



ECOLE
POLYTECHNIQUE
DE BRUXELLES

UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES

SYNTHÈSE

Théorie des signaux ELEC-H-302

Auteur :
Nicolas ENGLEBERT

Professeur :
Antoine NONCLERCQ

Année 2015 - 2016

Appel à contribution

Synthèse Open Source



Ce document est grandement inspiré de l'excellent cours donné par Antoine Nonclercq à l'EPB (École Polytechnique de Bruxelles), faculté de l'ULB (Université Libre de Bruxelles). Il est écrit par les auteurs susnommés avec l'aide de tous les autres étudiants et votre aide est la bienvenue! En effet, il y a toujours moyen de l'améliorer surtout que si le cours change, la synthèse doit être changée en conséquence. On peut retrouver le code source à l'adresse suivante

<https://github.com/nenglebert/Syntheses>

Pour contribuer à cette synthèse, il vous suffira de créer un compte sur *Github.com*. De légères modifications (petites coquilles, orthographe, ...) peuvent directement être faites sur le site! Vous avez vu une petite faute? Si oui, la corriger de cette façon ne prendra que quelques secondes, une bonne raison de le faire!

Pour de plus longues modifications, il est intéressant de disposer des fichiers : il vous faudra pour cela installer \LaTeX , mais aussi *git*. Si cela pose problème, nous sommes évidemment ouverts à des contributeurs envoyant leur changement par mail ou n'importe quel autre moyen.

Le lien donné ci-dessus contient aussi le README contient de plus amples informations, vous êtes invités à le lire si vous voulez faire avancer ce projet!

Licence Creative Commons

Le contenu de ce document est sous la licence Creative Commons : *Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International (CC BY-NC-SA 4.0)*. Celle-ci vous autorise à l'exploiter pleinement, compte- tenu de trois choses :



1. *Attribution* ; si vous utilisez/modifiez ce document vous devez signaler le(s) nom(s) de(s) auteur(s).
2. *Non Commercial* ; interdiction de tirer un profit commercial de l'œuvre sans autorisation de l'auteur
3. *Share alike* ; partage de l'œuvre, avec obligation de rediffuser selon la même licence ou une licence similaire

Si vous voulez en savoir plus sur cette licence :

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Merci !

Chapitre 1

Signaux et systèmes

Un *signal* représente une information concernant le comportement ou l'état d'un phénomène. Ce signal est représenté mathématiquement par une fonction. Un *système* agit sur des signaux d'entrée et produit, à sa sortie, des signaux sous une forme plus appropriée pour l'utilisation envisagée.

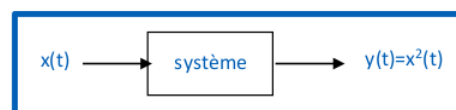


FIGURE 1.1 – Exemple de système

1.1 Signaux

Il existe deux types de signaux

1. *A temps continu* ; fonction $f(t)$ est définie pour toute valeur de la variable indépendante t .
2. *A temps discret*¹ ; fonction définie seulement pour des valeurs discrètes de la variable indépendante. Il s'agit par exemple d'une suite de valeurs \mathbb{R} ou \mathbb{C}

$$x(n), \quad n \in \mathbb{N} \quad (1.1)$$

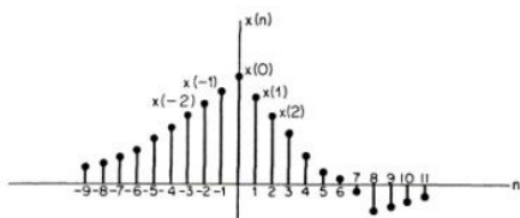


FIGURE 1.2

Souvent, on procède à un *échantillonnage* d'un signal à temps continu (TC) pour obtenir un signal à temps discret (TD)

$$x(n) = f(nT) \quad (1.2)$$

où x est discret, f continu et T est la période d'échantillonnage.

Le signal à TD se distingue du signal à TC par la *quantification* de sa variable indépendante (t). On pourrait également envisager la quantification de l'amplitude : un signal est dit *numérique* lorsque t et l'amplitude sont quantifiées et *analogique* lorsque ces deux valeurs évoluent de façon continues.

1.1.1 Signaux déterministes ou aléatoires

Dans un signal *déterministe*, l'évolution en fonction du temps (ou de la variable indépendante) est à priori connue. Par contre, l'évolution temporelle² d'un signal *aléatoire*.

1. ou *signal échantillonné*

2. Je considère que la variable indépendante sera le temps dans ce chapitre.

1.1.2 Signaux à énergie finie et signaux à puissance moyenne finie

Signaux à énergie finie

L'énergie et la puissance d'un signal $x(t)$ sur $t \in [t_1; t_2]$ est donnée par (le module permet la généralisation aux fonction complexes)

$$E(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt, \quad P(t_1, t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt \quad (1.3)$$

L'énergie du signal à TC sera dite finie si

$$E \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < \infty \quad (1.4)$$

Pour le signal TD , il suffit de remplacer $\int_{-\infty}^{+\infty}$ par $\sum_{-\infty}^{+\infty}$.

La puissance moyenne totale de tels signaux est nulle : ils sont de types transitoires et les seuls physiquement accessibles.

Signaux à puissance moyenne finie

La puissance moyenne finie (TC et TD) pour un signal x

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt, \quad P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{-T}^{+T} |x(n)|^2 \quad (1.5)$$

est bornée et non nulle ($0 < P < \infty$). Dès lors, l'énergie de ces signaux est infinie (signaux périodiques et aléatoires stationnaires). Les signaux à énergie et puissance infinie n'appartiennent à aucune des deux catégories précédentes.

1.2 Systèmes

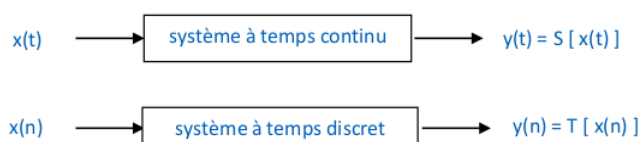


FIGURE 1.3

Ceux-ci réalisent la transformations de signaux, on utilise dès lors la même terminologie (TC, TD, numérique, analogique). Notons qu'il existe également des structures hybrides. On représente un système par un opérateur fonctionnel établissant une règle de correspondance entre deux ensembles de fonctions.

1.2.1 Caractéristiques de systèmes

Linéarité

Un TC/TD est linéaire s'il satisfait au principe de superposition

$$S[ax_1(t) + bx_2(t)] = aS[x_1(t)] + bS[x_2(t)], \quad T[ax_1(n) + bx_2(n)] = aT[x_1(n)] + bT[x_2(n)] \quad (1.6)$$

où $a, b \in \mathbb{C}$. Une entrée nulle ($\forall t$ ou n) suscite une réponse nulle : $y(n) = 2x(n) + 3$ n'est ainsi pas linéaire (waw).

Permanence (invariance dans le temps)

Un système est permanent si un décalage temporel du signal d'entrée produit le même décalage du signal de sortie.

- TC ; $y(t) = S[x(t)] \Rightarrow y(t - t_0) = S[x(t - t_0)] \quad \forall t_0 \in \mathbb{R}$
- TD ; $y(t) = T[x(n)] \Rightarrow y(t - k) = T[x(n - k)] \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

Causalité

Un système est dit *causal* si le signal de sortie à tout instant ne dépend que des valeurs passées et présente du signal d'entrée. On l'exprime

- TC ;
 - * $x_1(t) = x_2(t)$ pour $t \leq t_0 \Rightarrow y_1(t) = y_2(t)$ pour $t \leq t_0$.
 - * $x(t) = 0$ pour $t \leq t_0 \Rightarrow y(t) = 0$ pour $t \leq t_0$.
- TD ;
 - * $x_1(n) = x_2(n)$ pour $n \leq n_0 \Rightarrow y_1(n) = y_2(n)$ pour $n \leq n_0$.
 - * $x(n) = 0$ pour $n \leq n_0 \Rightarrow y(n) = 0$ pour $n \leq n_0$.

Notons qu'un système est toujours causal si t (ou n) est le temps réel.

Stabilité

Un système est dit stable (au sens strict) si tout signal d'entrée bornée produit une sortie également bornée (stabilité BIBO (bounded input bounded output) :

- TC ; $|x(t)| \leq B_x < \infty \quad \forall t \Rightarrow |y(t)| \leq B_y < \infty \quad \forall t$
- TD ; $|x(n)| \leq B_x < \infty \quad \forall n \Rightarrow |y(n)| \leq B_y < \infty \quad \forall n$

Chapitre 2

Signaux et systèmes discrets

2.1 Signaux discrets

2.1.1 Signaux particuliers

Passant en revue certains signaux particuliers

Échelon unité

$$\begin{aligned} u(n) &= 0 & n < 0 \\ &= 1 & n \geq 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Impulsion unité

$$\begin{aligned} \delta(n) &= 0 & n \neq 0 \\ &= 1 & n = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Ceux deux signons sont liés par les deux relations suivantes

$$\begin{aligned} u(n) &= \sum_{k=-\infty}^n \delta(k) \\ \delta(n) &= u(n) - u(n-1) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Exponentielle

$$\begin{aligned} x(n) &= a^n \\ x(n) &= e^{\sigma + j\omega_0}n = e^{\sigma n}(\cos \omega_0 n + j \sin \omega_0 n) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Sinusoidal

$$x(n) = A \sin(\omega_0 n + \Phi) \quad (2.5)$$

Périodique

$$x(n) = x(n + N) \quad \forall n \quad (2.6)$$

Intéressons nous à l'exponentielle complexe

$$x(n) = e^{j\omega_0 n} \quad (2.7)$$

On peut remarquer que si on considère $\omega'_0 = \omega_0 + 2k\pi$, on retrouve le même signal

$$e^{j(\omega_0 + 2k\pi)n} = e^{j\omega_0 n} e^{j2k\pi n} = e^{j\omega_0 n} \quad (2.8)$$

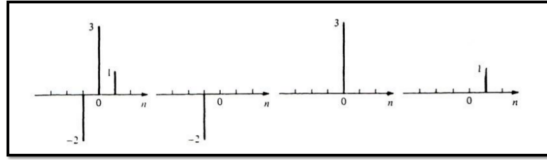
Il est alors possible de restreindre la pulsation $\omega_0 \in [0; 2\pi[$. Cependant, contrairement aux signaux continus, l'exponentielle complexe n'est pas toujours périodique dans le cas discret.

$$\begin{aligned} x(n) &= x(n + N) \\ \Leftrightarrow e^{j\omega_0 n} &= e^{j\omega_0(n+N)} = e^{j\omega_0 n} e^{j\omega_0 N} \\ \Leftrightarrow e^{j\omega_0 N} &= 1 \\ \Leftrightarrow \omega_0 N &= 2m\pi \Rightarrow \omega_0 = m \frac{2\pi}{N} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Il faut forcément que ω_0 soit un multiple entier de $2\pi/N$. Or, nous avons limité le domaine de ω_0 : il n'existe que N exponentielles distinctes de période N :

$$\Phi_k(n) = e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.10)$$

Représentation d'un signal au moyen d'impulsions



$$x(n) = -2\delta(n+1) + 3\delta(n) + \delta(n-1)$$

FIGURE 2.1

Il est toujours possible un signal $x(n)$ sous la forme

$$x(n) = \sum_{-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k) \quad (2.11)$$

2.2 Systèmes à temps discret, linéaires et permanents

On appelle *réponse impulsionnelle* $h(n)$ le signal de sortie lorsque le signal d'entrée est un delta de Dirac $\delta(n)$

$$h(n) = T[\delta(n)] \quad (2.12)$$

Comme vu à la sous-section ci-dessus, écrivons un signal d'entrée sous la forme d'impulsion

$$x(n) = \sum_{-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k) \quad (2.13)$$

Les "bornes" de la somme sont telles que l'on sélectionne tout. La sortie devient

$$y(n) = T\left[\sum_{-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)\right] \quad (2.14)$$

Par linéarité, le système ne s'applique qu'à l'impulsion

$$y(n) = \sum_{-\infty}^{\infty} x(k)T[\delta(n-k)] \quad (2.15)$$

Appliquons la propriété de permanence : rien ne change si on effectue cette opération à cet instant, ou plus tard :

$$y(n) = \sum_{-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) \quad (2.16)$$

Il s'agit de la *formule de convolution* (discrète) qui exprime la sortie en fonction de la réponse d'entrée pour tout signal

$$y(n) = x(n) * h(n) \quad (2.17)$$

Le système est donc entièrement caractérisé par sa réponse impulsionnelle, $x(n)$ étant déjà connu. La convolution est commutative, on peut dès lors écrire

$$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \quad (2.18)$$

2.2.1 Association de systèmes

Cascade

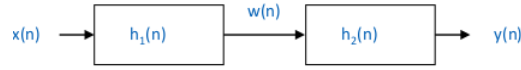


FIGURE 2.2

$$\begin{aligned} w(n) &= x(n) * h_1(n) \\ y(n) &= w(n) * h_2(n) = [x(n) * h_1(n)] * h_2(n) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Convolution associative

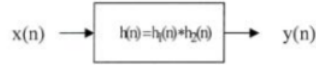


FIGURE 2.3

$$y(n) = x(n) * [h_1(n) * h_2(n)] = x(n) * h(n) \quad (2.20)$$

En parallèle

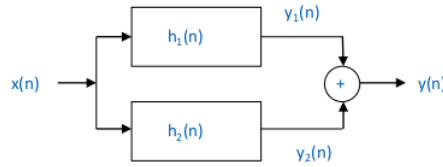


FIGURE 2.4

$$\begin{aligned} y_1(n) &= x(n) * h_1(n) \\ y_2(n) &= x(n) * h_2(n) \\ y_n(n) &= y_1(n) + y_2(n) = x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n) \end{aligned} \quad (2.21)$$

Distributive pour l'addition

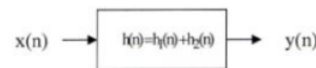


FIGURE 2.5

$$y(n) = x(n) * [h_1(n) + h_2(n)] = x(n) * h(n) \quad (2.22)$$

2.2.2 Stabilité

Nous avons précédemment vu la définition de la stabilité. La *CNS* de stabilité pour un SLP est

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty \quad (2.23)$$

Démonstration.

▷ La condition est suffisante.

Hypothèses :

1. $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty$
2. Le signal d'entrée $x(n)$ est borné : $|x(n)| < A \quad \forall n$

Calculons le signal de sortie

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \quad (2.24)$$

Majorons

$$y(n) \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)||x(n-k)| \leq A \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty \quad (2.25)$$

Le signal de sortie est borné, le système est donc stable.

▷ La condition est nécessaire.

Nous pouvons choisir n'importe quel signal d'entrée, considérons ce signal particulier :

$$\begin{aligned} x(n) &= 1 && \text{si } h(-n) \geq 0 \\ &= -1 && \text{si } h(-n) < 0 \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$x(n) = \text{sign } h(-n)$$

Ce signal d'entrée est construit tel que le produit entre $h(n) * x(n)$ donne la valeur absolue de h : si h est positif il ne se passe rien, si le signe est négatif le signal multiplie par (-1) de sorte à avoir un signe positif. Ce signal est bien borné

$$|x(n)| = 1 \quad (2.27)$$

Calculons l'échantillon de sortie $y(0)$:

$$y(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| \quad (2.28)$$

La sortie $y(0)$ ne sera borné que si la réponse impulsionnelle est absolument sommable, la condition est bien nécessaire. \square

2.2.3 Causalité

Par définition $y(n)$ n'est causal que s'il dépend de $x(n)$ mais pas de $x(n+1), \dots$. Pour que $y(n)$ ne dépende pas de $x(k)$ pour $k > n$, il faut que $h(n) = 0$ pour $n < 0$, soit la CNS de causalité. La réponse impulsionnelle doit être causale, il faut alors stopper la somme à n

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k)h(n-k) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k) \quad (2.29)$$

2.3 Systèmes décrits par une récurrence linéaire

La récurrence linéaire est définie par

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) \quad (2.30)$$

Il en résultera une *ED* donnant lieu à une infinité de solution : on impose des CI pour garantir l'existence et l'unicité de la solution (cf. *Analyse I, II et III*).

EXEMPLE : Considérons la récurrence du premier ordre

$$y(n) - ay(n-1) = x(n) \implies y(n) = x(n) + ay(n-1) \quad (2.31)$$

Considérons initialement une condition de repos et le signal d'entrée suivant :

$$x(n) = b\delta(n) \quad (2.32)$$

On a alors

$$\begin{aligned} y(-1) &= x(-1) &&= 0 \\ y(0) &= x(0) + ay(-1) &&= x(0) = b \\ y(1) &= x(1) + ay(0) &&= ab \\ y(2) &= x(2) + ay(1) &&= a^2b \\ y(n) &= x(n) + ay(n-1) &&= a^n b \end{aligned} \quad (2.33)$$

La solution particulière vaut alors

$$y(n) = a^n bu(n) \quad (2.34)$$

Vérifions que ceci est bien solution de $x(n) = y(n) - ay(n-1)$ avec

$$\begin{cases} y(n) &= a^n bu(n) \\ y(n-1) &= a^{n-1} bu(n-1) \end{cases} \quad (2.35)$$

Après substitution dans l'équation de récurrence, on trouve

$$a^n b(u(n) - u(n-1)) = b\delta(n) \quad (2.36)$$

En effet, $(u(n) - u(n-1))$ n'est rien d'autre que l'impulsion. Cependant, nous avons un facteur a^n en trop. Est-ce une erreur ? Discussions en fonction de n

$$a^n b\delta(n) = b\delta(n) \begin{cases} \text{Si } n = 0 & a^0 b\delta(0) = b\delta(0) = b \\ \text{Si } n \neq 0 & a^n b0 = b0 = 0 \end{cases} \quad (2.37)$$

Notre solution particulière est bien solution ! Il reste à calculer la solution générale de la récurrence homogène

$$y(n) - ay(n-1) = 0 \quad (2.38)$$

La solution sera $y(n) = ka^n$ (on peut vérifier que c'est bien le cas). En imposant ^a $y(-1) = c$, on trouve comme S.G. (SGEH + SPEnH) :

$$y(n) = ca^{n+1} + ba^n u(n) \quad (2.39)$$

La solution au système linéaire étant *causal*, on dit ciao-ciao au terme en $n+1$:

$$y(n) = a^n bu(n) \quad (2.40)$$

Si le signal d'entrée est une impulsion de Dirac $\delta(n)$, le signal de sortie sera la réponse impulsionnelle. Posons $b = 1$

$$h(n) = a^n u(n) \quad (2.41)$$

^a. Choix arbitraire donnant un résultat propre, mais ici non linéaire ! Pour avoir une solution linéaire, il aurait fallu poser $y(-1) = 0$. L'avantage de considérer en (-1) est que l'échelon u s'annule.

EXEMPLE :

Nous avons ainsi entièrement caractérisé notre SLP. Voyons ce que vaut le signal de sortie pour un échelon unitaire

$$\begin{aligned}y(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) \\&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k)a^nu(n-k) \\&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^nu(n-k) \\&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^n\end{aligned}\tag{2.42}$$

Il est possible de retrouver cette réponse en partant directement de la relation de récurrence, comme l'illustre le slide T22.

Chapitre 3

Analyse de Fourier des systèmes à temps discret

Dans le cas d'un signal périodique, la série de Fourier était utilisée

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (3.1)$$

où l'on peut voir a_k comme le coefficient de pondération de chaque exponentielle complexe. Dans le cas où les signaux n'étaient pas périodiques, la *transformée de Fourier* (et inverse) a (ont) été définie(s)

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt, \quad x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (3.2)$$

Le *théorème de convolution* peut permettre un traitement plus aisé de la convolution

$$y(t) = x(t) * h(t) \quad \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \quad Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega) \quad (3.3)$$

3.1 Réponse à une exponentielle complexe

Considérons l'entrée suivante

$$x(n) = z^n, \quad z = e^{j\omega_0} \quad \Rightarrow \quad x(n) = e^{j\omega_0 n} \quad (3.4)$$

où $-\infty < n < \infty$. Le signal de sortie est donnée en effectuant la convolution

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)z^{n-k} = z^n \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)z^{-k}}_{H(z) \in \mathbb{C}} \\ &= H(z)z^n \end{aligned} \quad (3.5)$$

En effet, la dernière somme peut être vue comme une constante complexe (dépendant de z et du SLP). Cette sortie n'est que la fonction d'entrée multipliée par quelque chose : $z^n, z \in \mathbb{C}$ est une *fonction propre* de tout SLP discret.

Si par hasard le signal d'entrée peut se mettre sous la forme d'une somme d'exponentielle complexe (fonction propre) multipliée par un scalaire

$$x(n) = \sum_p a_p z_p^n \quad (3.6)$$

La réponse s'obtient par simple application de la linéarité

$$y(n) = \sum_p a_p H(z_p) z_p^n \quad (3.7)$$

Ceci justifie l'analyse de Fourier pour les systèmes discrets.

3.2 Série de Fourier discrète

Il est possible de développer en série de Fourier un signal périodique (période T_0) à **TC** $x(t)$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk \frac{2\pi}{T_0} t} \quad (3.8)$$

Il est dès lors tentant de vouloir faire de même pour un signal à **TD** périodique, de période N ($x(n) = x(n + N)$) comme une combinaison d'exponentielle discrète de période N .

Nous avons vu qu'il n'existe que N exponentielles discrètes distinctes de période N . C'est le cas ssi

$$\omega_0 = m \frac{2\pi}{N} \quad m \in \mathbb{Z} \quad (3.9)$$

La sommation est ainsi limitée à ces N termes

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{jk \frac{2\pi}{N} n} \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.10)$$

Il faut ainsi résoudre un système de N équations à N inconnues pour déterminer les a_k d'une série $x(n)$ donnée :

$$\begin{cases} x(0) &= \sum_{k=0}^{N-1} a_k \\ x(1) &= \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{jk \frac{2\pi}{N}} \\ \dots & \\ x(N-1) &= \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{jk \frac{2\pi}{N} (N-1)} \end{cases} \quad (3.11)$$

EXEMPLE : Déterminons la série de Fourier $x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{jk \frac{2\pi}{N} n}$ $n = 0, 1, \dots, N-1$ du signal ci-dessous (1,0,2,-1,...).



FIGURE 3.1

La série doit vérifier les points donnés, c'est-à-dire que le système ci-dessous doit être satisfait.

$$\begin{cases} x(0) = 1 = \sum_{k=0}^{4-1} a_k e^{j2\pi k 0/4} = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \\ x(1) = 0 = \sum_{k=0}^{4-1} a_k e^{j2\pi k 1/4} = a_0 + ja_1 - a_2 - ja_3 \\ x(2) = 1 = \sum_{k=0}^{4-1} a_k e^{j2\pi k 2/4} = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \\ x(3) = -1 = \sum_{k=0}^{4-1} a_k e^{j2\pi k 3/4} = a_0 - ja_1 - a_2 + ja_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 1/2 \\ a_1 = -\frac{1+j}{4} \\ a_2 = -1 \\ a_3 = -\frac{1-j}{4} \end{cases} \quad (3.12)$$

Cette représentation n'est valable que si l'on peut exprimer les a_k à partir de $x(n)$: il faut résoudre le système de N équations à N inconnues (3.10). Il faut pour cela calculer

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jm \frac{2\pi}{N} n} &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{j(k-m) \frac{2\pi}{N} n} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} a_k \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(k-m) \frac{2\pi}{N} n} \end{aligned} \quad (3.13)$$

La dernière somme peut être écrite

$$S = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j(k-m) \frac{2\pi}{N} n} = \sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n \quad (3.14)$$

où $\alpha = e^{-j(k-m) \frac{2\pi}{N}}$. Il s'agit de la série géométrique

$$S = \begin{cases} N & \text{si } \alpha = 1 \quad \text{c-à-d si } k-m = 0, \pm N, \pm 2N, \dots \\ \frac{1-\alpha^N}{1-\alpha} & \text{si } \alpha \neq 1 \quad \text{car } \alpha^N = 1 \end{cases} \quad (3.15)$$

ou encore

$$S = \begin{cases} N & \text{si } k-m = 0, \pm N, \pm 2N, \dots \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.16)$$

Si $m \in [0; N-1]$, S ne sera non nulle que pour $k = m$ et donc, en isolant

$$a_m = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jm \frac{2\pi}{N} n} \quad m = 0, \dots, N-1 \quad (3.17)$$

soit l'expression des coefficients de la série de Fourier discrète.

EXEMPLE : Reconsidérons le précédent exemple. Nous devrions retrouver les mêmes coefficients à partir de (3.17). Nous avons ici

$$a_m = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{4-1} x(n) e^{-jm \frac{2\pi}{N} n} = \frac{1}{4} (1 + 2e^{-jm\pi} - e^{-jm3\pi/2}) \quad (3.18)$$

On retrouve bien les mêmes coefficients.

$$\begin{cases} a_0 &= 1/2 \\ a_1 &= -\frac{1+j}{4} \\ a_2 &= -1 \\ a_3 &= -\frac{1-j}{4} \end{cases} \quad (3.19)$$

EXEMPLE : Pour le fun, calculons les coefficients de la série de Fourier de $x(n) = \sin\left(\frac{2\pi}{N}n\right)$.

On peut également écrire

$$x(n) = \frac{e^{j \frac{2\pi}{N} n} - e^{-j \frac{2\pi}{N} n}}{2j} \quad (3.20)$$

La série de Fourier ayant la forme $x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{j\pi kn/N}$, en en déduit directement les coefficients par identification

$$a_1 = \frac{1}{2j}, \quad a_{-1} = -\frac{1}{2j}, \quad a_x = 0 \text{ sinon.} \quad (3.21)$$

Ceci montre que $x(n)$ est intégralement (pfpfpf) défini par N paramètres¹ ; la série de Fourier discrète transforme ces N paramètres en N paramètres a_k . Nous utiliserons les notations suivantes (déplacement du facteur $1/N$) :

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} nk}, \quad x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j \frac{2\pi}{N} kn} \quad (3.22)$$

où $X(k)$ ($= X(k+N)$) est la *transformée de Fourier discrète* (DFT) de $x(n)$.

La linéarité appliquée en début de chapitre pour la sortie d'un SLP s'applique également ici de sorte que la sortie sera donnée par

$$y(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) H\left(e^{j \frac{2\pi}{N} k}\right) e^{j \frac{2\pi}{N} kn} \quad \text{où} \quad H\left(e^{j \frac{2\pi}{N} k}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} \quad (3.23)$$

Il s'agit d'une convolution où x est remplacé par sa série de Fourier.

3.3 Réponse en fréquence d'un système discret

En considérant comme signal d'entrée discret $x(n) = e^{j\omega n}$ (exponentielle unitaire), celle-ci étant fonction propre notre sortie sera

$$y(n) = H\left(e^{j\omega}\right) e^{j\omega n} \quad (3.24)$$

où $H\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) e^{-j\omega k}$ est la réponse en fréquence du système². L'idée est que H ne soit évalué que sur le cercle unitaire. Il s'agit d'une constante complexe pour ω fixé

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| e^{j \arg H\left(e^{j\omega}\right)} \quad (3.25)$$

Dès lors, pour un signal d'entrée réel du type $x(n) = A \cos(\omega_0 n + \varphi)$, la sortie vaut (superposition)

$$y(n) = A \left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right| \cos\left(\omega_0 n + \varphi + \arg H\left(e^{j\omega_0}\right)\right) \quad (3.26)$$

On peut considérer $H\left(e^{j\omega}\right)$ comme le développement de la fonction périodique H en série de Fourier (où ω est continu). Dès lors, on peut exprimer les échantillons $h(k)$ par la formule classique de calcul des coefficients d'une série de Fourier

$$h(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H\left(e^{j\omega}\right) e^{j\omega k} d\omega \quad (3.27)$$

exprimant la réponse impulsionnelle en fonction de la réponse fréquentielle.

| EXEMPLE : Slide T32/34

1. es N valeurs du signal sur une période.

2. On met une grandeur unitaire en entrée et on fait varier ω pour voir comment déduire en fréquence.

3.4 Transformée de Fourier d'un signal discret

Les deux relations

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\omega k}, \quad h(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})e^{j\omega k} d\omega \quad (3.28)$$

Celles-ci étaient utilisées pour calculer le spectre de la réponse impulsionnelle et son retour au domaine temporel ne se limite **pas** à elle : n'importe quel signal discret peut être transformé, même les **apériodiques** (différence avec la série de Fourier qui est nécessairement périodique). La *transformée de Fourier (et inverse) d'un signal apériodique* est définie par

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}, \quad x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega \quad (3.29)$$

La limitation sur $(-\pi, \pi)$ permet de considérer toutes les exponentielles complexes distinctes, évitant ainsi les répétitions.

Étudions la convergence de $X(e^{j\omega})$. Pour converger, $x(n)$ doit être absolument sommable

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty \quad (3.30)$$

Si ceci est vrai, cela implique la convergence uniforme vers une fonction continue de ω : la réponse en fréquence d'un système stable converge toujours. Une autre manière de vérifier la convergence est de vérifier que la transformée est de carré sommable (énergie finie)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 < \infty \quad (3.31)$$

Notons que toute fonction de carré sommable est forcément absolument sommable.

3.4.1 Propriétés de la transformée de Fourier

Bien évidemment, cette transformée est linéaire (étant elle-même une combinaison linéaire, ceci peut paraître logique). Différentes symétries sont proposées au slide T37, ceci ne sera pas revu ici.

Glissement

$$\begin{aligned} x(n - n_0) &\Leftrightarrow e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega}) \\ e^{j\omega_0 n} x(n) &\Leftrightarrow X(e^{j(\omega - \omega_0)}) \end{aligned} \quad (3.32)$$

Parseval

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega \quad (3.33)$$

Ceci montre que l'énergie dans le domaine temporel correspond à l'énergie dans le domaine fréquentiel.

Convolution

Considérons notre convolution fétiche : $y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n-k)x(k)$. Calculons le spectre de $y(n)$

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n-k)x(k)e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n-k)e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)e^{-j\omega k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n-k)e^{-j\omega n}e^{-j\omega(n-k)} = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) \end{aligned} \quad (3.34)$$

La dernière étape fait apparaître la définition des spectres X et H . Le résultat n'est qu'une simple multiplication dans le domaine fréquentiel.

Modulation

Soit $y(n) = x_1(n)x_2(n)$. En calculant le spectre³

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\theta})X_2(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} X_1(e^{j\omega}) \otimes X_2(e^{j\omega}) \end{aligned} \quad (3.35)$$

où \otimes est la convolution périodique des deux spectres.

3.5 Transformée de Fourier des signaux périodiques

Regardons ce que donne cette transformée pour un signal périodique ("qui peut le plus peut le moins"). Soit $x_1(n)$ un signal **a**périodique, de transformée de Fourier $X_1(e^{j\omega})$. Construisons un signal périodique $x(n)$ de période N

$$x(n) = \sum_{r=-\infty}^{N-1} x_n(n+rN) \quad (3.36)$$

Il existe d'autres façon de construire un tel signal. Calculons les coefficients $X_d(k)$ de la série (car périodique) de Fourier (discrète) de $x(n)$ (en substituant l'expression de $x(n)$) :

$$\begin{aligned} X_d(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{r=-\infty}^{N-1} x_n(n+rN)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{r=-\infty}^{N-1} x_1(n+rN)e^{-j\frac{2\pi}{N}(n+rN)k} \end{aligned} \quad (3.37)$$

En décomposant l'expression ci-dessous, on retrouve l'exponentielle de départ avec en plus un nombre fixe de fois 2π (e^{jx} est périodique, de période 2π : $e^{j2\pi} = 1$, cela ne change donc rien) :

$$X_d(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(m)e^{-j\frac{2\pi}{N}mk} = X_1(e^{j\frac{2\pi}{N}k}) \quad (3.38)$$

3. Explications complémentaires plz

On passe ainsi en revue toutes les valeurs de $x_1(n)$ avec une exponentielle complexe associée : ces coefficients sont les échantillons de $X_1(e^{j\omega})$ prélevés à intervalle $2\pi/N$. Le spectre est quelque chose de connu : $X_d(k)$ échantillons à intervalles réguliers, directement relié à la transformée de Fourier du signal qui n'était **pas** périodique.

Prenons la transformée de Fourier du signal périodique $x(n)$ en appliquant la propriété du glissement ($x(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_1(n + rN)$)

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} X_1(e^{j\omega}) e^{j\omega rN} = X_1(e^{j\omega}) \sum_{r=-\infty}^{\infty} e^{j\omega rN} \quad (3.39)$$

Le spectre du signal périodique est directement lié au spectre du signal apériodique. On établit que

$$\sum_{r=-\infty}^{\infty} e^{j\omega rN} = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - k \frac{2\pi}{N}\right) \quad (3.40)$$

Ce qui n'est rien d'autre qu'un train d'impulsions.

Cet "établi" peut sembler suspect. Comme nous sommes à l'ULB (libre examen patatipatata), montrons en effet que

$$\Delta_T(t) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \quad (3.41)$$

Comme celui-ci est périodique ($\Delta_T(t+T) = \Delta_T(t)$), on peut calculer sa série de Fourier (définie ici en discret pour la somme, mais le domaine est bien **continu** ! (On l'a déjà fait en discret dans le passé).

$$\Delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i2\pi n t/T} \quad (3.42)$$

Calculons donc ses coefficients

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \Delta_T(t) e^{-i2\pi n t/T} dt \quad (-\infty < t_0 < +\infty) \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \Delta_T(t) e^{-i2\pi n t/T} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \delta(t) e^{-i2\pi n t/T} dt \\ &= \frac{1}{T} e^{-i2\pi n 0/T} \\ &= \frac{1}{T} \end{aligned} \quad (3.43)$$

En effet, une période correspond à l'intervalle $[-T/2, T/2]$. Sur cette intervalle on retrouve une seule impulsion (en zéro), les autres sont en dehors d'où le $\delta(t)$. On a donc

$$\Delta_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i2\pi n t/T} \quad (3.44)$$

En effectuant le changement de variable $t \rightarrow \omega$ et $T \rightarrow 2\pi/N$, on retrouve

$$\sum_{r=-\infty}^{\infty} = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - k \frac{2\pi}{N}\right) \quad (3.45)$$

Revenons à notre somme de train d'impulsion. Comme le signal n'est non-nul que lorsque $\omega = k \frac{2\pi}{N}$:

$$\begin{aligned}
 X(e^{j\omega}) &= X_1(e^{j\omega}) \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j\omega r N} \delta\left(\omega - k \frac{2\pi}{N}\right) \\
 &= \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_1\left(e^{j \frac{2\pi}{N} k}\right) \delta\left(\omega - k \frac{2\pi}{N}\right) \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{N} X_d(k) \delta\left(\omega - k \frac{2\pi}{N}\right)
 \end{aligned} \tag{3.46}$$

Il s'agit de la transformée de Fourier d'un signal périodique en fonction de son développement en série de Fourier discrète sur le spectre du signal aperiodique : on retrouve "seulement" les coefficients de la série de Fourier. Le signal périodique $x(n)$ possède une série de raie espacée de $2\pi/N$.

Un exemple et un résumé du chapitre sont donnés au slide T45 et T46.

Chapitre 4

L'échantillonnage

On détermine parfois un signal continu $x(t)$ par des échantillons prélevés à période T , $x(nT)$. Nous allons ici considérer des signaux à TC (on utilisera Ω en rad/s) et TD (ω en rad).

4.1 Échantillonnage par un train d'impulsions

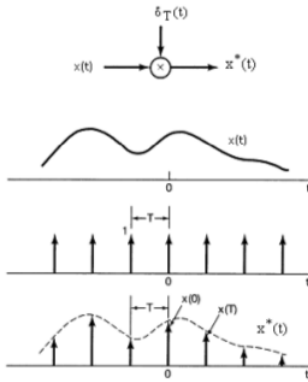


FIGURE 4.1

L'idée est de moduler $x(t)$ avec un train périodique d'impulsion de Dirac. On obtient ainsi le signal impulsionnel $x^*(t)$

$$x^*(t) = x(t)\delta_T(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad (4.1)$$

Il s'agit bien d'une multiplication et non d'une convolution. On appelle T la *période d'échantillonnage*, $\Omega_S = 2\pi/T$ la *pulsation d'échantillonnage* et $f_S = 1/T$ la *fréquence d'échantillonnage*.

Comme $\delta_T(t)$ est périodique, on peut utiliser la série de Fourier (calculée à la fin du chapitre précédent)

$$\begin{aligned} \delta_T &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jk\frac{2\pi}{T}t} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Il s'agit d'une série infinie d'exponentielles complexes. En substituant dans l'équation

$$x^*(t) = \frac{1}{T} x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\Omega_S t} \quad (4.3)$$

Calculons-en sa transformée de Laplace (premier pas vers la transformée de Fourier)

$$X^*(p) = \mathcal{L}[x^*(t)] = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{L}[x(t)e^{jk\Omega_S t}] \quad (4.4)$$

En posant $\alpha = jk\Omega_S$ on retrouve une forme équivalente à un décalage dans le temps

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x(t)e^{\alpha t}) e^{-pt} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-(p-\alpha)t} dt = X(p-\alpha) \quad (4.5)$$

La transformée de Laplace de la multiplication par une exponentielle imaginaire donne un décalage dans le temps (soit notre expression en substituant α

$$x(t)e^{jk\Omega_S t} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(p - jk\Omega_S) \quad (4.6)$$

En particulierisant pour $p = j\Omega$, on trouve

$$X^*(\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\Omega - k\Omega_S) \quad (4.7)$$

On retrouve dans la série le spectre du signal en entrée : on a copié/collé une infinité de fois le spectre décalé vers la gauche et la droite. Un signal échantillonné dans le temporel présente donc un spectre périodique de période Ω_S . Cependant, les spectres décalés vont se recouvrir : on ne pourra plus avoir X à partir de X^* . Si $\exists \Omega_M : X(\Omega) = 0$ pour $|\Omega| > \Omega_M$, alors il n'y aura pas de recouvrement si la fréquence d'échantillonnage est assez grande : $\Omega_S > 2\Omega_M$.

Si cette condition est satisfaite, on pourra reconstituer $x(t)$ à partir du signal échantillonné $x^*(t)$ dans un filtre passe-bas idéal $G(\Omega)$ de gain T et de fréquence de coupure Ω_c tel que

$$\Omega_M < \Omega_c < \Omega_S - \Omega_M \quad (4.8)$$

C'est le théorème de Shannon :

THÉORÈME : SHANNON

La fréquence d'échantillonnage doit être supérieure au double de la fréquence maximale du signal. Celui-ci est alors entièrement caractérisé

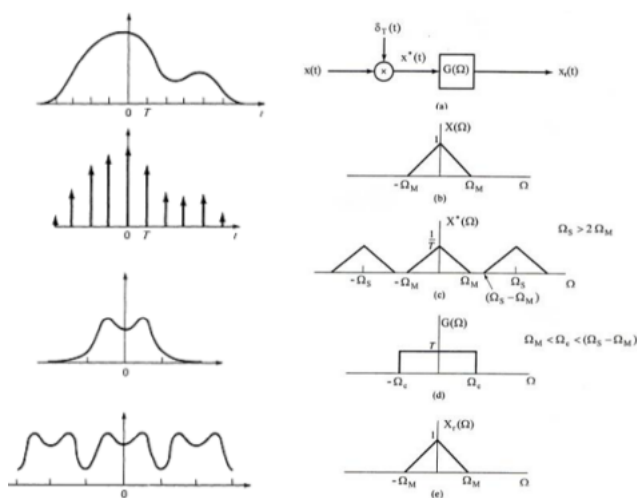


FIGURE 4.2

EXEMPLE : Si l'on fait tourner une foreuse plus rapidement que le taux d'échantillonnage, Shannon n'est pas respecté : on perd en information. Pire, on pense que la foreuse est "à l'arrêt" alors qu'il n'en est rien.

Petit plus pour comprendre^a : "Cette distorsion se produit parce qu'un signal de fréquence porteuse $-f$ a exactement le même effet sur le signal modulé que ceux de fréquence f . De même, dans le cas d'un signal échantillonné, tous les signaux dont l'écart de fréquence avec la fréquence d'échantillonnage est identique se représentent par les mêmes échantillons. Lorsqu'on reconstitue le signal d'origine, il est impossible de distinguer ces composantes dont la représentation est identique..

a. Source : Wikipedia

Sur la Figure 4.2 : à gauche, on voit que la fonction périodique implique un recouvrement. À droite on effectue une convolution dans le temporel. Un filtre idéal coupe à Ω_c (quand le spectre s'est arrêté et avant qu'il ne reprenne). On n'a alors pas perdu d'information (retour exact au signal initial).

4.2 Formule d'interpolation

Appliquons la convolution pour retrouver notre signal de base

$$x(t) = x^*(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(\tau) g(t - \tau) d\tau \quad (4.9)$$

où $g(t) = \frac{T}{\pi t} \sin \Omega_c t$, un filtre passe-bas idéal de gain T et de fréquence de coupure Ω_c . On peut prendre $\Omega_c = \frac{\Omega_S}{2} = \frac{\pi}{T}$: par définition, en coupant à cet endroit, il n'y aura aucun signal utile dans la bande passante. La convolution fait apparaître une série¹. En faisant les math

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \delta(\tau - nT) g(t - \tau) d\tau \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - nT) g(t - \tau) d\tau \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) g(t - nT) \end{aligned} \quad (4.10)$$

On trouve alors

A retenir : Formule d'interpolation

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \frac{\sin \frac{\pi}{T}(t - nT)}{\frac{\pi}{T}(t - nT)} \quad (4.11)$$

Celle-ci exprime $x(t)$ en fonction des échantillons (si $\Omega_S > 2\Omega_M$).

Autrement dit : *un signal analogique dont le spectre s'annule au delà d'une fréquence f_{max} est entièrement déterminé par ses échantillons prélevés à une cadence d'au moins $2f_{max}$ fois par seconde.*

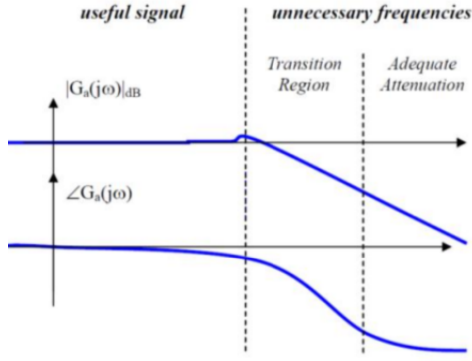
Le slide T10 illustre un cas où cette condition n'est pas respectée. Notons qu'en pratique le spectre n'est jamais complètement nul au moment voulu (cf. critère de Paley-Wiener) : il y aura toujours un fin repliement spectral mais on peut s'arranger pour qu'il soit négligeable.

4.3 Éviter le repliement spectral

En principe, il faut filtrer à l'aide d'un filtre passe bas (crucial pour Shannon), c'est-à-dire échantillonner un signal limitée en BP avec Ω_c adéquat. Hélas la BP des signaux réels n'est pas limitée. Cependant, on s'intéresse souvent qu'à une partie de la BP. L'idée du filtre anti-repliement se fait en trois temps. L'idée est de filtrer en **analogique** avant d'entrer le signal en numérique.

1. Sélectionner la BP
2. Filtrer pour ne garder que cette BP
3. Échantillonner avec une fréquence adéquate

1. Pourquoi $x(nT)$ directement ? On n'utilise pas (4.1) et le nT ne viendrait pas de la delta de Dirac ?



L'idéal serait un filtre gain constant dans la BP et nul en dehors, mais ce n'est pas réalisable en pratique. Il faut utiliser un filtre \mathbb{R} possédant une zone de distorsion (la pente n'étant pas parfaitement perpendiculaire). Cette zone est un peu floue car elle est polluée par le repliement spectral (le "pouvoir filtrant" n'est pas assez important). Cependant, aucune informations utiles ne s'y trouve.

4.3.1 Échantillonnage par une fonction périodique

On multiplie (pas une convolution) $x(t)$ par un signal périodique $p(t)$ (pas forcément un train d'impulsions).

$$y(t) = x(t)p(t) \quad (4.12)$$

Avec $p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\Omega_s t}$, $y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k x(t) e^{jk\Omega_s t}$ on trouve

$$Y(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k X(\Omega - k\Omega_s) \quad (4.13)$$

Le domaine étant continu, $\sum_{k=-\infty}^{\infty}$ est un nombre infini. On retrouve comme précédemment les spectres décalés (de là vient la règle $1/2T$, ...). Ici c_k ne vaut plus l'unité mais varie avec la fréquence.

4.3.2 Utilisation d'un système à temps discret pour le traitement des signaux à TC

On utilise la chaîne suivante, équivalent à un système à TC (si cond. de Shanon OK)

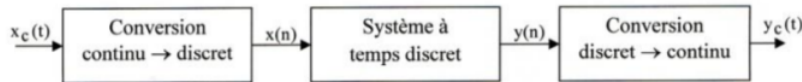


FIGURE 4.4

1. *Conversion continu \rightarrow discret*

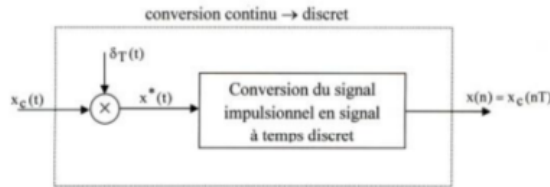


FIGURE 4.5

C'est la fameuse multiplication de $x_c(t)$ par $\delta_T(t)$ pour obtenir un signal pulsé. On utilise pour ça un convertisseur analogique-numérique.

$$x^*(t) = x_c(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT) \delta(t - nT) \quad (4.14)$$

En prenant la transformée de Laplace² :

$$X^*(p) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)e^{-pnT} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)e^{-j\Omega nT} \quad (4.15)$$

La seconde égalité particularise pour la transformée de Joseph.

Pour un signal à temps discret $x(n)$:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \quad (4.16)$$

Comme $x(n) = x_c(nT)$, on peut écrire (première ligne)

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)e^{-j\omega n} \\ X^*(\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)e^{-j\Omega nT} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Par identification avec la deuxième ligne, il vient que

$$X^*\left(\frac{\omega}{T}\right) = X(e^{j\omega}) \quad (4.18)$$

La seule différence entre la TF de $x(n)$ (discret) et celle de $x^*(t)$ (impulsionnel) est un changement d'échelle : $\omega = \Omega T$.

2. Conversion discret \rightarrow continu

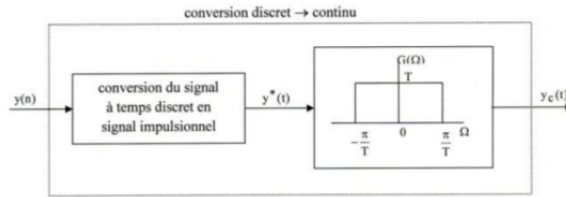


FIGURE 4.6

Le signal numérique ayant été transformé, il faut le transmettre en analogique. Si le système à TD possède une réponse en fréquence $F(e^{j\omega})$, la transformée de Fourier de $y(n)$ (discret) sera

$$Y(e^{j\omega}) = F(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) \quad (4.19)$$

Passé du monde numérique à pulsé donnera un spectre identique à un facteur près.

En pratique, on utilise un extrapolateur d'ordre zéro pour reconstruire un signal continu à partir de ses échantillons : un signal analogique doit passer par les points du numérique.

Reconstitution par un extrapolateur d'ordre zéro

Considérons un système à TC de réponse impulsionnelle $h(t)$

$$y'_c(t) = y^*(t) * h(t) \quad (4.20)$$

où $y^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)\delta(t - nT)$ de sorte que l'on ait

$$y'_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)\delta(t - nT) * h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)h(t - nT) \quad (4.21)$$

2. Sachant que $\mathcal{L}(\delta(t)) = 1$ et le glissement $T \rightarrow e^{-pT}$.

Il reste à choisir $h(t)$ de sorte à ce que la fonction interpolée passe par les bon points imposés par le numérique. C'est le cas si

$$\begin{cases} h(0) &= 1 \\ h(nT) &= 0 \end{cases} \quad \text{pour } n \neq 0 \quad (4.22)$$

Toutes fonctions qui satisfont ça sont des extrapolations. On retrouve bien $y'_c(nT) = y(T)$: on a une fonction continue des prends des valeurs imposées pour $t = nT$.

EXEMPLE : Le filtre passe bas de réponse impulsionnelle $h(t) = \text{sinc}(\pi t/T)$ vérifie ces conditions.
Pour l'**extrapolateur d'ordre zéro**, on considère la *fonction escalier*

$$h_0(t) = u(t) - u(t - T) \quad (4.23)$$

Il s'agit bien d'une fonction continue passant par tous les points. Par calcul de la transformée de Laplace

$$h_0(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{p} - \frac{e^{-pt}}{p} \implies H_0(\Omega) = \frac{2 \sin(\Omega T/2)}{\Omega} e^{-j\Omega T/2} \approx T e^{-j\Omega T/2} \quad \text{pour } \Omega \ll 2\pi/T \quad (4.24)$$

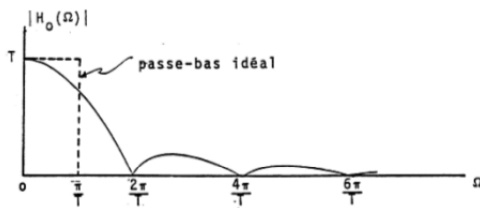


FIGURE 4.7

Cette fonction est assez plate au début puis adopte la forme typique de sinc. L'extrapolateur d'ordre zéro va "gommer" les spectres à gauche et à droite de manière partielle : le gain n'est pas constant dans la bande passante qui va forcément causer de légères distorsions dans la bande utile $-\frac{\pi}{T} < \Omega < \frac{\pi}{T}$. De plus, les spectres décallés ne sont pas totalement retirés. Deux solutions

1. Filtrer pour continuer à gommer.
2. Compenser par un signal de gain opposé.

Notons que plutôt que d'interpoler en escalier, on peut utiliser un ordre plus élevée. Pour l'ordre un, on reliera les points par des droites. On utilise généralement une fonction triangle pour $h_1(t)$.

Chaîne pour le traitement numérique des signaux analogiques

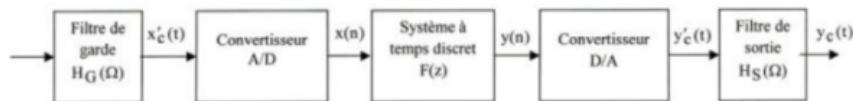


FIGURE 4.8

Un spectre strictement limité n'existe pas : on utilise un filtre anti-repliement pour que l'information dans la bande utile $\left[-\frac{\pi}{T}; \frac{\pi}{T}\right]$ ne soit pas altérée, généralement avec un filtre passe bas de $f_c = \pi/T$.

La conversion en un signal à TD est réalisée par le convertisseur analogique. Ce signal discret, $x(n)$ est ensuite traité par le système à TD de réponse en fréquence F

$$Y(e^{j\omega}) = F(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) \quad (4.25)$$

Un signal en escalier $y'_c(t)$ est reconstitué à partir des échantillons de sortie $y(n)$ avec un convertisseur numérique-analogique

$$Y'_C(\Omega) = Y^*(\Omega)H_0(\Omega) = Y(e^{j\Omega T})H_0(\Omega) \quad (4.26)$$

où $H_0(\Omega)$ est la réponse en fréquence de l'extrapolateur d'ordre zéro. Finalement, un filtre de sortie $H_S(\Omega)$ lisse le signal. Cette démarche (appliquée au slide T41) est une question d'examen. La fin du chapitre est une série d'exemples.



FIGURE 4.9 – J'allais pas laisser une page blanche...