce graphique!

### Pertes hystériques et par courants de Foucault

Si on place  $i_{pH}$ , le courant des pertes par hystérèse, sur un graphe on va remarquer que sa courbe est en phase sur celle de la tension : on va pouvoir le modéliser par une résistance. Nous avons vu que  $B^2 \propto V^2$ . On en déduit que la résistance sera à peu près constante et donc les pertes par hystérèse aussi.

Compte-tenu de ceci, comment modéliser le courant ? On va simplement mettre une inductance en parallèle avec une résistance pour retrouver la somme de courant  $i_p + i_m$  ! Le courant inductif sera plus grand que le courant résistif car  $R > L$  et comme on est en parallèle le courant a plus de difficulté à circuler dans l'inductance que dans la résistance. De plus, le fait d'être en parallèle implique que le schéma équivalent sera, globalement, une inductance corrigée par une résistance.

### Schéma équivalent

Le courant absorbé par la bobine est composé d'un courant magnétisant  $I_m$  et un courant de pertes par hystérèse et par Foucault  $I_p$ . On a vu que les pertes  $\propto V^2$  et qu'elles peuvent être représentées par une résistance  $R_p$  de sorte que

$$\underline{V} = R_p \underline{I_p} \quad (3.16)$$

4.  $\begin{cases} v = Ri + \frac{d\phi}{dt} \\ Ni \approx HL \end{cases}$

5. Q : Supposez qu'on ai une bobine comme ça et que l'on met 12V. Si le courant est alternatif c'est un courant alternatif. Représentez le ? Si on met du courant continu, on détruit la bobine (ça fume, savoir expliqué).

6. ??



Le courant magnétisant n'est pas sinusoïdal (car relation non-linéaire) mais on peut définir un *courant magnétisant sinusoïdal équivalent* déphasé de  $\pi/2$  sur la tension. L'idée est de remplacer  $I_p$  par un courant sinusoïdal de même valeur efficace

$$I_m = \sqrt{I_v^2 - I_p^2} \quad (3.17)$$

où  $I_v = \sqrt{I_1^2 + I_3^2 + I_5^2 + \dots}$ . Dans cette expression,  $I_j$  est la valeur efficace de l'harmonique  $j$  du courant. Il est en effet habituel de définir un courant sinusoïdal équivalent de même valeur efficace que le courant  $i$  :  $I_v = I$ .

Pour le fun, on peut définir une réactance de magnétisation  $X_m$  :  $\underline{V} = jX_m \underline{I}_m$ , réactance qui dépend de l'état de magnétisation du circuit. Ces constatations nous donnent le schéma équivalent représenté ci-contre.

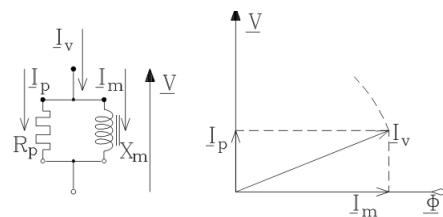
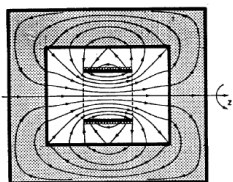


FIGURE 3.6

### 3.3.3 Inductance à circuit magnétique à entrefer



La réticence d'un tube de flux d'air d'1mm est équivalent à la réticence d'un tube de flux de 5000mm d'épaisseur dans le fer : l'inductance est essentiellement déterminée par l'entrefer : on peut le voir comme un blindage magnétique.

FIGURE 3.7

### 3.3.4 Phénomènes transitoire de mise sous tension d'une bobine de fer

Si on applique brusquement en  $t = 0$  la tension  $v = V\sqrt{2}\cos(\omega t + \xi_V)$  aux bornes d'une bobine idéale, le flux vaut <sup>7</sup> (si l'on néglige le rémanent)

$$\begin{aligned} \phi &= \int_0^t \frac{V\sqrt{2}}{N} \cos(\omega t + \xi_V) dt \\ &= \frac{V\sqrt{2}}{\omega N} [\cos(\omega t + \xi_V - \frac{\pi}{2}) - \cos(\xi_V - \frac{\pi}{2})] \end{aligned} \quad (3.18)$$

En tenant compte des résistances/perdes, le flux rejoint progressivement sa valeur de régime sinusoïdal, de même pour le courant. Si l'enclenchement se fait quand la tension est maximale ( $\xi_V = 0$ ), le flux est directement en régime

$$\phi = \frac{V\sqrt{2}}{\omega N} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \quad (3.19)$$

Mais si on enclenche quand la tension est nulle ( $\xi_v = -\frac{\pi}{2}$ ) :

$$\phi = \frac{V\sqrt{2}}{\omega N} [1 - \cos\omega t] \quad (3.20)$$

ce qui montre que le flux atteint deux fois la valeur de régime : le fer peut se saturer (Voir explication labo avec l'aire sous la courbe).

7. Par intégration de  $v = N \frac{d\phi}{dt}$ .

### 3.4 Transformateurs monophasés

#### 3.4.1 Bobines à spires confondues, couplées dans l'air

##### Introduction

Soit deux bobines de  $N_1$  et  $N_2$  spires. Le point  $\bullet$  marque la borne d'entrée afin d'avoir une mutuelle positive. Comme le système est linéaire (toujours dans l'air) la mutuelle  $M$  est la même.

$$\begin{aligned}\Psi_1 &= L_1 i_1 + M i_2 \\ \Psi_2 &= M i_1 + L_2 i_2\end{aligned}\quad (3.21)$$

En utilisant notre fameuse formule toujours vraie

$$\begin{aligned}v_1 &= R_1 i_1 + \frac{d\Psi_1}{dt} = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ v_2 &= R_2 i_2 + \frac{d\Psi_2}{dt} = R_2 i_2 + M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}\end{aligned}\quad (3.22)$$

Ou encore

$$\begin{aligned}v_1 &= R_1 i_1 + (L_1 - M) \frac{di_1}{dt} + M \frac{d(i_1 + i_2)}{dt} \\ v_2 &= R_2 i_2 + (L_2 - M) \frac{di_2}{dt} + M \frac{d(i_1 + i_2)}{dt}\end{aligned}\quad (3.23)$$

Cette équation peut directement être déduit du schéma suivant.

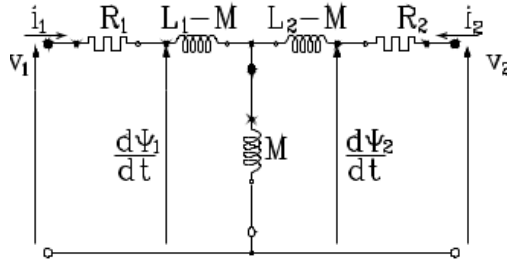


FIGURE 3.9

Hélas, on n'utilisera pas ce schéma car il peut conduire à des  $L < 0$ . Mathématiquement, tout est correct mais ce n'est physiquement pas interprétable. Pour y remédier, on va introduire la notion de flux **commun** et de **dispersion**.

##### Coefficients de couplage et de dispersion

▷ Si  $i_1$  (et  $i_2 = 0$ ) parcourt la bobine 1, le flux se décompose en deux :

1.  $\phi_{21}|_{i_2=0}$  est créée par 1 et coupée par 2
2.  $\phi_{d1}|_{i_2=0}$  est créé par 1, mais ne coupe par 2 : c'est le *flux de dispersion*

Par définition, le coefficient de couplage  $k_1$  est la fraction de flux créer par une bobine qui atteint une autre :

$$k_1 \equiv \frac{\phi_{21}|_{i_2=0}}{\phi_1|_{i_2=0}} \leq 1 \quad (3.24)$$

où  $k < 1$  sauf si les bobines sont confondues ( $k = 1$ ).

Reprenons nos équations fétiches (en considérant les spires confondues) :

$$\begin{aligned}\Psi_1|_{i_2=0} &= N_1 \phi_1|_{i_2=0} &= L_1 i_1 \\ \Psi_2|_{i_2=0} &= N_2 \phi_{21}|_{i_2=0} = N_2 k_1 \phi_1|_{i_2=0} &= M i_1\end{aligned}\quad (3.25)$$

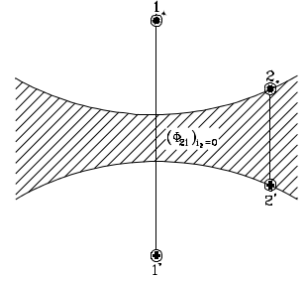


FIGURE 3.8 – Tout le flux créé par 1 n'arrive pas à 2

En effectuant le rapport

$$\left\{ \begin{array}{l} (\phi_1)_{i_2=0} = \frac{L_1 i_1}{N_1} \\ N_2 k_1 (\phi_{21})_{i_2=0} = M i_1 \end{array} \right. \implies M = \frac{N_2}{N_1} k_1 L_1 \quad \Leftrightarrow k_1 = \frac{N_1}{N_2} \frac{M}{L_1} \quad (3.26)$$

▷ Si  $i_1 = 0$ , un raisonnement similaire nous permet à partir de

$$k_2 = \frac{(\phi_{12})_{i_1=0}}{(\phi_2)_{i_1=0}} \quad (3.27)$$

d'obtenir

$$M = \frac{N_1}{N_2} k_2 L_2 \quad \text{ou} \quad k_1 = \frac{N_2}{N_1} \frac{M}{L_2} \quad (3.28)$$

Par définition, le couplage des deux bobines vaut

$$k = \sqrt{k_1 k_2} = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \quad (3.29)$$

Dans l'air,  $k < 0.5$ . Par contre dans le fer  $k \approx 0.998$ .

Le coefficient de Blondel est le rapport entre le flux de dispersion et le flux total

$$\sigma_1 = \frac{(\phi_{dl})_{i_2=0}}{(\phi_1)_{i_2=0}} = 1 - k_1 \quad \rightarrow \text{facteur de dispersion de 1} \quad (3.30)$$

### Couplage parfait

Comme on l'a dit :  $k_1 = k_2 = 1 \Rightarrow \phi_1 = \phi_2$ . On est dans le cas du transformateur parfait (voir plus haut)

### Schéma équivalent

Si  $k_1 > \frac{N_1}{N_2} \rightarrow M > L$  (via (3.26)) et une inductance négative serait introduite : pas top, il va falloir procéder autrement. Remarquons que le flux coupé par 1 est la somme des flux qu'il crée lui même et d'une fraction du flux créé par 2 :

$$\Psi_1 = N_1 (\phi_1)_{i_2=0} + N_1 (\phi_{12})_{i_1=0} \quad (3.31)$$

On peut décomposer  $(\phi_1)_{i_2=0}$  en un flux de dispersion  $(\phi_{dl})_{i_2=0}$  et un flux coupé par l'enroulement 2  $(\phi_{21})_{i_2=0}$ . Le flux commun est le flux coupé par les deux enroulements :

$$\phi_C = (\phi_{21})_{i_2=0} + (\phi_{12})_{i_1=0} \quad (3.32)$$

En considérant la décomposition proposée :

$$\Psi_1 = N_1 ((\phi_{dl})_{i_2=0} + (\phi_{21})_{i_2=0}) + N_1 (\phi_{12})_{i_1=0} \quad (3.33)$$

On peut alors réécrire  $\Psi_1$  :

$$\Psi_1 = N_1 (\phi_{dl})_{i_2=0} + N_1 \phi_C \quad (3.34)$$

Reprenons la première équation de la section :  $\Psi_1 = L_1 i_1 + M i_2$  et décomposons le premier terme du second membre en :<sup>8</sup>

- Flux de dispersion :  $N_1 (\phi_{dl})_{i_2=0} = (1 - k_1) L_1 i_1$ .
- Flux commun :  $N_1 (\phi_{21})_{i_2=0} = k_1 L_1 i_1$ .

---

8.  $N_1 \phi = \Psi$ .

Cette relation devient ainsi

$$\Psi_1 = (1 - k_1)L_1 i_1 + (k_1 L_1 i_1 + M i_2) = N_1(\phi_{dl})_{i_2=0} + N_1 \phi_C \quad (3.35)$$

Comme  $k_1 = \frac{N_1}{N_2} \frac{M}{L_1} = \mu \frac{M}{L_1}$ , on obtient

$$\Psi_1 = (L_1 - \mu M) i_1 + \mu M \left( i_1 + \frac{i_2}{\mu} \right) \quad (3.36)$$

On peut faire le même raisonnement pour l'enroulement 2 (attention à la définition de  $k_2$ !)

$$\mu \Psi_2 = \mu^2 \left( L_2 - \frac{M}{\mu} \right) \frac{i_2}{\mu} + \mu M \left( i_1 + \frac{i_2}{\mu} \right) \quad (3.37)$$

Les deux dernières relations obtenues nous permettent de construire le schéma équivalent suivant où  $D$  est un opérateur dérivatif. Pour construire ce schéma, il faut avant tout remarquer que le dernier terme de ces deux équations est identique : il existe une "branche" commune.

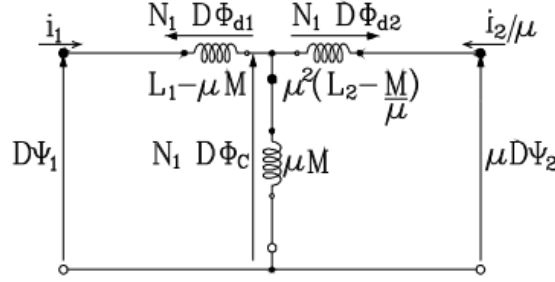


FIGURE 3.10

Le flux  $\Psi_2$  et la tension  $v_2$  secondaire sont **ramenés** (permet l'interprétation physique) au primaire par multiplication de  $\mu$ , alors que le courant doit être divisé par  $\mu$ . On ramène les impédances au primaire par multiplication de  $\mu^2$ . Si l'on tient compte des résistances des enroulement, on obtient le schéma complet, où

- $L_{dl} = L_1 - \mu M$  inductance de dispersion du primaire
- $L_{d2} = L_2 - \frac{M}{\mu}$  inductance de dispersion du secondaire
- $L'_{d2} = \mu^2 L_{d2}$  inductance de dispersion ramenée au primaire
- $\mu M$  inductance de magnétisation vue du primaire

Toutes ces grandeurs peuvent être ramenée au secondaire en multipliant les courants par  $\mu$ , les tensions par  $1/\mu$  et les impédances par  $1/\mu^2$  comme le suggère le schéma ci-dessous.

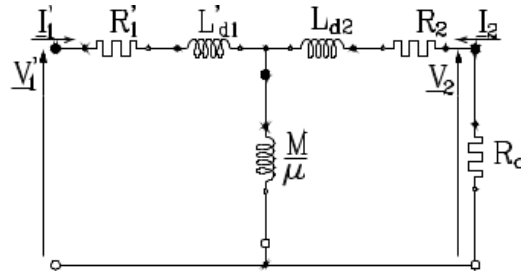


FIGURE 3.11

## Applications du schéma équivalent

Avec lui, on peut calculer le comportement statique et dynamique du transformateur avec  $R$  et  $L$ . Le rapport de transformation à vide, par exemple, vaut <sup>9</sup>

$$\left(\frac{v_1}{v_2}\right)_{i_2=0} = \mu \frac{R_1 + L_1 D}{\mu M D} \quad (3.38)$$

La page 3.23 détaille la recherche de la courbe de réponse en fréquence d'un transformateur (important). Ce rapport vaut  $\mu/k$  si  $R$  est négligeable. Pour le cas parfait, on retrouve bien  $\mu$ . Plus il y aura de la dispersion, plus ce rapport s'écartera de  $\mu$ .

### 3.4.2 Transformateurs à bobines couplées dans l'air

Le système étant linéaire, on peut écrire

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= L_1 i_1 + M i_2 \\ \Psi_2 &= M i_1 + L_2 i_2 \end{aligned} \quad (3.39)$$

mais  $\Psi_1 = N_1 \phi_1$  n'est plus valable car les flux coupés par chaque spire d'un enroulement sont différents, on devra utiliser les coefficients de couplages mesurés ou calculés.

### 3.4.3 Transformateurs à noyau magnétique

#### Transformateur sans dispersion

Par hypothèse, tout le flux passe dans le fer. les flux coupés par les deux enroulements sont identiques :

$$\frac{\Psi_1}{\Psi_2} = \frac{N_1}{N_2} \quad \text{et} \quad \frac{v_1}{v_2} = \frac{N_1}{N_2} = \mu \quad (3.40)$$

Ce flux étant imposé par la tension, il est indépendants des courants :

$$V = \underbrace{Ri}_{\approx 0} + \frac{d\Psi}{dt} \Rightarrow \Psi = f(V) \quad (3.41)$$

Le flux sera donc le même qu'à vide ( $i_2 = 0$ ). Par la loi des f.m.m.

$$N_1 i_1 + N_2 i_2 = \oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} \quad (3.42)$$

où  $l$  est une ligne d'induction dans le fer. Comme on l'a dit, le flux est le même qu'à vide et donc  $\vec{H}$  est aussi le même qu'à vide :  $\oint_l H dl = N_1 i_v$  où  $i_v$  est le courant consommé au primaire, à secondaire ouvert lorsque la tension appliquée ( $v_m$ ) est la même qu'en charge :  $v_1 = v'_2$ . On peut voir ce courant comme représentant à la fois la magnétisation via la bobine et les pertes via la résistance.

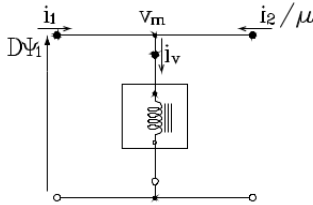


FIGURE 3.12

Comme nous avons la relation

$$i_1 + \frac{i_2}{\mu} = i_v \quad (3.43)$$

il faut nécessairement introduire une bobine consommant  $i_v$  sous la tension  $v_m$ .

Si l'on rajoute les résistances des impédances mais également une résistance modélisant les pertes par hystérèse et courant de Foucault, on trouve le schéma du transformateur non parfait standard.

9.  $v_1 = R_1 i_1 + (L_1 - \mu M) D i_1 + \mu M D i_2$ .

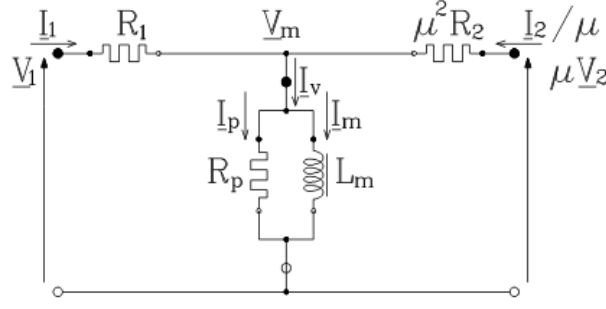


FIGURE 3.13 –  $L_m$  est l'inductance de dispersion

### Transformateurs à spires concentrées

Dans ce cas on peut définir un flux commun  $\phi_c$  et des flux de dispersions  $\phi_{d1}, \phi_{d2}$  qui seront modélisés par des bobines. Comme ceux-ci sont très faibles, on considère que le flux total est le flux commun. La Figure 3.13 reste valable si l'on remplace le flux total par le flux commun, c'est-à-dire si on pose  $v_m = D\Psi_C = N_1 D\phi_C$ . Pour le premier enroulement

$$\begin{aligned} v_1 &= R_1 i_1 + D\Psi_1 \\ &= R_1 i_1 + D(\Psi_{d1} + \Psi_C) \\ &= R_1 i_1 + N_1 D(\phi_{d1} + \phi_C) \end{aligned} \quad (3.44)$$

Comme le flux de dispersion est dans l'air, un milieu linéaire  $\phi = Li_1$ . Donc

$$v_1 = R_1 i_1 + L_{d1} Di_1 + N_1 D\phi_C \quad (3.45)$$

Pour le second enroulement

$$v_2 = R_2 i_2 + L_{d2} Di_2 + N_2 D\phi_C \quad (3.46)$$

En ramenant le tout au primaire (comme fait précédemment)

$$\mu v_2 = \mu^2 R_2 \frac{i_2}{\mu} + \mu^2 L_{d2} D \frac{i_2}{\mu} + N_1 D\phi_C \quad (3.47)$$

Et l'on trouve le schéma équivalent ci-contre.

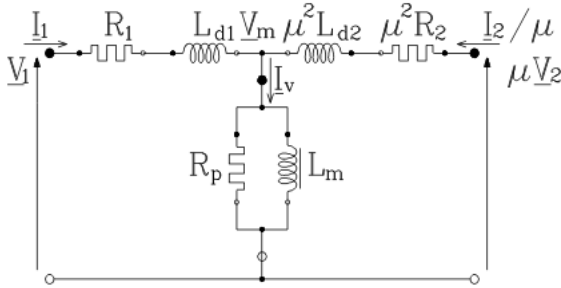


FIGURE 3.14

Petit exercice de réflexion ? Supposons  $R_1 \ll \mu' R_2$ . Cela signifierait qu'une des résistances conduit à beaucoup plus de pertes : ce n'est pas logique, l'ingénieur à mal fait son job.

Notons que si on connaît les six impédances et  $\mu$ , on connaît tout !

Les ordres de grandeurs sont important dans un tel schéma. Les voici classées par ordre d'importance

1. L'impédance la plus grande est dans la branche verticale ( $R_p \approx 3L_m$ )
2. Les impédances de dispersions sont faibles mais plus grandes que les résistances joules ( $L_d \approx 10R_1$ ).
3. Si  $\mu = 10$ , la tension est 10 fois plus faible mais le courant dix fois plus fort (conservation de la puissance). Comme les dissipations doivent être les mêmes de chaque côté (sinon mauvais ingénieur) :  $R_1 \approx \mu^2 R_2$ ,  $L_1 \approx \mu^2 L_2$ .

## Transformateurs réels

Dans le cas  $\mathbb{R}$ , les spires ne sont plus concentrées mais supposons que  $\phi_c = \phi_{Fe}$  reste valable de sorte que l'on puisse utiliser nos schémas équivalents.

## Applications

La mesure de  $R_p/L_m$  se fait à vide, car  $R_1$  est négligeable devant  $R_1$ . Pour mesurer le reste des impédances, on fait un court-circuit au secondaire pour que  $I_v \approx 0$ .

### 3.4.5 Pertes et rendement

La puissance au primaire est égale à la somme de la puissance dans la charge, des pertes magnétiques et joules

$$P_1 = P_c + P_{pFe} + P_{pCu} \quad (3.48)$$

- Les pertes magnétiques sont indépendantes de la charge et se mesurent à vide, car les pertes joules à vide sont très faibles.
- Les pertes joules se mesurent en court-circuit, car la tension est faible et dès lors les pertes magnétiques sont souvent négligeables.

Le rendement est donné par<sup>10</sup> :

$$\eta = \frac{P_c}{P_1} = \frac{P_c}{P_c + P_{pFe} + P_{pCu}} \quad (3.49)$$

Après analyse, le rendement maximal est atteint pour une charge  $P_c$  telle que  $P_{pFe} = P_{pCu}$ .

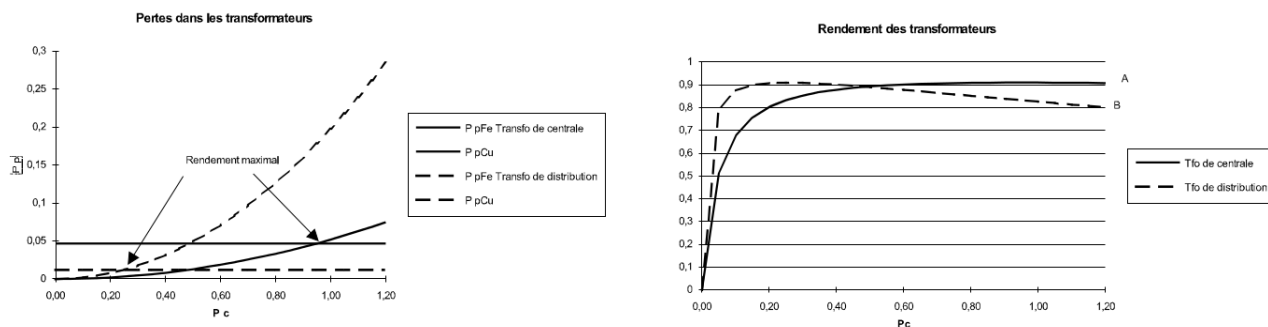


FIGURE 3.15

Les pertes du transformateurs se divisent en deux

1. Les pertes augmentent avec le carré de la puissance, il s'agit de pertes quadratiques
2. L'hystérèse et les courants de Foucault sont les pertes dans le fer même. Celles-ci dépendent de la tension appliquée et non pas de la puissance.

10. "Ne pas trop s'embêter avec les calculs"

## 3.5 Transformateurs triphasés

### 3.5.1 Constitution

Il existe plusieurs façon de faire, la plus "classique" (dans ce cours) est de considérer trois transformateurs monophasés indépendants dont les enroulements sont connectés généralement en étoile (Y) ou en triangle ( $\Delta$ ). Voyons, ci-contre, quelques dispositions particulières. La première chose à remarquer est qu'il y a chaque fois six bornes au primaire et au secondaire (chaque fois deux accès). Dans le couplage en triangle, rien n'empêche de permuter  $a, b$  et  $c$  : le déphasage ne sera juste plus de  $30^\circ$  mais de  $120^\circ, -30^\circ, \dots$ . Cela dépend donc de l'ordre dans lequel on connecte les bobines. Toujours dans le triangle, la somme des tensions étant forcément nulle, il n'y a pas de courant qui y circule (mais il en circule bien dans chaque bobine). Le secondaire en zig-zag, c'est juste un truc d'hipster.

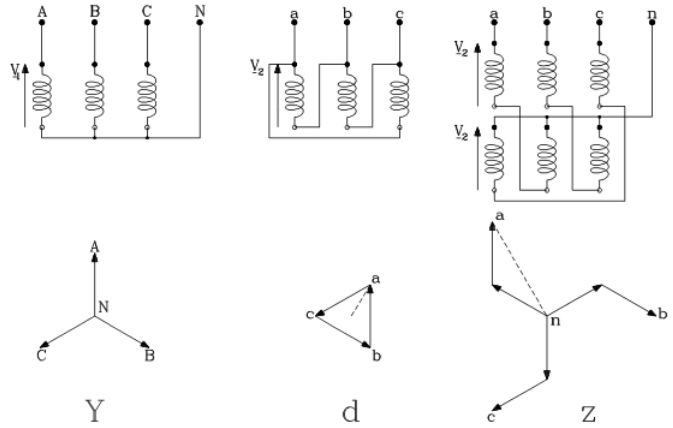


FIGURE 3.16 – Transformateur primaire couplé en étoile, transformateur secondaire en triangle et (droite) en zig-zag

### 3.5.2 Fonctionnement en régime équilibre d'ordre direct

#### Trois unités indépendantes

Soit un transformateur  $Yd$  auquel la tension primaire simple  $\underline{V}_1$  correspond la tension secondaire composée  $\underline{V}_2$ .

Considérons la tension simple de la phase  $A$  du primaire et  $a$  du secondaire. On obtient  $V_a$  en divisant  $\underline{V}_2$  par  $\sqrt{3}$  ainsi qu'en effectuant une rotation du phaseur de  $30^\circ$ . Le rapport de tension est devenir  $\mathbf{C}$  :

$$\mu \approx \frac{V_A}{V_a} = \frac{N_1}{N_2} \sqrt{3} \angle -30^\circ \quad (3.50)$$

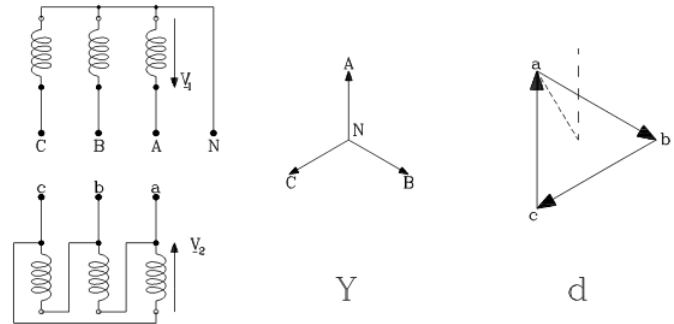


FIGURE 3.17

#### Indice horaire $H$

Le déphasage primaire/secondaire dépend du couplage : on le caractérise par l'indice horaire  $H$ , où  $\underline{V}_A$  est placé à midi. Si  $\underline{V}_a$  est déphasé de  $+30^\circ$ , cela correspond à 11h. Un primaire en étoile, un secondaire en triangle avec un déphasage de  $30^\circ$  sera alors noté  $Yd11$ .

En conclusion, le cas est identique au monophasé : il faut juste tenir compte du facteur  $\sqrt{3}$  et du déphasage.



## Chapitre 4

# La machine à courant continu

Ces machines ne sont plus utilisées comme génératrices de puissances mais leur capacité de réglage de vitesse nous pousse à les étudier. **Dynamo** est le nom donné à une génératrice à courant continu.

### 4.1 Génération d'une tension continue

#### 4.1.1 Effet d'un collecteur

Pour voir une f.e.m. continue, il faut

1. Un collecteur
2. Augmenter le nombre de conducteurs actifs

Le **collecteur** est un commutateur ayant pour but de redresser la f.e.m. alternative<sup>1</sup>.

**Petit plus (Source : Wikipedia) :** *Ce collecteur commutateur rotatif consiste en un anneau conducteur de l'électricité sectionné en un nombre pair de parties isolées entre elles, fixé avec une entretoise isolante sur l'axe de la machine. La connexion électrique est créée entre les parties conductrices et la partie fixée sur le stator (bornier), par une ou plusieurs paires de balais positionnées respectivement à  $180^\circ$ . On alimente en électricité le bobinage du rotor par ces contacts (fonctionnement en moteur) ou au contraire on récupère l'électricité produite par le bobinage du rotor (fonctionnement en générateur).*

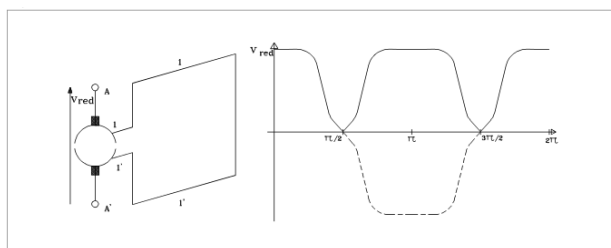


FIGURE 4.1

L'idée de l'espacement de  $\pi$  est que le sens du courant dans l'anneau conducteur va s'inverser, permettant au rotor de continuer à tourner comme on peut le voir sur l'illustration ci-contre.

On obtiendra aux balais une f.e.m. unidirectionnelle et dans le circuit extérieur un courant unidirectionnel. Cependant, la grandeur de cette f.e.m. et du courant qui en résulte ne sont pas constantes.

---

1. "En électrotechnique, un collecteur commutateur rotatif est un organe permettant de créer une connexion électrique entre une partie fixe (stator) et une partie tournante (rotor), avec une fonction de commutation pendant la rotation. On trouve ce genre de collecteur dans les machines à courant continu et les moteurs électriques universels."

Considérons un exemple "réel". Cette machine est constituée de

- Un inducteur, sur le stator possédant  $p$  paires de pôles saillants. La répartition de l'induction dans l'entrefer a une forme trapézoïdale avec comme axe de symétrie l'axe *longitudinal*  $d$ . L'axe électriquement  $\perp$  à celui-ci est l'axe *transversal*,  $q$ .
- Un induit, disposés sous la forme d'enroulements de conducteurs placés dans les encoches du cylindre rotorique. On connecte via les faces latérales du cylindre ces conducteurs pour former un *enroulement en tambour*.

C : carcasse

P : pôles

D : denture

E : encoche

B : bobine

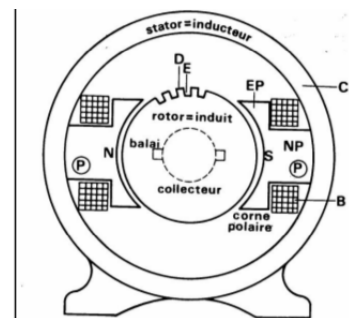


FIGURE 4.2

Les conducteurs actifs réunis par ces liaisons sont situés sous les pôles opposés, d'où il résulte une addition des f.e.m. induites. La **commutation** d'une lame à l'autre se fait donc au moment où un conducteur actif passe d'un pôle à l'autre

#### 4.1.2 Machine multipolaire

On considérait jusqu'ici des machines à deux pôles inducteurs, soyons fous et plaçons-en maintenant quatre. Par symétries, les f.e.m. seront égales en grandeurs. Si l'on connecte les balais opposés entre eux ( les deux négatifs ensemble, de même pour les positifs) on obtient une dynamo multipolaire à *enroulement parallèles*.

#### 4.1.3 Types d'enroulement d'induit

Problème complexe non abordé ici. Sachez juste que pour l'enroulement en tambour, on peut avoir l'enroulement *imbriqué* ou l'enroulement *ondulé*.

#### 4.1.4 Tension à vide en régime statique

Soit un enroulement en tambour (l'armature,  $a$ ) de  $N_C$  conducteurs répartis uniformément en deux couches. Le nombre de spires  $N_S = N_C/2$ . On va supposer l'induit infiniment divisé de sorte à avoir une densité linéique de spires  $N_S/(2\pi R)$ . On suppose un rotor lisse.

#### Méthode des champs

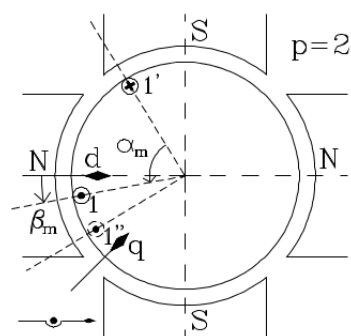


FIGURE 4.3

Soit une spire constituée d'un conducteur d'entrée 1 et de sortie 1'. Nous avons

$\beta_m$  : la coordonnée angulaire mécanique de l'entrée 1

$\beta_m - \alpha_m$  : la coordonnée mécanique de sortie 1'

La f.e.m. engendrée dans la spire vaut (voir figure ci-contre pour la convention de signe (conducteur entrant et sortant))

$$\begin{aligned} e_{\text{spire}} &= B(\beta_m)lv - B(\beta_m - \alpha_m)lv \\ &= (B(\beta_m) - B(\beta_m - \alpha_m))lv \end{aligned} \quad (4.1)$$

Si  $\alpha_m = \pi/p$  la spire est *diamétrale*. Le "sens" du champ  $B$  sera donc exactement opposé

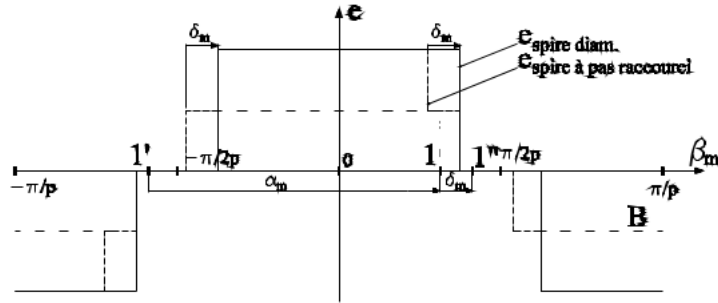
$$\begin{aligned} B(\beta_m - \alpha_m) &= -B(\beta_m) \\ \hookrightarrow e_{\text{spire}} &= 2B(\beta_m)lv \end{aligned} \quad (4.2)$$

Si  $\alpha_m < \pi/p$  on parle de spire à *pas raccourci* : on définit  $1''$  déphasé de  $\pi/p$  en avant par rapport à  $1'$  et donc déphasé de  $\delta_m = \pi/p - \alpha_m$  par rapport à 1. Par symétrie<sup>2</sup>

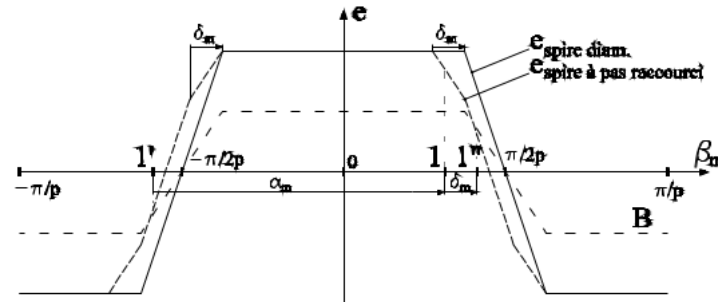
$$B(1') = -B(1'') \quad \text{ou} \quad B(\beta_m - \alpha_m) = -B(\beta_m - \alpha_m + \frac{\pi}{p}) = -B(\beta_m + \delta_m) \quad (4.3)$$

Impliquant que  $e_{spire} = e_1 - e_{1'} = e_1 + e_{1''}$ , en considérant  $B > 0$  sous la pôle nord.

On peut alors avoir une répartition rectangulaire de l'induction



ou trapézoïdale



#### FORCES ÉLECTROMOTRICE ENTRE BALAIS

$$\begin{aligned} e &= p \int_{-\frac{\pi}{2p}}^{\frac{\pi}{2p}} e_{spire} \cdot \text{densité de spire} \\ &= p \int_{-\frac{\pi}{2p}}^{\frac{\pi}{2p}} (2B(\beta_m)kv) \frac{N_s}{2d\pi} d\beta_m \\ &= \frac{p}{d} N_s \frac{\Omega_r}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2p}}^{\frac{\pi}{2p}} B(\beta_m) lR d\beta_m \\ &= \frac{p}{d} N_s \frac{\Omega_r}{\pi} \Phi \end{aligned} \quad (4.4)$$

Supposons un enroulement à spires diamétrales tel que  $e_{spire} = 2B(\beta_m)lv$ . La f.e.m. entre balais est constante si l'induit est infiniment divisé. Considérons un enroulement ondulé à  $2d$  dérivation : une dérivation comporte  $N_s/(2d)$  spires. Celle-ci est constituée par des spires dont les conducteurs d'entrée et de sorties sont sous des pôles de même signe, il y a donc  $(N_s/2d) \cdot (1/\pi)$  spires appartenant à une dérivation par rad. mécanique. Pour obtenir la tension aux bornes de la dérivation, il faut intégrer les tensions de chaque spire de la dérivation. Comme il y a  $p$  paires de pôles, il convient de multiplier le résultat d'un pôle par  $p$ . De façon générale :

**A retenir :**

$$e = K \Omega_r \Phi \quad (4.5)$$

où  $\Phi$  est le flux utile (coupé par une spire diamétrale d'axe longitudinal de l'induit) par pôle,  $\Omega_r$  en rad/s et  $K$ , une constante qui dépend des données de l'enroulement.

2. ??

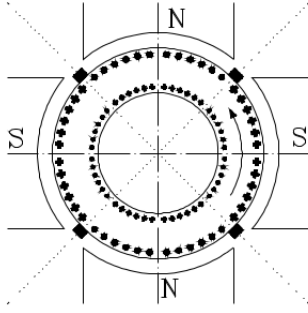


FIGURE 4.4

La f.e.m. (tension à vide) d'une dynamo est  $\propto$  au flux utile par les pôles et la vitesse de rotation. Cette formule reste valable pour une machine en charge ( $i_a \neq 0$ ) si on considère que  $\Phi$  pourrait être modifié par  $i_a$ .  $\Phi$  dépend de  $i_e$  de façon non-linéaire (cf. labo).

Ci-contre, la répartition des f.e.m. engendré pour une dynamo à induit infiniment divisé de spires diamétrales. La tension entre deux balais est la somme ( $f$ ) de toutes les f.e.m. sous un même pôle. Ce schéma confirme que la f.e.m. est bien alternative mais constante en un point fixe : **pseudo-stationnaire** du à l'effet redresseur du collecteur.

### Méthode des circuits

Soit deux enroulements : un d'excitation parcouru par  $i_e$  et un induit pseudo-stationnaire à vide. A bornes du balais, on a donc

$$v_a = R_a i_a + D\Psi_a$$

où  $\Psi_a$  est le flux coupé par l'enroulement induit, flux créé par le courant d'excitation. On peut écrire

$$\Psi_a = M(\beta_m, i_e) i_e$$

où  $M$  est l'inductance mutuelle entre les enroulement  $e$  et  $a$ , mutuelle fonction de  $\beta$ , l'angle de décalage entre  $N$  et l'axe d'enroulement. En faisant les math ;

$$\begin{aligned} (v_a)_{i_a=0} &= D\Psi_a \\ &= D(M i_e) \\ &= DM i_e + M Di_e \\ &= \frac{\partial M}{\partial \beta_m} D\beta_m i_e + \frac{\partial M}{\partial i_e} Di_e i_e + M Di_e \\ &= G(\beta_m, i_e) \Sigma r i_e + \left( M + \frac{\partial M}{\partial i_e} i_e \right) Di_e \end{aligned}$$

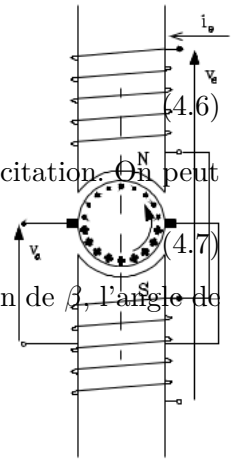


FIGURE 4.5

On définit alors la valeur locale (ou différentielle) de la mutuelle :  $M' = M + \frac{\partial M}{\partial i_e} i_e$ , qui sera nulle si les balais sont calés sur l'axe neutre ( $\beta = \pi/2$ ) car  $a \perp e$ .

On définit également la **fonction d'excitation**

$$G(i_e) = \frac{\partial M(\beta_m, i_e)}{\partial \beta_m} = \frac{(\partial \Psi_a / \partial \beta_m)}{i_e} \quad \text{si} \quad \beta = \frac{\pi}{2}, i_e = \text{cste} \quad (4.9)$$

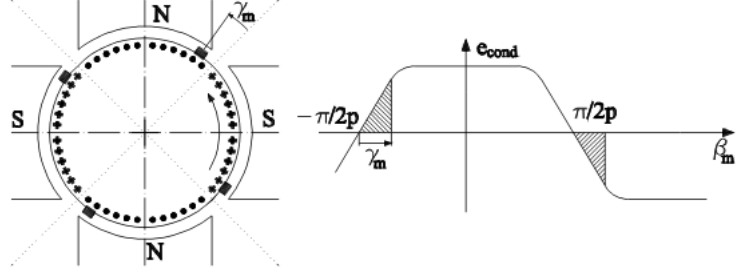
La f.e.m. vaut alors  $e = (v_a)_{i_a=0} = G(i_e) i_e \Omega_r$  qui ressemble à notre belle formule encadré plus haut ! On peut dès lors écrire

$$G(i_e) i_e = K\Phi \quad (4.10)$$

La connaissance de la caractéristique à vide qui conduisait immédiatement à la détermination de  $K, \Phi$  en fonction de  $i_e$ , il en est de même pour  $G$  en fonction de  $i_e$ .

#### 4.1.5 Effet de décalage des balais

Dans l'expression de la tension à vide, on a maintenant comme limites  $-\frac{\pi}{2}p + \gamma_m$  et  $\frac{\pi}{2}p + \gamma_m$  (à la place de  $-\frac{\pi}{2}p$  et  $\frac{\pi}{2}p$ ), réduisant la valeur de celle-ci par rapport à leurs positions sur les axes neutres. Il faut encore rajouter à ça un effet de mutuelle.



#### 4.1.6 Tension à vide - modèle mathématique

FIGURE 4.6

Trois remarques sur ce qu'est un bon modèle

1. Adapté au but poursuivi, ça ne sert à rien de faire trop.
2. Il doit être simple, sinon avouez que tu ne le liras pas.
3. Il doit être homogène, si on applique une hypothèse il faut toujours l'appliquer.

#### EXEMPLE - DYNAMO À VIDE

Définissons comme variables de commande  $v_e$  la tension aux bornes du circuit d'excitation,  $\Omega_r$  la vitesse de rotation et  $e$ , la tension à vides aux bornes des balais comme variable de sortie. Connaissant deux expressions pour  $e$ , il suffit d'en prendre une et de la compléter par l'équation du circuit d'excitation pour obtenir le modèle recherché :  $v_e = R_e i_e + D\Psi_e$ .

#### Modèle non-linéaire

Il suffit d'utiliser une relation non-linéaire entre  $\Psi_e$  et  $i_e$  pour compliquer le tout :  $\Psi_e = L_e(i_e)i_e$  où  $L_e$  est l'inductance propre du circuit d'excitation, fonction non-linéaire. Si l'on considère que  $\Psi_e$  est variable d'état : ré-écrivons notre équation sous la forme d'une ED :

$$D\Psi_e = v_e - R_e i_e (\Psi_e) \quad (4.11)$$

Si cette fois on choisit  $i_e$  comme variable d'état, on peut écrire

$$\frac{\partial \Psi_e}{\partial i_e} D i_e = v_e - R_e i_e \implies D i_e = \frac{v_e - R_e i_e}{L'_e} \quad (4.12)$$

où  $L'_e(i_e)$  est la valeur différentielle de l'inductance propre du circuit  $e$ . Notons qu'elle est aussi égale à  $L_e + (\partial L_e / \partial i_e) i_e = \partial \psi_e / \partial i_e$ . Sachant que  $e = (v_a)_{i_a=0} = G(i_e) i_e \Omega_r$ , le calcul de  $e$  est immédiat si l'on a  $i_e$ .

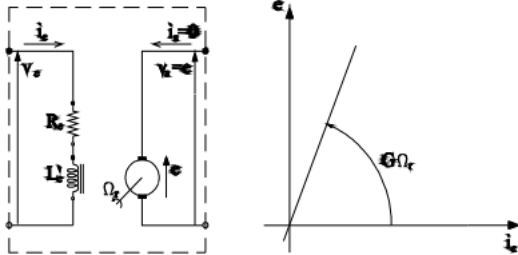


FIGURE 4.7

Nos deux équations trop stylées

$$\begin{aligned} v_e &= R_e i_e + L_e D i_e \\ e &= K \Phi \Omega_r = G \Omega_r i_e \end{aligned} \quad (4.13)$$

nous fournissent un schéma équivalent dont la caractéristique permet le passage de  $\Psi_e$  à  $i_e$ .

Il est également possible, via  $D\Psi_e = v_e - R_e i_e(\Psi_e)$  d'obtenir le schéma-bloc suivant :

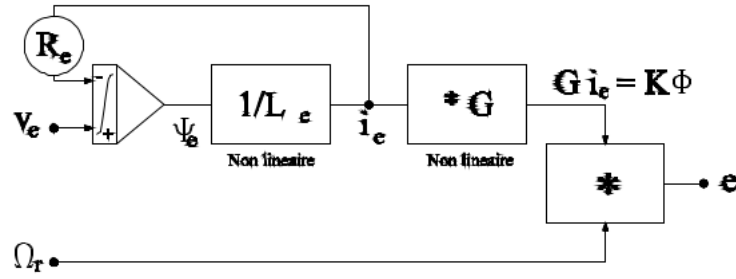


FIGURE 4.8

### Modèle linéaire

On peut l'obtenir en considérant de "petits mouvements" et en substituant les courbes par leurs tangentes. Supposons que  $L_e = L'_e = L_{e,ns} = \text{cste}$  et  $G = G_{ns} = \text{cste}$ . Notre précédente relation devient alors

$$Di_e = \frac{v_e - R_e i_e}{L_e} \quad \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \quad I_e(p) : \frac{1}{1 + pT_e} \frac{V_e(p)}{R_e} \quad (4.14)$$

où  $T_e = L_e/R_e$  est la constante de temps du circuit d'excitation (valeur assez élevée comme beaucoup d'enroulements). Cette relation obtenue via Laplace est assez évidente à vue du schéma équivalent, car ce-dernier est constitué de  $R_e$  et  $L_e$ . La grandeur de sortie vaut toujours

$$e = G i_e \Omega_r \quad (4.15)$$

et dépend linéairement de  $i_e$  si la vitesse est constante. Le système global est du premier ordre

$$E(p) = G \Omega_r I_e(p) = G \Omega_r \frac{1}{1 + pT_e} \frac{V_e}{R_e} \quad (4.16)$$

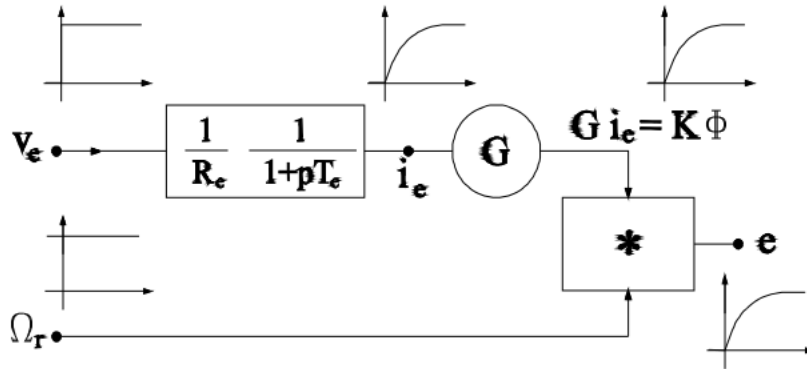


FIGURE 4.9

## 4.2 Influence du courant d'armature

En effet, ça on sent que la machine en charge comportera en plus d'une source de tension une résistance  $R_a$  et une inductance  $L_a$ .

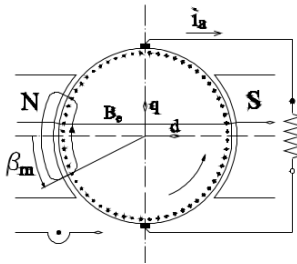
### 4.2.1 Effet Joule (résistance $R_a$ )

On les trouve dans l'enroulement ainsi que dans le balais/collecteur, dépendant de plusieurs paramètres tel que la température et la valeur du courant. Mesurer la résistance globale n'est pas aisé, la résistance n'étant pas la même quand la machine est en fonction ou non : en rotation, elle est perturbée par la f.e.m. rémanente. En gros, les chutes sont

$$\Delta V_{R_a} = \Delta V_b \text{sign}(i_a) + R_a i_a \quad (4.17)$$

où  $\Delta V_b$  représente la chute balais collecteur (fonction du sens de rotation) et  $R_a$  la résistance entre enroulements. Par **convention**, la chute est fixée à 2V pour les balais en carbone et 0.6V pour les métalliques.

### 4.2.2 Réaction transversale de l'armature infiniment divisée



Soit une génératrice avec un courant infiniment divisé qui circule dans l'induit, même sens que la f.e.m. Les courants induits créent à leur tour un champ créant un flux perpendiculaire au flux inducteur. En désignant  $\beta_m$  l'abscisse angulaire d'un point, calculons les ampères-tours dans un contour d'induction fermé :

$$\frac{N_c i_a}{2\pi} 2\beta_m \quad (4.18)$$

Par symétrie par rapport à l'axe des pôles, la moitié des A.t. est attribué à la moitié du chemin. Par abus, on attribue des A.t. là où le chemin traverse l'entrefer. Si ce dernier est constant et le fer parfait

$$H(\beta_m) = \frac{N_c i_a \beta_m}{2\pi 2d \delta} \quad (4.19)$$

$H$  est max si  $\beta_m = \pi/2p$  :

$$H\left(\frac{\pi}{2p}\right) = \frac{N_c i_a \pi}{2\pi 2d 2p\delta} = \frac{N_c i_a}{8\delta pd} = \frac{N_s i_a}{4\delta pd} \quad (4.20)$$

Si le fer est réel il suffit de multiplier par  $\mu_0$ . Tout ceci est bien indépendant de la vitesse de rotation : la situation est la même que si une bobine était alignée sur l'axe neutre.

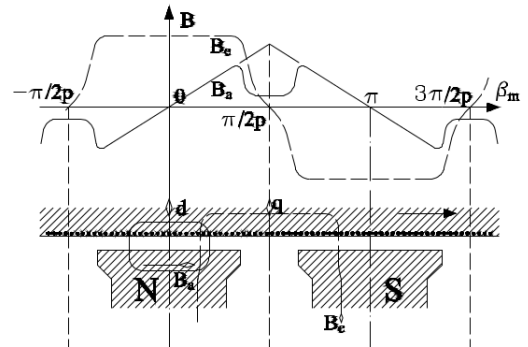
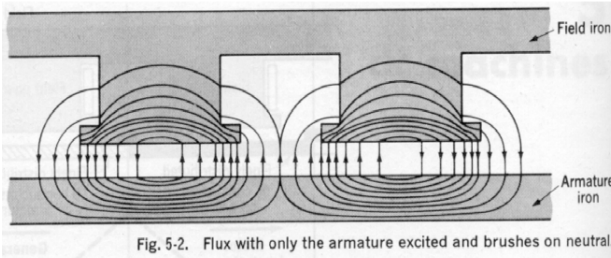


FIGURE 4.11

Pour calculer  $L_a$  on considère un enroulement fictif dont toutes les spires ont par axe celui du balai : le flux vaudra l'intégrale de l'induction entre  $\beta_m$  et  $\pi - \beta_m$ . Grâce au flux totalisé :  $L_a = \Psi_a / i_a$ .

### 4.2.3 Le champ résultant

#### Sans saturation

On peut appliquer le principe de superposition. Pour une dynamo, une fois la réaction d'induit est magnétisante (corne d'entrée) et une fois démagnétisante (corde de sortie). La figure ci-contre montre comment obtenir  $B$  par la somme de l'induction de l'inducteur  $B_e$  et la réaction d'induit  $B_a$ .

Notons que le flux n'a pas changé, la f.e.m. en charge est la même qu'à vide.

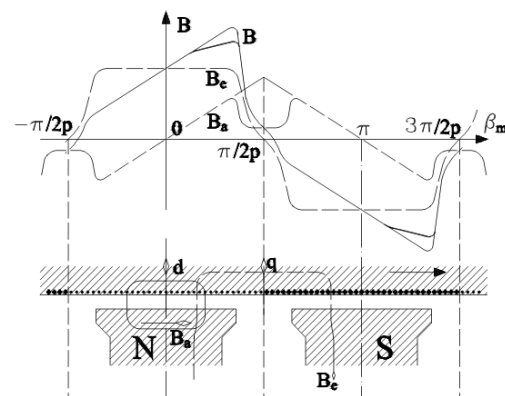


FIGURE 4.12

#### Avec saturation

L'induction en charge est plus petite que la somme de l'excitation et la réaction d'induit. Le flux longitudinal est plus faible, causant une f.e.m. plus faible → *La réaction d'induit possède une composante longitudinale à cause de la saturation..* Pour décrire l'effet démagnétisant, trois hypothèses :

1. Lignes de forces radiales dans l'entrefer.
2. L'induction nulle en dehors des pôles.
3. Démonstration faite pour  $p = d = 1$ .

A vide, juste avec le courant d'excitation  $i_e$  on a  $A.t.e = N_e i_e$ . Si la spire n'est pas sous le pôle sa tension est nulle. Si par contre elle est sous le pôle elle sera  $\propto B_e$ . La courbe à vide donne le lien entre  $e$  et  $N_e i_e$  mais aussi la f.e.m. à une constante près.

Les courants induits causent également des A.t. de réactions d'induits qui varient linéairement entre la corne de sortie  $-A$  et d'entrée  $+A$  de la sorte :

$$A = \frac{N_e i_a}{2\pi} \frac{b_i}{2} \frac{b_i}{4\pi R} \quad (4.21)$$

Les A.t. varient ainsi linéairement de  $N_e i_e - A$  à  $N_e i_e + A$  (  $OP_1$  à  $OP_2$  sur le schéma page 4.33). **Lire le texte sur cette page, c'est assez confus.**

#### Couple électromécanique - Couple extérieur

La loi de Laplace ( $F + ilB$ ) permet de calculer la somme sur chaque conducteur pour ensuite les sommer, mais il est plus simple d'utiliser la conservation de la puissance : la somme de la puissance appliquée électriquement et de la puissance appliquée mécaniquement est nulle<sup>3</sup> :

$$\underbrace{[P_{\text{électrique}} - (P_{p\text{Joule}} + P_{p\text{magn}})]}_{P_{\text{électromécanique}}} + [P_{\text{mécane}} - P_{\text{meca}}] = 0 \quad (4.22)$$

où les pertes joules  $P_{pJ} = 0$  si  $\hat{i}_a = 0$ . Par contre les pertes magnétiques existent tout de même (hystérèse, Foucault, ...). Les pertes méca sont dues aux frottement (fonction de  $\Omega_r$ ). La puissance mécanique appliquée à un moteur est négative. On peut calculer le couple électromécanique  $P_{em} = C_{em} \Omega_r$ .

3. ? (en convention récepteur)