



ECOLE  
POLYTECHNIQUE  
DE BRUXELLES

UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES

SYNTHÈSE

---

# Théorie des signaux ELEC-H-302

---

*Auteur :*  
Nicolas ENGLEBERT

*Professeur :*  
Antoine NONCLERCQ

Année 2015 - 2016

# Appel à contribution

## Synthèse Open Source



Ce document est grandement inspiré de l'excellent cours donné par Antoine NONCLERCQ à l'EPB (École Polytechnique de Bruxelles), faculté de l'ULB (Université Libre de Bruxelles). Il est écrit par les auteurs susnommés avec l'aide de tous les autres étudiants et votre aide est la bienvenue ! En effet, il y a toujours moyen de l'améliorer

surtout que si le cours change, la synthèse doit être changée en conséquence. On peut retrouver le code source à l'adresse suivante

<https://github.com/nenglebert/Syntheses>

Pour contribuer à cette synthèse, il vous suffira de créer un compte sur *Github.com*. De légères modifications (petites coquilles, orthographe, ...) peuvent directement être faites sur le site ! Vous avez vu une petite faute ? Si oui, la corriger de cette façon ne prendra que quelques secondes, une bonne raison de le faire !

Pour de plus longues modifications, il est intéressant de disposer des fichiers : il vous faudra pour cela installer L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X, mais aussi *git*. Si cela pose problème, nous sommes évidemment ouverts à des contributeurs envoyant leur changement par mail ou n'importe quel autre moyen.

Le lien donné ci-dessus contient aussi un README contenant de plus amples informations, vous êtes invités à le lire si vous voulez faire avancer ce projet !

## Licence Creative Commons

Le contenu de ce document est sous la licence Creative Commons : *Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International (CC BY-NC-SA 4.0)*. Celle-ci vous autorise à l'exploiter pleinement, compte- tenu de trois choses :



1. *Attribution* ; si vous utilisez/modifiez ce document vous devez signaler le(s) nom(s) de(s) auteur(s).
2. *Non Commercial* ; interdiction de tirer un profit commercial de l'œuvre sans autorisation de l'auteur
3. *Share alike* ; partage de l'œuvre, avec obligation de rediffuser selon la même licence ou une licence similaire

Si vous voulez en savoir plus sur cette licence :

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

**Merci !**

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Signaux et systèmes</b>	<b>1</b>
1.1	Signaux . . . . .	1
1.1.1	Signaux déterministes ou aléatoires . . . . .	1
1.1.2	Signaux à énergie finie et signaux à puissance moyenne finie . . . . .	2
1.2	Systèmes . . . . .	2
1.2.1	Caractéristiques de systèmes . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Signaux et systèmes discrets</b>	<b>4</b>
2.1	Signaux discrets . . . . .	4
2.1.1	Signaux particuliers . . . . .	4
2.2	Systèmes à temps discret, linéaires et permanents . . . . .	5
2.2.1	Association de systèmes . . . . .	6
2.2.2	Stabilité . . . . .	6
2.2.3	Causalité . . . . .	7
2.3	Systèmes décrits par une récurrence linéaire . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Analyse de Fourier des systèmes à temps discret</b>	<b>10</b>
3.1	Réponse à une exponentielle complexe . . . . .	10
3.2	Série de Fourier discrète . . . . .	11
3.3	Réponse en fréquence d'un système discret . . . . .	13
3.4	Transformée de Fourier d'un signal discret . . . . .	14
3.4.1	Propriétés de la transformée de Fourier . . . . .	14
3.5	Transformée de Fourier des signaux périodiques . . . . .	15
<b>4</b>	<b>L'échantillonnage</b>	<b>18</b>
4.1	Échantillonnage par un train d'impulsions . . . . .	18
4.2	Formule d'interpolation . . . . .	21
4.3	Éviter le repliement spectral . . . . .	21
4.3.1	Échantillonnage par une fonction périodique . . . . .	22
4.3.2	Utilisation d'un système à temps discret pour le traitement des signaux à TC . . . . .	22
<b>5</b>	<b>Transformation de Fourier discrète</b>	<b>26</b>
5.1	Définition . . . . .	26
5.2	Propriétés de la DFT . . . . .	26
5.2.1	Linéarité et glissement . . . . .	26
5.2.2	Convolution périodique . . . . .	27
5.2.3	Propriétés de symétrie . . . . .	27
5.2.4	Formule de Pascal . . . . .	27

5.3	Applications de la DFT . . . . .	29
5.3.1	Évaluation de la TF d'une séquence finie . . . . .	29
5.3.2	Inversion d'une transformée de Fourier . . . . .	30
5.4	Analyse de Fourier par DFT . . . . .	32
5.4.1	Effet de la fenêtre . . . . .	33
5.4.2	Effet de l'échantillonnage fréquentiel . . . . .	34

# Chapitre 1

## Signaux et systèmes

Un *signal* représente une information concernant le comportement ou l'état d'un phénomène. Ce signal est représenté mathématiquement par une fonction. Un *système* agit sur des signaux d'entrée et produit, à sa sortie, des signaux sous une forme plus appropriée pour l'utilisation envisagée.

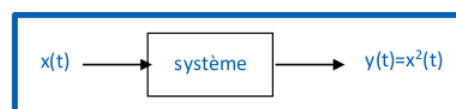


FIGURE 1.1 – Exemple de système

### 1.1 Signaux

Il existe deux types de signaux

1. *A temps continu* ; fonction  $f(t)$  est définie pour toute valeur de la variable indépendante  $t$ .
2. *A temps discret*<sup>1</sup> ; fonction définie seulement pour des valeurs discrètes de la variable indépendante. Il s'agit par exemple d'une suite de valeurs  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$

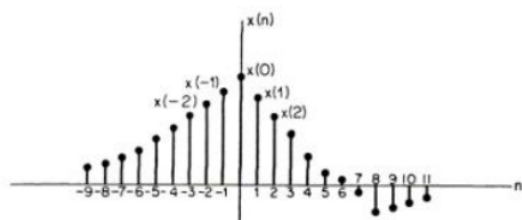


FIGURE 1.2

$$x(n), \quad n \in \mathbb{Z} \quad (1.1)$$

Souvent, on procède à un *échantillonnage* d'un signal à temps continu (TC) pour obtenir un signal à temps discret (TD)

$$x(n) = f(nT) \quad (1.2)$$

où  $x$  est discret,  $f$  continu et  $T$  est la période d'échantillonnage.

Le signal à TD se distingue du signal à TC par la *quantification* de sa variable indépendante ( $t$ ). On pourrait également envisager la quantification de l'amplitude : un signal est dit *numérique* lorsque  $t$  et l'amplitude sont quantifiées et *analogique* lorsque ces deux valeurs évoluent de façon continues.

#### 1.1.1 Signaux déterministes ou aléatoires

Dans un signal *déterministe*, l'évolution en fonction du temps (ou de la variable indépendante) est a priori connue. Par contre, l'évolution temporelle<sup>2</sup> d'un signal *aléatoire* obéit à des lois statistiques.

1. ou *signal échantillonné*

2. Je considère que la variable indépendante sera le temps dans ce chapitre.

## 1.1.2 Signaux à énergie finie et signaux à puissance moyenne finie

### Signaux à énergie finie

L'énergie et la puissance d'un signal  $x(t)$  sur  $t \in [t_1; t_2]$  est donnée par (le module permet la généralisation aux fonction complexes)

$$E(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt, \quad P(t_1, t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt \quad (1.3)$$

L'énergie du signal à TC sera dite finie si

$$E \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < \infty \quad (1.4)$$

Pour le signal TD, il suffit de remplacer  $\int_{-\infty}^{+\infty}$  par  $\sum_{-\infty}^{+\infty}$ .

La puissance moyenne totale de tels signaux est nulle : ils sont de types transitoires et les seuls physiquement accessibles.

### Signaux à puissance moyenne finie

La puissance moyenne finie (TC et TD) pour un signal  $x$

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt, \quad P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{-N}^{+N} |x(n)|^2 \quad (1.5)$$

est bornée et non nulle ( $0 < P < \infty$ ). Dès lors, l'énergie de ces signaux est infinie (signaux périodiques et aléatoires stationnaires). Les signaux à énergie et puissance infinie n'appartiennent à aucune des deux catégories précédentes.

## 1.2 Systèmes

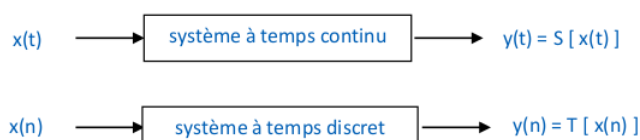


FIGURE 1.3

Ceux-ci réalisent la transformations de signaux, on utilise dès lors la même terminologie (TC, TD, numérique, analogique). Notons qu'il existe également des structures hybrides. On représente un système par un opérateur fonctionnel établissant une règle de correspondance entre deux ensembles de fonctions.

### 1.2.1 Caractéristiques de systèmes

#### Linéarité

Un TC/TD est linéaire s'il satisfait au principe de superposition

$$S[ax_1(t) + bx_2(t)] = aS[x_1(t)] + bS[x_2(t)], \quad T[ax_1(n) + bx_2(n)] = aT[x_1(n)] + bT[x_2(n)] \quad (1.6)$$

où  $a, b \in \mathbb{C}$ . Une entrée nulle ( $\forall t$  ou  $n$ ) suscite une réponse nulle :  $y(n) = 2x(n) + 3$  n'est ainsi pas linéaire (waw).

## Permanence (invariance dans le temps)

Un système est permanent si un décalage temporel du signal d'entrée produit le même décalage du signal de sortie.

- TC ;  $y(t) = S[x(t)] \Rightarrow y(t - t_0) = S[x(t - t_0)] \quad \forall t_0 \in \mathbb{R}$
- TD ;  $y(t) = T[x(n)] \Rightarrow y(t - k) = T[x(n - k)] \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

## Causalité

Un système est dit *causal* si le signal de sortie à tout instant ne dépend que des valeurs passées et présente du signal d'entrée. On l'exprime

- TC ;
  - \*  $x_1(t) = x_2(t)$  pour  $t \leq t_0 \Rightarrow y_1(t) = y_2(t)$  pour  $t \leq t_0$ .
  - \*  $x(t) = 0$  pour  $t \leq t_0 \Rightarrow y(t) = 0$  pour  $t \leq t_0$ .
- TD ;
  - \*  $x_1(n) = x_2(n)$  pour  $n \leq n_0 \Rightarrow y_1(n) = y_2(n)$  pour  $n \leq n_0$ .
  - \*  $x(n) = 0$  pour  $n \leq n_0 \Rightarrow y(n) = 0$  pour  $n \leq n_0$ .

Notons qu'un système est toujours causal si  $t$  (ou  $n$ ) est le temps réel.

## Stabilité

Un système est dit stable (au sens strict) si tout signal d'entrée bornée produit une sortie également bornée (stabilité BIBO (bounded input bounded output) :

- TC ;  $|x(t)| \leq B_x < \infty \quad \forall t \Rightarrow |y(t)| \leq B_y < \infty \quad \forall t$
- TD ;  $|x(n)| \leq B_x < \infty \quad \forall n \Rightarrow |y(n)| \leq B_y < \infty \quad \forall n$

## Chapitre 2

# Signaux et systèmes discrets

### 2.1 Signaux discrets

#### 2.1.1 Signaux particuliers

Passant en revue certains signaux particuliers

**Échelon unité**

$$\begin{aligned} u(n) &= 0 & n < 0 \\ &= 1 & n \geq 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

**Impulsion unité**

$$\begin{aligned} \delta(n) &= 0 & n \neq 0 \\ &= 1 & n = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Ces deux signaux sont liés par les deux relations suivantes

$$\begin{aligned} u(n) &= \sum_{k=-\infty}^n \delta(k) \\ \delta(n) &= u(n) - u(n-1) \end{aligned} \quad (2.3)$$

**Exponentielle**

$$\begin{aligned} x(n) &= a^n \\ x(n) &= e^{(\sigma + j\omega_0)n} = e^{\sigma n} (\cos \omega_0 n + j \sin \omega_0 n) \end{aligned} \quad (2.4)$$

**Sinusoidal**

$$x(n) = A \sin(\omega_0 n + \Phi) \quad (2.5)$$

**Périodique**

$$x(n) = x(n + N) \quad \forall n \quad (2.6)$$

Intéressons nous à l'exponentielle complexe

$$x(n) = e^{j\omega_0 n} \quad (2.7)$$

On peut remarquer que si on considère  $\omega'_0 = \omega_0 + 2k\pi$ , on retrouve le même signal

$$e^{j(\omega_0 + 2k\pi)n} = e^{j\omega_0 n} e^{j2k\pi n} = e^{j\omega_0 n} \quad (2.8)$$

Il est alors possible de restreindre la pulsation  $\omega_0$  à  $[0; 2\pi[$ . Cependant, contrairement aux signaux continus, l'exponentielle complexe n'est pas toujours périodique dans le cas discret.

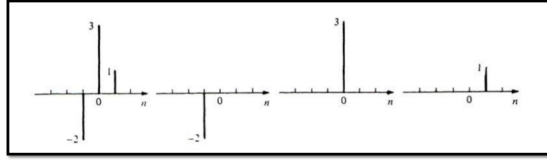
$$\begin{aligned} x(n) &= x(n + N) \\ \Leftrightarrow e^{j\omega_0 n} &= e^{j\omega_0 (n+N)} = e^{j\omega_0 n} e^{j\omega_0 N} \\ \Leftrightarrow e^{j\omega_0 N} &= 1 \\ \Leftrightarrow \omega_0 N &= 2m\pi \Rightarrow \omega_0 = m \frac{2\pi}{N} \end{aligned} \quad (2.9)$$



Il faut forcément que  $\omega_0$  soit un multiple entier de  $2\pi/N$ . Or, nous avons limité le domaine de  $\omega_0$  : il n'existe que  $N$  exponentielles distinctes de période  $N$  :

$$\Phi_k(n) = e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.10)$$

### Représentation d'un signal au moyen d'impulsions



$$x(n) = -2\delta(n+1) + 3\delta(n) + \delta(n-1)$$

Il est toujours possible d'écrire un signal  $x(n)$  sous la forme

$$x(n) = \sum_{-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k) \quad (2.11)$$

FIGURE 2.1

## 2.2 Systèmes à temps discret, linéaires et permanents

On appelle *réponse impulsionnelle*  $h(n)$  le signal de sortie lorsque le signal d'entrée est un delta de Dirac  $\delta(n)$

$$h(n) = T[\delta(n)] \quad (2.12)$$

Comme vu à la sous-section ci-dessus, écrivons un signal d'entrée sous la forme d'impulsion

$$x(n) = \sum_{-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k) \quad (2.13)$$

Les "bornes" de la somme sont telles que l'on sélectionne tout. La sortie devient

$$y(n) = T \left[ \sum_{-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k) \right] \quad (2.14)$$

Par linéarité, le système ne s'applique qu'à l'impulsion

$$y(n) = \sum_{-\infty}^{\infty} x(k)T[\delta(n-k)] \quad (2.15)$$

Appliquons la propriété de permanence : rien ne change si on effectue cette opération à cet instant, ou plus tard :

$$y(n) = \sum_{-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) \quad (2.16)$$

Il s'agit de la *formule de convolution* (discrète) qui exprime la sortie en fonction de la réponse d'entrée pour tout signal

$$y(n) = x(n) * h(n) \quad (2.17)$$

Le système est donc entièrement caractérisé par sa réponse impulsionnelle,  $x(n)$  étant déjà connu. La convolution est commutative, on peut dès lors écrire

$$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \quad (2.18)$$

### 2.2.1 Association de systèmes

#### Cascade

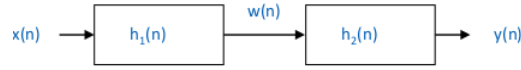


FIGURE 2.2

$$\begin{aligned} w(n) &= x(n) * h_1(n) \\ y(n) &= w(n) * h_2(n) = [x(n) * h_1(n)] * h_2(n) \end{aligned} \quad (2.19)$$

#### Convolution associative

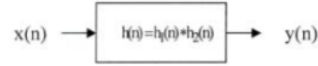


FIGURE 2.3

$$y(n) = x(n) * [h_1(n) * h_2(n)] = x(n) * h(n) \quad (2.20)$$

#### En parallèle

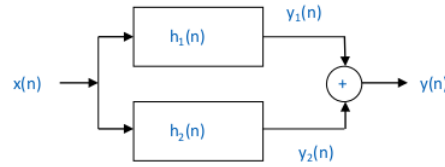


FIGURE 2.4

$$\begin{aligned} y_1(n) &= x(n) * h_1(n) \\ y_2(n) &= x(n) * h_2(n) \\ y(n) &= y_1(n) + y_2(n) = x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n) \end{aligned} \quad (2.21)$$

#### Distributive pour l'addition

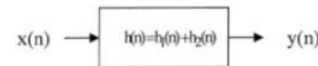


FIGURE 2.5

$$y(n) = x(n) * [h_1(n) + h_2(n)] = x(n) * h(n) \quad (2.22)$$

### 2.2.2 Stabilité

Nous avons précédemment vu la définition de la stabilité. La *CNS* de stabilité pour un SLP est

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty \quad (2.23)$$

*Démonstration.*

▷ La condition est suffisante.

Hypothèses :

1.  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty$
2. Le signal d'entrée  $x(n)$  est borné :  $|x(n)| < A \quad \forall n$

Calculons le signal de sortie

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \quad (2.24)$$

Majorons

$$y(n) \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)||x(n-k)| \leq A \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty \quad (2.25)$$

Le signal de sortie est borné, le système est donc stable.

▷ La condition est nécessaire.

Nous pouvons choisir n'importe quel signal d'entrée, considérons ce signal particulier :

$$\begin{aligned} x(n) &= 1 && \text{si } h(-n) \geq 0 \\ &= -1 && \text{si } h(-n) < 0 \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$x(n) = \text{sign } h(-n)$$

Ce signal d'entrée est construit tel que le produit entre  $h(n) * x(n)$  donne la valeur absolue de  $h$  : si  $h$  est positif il ne se passe rien, si le signe est négatif le signal multiplie par (-1) de sorte à avoir un signe positif. Ce signal est bien borné

$$|x(n)| = 1 \quad (2.27)$$

Calculons l'échantillon de sortie  $y(0)$  :

$$y(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| \quad (2.28)$$

La sortie  $y(0)$  ne sera borné que si la réponse impulsionnelle est absolument sommable, la condition est bien nécessaire.  $\square$

### 2.2.3 Causalité

Par définition  $y(n)$  n'est causal que s'il dépend de  $x(n)$  mais pas de  $x(n+1), \dots$ . Pour que  $y(n)$  ne dépende pas de  $x(k)$  pour  $k > n$ , il faut que  $h(n) = 0$  pour  $n < 0$ , soit la CNS de causalité. La réponse impulsionnelle doit être causale, il faut alors stopper la somme à  $n$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k)h(n-k) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k) \quad (2.29)$$

## 2.3 Systèmes décrits par une récurrence linéaire

La récurrence linéaire est définie par

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) \quad (2.30)$$

Il en résultera une ED donnant lieu à une infinité de solution : on impose des CI pour garantir l'existence et l'unicité de la solution (cf. *Analyse I, II et III*).

EXEMPLE : Considérons la récurrence du premier ordre

$$y(n) - ay(n-1) = x(n) \implies y(n) = x(n) + ay(n-1) \quad (2.31)$$

Considérons initialement une condition de repos et le signal d'entrée suivant :

$$x(n) = b\delta(n) \quad (2.32)$$

On a alors

$$\begin{aligned} y(-1) &= x(-1) &&= 0 \\ y(0) &= x(0) + ay(-1) &&= x(0) = b \\ y(1) &= x(1) + ay(0) &&= ab \\ y(2) &= x(2) + ay(1) &&= a^2b \\ y(n) &= x(n) + ay(n-1) &&= a^n b \end{aligned} \quad (2.33)$$

La solution particulière vaut alors

$$y(n) = a^n bu(n) \quad (2.34)$$

Vérifions que ceci est bien solution de  $x(n) = y(n) - ay(n-1)$  avec

$$\begin{cases} y(n) &= a^n bu(n) \\ y(n-1) &= a^{n-1} bu(n-1) \end{cases} \quad (2.35)$$

Après substitution dans l'équation de récurrence, on trouve

$$a^n b(u(n) - u(n-1)) = b\delta(n) \quad (2.36)$$

En effet,  $(u(n) - u(n-1))$  n'est rien d'autre que l'impulsion. Cependant, nous avons un facteur  $a^n$  en trop. Est-ce une erreur ? Discussions en fonction de  $n$

$$a^n b\delta(n) = b\delta(n) \begin{cases} \text{Si } n = 0 & a^0 b\delta(0) = b\delta(0) = b \\ \text{Si } n \neq 0 & a^n b0 = b0 = 0 \end{cases} \quad (2.37)$$

Notre solution particulière est bien solution ! Il reste à calculer la solution générale de la récurrence homogène

$$y(n) - ay(n-1) = 0 \quad (2.38)$$

La solution sera  $y(n) = ka^n$  (on peut vérifier que c'est bien le cas). En imposant <sup>a</sup>  $y(-1) = c$ , on trouve comme S.G. (SGEH + SPEnH) :

$$y(n) = ca^{n+1} + ba^n u(n) \quad (2.39)$$

La solution au système linéaire étant *causal*, on dit ciao-ciao au terme en  $n+1$  :

$$y(n) = a^n bu(n) \quad (2.40)$$

Si le signal d'entrée est une impulsion de Dirac  $\delta(n)$ , le signal de sortie sera la réponse impulsionnelle. Posons  $b = 1$

$$h(n) = a^n u(n) \quad (2.41)$$

---

<sup>a</sup>. Choix arbitraire donnant un résultat propre, mais ici non linéaire ! Pour avoir une solution linéaire, il aurait fallu poser  $y(-1) = 0$ . L'avantage de considérer en  $(-1)$  est que l'échelon  $u$  s'annule.

EXEMPLE :

Nous avons ainsi entièrement caractérisé notre SLP. Voyons ce que vaut le signal de sortie pour un échelon unitaire

$$\begin{aligned}y(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) \\&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k)a^{n-k}u(n-k) \\&= \sum_{k=0}^{\infty} a^{n-k}u(n-k) \\&= \sum_{k=0}^n a^k\end{aligned}\tag{2.42}$$

Il est possible de retrouver cette réponse en partant directement de la relation de récurrence, comme l'illustre le slide T22.

## Chapitre 3

# Analyse de Fourier des systèmes à temps discret

Dans le cas d'un signal périodique, la série de Fourier était utilisée

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (3.1)$$

où l'on peut voir  $a_k$  comme le coefficient de pondération de chaque exponentielle complexe. Dans le cas où les signaux n'étaient pas périodiques, la *transformée de Fourier* (et inverse) a (ont) été définie(s)

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt, \quad x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (3.2)$$

Le *théorème de convolution* peut permettre un traitement plus aisé de la convolution

$$y(t) = x(t) * h(t) \quad \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \quad Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega) \quad (3.3)$$

### 3.1 Réponse à une exponentielle complexe

Considérons l'entrée suivante

$$x(n) = z^n, \quad z = e^{j\omega_0} \quad \Rightarrow \quad x(n) = e^{j\omega_0 n} \quad (3.4)$$

où  $-\infty < n < \infty$ . Le signal de sortie est donnée en effectuant la convolution

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)z^{n-k} = z^n \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)z^{-k}}_{H(z) \in \mathbb{C}} \\ &= H(z)z^n \end{aligned} \quad (3.5)$$

En effet, la dernière somme peut être vue comme une constante complexe (dépendant de  $z$  et du SLP). Cette sortie n'est que la fonction d'entrée multipliée par quelque chose :  $z^n, z \in \mathbb{C}$  est une *fonction propre* de tout SLP discret.

Si par hasard le signal d'entrée peut se mettre sous la forme d'une somme d'exponentielle complexe (fonction propre) multipliée par un scalaire

$$x(n) = \sum_p a_p z_p^n \quad (3.6)$$

La réponse s'obtient par simple application de la linéarité

$$y(n) = \sum_p a_p H(z_p) z_p^n \quad (3.7)$$

Ceci justifie l'analyse de Fourier pour les systèmes discrets.

## 3.2 Série de Fourier discrète

Il est possible de développer en série de Fourier un signal périodique (période  $T_0$ ) à **TC**  $x(t)$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk \frac{2\pi}{T_0} t} \quad (3.8)$$

Il est dès lors tentant de vouloir faire de même pour un signal à **TD** périodique, de période  $N$  ( $x(n) = x(n + N)$ ) comme une combi d'exponentielle discrète de période  $N$ .

Nous avons vu qu'il n'existe que  $N$  exponentielles discrètes distinctes de période  $N$ . C'est le cas ssi

$$\omega_0 = m \frac{2\pi}{N} \quad m \in \mathbb{Z} \quad (3.9)$$

La sommation est ainsi limitée à ces  $N$  termes

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{jk \frac{2\pi}{N} n} \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.10)$$

Il faut ainsi résoudre un système de  $N$  équations à  $N$  inconnues pour déterminer les  $a_k$  d'une série  $x(n)$  donnée :

$$\begin{cases} x(0) &= \sum_{k=0}^{N-1} a_k \\ x(1) &= \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{jk \frac{2\pi}{N}} \\ \vdots \\ x(N-1) &= \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{jk \frac{2\pi}{N} (N-1)} \end{cases} \quad (3.11)$$

EXEMPLE : Déterminons la série de Fourier  $x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{jk \frac{2\pi}{N} n}$   $n = 0, 1, \dots, N-1$  du signal ci-dessous (1,0,2,-1,...).

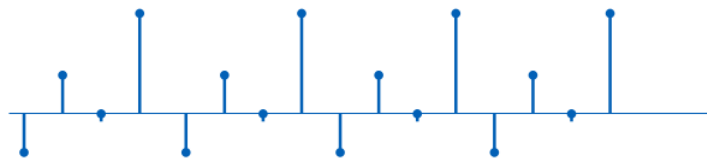


FIGURE 3.1

La série doit vérifier les points donnés, c'est-à-dire que le système ci-dessous doit être satisfait.

$$\begin{cases} x(0) = 1 &= \sum_{k=0}^{4-1} a_k e^{j2\pi k 0/4} &= a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \\ x(1) = 0 &= \sum_{k=0}^{4-1} a_k e^{j2\pi k 1/4} &= a_0 + ja_1 - a_2 - ja_3 \\ x(2) = 2 &= \sum_{k=0}^{4-1} a_k e^{j2\pi k 2/4} &= a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \\ x(3) = -1 &= \sum_{k=0}^{4-1} a_k e^{j2\pi k 3/4} &= a_0 - ja_1 - a_2 + ja_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 &= 1/2 \\ a_1 &= -\frac{1+j}{4} \\ a_2 &= -1 \\ a_3 &= -\frac{1-j}{4} \end{cases} \quad (3.12)$$

Cette représentation n'est valable que si l'on peut exprimer les  $a_k$  à partir de  $x(n)$  : il faut résoudre le système de  $N$  équations à  $N$  inconnues (3.10). Il faut pour cela calculer

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jm \frac{2\pi}{N} n} &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{j(k-m) \frac{2\pi}{N} n} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} a_k \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(k-m) \frac{2\pi}{N} n} \end{aligned} \quad (3.13)$$

La dernière somme peut être écrite

$$S = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j(k-m) \frac{2\pi}{N} n} = \sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n \quad (3.14)$$

où  $\alpha = e^{-j(k-m) \frac{2\pi}{N}}$ . Il s'agit de la série géométrique

$$S = \begin{cases} N & \text{si } \alpha = 1 \quad \text{c-à-d si } k-m = 0, \pm N, \pm 2N, \dots \\ \frac{1-\alpha^N}{1-\alpha} & \text{si } \alpha \neq 1 \quad \text{car } \alpha^N = 1 \end{cases} \quad (3.15)$$

ou encore

$$S = \begin{cases} N & \text{si } k-m = 0, \pm N, \pm 2N, \dots \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.16)$$

Si  $m \in [0; N-1]$ ,  $S$  ne sera non nulle que pour  $k = m$  et donc, en isolant

$$a_m = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jm \frac{2\pi}{N} n} \quad m = 0, \dots, N-1 \quad (3.17)$$

soit l'expression des coefficients de la série de Fourier discrète.

EXEMPLE : Reconsidérons le précédent exemple. Nous devrions retrouver les mêmes coefficients à partir de (3.17). Nous avons ici

$$a_m = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{4-1} x(n) e^{-jm \frac{2\pi}{N} n} = \frac{1}{4} (1 + 2e^{-jm\pi} - e^{-jm3\pi/2}) \quad (3.18)$$

On retrouve bien les mêmes coefficients.

$$\begin{cases} a_0 &= 1/2 \\ a_1 &= -\frac{1+j}{4} \\ a_2 &= -1 \\ a_3 &= -\frac{1-j}{4} \end{cases} \quad (3.19)$$

EXEMPLE : Pour le fun, calculons les coefficients de la série de Fourier de  $x(n) = \sin\left(\frac{2\pi}{N}n\right)$ .

On peut également écrire

$$x(n) = \frac{e^{j \frac{2\pi}{N} n} - e^{-j \frac{2\pi}{N} n}}{2j} \quad (3.20)$$

La série de Fourier ayant la forme  $x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{j2\pi kn/N}$ , on en déduit directement les coefficients par identification

$$a_1 = \frac{1}{2j}, \quad a_{-1} = -\frac{1}{2j}, \quad a_x = 0 \text{ sinon.} \quad (3.21)$$



Ceci montre que  $x(n)$  est intégralement (pfpfpf) défini par  $N$  paramètres<sup>1</sup>; la série de Fourier discrète transforme ces  $N$  paramètres en  $N$  paramètres  $a_k$ . Nous utiliserons les notations suivantes (déplacement du facteur  $1/N$ ) :

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} nk}, \quad x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j \frac{2\pi}{N} kn} \quad (3.22)$$

où  $X(k)$  ( $= X(k+N)$ ) est la *transformée de Fourier discrète* (DFT) de  $x(n)$ .

La linéarité appliquée en début de chapitre pour la sortie d'un SLP s'applique également ici de sorte que la sortie sera donnée par

$$y(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) H\left(e^{j \frac{2\pi}{N} k}\right) e^{j \frac{2\pi}{N} kn} \quad \text{où} \quad H\left(e^{j \frac{2\pi}{N} k}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} \quad (3.23)$$

Il s'agit d'une convolution où  $x$  est remplacé par sa série de Fourier.

### 3.3 Réponse en fréquence d'un système discret

En considérant comme signal d'entrée discret  $x(n) = e^{j\omega n}$  (exponentielle unitaire), celle-ci étant fonction propre notre sortie sera

$$y(n) = H\left(e^{j\omega}\right) e^{j\omega n} \quad (3.24)$$

où  $H\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) e^{-j\omega k}$  est la réponse en fréquence du système<sup>2</sup>. L'idée est que  $H$  ne soit évalué que sur le cercle unitaire. Il s'agit d'une constante complexe pour  $\omega$  fixé

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| e^{j \arg H\left(e^{j\omega}\right)} \quad (3.25)$$

Dès lors, pour un signal d'entrée réel du type  $x(n) = A \cos(\omega_0 n + \varphi)$ , la sortie vaut (superposition)

$$y(n) = A \left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right| \cos\left(\omega_0 n + \varphi + \arg H\left(e^{j\omega_0}\right)\right) \quad (3.26)$$

On peut considérer  $H\left(e^{j\omega}\right)$  comme le développement de la fonction périodique  $H$  en série de Fourier (où  $\omega$  est continu). Dès lors, on peut exprimer les échantillons  $h(k)$  par la formule classique de calcul des coefficients d'une série de Fourier

$$h(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H\left(e^{j\omega}\right) e^{j\omega k} d\omega \quad (3.27)$$

exprimant la réponse impulsionnelle en fonction de la réponse fréquentielle.

| EXEMPLE : Slide T32/34

---

1. Les  $N$  valeurs du signal sur une période.

2. On met une grandeur unitaire en entrée et on fait varier  $\omega$  pour voir comment déduire en fréquence.

## 3.4 Transformée de Fourier d'un signal discret

Les deux relations

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\omega k}, \quad h(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})e^{j\omega k} d\omega \quad (3.28)$$

étaient utilisées pour calculer le spectre de la réponse impulsionnelle et son retour au domaine temporel ne se limite **pas** à elles : n'importe quel signal discret peut être transformé, même les **apériodiques** (différence avec la série de Fourier qui est nécessairement périodique).

La *transformée de Fourier (et inverse) d'un signal apériodique* est définie par

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}, \quad x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega \quad (3.29)$$

La limitation sur  $(-\pi, \pi)$  permet de considérer toutes les exponentielles complexes distinctes, évitant ainsi les répétitions.

Étudions la convergence de  $X(e^{j\omega})$ . Pour converger,  $x(n)$  doit être absolument sommable

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty \quad (3.30)$$

Si ceci est vrai, cela implique la convergence uniforme vers une fonction continue de  $\omega$  : la réponse en fréquence d'un système stable converge toujours. Une autre manière de vérifier la convergence est de vérifier que la transformée est de carré sommable (énergie finie)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 < \infty \quad (3.31)$$

Notons que toute fonction de carré sommable est forcément absolument sommable.

### 3.4.1 Propriétés de la transformée de Fourier

Bien évidemment, cette transformée est linéaire (étant elle-même une combinaison linéaire, ceci peut paraître logique). Différentes symétries sont proposées au slide T37, ceci ne sera pas revu ici.

#### Glissement

$$\begin{aligned} x(n - n_0) &\Leftrightarrow e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega}) \\ e^{j\omega_0 n} x(n) &\Leftrightarrow X(e^{j(\omega - \omega_0)}) \end{aligned} \quad (3.32)$$

#### Parseval

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega \quad (3.33)$$

Ceci montre que les énergie dans le domaine temporel correspondent aux énergie dans le domaine fréquentiel.

## Convolution

Considérons notre convolution fétiche :  $y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n-k)x(k)$ . Calculons le spectre de  $y(n)$

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n-k)x(k)e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n-k)e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)e^{-j\omega k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n-k)e^{-j\omega(n-k)} = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) \end{aligned} \quad (3.34)$$

La dernière étape fait apparaître la définition des spectres  $X$  et  $H$ . Le résultat n'est qu'une simple multiplication dans le domaine fréquentiel.

## Modulation

Soit  $y(n) = x_1(n)x_2(n)$ . En calculant le spectre<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\theta})X_2(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} X_1(e^{j\omega}) \otimes X_2(e^{j\omega}) \end{aligned} \quad (3.35)$$

où  $\otimes$  est la convolution périodique des deux spectres.

## 3.5 Transformée de Fourier des signaux périodiques

Regardons ce que donne cette transformée pour un signal périodique ("qui peut le plus peut le moins"). Soit  $x_1(n)$  un signal apériodique, de transformée de Fourier  $X_1(e^{j\omega})$ . Construisons un signal périodique  $x(n)$  de période  $N$

$$x(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_1(n+rN) \quad (3.36)$$

Il existe d'autres façon de construire un tel signal. Calculons les coefficients  $X_d(k)$  de la série (car périodique) de Fourier (discrète) de  $x(n)$  (en substituant l'expression de  $x(n)$ ) :

$$\begin{aligned} X_d(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_1(n+rN)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_1(n+rN)e^{-j\frac{2\pi}{N}(n+rN)k} \end{aligned} \quad (3.37)$$

En décomposant l'expression ci-dessous, on retrouve l'exponentielle de départ avec en plus un nombre fixe de fois  $2\pi$  ( $e^{jx}$  est périodique, de période  $2\pi$  :  $e^{j2\pi} = 1$ , cela ne change donc rien) :

$$X_d(k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m)e^{-j\frac{2\pi}{N}mk} = X_1(e^{j\frac{2\pi}{N}k}) \quad (3.38)$$

---

3. La démonstration se trouve dans le cours d'analyse complexe

On passe ainsi en revue toutes les valeurs de  $x_1(n)$  avec une exponentielle complexe associée : ces coefficients sont les échantillons de  $X_1(e^{j\omega})$  prélevés à intervalle  $2\pi/N$ . Le spectre est quelque chose de connu :  $X_d(k)$  échantillons à intervalles réguliers, directement relié à la transformée de Fourier du signal qui n'était **pas** périodique.

Prenons la transformée de Fourier du signal périodique  $x(n)$  en appliquant la propriété du glissement ( $x(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_1(n + rN)$ )

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} X_1(e^{j\omega}) e^{j\omega rN} = X_1(e^{j\omega}) \sum_{r=-\infty}^{\infty} e^{j\omega rN} \quad (3.39)$$

Le spectre du signal périodique est directement lié au spectre du signal apériodique. On établit que

$$\sum_{r=-\infty}^{\infty} e^{j\omega rN} = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{N}\right) \quad (3.40)$$

Ce qui n'est rien d'autre qu'un train d'impulsions.

Cet "établi" peut sembler suspect. Comme nous sommes à l'ULB (libre examen patatipatata), montrons en effet que

$$\Delta_T(t) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \quad (3.41)$$

Comme celui-ci est périodique ( $\Delta_T(t+T) = \Delta_T(t)$ ), on peut calculer sa série de Fourier (définie ici en discret pour la somme, mais le domaine est bien **continu** ! (On l'a déjà fait en discret dans le passé).

$$\Delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i2\pi n t/T} \quad (3.42)$$

Calculons donc ses coefficients

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \Delta_T(t) e^{-i2\pi n t/T} dt \quad (-\infty < t_0 < +\infty) \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \Delta_T(t) e^{-i2\pi n t/T} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-i2\pi n t/T} dt \\ &= \frac{1}{T} e^{-i2\pi n 0/T} \\ &= \frac{1}{T} \end{aligned} \quad (3.43)$$

En effet, une période correspond à l'intervalle  $[-T/2, T/2]$ . Sur cette intervalle on retrouve une seule impulsion (en zéro), les autres sont en dehors d'où le  $\delta(t)$ . On a donc

$$\Delta_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i2\pi n t/T} \quad (3.44)$$

En effectuant le changement de variable  $t \rightarrow \omega$  et  $T \rightarrow 2\pi/N$ , on retrouve

$$\sum_{r=-\infty}^{\infty} e^{j\omega rN} = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{N}\right) \quad (3.45)$$

Revenons à notre somme de train d'impulsion. Comme le signal n'est non-nul que lorsque  $\omega = k \frac{2\pi}{N}$  :

$$\begin{aligned}
 X(e^{j\omega}) &= X_1(e^{j\omega}) \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - k \frac{2\pi}{N}\right) \\
 &= \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_1\left(e^{j \frac{2\pi}{N} k}\right) \delta\left(\omega - k \frac{2\pi}{N}\right) \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{N} X_d(k) \delta\left(\omega - k \frac{2\pi}{N}\right)
 \end{aligned} \tag{3.46}$$

Il s'agit de la transformée de Fourier d'un signal périodique en fonction de son développement en série de Fourier discrète sur le spectre du signal apériodique : on retrouve "seulement" les coefficients de la série de Fourier. Le signal périodique  $x(n)$  possède une série de raie espacée de  $2\pi/N$ .

Un exemple et un résumé du chapitre sont donnés au slide T45 et T46.

## Chapitre 4

# L'échantillonnage

On détermine parfois un signal continu  $x(t)$  par des échantillons prélevés à période  $T$ ,  $x(nT)$ . Nous allons ici considérer des signaux à TC (on utilisera  $\Omega$  en rad/s) et TD ( $\omega$  en rad).

### 4.1 Échantillonnage par un train d'impulsions

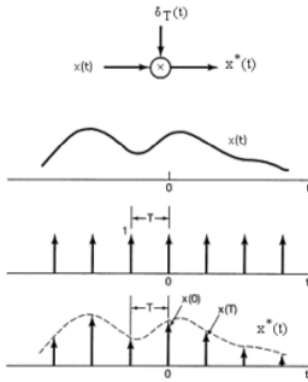


FIGURE 4.1

L'idée est de moduler  $x(t)$  avec un train périodique d'impulsion de Dirac. On obtient ainsi le signal impulsionnel  $x^*(t)$

$$x^*(t) = x(t)\delta_T(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad (4.1)$$

Il s'agit bien d'une multiplication et non d'une convolution. On appelle  $T$  la *période d'échantillonnage*,  $\Omega_S = 2\pi/T$  la *pulsation d'échantillonnage* et  $f_S = 1/T$  la *fréquence d'échantillonnage*.

Comme  $\delta_T(t)$  est périodique, on peut utiliser la série de Fourier (calculée à la fin du chapitre précédent)

$$\begin{aligned} \delta_T &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\frac{2\pi}{T}t} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Il s'agit d'une série infinie d'exponentielles complexes. En substituant dans l'équation

$$x^*(t) = \frac{1}{T} x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\Omega_S t} \quad (4.3)$$

Calculons-en sa transformée de Laplace (premier pas vers la transformée de Fourier)

$$X^*(p) = \mathcal{L}[x^*(t)] = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{L}[x(t)e^{jk\Omega_S t}] \quad (4.4)$$

En posant  $\alpha = jk\Omega_S$  on retrouve une forme équivalente à un décalage fréquentiel

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x(t)e^{\alpha t}) e^{-pt} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-(p-\alpha)t} dt = X(p - \alpha) \quad (4.5)$$

La transformée de Laplace de la multiplication par une exponentielle imaginaire donne un décalage fréquentiel (soit notre expression en substituant  $\alpha$ )

$$x(t)e^{jk\Omega_S t} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(p - jk\Omega_S) \quad (4.6)$$

En particulierisant pour  $p = j\Omega$ , on trouve

$$X^*(\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\Omega - k\Omega_S) \quad (4.7)$$

On retrouve dans la série le spectre du signal en entrée : on a copié/collé une infinité de fois le spectre décalé vers la gauche et la droite. Un signal échantillonné dans le temporel présente donc un spectre périodique de période  $\Omega_S$ . Cependant, les spectres décalés vont se recouvrir : on ne pourra plus avoir  $X$  à partir de  $X^*$ . Si  $\exists \Omega_M : X(\Omega) = 0$  pour  $|\Omega| > \Omega_M$ , alors il n'y aura pas de recouvrement si la fréquence d'échantillonnage est assez grande :  $\Omega_S > 2\Omega_M$ .

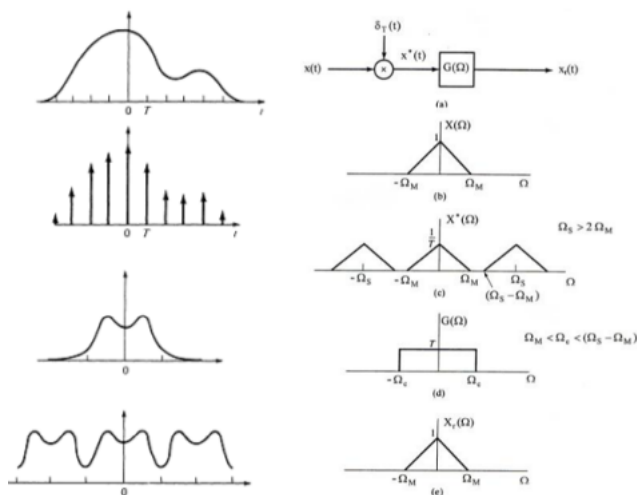


FIGURE 4.2

Si cette condition est satisfaite, on pourra reconstituer  $x(t)$  à partir du signal échantillonné  $x^*(t)$  dans un filtre passe-bas idéal  $G(\Omega)$  de gain  $T$  et de fréquence de coupure  $\Omega_c$  tel que

$$\Omega_M < \Omega_c < \Omega_S - \Omega_M \quad (4.8)$$

C'est le théorème de Shannon :

THÉORÈME : SHANNON

La fréquence d'échantillonnage doit être supérieure au double de la fréquence maximale du signal. Celui-ci est alors entièrement caractérisé

EXEMPLE : Si l'on fait tourner une foreuse plus rapidement que le taux d'échantillonnage, Shannon n'est pas respecté : on perd en information. Pire, on pense que la foreuse est "à l'arrêt" alors qu'il n'en est rien.

**Petit plus pour comprendre**<sup>a</sup> : "Cette distorsion se produit parce qu'un signal de fréquence porteuse  $-f$  a exactement le même effet sur le signal modulé que ceux de fréquence  $f$ . De même, dans le cas d'un signal échantillonné, tous les signaux dont l'écart de fréquence avec la fréquence d'échantillonnage est identique se représentent par les mêmes échantillons. Lorsqu'on reconstitue le signal d'origine, il est impossible de distinguer ces composantes dont la représentation est identique.."

<sup>a</sup>. Source : Wikipedia

Sur la Figure 4.2 : à gauche, on voit que la fonction périodique implique un recouvrement. A droite on effectue une convolution dans le temporel. Un filtre idéal coupe à  $\Omega_c$  (quand le spectre s'est arrêté et avant qu'il ne reprenne). On n'a alors pas perdu d'information (retour exact au signal initial).



## 4.2 Formule d'interpolation

Appliquons la convolution pour retrouver notre signal de base

$$x(t) = x^*(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(\tau)g(t - \tau) d\tau \quad (4.9)$$

où  $g(t) = \frac{T}{\pi t} \sin \Omega_c t$ , un filtre passe-bas idéal de gain  $T$  et de fréquence de coupure  $\Omega_c$ . On peut prendre  $\Omega_c = \frac{\Omega_s}{2} = \frac{\pi}{T}$  : par définition, en coupant à cet endroit, il n'y aura aucun signal utile hors de la bande passante. La convolution fait apparaître une série<sup>1</sup>. En faisant les math

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \delta(\tau - nT) g(t - \tau) d\tau \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - nT) g(t - \tau) d\tau \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) g(t - nT) \end{aligned} \quad (4.10)$$

On trouve alors

**À retenir : Formule d'interpolation**

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \frac{\sin \frac{\pi}{T}(t - nT)}{\frac{\pi}{T}(t - nT)} \quad (4.11)$$

Celle-ci exprime  $x(t)$  en fonction des échantillons (**si**  $\Omega_s > 2\Omega_M$ ).

Autrement dit : *un signal analogique dont le spectre s'annule au delà d'une fréquence  $f_{max}$  est entièrement déterminé par ses échantillons prélevés à une cadence d'au moins  $2f_{max}$  fois par seconde.*

Le slide T10 illustre un cas où cette condition n'est pas respectée. Notons qu'en pratique le spectre n'est jamais complètement nul au moment voulu (cf. critère de Paley-Wiener) : il y aura toujours un fin repliement spectral mais on peut s'arranger pour qu'il soit négligeable.

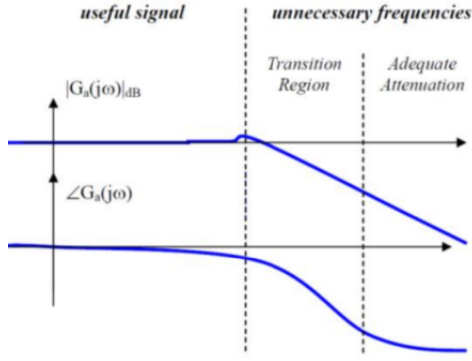
## 4.3 Éviter le repliement spectral

En principe, il faut filtrer à l'aide d'un filtre passe-bas (crucial pour Shannon), c'est-à-dire échantillonner un signal limitée en BP avec  $\Omega_s$  adéquat. Hélas la BP des signaux réels n'est pas limitée. Cependant, on s'intéresse souvent qu'à une partie de la BP. L'idée du filtre anti-repliement se fait en trois temps. L'idée est de filtrer en **analogique** avant d'entrer le signal en numérique.

1. Sélectionner la BP
2. Filtrer pour ne garder que cette BP
3. Échantillonner avec une fréquence adéquate

---

1. Pourquoi  $x(nT)$  directement ? On n'utilise pas (4.1) et le  $nT$  ne viendrait pas du delta de Dirac ?



L'idéal serait un filtre gain constant dans la BP et nul en dehors, mais ce n'est pas réalisable en pratique. Il faut utiliser un filtre  $\mathbb{R}$  possédant une zone de distorsion (la pente n'étant pas parfaitement perpendiculaire). Cette zone est un peu floue car elle est polluée par le repliement spectral (le "pouvoir filtrant" n'est pas assez important). Cependant, aucune informations utiles ne s'y trouve.

#### 4.3.1 Échantillonnage par une fonction périodique

On multiplie (pas une convolution)  $x(t)$  par un signal périodique  $p(t)$  (pas forcément un train d'impulsions).

$$y(t) = x(t)p(t) \quad (4.12)$$

Avec  $p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\Omega_s t}$ ,  $y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k x(t) e^{jk\Omega_s t}$  on trouve

$$Y(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k X(\Omega - k\Omega_s) \quad (4.13)$$

Le domaine étant continu,  $\sum_{k=-\infty}^{\infty}$  est un nombre infini. On retrouve comme précédemment les spectres décalés (de là vient la règle  $1/2T$ , ...). Ici  $c_k$  ne vaut plus  $1/T$  mais varie avec la fréquence.

#### 4.3.2 Utilisation d'un système à temps discret pour le traitement des signaux à TC

On utilise la chaîne suivante, équivalent à un système à TC (si cond. de Shanon OK)

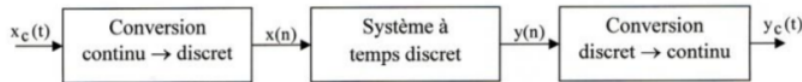


FIGURE 4.4

1. *Conversion continu  $\rightarrow$  discret*

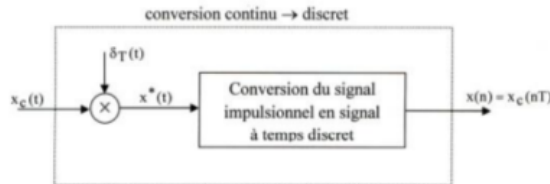


FIGURE 4.5

C'est la fameuse multiplication de  $x_c(t)$  par  $\delta_T(t)$  pour obtenir un signal pulsé. On utilise pour ça un convertisseur analogique-numérique.

$$x^*(t) = x_c(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT) \delta(t - nT) \quad (4.14)$$

En prenant la transformée de Laplace<sup>2</sup> :

$$X^*(p) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)e^{-pnT} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)e^{-j\Omega nT} \quad (4.15)$$

La seconde égalité particularise pour la transformée de Joseph.

Pour un signal à temps discret  $x(n)$  :

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \quad (4.16)$$

Comme  $x(n) = x_c(nT)$ , on peut écrire (première ligne)

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)e^{-j\omega n} \\ X^*(\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)e^{-j\Omega nT} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Par identification avec la deuxième ligne, il vient que

$$X^*\left(\frac{\omega}{T}\right) = X(e^{j\omega}) \quad (4.18)$$

La seule différence entre la TF de  $x(n)$  (discret) et celle de  $x^*(t)$  (impulsionnel) est un changement d'échelle :  $\omega = \Omega T$ .

## 2. Conversion discret $\rightarrow$ continu

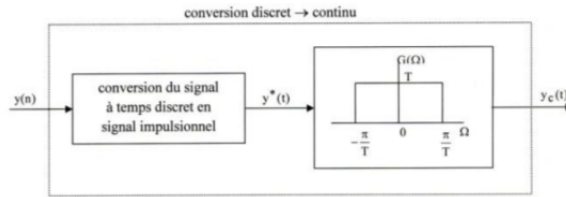


FIGURE 4.6

Le signal numérique ayant été transformé, il faut le transmettre en analogique. Si le système à TD possède une réponse en fréquence  $F(e^{j\omega})$ , la transformée de Fourier de  $y(n)$  (discret) sera

$$Y(e^{j\omega}) = F(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) \quad (4.19)$$

Passé du monde numérique à pulsé donnera un spectre identique à un facteur près.

En pratique, on utilise un extrapolateur d'ordre zéro pour reconstruire un signal continu à partir de ses échantillons : un signal analogique doit passer par les points du numérique.

## Reconstitution par un extrapolateur d'ordre zéro

Considérons un système à TC de réponse impulsionnelle  $h(t)$

$$y'_c(t) = y^*(t) * h(t) \quad (4.20)$$

où  $y^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)\delta(t - nT)$  de sorte que l'on ai

$$y'_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)\delta(t - nT) * h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)h(t - nT) \quad (4.21)$$

---

2. Sachant que  $\mathcal{L}(\delta(t)) = 1$  et le glissement  $T \rightarrow e^{-pT}$ .

Il reste à choisir  $h(t)$  de sorte à ce que la fonction interpolée passe par les bon points imposés par le numérique. C'est le cas si

$$\begin{cases} h(0) &= 1 \\ h(nT) &= 0 \end{cases} \quad \text{pour } n \neq 0 \quad (4.22)$$

Toutes fonctions qui satisfont ça sont des extrapolations. On retrouve bien  $y'_c(nT) = y(n)$  : on a une fonction continue  $y'_c(t)$  qui prend des valeurs imposées pour  $t = nT$ .

EXEMPLE : Le filtre passe bas de réponse impulsionnelle  $h(t) = \text{sinc}(\pi t/T)$  vérifie ces conditions. Pour l'**extrapolateur d'ordre zéro**, on considère la *fonction escalier*

$$h_0(t) = u(t) - u(t - T) \quad (4.23)$$

Il s'agit bien d'une fonction continue passant par tous les points. Par calcul de la transformée de Laplace

$$h_0(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{p} - \frac{e^{-pt}}{p} \implies H_0(\Omega) = \frac{2 \sin(\Omega T/2)}{\Omega} e^{-j\Omega T/2} \approx T e^{-j\Omega T/2} \quad \text{pour } \Omega \ll \frac{2}{T} \quad (4.24)$$

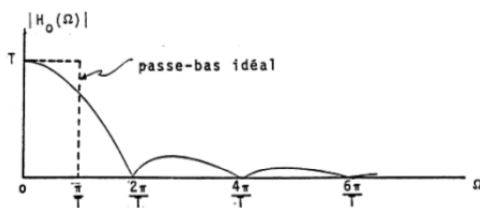


FIGURE 4.7

Cette fonction est assez plate au début puis adopte la forme typique de sinc. L'extrapolateur d'ordre zéro va "gommer" les spectres à gauche et à droite de manière partielle : le gain n'est pas constant dans la bande passante qui va forcément causer de légères distorsions dans la bande utile  $-\frac{\pi}{T} < \Omega < \frac{\pi}{T}$ . De plus, les spectres décalés ne sont pas totalement retirés. Deux solutions

1. Filtrer pour continuer à gommer.
2. Compenser par un signal de gain opposé.

Notons que plutôt que d'interpoler en escalier, on peut utiliser un ordre plus élevée. Pour l'ordre un, on reliera les points par des droites. On utilise généralement une fonction triangle pour  $h_1(t)$ .

### Chaîne pour le traitement numérique des signaux analogiques

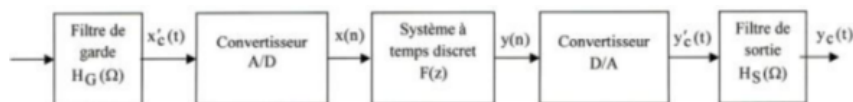


FIGURE 4.8

Un spectre strictement limité n'existe pas : on utilise un filtre anti-repliement pour que l'information dans la bande utile  $\left[-\frac{\pi}{T}; \frac{\pi}{T}\right]$  ne soit pas altérée, généralement avec un filtre passe bas de  $f_c = \pi/T$ .

La conversion en un signal à TD est réalisée par le convertisseur analogique. Ce signal discret,  $x(n)$  est ensuite traité par le système à TD de réponse en fréquence  $F$

$$Y(e^{j\omega}) = F(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) \quad (4.25)$$

Un signal en escalier  $y'_c(t)$  est reconstitué à partir des échantillons de sortie  $y(n)$  avec un convertisseur numérique-analogique

$$Y'_C(\Omega) = Y^*(\Omega)H_0(\Omega) = Y(e^{j\Omega T})H_0(\Omega) \quad (4.26)$$

où  $H_0(\Omega)$  est la réponse en fréquence de l'extrapolateur d'ordre zéro. Finalement, un filtre de sortie  $H_S(\Omega)$  lisse le signal. Cette démarche (appliquée au slide T41) est une question d'examen. La fin du chapitre est une série d'exemples.



FIGURE 4.9 – J'allais pas laisser une page blanche...

## Chapitre 5

# Transformation de Fourier discrète

Une telle TF va nous permettre d'estimer une TF continue en différents points. C'est par exemple ce que fait un ordinateur pour afficher les pixels.

### 5.1 Définition

Considérons un signal périodique  $x(n)$  de période  $N$

$$x(n) = x(n + lN) \quad l = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (5.1)$$

Celui-ci possède une TF discrète

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j \frac{2\pi}{N} kn} \rightarrow \text{TF discrète inverse} \quad (5.2)$$

La relation inverse permet de calculer les valeurs  $X(k)$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} nk} \rightarrow \text{TF discrète} \quad (5.3)$$

Ce  $X(k)$  est aussi périodique, de période  $N$

$$\begin{aligned} X(N) &= X(0) = X(lN) \\ X(N+1) &= X(1) = X(lN+1) \\ X(k) &= X(k+lN) \end{aligned} \quad (5.4)$$

L'intérêt de la TF discrète est l'utilisation d'algorithmes comme FFT. Notons que  $x(n)$ ,  $X(k)$  et  $e^{j \frac{2\pi}{N} nk}$  étant périodiques, on peut remplacer les sommes de 0 à  $N-1$  par des sommes de  $n_l$  à  $n_l + N-1$ .

### 5.2 Propriétés de la DFT

Je ne reprends ici que les plus intéressantes ou celles qui peuvent être commentées. Cependant attention, ce sont souvent des questions d'examen.

#### 5.2.1 Linéarité et glissement

Voir slide T3. Pour le glissement, on ne doit pas prendre de 0 à  $N-1$  mais simplement "une suite".

### 5.2.2 Convolution périodique

Voir slide T4

### 5.2.3 Propriétés de symétrie

Pour les deux premières propriétés, voir slide T5. Pour la troisième ;

*On peut obtenir les DFT de deux séquences réelles en calculant la DFT d'une séquence complexe.* Si  $x_1(n)$  et  $x_2(n)$  sont réelles, on peut obtenir

$$\begin{cases} x_1(n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_1(k) \\ x_2(n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_2(k) \end{cases} \Rightarrow x_1(n) + jx_2(n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(k) \quad (5.5)$$

Nous avons donc fabriqué un signal avec une partie réelle et une partie imaginaire. Une seule transformée de Fourier permet d'obtenir les deux signaux

$$X_1(k) = \frac{1}{2}[X(k) + X^*(N - k)], \quad X_2(k) = \frac{1}{2j}[X(k) - X^*(N - k)] \quad (5.6)$$

*Démonstration.*

Par linéarité

$$x_1(n) + jx_2(n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_1(k) + jX_2(k) = X(k) \quad (5.7)$$

Par la première propriété de symétrie ( $x(n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(k)$  et  $x^*(n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X^*(-k)$ )

$$x^*(n) = x_1(n) - jx_2(n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_1(k) - jX_2(k) = X^*(-k) = X^*(N - k) \quad (5.8)$$

□

### 5.2.4 Formule de Pascal

Ceci est typiquement une question d'examen. La formule de Pascal nous dit que l'énergie dans le domaine temporel est la même que dans le domaine fréquentiel.

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2 \quad (5.9)$$

*Démonstration.*

L'astuce consiste à exprimer  $x^*(n)$  à l'aide de la TF inverse

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)x^*(n) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \left[ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \right]^* \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X^*(k)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X^*(k) \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X^*(k)X(k) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2 \end{aligned} \quad (5.10)$$

□

EXEMPLE : Nous avons un signal numérique au spectre continue. Le but est d'exprimer ce spectre en un nombre de points définis. Calculons donc la DFT du signal périodique  $f(n)$ , de période  $N$ , dont une période est définie par

$$f(n) = e^{j\omega_0 n} \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (5.11)$$

Ce choix nous permet de tester un large range de fréquence en faisant varier  $\omega_0$ . On obtient alors

$$F(k) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\omega_0 n} e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \frac{1 - \alpha^N}{1 - \alpha} \quad \alpha \neq 1 \quad (5.12)$$

Imposons deux valeurs pour  $\omega_0$ .

1.

$$\omega_0 = q \frac{2\pi}{N} \quad \Leftrightarrow \quad q = \frac{\omega_0 N}{2\pi}$$

où  $q$  est entier. Notre signal est juste périodique de période  $N$ . On obtient alors

$$\alpha = e^{j\frac{2\pi}{N}(q-k)} \quad \text{et} \quad \alpha^N = 1 \quad \forall k$$

On obtient par contre  $\alpha = 1$  si  $q = k$ . Dès lors

$$\begin{aligned} F(k) &= N & \text{si } k = q \\ &= 0 & \text{si } k \neq q \end{aligned} \quad (5.13)$$

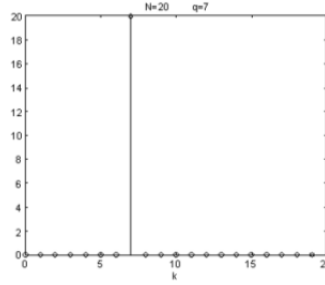


FIGURE 5.1 – Le spectre ne fait ressortir qu'une seule fréquence : le signal n'en contient donc qu'une seule.

On s'en doute, obtenir une seule fréquence est un cas particulier. Dans la majorité des cas ce n'est pas le cas. C'est ce que nous allons maintenant voir



EXEMPLE :

2

$$\omega_0 = x \frac{2\pi}{N} \rightarrow \alpha = e^{j \frac{2\pi}{N} (x-k)}$$

où  $x$  n'est **pas** entier. En appliquant la suite géométrique

$$F(k) = \frac{1 - \alpha^N}{1 - \alpha} = \dots = e^{j \frac{\pi}{N} (N-1)(x-k)} \frac{\sin(\pi(x-k))}{\sin(\pi(x-k)/N)} \quad (5.14)$$

Ici, tous les échantillons de  $F(k) \neq 0$ .

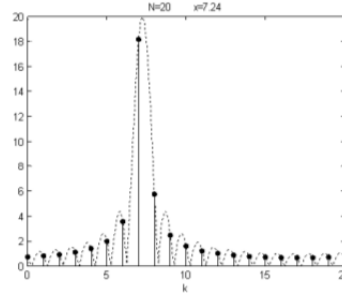
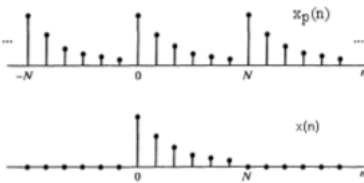


FIGURE 5.2 – Le spectre ressemble à un sinus cardinal mais échantillonné à certains points. On voit quand même une certaine périodicité se dégager mais avec une assez grande incertitude.

## 5.3 Applications de la DFT

### 5.3.1 Évaluation de la TF d'une séquence finie



Soit une séquence **finie** d'une seule période du signal périodique  $x_p(n)$  et nul ailleurs :

$$\begin{aligned} x(n) &= x_p(n) & 0 \leq n \leq N-1 \\ &= 0 & \text{sinon} \end{aligned} \quad (5.15)$$

La TF ( $\neq$  DFT) de la séquence finie  $x(n)$  donne un spectre continu

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n)e^{-j\omega n} \quad (5.16)$$

Considérons maintenant la DFT de  $x_p(n)$ ,  $X_P(k)$  :

$$X_P(k) = X(e^{j\omega})|_{\omega=k \frac{2\pi}{N}} \quad (5.17)$$

On retombe sur la même chose, c'est la définition de la DFT. La DFT d'une séquence périodique fournit donc une évaluation de la transformée de Fourier de la séquence finie associée, en  $N$  points régulièrement répartis sur l'axe des fréquences, entre  $\omega = 0$  et  $\omega = 2\pi$ . En conclusion, cela revient à évaluer le spectre continu à intervalle régulier grâce à la DFT.

Pour une séquence finie de longueur  $N$ , DFT permet d'évaluer la TF en un nombre de points **plus grand que  $N$**  : on va échantillonner en fréquence, mais prendre un échantillon plus petit. Soit une tel séquence finie

$$x(n) \quad \text{for} \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (5.18)$$

Sa TF est

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\omega n} \quad (5.19)$$

La DFT permet de calculer  $X(e^{j\omega})$  de façon efficace : on calcule en certains points et on particularise à  $\omega = \frac{2\pi}{L}l$ . Exprimons  $X(e^{j\omega})$  en  $L$  point uniformément répartis entre 0 et  $2\pi$ .

$$X\left(e^{j\frac{2\pi}{L}l}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{L}ln} \quad l = 0, \dots, L-1 \quad (5.20)$$

Définissons  $\tilde{x}(n)$  qui prolonge  $x(n)$  avec des zéros

$$\begin{aligned} \tilde{x}(n) &= x(n) & 0 \leq n \leq N-1 \\ &= 0 & N \leq n \leq L-1 \end{aligned} \quad (5.21)$$

Calculons la DFT de ce signal (ou plus exactement la DFT du signal périodique, de période  $L$ , dont  $x(n)$  représente une période). Celle-ci est facile à calculer, le signal étant nul entre  $N-1$  et  $L-1$

$$\begin{aligned} \tilde{X}_p(k) &= \sum_{n=0}^{L-1} \tilde{x}_p(n)e^{-j\frac{2\pi}{L}nk} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{L}nk} \\ &= X\left(e^{j\frac{2\pi}{L}k}\right) \end{aligned} \quad (5.22)$$

La DFT est de nouveau l'estimation de  $x(n)$  en  $L$  points. Ceci constitue une technique simple pour calculer la transformée de Fourier d'une séquence finie en un grand nombre de points (choisis).

### 5.3.2 Inversion d'une transformée de Fourier

#### Séquence finie

Soit les échantillon  $x(n)$  d'une séquence finie dont les  $N$  valeurs sont prises à intervalles réguliers entre  $\omega = 0$  et  $\omega = 2\pi$ . On a vu que si on donne  $N$  valeurs de  $X_p(k)$ , on peut trouver  $x(n)$  tel que sa TF prenne les valeurs de  $X_p(k)$  imposées aux  $N$  points<sup>1</sup> (problème d'interpolation). La TF est (ici la somme est bien finie, on prend  $N$  points de la séquence finie et continue)

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\omega n} \quad (5.23)$$

Les  $N$  valeurs sur le cercle unité sont

$$X(e^{j\frac{2\pi}{N}k}) = X_p(k) \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (5.24)$$

On exprime la séquence  $x(n)$  par

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_p(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \quad n = 0, \dots, N-1 \quad (5.25)$$

La TF d'une séquence finie est entièrement déterminée par ses  $N$  valeurs régulièrement réparties sur l'axe des fréquences.

---

1. Uniformément réparti sur l'axe des fréquences.

## Séquence infinie

On s'intéresse maintenant à la transformation de Fourier continue évaluée en  $N$  points : nous allons voir à quoi cela correspond en temporel. On obtiendra un "copié-collé" fini du signal infini. Considérons une séquence  $h(n)$  pouvant être infinie ainsi que sa TF

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n} \quad (5.26)$$

L'information est exprimée en une infinité de points : n'en prendre que  $N$  serait louper quelque chose. Néanmoins, évaluons  $H(e^{j\omega})$  en  $N$  (ici arbitraires, le signal est infini), mais uniformément répartis sur l'axe des fréquences

$$H_p(k) = H(e^{j\omega})|_{\omega=k\frac{2\pi}{N}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (5.27)$$

La dernier membre est la série de Fourier d'un signal  $h_p(n)$  périodique construit à partir d'un signal non périodique  $h(n)$  : c'est ce que nous avons vu au chapitre 3! On va alors procéder à un copié-collé infini pour trouver un signal périodique d'ordre  $n$

$$h_p(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H_p(k)e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} h(n+rN) \quad (5.28)$$

D'autre part

$$x(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_1(n+rN) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_d(k) = X_1(e^{j\frac{2\pi}{N}k}) \quad (5.29)$$

On ne retombe pas sur le signal initial mais sur un autre : le copié-collé du signal initial de façon infinie. Si par hasard les coefficients valent zéro en dehors de l'intervalle ci-dessous, on n'a plus d'overlap.

$$h_p(n) = h(n) \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (5.30)$$

On retrouve le cas précédent. Si ce n'est pas le cas, on aura recouvrement entre les différents  $h(n)$  décalés : on peut le réduire en augmentant  $N$ .

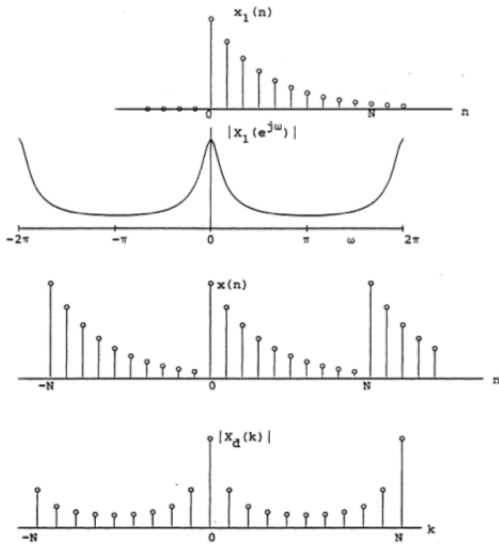


FIGURE 5.4 – Le premier graphique est notre signal qui tend vers zéro (pour des raison de convergence) sans jamais l'atteindre. Le second est le spectre, comme d'habitude. Le troisième est construit comme une répétition de  $x_1(n)$  que l'on a copié-collé. On remarque que  $x(n-1)$  est un peu plus grand ici : ceci vient de toutes les petites contributions tendant vers zéro que l'on a sommé. Le dernier est un spectre à raie où l'on a pris  $k$  échantillons uniformément réparti sur l'axe des fréquences.

## 5.4 Analyse de Fourier par DFT

On cherche à réaliser le système suivant en labo.

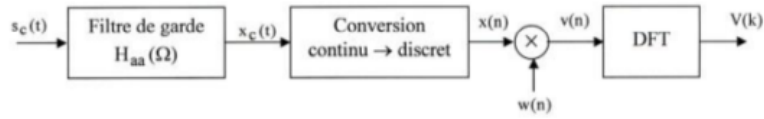


FIGURE 5.5 –

Le filtre de garde est là pour éviter le repliement spectral. Ensuite, il faut convertir le signal continu en signal discret ( $x_c(nT) = x(n)$ ). Pour obtenir le spectre, on multiplie ce signal continu par une fonction, par exemple fenêtre,  $w(n)$ . Le spectre continu vaut

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} X_c\left(\frac{\omega}{T} + r \frac{2\pi}{T}\right) \quad (5.31)$$

On espère que le filtre de garde va couper de  $-\pi$  à  $\pi$  pour n'obtenir que le spectre qui nous intéresse de façon à ce qu'il ne soit pas gâché par les spectres décalés

$$X(e^{j\omega}) \approx \frac{1}{T} X_c\left(\frac{\omega}{T}\right) \quad -\pi < \omega < \pi \quad (5.32)$$

On cherche à évaluer  $X_c(\Omega)$  avec la DFT (évaluation en  $N$  points). Ce n'est pas exactement le signal  $S_C(\Omega)$  à cause du filtre de garde (car coupe les fréquences, mais on considère que ces fréquences coupées sont sans intérêts).

Évaluer  $X_c(\Omega)$  revient à évaluer  $X(e^{j\omega})$  qui est la TF d'un signal à TD de durée non limitée

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} \quad (5.33)$$

Pour la DFT, il faut que la séquence temporelle soit limitée : on prend  $N$  échantillon où  $N$  peut être grand, mais pas infini. Le signal  $w(n)$  que l'on multiplie à  $x(n)$  permet d'obtenir une séquence de durée finie

$$\begin{aligned} v(n) &= w(n) \cdot x(n) \\ w(n) &= 0 \quad n < 0 \text{ et } n \geq N \end{aligned} \quad (5.34)$$

Ceci a le même effet qu'une fonction fenêtre qui sert bien à "couper dans le temps".

Le signal (a) est le signal de départ. Comme tout signal, son spectre s'étend jusqu'à l'infini. Problème : si on ne peut pas négliger le repliement spectral, il est nécessaire d'utiliser un filtre de garde (b) (qui a ici une allure réelle). L'application de ce filtre de garde donne (c). On voit que les hautes fréquences ont été atténuées. Il faut ensuite passer dans le domaine numérique (d) : le spectre a été copié-collé indéfiniment. Heureusement, dans le continu, le spectre s'arrêtait à  $\pi/T$ , il s'arrête donc à  $\pi$  dans le numérique.

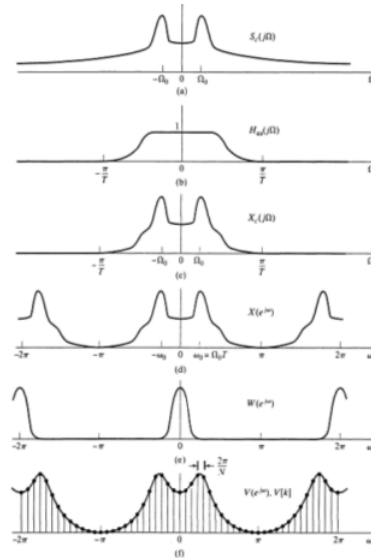


FIGURE 5.6 –

On multiplie (!)<sup>2</sup> notre signal  $x(n)$  par un autre signal qui lui est rectangulaire (fenêtre). Le (e) est le spectre de la fonction fenêtre. Nous allons gentilement "lisser" le spectre initial par la fonction fenêtre, on peut en effet voir que celui-ci (f) est plus lisse. Pourquoi une fonction fenêtre ? On voit un désavantage car on n'a plus le spectre de départ, on veut donc minimiser l'effet. En pratique on est obligé de réaliser numériquement, estimer numériquement la TF en un nombre de points fini. Comme on ne peut pas mettre de signal de durée infinie, il était nécessaire de "couper le temps" avec une telle fonction.

La fonction fenêtre la plus comme toi, simple, est la rectangulaire

$$\begin{aligned} w(n) &= 1 & n = 0, \dots, N-1 \\ &= 0 & \text{sinon} \end{aligned} \quad (5.35)$$

La DFT de longueur  $N$  de  $v(n)$

$$V(k) = \sum_{n=0}^{N-1} v(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (5.36)$$

Or,  $v(n)$  est de longueur finie ( $N$ )

$$V(k) = V(e^{j\omega})|_{\omega=k\frac{2\pi}{N}} \quad (5.37)$$

Même chanson : on évalue le spectre en  $N$  points et on a toute l'information nécessaire. Dis plus formellement : la DFT  $V(k)$  correspond donc à l'échantillonnage de  $V(e^{j\omega})$  en  $N$  points uniformément répartis. Chaque échantillon correspond à une fréquence réduite et est donc à temps continu<sup>3</sup>.

Notre but d'évaluer  $X$  nous permet d'évaluer  $V$  (après fenêtre). Comme  $v(n) = x(n).w(n)$ , il suffit de faire la convolution périodique des spectres

$$V(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}).W(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta \quad (5.38)$$

$V$  sera alors une version "lissée" de  $X$ . Nous allons examiner deux effets différents dus à l'utilisation de la DFT pour évaluer  $X_c$

1. L'effet de la fenêtre temporelle (passage de  $X$  à  $V$ )
2. L'effet de l'échantillonnage fréquentiel (Passage de  $V(e^{j\omega})$  à  $V(k)$ ).

#### 5.4.1 Effet de la fenêtre

Supposons que  $s_c(t)$  soit la somme de deux cosinus

$$s_c(t) = A_0 \cos(\Omega_0 t + \theta_0) + A_1 \cos(\Omega_1 t + \theta_1) \quad (5.39)$$

On suppose que l'on se trouve dans la bande passante du filtre de garde

$$x(n) = A_0 \cos(\Omega_0 n + \theta_0) + A_1 \cos(\Omega_1 n + \theta_1) \quad (5.40)$$

où  $\omega_0 = \Omega_0 T$  et  $\omega_1 = \Omega_1 T$ . On **multiplie** par la fonction fenêtre

$$v(n) = A_0 w(n) \cos(\Omega_0 n + \theta_0) + A_1 w(n) \cos(\Omega_1 n + \theta_1) \quad (5.41)$$

---

2. Si on avait fait la convolution ça aurait été le produit des deux. Ici on fait un PRODUIT au niveau temporel donc en spectre on a une convolution.

3. Pq ?

En écrivant les cosinus avec des exponentielles complexes et en appliquant le décalage dans le temps, on trouve

$$V(e^{j\omega}) = \frac{A_0}{2} e^{j\theta_0} W(e^{j(\omega-\omega_0)}) + \frac{A_0}{2} e^{-j\theta_0} W(e^{j(\omega-\omega_0)}) + \frac{A_0}{2} e^{j\theta_1} W(e^{j(\omega-\omega_1)}) + \frac{A_0}{2} e^{-j\theta_1} W(e^{j(\omega-\omega_1)}) \quad (5.42)$$

On voit que ces quatre composantes **dépendent** de la fonction fenêtre.

EXEMPLE : Les slides T7 à T10 reprennent un bel exemple, que je me contente de commenter ici.

**T7** Il s'agit de la fonction sinc. Aux extrémités, le bruit est  $\pm$  constant.

**T8** On observe quatre pics de résonance sur le premier graphique, bien distincts. Mais, la fenêtre ayant une influence sur le spectre, si celle-ci est mal choisie les pics vont se rapprocher et leurs amplitudes vont s'influencer l'une l'autre : c'est le phénomène de dispersion.

**T9** Les deux pics sont devenu trop proche, il n'y a plus qu'un seul maximum : la résolution est devenue trop faible, il n'y a plus qu'une seule fréquence distinguable alors qu'il y en avait deux au départ. Mauvaise fenêtre donc !

Le dernier slide (T10) ne demande pas de commentaires particuliers.

Les slides T11 à T16 illustrent les différentes fonctions fenêtres. Une lecture attentive suffira.

### 5.4.2 Effet de l'échantillonnage fréquentiel

On sait que la DFT échantillonne  $V(e^{j\omega})$  (continu) aux fréquences  $\omega_k = k \frac{2\pi}{N}$  où  $k = 0, \dots, N-1$ . Le souci est que parfois  $\omega_k$  ne tombe pas exactement sur les extréma de  $V(e^{j\omega})$  et estimer les amplitudes du signal d'entrée à partir des amplitudes de la DFT est parfois compliqué.

Il n'y a que pour un cas **particulier** où les fréquences d'entrées sont un multiple de  $2\pi/N$  que la DFT sait identifier les fréquences exactement.

#### Illustration du cas particulier

Considérons la même somme de cosinus que précédemment avec  $A_0 = 1, A_1 = 0.75, \theta_0 = \theta_1 = 0$ . Prenons  $N = 64$  comme longueur de la fenêtre rectangulaire

$$v(n) = \begin{cases} \cos\left(\frac{2\pi}{16}n\right) + 0.75 \cos\left(\frac{2\pi}{8}n\right) & 0 \leq n \leq 63 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.43)$$

Comme  $N = 64$ , on échantillonne  $|V(e^{j\omega})|$  aux fréquences multiples de  $2\pi/64$ . La DFT donne les extrémas pour  $k = 1, 8, 56$  et  $60$  (les autres points de la DFT sont nuls car ils échantillonnent juste en un point nul, "quel bol!"). Ceci résulte du choix particulier des fréquences d'entrées suivantes

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{16}, \quad \omega_1 = \frac{2\pi}{8} \quad (5.44)$$

qui sont multiple de  $2\pi/N$  ce qui tombe pile-poil bien pour l'échantillonnage.

On peut également après avoir utilisé une fenêtre temporelle de longueur  $N$ , prolonger  $v(n)$  par des zéros et calculer une DFT de longueur  $L > N$ .

$$V(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v(n) e^{-j\omega n} = \sum_{N-1} v(n) e^{-j\omega n} \quad (5.45)$$

La DFT de longueur  $L$  :

$$V(k) = \sum_{n=0}^{L-1} v(n) e^{-j \frac{2\pi}{L} nk} = \sum_{n=0}^{N-1} v(n) e^{-j \frac{2\pi}{L} nk} = V(e^{j\omega})|_{\omega=k \frac{2\pi}{L}} \quad k = 0, \dots, L-1 \quad (5.46)$$

Ceci nous donne une meilleure idée de ce qu'est la fonction  $V(e^{j\omega})$ . Cependant, on voit dans le spectre qu'il y a quelque chose en plus, on "ressent" l'effet de la fenêtre.

Les slides T21 à T24 refont exactement la même chose, mais en utilisant une fenêtre de Kaiser. Celle-ci permet de distinguer  $\pm$  les deux fréquences (T21) mais leurs amplitudes sont difficiles à distinguer. Si on diminue la taille de la fenêtre d'un facteur 2,  $N = 32$  (T22) on n'est plus capable de distinguer les deux cosinus. On pourrait se dire "Gardons  $N = 32$  et évaluons en 1024 points : cela augmentera la résolution mais on serait toujours incapable de distinguer les différentes fréquences. Si on prolonge par des zéros (T23) pour calculer une DFT plus longue, l'achantillonnage sera plus fin mais la résolution reste inchangée. On peut néanmoins presque retrouver le spectre continu de départ mais ici (T24) la fenêtre est trop courte : ce n'est pas une bonne estimation du signal. "On ne peut compenser l'un par l'autre".

### Modification de la longueur de la fente d'observation

Considérons une DFT de longueur  $L = 1024$  calculée en prolongeant par des zéros le signal  $v(n)$ . Utilisons une fenêtre de Kaiser et faisons varier la longueur  $N = 32, 42, 54$  et  $64$ . Avec  $N = 32$  on ne peut pas identifier les deux cosinus mais en augmentant  $N$ , soit la longueur de la fenêtre d'observation et donc le nombre de points, on peut de mieux en mieux voir les deux fréquences et leurs amplitudes. Une DFT plus longue est utile pour identifier de façon précise les fréquences et amplitudes d'un signal.

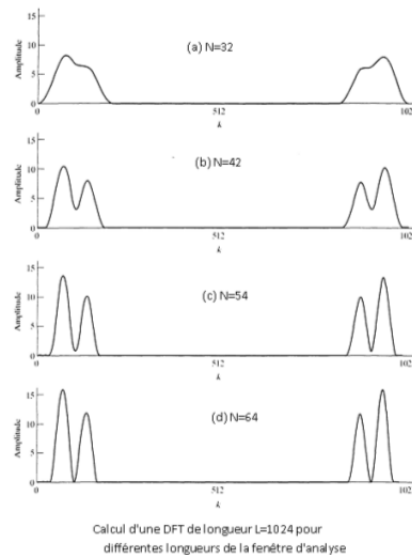


FIGURE 5.7 –