



ECOLE
POLYTECHNIQUE
DE BRUXELLES

UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES

SYNTHÈSE

Éléments d'optique physique

PHYS-H-302

Auteur :
Nicolas ENGLEBERT

Professeur :
Marc HAELTERMAN

Année 2015 - 2016

Appel à contribution

Synthèse Open Source



Ce document est grandement inspiré de l'excellent cours donné par Marc Haelterman à l'EPB (École Polytechnique de Bruxelles), faculté de l'ULB (Université Libre de Bruxelles). Il est écrit par les auteurs susnommés avec l'aide de tous les autres étudiants et votre aide est la bienvenue ! En effet, il y a toujours moyen de l'améliorer

surtout que si le cours change, la synthèse doit être changée en conséquence. On peut retrouver le code source à l'adresse suivante

<https://github.com/nenglebert/Syntheses>

Pour contribuer à cette synthèse, il vous suffira de créer un compte sur *Github.com*. De légères modifications (petites coquilles, orthographe, ...) peuvent directement être faites sur le site ! Vous avez vu une petite faute ? Si oui, la corriger de cette façon ne prendra que quelques secondes, une bonne raison de le faire !

Pour de plus longues modifications, il est intéressant de disposer des fichiers : il vous faudra pour cela installer \LaTeX , mais aussi *git*. Si cela pose problème, nous sommes évidemment ouverts à des contributeurs envoyant leur changement par mail ou n'importe quel autre moyen.

Le lien donné ci-dessus contient aussi le README contient de plus amples informations, vous êtes invités à le lire si vous voulez faire avancer ce projet !

Licence Creative Commons

Le contenu de ce document est sous la licence Creative Commons : *Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International (CC BY-NC-SA 4.0)*. Celle-ci vous autorise à l'exploiter pleinement, compte- tenu de trois choses :



1. *Attribution* ; si vous utilisez/modifiez ce document vous devez signaler le(s) nom(s) de(s) auteur(s).
2. *Non Commercial* ; interdiction de tirer un profit commercial de l'œuvre sans autorisation de l'auteur
3. *Share alike* ; partage de l'œuvre, avec obligation de rediffuser selon la même licence ou une licence similaire

Si vous voulez en savoir plus sur cette licence :

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Merci !

Chapitre 0

Transformée de Fourier

0.1 Dirac

Nous allons commencer par l'étude de la distribution de Dirac, dernier grand physicien théoricien du 20^e siècle, notamment en découvrant le positron, ... Ici on va insister sur la *distribution* que l'on peut voir comme une généralisation de la notion de fonction. Afin de l'introduire, étudions la fonction carrée (ou fenêtre) :

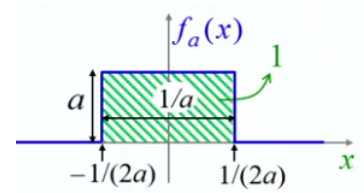


FIGURE 1

$$f_a(x) = \begin{cases} a & \text{si } |x| \leq \frac{1}{2a} \\ 0 & \text{si } |x| > \frac{1}{2a} \end{cases} \quad (1)$$

donnant un carré de hauteur a et de largeur $1/a$, sa surface vaut dès lors l'unité.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_a(x) dx = 1 \quad (2)$$

La distribution de dirac peut être définie à partir de cette fonction en prenant la limite de a tendant vers l'infini : sa hauteur tend vers l'infini tandis que sa largeur tend vers zéro.

$$\delta(x) = \lim_{a \rightarrow \infty} f_a(x) \quad (3)$$

On va appeler cette distribution $\delta(x)$ qui représente un pic placé en zéro, l'origine est le seul point où l'on trouve une valeur particulière. On peut néanmoins dire que la surface sous la courbe vaut l'unité. Cela se voit à partir de (2) : la surface sous la courbe ne dépend pas du paramètre a , d'où la surface unitaire :

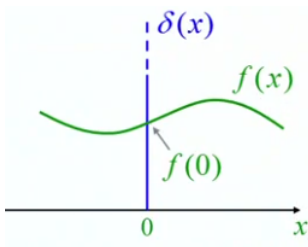


FIGURE 2

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \quad (4)$$

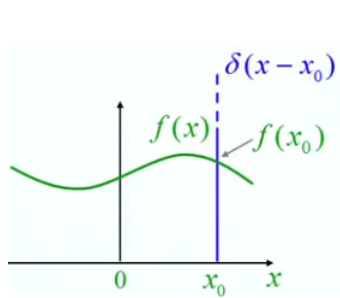
L'intérêt de cette distribution ne se remarque que par combinaison avec d'autres fonction. Considérons le produit d'une fonction quelconque avec la fonction de Dirac. La seule fonction qui sera considérée est celle qui se trouve en zéro :

$$f(x)\delta(x) = f(0)\delta(x) \quad (5)$$

Toutes les valeurs autres que celle de x n'entre pas en ligne de compte. En intégrant ce produit

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(0)\delta(x) dx = f(0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = f(0) \quad (6)$$

On voit que cette intégrale comme le "produit-scalaire" de f avec δ qui sélectionne la valeur de la fonction à l'origine. En résumé



$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \neq 0 \end{cases} \quad (7)$$

Cette notion peut être généralisée en déplaçant la distribution par translation en changeant l'argument x en $x - x_0$:

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} \infty & \text{si } x = x_0 \\ 0 & \text{si } x \neq x_0 \end{cases} \quad (8)$$

Cette distribution tradatée multipliée par f sélectionnera dès lors $f(x_0)$. La distribution de Dirac peut être définie par une infinité de fonction, tendant vers cette fameuse distribution lorsque le paramètre a tend vers zéro. On peut par exemple prendre la distribution gaussienne

$$\delta_a(x) = \frac{1}{a\sqrt{\pi}} e^{-x^2/a^2} \quad (9)$$

Lorsque a tend vers zéro, on obtient un *pic* tendant vers l'infini. On peut montrer que cette gaussienne, pour cette limite, tend bien vers la distribution de Dirac. Dans le cadre de ce cours, consacré à l'optique de Fourier, la distribution intéressante est la suivante

$$\delta_a(x) = \frac{1}{\pi x} \sin\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1/a}^{1/a} \cos(kx) dk \quad (10)$$

Il s'agit d'une définition particulière, la suite du cours justifiera pleinement l'utilisation de celle-ci (les transformées de Fourier impliquent les fonction harmoniques). On va pouvoir trouver la distribution de Dirac à partir de

$$f(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\alpha x) dx \quad (11)$$

La résultat dépendra de α , ce résultat pourrait bien être une fonction de α qui se rapprochera très fortement de la distribution recherchée. Par intégration

$$f(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\alpha x) dx = \frac{1}{\alpha} [\sin(\alpha x)]_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{\alpha} [\sin(\infty) - \sin(-\infty)] \quad (12)$$

Nous sommes face ici à une indétermination, cette intégrale généralisée n'est pas directement calculable. Il est préférable de travailler avec la fonction d'intégrale de Riemann aux bornes réelles pour ensuite faire tendre celle ci vers l'infini

$$\begin{aligned} f(\alpha) = \int_{-L}^L \cos(\alpha x) dx &= \frac{1}{\alpha} [\sin(\alpha L) - \sin(-\alpha L)] \\ &= \frac{1}{\alpha} [\sin(\alpha L) + \sin(+\alpha L)] \\ &= 2 \frac{\sin(\alpha L)}{\alpha} \end{aligned} \quad (13)$$

Considérons l'artifice mathématique suivant, permettant de faire apparaître le sinus cardinal ($\equiv \sin x / x$) :

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= 2L \frac{\sin(\alpha L)}{\alpha L} \\ &= 2L \text{sinc}(\alpha L) \end{aligned} \quad (14)$$

La fonction sinus cardinal tend vers zéro à l'infini, il s'agit d'une fonction paire dont la valeur à l'origine vaut l'unité (valeur donnée par la levée de l'indétermination). Cette fonction a des zéros multiples que l'on retrouve à chaque multiple de π .

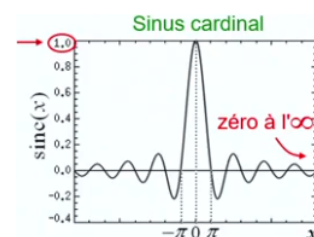


FIGURE 4

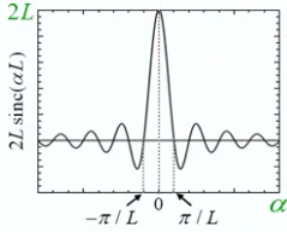


FIGURE 5

Intéressons nous ce qui se passe lorsque $L \rightarrow \infty$. Remarquons premièrement qu'une diminution de L correspond à un *aplatissement* et *élargissement* du graphe. Inversement, lorsque L augmente elle gagne en hauteur et les zéros se rapprochent de l'origine. Que devient cette fonction pour $L \rightarrow \infty$? Montrons que l'on obtient, à un facteur près, la distribution de Dirac

$$f(a) = \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L}^L \cos(\alpha x) dx = \lim_{L \rightarrow \infty} [2L \text{sinc}(\alpha L)] \quad (15)$$

Cette limite n'est pas facile à appréhender, l'étude du graphe n'est pas fort utile. A défaut, on peut s'intéresser à la surface du graphe de cette fonction en étudiant l'aire sous la courbe du sinus cardinal :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(\alpha x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha x} dx = \frac{\pi}{a} \quad (16)$$

⚠ Il ne faut pas confondre la variable α avec celle d'intégration, x . Nous montrons ici que $f(\alpha)$ peut être associée à la distribution. Dans (16) remplaçons x par α par "l'ancien α jouera le rôle du paramètre L :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(L\alpha) d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(L\alpha)}{L\alpha} d\alpha = \frac{\pi}{L} \quad (17)$$

En multipliant par $2L$ (pouvant directement rentrer dans l'intégrale) :

$$\int_{-\infty}^{\infty} 2L \text{sinc}(L\alpha) d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(L\alpha)}{L\alpha} d\alpha = 2\pi \quad (18)$$

Cette surface vaut 2π , mais ce qui est important est que celui-ci est indépendant du paramètre L exactement comme on l'avait pour la fonction fenêtre avec l'aire unitaire ; faire tendre L vers l'infini ne change dès lors rien. Les caractéristiques sont celles de la fonction de Dirac. Pour retrouver cette distribution, il nous suffit de diviser par 2π .

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lim_{L \rightarrow \infty} \left[\frac{2L}{2\pi} \text{sinc}(\alpha L) \right] d\alpha = \frac{2\pi}{2\pi} = 1 \quad (19)$$

On peut ainsi assimiler ce résultat à la distribution de Dirac :

$$\text{Distribution de Dirac : } \delta(\alpha) = \lim_{L \rightarrow \infty} \left[\frac{L}{\pi} \text{sinc}(\alpha L) \right] \quad (20)$$

Cette fonction est *piquée* à l'origine et une largeur tendant vers zéro dont l'aire sous la courbe faut bien 1. On peut dès lors écrire

$$f(a) = \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L}^L \cos(\alpha x) dx = \lim_{L \rightarrow \infty} [2L \text{sinc}(\alpha L)] = 2\pi \delta(\alpha) \quad (21)$$

Revenons à nos moutons. Notre fonction sinus cardinal à pour argument αL : les zéros de la fonction d'origine se voient tous divisés par L et l'ordonnée à l'origine vaut $2L$. Une fois que α n'est plus nul, on redescend brusquement vers un premier zéro (les oscillations se comprennent très facilement en interprétant l'aire sous la courbe en faisant augmenter α).

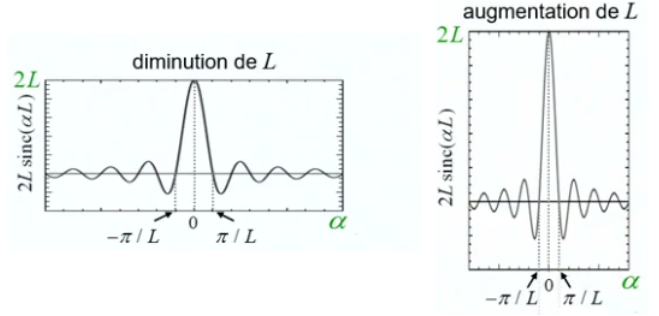


FIGURE 6

Sous la forme d'une intégrale généralisée, résultat pratique pour l'étude des transformées de Fourier.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\alpha x) \, dx = 2\pi\delta(\alpha) \quad (22)$$

Notons qu'il n'est pas nécessaire de déterminer précisément ce que vaut α , la "définition" ci-dessous est auto-suffisante

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)\delta(\alpha) \, d\alpha = f(0) \quad (23)$$

Généralisons quelque peu ce que nous venons de faire en vue de passer à la transformée de Fourier. La notion de phaseur, exponentielle imaginaire est fondamentale :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\alpha x) \, dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\alpha x) \, dx \quad (24)$$

Cette exponentielle imaginaire cache la fonction $\cos(\alpha x)$ que nous venons d'étudier avec en plus une partie imaginaire. Que vaut la contribution de la partie imaginaire ?

$$\int_{-L}^L \sin(\alpha x) \, dx = -\frac{1}{\alpha} [\cos(\alpha x)]_{-L}^L = 0 \quad (25)$$

Il n'est même pas ici nécessaire de faire tendre $L \rightarrow \infty$, le cosinus étant une fonction paire cela donne tout simplement zéro (directement visible, car l'intégration d'une fonction impaire aux bornes centrées sur zéro est identiquement nulle).

En conclusion :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} \, dx = \delta(\alpha) \quad (26)$$

0.2 Transformée de Fourier : introduction

La transformée de Fourier s'applique à une fonction $f(x)$. Pour transformer celle-ci, il faut préalablement multiplier par $e^{i\alpha x}$ puis intégration :

$$TF(f) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx = F(\alpha) \quad (27)$$

où $F(\alpha)$ est la transformée de Fourier de $f(x)$. Le résultat est bien une fonction du paramètre α ! Afin d'illustrer cette définition, reconsidérons le premier exemple du chapitre, la fonction fenêtre, cette fois-ci non normalisée.

$$f_a(x) = \begin{cases} a & \text{si } |x| \leq L \\ 0 & \text{si } |x| > L \end{cases} \quad (28)$$

Calculons sa transformée de Fourier

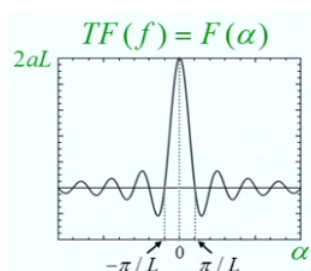


FIGURE 7

$$\begin{aligned} TF(f) &= \int_{-L}^L a e^{i\alpha x} dx = a \left[\frac{1}{i\alpha} e^{i\alpha x} \right]_{-L}^L \\ &= a \frac{1}{i\alpha} [e^{i\alpha L} - e^{-i\alpha L}] = 2a \frac{\sin(\alpha L)}{\alpha} \end{aligned} \quad (29)$$

On reconnaît ce que l'on trouvait pour la fonction de Dirac. En multipliant par L/L , on obtient la transformée de Fourier de la fonction fenêtre

$$TF(f) = 2aL \text{sinc}(\alpha L) \quad (30)$$

Il n'y a pour l'instant pas grand chose à comprendre, il ne s'agit que de l'application d'une définition. Quel est l'intérêt mathématique de cette transformation ? Cette transformation est-elle réversible ? Oui, c'est son intérêt majeur : la transformée de Fourier inverse.

Pour y arriver, étudions la fonction suivante

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha = g(x) \quad (31)$$

△ Il s'agit bien d'un moins, d'où le *inverse*. Le but est de calculer cette intégrale pour déterminer notre fameuse inverse dont le résultat sera une fonction de x . Remplaçons $F(\alpha)$ par son expression (on note x' pour ne pas confondre les variables)

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x') e^{i\alpha x'} dx' e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (32)$$

Par Fubini

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x'} e^{-i\alpha x} d\alpha dx' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha(x'-x)} d\alpha dx' \end{aligned} \quad (33)$$

En utilisant une des définition de la distribution de Dirac : $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} dx = \delta(\alpha)$ en remplaçant α par x et l'ancien α par L :

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x') 2\pi \delta(x' - x) dx' = 2\pi f(x) \quad (34)$$

Cette intégrale ne sélectionne que la valeur de la fonction f lorsque $x = x'$.

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha = g(x) = 2\pi f(x) \quad (35)$$

La **transformée de Fourier inverse** est donnée par

$$TF^{-1}(F) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha = f(x) \quad (36)$$

Petite relation intéressante :

$$TF^{-1}[TF(f)] = f(x) \quad (37)$$

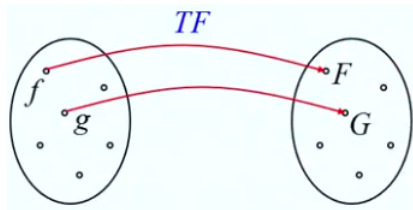


FIGURE 8

Ceci montre que la transformée de Fourier est une bijection dans l'espace des fonctions. A quelques restrictions près, on peut transformer toutes les fonctions par Fourier. Il s'agit d'une bijection car deux fonctions distinctes donneront deux transformées différentes, ceci vient de l'existence de la transformée inverse.

Démonstration.

$$\begin{aligned} TF(f) = F &\implies TF^{-1}[TF(f)] = TF^{-1}[F] = f \\ TF(g) = F &\implies TF^{-1}[TF(g)] = TF^{-1}[F] = f = g \end{aligned} \quad (38)$$

□

Il sera dès lors toujours possible de "défaire" une transformée de Fourier de façon univoque. Illustrons à nouveau, cette fois-ci avec une gaussienne :

$$f(x) = e^{-x^2/x_0^2} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F(\alpha) = x_0 \sqrt{\pi} e^{-\alpha^2 x_0^2/4} \quad (39)$$

Résultat un peu plus compliqué à trouver, il est nécessaire d'utiliser l'analyse complexe. On remarque que le résultat est également une gaussienne dont la largeur est inversement proportionnelle à x_0 . Plus la gaussienne est étroite, plus x_0 est petit, plus la transformée inverse sera large¹. Plus la fonction est large, plus sa transformée est étroite et vice-versa la règle est vraiment très générale.

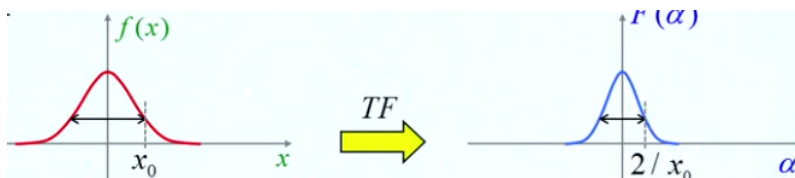


FIGURE 9

En faisant tendre $x_0 \rightarrow 0$ et en supposant une normalisation, on retrouve le delta de Dirac $f(x) = \delta(x)$. On peut montrer que si on fait ça, la gaussienne dans le domaine de Fourier tend vers l'infini : c'est une constante. Pour trouver la valeur de celle-ci, calculons

$$F(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^{i\alpha x} dx = 1 \quad (40)$$

Considérons un autre exemple : $f(x) = e^{-i\alpha_0 x}$. Par application de la définition

$$F(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\alpha - \alpha_0)x} dx = 2\pi \delta(\alpha - \alpha_0) \quad (41)$$

1. Aussi valable pour la fonction fenêtre.

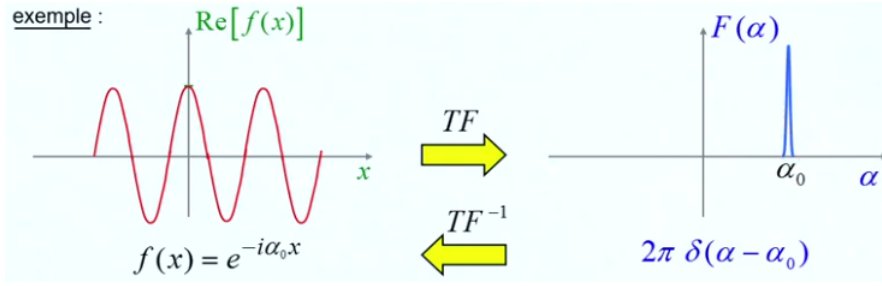


FIGURE 10

Le α_0 imposant la périodicité de la fonction harmonique localise le "pic" du delta de Dirac. La transformée de Fourier de l'exponentielle imaginaire donne directement le delta de Dirac. Plutôt que de prendre l'exponentielle je peux faire de même avec le cosinus directement :

$$f(x) = \cos(\alpha_0 x) = \frac{e^{i\alpha_0 x} + e^{-i\alpha_0 x}}{2} \quad (42)$$

La seule différence est la contribution de la partie imaginaire

$$F(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx = \pi [\delta(\alpha + \alpha_0) + \delta(\alpha - \alpha_0)] \quad (43)$$

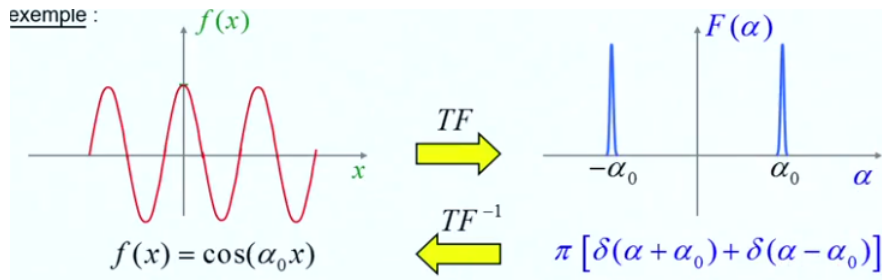


FIGURE 11

Dans le cas d'un sinus, il faudra mettre un signe négatif entre les delta et diviser par i .

Passons en revues les propriétés des transformées de Fourier. Soit la transformée de Fourier

$$F(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad TF[f(x - x_0)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x - x_0) e^{i\alpha x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x') e^{i\alpha(x' + x_0)} dx' \\ &= e^{i\alpha x_0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x') dx' \\ &= F(\alpha) e^{i\alpha x_0} \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad TF^{-1}[F(\alpha - \alpha_0)] &= f(x) e^{-i\alpha_0 x} \\ \bullet \quad TF[f(x) e^{-i\alpha_0 x}] &= F(\alpha - \alpha_0) \end{aligned}$$

Ceci peut se résumer avec la fonction de Dirac

$$TF[\delta(x - x_0)] = e^{i\alpha x_0}, \quad TF[e^{-i\alpha_0 x}] = \delta(\alpha - \alpha_0) \quad (46)$$

Intéressons-nous maintenant à la transformée de Fourier de la dérivée de $f(x)$. Le plus simple est d'utiliser la notion de transformée de Fourier inverse

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (47)$$

En dérivant

$$\begin{aligned}\frac{df(x)}{dx} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} -i\alpha F(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha \\ &= TF^{-1}[-i\alpha F(\alpha)]\end{aligned}\quad (48)$$

On a donc

$$TF \left[\frac{df(x)}{dx} \right] = -i\alpha F(\alpha) \quad (49)$$

Pour une dérivée seconde, on trouvera $(-i\alpha)^2, \dots$

Terminons la section par une généralisation de la transformée de Fourier à deux dimensions. Considérons une fonction à deux variables que l'on va multiplier par deux exponentielles de sorte à avoir deux variables de Fourier (dites conjuguées, l'une à x , l'autre à y) :

$$F(\alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{i\alpha x} e^{i\beta y} dx dy \quad (50)$$

A condition de montrer que $f(x, y)$ peut être écrite à partir de la transformée de Fourier inverse, on obtient la transformée de Fourier inverse à deux dimensions

$$f(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha, \beta) e^{-i\alpha x} e^{-i\beta y} d\alpha d\beta \quad (51)$$

Ceci est cohérent et pour s'en rendre compte, substituons l'expression de $F(\alpha, \beta)$:

$$f(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x', y') e^{i\alpha x'} e^{i\beta y'} e^{-i\alpha x} e^{-i\beta y} d\alpha d\beta dx' dy' \quad (52)$$

Par Fubini

$$f(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x', y') \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x'} e^{i\beta y'} e^{-i\alpha x} e^{-i\beta y} d\alpha d\beta dx' dy' \quad (53)$$

En intégrant sur α

$$f(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x', y') \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha(x'-x)} d\alpha}_{2\pi\delta(x'-x)} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\beta(y'-y)} d\beta}_{2\pi\delta(y'-y)} dx' dy' \quad (54)$$

On voit apparaître la distribution de Dirac, de sorte à pouvoir écrire

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x', y') \delta(x' - x) \delta(y' - y) dx' dy' \quad (55)$$

En appliquant la notion de Distribution de Dirac qui "sélectionne" l'argument de la fonction tel que l'argument de la fonction de Dirac s'annule c'est à dire que $x' = x$ et $y' = y$. Ce résultat-ci est bien $f(x, y)$, pas besoin d'aller plus loin. Ceci prouve que le résultat est cohérent.

0.3 Transformée de Fourier : convolution

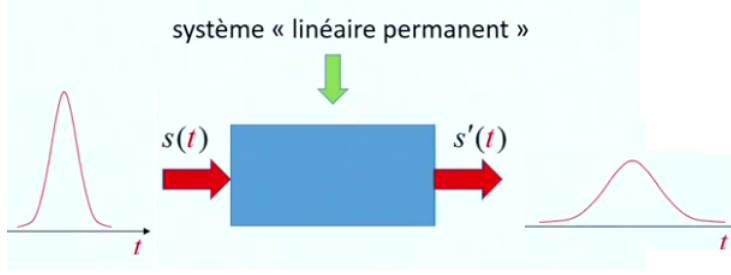


FIGURE 12

ce SLP soit une fibre optique dans laquelle on peut faire rentrer une impulsion lumineuse. Au cours de sa propagation elle va subir des transformations de sorte à avoir une sortie modifiée. Le système est dit linéaire, il obéit au principe de superposition. Permanent, c'est lorsque ce système reste inchangé dans le temps.

On peut appliquer le théorème de superposition

$$s(t) = \sum_n s_n(t) \implies \text{SLP} \implies s'(t) = \sum_n s'_n(t) \quad (56)$$

L'idée est de construire une grosse impulsion à partir de la somme d'impulsions plus petites d'amplitude progressive pour créer une grosse amplitude gaussienne à partir de la somme de petites gaussiennes

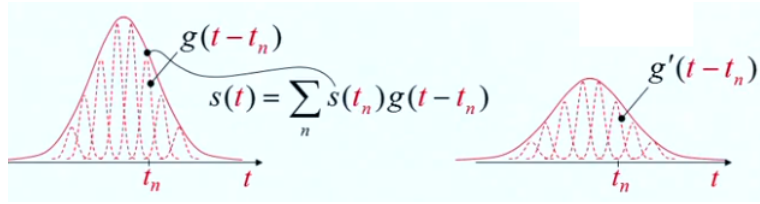


FIGURE 13

$g(t)$ chacune centrée en t_n donnant lieu à l'enveloppe du signal $s(t)$. Comme on peut le voir, l'amplitude d'une gaussienne donne à peu près l'amplitude du champ. Le signal d'entrée peut alors être écrit comme étant la somme de toutes ces petites gaussiennes centrées en t_1, t_2, \dots chaque fois avec une amplitude qui va donner l'amplitude de l'enveloppe en ce t_n ² :

$$s(t) = \sum_n s(t_n) g(t - t_n) \quad (57)$$

A la sortie du SLP, on retrouvera la sortie à chacune des gaussiennes prises séparément.

$$s'(t) = \sum_n s(t_n) g'(t - t_n) \quad (58)$$

△ On retrouve bien $s(t_n)$ et pas $s'(t_n)$ car si l'on place un facteur a , par linéarité, on retrouvera celui-ci à la sortie.

En sommant des gaussiennes, nous n'aurons pas exactement un signal très lisse, il y aura forcément des bosses, défauts, ... Pour représenter des détails arbitrairement fins, on va passer de gaussiennes à des distributions de Dirac $g(t - t_n) \rightarrow \delta(t - t_n)$, changeant les sommes en intégrales

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t_n) \delta(t - t_n) dt_n \quad (59)$$

2. $s(t_n)$ est l'amplitude de la Gaussienne.

L'amplitude est donnée par $s(t_n)$ et on multiplie par la Dirac en suivant le même raisonnement qu'avec des gaussiennes : un continuum de fonction de Dirac

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t') \delta(t-t') dt' \quad (60)$$

Comment interpréter ça ? En effet, la fonction de Dirac monte jusqu'à l'infini et est arbitrairement étroite, ça a du sens ? Oui, le delta de Dirac sélectionne la valeur de la fonction pour laquelle celui-ci s'annule, on retrouve bien $s(t) = s(t)$ pour $t' = t$, le raisonnement intuitif suivi ici est bien rigoureux. Cette intégrale désigne le *produit de convolution*. On peut alors voir $s(t)$ comme sa convolution avec le delta de Dirac. Ceci sera vu en détail plus tard, l'importance est de voir ici la cohérence mathématique. En appliquant le principe de superposition on retrouve aisément la sortie

$$s'(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t') g'(t-t') dt' \quad (61)$$

Illustrons en considérant que le signal d'entrée est une impulsion de Dirac $s(t) = \delta(t)$, il en sortira une certaine réponse $g'(t)$, la *réponse impulsionnelle*, souvent notée $h(t)$. La sortie sera alors donnée par la convolution de la réponse impulsionnelle multipliée par le signal d'entrée

$$\begin{cases} s(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t') \delta(t-t') dt' \\ s'(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t') h(t-t') dt' \end{cases} \quad (62)$$

Une fonction peut être vue comme une combinaison de delta de Dirac multiplié par la fonction elle-même. Cela peut paraître trivial mais aussi utile. La sortie sera simplement donnée par la fonction d'entrée multipliée par la réponse impulsionnelle ; ce sont les *produits de convolution*.

En toute généralité, le système sera entièrement caractérisé par sa réponse impulsionnelle, c'est-à-dire si je connais $h(t)$ tout le système est caractérisé ; tout signal d'entrée sera transformé en signal de sortie au travers de cette convolution.

Hélas le produit de convolution peut être difficile à calculer. Nous allons ici montrer qu'il peut être appréhendé de façon simple à partir de la notion de transformée de Fourier en introduisant les transformations de s et h via la transformation inverse :

$$\begin{cases} s(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \\ h(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \end{cases} \quad (63)$$

En ré-écrivant l'intégrale de convolution (substituer t par t') :

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t') h(t-t') dt' = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{-i\omega t'} d\omega \right] h(t-t') dt' \quad (64)$$

En faisant de même pour $h(t-t')$ (en substituant t par $t-t'$)

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t') h(t-t') dt' = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{-i\omega t'} d\omega \right] \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega') e^{-i\omega'(t-t')} d\omega' \right] dt' \quad (65)$$

En passant à des notations efficaces

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t') h(t-t') dt' = \int_{t'} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{\omega} S(\omega) e^{-i\omega t'} d\omega \right] \left[\frac{1}{2\pi} \int_{\omega'} H(\omega') e^{-i\omega'(t-t')} d\omega' \right] dt' \quad (66)$$

Commençons par aborder l'intégrale sur t' (et en sortant le terme en t)

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t') h(t-t') dt' = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega} \int_{\omega'} S(\omega) H(\omega') \frac{1}{2\pi} \int_{t'} e^{-i\omega t'} e^{+i\omega' t'} dt' e^{-i\omega' t} d\omega' d\omega \quad (67)$$

Par propriété des exponentielles

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t')h(t-t') dt' = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega} \int_{\omega'} S(\omega)H(\omega') \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{t'} e^{-i(\omega-\omega')t'} dt'}_{\delta(\omega-\omega')} e^{-i\omega't} d\omega' d\omega \quad (68)$$

On retrouve la définition de delta de Dirac grâce au facteur 2π restant.

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t')h(t-t') dt' = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega} \int_{\omega'} S(\omega)H(\omega') \delta(\omega-\omega') e^{-i\omega't} d\omega' d\omega \quad (69)$$

Effectuons l'intégrale en ω' . Cette intégrale contenant un delta de Dirac, elle n'est non nulle qu'en $\omega' = \omega$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t')h(t-t') dt' = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega} S(\omega)H(\omega)e^{-i\omega t} d\omega = TF^{-1}[S(\omega)H(\omega)] \quad (70)$$

On reconnaît la transformée de Fourier inverse du produit algébrique de S par H .

$$s(t) \otimes h(t) = TF^{-1}[S(\omega)H(\omega)] \quad (71)$$

Où encore

$$TF[s(t) \otimes h(t)] = S(\omega)H(\omega) \quad (72)$$

C'est le **théorème de convolution**, fondamental d'un point de vue pratique. En effet, plutôt que de devoir effectuer une intégrale contenant une fonction h difficilement trouvable on se rapporte à un simple produit dans l'espace de Fourier de la transformée de Fourier de la fonction d'entrée par la transformée de Fourier de la fonction de transfert qui est bien plus simple à trouver : $H(\omega)$ suffit à caractériser tout le système.

Considérons le delta de Dirac dans le domaine spectral $S(\omega) = \delta(\omega - \omega_0)$. La sortie sera donnée par $S'(\omega) = \delta(\omega - \omega_0)H(\omega)$ qui n'est rien d'autre que $H(\omega_0)\delta(\omega - \omega_0)$! Si l'on repasse dans le domaine temporel, on trouve $s(t) = e^{-i\omega_0 t}$. A ce signal harmonique correspond une certaine sortie donnée par la réponse elle-même donnée par la transformée inverse de $S'(\omega)$, c'est à dire $H(\omega_0)e^{-i\omega_0 t}$. Un système linéaire va conserver le caractère harmonique de l'entrée à un facteur près, $H(\omega_0)$.

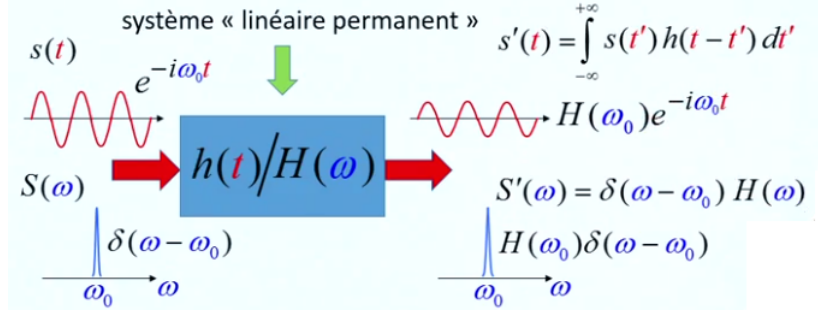


FIGURE 14

Un système linéaire va conserver le caractère harmonique de l'entrée à un facteur près, $H(\omega_0)$.

Pour connaître $H(\omega)$, on sait déjà que la fréquence de sortie sera la même : la mesure des amplitudes donnera la fonction de transfert. Le système linéaire effectue un transfert du signal, une "propagation" entre les deux : un signal harmonique le reste, mais l'amplitude se verra être modifiée.

En pratique, on ne se contentera pas du domaine temporel. Remontrons la convolution en partant depuis l'espace de Fourier pour montrer que ce théorème s'applique aussi pour la transformée de Fourier inverse.

$$\begin{cases} F(\alpha) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x} dx \\ G(\alpha) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{i\alpha x} dx \end{cases} \quad (73)$$

Montrons que l'on peut, de façon similaire, écrire

$$H(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)e^{i\alpha x} dx \quad (74)$$

Pour se faire, écrivons nos deux fonctions via leurs transformées de Fourier inverse

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)e^{-i\alpha x} d\alpha, \quad g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\alpha)e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (75)$$

En substituant

$$H(\alpha) = \int_x \left[\frac{1}{2\pi} \int_{\alpha'} F(\alpha')e^{-i\alpha'x} d\alpha' \right] \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha''} G(\alpha'')e^{-i\alpha''x} d\alpha'' \right] \quad (76)$$

En commençant par l'intégrale pourtant sur les x afin de refaire apparaître le delta de Dirac

$$H(\alpha) = \int_{\alpha'} \int_{\alpha''} F(\alpha')G(\alpha'') \underbrace{\left[\frac{1}{2\pi} \int_x e^{-i(\alpha' + \alpha'' - \alpha)x} dx \right]}_{\delta(\alpha' + \alpha'' - \alpha)} d\alpha' d\alpha'' \quad (77)$$

En faisant l'intégrale sur α'' , avec le delta de Dirac il faudra que $\alpha'' = \alpha - \alpha'$. On retrouve comme résultat la convolution des deux spectres, des deux transformées de Fourier de départ

$$H(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha'} F(\alpha')G(\alpha - \alpha') d\alpha' \quad (78)$$

Représentons ces deux variables et faisons le produit. On peut voir ce produit comme un recouvrement, les valeurs ne seront non-nulles que là où elles se recouvrent. Ce recouvrement est représenté en bleu ci-contre (vision intuitive). Le résultat de $H(\alpha)$ représente ce recouvrement en fonction de α : cette variable représente la **position** de la fonction G retournée (car $-\alpha$ en argument). Plus α est proche de F , plus je me rapproche du recouvrement de mes fonction : c'est ça que représente la convolution ; un recouvrement de fonctions dont l'une a été renversée. En conclusion

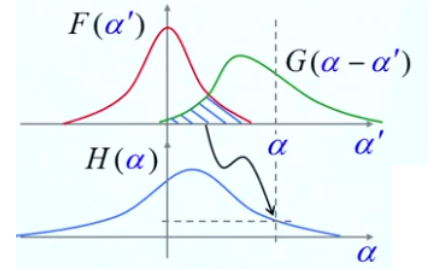


FIGURE 15

$$TF[f(x)g(x)] = \frac{1}{2\pi} F(\alpha) \otimes G(\alpha) \quad (79)$$

0.4 La transformée de Fourier : illustration

Le but de cette section est d'illustrer l'intérêt de cette transformée. On s'intéressera ici au cas de la transformée de Fourier temporelle

$$TF(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt = F(\omega) \quad (80)$$

où le ω est vu comme la pulsation des composantes harmoniques du signal. Par la transformée inverse

$$TF^{-1}(F) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega t} d\omega = f(t) \quad (81)$$

qui n'est rien d'autre qu'une somme d'onde d'amplitude $F(\omega)$.

On se propose d'étudier la propagation d'impulsions lumineuses en fibre optique. On utilisera pour ça un laser de fréquence ω_0 extrêmement élevé monochromatique : si c'est le cas, la distribution des fréquences sera un delta de Dirac. Décrivons l'onde électromagnétique de la façon suivante

$$E(z, t) = a e^{ik(\omega_0)z} e^{-i\omega_0 t} \quad (82)$$

où k , le nombre d'onde, impose la périodicité spatiale. Quand z progresse de $2\pi/k$, on progresse bien d'une période. Si l'on ne regarde pas la dépendance temporelle, on retrouve bien le phaseur de l'onde à une dimension. Ce qui est important c'est le nombre d'onde

$$k = k(\omega) = \frac{\omega}{c} n(\omega) \quad (83)$$

où n est l'indice de réfraction, dépendant de la dynamique des nuages électroniques. Ce $n(\omega)$ conditionne la propagation en "cachant" toute la complexité microscopique. En pratique, il est intéressant de moduler le faisceau laser de sorte à coder des informations. Le champ s'en voit dès lors modulée, l'amplitude devient fonction du temps

$$E(0, t) = a(0, t) e^{-i\omega_0 t} \quad (84)$$

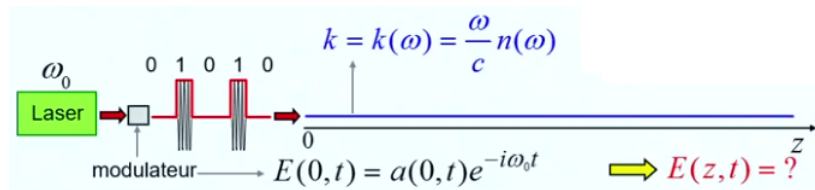


FIGURE 16

Ce qui est intéressant est de connaître la sortie du système, que l'on peut considérer comme un SLP dont la sortie se trouve en z . Introduisons la notion de transformée de Fourier temporelle

$$TF(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\Omega t} dt = F(\Omega) \quad (85)$$

où l'on utilise Ω car on s'intéresse à la pulsation de l'enveloppe et pas à la pulsation rapide ω_0 donnant lieu à cette enveloppe. De même pour la transformée inverse

$$TF^{-1}(F) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\Omega) e^{-i\Omega t} d\Omega = f(t) \quad (86)$$

Ceci étant fait, on définit le **spectre** de l'impulsion d'entrée, c'est-à-dire la transformée de Fourier suivante

$$A(\Omega) = TF[a(0, t)] \quad (87)$$

où

$$a(0, t) = \begin{cases} a_0 & \text{si } |t| \leq T \\ 0 & \text{si } |t| > T \end{cases} \Rightarrow TF[a(0, t)] = 2a_0 T \text{sinc}(\Omega T) = A(\Omega) \quad (88)$$

Rappelons qu'une fonction étroite donne une transformée de Fourier large et vice-versa. Nous allons maintenant exprimer la fonction comme étant la transformée de Fourier inverse de son spectre

$$a(0, t) = TF^{-1}[A(\Omega)] \quad (89)$$

Dès lors

$$E(0, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\Omega) e^{-i\Omega t} d\Omega e^{-i\omega_0 t} \quad (90)$$

En rentrant le facteur exponentiel, il est possible d'interpréter physiquement le résultat

$$E(0, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\Omega) e^{-i(\omega_0 + \Omega)t} d\Omega \quad (91)$$

Le champ à l'entrée de la fibre est donnée par une somme d'onde harmonique dont la pulsation n'est plus ω_0 mais $\omega_0 + \Omega$ et chacune de ces ondes a une amplitude $A(\Omega)$ est donnée par la fonction sinus cardinal qui possède un maximum en 0.

A l'entrée de la fibre, nous retrouvons un *paquet d'onde*. Comment le justifier ? On peut intuitivement montré que toute fonction du temps peut être représentée par une somme d'onde harmonique (transformée de Fourier inverse). Représentons une somme de cosinus d'amplitude différente. A l'origine, les ondes sont en phases sur le maximum. Après un certain éloignement, on retrouve des interférences destructives. La combinaison des ondes harmoniques peut donner une forme quelconque. Revenons à notre problème physique.

$$E(0, t) = a(0, t) e^{-i\omega_0 t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\Omega) e^{-i(\omega_0 + \Omega)t} d\Omega \quad (92)$$

La fonction de modulation est donnée par la fonction fenêtre dont nous connaissons la transformée de Fourier (sinc). Rappelons qu'une amplitude donnée va bien représenter l'amplitude de chacune des ondes harmoniques qui composent le signal. Ceci n'est pas que mathématique mais traduit la physique.

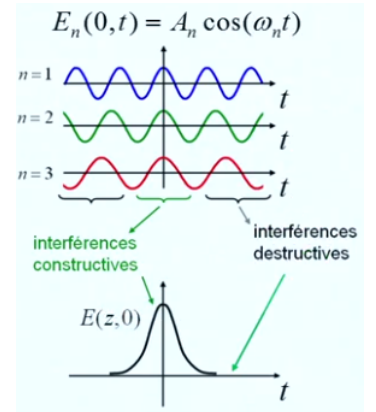


FIGURE 17

Notre laser émet des photons à la pulsation ω_0 . Ils rentrent dans le modulateur et la théorie de Fourier nous dit que oui, la pulsation de l'onde sera changée. Ceci est bien physique, il y a réellement une modification de la fréquence du laser³ → l'action du modulateur crée de nouveaux photons, une nouvelle distribution d'énergie des photons autour de l'énergie centrale donnée par $\hbar\omega_0$. La transformée de Fourier traduit ainsi très bien cette réalité physique.

3. Ceci se vérifie expérimentalement avec un prisme.

Quel est dès lors le champ pour tout temps, en tout z ? Chaque onde harmonique se propage et la façon dont une onde électromagnétique se propage est bien connue : il suffit de rajouter le nombre d'onde

$$E(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\Omega) e^{ik(\omega_0 + \Omega)z} e^{-i(\omega_0 + \Omega)t} d\Omega \quad (93)$$

La seule différence entre cette sortie et l'entrée est un facteur exponentiel correspondant, comme vu précédemment, à la **fonction de transfert** du système. Or, la fonction $k(\omega_0 + \Omega)$ est connue, la fonction de transfert, le *propagateur* est connu. Pour tout z on introduit la fonction de transfert qui est un simple facteur de phase qui est connu car l'indice de réfraction de la fibre est connue. Simplifions l'expression par son approximation au premier ordre

$$k(\omega_0 + \Omega) \approx k(\omega_0) + k'(\omega_0)\Omega + \dots \quad \left(k' = \frac{dk}{d\omega}\right) \quad (94)$$

Par substitution

$$E(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\Omega) e^{i(k_0 + k'_0\Omega)z} e^{-i(\omega_0 + \Omega)t} d\Omega \quad (95)$$

Sortons tout ce qui ne dépend pas de Ω

$$E(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\Omega) e^{ik'_0\Omega z} e^{-i\Omega t} d\Omega e^{ik_0 z} e^{-i\omega_0 t} \quad (96)$$

Regroupons les exponentielles

$$E(z, t) = \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\Omega) e^{i\Omega(t - k'_0 z)} d\Omega}_{a(0, t - k'_0 z)} e^{ik_0 z} e^{-i\omega_0 t} \quad (97)$$

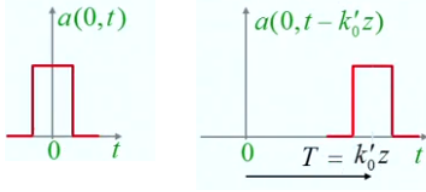


FIGURE 18

Cette expression n'est que la transformée de Fourier inverse du spectre du modulateur à laquelle on rajoute le propagateur de chacune des ondes harmoniques. Dès lors, en "oubliant" le $k'_0 z$ on reconnaît la transformée inverse. La seule différence avec le signal de départ est une translation temporelle de $k'_0 z$.

$$E(z, t) = a(0, t - k'_0 z) e^{ik_0 z} e^{-i\omega_0 t} \quad (98)$$

En sortie, on retrouvera en z le signal ci-dessus. Ce n'est rien d'autre que le signal d'entrée translaté de $k'_0 z$. Que représente cette translation ? Il se cache là dedans la notion de vitesse de groupe. Si le temps $k'_0 z$, l'impulsion s'est déplacée de z . On peut faire apparaître la notion de vitesse de groupe

$$v_g = \frac{z}{T} = \frac{1}{k'_0} = \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega_0}^{-1} \quad (99)$$

où $T = k'_0 z$ est le temps de propagation. Ce résultat est obtenu par approche au premier ordre. Un développement au second ordre mettrait en évidence le phénomène de dispersion.

Chapitre 1

La diffraction