Université Libre de Bruxelles

Rappels théoriques

Mécanique des solides et des fluides
CNST-H-202

Auteur :
Enes Ulusoy

Année 2014 - 2015

TP 1 : Notations indicielles

Notation indicielles

- Indice libre :
  - N'apparaît qu'une seule fois
  - Réprésente une composante
  - Doit apparaître dans tous les termes
- Indice muet :
  - Apparaît deux fois
  - Représente une sommation

Symbole de Kronecker

- A 2 indices :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases} \tag{1}$$

- A 3 indices :

$$\delta_{ijk} = \begin{cases} 1 \text{ si permutation paire des indices} \\ -1 \text{ si permutation impaires des indices} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \tag{2}$$

- Formule d'expulsion

$$\delta_{ijk}\delta_{ipq} = \delta_{jp}\delta_{kq} - \delta_{jq}\delta_{kp} \tag{3}$$

Tenseur d'ordre 2

Le tenseur des contraintes est défini comme

$$\overline{T}^{(n)} = \overline{T}_i n_i = T_{ij}\overline{1x}_j \cdot n_i \tag{4}$$

Matriciellement cela revient à

$$\overline{T}^{(n)} = \overline{n}\overline{\overline{T}} \tag{5}$$

Ce qui nous donne en fait la composante en j du tenseur

$$T_j^{(n)} = T_{ij}n_i \rightarrow \overline{T}^{(n)} = T_j^{(n)}\overline{1x}_j \tag{6}$$

- Propriétés :
  - Changement d'axe : $T'_{pq} = \alpha_{pi}\alpha_{qj}T_{ij}$
  - Tenseur symétrique : $T_{ij} = T_{ji}$
  - Tenseur antisymétrique : $T_{ij} = -T_{ji}$

Divers

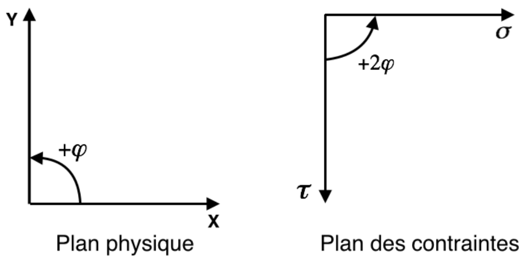
- Gradient : $\partial_i\varphi$
- Divergence : $\partial_i\varphi_i = \varphi_{i,i}$
- Rotationel : $\delta_{ijk}\partial_j\varphi_k$
- Laplacien : $\partial_{ii}\varphi$
- Produit scalaire : $a \cdot b = a_i b_i$
- Produit vectoriel : $a \times b = \delta_{ijk}a_j b_k$

TP 2 : Cercle de Mohr (tenseur des contraintes)

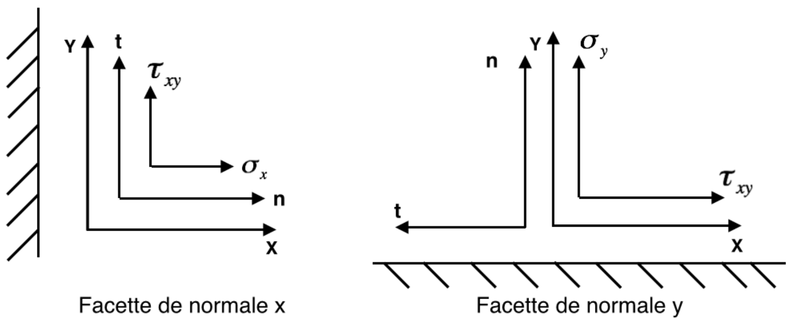
- Représentation de l'état de contrainte en un point considéré
- Il faut donc connaître le tenseur de contrainte $\overline{\overline{T}}$
- Rappel : $\overline{\overline{T}} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix}$ est symétrique

Conventions

Attention à l'angle qu'il faut diviser par 2 pour avoir l'équivalent dans le physique.



Dans le plan physique, l'orientation de la facette est celle de σ et τ est perpendiculaire, pointant vers la contrainte de plus grand module !



Construction

$$\overline{\overline{T}} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix} \text{ est connu} \tag{7}$$

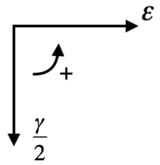
Les composants de la matrice sont les composants du tenseur dans le cercle de Mohr. De cette manière, x est représentatif de la facette de normale x et y pour la facette de normale y. On a

$$x(\sigma_x, \tau_{xy}) \qquad y(\sigma_y, -\tau_{xy}) \tag{8}$$

- Valeurs principales : σ_1 et σ_2
- Directions principales : angle entre l'horizontale et x
- Valeurs extrémales : τ_{max} et τ_{min}

TP 3 : Cercle de Mohr (tenseur des déformations)

Tracé



Même principe que pour les tenseurs de contraintes. On commence par tracer les axes (où ϵ est l'axe des déformations longitudinales et $\frac{\gamma}{2}$ l'axe des déformations angulaires)

- On connaît cette fois $a_{ij} = \begin{pmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \epsilon_y \end{pmatrix}$
- On représente $x(\epsilon_x, \gamma_{xy})$ et $y(\epsilon_y, \gamma_{xy})$ dont les composants sont en *microstrenght*

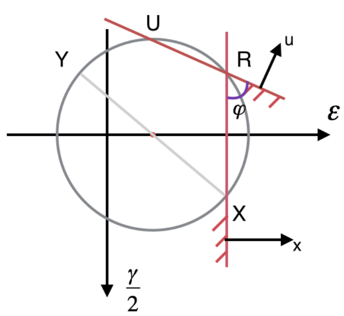
Tenseurs des déformations évanouissantes

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \epsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \epsilon_z \end{pmatrix} \qquad a_{ij} = \frac{1}{2}(a_{i,j} + a_{j,i}) \tag{9}$$

Formules utiles

- Tenseur des rotations
$$\mu_{[i,j]} = \frac{1}{2}(\mu_{i,j} - \mu_{j,i}) \tag{10}$$
- Déformation axiale dans la direction $\vec{\nu}$
$$\vec{\nu} = \nu_i \overline{1}_{x_i} \rightarrow \epsilon_\nu = a_{ij}\nu_j\nu_i \tag{11}$$
- Angle après déformation
$$\gamma_{\nu\mu} = 2a_{\nu\mu} = 2a_{ij}\nu_j\mu_i \rightarrow angle = \frac{\pi}{2} - \gamma_{\nu\mu} \tag{12}$$
Remarque : $\Delta L = L.\epsilon$
- Loi de Hooke
$$a_{ij} = \frac{1}{E}[(1+\nu)\tau_{ij} - \nu\delta_{ij}\tau_{kk}] \tag{13}$$

Remarque



Durant ce tp on utilise le *point de rayonnement* (intersection de la verticale passant par x avec le cercle). Cela nous permet de mesurer directement l'angle φ et non 2φ, mais aussi de représenter directement le plan physique sur le dessin (généralement on représente le vecteur physique du même côté que le point).

TP 4 - 5 : Hydrostatique

Principe d'Archimède

- Soit $\overline{A}$ l'action du fluide sur le corps

$$\overline{A} = \oint_S (-p)\overline{n}\, dS \tag{14}$$

- Equilibre du corps immergé : $\overline{A} + \overline{R} = 0$
- $\overline{R}$: Résultante des forces exercées sur le corps sous l'action du fluide
- $\overline{A}$: Résultante des forces de pression exercées par le fluide sur le corps
- **Postulat** : *L'équilibre ne change pas si on remplace le corps immergé par du fluide*

$$\int_V -\rho_f g \overline{1}_z\, dV + \overline{A} = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{A} = \int_V \rho_f g \overline{1}_z\, dV \tag{15}$$

- **Attention** : il faut que tout le volume soit immergé pour appliquer Archimède

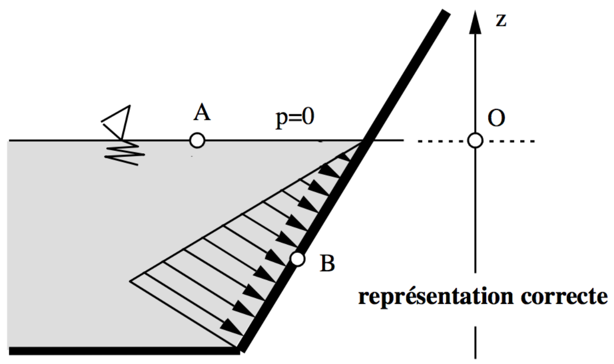
Principe de Pascal

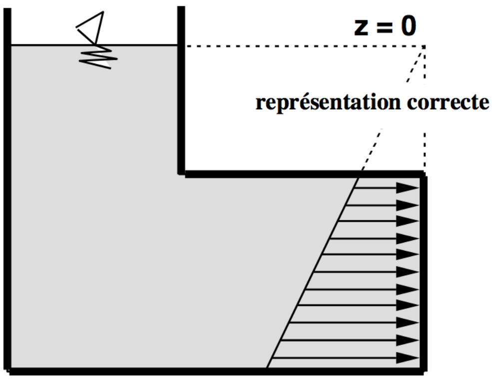
$$p + \rho g z = cst \tag{16}$$

Si en un point du fluide incompressible en équilibre isotherme, la pression est accrue de Δp, tous les points subissent cet accroissement

Répartition des pressions sur un obstacle

- La pression est toujours orienté selon la normale à la surface
- On choisit une pression de référence : $p_{ref} = 0$ ou $p_{ref} = p_{atm} = 101325\, Pa$
- On trouve l'évolution de la pression grâce au principe de Pascal





TP 6 - 7 : Cinématique des fluides parfaits

Loi de comportement générale des fluides

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda\delta_{ij}V_{kk} + 2\mu V_{ij} \tag{17}$$

où λ et μ sont les coefficients de viscosité.

Théorème de Bernouilli

- Hypothèses :
  - Fluide parfait $\Rightarrow \tau_{ij} = -p\delta_{ij}$
  - Fluide incompressible $\Rightarrow \rho^\bullet = 0$
  - Ecoulement permanent $\Rightarrow \partial_0 v_i = 0$
- Théorème :
  Dans un écoulement permanent d'un fluide parfait soumis à un champ de force massique dérivant d'un potentiel, l'énergie spécifique totale est constante le long d'une ligne de courant.
  $$\epsilon = gz + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = cst \tag{18}$$
  le long d'une ligne de courant.
  Attention : ϵ est une énergie par unité de masse $[J/kg] = [m^2/s^2]$
- Charge :
  $$H = \frac{\epsilon}{g} = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} \tag{19}$$

Conservation du débit

Permet de calculer la vitesse du fluide si la surface de passage change

$$Q = vS = cst \tag{20}$$

Cavitation

- Correspond au changement de phase dans un fluide
- Si $p \searrow \Rightarrow T \nearrow$, formation de bulles dû à la faible pression et il y a formation de bulles. Il y a donc cavitation lorque $p < p_{vap}$ (tension de vapeur)
- Ecoulement impossible

Remarque

- Si le réservoir est grand on considère que l'écoulement est assez lent que pour faire varier la hauteur
- Le *principe de Pascal* ne s'applique qu'en statique ! En dynamique on utilise *Bernouilli*

Ligne de charge, piézométrique et de courant

- La première est juste la représentation de H en fonction de l'endroit (cst)
- La deuxième consiste à reporter $v^2/(2g)$ selon l'endroit **mais par rapport à la charge !**
- La dernière est la représentation de la hauteur de la ligne d'écoulement en fonction de l'endroit. **La différence avec la courbe piézométrique donne** $p/\rho g$.