ULB ECOLE POLYTECHNIQUE DE BRUXELLES

Université Libre de Bruxelles

Synthèse

Théorie des signaux
ELEC-H-302

Auteur :
Nicolas Englebert

Professeur :
Antoine Nonclercq

Année 2015 - 2016

Appel à contribution

Synthèse Open Source

Ce document est grandement inspiré de l'excellent cours donné par Antoine Nonclercq à l'EPB (École Polytechnique de Bruxelles), faculté de l'ULB (Université Libre de Bruxelles). Il est écrit par les auteurs susnommés avec l'aide de tous les autres étudiants et votre aide est la bienvenue ! En effet, il y a toujours moyen de l'améliorer surtout que si le cours change, la synthèse doit être changée en conséquence. On peut retrouver le code source à l'adresse suivante

`https://github.com/nenglebert/Syntheses`

Pour contribuer à cette synthèse, il vous suffira de créer un compte sur *Github.com*. De légères modifications (petites coquilles, orthographe, ...) peuvent directement être faites sur le site ! Vous avez vu une petite faute ? Si oui, la corriger de cette façon ne prendra que quelques secondes, une bonne raison de le faire !

Pour de plus longues modifications, il est intéressant de disposer des fichiers : il vous faudra pour cela installer LaTeX, mais aussi *git*. Si cela pose problème, nous sommes évidemment ouverts à des contributeurs envoyant leur changement par mail ou n'importe quel autre moyen.

Le lien donné ci-dessus contient aussi le `README` contient de plus amples informations, vous êtes invités à le lire si vous voulez faire avancer ce projet !

Licence Creative Commons

Merci !

Chapitre 1

Signaux et systèmes

Un *signal* représente une information concernant le comportement ou l'état d'un phénomène. Ce signal est représenté mathématiquement par une fonctions. Un *système* agit sur des signaux d'entrée et produit, à sa sortie, des signaux sous une forme plus appropriée pour l'utilisation envisagée.

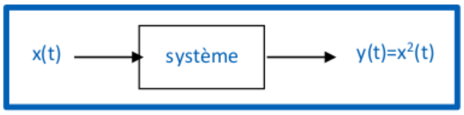

FIGURE 1.1 – Exemple de système

1.1 Signaux

Il existe deux types de signaux

1. *A temps continu* ; fonction $f(t)$ est définie pour toute valeur de la variable indépendante t.
2. *A temps discret*[1] ; fonction définie seulement pour des valeurs discrète de la variable indépendante. Il s'agit par exemple d'une suite de valeurs $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

$$x(n), \qquad n \in \mathbb{N} \tag{1.1}$$

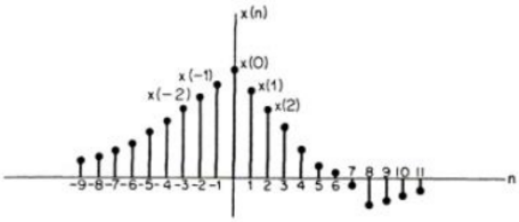

FIGURE 1.2

Souvent, on procède à un *échantillonnage* d'un signal à temps continu (TC) pour obtenir un signal à temps discret (TD)

$$x(n) = f(nT) \tag{1.2}$$

où x est discret, f continu et T est la période d'échantillonnage.

Le signal à TD se distingue du signal à TC par la *quantification* de sa variable indépendante (t). On pourrait également envisager la quantification de l'amplitude : un signal est dit *numérique* lorsque t et l'amplitude sont quantifiées et *analogique* lorsque ces deux valeurs évoluent de façon continues.

1.1.1 Signaux déterministes ou aléatoires

Dans un signal *déterministe*, l'évolution en fonction du temps (ou de la variable indépendantes) est à priori connue. Par contre, l'évolution temporelle[2] d'un signal *aléatoire*.

1. ou *signal échantillonné*
2. Je considère que la variable indépendante sera le temps dans ce chapitre.

1.1.2 Signaux à énergie finie et signaux à puissance moyenne finie

Signaux à énergie finie

L'énergie et la puissance d'un signal $x(t)$ sur $t \in [t_1; t_2]$ est donnée par (le module permet la généralisation aux fonction complexes)

$$E(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 \; dt, \qquad P(t_1, t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 \; dt \tag{1.3}$$

L'énergie du signal à TC sera dite finie si

$$E \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \; dt < \infty \tag{1.4}$$

Pour le signal TD, il suffit de remplacer $\int_{-\infty}^{+\infty}$ par $\sum_{-\infty}^{+\infty}$.
La puissance moyenne totale de tels signaux est nulle : ils sont de types transitoires et les seuls physiquement accessibles.

Signaux à puissance moyenne finie

La puissance moyenne finie (TC et TD) pour un signal x

$$P = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 \; dt, \qquad P = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{-T}^{+N} |x(n)|^2 \tag{1.5}$$

est bornée et non nulle ($0 < P < \infty$). Dès lors, l'énergie de ces signaux est infinie (signaux périodiques et aléatoires stationnaires). Les signaux à énergie et puissance infinie n'appartiennent à aucune des deux catégories précédentes.

1.2 Systèmes

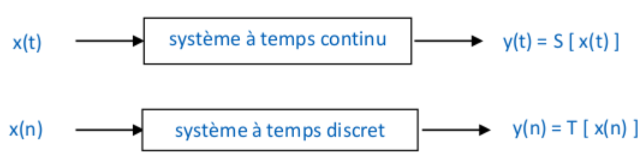

FIGURE 1.3

Ceux-ci réalisent la transformations de signaux, on utilise dès lors la même terminologie (TC, TD, numérique, analogique). Notons qu'il existe également des structures hybrides. On représente un système par un opérateur fonctionnel établissant une règle de correspondance entre deux ensembles de fonctions.

1.2.1 Caractéristiques de systèmes

Linéarité

Un TC/TD est linéaire s'il satisfait au principe de superposition

$$S[ax_1(t) + bx_2(t)] = aS[x_1(t)] + bS[x_2(t)], \qquad T[ax_1(n) + bx_2(n)] = aT[x_1(n)] + bT[x_2(n)] \tag{1.6}$$

où $a, b \in \mathbb{C}$. Une entrée nulle ($\forall t$ ou n) suscite une réponse nulle : $y(n) = 2x(n) + 3$ n'est ainsi pas linéaire (waw).

Permanence (invariance dans le temps)

Un système est permanent si un décalage temporel du signal d'entrée produit le même décalage du signal de sortie.
- TC ; $y(t) = S[x(t)] \quad \Rightarrow \quad y(t-t_0) = S[x(t-t_0)] \qquad \forall t_0 \in \mathbb{R}$
- TD ; $y(t) = T[x(n)] \quad \Rightarrow \quad y(t-k) = T[x(n-k)] \qquad \forall k \in \mathbb{Z}$

Causalité

Un système est dit *causal* si le signal de sortie à tout instant ne dépend que des valeurs passées et présente du signal d'entrée. On l'exprime
- TC ;
  - $x_1(t) = x_2(t)$ pour $t \leq t_0 \quad \Rightarrow \quad y_1(t) = y_2(t)$ pour $t \leq t_0$.
  - $x(t) = 0$ pour $t \leq t_0 \quad \Rightarrow \quad y(t) = 0$ pour $t \leq t_0$.
- TD ;
  - $x_1(n) = x_2(n)$ pour $n \leq n_0 \quad \Rightarrow \quad y_1(n) = y_2(n)$ pour $n \leq n_0$.
  - $x(n) = 0$ pour $n \leq n_0 \quad \Rightarrow \quad y(n) = 0$ pour $n \leq n_0$.

Notons qu'un système est toujours causal si t (ou n) est le temps réel.

Stabilité

Un système est dit stable (au sens strict) si tout signal d'entrée bornée produit une sortie également bornée (stabilité BIBO (bounded input bounded output) :
- TC ; $|x(t)| \leq B_x < \infty \quad \forall t \quad \Rightarrow \quad |y(t)| \leq B_y < \infty \quad \forall t$
- TD ; $|x(n)| \leq B_x < \infty \quad \forall n \quad \Rightarrow \quad |y(n)| \leq B_y < \infty \quad \forall n$