Université Libre de Bruxelles

Synthèse

Analyse complexe
MATH-H-201

Auteur :
Nicolas Englebert

Année 2014 - 2015

Table des matières

Première partie

Analyse complexe

Chapitre 1

Fonctions analytiques

1.1 Rappels sur les nombres complexes

1.1.1 Notations

On définit l'ensemble des nombres complexe de la sorte :

$$z \in \mathbb{C} \quad \Leftrightarrow \quad z = x + iy \quad \text{où} \quad x, y \in \mathbb{R} \tag{1.1}$$

Le nombre complexe conjugué revient à inverser le signe de la partie imaginaire du nombre complexe en question :

$$\overline{z} = x - iy \tag{1.2}$$

Autre propriété importante, son *module* (*valeur absolue* d'un nombre complexe) :

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{1.3}$$

La première forme est souvent utilisée d'un point de vue théorique.

Attention ! Il n'y a pas d'ordre dans $\mathbb{C}$! On peut comparer des modules, mais pas des nombres complexes.

1.1.2 Quelques notions et propriétés importantes

La distance entre deux points du plans complexes, respectivement $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$ est donnée par :

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \tag{1.4}$$

Ceci étant défini, il est facile d'écrire l'équation complexe d'un cercle de centre z_0 et de rayon R : $|z - z_0| = R$.

Tant que nous sommes dans les modules, ceux-ci possèdent deux propriétés fondamentales :
— Le module d'une multiplication est la multiplication des modules
— Le module d'un quotient est le quotient des modules

Autre grand classique du cours d'*Analyse I*, l'inégalité triangulaire :

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \tag{1.5}$$

Ce qui implique trois propriétés (démontrées en séance d'exercices) :

1. $|z_1 + z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$
2. $|z_1 - z_2| \leq ||z_1| - |z_2||$
3. $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$

Bien que la représentation en coordonnées polaires d'un nombre complexe ainsi que les racines nièmes ne soient pas vues au cours, cette matière est considérée comme acquise.

1.2 Fonctions analytiques

1.2.1 Fonction d'une variable complexe

Soient deux ensembles E et F et D, un sous-ensemble de E.

Une **fonction** f est une *règle qui, à tout élément de D fait correspondre un et un seul élément de F.*

On appellera D, le domaine de définition de la fonction f. Si cette fonction est partout définie, alors D coïncide avec $F : D \equiv F$. Dans notre cas, D et F seront considérés comme égaux à $\mathbb{C}$. La valeur de la fonction f en $z = x + iy$ est donnée par :

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \tag{1.6}$$

Nous travaillerons donc avec un couple de fonctions réelles de deux variables elles aussi réelles, x et y.

1.2.2 Limite

Rappellons la définition du voisinage d'un point $z_0 \in \mathbb{C}$:

$$V(z_0, a) = \{z : |z - z_0| < a\} \tag{1.7}$$

On peut le lire comme l'*ensemble des points* z qui sont dans un rayon $z - z_0$ plus petit que a.

Considérons dès à présent une fonction f définie en tout point, sauf éventuellement en z_0 [1]. La définition de la limite s'énonce :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \ t.q. \ si \ 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - w_0| < \epsilon \tag{1.8}$$

De façon moins formelle, cela traduit le fait que si f admet w_0 pour limite au point z_0, le point $w = f(z)$ peut être amené aussi proche de w_0 que l'on souhaite si z est choisi suffisament proche de z_0.
A tout ϵ que je choisi, je peux toujours assorcier un δ - rayon d'un voisinage dans le plan complexe - tel que si je prends n'importe quel point dans ce voisinage-ci, il va être envoyé par la fonction f en un point w qui sera dans le voisinage de w_0, de rayon ϵ.
Une propriété non démontrée mais fondamentale est :

PROPRIÉTÉ : Unicité de la limite d'une fonction f en z_0. Si la limite existe, cette valeur est unique.

1. Quand on défini une limite, la fonction n'est pas forcément définie au point considéré.

Illustrons. Considérons la fonction complexe

$$f(z) = \frac{z}{\bar{z}} \tag{1.9}$$

La limite de cette fonction n'existe pas pour $z \to 0$, car selon cette propriété, peu importe du côté par lequel je "m'approche" je suis toujours censé obtenir la même limite. Or, si je prends $z = x + iy$ où $y = 0$, je trouve comme limite 1. Or, dans le cas où $x = 0$, je trouve -1. Cette limite ne peut donc pas exister.

THÉORÈME : Soit $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z_0 = x_0 + iy_0$ et $w_0 = u_0 + iv_0$.

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0 \tag{1.10}$$

$\Leftrightarrow$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x, y) = u_0 \tag{1.11}$$

et

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x, y) = v_0 \tag{1.12}$$

$\Rightarrow$ La partie réelle (imaginaire) de la limite est la limite de la partie réelle (imaginaire).

Démonstration. Démontrons d'abord dans le sens indirect. Commençons par écrire les expressions équivalentes des deux limites présentées ci-dessus :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta_1, \delta_2 > 0 \ t.q. \begin{cases} si\ 0 \ < \ \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta_1 \ alors \ |u - u_0| < \epsilon/2 \\ si\ 0 \ < \ \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta_2 \ alors \ |v - v_0| < \epsilon/2 \end{cases} \tag{1.13}$$

Le choix $\epsilon/2$ n'est que par facilité de la démonstration. Posons $\delta = min(\delta_1, \delta_2)$. Remarquons l'expression de $f(z) - w_0$, où $f(z) = u + iv$ et $w_0 = u_0 + iv_0$, réarrangeons les termes et appliquons l'inégalité triangulaire :

$$|(u + iv) - (u_0 + iv_0)| = |(u - u_0) + i(v - v_0)| \leq |u - u_0| + |v - v_0| \tag{1.14}$$

Considérons cette expression laissant apparaître le module de $z - z_0$:

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = |(x - x_0) + i(y - y_0)| = |(x + iy) - (x_0 + iy_0)| \tag{1.15}$$

En reprenant mes deux expressions de limite et l'expression ci-dessus , je peux écrire :

$$Si\ 0 \ < \ |(x + iy) - (x_0 + iy_0)| < \delta \tag{1.16}$$

En utilisant le résultat de l'équation **(1.14)** j'obtiens :

$$|(u + iv) - (u_0 + iv_0)| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon \tag{1.17}$$

La démonstration dans le sens direct ($\Rightarrow$) se fait de façon analogue, cette fois-ci en partant de $\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$. Une expression équivalente à cette dernière est :

$$Si\ 0 \ < \ |(x + iy) - (x_0 + iy_0)| < \delta \tag{1.18}$$

alors

$$|(u + iv) - (u_0 + iv_0)| < \epsilon \tag{1.19}$$

On a ici :

$$\begin{aligned}|u-u_0| &\leq |(u-u_0)+i(v-v_0)| \\ &\leq |(u+iv)-(u_0+iv_0)|\end{aligned} \tag{1.20}$$

$$\begin{aligned}|v-v_0| &\leq |(u-u_0)+i(v-v_0)| \\ &\leq |(u+iv)-(u_0+iv_0)|\end{aligned} \tag{1.21}$$

et

$$|(x+iy)-(x_0+iy_0)| = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \tag{1.22}$$

En substituant ceci dans **(1.18)** et **(1.19)**, il vient :

$$Si\ 0\ < \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta \tag{1.23}$$

alors

$$|u-u_0| < \epsilon\ et\ |v-v_0| < \epsilon \tag{1.24}$$

□

THÉORÈME :
Si

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0\ \ et\ \ \lim_{z\to z_0} F(z) = W_0 \tag{1.25}$$

alors

1. $\lim_{z\to z_0}[f(z)+F(z)] = w_0 + W_0$
2. $\lim_{z\to z_0} f(z)F(z) = w_0 W_0$
3. Si $W_0 \neq 0$, $\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{F(z)} = \frac{w_0}{W_0}$

Démonstration. Par le théorème précèdent et résultats équivalents pour fonctions réelles de deux variables réelles. □

1.2.3 Limites impliquant le point à l'infini

Point à l'infini

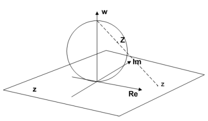

FIGURE 1.1 – Sphère de Riemann

Il s'agit d'une sphère de rayon unité qui admet le plan complexe comme plan passant par l'équateur de la sphère. On va pouvoir associer tout point du plan complexe à la sphère en traçant une droite reliant le point du plan complexe au pôle de la sphère. Si le point est intérieur au plan complexe, le point d'intersection se trouvera à l'hémisphère sud et si ce n'est pas le cas, il se trouvera à l'hémisphère nord.

Cette visualisation permet d'associer tout point de la sphère à un point du plan complexe, le point du pôle étant pour un point situé à l'infini.

Définitions et expressions équivalentes

L'expression

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty \tag{1.26}$$

est équivalente à

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \ t.q. \ si \ 0 < |z - z_0| < \delta, \ alors |f(z) > \frac{1}{\epsilon} \tag{1.27}$$

est équivalente à

$$Si \ 0 \ < |z - z_0| < \delta, \ alors \ |1/f(z) - 0| < \epsilon \tag{1.28}$$

d'où

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty \Leftrightarrow \lim_{z \to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0 \tag{1.29}$$

Ces expressions restent bien entendu valables dans le cas où la limite vaut w_0 comme nous l'informe le slide 19/28.

1.2.4 Continuité

Commençons par une définition intuitive de la continuité. La fonction f est continue en z_0 si et seulement si :

1. $z_0 \in D$
2. $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ existe
3. $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$

De façon plus formelle, cela donne :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \ t.q. \ si \ |z - z_0| < \delta \ alors \ |f(z) - f(z_0)| \leq \epsilon \tag{1.30}$$

Les propriétés qui découlent de cette définition sont identiques à celles définies pour les nombres réels.

1.2.5 Dérivée

La définition de la dérivée en un point (z_0) n'a (heureusement) pas changé depuis :

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \tag{1.31}$$

pour autant que cette limite existe. Rappelons que la dérivabilité implique la continuité, mais que la réciproque de cette proposition est fausse.

Théorème : Équations de Cauchy-Riemann

Si $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ est dérivable en $z_0 = x + iy_0$, alors les dérivées partielles d'ordre 1 de u et v existent en (x_0, y_0) et

$$\frac{\partial u}{\partial x}|_{(x_0,y_0)} = \frac{\partial v}{\partial y}|_{(x_0,y_0)} \tag{1.32}$$

et

$$\frac{\partial u}{\partial y}|_{(x_0,y_0)} = -\frac{\partial v}{\partial x}|_{(x_0,y_0)} \tag{1.33}$$

En outre,

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}|_{(x_0,y_0)} + i\frac{\partial v}{\partial x}|_{(x_0,y_0)} \tag{1.34}$$

Démonstration. Par hypothèse, supposons que la dérivée $f'(z_0)$ existe. Notons $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$. Par le théorème sur les limites, écrivons les expressions en tenant comptes des parties Re et Im.

$$\begin{aligned} Re[f'(z_0)] &= \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \mathrm{Re}\left[\tfrac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}\right] \\ Im[f'(z_0)] &= \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \mathrm{Im}\left[\tfrac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}\right] \end{aligned} \tag{1.35}$$

Il faut maintenant écrire l'expression de la dérivée afin d'identifier les parties réelle et imaginaire

$$\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} = \frac{u(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-u(x_0,y_0)}{\Delta x + i\Delta y} + i\frac{v(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-v(x_0,y_0)}{\Delta x + i\Delta y} \tag{1.36}$$

On remarque que $(\Delta x, \Delta y)$ est quelconque dans un voisinage de (0,0). Considérons deux cas particuliers :

Cas particulier 1 : $(\Delta x, 0) \to (0,0)$
Dans ce cas, nous avons :

$$\begin{aligned} Re[f'(z_0)] &= \lim_{\Delta x\to 0} \tfrac{u(x_0+\Delta x,y_0)-u(x_0,y_0)}{\Delta x} \\ Im[f'(z_0)] &= \lim_{\Delta x\to 0} \tfrac{v(x_0+\Delta x,y_0)-v(x_0,y_0)}{\Delta x} \end{aligned} \tag{1.37}$$

On trouve dès lors, en identifiant la première et deuxième expression respectivement comme la dérivée partielle de u (resp. v) par rapport à x :

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}|_{(x_0,y_0)} + i\frac{\partial v}{\partial x}|_{(x_0,y_0)} \tag{1.38}$$

Cas particulier 2 : $(0, \Delta y) \to (0,0)$

$$\begin{aligned} Re[f'(z_0)] &= \lim_{\Delta y\to 0} \tfrac{u(x_0,y_0+\Delta y)-u(x_0,y_0)}{\Delta y} \\ Im[f'(z_0)] &= -\lim_{\Delta y\to 0} \tfrac{v(x_0,y_0+\Delta y)-v(x_0,y_0)}{\Delta y} \end{aligned} \tag{1.39}$$

On identifie les dérivées partielles des fonctions par rapport à y (le signe négatif dans la seconde expression vient de $1/i = -i$. On trouve :

$$f'(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}|_{(x_0,y_0)} - i\frac{\partial u}{\partial y}|_{(x_0,y_0)} \tag{1.40}$$

On trouve dès lors deux expressions pour la même dérivée. Par l'unicité de la limite, ces deux expressions sont forcément égales. Leur égalité donne le résultat recherché. □

Théorème : Conditions suffisantes d'existence Soit $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ définie dans un voisinage de $z_0 + x_, + iy_0$.
Si les dérivées partielles d'ordre 1 de u et v existent par rapport à x et y et si

1. existent dans ce voisinage
2. sont continues en (x_0, y_0)
3. satisfont les équations de Cauchy-Riemann en (x_0, y_0)

alors $f'(z_0)$ existe. [a]

[a] Voir livre de référence pour la démonstration.

1.2.6 Fonction analytique

Définition

Par définition, une *fonction f est analytique (holomorphe ou régulière) en z_0 s'il existe un voisinage de z_0 tel que f est dérivable en tout point du voisinage.*

> Exemple : La fonction $f(z) = 1/z$ est analytique pour $z \neq 0$. Par contre la fonction $f(z) = |z|^2$ n'est jamais analytique. Par unicité de la limite, celle-ci doit être identique. Or, aucun voisinage de zéro de la fonction n'est dérivable, elle n'est donc analytique nul part.

On définira une fonction f **entière** ssi celle-ci est analytique $\forall z \in \mathbb{C}$.

Point singulier (!)

Le point z_0 est singulier de f si f n'est pas analytique en z_0, alors que f est analytique en certains points de tout voisinage de z_0.

> Exemple : La fonction $f(z) = |z|^2$ n'a pas de points singuliers. Les points singuliers de $f(z) : P(z)/Q(z)$ (tous deux polynômes) : $\{z \in \mathbb{C} : Q(z) = 0.\}$

Propriété : Si deux fonctions f_1 et f_2 sont analytiques en z_0, leur somme et leur produit sont analytiques en z_0 ; la quotient f_1/f_2 est analytique en z_0 si $f_2(z_0) \neq 0$.

1.2.7 Principe de réflexion

A retenir *:* Considérons une fonction analytique dans un domaine ouvert D contenant un segment de l'axe des x, et qui est symétrique par rapport à cet axe. On a :

$$\overline{f(z)} = f(\overline{z}) \tag{1.41}$$

pour tout z dans D si et seulement si $f(x)$ est réel pour tout point x du segment.

> Exemple : Faisons deux exemples dont le premier vérifie le principe et pas le second :
>
> 1. Soit $f(z) = z + 1$. Si j'évalue $f(\overline{z})$ je trouve bien $\overline{z} + 1 = \overline{f(z)}$
> 2. Soit $f(z) = z + i$. Si j'évalue en $\overline{z}$ je trouve $\overline{z} - 1 \neq \overline{f(z)}$

Chapitre 2

Fonctions élémentaires

2.1 Préliminaires

2.1.1 Argument d'un nombre complexe

On peut représenter polairement un nombre complexe $z = x + iy$ en posant $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$:

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \quad \text{avec} \begin{cases} r & = |z| \\ \theta & : \text{Angle que fait } z \text{ avec l'axe réel positif.} \\ (\tan\theta & = \frac{y}{x}) \end{cases} \tag{2.1}$$

Valeur principale de $arg\ z$

La **valeur principale** de $arg\ z$ est notée $Arg\ z$ alors que la valeur unique, Θ, de $arg\ z$ est comprise dans $-\pi < \Theta < \pi$.

Le lien entre $Arg\ z$ et $arg\ z$ est donné par :

$$arg\ z = Arg\ z + 2n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \tag{2.2}$$

La valeur principale peut s'écrire sous forme d'une partie réelle et imaginaire :

$$Arg\ z = u(x, y) + iv(x, y) \quad \text{avec} \begin{cases} u(x, y) & = \arctan(y, x) \\ v(x, y) & = 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

Propriété : Deux propriétés [a] sont à connaître :

1. Il s'agit d'une fonction continue, sauf pour z réel négatif (saut de discontinuité de 2π)
2. Si $-\pi < Arg\ z_1 + Arg\ z_2 \leq \pi$, alors

$$Arg\ z_1 z_2 = Arg\ z_1 + Arg\ z_2 \tag{2.4}$$

a. Rappel : $arg\ z_1 z_2 = arg\ z_1 + arg\ z_2$ et $arg\ z_1/z_2 = arg\ z_1 - arg\ z_2$.

2.1.2 Fonction exponentielle

En travaillant avec $\mathbb{C}$ comme domaine de définition, la définition de l'exponentielle complexe est

$$\exp(z) = e^x(\cos y + i\sin y) = e^x \exp(iy) \tag{2.5}$$

On retrouve l'exponentielle réelle si la partie imaginaire est nulle et la *formule d'Euler* en cas de partie réelle nulle.

PROPRIÉTÉ :
- Analytique en tout point
- $\frac{d}{dt}\exp(z) = \exp(z) \forall z \in \mathbb{C}$
- Le produit des exponentielle donne l'exponentielle d'une somme
- Elle est périodique de période $2i\pi$. En effet

$$\exp(z + 2\pi i) = \exp(z).(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = \exp(z) \tag{2.6}$$

Contrairement à son équivalent réelle, $\exp(z)$ peut être négative. Elle peut valoir -1 si $x = 0$ et $y = \pi + 2n\pi$.

2.1.3 Fonctions trigonométriques

Par définition :

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \tag{2.7}$$

PROPRIÉTÉ : Il s'agit de fonction analytiques. L'identité fondamentale ainsi que les formules trigonométrique de somme et différence reste valable.

La petite différence réside dans le fait que $\sin(z)$ et $\cos(z)$ ne sont plus bornés : $\sin(iy) = i \sinh y$ et $cos(iy) = \cosh y$. On a notamment :

$$\sin z = \sin(x + iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y \tag{2.8}$$

EXEMPLE : FEUILLE ENES

Sinus et exponentielle - Notion de phaseur

Considérons une fonction sinusoïdale $v(t) = V_m \sin(\omega t + \phi)$. Ceci est équivalent à

$$Im\{(V_m e^{i\phi})e^{i\omega t}\} \tag{2.9}$$

où $V \equiv V_m e^{i\phi}$ est le phaseur, un nombre complexe représentant l'amplitude et la phase d'une sinusoïde.

2.1.4 Fonction logarithme népérien

Motivation de la définition

Déterminons $w = u + iv$ tel que $e^w = z$. Considérons $z = re^{i\Theta}$ avec $-\pi < \Theta \leq \pi$:

$$e^u e^{iv} = re^{i\Theta} \tag{2.10}$$

D'où :

$$w = \ln r + i(\Theta + 2n\pi) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \tag{2.11}$$

où r est le module de z et $i(\dots)$ la phase.

Définition et notation

Par définition, en considérant le domaine de définition $\mathbb{C}_0$:

$$Log\ z = \ln|z| + i\ Arg\ z \tag{2.12}$$

Exemple : Si $z \in \mathbb{R}^+$: $Log\ z = \ln z$. On peut ici avoir le logarithme d'un nombre négatif : $Log(-1) = i\pi$

Propriété : Celles-ci sont assez semblables à celles établies pour les réels :

1. On peut écrire la définition de la sorte :

$$Log\ z = u(x,y) + iv(x,y) \quad \text{avec} \begin{cases} u(x,y) & = \ln(\sqrt{x^2+y^2}) \\ v(x,y) & = \arctan(y,x) \end{cases} \tag{2.13}$$

   $Log\ z$ est continue si u et v le sont : $Log\ z$ continue en tout point **à l' exception de l'axe réel négatif** (discontinuité de Arg z).

2. Comme $Log\ z$ est analytique sur $\mathbb{C}$\{axe réel négatif + origine} :

$$\frac{d}{dz} Log\ z = \frac{1}{z} \tag{2.14}$$

3. Si $-\pi < Arg\ z_1 + Arg\ z_2 \leq \pi$, alors

$$Log\ z_1 z_2 = Log\ z_1 + Log\ z_2 \tag{2.15}$$

4. $\exp(Log\ z) = z$
5. Si $-\pi < y \leq \pi$, $Log(\exp(z)) = z$

Exemple : (1) et (2) - Calculons l'expression de la dérivée de $Log\ z$, et vérifions Cauchy-Riemann (faisons une paire deux couilles) :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}} & = \frac{x}{x^2+y^2} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & = \frac{y}{x^2+y^2} \end{cases} \tag{2.16}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \frac{-y}{x^2} & = \frac{-y}{x^2+y^2} \\ \frac{\partial v}{\partial y} & = \frac{1}{1+x^2} \frac{1}{x} \end{cases} \tag{2.17}$$

Ces expressions étant calculées, nous savons que (Ch. précédent) :

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}|_{(x_0,y_0)} + i \frac{\partial v}{\partial x}|_{(x_0,y_0)} \tag{2.18}$$

Ce qui implique :

$$\frac{d}{dz} Log\ z = \frac{x}{x^2+y^2} + i \frac{-y}{x^2+y^2} = \frac{x-iy}{(x+iz)(x-iz)} = \frac{1}{z} \tag{2.19}$$

Démonstration. (3)
Par définition :

$$Log\ (z_1 z_2) = \ln|z_1 z_2| + i\ Arg\ (z_1 z_2) \tag{2.20}$$

Par propriété des logarithmes :

$$Log\ (z_1 z_2) = \ln|z_1| + \ln|z_2| + i(Arg\ z_1 + Arg\ z_2) \tag{2.21}$$

On trouve finalement

$$Log\ (z_1 z_2) = Log\ z_1 + Log\ z_2 \tag{2.22}$$

□

Les deux autres démonstrations sont données slide 16.

2.1.5 Fonction puissance

En prenant $\mathbb{C}$ comme domaine de définition, la puissance c de z est, par définition :

$$P(c, z) = \exp(c\ Log\ z) \quad c \in \mathbb{C} \tag{2.23}$$

EXEMPLE : $P(i, i) = \exp(i\ Log\ i) = \exp(i(0 + 1\pi/2) = e^{-\pi/2}$

PROPRIÉTÉ :

1. $P(c_1 + c_2, z) = P(c_1, z) + P(c_2, z)$
2. Continuité en tout point de $\mathbb{C}$ sauf l'axe des réels négatifs (à vérifier pour chaque point)
3. Dérivée en tout point de $\mathbb{C}$ sauf l'axe des réels négatifs

$$\frac{d}{dz} P(c, z) = c\ P(c - 1, z) \tag{2.24}$$

Quelques cas particuliers sont présentés slide 19.

Chapitre 3

Intégrales 1

3.1 Préliminaires

3.1.1 Dérivée d'une fonction complexe d'une variable réelle

Soit $w(t) = u(t) + iv(t)$ ou u et v sont réelles. On trouve naturellement

$$w'(t) = u'(t) + iv'(t) \tag{3.1}$$

pour autant que les dérivées u' et v' existent en t.

PROPRIÉTÉ : Soit $z_0 \in \mathbb{C}$:
- $[z_0 w(t)]' = z_0 w'(t)$
- Règles de dérivation + et * se généralisent ici.

3.1.2 Intégrale définie d'une fonction complexe d'une variable réelle

En gardant les mêmes pré-requis qu'à la précédente section, l'intégrale définie de $w(t)$ sur l'intervalle $a \leq t \leq b$ vaut :

$$\int_a^b w(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i \int_a^b v(t)dt \tag{3.2}$$

Si U et V sont des primitives de u et v, l'intégrale de $w(t)$ n'est que l'intégrale d'une fonction réelle qui admet une primitive que l'on peut évaluer additionné à une intégrale d'une fonction réelle qui admet également une primitive, multipliée par i :

$$\int_a^b w(t)dt = [U(b) + iV(b)] - [U(a) + iV(a)] \tag{3.3}$$

Attention, l'intégrale d'une fonction complexe ne donne pas l'aire sous la courbe de cette fonction.

3.2 Intégrale d'une fonction complexe d'une valeur complexe

3.2.1 Notions de chemin élémentaire et de chemin admissible

Chemin élémentaire

Un *chemin élémentaire* (ou *arc différentiable*) est défini par les équations paramétriques :

$$\begin{cases} x &= \varphi(t) \\ y &= \psi(t) \end{cases} \qquad t_0 \leq tt_1 \tag{3.4}$$

où $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ sont de classe C^1 dans $t_0 \leq t \leq t_1$.
On utilise souvent comme expression équivalente :

$$z = \Phi(t) = \varphi(t) + i\psi(t) \qquad t_0 \leq t \leq t_1 \tag{3.5}$$

> EXEMPLE : Considérons le point $A : z = 2 + i$. Le chemin $O \to A$ peut avoir comme équation paramétrique :
>
> $$\begin{cases} x &= 2t &= \varphi(t) \\ y &= t &= \psi(t) \end{cases} \qquad 0 \leq t \leq 1 \tag{3.6}$$
>
> L'autre manière de le définir correspond à :
>
> $$z = \Phi(t) := (2 + i)t \tag{3.7}$$

Différents types de chemins

Trois chemins valent le détour (pfpfp) :

1. *Chemin admissible* : chemin décomposable en un nombre fini de chemin élémentaire. Par exemple, un segment de droite suivi d'un demi-cercle puis à nouveau d' un segment de droite est un chemin dit admissible.
2. *Chemin simple* : $z(t_a) \neq z(t_b)$ si $t_a \neq t_b$. Cela signifie qu' il ne peut y avoir de "boucle" dans un chemin simple si ce n'est (dans le cas d'un chemin fermé) le point ou se referme celui-ci.
3. *Ensemble simplement connexe R* : ce srea le cas sitout chemin simple fermés n'englobent que les points de R. Deux cercles dans un plan n'est pas connexe. Si j'ai un cercle dans un cercle et que "l'entre-deux cercle" est mon ensemble, il sera bien connexe mais pas simplement car mon "petit cercle central" englobe des points qui ne font pas partie de mon ensemble.

3.2.2 Intégrale le long d'un chemin élémentaire

Définition (!) :

$$\text{Soit} \begin{cases} -f(z) \ continue \\ -bornes\ z_0\ et\ z_1 \\ -C : chemin\ élémentaire\ de\ z_0\ à\ z_1 \\ -z = \Phi(t) \quad avec\ t_0 \leq t \leq t_1 \end{cases}$$

$$\int_C f(z)dz \equiv \int_{t_0}^{t_1} f(\Phi(t))\Phi'(t)dt \tag{3.8}$$

NB : pour le peu que le chemin soit identique, si l'on change les équations paramétriques on obtiendra le même résultat (les équations paramétriques ne sont pas uniques).

PROPRIÉTÉ :

1. On peut sortir toute constante (même $\mathbb{C}$) de l'intégrale
2. L'intégrale d'une somme est la somme des intégraleS
3. Inverser le sens du chemin revient à inverser le signe de l'intégrale

A retenir : Si le chemin admissible $\mathcal{C}$ est formé des chemins élémentaires C_1 et C_2 :

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz \tag{3.9}$$

Exemple : Considérons la même fonction $z = 2+i$ en guise de chemin avec la paramétrisation définie ci-dessus : $z = (2+i)t$ $(0 \leq t \leq 1)$. Calculons $\int_{\mathcal{C}} z^2 dz$:

$$\int_{\mathcal{C}} z^2 dz = \int_0^1 (2+i)^2 t^2 \ (2+i)dt = (2+i)^3 \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = (8+12i-6-i)\frac{1}{3} = \frac{2}{3} + \frac{11}{3}i \tag{3.10}$$

Décomposons le chemin $O \to A$ en deux parties : $O \to B$ et $B \to A$:

$$OB : \begin{cases} x = 2i \\ y = 0 \end{cases} \to z = \Phi = 2t, \qquad BA : \begin{cases} x = 2 \\ y = t \end{cases} \to z = \Phi = 2 + it, \qquad (0 \leq t \leq 1) \tag{3.11}$$

Appliquons le cadre **A retenir** ci-dessus en calculant chacune des deux intégrale. Nous avons d'une part

$$\int_{OB} z^2 dz = \int_0^1 4t^2.(2t)dt = \frac{8}{3} \tag{3.12}$$

D'autre part

$$\int_{BA} z^2 dz = \int_0^1 (2+it)^2.idt = \frac{11}{3}i - 2 \tag{3.13}$$

En sommant ces deux contributions, on retrouve bien le même résultat que précédemment :

$$\int_{OB} z^2 dz + \int_{BA} z^2 dz = \frac{2}{3} + \frac{11}{3}i \tag{3.14}$$

Au vu du précédent exemple, on pourrait penser que le chemin n'a pas d'importance. Ce n'est cependant pas le cas. Illustrons avec un nouvel exemple :

Exemple : Tentons de calculer, avec les deux chemins représentés ci-contre, l'intégrale suivante :

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z} \tag{3.15}$$

1. *Chemin ABC*
   Une paramétrisation pour le chemin ABC est $z = Re^{i\theta}$ où R est constant et $0 \leq \theta \leq \pi$. En appliquant la définition, on trouve :

$$\int_a^\pi \frac{1}{R} e^{-i\theta} Rie^{i\theta} = i\pi \tag{3.16}$$

2. *Chemin ADB*
   Une paramétrisation pour le chemin ABC est $z = Re^{-i\theta}$ [a] où R est constant et $0 \leq \theta \leq \pi$. En appliquant la définition, on trouve :

$$\int_a^\pi \frac{1}{R} e^{i\theta} R(-i)e^{-i\theta} = -i\pi \tag{3.17}$$

a. Les bornes de l'intégrale doivent être croissantes, d'ou l'inversion du signe de l'argument pour garder $0 \leq \theta \leq \pi$

3.2.3 Borne supérieure pour le module d'une intégrale le long d'un chemin

Afin de démontrer un précieux théorèmes majorant notre intégrale le long d'un chemin, il faut avant tout énoncer un lemme :

LEMME : Si $w(t)$ est une fonction continue par morceaux à valeurs dans $\mathbb{C}$ définie sur $a \leq t \leq b$, alors

$$\left| \int_a^b w(t)dt \right| \leq \int_a^b |w(t)|dt \tag{3.18}$$

Démonstration.
Considérons une intégrale J et sa solution :

$$J = \int_a^b w(t).dt = r_0 e^{i\theta_0} \tag{3.19}$$

où r_0, θ_0 sont des constantes réelles. Multiplions de part et d'autres par $e^{-i\theta_0}$: étant constant, il peut rentrer dans l'intégrale. Comme $r_0 \in \mathbb{R}$, l'intégrande doit forcément être réelle :

$$r_0 = \int_a^b w(t)e^{-i\theta_0}\ dt = \int_a^b \mathrm{Re}[w(t)e^{-i\theta_0}]dt \tag{3.20}$$

Comme la partie réelle d'un nombre complexe est toujours inférieure a son module, on peut écrire :

$$\mathrm{Re}[\leq |w(t)e^{-i\theta_0}|] \leq |w(t)| \tag{3.21}$$

On a donc :

$$\left| \int_a^b w(t)dt \right| \leq \int_a^b |w(t)|dt \tag{3.22}$$

□

THÉORÈME : "ML"
Soit $f(z)$ continue en tout point du chemin admissible $\mathcal{C}$ (de $z_0 = \phi(t_0)$ à $z_1 = \phi(t_1)$) de longueur L.
Si $|f(z)| \leq M, \forall z \in \mathbb{C}, M \in \mathbb{R}^+$, alors

$$\left| \int_{\mathcal{C}} f(z)dz \right| \leq ML \tag{3.23}$$

Démonstration. Par définition de l'intégrale et application du lemme :

$$\left| \int_{\mathcal{C}} f(z)dz \right| = \left| \int_{t_0}^{t_1} f(\phi(t))\phi'(t)dt \right| \leq \int_{t_0}^{t_1} |f(\phi(t))||\phi'(t)|dt \tag{3.24}$$

On considérant comme description du chemin élémentaire $\mathcal{C}$

$$z = x + iy = \phi(t) = \varphi(t) + i\psi(t) \tag{3.25}$$

On peut calculer la dérivée de ϕ ainsi que son module :

$$\begin{array}{lll} \phi'(t) & = \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} & \rightarrow \phi'(t)dt = dx + idy \\ |\phi'(t)| & = \sqrt{dx^2 + dy^2} & = ds \end{array} \tag{3.26}$$

Après substitution dans l'intégrale :

$$\left| \int_{\mathcal{C}} f(z)dz \right| \leq M \int_0^L ds = ML \tag{3.27}$$

□

3.3 Primitive

3.3.1 Définition et propriété

La primitive d'une fonction f continue dans $D \cap \mathbb{C}$:

$$F(z) \; t.q. \; F'(z) = f(z) \quad \forall z \in D \tag{3.28}$$

F est primitive de f pour autant que la dérivée de F donne f. Bien sûr, il existe une infinité de primitive comme dans le cas réel, qui ne sont distinctes que d'une constante :

PROPRIÉTÉ : Soient $F(z)$ et $G(z)$ deux primitives de $f(z)$ dans $D \cap \mathbb{C}$:

$$F(z) - G(z) = c \quad c \in \mathbb{C}, z \in D \tag{3.29}$$

Démonstration.
Notons $h(z) = F(z) - G(z)$, toute deux primitive d'une même fonction. Sa dérivée vaut :

$$h'(z) = F'(z) - G'(z) = f(z) - f(z) = 0 \tag{3.30}$$

Vu que h est une fonction complexe, je peux l'écrire sous la forme $h(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. En exprimant alors les dérivées partielles ($\forall z = x + iy \in D$) :

$$h' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} & = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} & = 0 \end{cases} \tag{3.31}$$

Par les équations de Cauchy-Riemann $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ et $\frac{\partial v}{\partial y} =$. Ceci implique qu'à la fois u et v sont des constantes et donc $h(z)$ est constante $\Rightarrow h(z) = c \in C \; \forall z \in D$. □

3.3.2 Intégrale indépendante du chemin

Lors du dernier exemple, il apparaissait clairement que l'intégrale pouvait être (ou ne pas être) dépendante du chemin. Ce théorème permet de savoir s'il faut ou non tenir compte du chemin imposé :

THÉORÈME : Considérons une fonction $f(z)$ continu dans un domaine D. Si l'une des conditions suviantes est vérifiée, alors les autres le sont aussi.

1. $f(z)$ admet une primitive $F(z)$ dans D.
2. Les intégrales de $f(z)$ le long de chemins admissibles de z_1 à z_2 contenus entièrement dans D ont toutes la même valeur à savoir :

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z)|_{z_1}^{z_2} = F(z_2) - F(z_1) \tag{3.32}$$

   où $F(z)$ est primitive du point (1).
3. Les intégrales de $f(z)$ sur des chemin admissibles fermés contenus entièrement dans D sont toutes égales à zéro.

Démonstration.
(1) → (2)
Cas 1 : considérons un chemin élémentaire $\mathcal{C}$ de z_1 à z_2 dans D tel que $z = \phi(t), a \leq t \leq b$ avec $\phi(a) = z_1$ et $\phi(2) = z_2$. Notons que :

$$\frac{d}{df}F(\phi(t)) = F'(\phi(t))\phi'(t) = f(\phi(t))\phi'(t) \quad a \leq t \leq b \tag{3.33}$$

Par défintion de l'intégrale de $f(z)$ et en utilisant **(3.3)** :

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)dz = \int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt = F(\phi(t))|_b^a = F(z_2) - F(z_1) \tag{3.34}$$

Ce qui est indépendant de $\mathcal{C}$

Cas 1 : considérons un chemin admissible dans D formé d'un nombre fini de chemins élémentaires C_k de z_k à z_{k+1} pour $k = 1, 2 \ldots, n$. Je 'découpe' mon intégrale le long de $\mathcal{C}$:

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{C_k} f(z)dz = \int_{z_k}^{z_{k+1}} f(z)dz = F(z_{n+1}) - F(z_1) \tag{3.35}$$

Ce qui est indépendant de $\mathcal{C}$

(2) → (3)
Soit z_1, z_2, deux points distincts appartenant à un chemin admissible fermé $\mathcal{C}$ dans D. Comme mon intégrale ne dépend pas du chemin, je sépare $\mathcal{C}$ en C_1, C_2 : soit C_1, C_2, deux chemins de z_1 à z_2 tels que $\mathcal{C} = C_1 - C_2$. En utilisant (2) :

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz \tag{3.36}$$

Ce qui implique :

$$\int_{C_1} f(z)dz + \int_{-C_2} f(z)dz = \int_{\mathcal{C}} f(z)dz = 0 \tag{3.37}$$

(3) → (1)
Partons de (3) :

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)dz = 0 \tag{3.38}$$

Quelque soit $\mathcal{C}$, je peux trouver une primitive associé à f : définissions $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(s)ds$ avec $z_0, z \in D$ (z_0 est arbtitraire) et montrons que $F'(z) = f(z)\ \forall z \in D$. L'évaluation de la dérivée fait apparaître la différence suivante :

$$\begin{aligned} F(z + \Delta z) - F(z) \quad &= \textstyle\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(s)ds - \int_{z_0}^{z} f(s)ds \\ &= \textstyle\int_{z}^{z+\Delta z} \end{aligned} \tag{3.39}$$

Comme l'intégrale (3) est nulle, cela implique bien que le chemin parcouru n'a pas d'importance justifiant cette dernière ligne.
Considérons le chemin d'intégration $z, z + \Delta z$ (segment de droite) :

$$\int_{z}^{z+\Delta z} ds = \Delta z \tag{3.40}$$

Dans notre cas (comme $f(z)$ ne dépend pas de s), il en résulte :

$$f(z) = \frac{1}{\Delta z}\int_z^{z+\Delta z} f(z)ds \tag{3.41}$$

Soustrayons de part et d'autre de l'égalité $f(z)$ pour avoir :

$$\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z} - f(z) = \frac{1}{\Delta z}\int_z^{z+\Delta z}(f(s)-f(z))ds \tag{3.42}$$

Cherchons la borne supérieure pour :

$$\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z} - f(z)\right| = \frac{1}{|\Delta z|}|\int_z^{z+\Delta z}(f(s)-f(z))ds| \tag{3.43}$$

Comme f est continue en z, $\forall\epsilon > 0, \exists\delta$ tel que :

$$|f(s)-f(z)| < \epsilon \text{ si } \ |s-z| < \delta \tag{3.44}$$

Si Δz tel que $|s-z| \leq \Delta z| < \delta$, alors $|f(s)-f(z)| < \epsilon$ et l'on peut appliquer le théorème ML :

$$\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z} - f(z)\right| < \frac{1}{|\Delta z|}\epsilon|\Delta z| \tag{3.45}$$

Par définition de la limite :

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z} = f(z) \tag{3.46}$$

Soit F'(z) = f(z), ce qui finit cette longue démonstration. □

Exemple :

1. Considérons un domaine $D \equiv |z| > 0$. On cherche à calculer :

$$\int_{z_1}^{z_2}\frac{dz}{z^2} \tag{3.47}$$

   Notre fonction étant $f(z) = 1/z^2$, sa primitive est $F(z) = -1/z$. Son intégrale vaut alors :

$$\int_{z_1}^{z_2}\frac{dz}{z^2} = -\frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_1} \tag{3.48}$$

2. $$\oint\frac{dz}{z^2} = 0 \tag{3.49}$$

   Cette primitive étant partout définie, l'intégrale "donne $F - F$", ce qui donne bien zéro.

3. $$\oint_C\frac{dz}{z} = ? \tag{3.50}$$

   Ici, que vaut $F(z)$? $Log(z)$? La primitive n'étant pas défini sur l'axe des réels négatifs, on ne peut affirmer - avec ce théorème **ci** - que cette intégrale est nulle.

3.4 Théorème de Cauchy Goursat

Théorème : Cauchy-Goursat
Soit $\mathcal{C}$, un chemin admissible fermé simple, $f(z)$ analytique en tout point de $\mathcal{C} \cup D$ (où D est un domaine intérieur à $\mathcal{C}$) :

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z)dz = 0 \tag{3.51}$$

Plus "francisé" ce théorème dit que si f est analytique en tout point à l'intérieur de D, domaine défini par le chemin $\mathcal{C}$, l'intégrale le long du chemin fermé est nulle.
Avant de démontrer ce théorème, rappellons l'identité de Green :

$$\oint_{\mathcal{C}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy \tag{3.52}$$

Attention ! On travaille ici avec l'hypothèse supplémentaire que les dérivées partielles sont continues sur $\mathcal{C} \cup D$.

Démonstration. Considérons un chemin $\mathcal{C}$ décrit par $z = x + iy = \varphi(t) + i\psi(t)$ pour $t_0 \leq t \leq t_1$ et $z(t_0) = z(t_1)$. Évaluons l'intégrale sur $\mathcal{C}$ de $f(z)$ et exprimons cette dernière en fonction de sa partie réelle et imaginaire. La ligne ci-dessous n'est rien d'autre que la définition d'une intégrale en prenant compte de la paramétrisation.

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z)dz = \int_{t_0}^{t_1} (u(x,y) + iv(x,y))(x'(t) + iy'(t))dt \tag{3.53}$$

On reconnaît la définition d'une intégrale curviligne :

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z)dz = \oint (u+iv)(dx+idy) = \oint (udx - vdy) + i\oint (vdx + udy) \tag{3.54}$$

En faisant l'hypothèse que les dérivées partielles sont continues, je peux appliquer l' identité de Green pour avoir :

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z)dz = -\iint_D \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy + i\iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy \tag{3.55}$$

Par les équations de Cauchy-Riemann, le deuxième terme est nul. □

Exemple : Avec ce théorème, on peut directement dire que

$$\oint \exp(5z)\ dz = 0 \tag{3.56}$$

Quelle est la différence avec le théorème vu en **3.2.2** ? C'est que ici, on n'a pas besoin d'une primitive. Ainsi, si l'on prend $\mathcal{C}$ le cercle de rayon 1 de centre (2,0) :

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z} = 0 \tag{3.57}$$

Ce que nous n'avions pas réussi à obtenir avec le précédent théorème. Par contre, pour l'intégrale :

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z^2} \tag{3.58}$$

je ne peux rien dire avec Cauchy-Gourmet, la fonction étant non analytique en 0. Mais cette fois, avec **3.2.2**, je peux dire qu'elle vaut 0 !

3.4.1 Conséquence du théorème de Cauchy-Goursat

Première proposition

Si $f(z)$ est analytique sur un chemin fermé $z_0z_2z_1z_3z_0$ et en tout point intérieur, alors

$$\int_{z_0z_2z_1} f(z)dz = \int_{z_0z_3z_1} f(z)dz \tag{3.59}$$

$\Rightarrow$ la valeur de $\int_{z_0z_1}$ est indépendante du chemin. Notons que la réciproque est fausse ; si la fonction n'est pas analytique, la valeur de l'intégrale peut dépendre du chemin ou non !

Exemple : Voir slide 27.

Deuxième proposition

Soit C, C_0 deux chemins admissibles, fermés, simples et orientés dan le sens positif (C_0 intérieur à C). Si $f(z)$ est analytique dans C excepté les points intérieurs à C_0 alors :

$$\oint_C f(z)dz = \oint_{C_0} f(z)dz \tag{3.60}$$

Cela signifie que les points "à problème" de la fonction sur le domaine compris par les chemins C et C_0 sont les mêmes, ceux-ci étant uniquement compris à l'intérieur de C_0.

Démonstration. Slide 29. □

Exemple : On avait vu lors d'un précédent exemple (celui prouvant que le chemin d'intégration avait parfois de l'importance que pour $\int_C \frac{dz}{z}$:

$$\begin{array}{rl} \int_{C_1} = & i\pi \\ \int_{C_2} = & -i\pi \end{array} \tag{3.61}$$

On trouve alors :

$$\int_{C_1} - \int_{C_2} = 2\pi i \tag{3.62}$$

$\Rightarrow$ résultat valable pour tout chemin admissible simple fermé entourant zéro.

Troisième proposition

Soient :

- $\mathcal{C}$ un chemin admissible, ferme, simple et orienté dans le sens positif.
- $C_k (k = 1, \ldots, n)$ des chemins admissibles fermés, simples, orientés dans le sens positif, intérieurs à $\mathcal{C}$ et dont l'intérieur n'ont pas de points communs.

Si f est analytique dans $\mathcal{C}$, sauf en des points intérieurs à C_k, alors

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)dz \tag{3.63}$$

Chapitre 4

Intégrales 2

4.1 Formules de Cauchy

4.1.1 Première formule de Cauchy

Si :

1. f est analytique sur $D \cup \mathcal{C}$ où $\mathcal{C}$ est un chemin admissible, simple, fermé, orienté dans un sens positif et D un domaine intérieur à $\mathcal{C}$
2. z_0 n'importe quel point intérieur à $\mathcal{C}$

alors [1] :

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)dz}{z - z_0} \tag{4.1}$$

Avant de démontrer la *première formule de Cauchy*, énonçons et démontrons un lemme qui nous servira :

LEMME : Soit C_0 un cercle de rayon R_0 centré en $z_0 = x_0 + iy_0$ et orienté dans le sens positif.

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_0} \frac{dz}{z - z_0} = 1 \tag{4.2}$$

Démonstration. Paramétrisons notre $\mathcal{C}$:

$$\begin{cases} x &= x_0 + R_0 \cos t \\ y &= y_0 + R_0 \sin t \end{cases} \qquad 0 \leq t \leq 2\pi \tag{4.3}$$

Considérons $z = \phi(t) = x_0 + iy_0 + R_0(\cos t + i \sin t) = z_0 + R_0 \exp(it)$. On a donc $\phi'(t) = R_0 i \exp(it)$ et notre intégrale devient :

$$\oint_{C_0} \frac{dz}{z - z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{R_0 i \exp(it)}{R_0 \exp(it} dt = 2\pi i \tag{4.4}$$

□

EXEMPLE : Considérons un cercle de rayon 1 $\mathcal{C} \equiv |z| = 1$. Soit

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z} \tag{4.5}$$

Comme nous avons $f(z) = 1$ et $z_0 = 0$, on (re)trouve bien $2\pi i$.

1. La valeur de $f(z_0)$ est entièrement déterminée par la valeur de $f(z)$ sur $\mathcal{C}$.

4.1.2 Démonstration de la première formule de Cauchy

Démonstration.
Remarquons que comme f est analytique, elle est forcément continue dans cette région. Je peux donc dire qu'elle est continue en z_0 qui est intérieur à $\mathcal{C}$: $\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0$ t.q.

$$\text{si}|z - z_0| < \delta \quad \text{alors } |f(z) - f(z_0)| < \epsilon \tag{4.6}$$

Choisissons $R_0 < \delta$ ainsi qu'un cercle $|z - z_0| = R_0$ intérieur à $\mathcal{C}$. Par la deuxième promosition de Cauchy-Goursat :

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)dz}{z - z_0} = \oint_{\mathcal{C},} \frac{f(z)dz}{z - z_0} \tag{4.7}$$

Cette fonction est analytique partout, sauf en z_0. Si je soustrait de part et d'autre de cette égalité $f(z_0)$. Comme z_0 est constant, il faut juste soustraire les intégrales.

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)dz}{z - z_0} - f(z_0) \oint_{\mathcal{C},} \frac{f(z)dz}{z - z_0} = \oint_{C_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \tag{4.8}$$

Par application du lemme :

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)dz}{z - z_0} - 2\pi i f(z_0) = \oint_{C_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \tag{4.9}$$

Il faut maintenant montrer que le deuxième membre est nul en appliquant le théorème 'ML'. La borne supérieure de l'intégrant (tirée de la définition de la continuité en début de démo) :

$$\left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\right| < \frac{\epsilon}{R_0} \tag{4.10}$$

Par le théorème 'ML' (où $2\pi R_0$ est la longueur du chemin) :

$$\left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\right| < \frac{\epsilon}{R_0} 2\pi R_0 \tag{4.11}$$

Le melbre de gauche est égal à une constante non négative inférieure à un nombre arbitrairement petit $\Rightarrow 0$. Ceci donne la première formule de Cauchy. □

4.1.3 Deuxième formule de Cauchy

Soit f analytique sur $D \cup \mathcal{C}$ où $\mathcal{C}$ est un chemin admissible, simple, orienté dans le sens positif et D un domaine intérieur à $\mathcal{C}$. Soit z_0, n'importe quel point intérieur à $\mathcal{C}$. On a alors :

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} \, dz \tag{4.12}$$

Démonstration.
Appliquons la première formule de Cauchy à la définition de la dérivée :

$$\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \left(\frac{1}{z - z_0 - \Delta z} - \frac{1}{z - z_0} \right) \frac{f(z)}{\Delta z} \, dz \tag{4.13}$$

En réduisant au même dénominateur, les Δz se simplifient pour avoir :

$$\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i} \underbrace{\oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z) \, dz}{(z - z_0 - \Delta z)(z - z_0)}}_{J} \tag{4.14}$$

Nous savons que $0 < |\Delta z| < d$ où d est la distance minimale entre z_0 et $\mathcal{C}$. On cherche à montrer que :

$$\lim_{\Delta z \to 0} J = \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2}\ dz \tag{4.15}$$

Afin de montrer que ces deux termes sont identiques, faisons la différence et montrons que celle-ci est nulle. Après mise au même dénominateur :

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}} \left(\frac{1}{(z - z_0 - \Delta z)(z - z_0)} - \frac{1}{(z - z_0)^2} \right) f(z)\ dz &= \oint_{\mathcal{C}} \frac{z - z_0 - (z - z_0 - \Delta z)}{(z - z_0 - \Delta z)(z - z_0)^2} f(z)\ dz \\ &= \Delta z \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)\ dz}{(z - z_0 - \Delta z)(z - z_0)^2} \end{aligned} \tag{4.16}$$

Comme il s'agit d'évaluer une fonction continue sur un chemin admissible, simple et fermé, on peut appliquer le théorème ML : la valeur maximale de $|f(z)|$ sur $\mathcal{C}$ est M et la longueur de $\mathcal{C}$ est L. Par l'inégalité triangulaire :

$$|z - z_0| \geq d \quad et \quad |z - z_0 - \Delta z| \geq ||z - z_0| - |\Delta z|| \geq d - |\Delta z| \tag{4.17}$$

Par application du théorème ML :

$$\left| \Delta z \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)\ dz}{(z - z_0 - \Delta z)(z - z_0)^2} \right| \leq \frac{|\Delta z| ML}{(d - |\Delta z|) d^2} \tag{4.18}$$

Ce terme vaut bien 0 pour $\Delta z \to 0$. Nous avons donc :

$$\lim_{\Delta z \to 0} \oint_{\mathcal{C}} \left(\frac{1}{(z - z_0 - \Delta z)(z - z_0)} - \frac{1}{(z - z_0)^2} \right) f(z)\ dz = 0 \tag{4.19}$$

Ou encore :

$$\lim_{\Delta z \to 0} \oint_{\mathcal{C}} \frac{1}{(z - z_0 - \Delta z)(z - z_0)} f(z)\ dz = \lim_{\Delta z \to 0} \oint_{\mathcal{C}} \frac{1}{(z - z_0)^2} f(z)\ dz \tag{4.20}$$

Soit encore :

$$\lim_{\Delta z \to 0} J = \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2}\ dz = 2\pi i f'(z_0) \tag{4.21}$$

$\square$

4.2 Dérivées d'ordre supérieur à 1

4.2.1 Dérivées d'ordre supérieur

Dérivée seconde

De façon similaire, on retrouve l'existence d'une dérivée du second ordre en tout point intérieur à $\mathcal{C}$:

$$f''(z_0) = \frac{1}{\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z - z_0)^3}\ dz \tag{4.22}$$

On en déduit que si f est analytique en z_0, alors f' est analytique en z_0.

A retenir *:* corollaire 1 des formules de Cauchy
Si une fonction f est analytique en un point, alors sa dérivée d'ordre n (quelconque) est une fonction analytique en ce point.

Dérivée n-ième

Par induction, on montre que :

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.23}$$

EXEMPLE : Considérons $|z| = 1, z_0 = 0$ et $n = 3$ pour l'intégrale :

$$\oint_C \frac{\exp(2z)}{z^4} dz \tag{4.24}$$

Identifions J et appliquons :

$$J = \frac{2\pi i}{3!} \frac{d^3}{dz^3} \left(\exp(2z)\right)\big|_{z=0} = \frac{8\pi i}{3} \tag{4.25}$$

A retenir *:* corollaire 2 des formules de Cauchy
Si une fonction $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ est analytique en $z = x + iy$, alors u et v ont des dérivées partielles continues de tous les ordres en ce point.

Démonstration. Considérons la dérivée première de f :

$$f' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} \tag{4.26}$$

Comme f' est analytique et donc dérivable, les dérivées partielles d'ordre 1 de u et v sont continues. Par argument similaire, les dérivées partielles d'ordre 2 de u et v sont continues, ect ect. □

4.2.2 Fonction harmonique

Une fonction réelle de variables réelles $u(x,y)$ est harmonique dans un domaine D du plan $x - y$ si elle admet des dérivées partielles d'ordre 1 et 2 continue dans ce domaine et si $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

A retenir *:* Corollaire 3 des formules de Cauchy
Si $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ est analytique dans D, alors u et v sont harmoniques, c'est-à-dire $\Delta u = 0$ et $\Delta v = 0$.

Démonstration. Calculons f'' :

$$f'' = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + i\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - i\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - i\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \tag{4.27}$$

En partant de cette équation et en égalant les dérivées secondes :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \text{et} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \tag{4.28}$$

En sommant les deux, on retrouve bien $\Delta u = 0$ (faire pareil pour Δv). □

Petit zeste de vocabulaire : on dira que v est harmonique conjuguée de u, c'est-à-dire que u et v sont harmoniques et satisfont les équations de Cauchy-Riemann.

4.2.3 Théorème de Morera

THÉORÈME : MORERA
Si $f(z)$ est continue pour tout z dans un domaine D et si

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z)\ dz = 0 \tag{4.29}$$

pour tout $\mathcal{C}$ admissible fermé contenu dans D, alors $f(z)$ est analytique dans D. **INCLURE SCHEMA SLIDE 11/23**

Ce théorème peut être vu comme une sorte de "réciproque" du théorème de Cauchy.

Démonstration. Provient directement de la démonstration vue dans les primitives, elle ne sera pas reprise ici dans les détails. □

4.3 Théorèmes résultats des formules de Cauchy

4.3.1 Théorème fondamental de l'algèbre

THÉORÈME : Tout polynôme

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n \quad (a_n \neq 0) \tag{4.30}$$

de degré $n \geq 1$ possède au moins une racine.

La démonstration de ce théorème se fait par l'absurde, cf. livre de référence.
On en tire comme **corollaire** :

$$P(z) = c(z - z_1)(z - z_2)\dots(z - z_n) \qquad c, z_k\ (k = 1, \dots, n) \in \mathbb{C} \tag{4.31}$$

Démonstration. Par le théorème fondamental de l'algèbre, $P(z) = (z - z_1)Q_1(z)$ où $Q_1(z)$ est de degré $n - 1$. En tenant le même argument pour $Q_1(z)$ (ect.ect.) :

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2)Q_2(z) \tag{4.32}$$

□

4.3.2 Principe du module maximum

Énoncé

Si f est continue dans $\mathcal{C} \cup D$, analytique et non constante dans D, alors le maximum de $|f(z)|$ pour $z \in \mathcal{C} \cup D$ est atteint **sur** $\mathcal{C}$.

Exemple : Prenons pour chemin $0 \leq x \leq \pi$ et $0 \leq y \leq 1$ et considérons la fonction $f(z) = \sin(z)$. On a donc :

$$\begin{aligned}
|f(z)| &= |sin(x+iy)| \\
&= |\sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y)| \\
&= \sqrt{\sin^2(x)\cosh^2(y) + \cos^2(x)\sinh^2(y)} \\
&= \sqrt{\sin^2(x)\cosh^2(y) + (1-\sin^2(x))\sinh^2(y)} \\
&= \sqrt{\sin^2(x)\underbrace{(\cosh^2(y) - \sinh^2(y))}_{=1} + \sinh^2(y)}
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Le maximum est atteint (en respectant $0 \leq x \leq \pi$ et $0 \leq y \leq 1$) pour $x = \frac{\pi}{2}$ et $y = 1$. On a donc le maximum qui appartient bien au chemin $\mathcal{C}$.

$$\max(|f(z)|) = \frac{\pi}{2} + i \in \mathcal{C} \tag{4.34}$$

Chapitre 5

Séries

5.1 Convergence de suites et de séries

5.1.1 Convergence de suites

Définition

La suite $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ converge vers z

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \tag{5.1}$$

avec $z_1, z_2, \ldots, z \in \mathbb{C}$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : |z_n - z| < \varepsilon \quad \forall n > n_0 \tag{5.2}$$

Théorème : Ecrivons $z_n = x_n + iy_n (n = 1, 2, \ldots)$ et $z = x + iy$.

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} x_n & = x \\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n & = y \end{cases} \tag{5.3}$$

5.1.2 Convergence de séries

Définition

La série $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ où $z_n \in \mathbb{C}$ converge vers S si la suite $S_N = \sum_{n=1}^{N} z_n$ $(N = 1, 2, \ldots)$ des sommes partielles converge vers S, c'est à dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N} : |S_N - S| < \varepsilon \ \ \forall N > N_0 \tag{5.4}$$

Une conséquence directe de cette définition est que la série ne convergera vers S que si la partie réelle de cette série converge, de même pour la partie imaginaire :

Théorème : Ecrivons $z_n = x_n + iy_n (n = 1, 2, \ldots)$ et $S = X + iY$.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{N} z_n = S \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{N} x_n & = X \\ \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{N} y_n & = Y \end{cases} \tag{5.5}$$

Sur base de la définition, on peut établir une convergence dans les cas suivants :

— Soit le reste après N termes $\rho_N = S - S_N$. Comme $|S - S_N| = |\rho_N - 0|$, la série converge si et seulement si la suite des restes tend vers zéro.
— Une condition nécessaire pour que la série converge et que son terme principal z_n converge vers 0 pour $n \to \infty$.
— Si la série de $|z_n|$ converge, alors la série de z_n converge.
— Si la série converge, alors $\exists M \in \mathbb{R}^+ : |z_n| < M \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

5.2 Séries de Taylor et de Laurent

5.2.1 Série de Taylor

Théorème : Série de Taylor Si f est analytique dans le disque ouvert D et que $|z - z_0| < R$, alors en tout point z du disque :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{5.6}$$

où

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \qquad (n = 0, 1, 2, \dots) \tag{5.7}$$

Enonçons et démontrons rapidement un lemme, puis démontrons ce théorème :

Lemme :

$$\frac{1}{1-\alpha} = 1 + \alpha + \cdots + \alpha^{n-1} + \frac{\alpha^n}{1-\alpha}, \alpha \neq 1 \tag{5.8}$$

Démonstration. En multipliant toute l'équation par $(1 - \alpha)$ on trouve $1 = 1$, l'identité est donc vérifiée. □

Démonstration.
Soit un disque de rayon R. Considérons la première formule de Cauchy où z joue le rôle de z_0 et la variable d' intégration est s :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_0} \frac{f(s)}{s-z} ds \qquad (1) \tag{5.9}$$

A l'intérieur de ce disque, je considère un chemin C_0 (cercle de rayon r_0) dans lequel se trouve le point z autour duquel je considère le développement. Notons que :

$$s - z = s - z_0 - (z - z_0) = (s - z_0)(1 - \alpha) \quad \text{avec } \alpha = \frac{z - z_0}{s - z_0} \tag{5.10}$$

Par utilisation du lemme, on a donc :

$$\begin{aligned} \frac{1}{s-z} &= \frac{1}{(s-z_0)(1-\alpha)} \\ &= \frac{1}{s-z_0} + \frac{\alpha}{s-z_0} + \cdots + \frac{\alpha^{n-1}}{s-z_0} + \frac{\alpha^n}{(1-\alpha)(s-z_0)} \qquad (2) \end{aligned} \tag{5.11}$$

En substituant $\alpha = \frac{z-z_0}{s-z_0}$ dans (2) et en introduisant le résultat dans (1) :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_0} \frac{f(s)}{s-z_0} \left(1 + \frac{z-z_0}{s-z_0} + \cdots + \frac{(z-z_0)^{n-1}}{(s-z_0)^{n-1}} \right) ds + R_n \tag{5.12}$$

avec $R_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_0}\frac{f(s)}{s-z_0}\frac{(z-z_0)^n}{(s-z_0)^n}\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{s-z_0}}ds$.
En développant l'expression de $f(z)$ (les intégrales dépendent de s, ne pas hésiter à sortir les termes en z, z_0 si possible) :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_0}\frac{f(s)}{s-z_0}ds + \frac{z-z_0}{2\pi i}\oint_{C_0}\frac{f(s)}{(s-z_0)^2}ds + \cdots + \frac{(z-z_0)^{n-1}}{2\pi i}\oint_{C_0}\frac{f(s)}{(s-z_0)^n}ds + R_n \tag{5.13}$$

On y voit apparaître le terme de la dérivée $(n-1)$ème. En utilisant les formules de Cauchy, on voit apparaître la forme "classique" du développement de Taylor :

$$f(z) = f(z_0) + (z-z_0)f'(z_0) + \cdots + (z-z_0)^{n-1}\frac{f^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!} + R_n \tag{5.14}$$

où $R_n = \frac{(z-z_0)^n}{2\pi i}\oint_{C_0}\frac{f(s)ds}{(s-z_0)^n(s-z)}$.

Il nous faut maintenant montrer, pour conclure, que le reste R_n tend vers 0 lorsque $n \to \infty$. On procède comme précédemment : on borne notre intégrale. Comme par hypothèse, f est analytique dans D, cela implique que :

- $\Rightarrow f$ est continue sur C_0
- $\Rightarrow \exists M : |f(s)| \leq M \ \forall s \in C_0$

Notons que :

$$\begin{aligned} |s-z| &= |s-z_0+z_0-z| \\ &= |(s-z_0)-(z-z_0)| \\ &\geq |s-z_0| - |z-z_0| \\ &\geq r_0 - r \end{aligned} \tag{5.15}$$

Compte tenu de ceci, en appliquant le théorème ML (borne * longueur du cercle de rayon r_0) :

$$|R_n| \leq \frac{r^n}{2\pi}\frac{M}{r_0^n(r_0-r}2\pi r_0 \tag{5.16}$$

En regroupant les termes :

$$|R_n| \leq \frac{Mr_0}{r_0-r}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n, \quad \frac{r}{r_0} < 1 \tag{5.17}$$

On trouve bien :

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0 \tag{5.18}$$

□

Exemple :

1. Considérons $|z| < \infty$ et $f(z) = e^z = f'(z) = f''(z) = \dots$ Notre développement vaut alors :
$$e^z \approx 1 + z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots \quad (|z| < \infty) \tag{5.19}$$
2. Considérons cette fois un cercle unitaire centré à l'origine $|z| < 1$ et la fonction $f(z) = \frac{1}{1-z}$. Les dérivées vallent : $f'(z) = \frac{1}{(1-z)^2}, f''(z) = \frac{1}{(1-z)^3}, \dots, f^{(n)} = \frac{1}{(1-z)^{n+1}}$. Notre développement vaut alors :
$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots \quad (|z| < 1) \tag{5.20}$$
ou encore (résultat intéressant) :
$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad (|z| < 1) \tag{5.21}$$
3. Même chemin que pour 2. mais cette fois $f(z) = \frac{1}{z(1-z^2)} = \frac{1}{z}\frac{1}{(1-z^2)}$. En reprenant le résultat précédent :
$$\frac{1}{z(1-z^2)} = \frac{1}{z}(1 + z^2 + z^4 + \dots) \tag{5.22}$$
Finalement
$$f(z) = \frac{1}{z} + z + z^3 + \dots \quad (0 < |z| < 1) \tag{5.23}$$

5.2.2 Série de Laurent

Théorème : I
Si :

1. f est analytique dans un domaine $D : R_1 < |z - z_0| < R_2$.
2. $\mathcal{C}$ est un chemin admissible fermé entourant z_0 et dans D, orienté dans le sens positif.

Alors :
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \tag{5.24}$$
où
$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \tag{5.25}$$
$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{-n+1}} \quad (n = 1, 2, \dots) \tag{5.26}$$
Une expression alternative d'une série de Laurent est donné par :
$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \tag{5.27}$$
avec :
$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \tag{5.28}$$

Démonstration. **INCLURE IMAGE SLIDE 16/30**
Par extension du théorème de Cauchy-Grousat appliqué au contour ci-contre, on peut dire que :

$$\oint_{C_2} \frac{f(s)}{s-z}\, ds - \oint_{C_1} \frac{f(s)}{s-z}\, ds - \oint_{\Gamma} \frac{f(s)}{s-z}\, ds = 0 \qquad (*) \tag{5.29}$$

La première formule de Cauchy nous dit que $\oint_\Gamma \frac{f(s)}{s-z}\, ds = 2\pi i f(z)$. En substituant dans $(*)$ on trouve :

$$f(z) = \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(s)}{s-z} ds}_{T_1(z)} + \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(s)}{s-z} ds}_{T_2(z)} \tag{5.30}$$

Pour le terme $T_1(z)$, on procède par similitude avec la démonstration de la série de Taylor [1] pour trouver :

$$T_1(z) = \sum_{n=0}^{N-1} A_n (z-z_0)^n + R_N \tag{5.31}$$

avec $A_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(s)}{(s-z_0)^{n+1}} ds$. Par un des corollaires du théorème de Cauchy-Goursat (Proposition 2) : $A_n = a_n$.

Pour le deuxième terme $T_2(z)$, notons que :

$$\begin{aligned} z-s &= z-z_0-(s-z_0) = (z-z_0)(1-\beta) \quad \text{avec} \quad \beta = \tfrac{s-z_0}{z-z_0} \\ \tfrac{1}{1-\beta} &= 1+\beta+\cdots+\beta^{N-1}+\tfrac{\beta^N}{1-\beta} \quad \beta \neq 1 \end{aligned} \tag{5.32}$$

En substituant ceci dans $T_2(z)$:

$$T_2(z) = \frac{1}{2\pi i(z-z_0)} \oint_{C_1} \frac{f(s)}{1-\beta}\, ds \tag{5.33}$$

Ou encore :

$$\begin{aligned} T_2(z) = \frac{1}{(z-z_0)} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} f(s) ds + \frac{1}{(z-z_0^2} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} f(s)(s-z_0) ds \ + \ \ldots \\ \ldots \ + \ \frac{1}{(z-z_0)^N} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} f(s)(s-z_0) ds + S_N \end{aligned} \tag{5.34}$$

avec $S_N = \frac{1}{(z-z_0)} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} f(s) \frac{\beta^N}{1-\beta}\, ds$.
Ceci implique que :

$$T_2(z) = \sum_{n=1}^{N} B_n \frac{1}{(z-z_0)^n} + S_N \tag{5.35}$$

où $S_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(s)}{(s-z_0)^{-n+1}} ds$. Cette intégrale à quasi la forme énoncée dans le théorème si ce n'est que le chemin est ici C_1. Mais ce chemin est bien sur arbitraire pour le peu qu'il soit simple, fermé, admissible et dans le domaine de convergence. Par un des corollaires du théorème de Cauchy-Goursat (Proposition 2) : $B_n = b_n$.

1. Slide 18/30.

Montrons maintenant que $R_N = 0$ pour $N \to \infty$ et $S_N = 0$ pour $R_1 < |z - z_0| < R_2$. Les deux expressions étant :

$$\begin{array}{ll} R_N & = \frac{(z-z_0)^N}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(s)}{(s-z_0)^N (s-z)} ds \\ S_N & = \frac{1}{(z-z_0)^N} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(s)(s-z_0)^N}{z-s} ds \end{array} \tag{5.36}$$

Par application du théorème ML comme précédemment, on retrouve bien le résultat recherché [2].

□

Exemple : En fonction du type de chemin, il faudra utiliser Taylor ou Laurent. Par exemple :

— $|z| < 1$: Taylor
— $1 < |z| < 2$: Laurent
— $|z| > 2$: Laurent

Considérons $f(z) = \dfrac{-1}{(z-1)(z-2)}$ sur $1 < |z| < 2$. Pour résoudre cette intégrale, utilisons la décomposition en fraction simple :

$$f(z) = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2} \tag{5.37}$$

Multiplions les deux membres par $(z-1)$ et évaluons la fonction en un point quelconque (le point $z = 1$ paraît judicieux) :

$$\left.\frac{-(z-1)}{(z-1)(z-2)}\right|_{z=1} = A + \frac{B(z-1)}{z-1} \tag{5.38}$$

On trouve alors $A = 1$ et $B = -1$ (même raisonnement) $\Rightarrow f(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2}$. En décomposant le problème en deux, on a premièrement :

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z(1-\frac{1}{z})} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} \quad (|1/z| > 1 \to |z| > 1) \tag{5.39}$$

Secondement :

$$\frac{-1}{z-2} = -\frac{1}{2(\frac{z}{2}-1)} = \frac{1}{z(1-\frac{z}{2})} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n \quad (|1/z| < 2 \to |z| < 2) \tag{5.40}$$

Ainsi

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n \quad (1 < |z| < 2) \tag{5.41}$$

5.3 Propriétés des séries de puissances

5.3.1 Domaine de convergence et convergence absolue

Théorème : 1 - série de puissances positives
Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ converge pour $z = z_1 \quad (z_1 \neq z_0)$, alors $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n (z-z_0)^n|$ converge pour tout z dans $|z - z_0| < R_1$ où $R_1 = z_1 - z_0|$, le distance entre les deux points.

2. Slide 20/30.

Rappelons également que la convergence absolue d'une série de puissance implique la convergence simple de cette même série de puissance :

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(z-z_0)^n| \text{ converge } \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \text{ converge} \tag{5.42}$$

Avant d'énoncer les autres théorèmes, petit tour des définitions utiles :

Cercle de convergence : cercle de plus grand rayon tel que la série converge pour tout point intérieur à ce cercle.

Rayon de convergence : rayon de ce cercle.

Ceci étant fait, il est précieux se savoir que si l'on a une série de puissance *négative* qui converge, alors cette même série converge absolument dans la région extérieure au disque d'un certain rayon, ce qui formellement dit :

Théorème : 2 - série de puissances négatives
Si $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}$ converge pour $z = z_1 \quad (z_1 \neq z_0)$, alors $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{b_n}{(z-z_0)^n}\right|$ converge pour tout z extérieur au cercle $|z-z_0| = R_1$ où $R_1 = |z_1 - z_0|$.

5.3.2 Continuité

Théorème : 3
Une série de puissance

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \tag{5.43}$$

représente une fonction continue à l'intérieur de son cercle de convergence.

Ceci explloite directement la définition de la continuité. Soit $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ dans $|z-z_0| = R$ et z_1 à l'intérieur de ce cercle.

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \; t.q. \; si \; |z-z_1| < \delta \text{ alors } |S(z) - S(z_1)| < \epsilon \tag{5.44}$$

et δ est suffisamment petit pour que z dans $|z-z_0| < R$ (continuité de $S(z)$ en z_1).

5.3.3 Intégration d'une série de puissance

Théorème : 4
Considérons une série de puissance $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ avec comme cercle de convergence $|z-z_0| = R$, $\mathcal{C}$ un chemin admissible fermé intérieur au cercle de convergence de $g(z)$ une fonction continue sur $\mathcal{C}$. Sous ces hypothèses, on peut intégrer terme à terme la série après l'avoir multipliée par une fonction continue arbitraire.

$$\oint_{\mathcal{C}} g(z)S(z)dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \oint_{\mathcal{C}} g(z)(z-z_0)^n dz \qquad (**) \tag{5.45}$$

Un corollaire de ce théorème démontré ci-dessous est que la somme $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ est analytique en tout point z intérieur au cercle de convergence de cette ssss série.

Démonstration.
Posons $g(z) = 1$. Par Cauchy-Goursat :

$$\oint_{\mathcal{C}} g(z)(z-z_0)^n dz = \oint_{\mathcal{C}} (z-z_0)^n dz = 0 \quad (n = 1, 2, \dots) \tag{5.46}$$

pour tout chemin admissible fermé à l'intérieur du cercle de convergence. Par substitution dans $(**)$:

$$\oint_{\mathcal{C}} S(z)dz = 0 \qquad (***) \tag{5.47}$$

Comme $S(z)$ est continue et $(***)$ est vérifiée pour tout $\mathcal{C}$ dans la région de convergence, par le théorème de Morera[3], $S(z)$ est analytique dans le disque ouvert borné par le cercle de convergence. □

5.3.4 Dérivée d'une série de puissances

THÉORÈME : 5
On peut dériver une série de puissance terme à terme :

$$S'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-z_0)^{n-1} \tag{5.48}$$

pour tout z à l'intérieur du cercle de convergence.

Démonstration.
Soit $\mathcal{C}$ un chemin admissible fermé simple entourant z, orienté dans le sens positif et intérieur au cercle de convergence.
Considérons $g(s) = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{(s-z)^2}$ pour tout s sur $\mathcal{C}$. Comme $g(s)$ est continue, par le théorème 4 :

$$\oint_{\mathcal{C}} g(s)S(s)ds = \sum_{n=1}^{\infty} g(s)(s-z_0)^n ds \qquad (-\_-)" \tag{5.49}$$

En appliquant la deuxième formule de Cauchy, je peux transformer ma première intégrale :

$$\oint_{\mathcal{C}} g(s)S(s)ds = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}} \frac{S(s)}{(s-z)^2}ds = S'(z) \tag{5.50}$$

Comme on sait que $S(z)$ est une fonction analytique dans $\mathcal{C}$ et à l'intérieur, on vient de le montrer. Comme z est à l'intérieur de $\mathcal{C}$, les hypothèses d'une des formules de Cauchy sont vérifiée, celle donant la dérivée.
Comme nous avons aussi :

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}} g(s)(s-z_0)^n\ ds &= \tfrac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}} \tfrac{(s-z_0)^n}{(s-z)^n}\ ds \\ &= \tfrac{d}{dz}(z-z_0)^n \quad (n=0,1,2,\dots) \end{aligned} \tag{5.51}$$

Par substitution dans $(-\_-)"$ on démontre le théorème :

$$S'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{d}{dz}(z-z_0)^n \tag{5.52}$$

□

3. La "sorte" de réciproque du théorème de Cauchy-Goursat.

EXEMPLE : Soit la fonction $f(z) = \frac{1}{(1+z)^2}$, nous obtenons :

$$\frac{1}{1+z} = \sum_0^\infty (-1)^n z_n \quad (|z| < 1) \tag{5.53}$$

$$\frac{1}{(1+z)^2} = \sum_1^\infty (-1)^{n-1} n z^{n-1} \quad (|z| < 1) \tag{5.54}$$

$$= \sum_0^\infty (-1)^n (n+1) z^n \quad (|z| < 1) \tag{5.55}$$

5.3.5 Unicité de la représentation par une série de puissance

Série de Taylor

Si

$$\sum_{n=0}^\infty a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^\infty b_n (z-z_0)^n \qquad |z-z_0| < R \tag{5.56}$$

alors $a_n = b_n = \frac{f^n(z_0)}{n!}$ et la série est le développement en série de Taylor de $f(z)$ en puissance de $(z - z_0)$.

Série de Laurent

Si la série

$$\sum_{-\infty}^\infty c_n (z-z_0)^n \tag{5.57}$$

converge vers $f(z)$ en tout point d'un domaine en forme d'anneau autour de z_0, alors c'est le développement en série de Laurent de f en puissances de $(z - z_0)$ dans ce domaine

EXEMPLE : Soit la fonction $f(z) = \sum_0^\infty a_n (z-z_0)^n \quad |z - z_0| < 2$. Amusons-nous à calculer $f(z)$ en z_0 ainsi que ses dérivées :

$$f(z_0) = a_0 \tag{5.58}$$

$$f'(z) = \sum_1^\infty a_n n (z-z_0)^{n-1} \tag{5.59}$$

$$f'(z_0) = a_1 \tag{5.60}$$

$$f''(z) = \sum_2^\infty a_n n(n-1)(z-z_0)^{n-2} \tag{5.61}$$

$$f''(z_0) = 2a_2 \tag{5.62}$$

$$f^{(m)}(z) = \sum_m^\infty a_n n(n-1)\dots(n-m+1)(z-z_0)^{n-m} \tag{5.63}$$

$$f^{(m)}(z_0) = m!\, a_m \tag{5.64}$$

On retrouve les formules bien connues du dev de Taylor

5.3.6 Multiplication de séries de puissances

Pour les quatres opérations de base, la manipulation des séries de puissances se fait de façon analogue aux polynômes, en utilisant les propriétés de commutativité et de distributivité.

EXEMPLE : Soit la fonction $f(z) = \frac{e^z}{1+z}$, on a :

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots \quad (|z| < \infty) \tag{5.65}$$

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \dots \quad (|z| < 1) \tag{5.66}$$

et donc

$$\frac{e^z}{1+z} = 1 + z^2 \left(1 - 1 + \frac{1}{2}\right) + z^3 \left(-1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right) + \dots \quad (|z| < 1) \tag{5.67}$$

NICO A OUBLIÉ LA SUITE -_-

Chapitre 6

Résidus et pôles

6.1 Résidu et théorème des résidus

6.1.1 Point singulier isolé

On dira que z_0 est un point isolé de $f(z)$ si :
— f n'est pas analytique en z_0 mais analytique en certains points autour de z_0.
— Il existe un ϵ tel que f est analytique dans $0 < |z - z_0| < \epsilon$.

EXEMPLE :

1. La fonction $f(z) = \frac{z^3}{z^2(z^2+5)}$ possède trois points singuliers isolés : $z = 0, \pm i\sqrt{5}$.
2. Pour *Log* z, zéro est un point singulier, mais pas isolé.

6.1.2 Notion de résidu

Soit z_0 un point singulier isolé. Ceci implique qu'il existe un R_2 tel que f est analytique pour tout z dans $|z - z_0| < R_2$, où $f(z$ est représenté par le développement en série de Laurent :

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \dots + + \frac{b_n}{(z - z_0)^n} + \dots \qquad (0 < |z - z_0| < R_2) \tag{6.1}$$

avec $b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{-n+1}} dz \quad (n = 1, 2, \dots)$ avec en particulier $b_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} f(z) dz$.

A retenir : Définition
Le résidu de f au point singulier z_0 est la coefficient de $\frac{1}{z-z_0}$ dans le développement en série de Laurent de $f(z)$ en puissance de $(z - z_0)$ pour $0 < |z - z_0| < R_2$.
On le notera :

$$b_1 = \mathrm{Res}_{z=z_0}\ f(z) \tag{6.2}$$

Ce résidu permet de simplifier fortement le calcul d'intégrale. Nous verrons également qu'il est possible de le calculer sans déballer le dev. de Laurent.

6.1.3 Théorème des résidus

Mais comment calculer des intégrales ? Avec le résidu défini ci-dessus ça devient plus simple : il suffit de faire la somme des résidus aux différents points singuliers (avec un facteur de $2\pi i$) :

THÉORÈME : **INCLURE SCHEMA SLIDE 7/19**
Soit $\mathcal{C}$ un chemin admissible fermé, simple, orienté dans le sens positif et f analytique en tout point de $\mathcal{C}$ ainsi qu'à l'intérieur de $\mathcal{C}$ sauf en un nombre fini de points singuliers isolés z_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ à l' intérieur de $\mathcal{C}$:

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}_{z=z_k}\, f(z) \tag{6.3}$$

Démonstration.
Découle directement du théorème de Cauchy-Goursat, la troisi !me proposition :

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z)dz - \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)dz = 0 \tag{6.4}$$

Ceci impliquant :

$$\oint_{C_k} f(z)dz = 2\pi i \mathrm{Res}_{z=z_k}\, f(z) \tag{6.5}$$

□

EXEMPLE : **1**

$$\oint_C \frac{\cos(z)}{z^3}dz = 2\pi i \underset{z=0}{Res} \overbrace{(\cos(z)z^{-3})}^{f(z)} \quad (C \equiv |z| = 1) \tag{6.6}$$

En sachant que

$$f(z) = \frac{1}{z^3}\left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots\right) \quad (0 < |z| < \infty) \tag{6.7}$$

$$= \frac{1}{z^3} - \frac{1}{2z} + \ldots \tag{6.8}$$

le résidus (de cette fonction) étant le coefficient de $1/z \to$ résidus $= -1/2$
Ainsi, l'intégrale vaut

$$\oint_C \frac{\cos(z)}{z^3}dz = -\pi i \quad (C \equiv |z| = 1) \tag{6.9}$$

EXEMPLE : **2**

$$\oint_C \overbrace{\frac{5z-2}{z(z-1)}}^{f(z)} dz = 2\pi i\,(\underset{z=1}{Res}\, f(z) + \underset{z=0}{Res}\, f(z)) \quad (C \equiv |z| = 2) \tag{6.10}$$

En sachant que

$$f(z) = \frac{5z-2}{z(z-1)} = \frac{2}{z} + \frac{3}{z-1} \tag{6.11}$$

$$= \frac{2}{z} + \sum_0^\infty a_n z^n \quad (0 < |z| < 1) \tag{6.12}$$

$$= \frac{3}{z-1} + \sum_0^\infty b_n (z-1)^n \quad (0 < |z-1| < 1) \tag{6.13}$$

le résidu vaut donc respectivement pour $z = 1$ et $z = 2$, 2 et 3.
Nous obtenons donc

$$\oint_C \frac{5z-2}{z(z-1)} dz = 10\pi i \tag{6.14}$$

6.2 Calcul du résidu

6.2.1 Trois types de points singuliers isolés

On utilise la partie principale du développement en série de Laurent. Considérons z_0 un point singulier isolé : $\exists R_2 > 0$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n (z - z0)^n + \frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \dots \tag{6.15}$$

La partie principale de f en z_0 est alors :

$$\frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \dots + \frac{b_n}{(z-z_0)^n} + \dots \tag{6.16}$$

Ceci étant maintenant clair comme de l'eau de roche, voici ce qui justifie le titre de cette sous-section :

A retenir *:*

1. S'il existe m tq :
$$b_m \neq 0 \;\text{ et }\; b_{m+1} = b_{m+2} = \dots = 0 \tag{6.17}$$
alors z_0 est un **pôle** d'ordre m de $f(z)$. Si $m = 1$ le pôle est dit *simple*.
2. Si $b_n = \forall n$ alors z_0 est un **point singulier artificiel** de $f(z)$.
3. Si la partie principe contient un nombre infini de terme, z_0 est un **point singulier essentiel** de $f(z)$.

Exemple : **1**

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{0}^{\infty} \frac{1}{z^n}\frac{1}{n!} \quad (0 < |z| < \infty) \tag{6.18}$$

Nous avons donc un nombre ∞ de terme en puissance négative de $z \to z = 0$ est un point singulier *essentiel.*
Prenons un autre exemple :

$$\begin{aligned} \frac{\sinh(z)}{z^4} &= \frac{1}{z^4}\left(z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots\right) \quad (0 < |z| < \infty) && (6.19) \\ &= \frac{1}{z^3} + \frac{1}{6z} + \frac{z}{5!} && (6.20) \end{aligned}$$

Nous avons donc un pôle de multiplicité d'ordre 3 (degré le plus haut des puissance négative de z)

Exemple : **2**

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1-\cos(z)}{z^2} \quad (0 < |z| < \infty) && (6.21) \\ &= \frac{1-(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\dots)}{z^2} && (6.22) \\ &= \frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \dots \quad (0 < |z| < \infty) && (6.23) \end{aligned}$$

Associer $f(0) = \frac{1}{2} \mid \lim_{z\to 0} f(z) = \frac{1}{2}$

Théorème : R1
Un point singulier isolé z_0 de f est un pôle d'ordre m si et seulement si

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z-z_0)^m} \tag{6.24}$$

où $\phi(z)$ est analytique et non nulle en z_0 ? En outre :

$$\begin{aligned} Res_{z=z_0}\ f(z) &= \phi(z_0) \quad si\ m = 1 \\ Res_{z=z_0}\ f(z) &= \frac{\phi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!} \quad si\ m \geq 2 \end{aligned} \tag{6.25}$$

Ce théorème donne le résidu de façon rapide, pour autant que l'on sait factoriser $f(z)$ de la façon suivante. Il faut bien qu'il y ai un facteur 1 au dénominateur sinon *slenderman* arrive.

Démonstration.
Sens direct
Ecrivons le développement de Taylor au voisinage de z_0 en supposant que $f(z)$ est de la forme (6.24) :

$$\phi(z) = \phi(z_0) + \frac{\phi'(z_0)}{1!}(z-z_0) + \dots + \frac{\phi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}(z-z_0)^{m-1} + \sum_{n=m}^{\infty}\frac{\phi^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n \tag{6.26}$$

Pour une voisinage de $z_0, |z-z_0| < \epsilon$, on obtient un developpement qui possède une série de Laurent. Comme ϕ est nul, on peut conclure que le terme en $1/(z-z_0)$ est bien un pôle d'ordre m en z_0.

Réciproquement
Supposons que z_0 soit un pôle d'ordre m de f, c'est à dire :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \frac{b_1}{z-z_0} + \cdots + \frac{b_m}{(z-z_0)^m} \qquad (0 < |z-z_0| < R_2), b_m \neq 0 \tag{6.27}$$

Définissions une fonction $\phi(z)$ définie par :

$$\phi(z) = \begin{cases} (z-z_0)^m f(z) & si\ z \neq z_0 \\ b_m & si\ z = z_0 \end{cases} \tag{6.28}$$

Cette fonction possède le développement en série suivant :

$$\phi(z) = b_m + b_{m-1}(z-z_0) + \cdots + b_2(z-z_0)^{m-2} + b_1(z-z_0)^{m-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^{m+n} \tag{6.29}$$

dans $|z-z_0| < R_2$. Comme le développement existe, cela implique que $\phi(z)$ est analytique dans $|z-z_0| < R_2$ (en particulier en z_0) et que $\phi(z_0) = b_m \neq 0$. □

Exemple : Choisissons la fonction ci-dessous et appliquons le théorème R1

$$f(z) = \frac{z^3+2z}{(2z-i)^3} = \frac{\overbrace{[(z^3+2z)/2^3]}^{\phi(z)}}{(z-\frac{i}{2})^3} \tag{6.30}$$

Calculons le résidu (à l'aide du théorème R1) en $z = 1/2$, l'un des points singuliers de la fonction

$$\underset{z=\frac{1}{2}}{Res} f(z) = \left.\frac{\phi''(z)}{2!}\right|_{z=\frac{1}{2}} \tag{6.31}$$

$$= \left.\frac{6z/2^3}{2!}\right|_{z=\frac{1}{2}} \tag{6.32}$$

$$= \frac{3i}{16} \tag{6.33}$$

Il est parfois compliquer de factoriser le dénominateur pour le mettre sous la forme du Theorème R1. Si c'est le cas, on préfèrera le théorème suivant [1] :

Théorème : R2
Soient deux fonctions p et q analytiques en z_0. Si :

$$p(z_0) \neq 0 \quad q(z_0) = 0 \quad q'(z_0) \neq 0 \tag{6.34}$$

alors z_0 est un pôle simple du quotient $\frac{p(z)}{q(z)}$ et

$$Res_{z=z_0} \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)} \tag{6.35}$$

1. Démonstration pas à connaitre.

6.3 Zéro de $f(z)$

Def : Soit f analytique en z_0. Si $f(z_0) = 0$, s'il existe un entier m tel que $f^{(m)} \neq 0$ et $f(z_0) = \cdots = f^{(m-1)}(z_0) = 0$ alors f possède un zéro d'ordre m en z_0.

Proposition : f possède un zéro d'ordre m si et seulement si il existe une fonction g analytique et non nulle en z_0 telle que :

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z) \tag{6.36}$$

Lien avec pôle ? Soient p et q analytiques en z_0 avec $p(z_0) \neq 0$. Si z_0 est séro d'ordre m de q, alors z_0 est un pôle d'ordre m de $\frac{p}{q}$.

Exemple : Calculons la valeurs de la fonction ci-dessous en $z = 0$ ainsi que ses dérivées

$$\begin{aligned} f(z) &= z(e^z - 1) && (6.37) \\ f(0) &= 0 && (6.38) \\ f'(z) &= e^z - 1 + ze^z \to f'(0) = 0 && (6.39) \\ f''(z) &= e^z + e^z + ze^z \to f''(0) = 2 && (6.40) \\ & && (6.41) \end{aligned}$$

pour $m = 2$ on a :

$$f(z) = z^2 g(z) \tag{6.42}$$

Ainsi, $g(z)$ vaut :

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{e^z - 1}{z} = \frac{f(z)}{z^2} \quad (0 < |z| < \infty) && (6.43) \\ &= \frac{\cancel{1+}z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots \cancel{-1}}{z} && (6.44) \\ &= \begin{cases} 1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots & (0 < |z| < \infty) \\ 1 & (z = 0) \end{cases} && (6.45) \end{aligned}$$

Chapitre 7

Intégrales généralisées

7.1 Évaluation d'intégrales impropres

7.1.1 Intégrales impropres

Avant d'en venir aux propriétés, il faut énoncer trois définitions :

1. Soit $f(x)$ continue $\forall x \geq 0$

$$\int_0^\infty f(x)\ dx = \lim_{R\to\infty} \int_0^R f(x)\ dx \tag{7.1}$$

2. Soit $f(x)$ continue $\forall x$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\ dx = \lim_{R_1\to\infty} \int_{-R_1}^0 f(x)\ dx + \lim_{R_2\to\infty} \int_0^{R_2} f(x)\ dx \tag{7.2}$$

3. La **valeur principale de Cauchy**[1] de $\int_{-\infty}^\infty f(x)\ dx$:

$$P.V. \int_{-\infty}^\infty f(x)\ dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^R f(x)\ dx \tag{7.3}$$

Propriété :

1. Si $\int_{-\infty}^\infty f(x)\ dx$ converge, sa valeur principale de Cauchy existe et est égale au membre de droite de (7.2).
2. L'existence de P.V. $\int_{-\infty}^\infty f(x)\ dx$ n'implique pas nécessairement la convervence de (7.2)
3. Si $f(x)$ est une fonction paire et P.V. $\int_{-\infty}^\infty f(x)\ dx$ existe, alors

$$2\int_0^\infty f(x)\ dx = \int_{-\infty}^\infty f(x)\ dx = P.V. \int_{-\infty}^\infty f(x)\ dx \tag{7.4}$$

Démonstration.
Propriété 1

$$\begin{aligned} \lim_{R\to\infty} \textstyle\int_{-R}^R f(x)\ dx &= \lim_{R\to\infty} \left[\textstyle\int_{-R}^0 f(x)\ dx + \int_0^R f(x)\ dx\right] \\ &= \lim_{R\to\infty} \textstyle\int_{-R}^0 f(x)\ dx + \lim_{R\to\infty} \int_0^R f(x)\ dx \end{aligned} \tag{7.5}$$

1. *Principal Value*

La convergence des deux dernières limites impliquent donc la convergence P.V. de $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx$.

Propriété 2 : Donner un contre-exemple

Propriété 3
Rappellons qu'une fonction est paire si $f(-x) = f(x) \forall x$. Par symétrie du graphe de la fonction $y = f(x)$ par rapport à l'axe y on peut écrire que

$$\begin{array}{ll} \int_{-R_1}^{0} f(x)\ dx & = \frac{1}{2} \int_{-R_1}^{R_1} f(x)\ dx \\ \int_{0}^{R_2} f(x)\ dx & = \frac{1}{2} \int_{-R_2}^{R_2} f(x)\ dx \end{array} \tag{7.6}$$

Si le membre de droite converve, alors forcément celui de gauche aussi. On a dès lors, en sommant les deux équations :

$$\int_{-R_1}^{0} f(x)\ dx + \int_{0}^{R_2} f(x)\ dx = \frac{1}{2} \int_{-R_1}^{R_1} f(x)\ dx + \frac{1}{2} \int_{-R_2}^{R_2} f(x)\ dx \tag{7.7}$$

En faisant tendre $R_1, R_2 \to \infty$ et en supposant l'existance des limites dans le membre de droite :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx = P.V.\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx \tag{7.8}$$

En outre, (7.6) implique :

$$\int_{0}^{\infty} f(x)\ dx = \frac{1}{2} \left[P.V.\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx \right] \tag{7.9}$$

□

Exemple :

$$PV \int_{-\infty}^{+\infty} x\, dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} x\, dx \tag{7.10}$$

$$= \lim_{R\to\infty} \left. \frac{x^2}{2} \right|_{-R}^{R} = 0 \tag{7.11}$$

$$\lim_{R\to\infty} \int_{0}^{R} x\, dx = \lim_{R\to\infty} \left. \frac{x^2}{2} \right|_{0}^{R} \to \infty \tag{7.12}$$

7.1.2 Intégrales de fractions rationnelles

Pas vu en cours, si ce n'est cet exemple :

Exemple : **(dessin sur le slide)**
Calculons l'intégrale ci-dessous

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{dx}{x^2+1}}_{fct\ pair} = PV \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} \tag{7.13}$$

$$\int_{-R}^{R} \frac{dx}{x^2+1} + \int_{C_R} \frac{dz}{z^2+1} = \oint \frac{dz}{z^2+1} \tag{7.14}$$

Calculons l'intégrale sur le contour fermé grâce au théorème R1 :

$$f(z) = \frac{\overbrace{[1/(z+i)]}^{\phi(z)}}{z-i} \tag{7.15}$$

$$\underset{z=i}{Res}\, f(z) = \underset{z=i}{Res} \frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{2i} = \frac{-i}{2} \tag{7.16}$$

$$\oint \frac{dz}{z^2+1} = 2\pi i \underset{z=i}{Res} \frac{1}{z^2+1} = 2\pi i \left(\frac{-i}{2}\right) = \pi \tag{7.17}$$

Ainsi, la somme vaut :

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{dx}{x^2+1} + \lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{dz}{z^2+1} = \pi \tag{7.18}$$

Utilisons le théorème ML :

$$\left|\int_{C_R} \frac{dz}{z^2+1}\right| \leq \frac{\pi R}{R^2-1} \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad |z^2+1| > |z^2| - 1 \tag{7.19}$$

$$PV \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \pi \Rightarrow \lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{dz}{z^2+1} = 0 \tag{7.20}$$

7.2 Intégrales impropres rencontrées en analyse de Fourier

7.2.1 Classe des intégrale considérée

Nous avons ici :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(ax)\ dx \quad ou \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(ax)\ dx \tag{7.21}$$

où $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ avec $p(x), q(x)$ des polynômes à coefficients réels et sans facteur commun et $q(x)$ sans zéro réel et possède au moins une paire de zéros complexes conjugés.

La difficulté de ces intégrales vient du fait que les modules des fonction sinux et consinus ne sont pas bornés : $|\sin(az)|$ et $|\cos(az)|$ croissent comme $\sinh(ay)$ ou e^{ay} lorsque $y \to \infty$ rendant le théorème ML non-appliquable.
Pour s'en sortir, on peut exploiter les deux faits suivants :
— $\int_{-R}^{R} f(x)\cos(ax)\ dx + i\int_{-R}^{R} f(x)\sin(ax)\ dx = \int_{-R}^{R} f(x)e^{iax}\ dx$
— Le module de $e^{iaz}(e^{-ay})$ est borné pour $y \geq 0$.

Exemple : Rebelote, calculons cette intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2+1}\,dx = PV \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2+1}\,dx \tag{7.22}$$

$$Re \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{x^2+1}\,dx = \int_{-R}^{R} \frac{\cos(x)}{x^2+1}\,dx \tag{7.23}$$

$$Re \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{x^2+1}\,dx + Re \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z^2+1}\,dz = Re \oint \frac{e^{iz}}{z^2+1}\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i} \frac{e^{iz}}{z^2+1} \tag{7.24}$$

Calculons la valeur de l'intégrale sur le contour fermé grâce au théorème R1 (encore ^ -^) :

$$f(z) = \frac{\overbrace{[e^{iz}/(z+i)]}^{\phi(z)}}{z-i} \tag{7.25}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=i} \frac{e^{iz}}{z^2+1} = \phi(i) = e^{-1}/2i = \frac{-i}{2e} \tag{7.26}$$

$$2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i} \frac{e^{iz}}{z^2+1} = 2\pi i \left(\frac{-i}{2e}\right) = \frac{\pi}{e} \tag{7.27}$$

Théorème ML pour pas trop changer :

$$\left| Re \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z^2+1}\,dz \right| \leq \left| \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z^2+1}\,dz \right| \leq \frac{\pi R}{R^2-1} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0 \tag{7.28}$$

$$\lim_{R\to\infty} Re \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z^2+1}\,dz = 0 \Rightarrow \lim_{R\to\infty} Re \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{e} = PV \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2+1}\,dx \tag{7.29}$$

7.2.2 Lemme de Jordan

Non vu en cours, sera founri à l'examen si nécessaire.

7.2.3 Intégrales définies incluant $\sin x$ et $\cos x$

On considère ici la classe des intégrales suivantes :

$$\int_0^{2\pi} F(\sin(a\theta), \cos(a\theta))\; d\theta \quad a \in \mathbb{Z} \tag{7.30}$$

Pour résoudre ce genre d'intégrale, on va poser que θ est l'argument d'un point z sur le cercle unité $\mathcal{C}$ et posons $z = e^{i\theta}$ $(0 \leq \theta \leq 1\pi)$. En expriment sinus & cosinus de la sorte :

$$\sin(a\theta) = \tfrac{z^a - z^{-a}}{2i} \quad \cos(a\theta) = \tfrac{z^a + z^{-a}}{2} \quad d\theta = \tfrac{dz}{iz} \tag{7.31}$$

Notre intégrale initiale devient alors :

$$\oint_{\mathcal{C}} F\left(\frac{z^a - z^{-a}}{2i}, \frac{z^a + z^{-a}}{2}\right) \frac{dz}{iz} \tag{7.32}$$

On peut l'évaluer par le théorèmes des résodis si l'intégrant est une fraction rationnelle sans pôle sur $\mathcal{C}$.

7.2.4 Intégration le long d'une coupe

Il s'agit d'un long exemple (Slide 20-24) d'un niveau supérieur à celui de l'examen. L'astuce est de trouver le "bon" chemin et d'ensuite utiliser le théorème des résidus.

7.3 Principe de l'argument

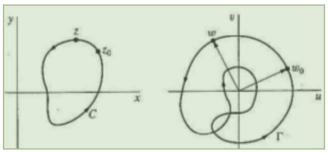

FIGURE 7.1 – Principe de l'argument

Ce principe est à la base de l'étude de la stabilité des boucles à régulations, comme nous aurons le plaisir de le voir en *Automatique.*
Les hypothèses du théorème sont les suivantes : f est analytique dans D, domaine intérieur à $\mathcal{C}$ (admissible simple fermé orienté dans le sens positif) sauf aux pôles dans D. En outre, f analytique et **non nulle** sur $\mathcal{C}$.
Utilisions les notations :

- Γ : l'image de $\mathcal{C}$ par transformation $w = f(z)$ qui ne passe pas par l'origine.
- $\Delta_C \; arg \; f(z) = \phi_1 - \phi_0$.
- $\frac{1}{2\pi}\Delta_C \; arg \; f(z) = T$: nombre d'encerclements de l'origine par Γ.

Avant d'énoncer le théorème, intéressons nous à la figure 7.1. Initialement, les points z et z_0 sont confondus, dont l'image est respectivement w et w_0. Ensuite, ce point z va parcourir le chemin $\mathcal{C}$ et w va parcourir le chemin Γ. Quand w revient en w_0, son argument (initialement ϕ_0) s'est modifié (ϕ_1). C'est donc un argument multiforme ou ϕ_0 et ϕ_1 sont multiplies l'un l'autre d'un multiple de 2π ; la division par 2π donne le nombre d'encerclement [2].

THÉORÈME : ARGUMENT

$$T = Z - P \tag{7.33}$$

Le nombre d'encerclements de l'origine par Γ est égal à la différence entre le nombre de pôles P et de zéros Z de $f(z)$ à l'intérieur de $\mathcal{C}$ (multiplicité prise en compte).

Démonstration.
Le but de la démonstration est d'évaluer $\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz$ de deux façon différente.
PREMIÈRE MÉTHODE : à partir de la définition de l'intégrale d'une fonction d'une variable complète.
Soit $z = z(t), a \leq t \leq b$, l'équation paramétrique de $\mathcal{C}$. Compte-tenu de ceci, l'intégrale peut être ré-écrite (substitution de la paramétrisation) :

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \int_a^b \frac{f'(z(t))z'(t)}{f(z(t))}dt \tag{7.34}$$

Comme Γ ne passe pas par l'origine, on peut utiliser les coordonnées polaires : $w = f(z(t)) = \rho(t)e^{i\phi(t)}, a \leq t \leq b$. Le numérateur donne :

$$f'(z(t))z'(t) = \frac{d}{dt}f(z(t)) = \frac{d}{dt}(\rho(t)e^{i\phi(t)}) = \rho'(t)e^{i\phi(t)} + i\rho(t)e^{i\phi(t)}\phi'(t) \tag{7.35}$$

2. Ceci n'est pas vu en TP, mais revient souvent aux examens.

Cette expression permet de ré-écrire l'intégrale en deux parties qui existent bien comme $\rho'(t)$ et $\phi'(t)$ sont continues par morceaux pour $a \leq t \leq b$:

$$\int_C \frac{f'(z(t))}{f(z)} = \int_a^b \frac{\rho'(t)}{\rho(t)} dt + i \int_a^b \phi'(t) dt = \ln \rho(t)|_a^b + i\phi|_a^b \tag{7.36}$$

Comme $\rho(a) = \rho(b)$, le premier terme s'annule pour finalement avoir :

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = i\Delta_C \; arg \; f(z) \tag{7.37}$$

Deuxième méthode : théorème des résidus
L'intégrante est analytique dans et sur $\mathcal{C}$ sauf aux pôles et zéros de f. Soit z_0, **zéro** d'ordre m_0 de f :

$$f(z) = (z - z_0)^{m_0} g(z) \tag{7.38}$$

avec $g(z)$ analytique en z_0 et $g(z_0) \neq 0$. Nous savons que $f(z)$ peut s'écrire de la sorte (cf. un peu plus haut). Regardons ce que donne $f'(z)$:

$$f'(z_0) = m_0 (z - z_0)^{m_0 - 1} g(z) + (z - z_0)^{m_0} g'(z) \tag{7.39}$$

Le rapport donne alors :

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m_0}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)} \tag{7.40}$$

Or $\frac{g'(z)}{g(z)}$ est analytique en z_0 et possède donc un développement en série de Taylor en puissance de $z - z_0$. Par (7.40), $\frac{g'(z)}{g(z)}$ possède un pôle simple en z_0 avec un résidu m_0.
De même manière, si z_1 est un **pôle** d'ordre m_1 de $f(z); f(z) = (z - z_1)^{-m_1} \phi(z)$ avec $\phi(z)$ analytique en z_1 et $\phi(z_1) \neq 0$. L'intégrante possède un pôle simple en z_1 avec $-m_1$ en résidu. Par le théorème des résidus :

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i (Z - P) \tag{7.41}$$

En égalant les deux expressions obtenues par les deux méthodes :

$$i\Delta_{\mathcal{C}} \; arg \; f(z) = 2\pi i T = 2\pi i (Z - P) \tag{7.42}$$

□

Deuxième partie

Signaux et systèmes

Chapitre 8

Notion de signal et de système

8.1 Notion de signal

8.1.1 Définition

Un signal est une fonction d'une ou de plusieurs variables indépendantes qui contient de l'information sur certains phénomènes. Les signaux sont souvent des fonctions représentant des grandeurs physiques (pression, température, tension électrique, ...).

Signal continu et signal discret

- Signal continu : $x(t), t \in [a, b] | a, b \in \mathbb{R}$
- Signal discret : $x(k), k \in [a, b] | a, b \in \mathbb{Z}$

Signaux continus de base : $\exp, \sin, \cos$

Par exemple $C \exp(at)$ où $C = |C| \exp(i\theta), a = r + i\omega_0$. On peut également écrire :

$$\begin{aligned} C \exp(at) &= |C| e^{rt} \exp(i(\omega_0 t + \theta)) \\ &= |C| e^{rt} (\cos(\omega_0 + \theta) + i \sin(\omega_0 + \theta)) \end{aligned} \tag{8.1}$$

Pour $r < 0$, la sinusoide sera amortie (comme la réponse d'un circuit RLC, suspension automobile (ressort + dashpot [1])

8.1.2 Fonction d'Heaviside

La fonction d'Haeviside $\nu(t)$ est définie :

$$\nu(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \tag{8.2}$$

8.1.3 Impulsion de Dirac

On remarque que la "fonction" d'Heaviside n'en est pas vraiment une (pas très injectif, n'est ce pas ?) : on va pouvoir l'approximer grâce à l' impulsion de Dirac [2].
Le lien avec la fonction d'Heaviside est donné par :

$$\nu(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(t) \ d\tau \tag{8.3}$$

1. On s'en fiche, mais j'aimais bien le mot *dashpot*.
2. Un traitement rigoureux requiert l'utilisation de la théorie des fonctions généralisées.

L'*impulsion de Dirac* est la dérivée première de la fonction d' Heaviside : $\delta(t) = \frac{d\nu(t)}{dt}$. Si $t > 0$, on retrouve bien le fameux 1 défini en (8.2), sinon l'impulsion n'est pas dans l'intervale d'intégration et l'on retrouvera bien 0.
L'approximation de la fonction d'Heaviside est la suivante :

$$\nu_\epsilon(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{t}{\epsilon} & 0 \leq t \leq \epsilon \\ 1 & t \geq \epsilon \end{cases} \tag{8.4}$$

La dérivée $\delta_\epsilon = \frac{d\nu_\epsilon}{dt}$ correspond à une impulsion de durée ϵ et de surface unitaire. On retrouve bien $\delta(t) = \lim_{\epsilon \to 0} \delta_\epsilon(t)$.
Pour la réprésentation graphique, on considère le cas ou la base tend vers zéro et donc la hauteur est très élevée. **Attention !** Il est faux de dire $\delta(0) = 1$.

8.2 Notion de système

8.2.1 Définition

Un système est un dispositif qui répond à un ou plusieurs signaux d'entrées en engendrant un ou plusieurs signaux de sortie. Il peut être considéré comme un ensemble de composants interconnectés par lesquels les signaux d'entrée sont transformés.

8.2.2 Classe des systèmes linéaires permanents (SLP)

Un système décrit par l'équation $y(t) = \varphi(u(t))$ est linaire s'il vérifie les propriétés de superposition et d'homotétié, c'est-à-dire :

1. *Propriété de superposition.*
   Si $y_1(t) = \varphi(u_1(t)), y_2(t) = \varphi(u_2(t))$, alors :

$$y_1(t) + y_2(t) = \varphi(u_1(t) + u_2(t)) \tag{8.5}$$

2. *Propriété d'homotéthie.*

$$ay_1(t) = \varphi(au_1(t)) \quad a \in \mathbb{C} \tag{8.6}$$

Ces deux propriétés peuvent être reprises en une seule expression :

$$ay_1(t) + by_2(t) = \varphi(au_1(t) + bu_2(t)) \quad a, b \in \mathbb{C} \tag{8.7}$$

Définition d'un système permanent (Time inveriant system)

Si $y(t)$ est la sortie correspondant à $u(t)$, alors $y(t - t_0)$ est la sortie correspondant à $u(t - t_0) \forall \ t_0$.

> Exemple : Soit $y(t) = u(2t)$ non permanent (time varying). Si l'on impose un changement d'échelle temporel (compresson d'un facteur 2 dans le temps, alors tout décalage temporel de l'entrée est comprimé d'un facteur 2.

Chapitre 9

Convolution - Réponse d'un SLP

9.1 Réponse d'un SLP

9.1.1 Représentation d'un signal continu en termes d'impulsions

Avant toute chose, l'impulsion de Dirac peut elle aussi être approximée :

$$\delta_\epsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon} & 0 \leq t \leq \epsilon \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{9.1}$$

La méthode utilisée ici est la même que celle utilisée pour obtenir les les intégrales de Riemann. Considérons un signal $u(t)$ approché par la fonction en escalier $\tilde{u}(t)$:

$$\tilde{u}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k\epsilon)(t - k\epsilon)\epsilon \tag{9.2}$$

où un seul terme est non nul dans la somme, pour chaque valeur de t. Lorsque $\epsilon \to 0, \tilde{u}(t) \to u(t)$ et donc :

$$u(t) = \lim_{\epsilon \to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k\epsilon)(t - k\epsilon)\epsilon \tag{9.3}$$

Cette somme tend gentillement vers une intégrale

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\delta(t - \tau)\ d\tau \tag{9.4}$$

9.1.2 Réponse impulsionnelle d'un SLP et convolution

La démarche est de calculer la réponse $\tilde{y}(t)$ d'un SLP au signal $\tilde{u}(t)$ puis d'ensuite faire tendre ϵ vers zéro pour déduire la réponse $y(t)$ à $u(t)$.
Notons $\tilde{h}_{k\epsilon}$ la réponse d'un système linéaire continu au signal d'entrée $\delta_\epsilon(t - k\epsilon)$. Par les propriétés de superposition et d'homothétie, je peux exprimer $y(t)$ comme la somme des réponse sà chacune de ses imulsions. La somme approchée est donnée par :

$$\tilde{y}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k\epsilon)\tilde{h}_{k\epsilon}\epsilon \tag{9.5}$$

Lorsque $\epsilon \to 0, \tilde{u}(t) \to u(t)$ et $\tilde{y}(t) \to y(t)$. Si ϵ est suffisamment petit, la durée de l'impulsion $\delta_\epsilon(t - k\epsilon)$ n'importe pas. Notons $h_\tau(t)$ la déponse du système au temps t à l'entrée $\delta(t - \tau)$ (l' impulsion à l'instant τ). Il vient :

$$\begin{aligned} y(t) &= \lim_{\epsilon \to 0} \textstyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k\epsilon)\tilde{h}_{k\epsilon} \\ &= \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)h_\tau(t)\ d\tau \end{aligned} \tag{9.6}$$

Convolution

Si en plus d'être linéaire, le système est permanant, alors $h_\tau(t) = h(t-\tau)$ où $h(t)$ est la réponse du système à l'entrée $\delta(t)$.
Par **définition** ; réponse impulsionnelle d'un SLP : réponse du système au signal d'entrée $\delta(t)$, notée $h(t)$. En subsituant $h(t)$ par $h(t-\tau)$ dans l'équation (9.6) on trouve [1] :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)h_\tau(t)\ d\tau \tag{9.7}$$

c'est à dire la **convulution** ou **produit de convolution** de $u(t)$ et $h(t)$.
On utilise comme notation pour le produit de convolution $y(t) = u(t) * h(t)$. Tout ce qui est nécessaire pour la sortie, c'est la réponse impulsionnelle. Cette notion caractérise entierement le SLP.

9.1.3 Réponse indicielle d'un SLP

La réponse indicielle d'un SLP correspond à sa réponse l'entrée $u(t) = \nu(t)$ (fonction d'Heaviside).
Grâce à la commutativité de la convolution, je peux écrire mon intégrale de la sorte :

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\nu(t-\tau)\ d\tau = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)\ d\tau \tag{9.8}$$

pù s est appelé la réponse indicielle. Cette forme se justifie par le fait que pour les $\tau > 1$, l'intégrale est nulle. L'équation (9.8) permet d'écrire :

$$h(t) = \frac{ds(t)}{dt} \tag{9.9}$$

En général, il est plus facile de déterminer $s(t)$ que $h(t)$ (expérimentalement).

9.2 Système décrit par une équation différentielle ordinaire

9.2.1 Formulation du problème

Considérons la loi décrivant le comportement d'un circuit RC :

$$\frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{1}{RC}v_c(t) = \frac{1}{RC}v_s(t) \tag{9.10}$$

Cette équation est-elle suffisante pour déterminer $v_c(t)$ de façon explicite ? On observe que :
- Une EDO est une description implicite du système au lieu d'une expression explicite de la sortie en fonction de l'entrée.
- La résolution d'une EDO nécessaire des conditions auxiliaires
- Une EDO décrit uniquement une contrainte liant l'entrée et la sortie d'un système.

En posant ainsi des conditions (souvent initiale) et en procédant comme vu en *Analyse I, II* on peut trouver la solution.

1. Par définition

9.2.2 EDO et SLP

Considérons maintenant une EDO d'ordre n où y et u sont fonctions de t :

$$y^{(n)} + a_i y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = b_0 u^{(m)} + b_1 u^{(m-1)} + \cdots + b_{m-1}u' + n_m u \qquad (9.11)$$

Elle représente un SLP si les CI correspondent à un système initialement au repos.
Def : un système est initialement au repos lorsque si $u(t) = 0\ \forall t < t_0, y(t) = 0$ pour $t < t_0$. Lorsque les CI ne sont pas données cela suppose implicitement que le système est au repos avec pour CI :

$$y(t_0^-) = y'(t_0) = \cdots = y^{(n-1)}(t_0) = 0 \qquad (9.12)$$

Comme t_0 est arbitraire, c'est souvent plus fun de prendre $t_0 = \ln(\frac{2\pi}{e^4})$ pour l'évaluer.

Déterminer la solution $y(t),\ t \geq 0$ d'un tel problème pour l'entrée $u(t) = \delta(t)$ n'est pas toujours simple : la transformée de Laplace fournira une méthode simple et systématique pour résoudre le problème.

9.3 Propriété du produit de convolution

9.3.1 Commutativité et associativité

En effectuant le changement de variable $s = t - \tau$, on montre facilement que le produit de convolution est commutatif :

$$h(t) = h_1(t) * h_2(t) = h_2(t) * h_1(t) \qquad (9.13)$$

Même si c'est mathématiquement correct, il faut faire attention à l' application physique : changer le sens de "deux blocs" n'a pas toujours de sens !

9.3.2 Distributivité par rapport à l'addition

La propriété est la suivante :

$$u(t) * (h_1(t) + h_2(t)) = (u(t) * h_1(t)) + (u(t) * h_2(t)) \qquad (9.14)$$

Voir slide 29-31 pour une petite application gentille comme tout.

9.3.3 Existence d'un élément neutre pour le produit de convolution

L'élément neutre pour le produit est l'impulsion de Dirac. En effet :

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = u(t) * \delta(t) \qquad (9.15)$$

Chapitre 10

Série de Fourier et transformée de Fourier

10.1 Motivation

On remarque la forme simple de la réponse d'un SLP à une entrée de la forme $e^{i\omega t}$. En effet, la sortie d'un SLP pour ce type d'entrée :

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\exp(i\omega(t-\tau))d\tau \\ &= \exp(i\omega t)\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\exp(-i\omega\tau)d\tau \end{aligned} \tag{10.1}$$

Si l'intégrale converge, le résultat n'est que l'entrée pondérée d'un certain facteur $H(i\omega)$:

$$y(t) = H(i\omega)\exp(i\omega t) \tag{10.2}$$

où $H(i\omega)$ est une constante complexe définie par $H(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\exp(-i\omega\tau)d\tau$.
Autre motivation : la décomposition de l'entrée donne un formalisme très simple pour calculer la sortie :

$$y(t) = \sum_k a_k H(i\omega_k)\exp(i\omega_k t) \tag{10.3}$$

10.2 Série de Fourier

10.2.1 Définition

Considérons un signal périodique $x(t)$ de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Son expression en série de Fourier :

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k e^{ik\omega_0 t} \quad \text{où} \quad a_k = \frac{1}{T}x(t)e^{-ik\omega_0 t} \tag{10.4}$$

où a_k sont les coefficients de la série de Fourier. Les termes correspondant à $k = \pm 1$ sont dit *fondamental* ou *premier harmonique*.

| Exemple : EXEMPLE SLIDE 9/55

10.2.2 Conditions de convergence

L'expression mathématique de la convergence est : $\int_T |x(t)|dt < \infty$. Ceci n'est garanti que si les a_k sont finis. Comme en *Analyse II*, on définit la convergence en moyenne quadratique :

$$e_n(t) = x(t) - \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{ik\omega_0 t} \tag{10.5}$$

alors :

$$\lim_{N\to\infty} |e_N(t)|^2 dt = 0 \tag{10.6}$$

Il existe trois types de "définition" de la convergences, toutes trois données par les *conditions de Dirichet :*

A retenir *:* conditions de Dirichlet
Les trois conditions de Diriclou s'énoncent :

1. $\int_T |x(t)| < \infty$
2. Nombre fini d'extrémums sur une période
3. Nombre fini de discontinuités, uniquement de première espèce, dans tout intervalle fini

Ces conditions garantiessent :
- Les coefficients a_k sont finis
- Egalité entre $x(t)$ et sa série de Fourier en tout point où la fonction est continué.
- Aux point de discontinuité [a] :

$$\frac{x(t^+) + x(t^-)}{2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ik\omega_0 t} \tag{10.7}$$

a. Convergence simple

Exemple : EXEMPLE SLIDE 11/55

10.3 Transformée de Fourier d'un signal continu non périodique

Notre appréciation d'un signal sonore est directement liée au spectre (ou au contenu harmonique) de ce signal. Le spectre n'est rien d'autre que la transformée de Fourier du signal accoustique.

10.3.1 Obtention de la transformée de Fourier

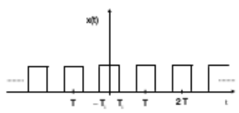

Figure 10.1 – Onde carrée périodique

Jusqu'à présent, nous n'avons utilisé que des signaux périodiques et l'on voudrait avoir la "généralisation" aux signaux qui ne le sont pas. Les coefficients de fourier de l'onde carrée périodique sont :

$$a_k = \frac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T} \tag{10.8}$$

L'idée est de faire tendre la période vers l'infini pour n'en avoir plus qu'une et obtenir un signal apériodique. Le produit Ta_k peut être considéré comme un échantillon d'une fonction enveloppe :

$$Ta_k = \frac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0} = \frac{2\sin(\omega T_1)}{\omega}\bigg|_{w=k\omega_0} \tag{10.9}$$

En faisant $T \to \infty$, l'onde carrée devient bien un signal apériodique : les coefficients Ta_k tendent vers la fonction *enveloppe* appélée la *transformée de Fourier du signal apériodique.*

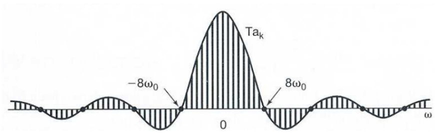

FIGURE 10.2 – Fonction enveloppe

Généralisation - raisonnement de Joseph Fourier

Considérons $x(t)$ t.q. $x(t) = 0$ pour $|t| \geq T_1$ et $\tilde{x}(t)$ une fonction périodique de période T dont une période coïncide avec $x(t)$.
La série de Fourier de $\tilde{x}(t)$ vaut :

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ik\omega_0 t} \quad \text{avec} \quad a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \tilde{x}(t) e^{-ik\omega_0 t} dt \tag{10.10}$$

Par définition de $x(t)$:

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-ik\omega_0 t} dt = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-ik\omega_0 t} dt \tag{10.11}$$

Soit $X(i\omega)$ l'enveloppe de Ta_k :

$$X(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-ik\omega_0 t} dt \tag{10.12}$$

Il en résulte :

$$a_k = \frac{1}{T} X(ik\omega_0) \tag{10.13}$$

Soit encore :

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \textstyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} X(ik\omega_0) e^{ik\omega_0 t} \\ &= \textstyle\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(ik\omega_0) e^{ik\omega_0 t} \end{aligned} \tag{10.14}$$

10.3.2 Transformée de Fourier et transformée inverse

A retenir : La (def.) transformée de Fourier est :

$$X(i\omega) = \mathcal{F}\{x(t))\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-ik\omega_0 t} dt \tag{10.15}$$

où $X(i\omega)$ est aussi appelé *spectre du signal.*

A retenir : La **transformée de fourier inverse** s'obtient en faisant tendre $T \to \infty$ dans (10.14) :

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{x(i\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(i\omega) e^{i\omega t} d\omega \tag{10.16}$$

10.3.3 Conditions de convergence

Il faut en quelque sorte "adapter" les conditions de convergence dans le cas de la transformée de Joseph [1] [2] :

> **A retenir : conditions de Dirichlet**
> Les trois conditions de Diriclette s'énoncent :
>
> 1. $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| < \infty \quad (!)$
> 2. Nombre fini d'extrémums sur une période
> 3. Nombre fini de discontinuités, uniquement de première espèce, dans tout intervalle fini
>
> Ces conditions garantiessent :
> — Garantissent la convergence de l'intégrale généralisée définissant la transformée de fourier (!)
> — Egalité entre $x(t)$ et sa série de Fourier en tout point où la fonction est continué.
> — Aux point de discontinuité de $x(t)$ (!) :
>
> $$\frac{x(t^+) + x(t^-)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(i\omega) e^{i\omega t} d\omega \tag{10.17}$$
>
> — Tout signal physique admet une transformée de Fourier (!)

| Exemple : EXEMPLE SLIDE 23/55

10.4 Transformée de Fourier d'une fonction périodique continue

Peut-on calculer la transformée de Fourier d'une fonction périodique $x(t)$ à partir de $X(i\omega) = \mathcal{F}\{x(t))\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-ik\omega_0 t} dt$?
Non ! Les fonctions périodiques ne vérifient pas la première condition de Dirichlet et ne sont pas de carré sommable : pas possible de calculer la transformée de Fourier à partir de l'intégrale généralisée. Une approche rigoureuse passe par la théorie des distributions, mais nous ne ferons qu'ici une approche informelle pour énocer les résultats principaux.

10.4.1 Approche informelle

Considérons $X(i\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$. Par la définition de la transformation de Fourier inverse, il vient :

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0) e^{i\omega t} d\omega = e^{i\omega_0 t} \tag{10.18}$$

qui est fonction périodique de période $\frac{2\pi}{\omega_0}$.
Généralisons. Si

$$X(i\omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0) \tag{10.19}$$

1. Les changements sont mentionnés par un (!).
2. On travaille maintenant dans l' espace de carré sommable ou l'expression mathématique de la convervence est donnée par $\int_{\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$.

alors, par transformée de Fourier inverse,

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0) e^{i\omega t} d\omega \tag{10.20}$$

Soit

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k e^{ik\omega_0 t} \tag{10.21}$$

10.5 Propriétés de la transformée de Fourier

Pour cette section, considérons que la fonction $x(t)$ vérifient les conditions de Dirichet. La notation pour $x(t)$ et sa transformée de Fourier est :

$$x(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(i\omega) \tag{10.22}$$

10.5.1 Linéarité

Si $x_1(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X_1(i\omega)$ et $x_2(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X_2(i\omega)$, alors

$$a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} a_1 X_1(i\omega) + a_2 X_2(i\omega) \quad \forall a_1, a_2 \in \mathbb{C} \tag{10.23}$$

10.5.2 Propriétés de symétrie

Première propriété

Si $x(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(i\omega)$, alors

$$\overline{x}(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \overline{X}(-i\omega) \tag{10.24}$$

Démonstration.
Calculons le conjugué suivant :

$$\overline{X}(i\omega) = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt} = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{x}(t) e^{i\omega t} dt \tag{10.25}$$

En remplaçant ω par $-\omega$:

$$\overline{X}(-i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{x}(t) e^{-i\omega t} dt = \mathcal{F}(\overline{x}(t)) \tag{10.26}$$

□

Deuxième propriété

Si $x(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(i\omega)$ et $x(t)$ est réelle, alors

$$\overline{X}(i\omega) = X(-i\omega) \tag{10.27}$$

La transformée de Fourier $X(i\omega)$ est une fonction paire.

Troisième propriété

L'expression de $X(i\omega)$ en coordonnées cartésiennes est :

$$X(i\omega) = \Re(X(i\omega)) + i\Re(X(i\omega)) \tag{10.28}$$

Si $x(t)$ est réelle :

$$\begin{aligned} \overline{X}(i\omega) &= \Re(X(i\omega)) - i\Re(X(i\omega)) \\ &= \Re(X(-i\omega)) + \Re(X(-i\omega)) \end{aligned} \tag{10.29}$$

Ceci implique que $\Re(X(i\omega))$ est une fonction **paire** et $\Im(X(i\omega))$ une fonction **impaire**.

Quatrième propriété

L'expression de $X(i\omega)$ en coordonnées polaire est :

$$X(i\omega) = |X(i\omega)|e^{i\varphi(\omega)} \tag{10.30}$$

Toujours pour un signal $x(t)$ réel :

$$\begin{aligned} \overline{X}(i\omega) &= |X(i\omega)|e^{-i\varphi(\omega)} \\ &= |X(-i\omega)|e^{-i\varphi(-\omega)} \end{aligned} \tag{10.31}$$

Ceci implique que $|X(i\omega)|$ est une fonction **paire** et $\varphi(\omega)$ une fonction **impaire**.

Cinquième propriété

Si $x(t)$ est une fonction réelle et **paire**, alors $X(i\omega)$ est réelle et paire.
Si $x(t)$ est une fonction réelle et **impaire**, alors $X(i\omega)$ est purement imaginaire et impaire.

10.5.3 Glissement dans le temps

Si $x(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(i\omega)$, alors

$$x(t-t_0) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} e^{-i\omega t_0}X(i\omega) \tag{10.32}$$

Ceci résulte de

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x(t-t_0)) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t-t_0)e^{-i\omega t}dt \\ &= e^{-i\omega t}\int_{-\infty}^{\infty} x(t-t_0)dt \\ &= e^{-i\omega t}X(i\omega) \end{aligned} \tag{10.33}$$

Ceci signifie qu'un glissement temporel subi par $x(t)$ correspond à un déphasage de $-\omega t_0$ dans la transformée de Fourier (et aucun changement du module $|X(i\omega)|$.

10.5.4 Glissement en fréquence

Si $x(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(i\omega)$, alors

$$e^{i\omega_0 t}x(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(i(\omega-\omega_0)) \tag{10.34}$$

On observe ici une dualité entre glissement temporel et glissement en fréquence.

| Exemple : EXEMPLE SLIDE 42/55

10.5.5 Changement d'échelle

Si $x(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(i\omega)$, alors

$$x(at) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{|a|} X\left(i\frac{\omega}{a}\right) \quad a \in \mathbb{R}_0 \tag{10.35}$$

Ceci s'obtient par changement de variable $q = at$. Cela signifie qu'une compression/dilatation du temps $\Leftarrow$ dilatation/compression en fréquence.

10.5.6 Transformée de Fourier de la dérivée d'une fonction

Si $x(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(i\omega)$ et si $\frac{dx(t)}{dt}$ vérifie les conditions de Dirichlet, alors

$$\frac{dx(t)}{dt} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} i\omega X(i\omega) \tag{10.36}$$

Ceci permet de changer une dérivation en une multiplication algébrique (Oh, les phaseurs !).
Ce résultat s'obtient en intégrant par partie :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left(\tfrac{dx(t)}{dt}\right) &= \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-i\omega t} \\ &= x(t)e^{-i\omega t}\Big|_{-\infty}^{\infty} - \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\frac{d}{dt}e^{-i\omega t} \\ &= x(t)e^{-i\omega t}\Big|_{-\infty}^{\infty} + i\omega \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t} \end{aligned} \tag{10.37}$$

Le premier s'annule par les conditions de Ridichlet (hypothèse) et on retrouve bien le résultat.

10.5.7 Dérivée de la transformée de Fourier

Si $x(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(i\omega)$ et $tx(t)$ vérifie les conditions de Dirichelèè, alors :

$$-itx(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{dX(i\omega)}{d\omega} \tag{10.38}$$

Ceci résulte de :

$$\begin{aligned} \tfrac{dX(i\omega)}{d\omega} &= \tfrac{d}{d\omega}\textstyle\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t}dt \\ &= -i\textstyle\int_{-\infty}^{\infty} tx(t)e^{-i\omega t}dt = -i\mathcal{F}(tx(t)) \end{aligned} \tag{10.39}$$

10.5.8 Transformée de Fourier d'une convolution

Il s'agit d'une règle fondamentale ! *La démonstration est très sympathique pour l'exame, courte et simple à corriger.*
Soit $s(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} S(i\omega)$ et $q(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} Q(i\omega)$. Si $s(t) * q(t)$ vérifie les conditions de Dirichet, alors :

$$x(t) = s(t) * q(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(i\omega) = S(i\omega)Q(i\omega) \tag{10.40}$$

Le produit de convolution devient produit algébrique par transformée de Fourier.

Démonstration.
Après les vacances ! :D □