



ECOLE  
POLYTECHNIQUE  
DE BRUXELLES

UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES

SYNTHÈSE

---

# Électricité

## ELEC-H-200

---

*Auteur :*  
Nicolas ENGLEBERT

26 janvier 2015

Première partie

**Théorie des circuits**

# Chapitre 1

## Circuits à éléments concentrés

### 1.1 Circuit, éléments et nœuds

Un *circuit* électrique est ensemble (fini) d'*éléments* inter-connectés entre eux par des *connexions* : mesure  $I$  et  $V$ .

Le *schéma* est la représentation graphique du circuit, suivant certaines conventions.

Avant tout, voici une propriété fondamentale :

Les tensions et courants en un endroit du circuit dépendent de **tous** les éléments du circuits (et non uniquement de ceux présents à cet endroit-là)

#### 1.1.1 Les éléments : dipôles et quadripôles

Tout élément possède un certain nombre de *bornes* (caractérisée par un potentiel électrique et une valeur de courant<sup>1</sup>) qui servent à établir des connexions, un dipôle est simplement un élément en possédant deux.

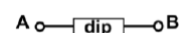


FIGURE 1.1 – Dipôle

#### 1.1.2 Nœuds, bornes, connexion

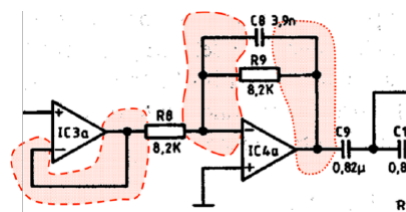


FIGURE 1.2 – Nœud

On connecte les éléments par des bornes : lorsqu'on connecte plusieurs éléments ensemble on forme un nœud, qui est par définition équipotentiel.

**Attention!** Le nœuds couvre l'ensemble de la connexion et pas seulement le point de contact des fils.

Tout dipole ou assemblage de dipole en série constitue une **branche** est l'ensemble de ces branches constituant un parcours fermé constitue une **maille**.

### 1.2 Le modèle de Kirchhoff

Un circuit à éléments concentrés est un circuit dont les dimensions sont suffisamment petites par rapport à la longueur d'onde de variation des champs pour que l'on puisse y considérer que les phénomènes électromagnétiques s'y propage instantanément (pas besoin de la théorie des

1. Lorsque  $I$  est identique aux deux bornes, on peut les associer et parler de **port** ou **accès**. Le dipôle est par définition un accès.

champs). On peut dès lors utiliser le **modèle de Kirchhoff** et ne tenir compte que de la topologie du circuit.

### 1.2.1 Critère de validité du modèle de Kirchhoff

Le critère de validité du modèle est le suivant :

La plus grande dimension du circuit est beaucoup plus petite que la longueur d'onde du signal de plus haute fréquence.

Cela revient à dire que  $l_{max} \ll \lambda_{min}$  où  $\lambda = \frac{c}{f}$ .<sup>2</sup>

### 1.2.2 Les circuits comme cas particuliers de système

Non vu au cours, voir page 11.

### 1.2.3 Lois de Kirchhoff

Loi des noeuds : la somme (algébrique) des courants sortant d'un noeud est nulle

Loi des mailles : la somme (algébrique) des tensions le long d'une maille est nulle.

## 1.3 Sens de lecture, charge et source

### Sens de lecture

Celui-ci correspond au sens de propagation de l'information et en toute généralité, on le "lit" de gauche à droite (entrée à gauche, sortie à droite).

### Charge

La charge<sup>3</sup> (d'un montage) est le composant connecté à l'aval (la sortie) de ce montage. Par exemple, tout appareil connecté à une prise est une charge pour cette prise.

### Montage à vide >< Montage en charge

Le circuit fonctionne à vide lorsqu'aucune charge ne lui est connecté, alors que inversement, il sera dit chargé.

**Attention !** Le montage à vide ne se comporte pas de la même façon que le montage en charge. En effet :

Connecter un composant additionnel à un circuit revient à modifier ce circuit, et donc potentiellement à redistribuer tous les courants et les tensions dans celui-ci.

Plus simplement :

La tension de sortie d'un montage peut varier en fonction de la charge qui lui est connectée.

### La source

La source (d'un montage) désigne le composant ou l'équipement connecté à l'amont (à l'entrée) de ce montage. Par exemple, un micro envoyant une information à une table est une source.

---

2. Exemples page 11

3. Ne pas confondre avec la charge électrique en coulomb !

## 1.4 Courant

Le **courant** est un déplacement d'ensemble de charges électriques dans un conducteur. Notons qu'un courant est généralement constitué d'électrons mais que ce-dernier peut également être constitué d'électrolytes ou de semi-conducteurs.

### Intensité = valeur du courant électrique

L'**intensité** est le débit de charge électrique :

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} \quad (1.1)$$

### Mesure du courant électrique

Il faut insérer un ampèremètre **en série** avec le fil dans lequel on désire mesurer le courant.

### Représentation du courant : sens conventionnel

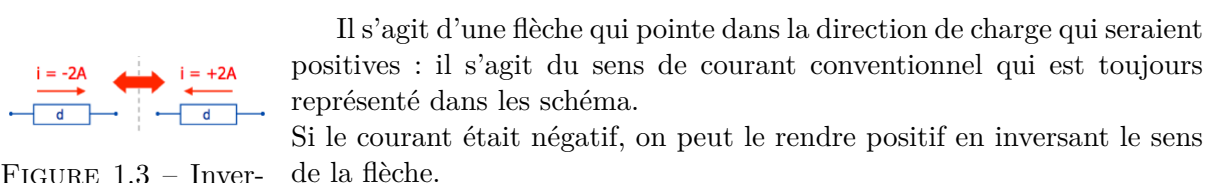


FIGURE 1.3 – Inversion du sens

### Circulation du courant en boucle fermée

"Un chemin de retour" doit toujours exister. Branche interrompue : courant nul.

## 1.5 Tension(s)

### 1.5.1 La tension : un terme ambigu

C'est un terme ambigu car il peut être trois choses distinctes : la force électromotrice, le potentiel d'un nœud ou la d.d.p.

### 1.5.2 DDP et potentiel

#### Différence de potentiel

C'est ce qui se mesure en pratique (à l'aide d'un multimètre, sur un dipôle), il s'agit de la différence de potentiel entre deux bornes.

#### Potentiel électrique (première approche)

C'est une notion purement théorique qui se résume à dire que le potentiel électrique en un point est l'énergie à dépenser pour amener une charge unitaire depuis un point où le potentiel est nul (à l'infini).

### 1.5.3 Convention et signes

#### Convention concernant le sens de la différence de potentiel

La ddp étant une soustraction, il faut définir le sens de celle-ci. Lorsque la flèche va de  $B$  vers  $A$  (convention) :

$$V = V_A - V_B \quad (1.2)$$

Ceci découle de cette opération "soustraction", la pointe de la flèche pointera vers le potentiel le plus haut.

### 1.5.4 Interprétation des notions de potentiel et de masse

#### Potentiel et masse = notion théorique

Plus utile que le potentiel, on utilise la masse :

La masse est le noeud dont le potentiel, par convention, est nul :  $V_{masse} = 0V$

C'est un choix arbitraire, une convention qui servira de référence. Si on connaît toutes les ddp, il faut un "repère" sans quoi on ne pourra jamais connaître les potentiels des noeuds (qui est "défini à une constante près").

#### Présence/absence de masse

On n'a pas besoin de masse pour résoudre un circuit sur papier.

Si l'on ne s'intéresse qu'aux ddps, il n'est pas nécessaire de définir une masse

### 1.5.5 Potentiel représenté comme une ddp

La ddp entre un noeud  $A$  quelconque et la masse est numériquement égale au potentiel de ce noeud  $A$

### 1.5.6 Tension différentielle

Souvent, en présence de masse, on calcule la ddp par rapport avec celle-ci. Si la masse n'est pas présente on parlera de **tension différentielle** pour bien différencier les deux.

### 1.5.7 Terre = protection

Il ne faut pas confondre les deux, la terre est une notion pratique relative à la sécurité des personnes et des équipements.



## 1.6 Puissance instantanée, conventions et passivité

FIGURE 1.4 – Symboles

### 1.6.1 Dipôles actifs et passif - définition intuitive.

Passif : Ne peut qu'absorber l'énergie (résistance, condensateur, ...)

Actif : Injecte de l'énergie dans le circuit (source de tension, pile, ...)

### 1.6.2 Puissance instantanée sur un dipôle

La puissance électrique est l'énergie fournie ou reçue par unité de temps par un dipôle

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) \quad (1.3)$$

### 1.6.3 Conventions récepteurs et générateur

Dans tout dipôle passif, les flèches courant et tension doivent être de sens opposés : **convention récepteur**.

Dans cette convention, la formule  $p(t)$  donne la puissance instantanée absorbée par ce dipôle.

Dans la source par contre, ces deux flèches doivent être dans le même sens. La formule de puissance donnera dans ce cas la puissance instantanée fournie grâce à la **convention générateur**. Le rôle de la source est de "relever" le potentiel.

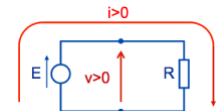


FIGURE 1.5 –  
Conv. générateur

### 1.6.4 Critère de passivité

$$w(t) = \int_0^t p(t) dt \geq 0 \quad (1.4)$$

Un dipôle passif ne peut pas délivrer ce qu'il n'a pas reçu, cela ne peut donc pas être négatif. Si c'est le cas, le dispositif sera *actif*.

## Chapitre 2

# Dipôles idéaux

### 2.1 Comportement externe : loi et caractéristique d'un dipôle

#### 2.1.1 Etat électrique d'un dipôle

Il s'agit du couple  $(I, V)$  de valeurs électriques mesurables sur un dipôle à l'instant  $t$ .

#### 2.1.2 Comportement électrique du dipôle

Les valeurs que prennent  $I$  et  $V$ .

#### 2.1.3 Loi du dipôle

C'est la formule exprimant mathématiquement le comportement.

Source de tension idéale :  $V = E$  : impose une ddp et ce peu importe le courant qui la traverse (ne modifie par le courant).

Source de courant idéale :  $I = J$  : impose un courant et ce peu importe la tension (ne modifie pas la tension).

#### 2.1.4 Caractéristique

La **caractéristique** est la représentation graphique du *comportement électrique* du dipôle.<sup>1</sup>

### 2.3 Charges idéales : trois effets physiques

#### 2.3.2 Inductance

La loi de base est que  $\phi \propto I$  impliquant :

$$\phi(t) = LI \tag{2.1}$$

Comme  $v(t) = \frac{d\phi}{dt}$  on peut dire que  $v(t) = L \frac{di}{dt}$  et  $e(t) = -\frac{d\phi}{dt}$  qui est une autre manière d'exprimer la loi de Lenz. On utilisera :

- loi de l'inductance : convention récepteur
- loi de Lenz : convention générateur

---

1. La caractéristique n'apporte aucune info supplémentaire par rapport à la loi.



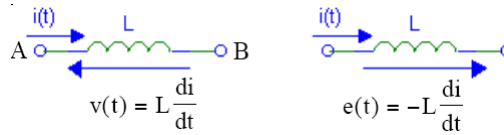


FIGURE 2.1 – Inductance/Lenz

La loi courant-tension décrite ci-dessus implique :

- si la ddp est **constante**, le courant croît **linéairement**
- si le courant est **constant**, la ddp est **nulle**.

### Lois "court terme" et "long terme"

Dans une self, le courant ne peut pas varier instantanément sinon la ddp serait infinie. Il s'agit de la loi à court terme.

Cependant, après un temps infini la ddp doit forcément être nulle sans quoi  $I = -\infty$  ce qui est impossible. Il s'agit de la loi à long terme.

### Interprétation physique

Lorsque l'on essaye de faire varier le courant dans une self, celle-ci développe une fem qui contre cette variation. La self oppose donc une certaine *inertie* à la variation du courant qui la traverse.

Histoire de ne pas l'oublier (et de mettre en avant cet "effet mémoire"), voici la loi courant tension de la self :

$$i(t) = i(0) + \frac{1}{L} \int_0^t v(t) dt \quad (2.2)$$

### 2.3.3 Capacité

La loi de base à retenir est que  $Q \propto V$ .

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} \quad (2.3)$$

où  $v$  est la ddp. On dira que

- la capa se **charge** quand la ddp (ou  $|Q|$ ) **augmente**
- la capa se **décharge** quand la ddp (ou  $|Q|$ ) **diminue**

### Interprétation physique

A cause de la dérivée dans cette expression on remarque, à l'inverse de  $R^2$ , que c'est la *variation de la ddp* qui implique l'existence d'un courant et inversement.

Une capacité n'a pas de caractéristique dans le plan  $(I, V)$  car le temps y intervient. Retenons que

1. si le courant est constant, la ddp croît linéairement
2. si la ddp est constante, le courant est nul.

---

2. Où courant implique tension

## Lois "court terme" et "long terme"

On constate que la  $ddp$  ne varie pas instantanément sinon  $i(t) = \infty$  ce qui est impossible. Après un temps infini, le courant doit forcément être nul sinon la  $ddp$  atteindrait une valeur négative infinie ce qui est également impossible.

## Autre interprétation physique

Pour faire varier la charge, il faut injecter ou retirer des charges à la capacité, ce qui prends un certain temps (pas instantané) : il faut qu'un courant circule : on dit que la capacité s'**oppose/présente une inertie** aux variations de tension

## Charge initiale

La loi de base exprimée en tension et en courant est

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(t) dt \quad (2.4)$$

Ou encore, plus pratiquement (ne pas oublier  $v(0)$  qui traduit un "effet de mémoire" :

$$v(t) = v(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt \quad (2.5)$$

## 2.7 Court-circuit et circuit ouvert (Examen !!)

### 2.7.1 Court-circuit

Il s'agit d'un dipôle imposant une  $ddp$  nulle, quelque soit la valeur du courant qui le traverse :  $V = 0$ .

On réalise un court circuit en mettant deux noeuds au même potentiel. **Attention !**  $Ddp$  nulle n'implique pas que le courant l'est également !

### 2.7.2 Circuit ouvert

Un **circuit ouvert** est par définition un dipôle traversé par un courant nul, quelque soit la  $ddp$  à ses bornes :  $I = 0$ .

**Attention !** Encore une fois, la  $ddp$  aux bornes d'un circuit ouvert est à priori **non** nulle !

## 2.9 Modélisation d'un élément/dispositif réel par schéma équivalent

Chaque composant réel étant complexe et non-idéal, il devra être modélisé par un schéma équivalent, c'est-à-dire un assemblage d'éléments idéaux (qui n'existent donc **pas** en réalité).

# Chapitre 3

## Quadripôles idéaux

### 3.3 Inductance mutuelle et transformateur idéal

#### 3.3.1 Phénomène d'induction mutuelle

Le transformateur exploite le phénomène d'induction mutuelle entre deux enroulements (loi de Lenz).

On parle d'induction mutuelle (et pas self-induction) lorsque l'origine du flux magnétique induisant une f.e.m. dans une spire est un courant dans une autre spire.

$$e_1 = -\frac{d\phi_1}{dt} \quad \phi_1 = M_{12}i_2 \quad V_1 = \pm M \frac{di_2}{dt} \quad (3.1)$$

Le facteur  $M_{12}$  est le coefficient d'inductance mutuelle entre les deux spires.

#### 3.3.2 Quadripôle "transformateur"

Soit deux spire parcourues par un courant : chacune capte son flux "propre" et un flux mutuel :

$$\begin{cases} \Phi_1 = L_1 i_1 + M i_2 \\ \Phi_2 = M i_1 + L_2 i_2 \end{cases} \quad (3.2)$$

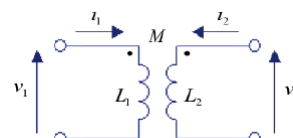


FIGURE 3.1 – Transformateur

En tension, on peut écrire ces lois  $\begin{cases} v_1(t) = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ v_2(t) = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{cases}$

#### Signe du terme d'inductance mutuelle (en conventions récepteur)

Avant tout, deux situations peuvent exister :

1. La fem mutuelle est de même sens que la fem propre : on les additionne
2. La fem mutuelle est de sens opposé : on les soustrait

Par exemple, regardons la FIGURE 3.2 :

- Le courant  $i_1$  entre par la borne A et crée dans le noyau un flux  $\phi_1$  dirigé vers la gauche
- Le courant  $i_2$  entre par la borne D et crée dans le noyau un flux  $\phi_2$  dirigé vers la gauche
- Les deux flux sont dans le même sens et donc s'additionne

Le couplage (positif ou négatif, ici positif) dépend donc de la position géométrique des bobines et des conventions utilisées pour définir les courants.

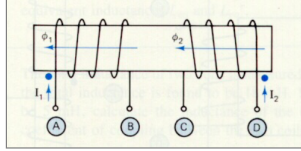


FIGURE 3.2 – Signe du couplage

Pour tenir compte de la disposition spatiale des enroulements on place des "points" qui indiquent que le signe donner au terme d'inductance mutuelle en fonction des sens du courant sur le quadripôle. Ils sont définis :

- Couplage positif (+M) si les positions relatives du point et du sens de courant conventionnel sont identiques pour les deux spires
- Couplage négatif (-M) si les positions relatives du point et du sens du courant conventionnel sont opposées pour les deux spires

Ceci bien sur sous hypothèses que  $M$  est positif et que la convention récepteur est définie sur chaque spire (si convention générateur, inverser les signes des équations de la spire, ou changer le sens du courant concerné)<sup>1</sup>.

### 3.3.3 Résolution de circuits comprenant un transformateur

Un exemple de résolution est donné slide 85-90.

### 3.3.4 Puissance et énergie absorbées par le transformateur

La puissance instantanée absorbée par un quadripôle vaut la somme des puissances instantanées aux deux accès (conv. recept.)

$$p(t) = v_1(t) \cdot i_1(t) + v_2(t) \cdot i_2(t) \quad (3.3)$$

L'énergie absorbée correspond à l'intégrale de cette puissance bornée de  $-\infty$  à  $t$  ce qui donne :

$$\frac{1}{2} L_1 i_1^2(t) + M i_1(t) i_2(t) + \frac{1}{2} L_2 i_2^2(t) \quad (3.4)$$

### 3.3.5 Association d'enroulements couplés

Lorsque deux enroulements sont couplés en série ou en parallèle, ils forment un dipôle.

#### Association en série (couplage positif, même courant)

*Démonstration.* L'inductance du dipôle vaut par définition  $v = L_{eq} \frac{di}{dt}$ . Avant la connexion, les enroulement formaient un quadripôle (transformateur) :

$$\begin{cases} v_1(t) = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ v_2(t) = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{cases} \quad (3.5)$$

La connexion en série permet d'écrire que  $i_1 = i_2$  ainsi que  $v = v_1 + v_2$ . On obtient donc :

$$v = (L_1 + L_2 + 2M) \frac{di}{dt} \quad (3.6)$$

□

---

1. Exemple page 95-97

Par identification, on peut dire que  $L_{eq} = L_1 + L_2 + 2M$ .

Si le couplage est négatif, le signe de la mutuelle  $M$  devient négatif et la relation (démonstration équivalente) devient :

$$v = (L_1 + L_2 - 2M) \frac{di}{dt} \quad (3.7)$$

### Association en parallèle

Lorsque deux enroulement sont connectés en parallèle selon un couplage positif, l'inductance équivalente vaut :

$$L_{eq} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M} \quad (3.8)$$

*Démonstration.* Avant la connexion, les enroulement formaient un quadripôle (transformateur) :

$$\begin{cases} v_1(t) = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ v_2(t) = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{cases} \quad (3.9)$$

La connexion en parallèle permet d'écrire que  $i = i_1 + i_2$  ainsi que  $v = v_1 = v_2$ .

En soustrayant les deux équations du quadripôle :

$$v_1 - v_2 = (L_1 - M) \frac{di_1}{dt} + (M - L_2) \frac{di_2}{dt} = 0 \quad (3.10)$$

Après avoir fait le ménage :

$$\frac{di_2}{dt} = \left( \frac{M - L_1}{M - L_2} \right) \frac{di_1}{dt} \quad (3.11)$$

Grâce à la loi de mailles énoncée ci-dessus,  $(di/dt = di_1/dt + di_2/dt)$  on trouve en remplaçant :

$$\frac{di}{dt} = \left( 1 + \frac{M - L_1}{M - L_2} \right) \frac{di_1}{dt} \quad (3.12)$$

Et finalement :

$$L_{eq} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M} \quad (3.13)$$

□

Pour un couplage négatif (sens de  $L_2$  inversé), il suffit d'inverser le signe de  $M$ . On obtient dès lors :

$$L_{eq} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M} \quad (3.14)$$

### 3.3.6 Transformateur idéalement couplé

Certains transformateurs sont encore plus idéaux que d'autres. La meilleure situation est celle où l'intégralité du flux généré par un enroulement est capté par l'autre. Dans ce cas<sup>2</sup> :

$$M^2 = L_1 L_2 \quad (3.15)$$

---

2. Démonstration dans la théorie des champs

Dans ce cas, le rapport des tension vaut le rapport des spires :

$$\frac{v_2(t)}{v_1(t)} = \frac{N_2}{N_1} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \quad (3.16)$$

On peut écrire les tension (et les courants, en sens inverse) :

$$\begin{cases} v_2(t) = \frac{N_2}{N_1} v_1(t) \\ i_2(t) = -\frac{N_2}{N_1} i_1(t) \end{cases} \quad (3.17)$$

Ce qui peut se simplifier en :

$$\begin{cases} v_1(t) = n v_2(t) \\ i_2(t) = n i_1(t) \end{cases} \quad (3.18)$$

où  $n = \frac{N_1}{N_2}$  est le rapport de transformation.

## 3.4 Caractérisation des biportes

### 3.4.1 Introduction

Pour rappel, un biporte n'est rien d'autre qu'un quadripôle. Les circuits extérieurs qui se connectent au biporte définissent deux relations entre ces quatre grandeurs : les *relations constitutives*<sup>3</sup>.

Plusieurs hypothèses sont faites :

1. Le courant entrant par une borne d'accès est égal à celui qui ressort par l'autre borne du même accès.
2. Pas de sources indépendantes dans le biporte
3. Utilisation des références associées (= convention récepteur)
4. On s'intéresse aux 4 grandeurs  $\underline{V}_1, \underline{V}_2, \underline{I}_1$  et  $\underline{I}_2$ .

Pour résoudre un tel circuit, on utilise la procédure standard en écrivant les équations du circuit.



FIGURE 3.3 – Bi-porte

Revenons aux deux relations constitutives entre les quatre grandeurs aux accès. On a donc six possibilités pour exprimer deux grandeurs en fonction des deux autres → six matrices possibles. Le but du chapitre est de voir "quel cas convient le mieux"<sup>4</sup>.

### 3.4.2 Matrice impédance

La matrice impédance est une généralisation de l'impédance en 2D. Elle permet d'exprimer les tensions en fonctions des courants. Ainsi  $\underline{V} = Z\underline{I}$  devient :

$$\begin{bmatrix} \underline{V}_1 \\ \underline{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11}(j\omega) & z_{12}(j\omega) \\ z_{21}(j\omega) & z_{22}(j\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Ce qui est équivalent à :

$$\begin{cases} \underline{V}_1 = z_{11}(j\omega)\underline{I}_1 + z_{12}(j\omega)\underline{I}_2 \\ \underline{V}_2 = z_{21}(j\omega)\underline{I}_1 + z_{22}(j\omega)\underline{I}_2 \end{cases} \quad (3.20)$$

3. Elles définissent le comportement électrique du biporte vis-à-vis de l'extérieur.

4. Je ne fais ici que la matrice impédance, pour le reste Cf. slides 70 - 97, syllabus page 105

## Chapitre 4

# Équivalence de Thévenin et adaptation d'impédance

Ce n'est pas parce que deux composants électriques fonctionnent séparément que ce sera toujours le cas en les connectant ensemble.

La notion d'équivalent de Thévenin permet de prédire si un assemblage de deux circuits va "fonctionner" (oupas).

### 4.1 Circuits équivalents et théorèmes de Thévenin/Norton

#### 4.1.1 Équivalence de deux circuits

Deux circuits sont équivalents (au sens de Thévenin) s'ils ont la même caractéristique

Comme la caractéristique traduit le comportement aux bornes du circuit, cela revient à dire que :

Deux circuits sont équivalents s'ils possèdent le même comportement électrique (vu du circuit extérieur)

En régime sinusoïdal, deux dipôles seront équivalent s'ils ont la même impédance.

#### 4.1.2 Théorème et équivalent de Thévenin

Le **théorème de Thévenin** s'énonce :

Tout circuit linéaire et permanent est équivalent à une source de tension unique  $V_{th}$  en série avec une impédance  $Z_{th}$ .

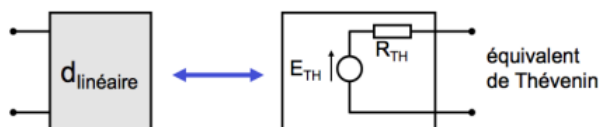


FIGURE 4.1 – Illustration du théorème de Thévenin

Notons que  $V_{th}$  est la tension à vide (ou fem à vide) entre les bornes du réseau (ici  $d$  lorsque celui-ci est déconnecté de tout autre réseau).  $Z_{th}$  est l'impédance, vue des bornes du réseau.

### 4.1.3 Théorème et équivalent de Norton

Le **théorème de Norton** est une variante du th. de Thévenin, utilisant cette fois une source de courant :

Tout réseau linéaire et permanent est équivalent à une source de *courant* unique  $I_N$  en *parallèle* avec une impédance  $Z_N$ .

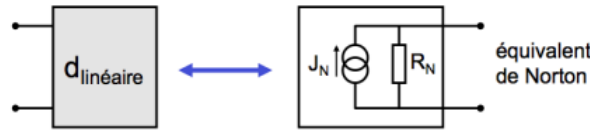


FIGURE 4.2 – Illustration du théorème de Norton

Une multitude d'exemples d'applications sont disponibles dans les slides (24-31)  
Les démonstrations de ces théorèmes sont à connaître (slide 31 et page 127-128).

## 4.2 Impédance d'entrée, impédance de sortie

### 4.2.1 Équivalent de Thévenin d'un dipôle charge : résistance d'entrée

Supposons qu'un appareil (une charge) doivent recevoir une tension à ses bornes. S'il est linéaire, il lui correspond un équivalent de Thévenin possédant le même comportement électrique.

Pour se faire, on définit la **résistance d'entrée**  $R_{in}$  d'un dipôle charge linéaire comme la valeur de la résistance équivalente (au sens de Thévenin) à ce dipôle. Autrement dit :

- La valeur de la résistance de l'équivalent de Thévenin du dipôle
- L'inverse de la pente de la caractéristique de ce dipôle
- La résistance par laquelle on peut remplacer ce dipôle sans modifier le fonctionnement du circuit extérieur

La résistance d'entrée est avant tout un *nombre* caractérisant le comportement externe du dipôle ( $[\Omega]$ )

Ce n'est donc **PAS** (sauf exception rare) la résistance qui se trouve à l'entrée du circuit !

### Interprétation

Si un dipôle possède une résistance d'entrée de  $500\Omega$  cela signifie simplement que si on lui applique une tension de  $10V$  il consommera comme courant  $20mA$ .

Cette notion permet de remplacer, du point de vue du circuit extérieur, un montage complexe par une résistance fictive unique.

### 4.2.2 Équivalent de Thévenin d'un dipôle source : résistance de sortie et fem à vide

Pour autant que le circuit soit linéaire, il peut être modélisé par un circuit équivalent de Thévenin. Définissons :

**Résistance de sortie** ; Valeur de la résistance de l'équivalent de Thévenin de ce dipôle.

**Fem à vide** ; Valeur de la source de tension idéale de l'équivalent de Thévenin de ce dipôle.



## Interprétation

La *fem à vide* est la valeur de la tension visible à la sortie du dipôle lorsque celui-ci ne délivre aucun courant. La tension à la sortie du dipôle valant (dans ce cas  $I = 0A$ ) :

$$V = e_{out} - R_{out}I \quad (4.1)$$

Cette équation permet également de comprendre la *résistance de sortie*. Lorsqu'un courant passe, la résistance de sortie introduit une certaine chute de tension. La tension de sortie est donc plus basse que la fem à vide.

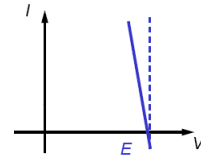
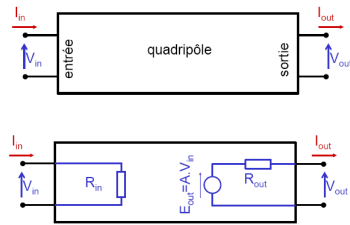


FIGURE 4.3 – Influence de la résistance de sortie

La résistance de sortie traduit la difficulté du dipôle à maintenir sa tension de sortie constante lorsque le courant délivré augmente.

### 4.2.4 Équivalent de Thévenin/Norton d'un quadripôle



Il suffit de modéliser l'entrée et la sortie par un équivalent de Thévenin comme précédemment. L'appareil sera caractérisé lors de la connaissance de trois paramètres :

1. Sa résistance d'entrée  $R_{in}$
2. Sa résistance de sortie  $R_{out}$
3. Sa fem à vide ( $e_{out}$ )

Il existe bien entendu cette fois une tension d'entrée, de sortie et même chose pour le courant.

FIGURE 4.4 – Equivalent de Thévenin d'un quadripôle

## 4.3 Adaptation d'impédance

### 4.3.1 Connecter deux appareils : pas si simple !

Soit le cas où on souhaite connecter un appareil en "amont" (source délivrant un signal) à un appareil en "aval" (charge recevant ce signal)<sup>1</sup>. Un principe de base est à retenir :

On **ne peut pas** interconnecter des composants et des montages sans effectuer certaines *vérification*.

Il faut :

1. Vérifier que l'appareil en aval supporte les niveaux de tensions délivrés par l'appareil en amont (risque de dommages)
2. Vérifier l'**adaptation d'impédance**, c'est-à-dire que les résistance d'entrée et de sortie sont "compatibles".<sup>2</sup> Ces critères diffèrent suivant que l'on veut transmettre une tension, un courant ou une puissance.

### 4.3.2 Adaptation d'impédance en tension

Si l'on connecte deux appareils (modélisés par leur équivalent de Thévenin), on modifie la tension présente à l'entrée de l'appareil en aval (gauche) qui ne vaut plus  $e$  : formule du diviseur résistif :

$$\begin{cases} I = \frac{E}{R_{in} + R_{out}} \\ V = R_{in}I \end{cases} \quad (4.2)$$

1. Chacun de ces appareils sont typiquement des quadripôles.  
2. On pourrait sinon "bloquer" une grande partie du signal.

et donc :

$$V = \frac{R_{in}}{R_{in} + R_{out}} e \quad (4.3)$$

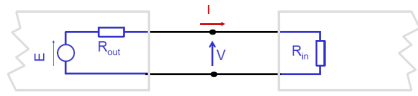


FIGURE 4.5 – Adaptation d'impédance en tension

Le signal de l'appareil en amont est affaibli. Pour éviter toute dégradation, ce "rapport de résistance" doit être proche de l'unité. Le **critère d'adaptation d'impédance en tension** est donc :

Lorsqu'on désire transmettre un signal de tension, l'impédance de sortie doit être faible devant l'impédance d'entrée.

### 4.3.3 Adaptation d'impédance en courant

Reprenons le cas de figure précédent si ce n'est que l'appareil en amont se comporte comme une **source de courant**. La sortie de l'appareil en amont est décrite par un équivalent de *Norton*. Calculons le courant reçu par l'appareil en aval :

$$\begin{cases} V = R_{in} I \\ V = R_{out}(J - I) \end{cases} \quad (4.4)$$

Le courant dans l'appareil en avant vaut dès lors :

Le signal de l'app

$$I = \frac{R_{out}}{R_{in} + R_{out}} J \quad (4.5)$$

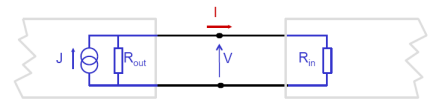


FIGURE 4.6 – Adaptation d'impédance en courant

Cette fois, on trouvera une atténuation aussi faible que possible en suivant le **critère d'adaptation d'impédance en courant** :

Lorsqu'on désire transmettre un signal de courant, l'impédance d'entrée doit être faible devant l'impédance de sortie.

### 4.3.4 Adaptation d'impédance en puissance

Prenons le cas général où l'impédance d'entrée  $Z_L$  est raccordée à une source de fem vide  $E_S$  et d'impédance interne  $Z_S$ .

Le but est d'optimiser  $Z_L$  ( $Z_S$  étant supposé fixe) de façon à maximiser la puissance moyenne qu'elle absorbe, en régime sinusoïdal permanent.

La démonstration page 144 - 145 du syllabus nous donne le critère tant recherché...

Pour maximiser la puissance transmise de la source à la charge, l'impédance de charge doit être le complexe conjugué de l'impédance de source.

$$Z_L = Z_S^* \quad (4.6)$$

## 4.4 Cas particulier des appareils de mesure

### 4.4.1 Connexion d'un appareil de mesure

Connecter un *voltmètre* ou un *ampèremètre* dans un circuit, cela revient à le modifier ! Analysons ceci grâce aux sections précédentes.

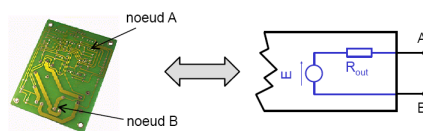


FIGURE 4.7 – Application de l'équivalent de Thévenin

*Remarque :* Les nœuds choisis pour mesurer une tension (par ex.) ne sont pas forcément des bornes d'entrée/sortie du montage. C'est là encore que l'équivalent de Thévenin va s'appliquer.

#### 4.4.2 Nœuds à haute et basse impédance

##### Impédance d'un nœud

Si l'un des deux nœuds est la masse, le montage est dit *référéncé à la masse* (B).

L'**impédance du nœud A** est la résistance de sortie de l'équivalent de Thévenin du montage.

On parle de nœud à *haute* ou *basse* impédance suivant la valeur de cette résistance de sortie (typiquement autour de  $100k\Omega$ ).

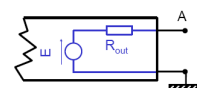


FIGURE 4.8 – Impédance de nœuds

#### 4.4.3 Connexion d'un voltmètre

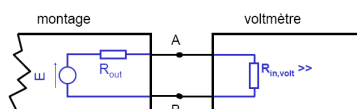


FIGURE 4.9 – Cas du voltmètre

On saura que l'on ne perturbe pas le montage en branchant un voltmètre suivant le critère d'adaptation d'impédance en tension. Le voltmètre doit avoir *une impédance d'entrée beaucoup plus élevée que l'impédance existant entre les nœuds utilisés pour faire la mesure*.

#### 4.4.4 Connexion d'un ampèremètre

Un ampèremètre se connecte en *série* pour mesurer un courant, il faut donc obligatoirement interrompre un fil de ce circuit. Il faudra cette fois utiliser un équivalent de Norton. Des résultats précédents, on peut conclure que *l'impédance d'entrée de l'ampèremètre doit être beaucoup plus faible que l'impédance existant entre les nœuds entre lesquels on insère l'ampèremètre*<sup>3</sup>.

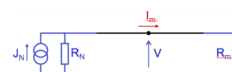


FIGURE 4.10 – Cas de l'ampèremètre

3. Le but est bien d'essayer d'avoir la résistance la plus faible pour se comporter "comme un fil". Cf. *Physique générale - Labo 1*

## Chapitre 5

# Résoudre un circuit : procédure de base et accélérateurs

### 5.1 Vocabulaire lié aux circuits

Rappel du premier chapitre.

### 5.2 Lois de Kirchhoff

Rappel du premier chapitre.

### 5.3 Procédure canonique en 6 étapes

#### 5.3.1 Avertissement

Cette méthode se base sur les **courants de branche** qui à l'avantage de considérer des courants réellement mesurable à l'inverse de la méthode des **courants de maille**.

#### 5.3.2 Vue d'ensemble

Les six étapes à suivre sont les suivantes :

1. définir une flèche de courant dans chaque branche du circuit
2. définir sur chaque élément la flèche de tension (ddp) correspondante
3. exprimer les équations qui lient les tensions (loi des mailles)
4. exprimer les équations qui lient les courants (loi des nœuds)
5. exprimer les lois des éléments
6. résoudre le système d'équation

#### 5.3.3 Étape 1 : définir une flèche de courant dans chaque branche du circuit

On donne un courant par branche, dont le sens (de la flèche) n'est pas importante afin d'identifier clairement de quoi on parle.

#### 5.3.4 Étape 2 : définir sur chaque élément la flèche de tension (ddp) correspondant

On donne une ddp par dipôle en tenant compte du sens du courant (étape 1) ainsi que des conventions récepteurs ou générateurs.<sup>1</sup>

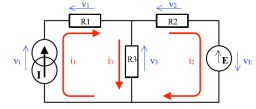


FIGURE 5.1 –  
Étape 1, 2

### 5.3.5 Étape 3 : exprimer les équations qui lient les tensions (loi des mailles)

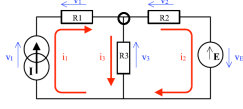


FIGURE 5.2 –  
Nœud de départ

La somme des tensions le long d'une maille doit être nulle. On choisit premièrement un sens arbitraire de parcours de la maille et un nœud de départ et l'on additionne les potentiels (étape 2). Lorsque l'on retombe sur le nœud de départ on égale la somme obtenue à zéro.

$$\begin{cases} v_I - v_1 - v_3 = 0 \\ v_3 - v_2 + v_E = 0 \end{cases} \quad (5.1)$$

### 5.3.6 Étape 4 : exprimer les équations qui lient les courants (lois des nœuds)

On fixe un nœud avec plus de deux composantes (sinon déjà défini par l'étape 1) et zou :

$$i_1 - i_2 - i_3 = 0 \quad (5.2)$$

### 5.3.7 Étape 5 : exprimer les lois des éléments

Dans notre exemple, pas besoin de réfléchir au signes (de  $R$ ) grâce aux deux précédentes étapes.

$$\begin{cases} v_1 = R_1 i_1 \\ v_2 = R_2 i_2 \\ v_3 = R_3 i_3 \\ i_1 = I \\ v_E = -E \end{cases} \quad (5.3)$$

### 5.3.8 Étape 6 : résoudre le système obtenu

Il nous suffit de trouver  $i_2$  et  $i_3$  pour ensuite définir toutes les tensions du circuit : celui-ci est résolu !

### 5.3.9 Étape 7 : parfaire la finition

1. Inverser les signes négatifs
2. Vérifier la loi des nœuds et des mailles

### 5.3.10 Étape 0 : boucler les boucles

Dans certaines représentations rapide, certaines mailles disparaissent. Pour retrouver le "bon" circuit il faut savoir que :

- un nœud isolé (non connecté) à côté duquel figure une valeur de tension représente en fait une source de tension (de cette valeur) entre le nœud et la masse.
- es différentes masses sont implicitement connectée ensemble.

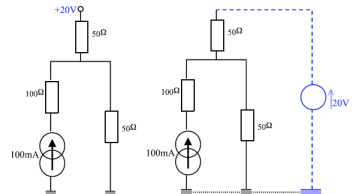


FIGURE 5.3 –  
Étape 0

1. Cela permet d'éviter de devoir tenir compte des signes



- Soit utiliser le th. de superpo : résoudre séparément chaque sous-circuit (par les phaseurs) puis sommer les réponses (temporelle ou en phaseurs)

### Fréquence pour les sources

- On n'est **pas** dans les hypothèses du régime sinusoïdal et l'on ne peut pas utiliser les phaseurs!!
- On **doit** utiliser la superposition pour utiliser les phaseurs (séparations des différentes fréquences)
  - Résoud individuellement les sous-circuits par les phaseurs
  - **On ne peut pas sommer les phaseurs**
  - On **doit** sommer les réponses temporelles (ou résoudre dès le départ tout en temporel)

Pour résumer :

1. Lorsque les sources ne comportent qu'une seule fréquence, on *peut* utiliser la superposition.
2. Lorsque les sources comportent plusieurs fréquences différentes on *doit* utiliser la superposition.

Un exemple complet est donné page 182-184.

## 5.9 Méthode des courants de mailles

Voir syllabus par 185 et slides 22-28.

## Chapitre 6

# Résoudre un circuit réactif dans le domaine temporel

Les composants réactifs ne consomment ou ne génèrent pas de puissance, mais peuvent en stocker momentanément et la restituer ensuite : implique que le *temps* doit être pris en compte.

## 6.2 Analyse temporelle du circuit RC

### 6.2.1 Résolution analytique complète

Voir syllabus page 201-204.

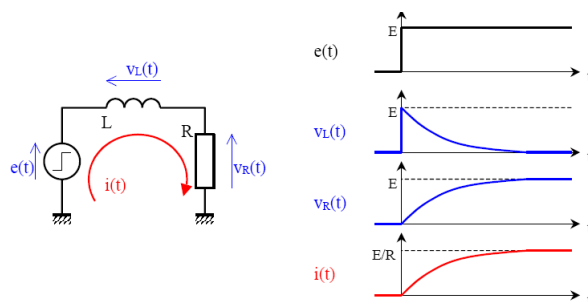


FIGURE 6.1 – Résolution circuit RC

### 6.2.2 Résolution rapide

#### Avant l'échelon (condition initiale)

1. Le courant est nul vu la loi à long terme
2. La ddp est constante et supposée nulle (1)
3. La ddp sur la résistance est nulle (2)

$$\begin{cases} i(t_0^-) = 0 \\ v_C(t_0^-) = 0 \\ v_R(t_0^-) = 0 \end{cases} \quad (6.1)$$

#### En $t_0$ (court terme)

Que ce passe-t-il lorsque l'on applique l'échelon de tension  $E$  ?

1. La ddp de la capa reste nulle (ne peut varier instantanément)



2. En conséquence de (1), toute la tension se reporte sur  $v_R$
3. Le courant est donné par Ohm

$$\begin{cases} v_C(t_0^+) = v_C(t_0^-) = 0 \\ v_R(t_0^+) = E \\ i(t_0^+) = E/R \end{cases} \quad (6.2)$$

**En  $t = \infty$  (long terme)**

1. Le courant est nul dans la capacité (loi long terme)
2. En conséquence de (1) la ddp sur la résistance est nulle
3. Toute la tension est reportée sur la capa :  $v_C = E$ .

### 6.2.3 Résolution rapide (2e exemple) : échelon des tension inverse

En partant de la situation finale du cas précédent, voyons ce qui se passe en appliquant une tension négative d'amplitude  $E$ . On suppose que l'instant  $t = 0$  représente le moment de retour à 0 de la tension  $e(t)$ .

**Avant l'échelon (conditions initiales)**

1. Le courant et la ddp sur la résistance sont nuls
2. La ddp sur la capa vaut  $E$  (capa chargée)

**En  $t_0$  (court terme)**

Juste après l'échelon négatif  $-E$

1. La source de tension prend la valeur nulle !  $e(t_0^+) = 0$
2. La ddp de la capa ne peut pas varier directement : elle vaut encore  $+E$
3. En conséquence, la tension de la résistance vaut  $-E$
4. Le courant vaut donc  $-E/R$

**En  $t = \infty$  (long terme)**

1. Le courant est nul dans la capacité (loi long terme)
2. La tension est nulle dans la résistance à cause de (1)
3. comme  $v_R$  et  $e(t)$  sont nulles,  $v_C$  l'est aussi (capacité complètement déchargée)

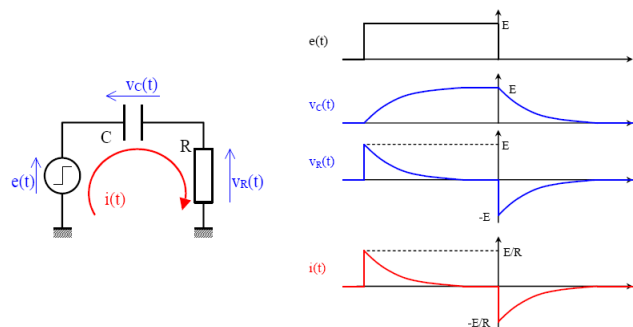


FIGURE 6.2 – Résolution circuit RLC en tension inverse

### 6.2.4 Constante de temps et fréquence de coupure (circuit du 1er ordre)

La durée de la charge et décharge de la capacité dépend de la constante de charge :  $\tau = RC$ .

Temps écoulé depuis l'échelon	Pourcentage de la (dé)charge réalisé
$\tau$	63
$3\tau$	95
$5\tau$	99

On dira également que

- $v_C(t)$  est un filtre passe-bas de  $e(t)$
- $v_R(t)$  est un filtre passe-haut de  $e(t)$

La limite entre les fréquences hautes et basses est donnée par la fréquence de coupure définie par

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\tau} \quad (6.3)$$

## 6.3 Analyse temporelle du circuit RL

### 6.3.1 Résolution analytique complète

Si l'on attend suffisamment longtemps, par la loi *long terme*  $V = 0$  sur la self et  $I = cste$  (pas forcément nul).

On peut résoudre ce circuit analytiquement (syllabus page 212, slide 54- 57)

### 6.3.2 Résolution rapide

Même raisonnement que pour le circuit RC (page 212 pour le RL)

### 6.3.3 Constante de temps et fréquence de coupure

Les résultats ci-dessus nous apprennent que

- La tension  $v_L(t)$  ne comporte que les hautes fréquences du signal  $e(t)$  : filtre passe-haut
- La tension  $v_R(t)$  ne comporte que les basses fréquences

## 6.5 Analyse temporelle du circuit RL (source sinusoïdale)

Au lieu d'avoir  $e(t) = cste$ , on a  $e(t) = V_m \cos(\omega t + \alpha)$

$$Ri + L \frac{di}{dt} = e(t) \quad (6.4)$$

Il suffit après de résoudre l'équation différentielle comme au cours d'Analyse I.

## 6.6 Circuit RLC avec précharge

La capacité a été préalablement chargée avec une tension  $v_0$  et à l'instant  $t = 0$  on ferme l'interrupteur. L'équation du circuit est donc :

$$v_0 - \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(t) dt = L \frac{di}{dt} + Ri(t) \quad (6.5)$$

AJOUTER LES TROIS CAS!!!

## Chapitre 7

# Résoudre un circuit réactif dans le domaine fréquentiel

### 7.1 Analyse fréquentielle : circuits linéaires en régime sinusoïdal

#### 7.1.1 Hypothèse et limitations de l'analyse fréquentielle

la sinusoïde est un signal *monochromatique* : il n'a qu'une seule fréquence. C'est le signal le plus simple. Deux conditions sont à respecter :

1. Le circuit considéré est linéaire
2. Toutes les sources sont purement sinusoïdale et de même fréquence

Si ces hypothèses sont respectées, on parlera de **circuits linéaires en régime<sup>1</sup> sinusoïdal**. Pour avoir une source purement monochromatique (obligatoire) il faut que le signal ne contienne pas de composante continue (sa moyenne doit être nulle) et que toutes les transitoires doivent avoir disparu.

L'avantage est de résoudre le circuit sous forme paramétrique et d'avoir la réponse pour toutes les fréquences. Autre avantage, on sait de Fourier que tout signal sinusoïdal peut être décomposé en somme de sinusoïdes, ce qui nous permet d'utiliser le théorème de superposition.

#### Réponse d'un circuit linéaire et permanent en régime sinusoïdal

Le circuit est linéaire et permanent ssi  $R, L$  et  $C = cste$ . La solution d'un tel système est  $SGEH + SPEnH$  :

$$y(t) = \sum_{j=1}^n k_j e^{p_j t} + A \cos(\omega t + \alpha) \quad (7.1)$$

### 7.2 Caractérisation des fonctions périodiques

#### 7.2.1 Sinusoïde

La sinusoïde  $a(t)$  est définie par ; sa valeur de crête ( $\hat{A}$ ), sa pulsation  $\omega$  et sa phase  $\phi$  :  
 $a(t) = \hat{A} \cos(\omega t + \phi)$

---

1. Absence de transitoire

### 7.2.2 Fonction périodique quelconque

Toute fonction périodique peut s'écrire :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \alpha_n) \quad (7.2)$$

où  $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$  et  $\tan(\alpha_n) = b_n/a_n$ .

### Valeur efficace

Il s'agit de la racine de la moyenne du carré (RMS = Root(Mean(Square())) :

$$A_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T a^2(t) dt} \quad (7.3)$$

Pour une sinusoïde (et pour une fonction périodique quelconque (slide 22)), on voit directement<sup>2</sup> que  $A_{eff} = \frac{A_m}{\sqrt{2}}$ .

### 7.2.3 Puissance efficace

La valeur efficace est une valeur "moyenne" dissipant la même puissance que le signal. La puissance moyenne absorbée par une résistance au régime sinusoïdal est un facteur 1/2 :

$$P_R = \frac{1}{2} V_m I_m = V_{eff} I_{eff} \quad (7.4)$$

**Attention !**  $V_{crête} \cdot I_{crête} = P_{max} \neq P_{moy}$

## 7.3 Phaseurs

Un phaseur est un nombre complexe représentant un signal sinusoïdal

Petit rappel de ce qui est vu au cours de *Physique générale* slide 16.

Le phaseur est un nombre complexe constant que l'on va rendre "tournant" en le multipliant par  $e^{j\omega t}$ .

**Attention !** Le module du phaseur peut être défini en valeur efficace et non en valeur de crête, il faut faire attention à la convention utilisée !

Deux erreurs fatales sont à éviter :

1. Le phaseur étant complexe, les opérations doivent aussi l'être : ne **pas** additionner uniquement les modules
2. On n'utilise les phaseurs que s'il y a **une même fréquence** pour tous les signaux du circuit (pas de régime transitoire)

---

2.  $\langle \cos^2 \rangle = 1/2$

## 7.4 Impédances et admittances

### 7.4.1 Impédance d'une inductance pure

Si l'on définit l'**impédance** d'une inductance  $L$  comme le nombre complexe  $Z_L = j\omega L$  on peut ré-écrire la loi fondamentale de l'inductance  $v_l(t) = L \frac{di(t)}{dt}$  de la sorte :

$$\underline{V} = Z \underline{I} \quad (7.5)$$

Une impédance est un nombre complexe décrivant la relation entre la ddp et le courant agissant sur un dipôle (sous les hypothèses du régime sinusoïdal)

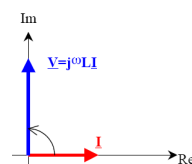


FIGURE 7.1 – Avance de  $V$  sur  $I$

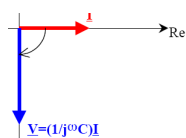
Par représentation dans le plan complexe, en prenant comme référence la phase de courant ( $\theta = 0$ ) on peut se rendre compte que :

Pour une inductance, la tension est *en avance* de  $\frac{\pi}{2}$  sur le courant.

En analysant le domaine fréquentiel, on se rend compte que l'impédance tend vers 0 pour les basses fréquences mais est très élevée pour les hautes fréquences :

L'impédance d'une inductance est proportionnelle à  $\omega$ .  
Son module est donc faible en b.f. et élevé en h.f.

### 7.4.2 Impédance d'une capacité pure



Même constat que pour l'inductance, si ce n'est que l'impédance d'une capacité  $C$  permettant d'écrire  $\underline{V} = Z_C \underline{I}$  est <sup>3</sup> :

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} \quad (7.6)$$

FIGURE 7.2 – Re- En analysant le domaine fréquentiel, on se rend cette fois compte que :  
tard de  $V$  sur  $I$

Pour une capacité, la tension est *en retard* de  $\frac{\pi}{2}$  sur le courant.

En analysant l'impédance, on remarque que celle-ci est bien cohérente avec le fait que celle-ci s'oppose à une variation brusque de la ddp à ses bornes (injecter du  $I$  est plus simple avec une impédance faible) :

L'impédance d'une capacité est inversement proportionnelle à  $\omega$ .  
Son module est donc élevé en b.f. et faible en h.f.

### 7.4.3 Impédance d'une résistance pure

Ca va vite, on peut directement écrire :

$$\underline{V} = R \underline{I} \quad (7.7)$$

La résistance pure n'introduit donc aucun déphasage au contraire de l'inductance.

3. Comme pour  $X_L$  il y a une loooongue démo dans le sylla (p. 241) mais je ne sais pas s'il faut l'étudier.

### 7.4.4 Impédance d'un dipôle quelconque

Pour faire simple, l'impédance est le rapport d'un phaseur de tension sur un phaseur de courant. Les résultats obtenus précédemment peuvent être généralisé :

L'impédance est une généralisation de la notion de résistance à un nombre complexe quelconque, permettant ainsi, sous les hypothèses du régime sinusoïdal, de décrire le déphasage intervenant entre signal de tension et de courant.

Elle permet ainsi de généraliser la loi d'Ohm aux signaux déphasés, mais aussi d'utiliser les lois de mise en parallèle et série, la procédure canonique de résolution de circuit, le théorème de superposition et l'impédance d'entrée et de sortie d'un équivalent de Thévenin.

### 7.4.5 Admittance, conductance et susceptance

L'admittance traduit la relation entre  $\underline{I}$  et  $\underline{V}$  :

$$Y(j\omega) = \frac{\underline{I}}{\underline{V}} \quad (7.8)$$

L'admittance est l'inverse de l'impédance  $Y = \frac{1}{Z}$  **mais** on ne peut pas écrire pour un dipôle quelconque que la conductance est l'inverse de la résistance !

### Loi de Kirchhoff? Loi des mailles?

Elles restent toutes deux valables à condition de les écrire en **complexes**! Par exemple, pour la loi des mailles :

$$\underline{V}_1 + \underline{V}_2 + \underline{V}_3 = 0 \quad (7.9)$$

Attention à l'addition complexe (2 composantes) !

### Association d'impédances

Deux dipôles sont équivalents (au sens de Thévenin) s'ils sont caractérisés par la même relation entre  $i(t)$  et  $v(t)$  (ou même  $Z$  en régime sinusoïdal) := même comportement externe. Revoir **réseau en échelle**, slide 46.

## 7.5 Expressions de la puissance en formalisme fréquentiel

### 7.5.1 /2/3 - Puissance instantanée, puissance active et réactive

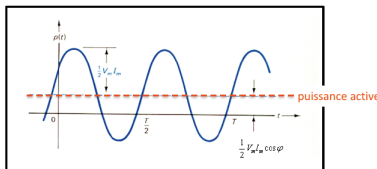


FIGURE 7.3 – Puissance active

La *puissance instantanée* est la puissance à fournir/absorber par un dipôle à l'instant  $t$ <sup>4</sup> :

$$p(t) = i(t)v(t) \quad (7.10)$$

La *puissance active* ( $P$ ) est la moyenne de la puissance instantanée, expression indépendante du temps (c'est une **constante**) :

$$P = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} p(t) dt \quad (7.11)$$

4. Convention récepteur

Dans le cas du régime sinusoïdal :  $v(t) = V \cos(\omega t + \alpha)$ ,  $i(t) = \hat{A} \cos(\omega t + \beta)$ . La puissance instantanée vaut le produit des deux, ce qui peut également s'écrire :

$$p(t) = \underbrace{\frac{V\hat{I}}{2} \cos(\alpha - \beta)}_{\text{Puissance active}} + \frac{v\hat{I}}{2} \cos(2\omega t + \alpha + \beta) \quad (7.12)$$

Le premier terme étant constant, il s'agit de la puissance active. La puissance instantanée comprend donc la puissance active et une composante sinusoïdale de  $2f$ .

La puissance active dépend donc des amplitudes de  $V$  et  $I$  et du cosinus de leur déphasage.

On peut ré-écrire la puissance instantanée :

$$p(t) = A[1 + \cos(2\omega t + 2\alpha)] + Q \sin(2\omega t + 2\alpha) \quad \text{où} \quad \begin{cases} Q = \frac{1}{2} V_m I_m \sin \phi \\ P = \frac{1}{2} V_m I_m \cos \phi \end{cases} \quad (7.13)$$

La premier terme correspond à la puissance absorbée par la charge ( $>0$ ) d'amplitude  $P$  = puissance active.

Le deuxième terme est la puissance périodiquement échangée entre la source et la charge d'amplitude  $Q$  = puissance réactive<sup>5</sup>.

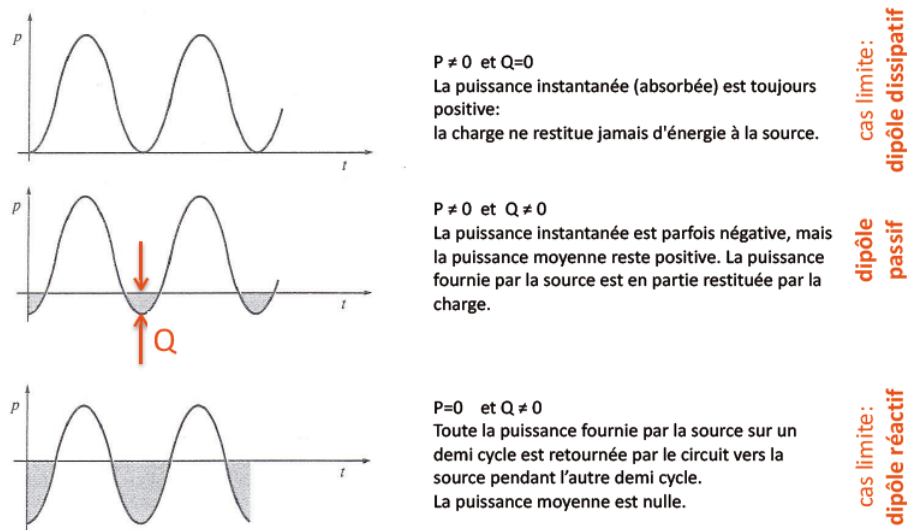


FIGURE 7.4 – Puissance active/réactive

#### 7.5.4 Expressions de $P$ et $Q$ pour les trois charges élémentaires

##### Résistance

Pour une résistance  $R$ , la puissance instantanée est donnée par  $p(t) = Ri^2(t)$  : elle est toujours positive ou nulle : élément dissipatif (chaleur). En régime sinusoïdal  $\phi = 0 \Rightarrow \begin{cases} Q = V_m I_m \sin \phi = 0 \\ P = V_m I_m \cos \phi = V_m I_m \end{cases}$

On retrouve que  $P = \frac{V_{eff}^2}{R}$  et que la puissance instantanée se réduit à :

$$p(t) = P[1 + \cos(2\omega t + 2\alpha)] \quad (7.14)$$

5. S'exprime en VAR : volt-ampère réactif.

## Inductance

Ici, contrairement à la résistance, l'inductance peut restituer de l'énergie : c'est un élément non dissipatif. En régime sinusoïdal, nous avons pour l'inductance :

$$v(t) = \omega L \hat{I} \cos(\omega t + \beta + \frac{\pi}{2}) \quad (7.15)$$

$$i(t) = \hat{I} \cos(\omega t + \beta) \quad (7.16)$$

Comme le courant et la tension sont déphasé de  $\phi = \frac{\pi}{2}$  on retrouve :  $\Rightarrow \begin{cases} Q = V_m I_m \sin \phi = +V_{eff} I_{eff} \\ P = V_m I_m \cos \phi = 0 \end{cases}$

On retrouve que  $Q = \frac{1}{2} \omega L I_{eff}^2$  et la puissance instantanée se réduit à :

$$p(t) = -Q \sin(2\omega t + 2\beta) \quad (7.17)$$

## Capacité

En régime sinusoïdal, nous avons pour la capacité :

$$v(t) = V \cos(\omega t + \alpha) \quad (7.18)$$

$$i(t) = \omega C V \cos(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}) \quad (7.19)$$

La tension et le courant sont déphasé de  $\phi = -\frac{\pi}{2}$ , on a donc :

$$P = V_{eff} I_{eff} \cos \phi = 0 \quad (7.20)$$

$$Q = V_{eff} I_{eff} \sin \phi = -V_{eff} I_{eff} \quad (7.21)$$

On retrouve que  $Q = -\omega C V^2$  et la puissance instantanée se réduit à :

$$p(t) = Q \sin(2\omega t + 2\alpha) \quad (7.22)$$

### 7.5.5 Interprétation du facteur de puissance

Le facteur de puissance d'une charge est le cosinus du déphasage entre  $V$  et  $I$ . Pour la puissance active dans un dipôle :

$$P = V_{eff} I_{eff} \cdot \underbrace{\cos \phi}_{\text{Facteur de puissance}} \quad (7.23)$$

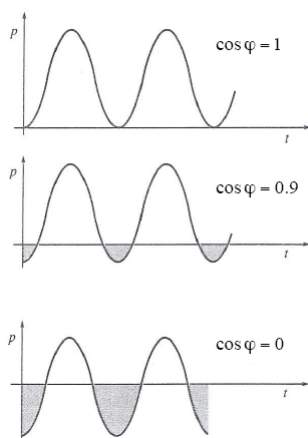


FIGURE 7.5 –  $\cos \phi$

Le  $\cos \phi$  d'une impédance  $Z$  (signaux déphasés) traduit la réduction de la puissance dissipée par rapport à une résistance (signaux en phase).

Un dipôle est passif si l'énergie absorbée depuis l'origine est à tout instant positif ou nulle. En régime sinusoïdal il en résulte :

- $P \geq 0$
- Ou encore :  $\text{Re}[Z(j\omega)] \geq 0$
- Ou encore :  $-\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$



### 7.5.7 Puissance et superposition

Peut-on sommer les puissances pour un signal composé de plusieurs harmoniques (= sinusoïde) ?

- La *puissance instantanée* totale n'est **pas** la somme des puissances instantanées de chaque harmonique
- La *puissance active* totale **est** la somme des puissances actives de chaque harmonique

Démo dans le syllabus page 258.

Deuxième partie

**Théorie des champs**

# Chapitre 1

## Introduction à la théorie des champs

### 1.1 Les équations de Maxwell

#### 1.1.1 A quoi servent les équations de Maxwell ?

Elles servent à *prévoir et expliquer les forces d'origine électromagnétique dans des configurations non élémentaires de charges et/ou de courants.*

#### 1.1.2 Le principe : les forces sont dues aux champs, qui eux-mêmes sont dus aux sources

Le principe des équations de Maxwell est le suivant : *source*  $\rightarrow$  *champ*  $\rightarrow$  *force* principe bien illustré par la force de Lorentz :  $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$  ou la source  $q$  génère les champs qui eux-mêmes génèrent une force.

Une charge n'exerce pas de force sur elle-même : elle n'interagit pas avec le champ qu'elle provoque, mais uniquement avec le champ dû aux *autres* charges.

### 1.2 Qu'est ce qu'un champ ?

Tout d'abord, un **champ** est *une grandeur définie partout dans l'espace*. Il existe des champs scalaire (possède une valeur en chaque point de l'espace, comme  $V$ ) et des vectoriels (lorsque chaque point est à plus de 1D, comme  $\vec{B}$ ). Tout champ vectoriel peut-être décomposé en une composante lamellaire (irrotationnelle) et solénoïdale (rotationnelle). Ce sera détaillé plus bas, pas d'impatience !

$$\vec{a} = \vec{a}_{div} + \vec{a}_{rot} \quad (1.1)$$

### 1.3 Les outils de l'analyse vectorielle

#### 1.3.1 Le flux

Le **flux** d'un vecteur<sup>1</sup> est l'intégrale sur une certaine surface  $S$ , du produit scalaire de ce vecteur par l'élément de surface :

$$\Phi = \iint_S \vec{a} \cdot d\vec{S} \quad (1.2)$$

---

1. Il s'agit d'une grandeur scalaire, ce n'est pas un champ.

Cette expression n'est **pas** la même que la suivante, qui concerne les surfaces fermées :

$$\Phi = \oint_S \vec{a} \cdot d\vec{S} \quad (1.3)$$

### 1.3.2 Circulation

La **circulation** d'un vecteur est l'intégrale, sur un certain trajet  $L$ , du produit scalaire de ce vecteur par l'élément de longueur :

$$\xi = \int_L \vec{a} \cdot d\vec{l} \quad (1.4)$$

### 1.3.3 Divergence

La **divergence**<sup>2</sup> d'un vecteur est définie comme la somme des dérivées spatiales des composantes de ce vecteurs, selon leurs axes respectifs :

$$\text{div}(\vec{a}) = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \quad (1.5)$$

#### Interprétation

La divergence traduit la *disposition spatiale* de ce vecteur.

La divergence d'un vecteur en un point  $P$  n'est non-nulle que si ce champ varie dans l'espace autour de  $P$ .

- $\text{div} > 0$  : "génération" de champ à cet endroit : source.
- $\text{div} < 0$  : "absorption" de champ à cet endroit : puits.

Un théorème important est celui d'*Ostrogradsky* :

$$\oint_S \vec{a} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \text{div}(\vec{a}) \cdot dV \quad (1.6)$$

ou en français : le flux d'un vecteur sur une surface fermée est égal à l'intégrale de volume de la divergence de ce vecteur sur le volume compris dans cette surface fermée.

### 1.3.4 Rotationnel

Le **rotationnel**<sup>3</sup> d'un vecteur  $\vec{a}$  est défini comme :

$$\text{rot}(\vec{a}) = \vec{\nabla} \times \vec{a} \quad (1.7)$$

Le théorème magique est cette fois-ci celui de *Stokes*<sup>4</sup> :

$$\oint_C \vec{a} \cdot d\vec{l} = \iint_S \text{rot}(\vec{a}) \cdot d\vec{S} \quad (1.8)$$

Cet "outil" traduit également la disposition spatiale d'un vecteur :  $\text{rot}(\vec{a})$  est un vecteur dont :

- La direction est normale au plan pour lequel la circulation du vecteur (le long d'un parcours fermé élémentaire centré sur le point  $P$ ) est maximum.
- Le module vaut la valeur de cette circulation maximale, par unité de surface.

En résumé, le rotationnel de  $\vec{a}$  en  $P$  est un vecteur qui donne l'axe (et l'intensité) de rotation du champ  $\vec{a}$  sur lui-même, immédiatement autour du point  $P$ .

---

2. La divergence est un champ scalaire

3. Le rotationnel est un champ vectoriel

4. L'orientation relative du contour et de la normale à la surface est déterminée par la règle de la main droite

## 1.4 Que signifient les équations de Maxwell ?

### 1.4.1 De quoi parlent les équations de Maxwell ?

Sous leur forme intégrales, ces équations sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \\ \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \\ \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \\ \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I + \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \end{array} \right. \quad (1.9)$$

### 1.4.2 Loi de Gauss

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{Ostrogradsky}} \quad \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.10)$$

Au niveau de la disposition spatiale,  $\vec{E}$  a une *composante lamellaire* : il existe des sources de "flux" électriques :  $Q$ .<sup>5</sup>

$\vec{E}$  converge ou diverge aux points où se trouvent des charges électriques

### 1.4.3 Loi de Faraday

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{Stokes}} \quad \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.11)$$

Caractérise la composante *solénoïdale* de  $\vec{E}$ . A certains endroits, le champ  $\vec{E}$  va tourner sur lui même lorsque  $\vec{B}$  varie (la source de cette composante solénoïdale est la dérivée temporelle de  $\vec{B}$ ).

$\vec{E}$  forme des "boucles" autour des directions où le flux de  $\vec{B}$  varie dans le temps

### 1.4.4 Absence de monopôle magnétique

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{Ostrogradsky}} \quad \text{div } \vec{B} = 0 \quad (1.12)$$

Cela caractérise la composante lamellaire de  $\vec{B}$  : indique que  $\vec{B}$  ne possède pas de disposition convergente/divergente, les lignes de champs ne se croisent jamais.

$\vec{B}$  ne converge ou ne diverge en aucun point. Il n'existe pas de "charges magnétiques".

### 1.4.5 Loi d'Ampère

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I + \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{Stokes}} \quad \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1.13)$$

---

5.  $Q$  "provoque"  $\vec{E}_{div}$

Caractérise la composante solénoïdale de  $\vec{B}$  :  $\vec{B}$  possède une telle disposition à certains endroits. Il existe deux sources différentes à cette composante : le courant électrique et la dérivée temporelle de  $\vec{E}$ <sup>6</sup>.

$\vec{B}$  forme des "boucles" autour des courants et autour des directions où le flux de  $\vec{E}$  varie dans le temps.

## 1.5 Équation de continuité (conservation de la charge)

Si la charge diminue au sein d'une surface, c'est qu'un courant positif est sorti de celle-ci<sup>7</sup>.

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = -\frac{dQ}{dt} \quad \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{Ostrogradsky}} \quad \text{div } \vec{J} = -\frac{d\rho}{dt} \quad (1.14)$$

### Cas stationnaire

En statiques, cette équation de continuité vaut 0. Cela signifie que  $\vec{J}$  est purement rotationnel.

---

6. A un facteur près

7. Démonstration page 24-25

## Chapitre 2

# Électrostatique dans le vide

### 2.1 Équations de l'électrostatique

#### Découplage des équations de Maxwell

Comme  $\rho$  et  $\vec{J}$  sont stationnaires, les équations de Maxwell peuvent se découpler en deux paires d'équations indépendantes (gauche = électrostatique, droite = magnétostatique) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \\ \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \\ \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \end{array} \right. \quad (2.1)$$

### 2.2 Champ électrique

#### 2.2.1 Champ électrique dû à une charge ponctuelle

La démonstration s'obtient par  $\vec{F} = q\vec{E}$  et le théorème de Gauss pour trouver  $\vec{E}$  (cf. page 29 - 30)

$$\vec{E}(P) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{1}_r \quad (2.2)$$

Résultat facilement généralisable à plusieurs charges ou pour des répartitions de charges.

### 2.3 Potentiel électrique

Le gradient d'un **scalaire** est un vecteur :

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{1}_x + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{1}_y + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{1}_z \quad (2.3)$$

Il s'agit d'une généralisation de la dérivée à des fonctions à trois variables. Il indique la direction de croissance maximum d'une fonction scalaire<sup>1</sup>.

La différence des valeurs de  $u$  entre deux points  $A$  et  $B$  vaut la *circulation* du gradient de  $u$  :

$$u(B) - u(A) = \int_A^B du = \int_A^B \text{grad}(u) \cdot d\vec{l} \quad (2.4)$$

En présence d'un champ lamellaire (conservatif) la circulation du champ ne dépend pas du trajet suivi. On peut donc définir une grandeur scalaire  $U$ , appelée "potentiel" telle que :

$$\int_A^B \vec{a} \cdot d\vec{l} = W_{AB} = U(B) - U(A) = \int_A^B \text{grad}(U) \cdot d\vec{l} \quad (2.5)$$

---

1.  $du = \text{grad}(u) \cdot d\vec{l}$

Comme en électrostatique  $\vec{E}$  est lamellaire on peut définir une grandeur  $V$  telle que :

$$\vec{E} = -\text{grad}(V) \quad (2.6)$$

Ajouter une constante à  $V$  ne changera rien : on ne peut donc pas connaître la valeur de  $V$  qui n'est définie qu'à une constante près : justifie en théorie des circuits le choix arbitraire de la masse.

### Pourquoi un signe négatif?

- Comme les charges sont sources,  $\vec{E}$  diverge à partir de celles-ci
- Une charge positive dans  $\vec{E}$  subit une force qui l'écarte des charge positive.
- Si pas de -, le potentiel serait plus élevée au charges négatives que positives.

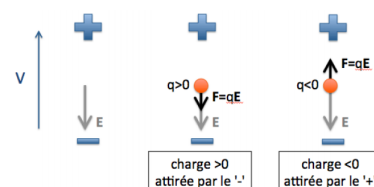


FIGURE 2.1 – Signe négatif

Cela correspond donc au fait que le potentiel va être orienté du potentiel le plus faible vers le plus élevé (tête de la flèche - bas de la flèche).

Les équation de Poisson et Laplace sont à connaître (page 34) ainsi que la démonstration, slide 73.

## 2.5 Énergie électrostatique

### 2.5.1 Énergie électrostatique d'une charge

L'énergie électrostatique d'une charge ponctuelle  $q$  vaut :

$$W_e = qV \quad (2.7)$$

*Démonstration.*

Le signe négatif de la force vient du fait qu'il faut s'opposer à la force s'exerçant sur la charge test. Si  $A$  est pris à l'infini, son potentiel  $y$  est nul.

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}_{ext} \cdot d\vec{l} \quad (2.8)$$

$$W_{AB} = - \int_a^B q \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (2.9)$$

$$W_{AB} = +q(V(B) - V(A)) \quad (2.10)$$

$$W_{AB} = qV(B) \quad (2.11)$$

□

### 2.5.2 Énergie d'un ensemble de charge

En généralisant pour  $n$  charges :

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j>i}^n \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \quad (2.12)$$

La démonstration est donnée page 38.



### 2.5.3 Énergie électrostatique d'une distribution de charge

$$w_e = \frac{1}{2} \int_V \rho V d\tau \quad (2.13)$$

### 2.5.4 Densité d'énergie électrostatique

La démonstration se trouve à la page 39 (pas connaître).

$$w_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad (2.14)$$

## 2.6 Conditions aux limites de part et d'autre d'une surface chargée

### 2.6.1 Variation du champ $\vec{E}$

Le champ électrique est noté  $\vec{E}_1$  et  $\vec{E}_2$  au voisinage immédiat de la surface et peut être décomposé en une composante tangentielle et une composante normale à la surface :

$$\begin{cases} \vec{E}_1 = \vec{E}_{1t} + \vec{E}_{1n} \\ \vec{E}_2 = \vec{E}_{2t} + \vec{E}_{2n} \end{cases} \quad (2.15)$$

On peut montrer que le champ électrique n'est pas identique de part et d'autre de la surface et qu'il subit une discontinuité :

$$\vec{E}_1 - \vec{E}_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{1}_n \quad (2.16)$$

*Démonstration.*

#### Composante normale

On sait par Gauss :

$$\oint_{cyl} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\sigma S_b}{\epsilon_0} \quad (2.17)$$

En faisant tendre la surface latérale du cylindre vers zéro pour considérer  $\vec{E}$  constant :

$$\vec{E}_1 \cdot \vec{1}_n S - \vec{E}_2 \cdot \vec{1}_n S = (E_{1n} - E_{2n}) S = \frac{\sigma S}{\epsilon_0} \quad (2.18)$$

On a donc :

$$E_{1n} - E_{2n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (2.19)$$

Ce qui peut aussi s'écrire :

$$||\vec{E}|| \cdot \vec{1}_n = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (2.20)$$

*La composante normale du champ subit une discontinuité proportionnelle à la densité surfacique de charge.*

#### Composante tangentielle

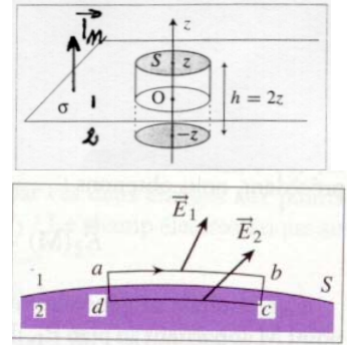


FIGURE 2.2 –  
Champ d'une  
surface chargée

Considérons pour la composante tangentielle (selon  $x$  par exemple), un contour rectangulaire à cheval sur la surface chargée de hauteur infinitésimale. Maxwell nous donne :

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (2.21)$$

Mais encore :

$$\int_a^b (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \cdot d\vec{l} = 0 \quad (2.22)$$

On a donc :

$$\vec{E}_{1t} = \vec{E}_{2t} \quad (2.23)$$

Ce qui peut aussi s'écrire :

$$||\vec{E}|| \times \vec{1}_N = \vec{0} \quad (2.24)$$

Et l'on retrouve bien le résultat annoncé.

*Au passage d'une surface chargée, le composante tangentielle  $\vec{E}_t$  est continue.*

□

## 2.6.2 Variation du potentiel au travers d'une surface chargée

On peut déduire le potentiel via le champ. En effet :

$$V_1 - V_2 = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (2.25)$$

En prenant un chemin d'intégration (non fermé) entre  $a$  et  $b$  de la sorte qu'ils tendent vers zéro, le membre de droite devient nul ( $l = 0$ ). On a donc :

$$V_1 = V_2 \quad (2.26)$$

*Au passage d'une surface chargée, le potentiel électrique  $V$  est continu*

Par contre le gradient n'est pas continu ! En effet :

$$-grad(V)_1 + grad(V)_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{1}_n \quad (2.27)$$

Ou encore :

$$\left( \frac{\partial V}{\partial n} \right)_1 - \left( \frac{\partial V}{\partial n} \right)_2 = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (2.28)$$

En notant la dérivée normale<sup>2</sup> du potentiel :

$$\left( \frac{\partial V}{\partial n} \right) = grad(V) \cdot \vec{1}_n \quad (2.29)$$

*Au passage d'une surface chargée, la dérivée normale du potentiel subit une discontinuité proportionnelle à la densité surfacique de charge.*

## 2.6.3 Cas du conducteur parfait

Si le champ électrique est nul d'un côté de la surface ( $\vec{E}_2 = \vec{0}$ ) les conditions aux limites se réduisent à :

$$\begin{cases} \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{1}_n \\ \left( \frac{\partial V}{\partial n} \right)_1 = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \end{cases} \quad (2.30)$$

---

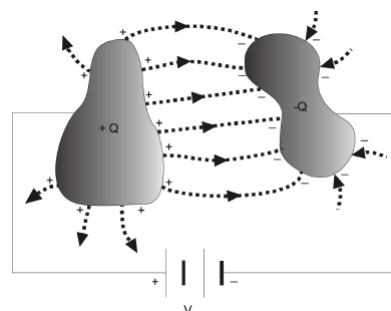
2. Taux de variation dans la direction normale à la surface

## 2.7 Condensateur et coefficient de capacité

### 2.7.1 Conducteurs formant un condensateur

Soit deux conducteurs portant des charges opposées. Lors de l'équilibre électrostatique :

- Le champ électrique est nul à l'intérieur de chaque conducteur.
- Tous les points à l'intérieur et sur la surface d'un conducteur sont au même potentiel.
- Toute la charge se répartit à la surface des conducteurs sous forme d'une densité superficielle  $\sigma$ .
- Le champ électrique à l'extérieur, et au voisinage immédiat du conducteur, est normal à la surface de celui-ci :



$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{1}_n \quad (2.31) \quad \text{FIGURE 2.3 - Condensateur}$$

### 2.7.2 Coefficient de capacité

Comme  $V \propto \vec{E}$  et  $\vec{E} \propto Q$ , on peut dire que  $V \propto Q$ . En notant  $C$  le coefficient de proportionnalité, on peut écrire :

$$Q = CV \quad (2.32)$$

Elle a pour unité le **farad**. C'est un facteur purement géométrique (forme des armatures). Un tel système de deux conducteurs est un *condensateur*.

### 2.7.3 Condensateur plan

Un grand classique du cours de *Physique Générale*. En supposant que la distance entre les plaques est bien plus petite que la dimension des armatures et que  $\vec{E}$  est normal à celles-ci :

$$E = \frac{Q}{\epsilon_0 A} \quad (2.33)$$

Comme  $V = Ed$ , on trouve que  $V = \frac{Qd}{\epsilon_0 A}$  et la capacité de ce condensateur plan vaut :

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} \quad (2.34)$$

### 2.7.4 Énergie accumulée dans un condensateur

Le travail nécessaire pour séparer les charges et les transférer d'une armature à l'autre via le circuit *extérieur* du condensateur est donné par :

$$W = \frac{1}{2} CV^2 \quad (2.35)$$

Trois démonstrations sont présentées dans le cours (page 49-50) et dans les slides (97-99) mais c'est bien connu depuis l'année passée !

## 2.8 Forces électrostatiques

### 2.8.1 Forces entre armatures dans un condensateur plan

Quel travail faut-il effectuer pour déplacer les armatures de  $\delta d$  :  $\delta W = F_{ext}\delta d$ . Par conservation d'énergie,  $W$  doit valoir l'expression trouvée ci-dessus. La variation de travail vaut dès lors :

$$\delta W = \delta \left( \frac{Q^2}{2C} \right) \quad (2.36)$$

Deux cas sont à considérer.

#### Cas 1 : condensateur à charge constante

Si le condensateur est déconnecté de la pile,  $Q$  reste constante et on peut le sortir de la variation :

$$\delta W = \frac{Q^2}{2} \delta \left( \frac{1}{C} \right) \quad (2.37)$$

Connaissant l'expression de  $C$  on trouve :

$$\delta \left( \frac{1}{C} \right) = \frac{\delta d}{\epsilon_0 A} \quad (2.38)$$

Finalement :

$$F_{ext} = \frac{\delta W}{\delta d} = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 A} \quad (2.39)$$

Quantité forcément positive : existe une force électrique d'attraction entre les armatures qui tend à augmenter la capacité. La mesure de cette force permet de mesurer  $Q$  : principe d'un électromètre.

#### Cas 2 : Condensateur à ddp constante

Si le condensateur reste connecté à la pile durant le déplacement virtuel la ddp sera constante et c'est  $Q$  qui variera :  $\delta Q = V\delta C$ . La source doit fournir un travail pour donner cette charge :

$$\delta W_{source} = V\delta Q = V^2\delta C \quad (2.40)$$

Comme on connaît l'expression de  $W$  :

$$\delta \left( \frac{1}{2} CV^2 \right) = \frac{1}{2} V^2 \delta C \quad (2.41)$$

Par conservation : travail de la source + travail mécanique = variation d'énergie potentielle :

$$V^2\delta C + F_{ext}\delta d = \frac{1}{2} V^2\delta C \quad (2.42)$$

On trouve que  $F_{ext}\delta d = -\frac{1}{2} V^2\delta C$ . Comme  $\delta C = -\frac{\epsilon_0 A}{d^2} \delta d$  on trouve la force entre les armatures :

$$F_{ext} = \frac{\epsilon_0 A}{2d^2} V^2 \quad (2.43)$$

La mesure de cette force permet d'obtenir la ddp : principe du voltmètre électrostatique.

### 2.8.2 Forces s'exerçant sur une charge de surface et pression électrostatique Champ électrique au sein d'une surface chargée (démonstration pas à connaître)

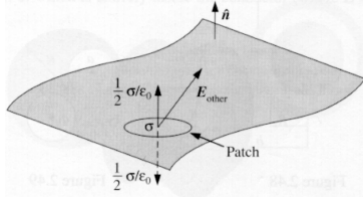


FIGURE 2.4 – Calcul de la pression électrostatique

Considérons un "patch" infinitésimal sur la surface. Par def. de  $\vec{E}$ , la force s'exerçant sur le patch est due aux charges adjacentes **mais pas** celles du patch. Considérons la densité de force  $\vec{f} = \sigma \vec{E}_{other}$ . Séparons le champ local (dû au patch) du champ dû aux autres charges :

$$\vec{E}_{tot} = \vec{E}_{patch} + \vec{E}_{other} \quad (2.44)$$

On peut ré-écrire les discontinuité trouvées précédemment :

$$\begin{cases} \vec{E}_{patch,up} - \vec{E}_{patch,down} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{1}_n \\ \vec{E}_{other,up} - \vec{E}_{other,down} = 0 \end{cases} \quad (2.45)$$

On peut dès lors écrire :

$$\begin{cases} E_{tot,up} = E_{n,other} + E_{patch,up} \\ E_{tot,down} = E_{n,other} + E_{patch,down} \end{cases} \quad (2.46)$$

Par sommation  $E_{1n} + E_{2n} = 2E_{n,other} + (E_{patch,up} + E_{patch,down})$ . Vu le caractère géométrique "divergent" les composantes de la parenthèse sont opposées : elle vaut donc 0. On en tire :

$$E_{n,other} = \frac{1}{2}(E_{tot,up} + E_{tot,down}) \quad (2.47)$$

Connaissant les valeurs grâce à la discontinuité, on trouve :

Le champ s'exerçant sur une charge de surface est la moyenne des champs s'exerçant de part et d'autre de la surface chargée.

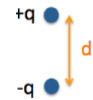
$$\vec{E}_{other} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{1}_n \quad (2.48)$$

Ce qui donne une pression électrostatique :

$$\vec{f} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \vec{1}_n \quad (2.49)$$

## 2.9 Dipôle électrique

Un dipôle électrique est un ensemble de deux charges solidaires de même grandeur et de signes opposés,  $+q$  et  $-q$  séparées d'une distance  $d$ .



### 2.9.1 Moment dipolaire $\vec{p}$

Le moment dipolaire est défini comme  $\vec{p} = q\vec{d}$ . C'est un vecteur orienté de la charge négative vers la charge positive.

FIGURE 2.5 – Dipôle

### 2.9.2 Potentiel et champ autour d'un dipôle

Le potentiel dû à un dipôle en un point vaut <sup>3</sup> :

$$V(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{1}_r}{R^2} \quad (2.50)$$

3. où  $\vec{R}$  représente le vecteur joignant le dipôle au point considéré.

### 2.9.3 Force et couple agissant sur un dipôle

Tout dipôle plongé dans un champ  $\vec{E}$  - supposé uniforme - subit un couple<sup>4</sup> :

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E} \quad (2.51)$$

La force agissant sur un dipôle est<sup>5</sup> :

$$\vec{F} = (\vec{p} \cdot \text{grad}) \vec{E} \quad (2.52)$$

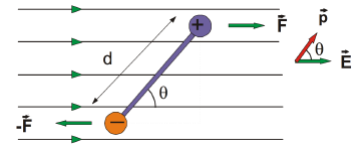


FIGURE 2.6 – Couple de force sur un dipôle

---

4. Démonstration slide 117, page 60.

5. Démonstration slide 119, page 61.

## Chapitre 3

# Milieux diélectriques

Il s'agit de matériaux isolants : peu de charges électriques capables de se mouvoir pour donner lieu à des courants (peu ou pas d' $e^-$  libres). On fera l'hypothèse qu'à l'échelle atomique peuvent exister ou apparaître des dipôles qui subiront une polarisation.

### 3.1 Comment étendre les équations de Maxwell aux milieux diélectriques ?

#### 3.1.1 Introduction

L'électrostatique dans le vide est basée sur l'idée que  $\vec{E}$  est partout défini. On retrouve la force grâce à  $\vec{F} = q_0 \vec{E}$  et  $\vec{E}$  avec  $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ .

Hélas, cela ne fonctionne plus en diélectrique, on ne trouve pas réellement la force sur  $q_0$ .

#### 3.1.2 L'astuce : charges libres et charges de polarisation

Le champ électrique  $\vec{E}$  reste défini comme force par unité de charge

On conserve ce que l'on a *défini* précédemment :

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} \quad (3.1)$$

**Les charges libres sont les sources du problème**

On considère que les charges autre que  $q_0$  continuent à générer un champ : ce sont les **charges libres**

$$\text{div } \vec{E}_l = \frac{\rho_l}{\epsilon_0} \quad (3.2)$$

Mais on ne peut appeler  $\vec{E}_l$  *champ électrique* car il ne répond pas à la définition.

**Les charges de polarisation représentent l'influence du diélectrique**

Le champ électrique  $\vec{E}$  n'est plus directement lié au source. La différence entre  $\vec{E}$  et  $\vec{E}_l$  donne un troisième champ :

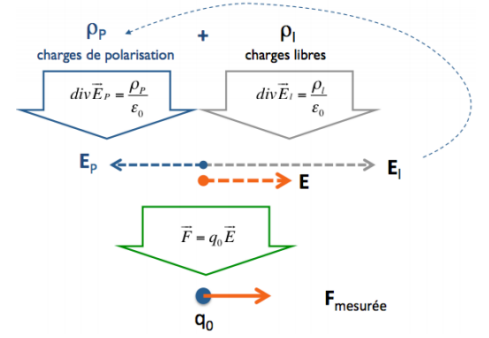
$$\vec{E}_p$$

$$\vec{E} = \vec{E}_l + \vec{E}_p \quad (3.3)$$

On voit que le champ électrique se réduit par rapport au vide, donc que  $\vec{E}_p$  s'oppose à  $\vec{E}_l$ .

Par **cohérence** on considère des *charges e polarisation* (ou charges liées- qui répondent aussi à Gauss

$$\text{div } \vec{E}_p = \frac{\rho_p}{\epsilon_0} \quad (3.4)$$



**La loi de gauss reste mais...**

Il faut tenir compte de la somme de la *densité de charge libre* et de la *densité de charge de polarisation* :

$$\rho = \rho_l + \rho_p \quad (3.5)$$

Et l'on peut écrire la loi de Gauss comme précédemment :  $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ .

En présence de diélectrique, la loi de Gauss reste valable à condition de considérer dans celle-ci la charge totale (somme des charges libres et des charges de polarisation).

FIGURE 3.1 – Maxwell pour les diélectriques

## 3.2 Matériaux diélectriques et polarisation

### 3.2.1 Hypothèse de la polarisation

Le champ  $\vec{E}$  externe *polarise* les matériaux isolants, c'est-à-dire qu'il oriente préférentiellement les dipôles permanents ou induits.

### 3.2.2 Le champ $\vec{P}$ : polarisation

La polarisation est la *densité* de moment dipolaire. C'est la moment dipolaire par unité de volume<sup>1</sup>

$$\vec{p} = \int_v \vec{P} \cdot d\tau \quad (3.6)$$

### 3.2.3 Potentiel et champ générés par de la matière polarisée

Le potentiel dû à un volume de matériau polarisé est identique à celui de charges de surface et de volume (d'un matériau non polarisé).

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\sigma_p}{R} dS + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_\tau \frac{\rho_p}{R} d\tau \quad (3.7)$$

On va comparer deux situations : une avec un matériau dans lequel j'ai des dipôles que je vais pouvoir la décrire avec un champ  $\vec{P}$ .

Cette situation est équivalente à un problème dans le vide dans lequel j'aurais une densité de polarisation  $\rho_p$ . Je pourrais imaginer qu'il y a des charges de surfaces.

Dans ce cas  $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$  sera toujours d'application. Elles sont équivalentes. Reste à savoir quelle est la relation entre les deux :

1. Par exemple, pour  $N$  atomes ayant un moment dipolaire  $q_e \vec{d}$  on trouve  $\vec{P} = N q_e \vec{d}$



*Démonstration.* (pas à connaître) Un volume élémentaire  $d\tau$  contient un moment dipolaire élémentaire :  $dp = P.d\tau$ . Par le ch. précédent, le potentiel autour de  $\tau$  vaut donc

$$V(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \frac{\vec{P} \cdot \vec{1}_R}{R^2} d\tau \quad (3.8)$$

Comme  $\text{grad}(1/R) = -\vec{1}_R/R^2$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \vec{P} \cdot \text{grad}\left(\frac{1}{R}\right) d\tau \quad (3.9)$$

En utilisant la propriété  $\text{div}(f\vec{a}) = f\text{div}(\vec{a}) + \vec{a} \cdot \text{grad}(f)$  on obtient :

$$V_p(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \int_v \text{div}\left(\frac{\vec{P}}{R}\right) d\tau - \int_V \frac{1}{R} \text{div}(\vec{P}) d\tau \right] \quad (3.10)$$

J'applique Ostrogradsky sur le premier terme :

$$V_p(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\vec{P} \cdot d\vec{S}}{R} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\text{div}\vec{P}}{R} d\tau \quad (3.11)$$

En utilisant les relations suivantes :

$$\begin{cases} V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \frac{\rho}{R} d\tau \\ V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma}{R} dS \end{cases} \quad (3.12)$$

On trouve

$$V_p(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\sigma_p}{R} dS + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \frac{\rho_p}{R} d\tau \quad (3.13)$$

Par identification, on montre que le potentiel généré en tout point par un matériau polarisé de polarisation  $\vec{P}$  est identique au potentiel électrique qui serait généré par une distribution de charge telle que :

$$\begin{cases} \sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{1}_n \\ \rho_p = -\text{div} \vec{P} \end{cases} \quad (3.14)$$

□

### 3.3 Champ de déplacement $\vec{D}$ et relation constitutive

Pour "simplifier", on introduit le champ de déplacement  $\vec{D}$ . Pour tenir compte des charges de polarisation, je dois changer  $\rho$

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{où} \begin{cases} \rho = \rho_l + \rho_p \\ \rho_p = -\text{div} \vec{P} \end{cases} \quad (3.15)$$

On trouve ainsi que  $\text{div}(\epsilon_0 \vec{E}) = \rho_l - \text{div} \vec{P} \Leftrightarrow \text{div}(\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_l$ .

En introduisant le champ  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

$$\text{div} \vec{D} = \rho_l \quad (3.16)$$

Le champ  $\vec{D}$  (champ source) ne fait intervenir que la charge libre contrairement au champ  $\vec{E}$  (champ effet) qui considère la charge totale<sup>2</sup>.

$$\vec{E} = \frac{4}{4\pi\epsilon_0 R^2} \vec{1}_R \quad \vec{D} = \frac{4}{4\pi R^2} \vec{1}_R \quad (3.17)$$

---

2. La seule différence entre les deux est un facteur  $\epsilon_0$

## 3.4 Diélectriques linéaires

### 3.4.2 Diélectrique linéaire

Un diélectrique est linéaire si sa permittivité est une constante.

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

La polarisation est logiquement liée au champ extérieur. Par définition :

$$\vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E} \quad (3.18)$$

On obtient que  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0(1 + \chi_e) = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon \vec{E}$ .

On retrouve les notation du cours de *Physique Générale* ou  $\epsilon_0$  est la permittivité du vide,  $\epsilon_r$  est la permittivité relative et  $\chi_e$  la susceptibilité électrique.<sup>3</sup>

### 3.4.3 Diélectriques linéaires homogène

Un diélectrique est **homogène** si sa permittivité est constante dans l'espace. On peut dès lors montrer que la densité de charge de polarisation  $\propto$  densité de charge libre :

$$\rho_p = -\text{div} \vec{P} = -\text{div}(\chi_e \epsilon_0 \vec{E}) = -\text{div} \left( \frac{\chi_e \epsilon_0}{\epsilon} \vec{D} \right) = -\frac{\chi_e \epsilon_0}{\epsilon} \text{div}(\vec{D}) = -\frac{\chi_e}{\epsilon_r} \rho_l \quad (3.19)$$

Sa densité de charge totale vaut alors :

$$\rho = \rho_l + \rho_p = \left( 1 - \frac{\chi_e}{\epsilon_r} \right) \rho_l = \frac{\rho_l}{\epsilon_r} \quad (3.20)$$

S'il n'y a pas de charge libre à l'intérieur du diélectrique, il n'y aura pas de polarisation en volume :  $\rho_p = 0$ .

On en conclut que la théorie des diélectriques linéaires et homogènes est similaire à celle des champs dans le vide, à condition d'y remplacer  $\epsilon_0$  par  $\epsilon$ .

	vide	diélectrique	diélectrique linéaire
équ. constitutive	$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$	$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$	$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$
loi Gauss (champ source)	$\text{div} \vec{D} = \rho_l$	$\text{div} \vec{D} = \rho_l$	$\text{div} \vec{D} = \rho_l$
loi Gauss (champ effet)	$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho_l}{\epsilon_0}$	$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho_{tot}}{\epsilon_0}$	$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho_{tot}}{\epsilon} = \frac{\rho_l}{\epsilon}$
loi Poisson	$\Delta V = -\frac{\rho_l}{\epsilon_0}$	$\Delta V = -\frac{\rho_{tot}}{\epsilon_0}$	$\Delta V = -\frac{\rho_{tot}}{\epsilon} = -\frac{\rho_l}{\epsilon}$

FIGURE 3.2 – Tableau récapitulatif

3. En pratique  $\epsilon_r \geq 1$  (ou  $\epsilon \geq \epsilon_0$ ), c'est-à-dire que pour un même champ  $\vec{D}$ , le champ  $\vec{E}$  est plus faible en présence d'un diélectrique que dans le vide.

## 3.6 Conditions aux limites

Comme précédemment, on va retrouver une discontinuité entre les champs  $\vec{D}$  et  $\vec{E}$  de part et d'autre d'une surface chargée. (Cf. slide T43-45, page 85-87)

## 3.7 Énergie dans les diélectriques linéaires

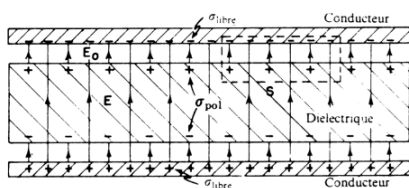
Pour rappel, on avait obtenu dans le vide  $w_e = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$ . En présence de diélectriques linéaires, celle-ci vaut maintenant en tout point <sup>4</sup> :

$$w_e = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 \quad (3.21)$$

Cela peut également s'écrire <sup>5</sup>  $w_e = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \vec{P} \cdot \vec{E}$  ou le deuxième terme est l'énergie additionnelle qui doit être fournie par les sources pour établir le champ  $\vec{E}$  dans un milieu diélectrique : c'est l'énergie supplémentaire requise pour *polariser* le diélectrique.

## 3.8 Condensateur plan avec diélectrique

### 3.8.1 Calcul du champ



En présence d'un champ extérieur (charges sur les armatures) les diélectrique se polarise : (charge superficielle de polarisation apparaissant en face des armatures et champ électrique "induit" opposé au champ initial).

Le champ initial vaut  $\vec{E}_0 = \frac{\sigma_l}{\epsilon_0} \vec{1}_z$ . Compte-tenu de  $\vec{\sigma}_p = \vec{P} \cdot \vec{1}_n$ , le champ total est :

FIGURE 3.3 – Condensateur plan avec diélectrique

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_p = \frac{\sigma_l - P}{\epsilon_0} \vec{1}_z \quad (3.22)$$

Les charges de polarisation sont, sur chaque armature, de signe opposé aux charges libre et créent bien un champ opposé à  $\vec{E}_0$ .

Pour un diélectrique linéaire  $P = \chi_e \epsilon_0 E$  on trouve que le champ est réduit d'un facteur  $\epsilon_r$  :

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \frac{1}{1 + \chi} = \frac{\sigma_l}{\epsilon_0} \frac{1}{\epsilon_r} = \frac{\sigma_l}{\epsilon} \quad (3.23)$$

### 3.8.2 Calcul de la capacité

La ddp entre les armatures est  $V = E \cdot d = \frac{\sigma_l d}{\epsilon}$  et la charge totale  $Q = \sigma_l \cdot A$ . La capacité vaut dès-lors :

$$C = \frac{Q}{V} = \epsilon_r \frac{\epsilon_0 A}{d} = \frac{\epsilon A}{d} \quad (3.24)$$

La capacité est donc multipliée par le facteur  $\epsilon_r$  dans le cas d'un diélectrique homogène par rapport à sa valeur dans le vide.

### 3.8.3 Force latérale due à l'effet de bord

Petit cas d'école suffisamment détaillé à la page 92-93.

4. Démonstration page 88-89.

5. Comme  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

### 3.9 Expression générale du coefficient de capacité

Reprenons notre condensateur en supposant que l'espace entre les armatures est entièrement rempli par un diélectrique linéaire et homogène de permittivité  $\epsilon$ . La forme "non" générale bien connue est  $C = \frac{Q}{V}$ . Cette charge  $Q$  est bien la *charge libre* et est donc lié au champ de déplacement. L'expression générale sera donc :

$$C = \frac{\oint_s \vec{D} \cdot d\vec{S}}{-\int_L \vec{E} \cdot d\vec{l}} \quad (3.25)$$

Ou encore :

$$C = \frac{\oint_s \epsilon \vec{E} \cdot d\vec{S}}{-\int_L \vec{E} \cdot d\vec{l}} \quad (3.26)$$

#### 3.9.1 Exemple : condensateur cylindrique

Grand classique du cours de *Physique Générale* : Cf. slide T58 et page 95.

$$C = \frac{2\pi\epsilon L}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \quad (3.27)$$

## Chapitre 4

# Milieux conducteurs (effet résistif)

Dans certains matériaux, l'application d'une champ  $\vec{E}$  externe provoque un mouvement de charges électriques, soit un courant.

Ce sont ces *charges libres* qui caractérisent les conducteurs.

### 4.1 Tension et courant

Le courant est un débit de charge  $I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$ . Si celui-ci n'est pas constant, on peut considérer sa valeur instantanée.

$$I(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt} \quad (4.1)$$

Il est plus courant lorsqu'on travaille localement d'utiliser la *densité de courant*, c'est-à-dire le courant traversé par unité de surface :  $J = \frac{I}{S}$ . Ceci permet de redéfinir le courant de la sorte :

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (4.2)$$

Une autre façon de définir  $\vec{J}$  est de multiplier la densité de volume par la vitesse :  $\vec{J} = \rho \vec{u}$ .

### 4.2 Relation constitutive : loi d'Ohm locale

#### 4.2.1 Loi d'Ohm locale

Imposer un champ électrique sur des charges libres fait apparaître une densité de courant  $\vec{J} \neq 0$ . Ceci est modélisé de façon linéaire :

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (4.3)$$

où  $\sigma$  est la **conductivité** [ $\Omega^{-1}m^{-1}$ ]. Ceci est l'expression de la *loi d'Ohm locale*.

**Attention !** La densité surfacique de charge sera noté  $\zeta$  et la conductivité  $\sigma$ , ne pas confondre !

#### 4.2.2 Conductivité et résistivité

La résistivité est l'inverse de la conductivité, elle s'exprime donc en [ $\Omega m$ ] :  $\rho = \frac{1}{\sigma}$ .

**Attention !** Ne pas la confondre avec la densité volumique de charge  $\rho_v$ .

Ces facteurs dépendent assez fortement de la température :

$$\rho = \rho_0 [1 + \alpha(T - T_0)] \quad (4.4)$$

où  $\rho_0, T_0$  sont les valeurs de références et  $\alpha$  le coefficient de température.

### 4.3 Coefficient de résistance

#### 4.3.1 Conducteurs soumis à une différence de potentiel

Soit un matériau conducteur ( $\sigma$ ) entouré par du vide (isolant parfait). En appliquant une ddp (moyen externe) je crée un champ  $\vec{E}$  qui va causer l'apparition d'une densité de courant  $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ . S'il n'y a pas d'accumulation de charge  $\frac{d\rho_v}{dt} = 0$  et l'équation de continuité de charge vaut :

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (4.5)$$

Vu qu'aucun courant ne peut s'échapper, le courant total traversant deux surfaces quelconques  $A'$  et  $A$  sera identique.

$$\int_A \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_{A'} \vec{J} \cdot d\vec{S} = I \quad (4.6)$$

Ceci est vrai  $\forall$  forme du conducteur. Le conducteur qui n'est plus équipotentiel présente bien des surfaces équipotentiellles.

### 4.3.2 Coefficient de résistance

Connaissant l'expression de la ddp  $V = - \int_L \vec{E} . d\vec{l}$ , la définition de  $I = \int_A \vec{J} . d\vec{S} = \int_A \sigma \vec{E} . d\vec{S}$  ainsi que la loi d'Ohm, on peut définir le *coefficient de résistance*  $R$  :

$$R = \frac{-\int_L \vec{E} \cdot d\vec{l}}{\int_A \sigma \vec{E} \cdot d\vec{S}} \quad (4.7)$$

Ce coefficient traduit la disposition géométrique du milieu.

#### 4.4 Temps de relaxation

En principe un métal est un bon conducteur et un diélectrique un bon isolant. Mais ceux-ci peuvent être le siège d'un effet diélectrique et résistif simultanément.

Soit un milieu linéaire et homogène  $(\epsilon, \sigma)$ . Pour une densité volumique de charge  $\rho_v$  :

$$div \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (4.8)$$

En utilisant la loi d'Ohm locale et l'équation de continuité  $div \vec{J} + \frac{\partial \rho_v}{\partial t} = 0$ , on obtient une équation différentielle en  $\rho_v$  :

$$\frac{\partial \rho_v}{\partial t} + \frac{\sigma}{\epsilon} \rho_v = 0 \quad (4.9)$$

La solution donne la variation temporelle de  $\rho_v$  au départ de  $\rho_{v,0}$

$$\rho_v(t) = \rho_{v,0} e^{-\left(\frac{\sigma}{\epsilon}\right)t} \quad (4.10)$$

La charge de volume diminue pour se retrouver à la surface du matériaux. Le **temps de relaxation** est la constante  $t_r = \frac{\epsilon}{\sigma}$ . C'est la durée nécessaire pour que  $\rho_v$  diminue de 36.8%.

Dans le cuivre  $t_r = 1,5.10^{-19}s$ . Toute  $\rho_v$  qui apparaît disparaît donc quasi instantanément. Considérer  $\rho_v = 0$  dans un conducteur est donc raisonnable.

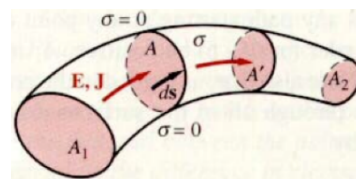


FIGURE 4.1 – Matériau conducteur entouré d'un isolant

## 4.5 Conditions aux limites

Même raisonnement que précédemment (Cf. syllabus p 109).

## 4.6 Aspects microscopiques : courant de conduction (pas connaître les formules)

Dans un atome, les électrons de valences vont subir une force  $\vec{F} = q\vec{E}$  en présence d'un champ électrique à une *vitesse de dérive*.

### 4.6.1 Expression de la densité de courant

S'il y a  $N$  particules par unité de volume, la densité de charge vaut  $\rho_v = Nq$ . Comme pour le cours de *Physique Générale*, les particules parcourent une distance  $\Delta L = u\Delta t$  durant un temps  $\Delta t$ .

La quantité de charge traversant la surface vaut donc (en vectorielle pour toute généralité) :

$$\Delta Q = Nq\vec{u} \cdot \Delta\vec{S} \quad (4.11)$$

Le courant vaut dès lors  $Nq\vec{u} \cdot \Delta\vec{S}$ , ou encore avec la densité de courant  $\vec{J} = Nq\vec{u} = \rho_v\vec{u}$ . Ceci se généralise facilement dans le cas à plusieurs type de charges à l'aide d'une sommation.

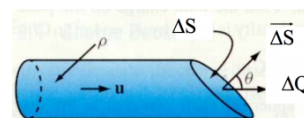


FIGURE 4.2  
– Courant au travers d'une surface

### Cas particulier d'un conducteur métallique

Ici les charges sont les  $e^-$  libres. Les charges positives des noyaux restent immobiles par rapport au volume du conducteur (pas de rôle dans le courant). Comme il y a priori deux types de charges<sup>1</sup> :

$$\vec{J} = \rho_{v,e}\vec{v}_e + \rho_{v,p}\vec{v}_p \quad (4.12)$$

Comme  $\vec{v}_p = \vec{0}$ , la densité de courant se réduit à  $\vec{J} = \rho_e\vec{v}_e = N_e q_e \vec{v}_e$ .

Le déplacement des  $e^-$  n'empêche pas la neutralité du conducteur dans son ensemble ( $\rho_{v,e} + \rho_{v,p} = 0$ ). Un courant peut donc exister dans un conducteur non chargé.

### 4.6.2 Courant de conduction >< courant de convection

La loi d'Ohm locale semble montrer que les électrons n'accélèrent pas mais évoluent à vitesse constante ce qui est en opposition avec  $f = ma$ . Ceci s'explique car  $\vec{v}_d$  ne représente pas la vitesse individuelle des charges.

**Courant de conduction** : Mouvement d'ensemble des électrons libres à l'intérieur d'un conducteur. C'est le "courant" usuel qui suit la loi d'Ohm. C'est le nuage d'électron pris dans son ensemble.

**Courant de convection** : Déplacement de matière chargée par exemple électrons dans les tubes cathodiques. Ne suit pas la loi d'Ohm. Ce sont les électrons pris dans le vide.

Dans un conducteur, le débit de charges est un courant de conduction : il résulte d'un mouvement d'ensemble des porteurs de charges libres de se déplacer.

1. La vitesse relative des électrons par rapport au conducteur  $\vec{v}_e$  est aussi appelé *vitesse de dérive*  $\vec{v}_d$ .

### 4.6.3 Vitesse des charges = vitesse de dérive

Chaque  $e^-$  rentre en collision dans le cristal et cela arrive souvent : c'est le mouvement brownien qui correspond à la situation où il n'y a pas de courant.

En moyenne, l' $e^-$  parcourt une distance entre deux collisions : le libre parcours moyen. J'ai donc également un temps moyen entre deux collisions.

$$\lambda = v_{th}.t_c \quad (4.13)$$

Ici  $f = ma$  est bien vérifiée, la vitesse de dérive est la vitesse moyenne du nuage d'électrons ou les électrons rentrent toujours en collision avec le cristal. La vitesse de la loi d'Ohm est donc la vitesse du nuage.

On définira ainsi la mobilité comme le coefficient de  $\propto$  entre  $v$  et  $E$

$$\vec{v}_d = \mu_e \vec{E} \quad (4.14)$$

En prenant des données chiffrées, on remarque que le déplacement du nuage<sup>2</sup> est très lent ( $cl/h$  pour de bons conducteurs) mais le déplacement des électrons est très rapide.

## 4.7 Puissance dissipée : effet Joule

Le travail nécessaire pour déplacer  $dQ$  dans un potentiel vaut  $dW = VdQ$ . Comme  $P = \frac{dW}{dt}$  :

$$P = IV \quad (4.15)$$

La puissance dissipée vaudra dès lors  $RI^2 = V^2/R$ .

La force par unité de volume vaut  $\vec{f} = \rho_v \vec{E}$ . Comme  $p = \vec{f} \cdot \vec{v}$  la puissance dissipée en formulation locale :

$$p_{joule} = \rho \vec{E} \vec{v} = \vec{J} \cdot \vec{E} = \sigma E^2 \quad (4.16)$$

Comme l' $E_c = cste$  toute l'énergie se retrouve dissipée en chaleur.

La puissance totale dissipée peut s'obtenir en intégrant la densité de puissance sur le volume du conducteur.

$$P_{joule} = \int_V \vec{J} \cdot \vec{E} d\tau \quad (4.17)$$

## 4.8 Exemples de calcul de résistance

Voir syllabus page 121-122, slides 39-42.

## 4.9 Analogie entre résistance et capacité

On peut remarquer que  $R$  et  $C$  ont des formulations proches :

$$\left\{ \begin{array}{l} R = \frac{I}{V} = \frac{-\int_L \vec{E} d\vec{l}}{\int_S \sigma \vec{E} d\vec{S}} \\ C = \frac{Q}{V} = \frac{\oint_S \vec{E} d\vec{S}}{-\int_L \vec{E} \cdot d\vec{l}} \end{array} \right. \quad (4.18)$$

---

2.  $\vec{v}_d$  est très lente.



On remarque que si l'on connaît la résistance, on peut calculer la capacité sans recalculer une intégrale et inversement.

$$RC = \frac{\epsilon}{\sigma} \quad (4.19)$$

**Attention !** Ne pas se tromper en considérant  $R$  et  $C$  ! L'exemple page 124 est pertinent.

## 4.10 Équations de Maxwell et loi des nœuds

La somme (algébrique) des courants entrants dans un nœud est nulle : cela se justifie par les équations de Maxwell.

*Démonstration.*

L'équation de continuité sous forme locale est  $\text{div } \vec{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}$  et appliquons la au nœud ci-dessous.

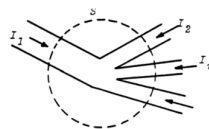


FIGURE 4.3 – Nœud

$$\sum_j I_j + \int_{\text{Si isolante}} \vec{J} \cdot d\vec{S} = -\frac{dQ}{dt} \quad (4.20)$$

En considérant un isolant parfait, la densité de courant est nulle ( $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ ) : le terme intégral l'est également.

A l'intérieur d'un bon conducteur, la densité volumique est nulle : la charge totale<sup>3</sup> est aussi nulle tout comme sa dérivée<sup>4</sup>.

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\tau} \rho_v d\tau = 0 \quad (4.21)$$

On retrouve bien que la somme algébrique des courants entrant dans un nœud est nulle

$$\sum_j I_j = 0 \quad (4.22)$$

□

## 4.11 Loi des mailles et force électromotrice

### 4.11.1 Justification de la loi des mailles

Démontrons la loi des mailles :

*Démonstration.*

En statique, d'après la deuxième loi de Maxwell

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (4.23)$$

Combinons cela à la relation liant  $\vec{E}$  et  $V$  :

$$\vec{E} = -\text{grad } V \quad (4.24)$$

3. Charges positives et négatives confondues

4. Cela traduit le fait qu'il n'y a pas d'accumulation de charges.

Cela signifie que la somme des ddp le long de toute maille fermée est nulle

$$\sum_{\text{circuit}} \Delta V_i = 0 \quad (4.25)$$

□

### 4.11.2 Rôle du générateur dans un circuit

#### Le générateur : un composant qui viole les équations de Maxwell

Dans un générateur, les charge ne vont pas du "+" au "-" puisque le courant doit circuler en boucle fermer il doit aller du "-" au "+" dans le générateur : viol des équations; les charges vont à priori "remonter" le champ électrique. Les charges vont à contre-sens du chap  $E$  par rapport au circuit extérieur : la source communique de l'énergie potentielle aux charges.

Que se passe-t-il dans une pile ? Il va y avoir un phénomène autre électromagnétique qui entretient la différence de potentiel. Comme ici c'est chimique (et donc d'origine externe), ce n'est pas régi par Maxwell.

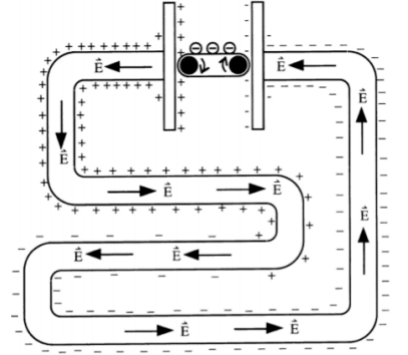


FIGURE 4.4 – Représentation imagée de la circulation des charges dans un circuit

### 4.11.3 Modélisation du générateur : force électromotrice

On va supposer qu'il existe dans un générateur une force de sens contraire à  $\vec{E}$  qui a pour effet de "remonter le potentiel des charges" ( $- \rightarrow +$ ), force notée  $\vec{f}_s$ . La force nette dans le générateur vaut alors <sup>5</sup> :

$$\vec{f}_{tot} = \vec{f}_s + \vec{E} \quad (4.26)$$

#### Force électromotrice

Il s'agit de la circulation de la force nette sur toute la longueur du circuit

$$\mathcal{E} = \oint_C \vec{f}_{tot} \cdot d\vec{l} \quad (4.27)$$

Comme  $\vec{f}_s$  est nulle en dehors de la pile, on peut ré-écrire :

$$\mathcal{E} = \oint_C \vec{f}_s \cdot d\vec{l} + \underbrace{\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l}}_{=0} = \int_a^b \vec{f}_s \cdot d\vec{l} \quad (4.28)$$

La fem peut être interprétée comme le travail par unité de charge fourni par la source. Dans une pile  $\vec{f}_s$  est la force nécessaire pour séparer les + des - et de les placer sur les bornes en surmontant la répulsion des charges qui s'y trouvent déjà.

5.  $\vec{f}_s$  n'agit que dans la source alors que  $\vec{E}$  est présent tout au long du contour.

#### 4.11.4 Cas de la source idéale

Pour qu'un courant circule, il suffit que les potentiels aux bornes de la source restent constants c'est-à-dire si le champ d'origine externe neutralise le champ électrostatique.

$$\vec{E}_{gen} = -\vec{f}_s \quad (4.29)$$

On a dans ce cas

$$V_{ab} = V_b - V_a = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \vec{f}_s \cdot d\vec{l} \quad (4.30)$$

La différence de potentiel aux bornes de la source vaut alors la fem :

$$V_{ab} = \int_a^b \vec{f}_s \cdot d\vec{l} = \mathcal{E} \quad (4.31)$$

L'équation d'une source idéale sera dès lors  $V = \mathcal{E}$ .

**Attention !** Une ddp est la circulation du champ  $E$ , soit un travail effectué par  $E$  pour faire circuler les charges et dissipée en chaleur alors que la fem est une énergie/travail d'origine externe fourni(e) par la source.

#### Cas de la source non idéale

Si  $\sigma_{cond} \neq \infty$ , déplacer les charges dans la source demande un travail additionnel. Dans la source,  $I$  est dû au déplacement des ions.

$$\vec{v}_{ions} = \mu_{ions}(\vec{f}_s + \vec{E}) \quad (4.32)$$

La densité de courant dans la pile sera de la forme

$$\vec{J} = \sigma_{ions}(\vec{f}_s + \vec{E}) \quad (4.33)$$

Dans la pile, on a toujours

$$\vec{f}_s = -\vec{E} + \frac{\vec{J}}{\sigma_{ions}} \quad (4.34)$$

La fem vaut dès lors

$$\mathcal{E} = \int_a^b \vec{f}_s \cdot d\vec{l} = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_a^b \frac{\vec{J}}{\sigma_{ions}} \cdot d\vec{l} \quad (4.35)$$

Le premier terme est la ddp entre  $a$  et  $b$  tandis que le deuxième peut s'écrire  $R_{out}I$ . On a donc :

$$\mathcal{E} = V_{ab} + R_{out}I \quad (4.36)$$

La fem (travail par unité de charge) doit compensé non seulement la dissipation dans le circuit par l'effet joule mais aussi la résistance interne du générateur qui s'oppose à la circulation du courant dans celui-ci.

# Chapitre 5

## Magnétostatique

### 5.1 Introduction

La force de Lorentz se compose d'une force électrique générée par un champ  $\vec{E}$  ainsi que d'une force magnétique.

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (5.1)$$

où  $\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$  est la force magnétique décrit au moyen du champ magnétique  $\vec{B}$  qui lui-même est produit par des charges en *mouvement*.

On peut voir  $\vec{v}$  comme la vitesse de dérive des électrons, par exemple en mouvement dans un fil. Chaque  $e^-$  subira la force magnétique  $q_e(\vec{v}_d \times \vec{B})$ . Sur un volume  $d\tau$ , la force élémentaire correspondante sera  $d\vec{F} = N_e d\tau q_e(\vec{v}_d \times \vec{B})$ . En introduisant la densité de courant :  $d\vec{F} = (\vec{J} \times \vec{B})$  et que celle-ci est uniforme  $d\vec{F} = \vec{J} \times \vec{B} \cdot A \cdot dl$ . Comme  $\vec{J} = \frac{I}{A} \vec{l}$  on trouve :

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B} \quad (5.2)$$

Ce qui est la force par unité de longueur du fil<sup>1</sup>. L'intensité et la direction de la force dépend du mouvement de la charge.

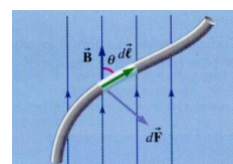


FIGURE 5.1 – Force sur un élément de courant

### 5.2 Le champ magnétique

Les équations de Maxwell pour la magnétostatique dans la vide sont :

$$\begin{cases} \text{div } \vec{B} = 0 \\ \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \end{cases} \quad \begin{cases} \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \\ \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \end{cases} \quad (5.3)$$

Pour récapituler : *charges en mouvement*  $\rightarrow$  *courant*<sup>2</sup>  $\rightarrow$  *champ magnétique*.

La divergence de  $\vec{B}$ , en comparaison avec celle de  $\vec{E}$  nous montre qu'il n'existe pas de charge magnétique d'où les lignes de champ de  $\vec{B}$  pourraient sortir : les lignes de champs forment des boucles ou s'étendent jusqu'à l'infini.

Le rotationnel donne le lien entre  $\vec{B}$  et  $I$ .

1. On doit voir le courant comme un "vecteur" en opposition à la charge ponctuelle.  
2. On supposera ici que les courants sont constants dans le temps.

## 5.3 Exemples de champ magnétique

La symétrie permet de déterminer les composantes de  $\vec{B} \neq \vec{0}$  pour ensuite appliquer la loi d'Ampère<sup>3</sup>

### 5.3.1 Conducteur rectiligne infini

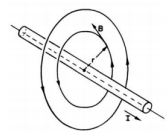


FIGURE 5.2 –  
Champ  $\vec{B}$  d'un  
conducteur infini

Le courant  $I$  est constant dans un fil rectiligne  $\rightarrow$  les lignes de champ magnétiques sont des cercles :  $\vec{B} = B_\phi \vec{1}_\phi$ . Appliquons Ampère :

$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = B_\phi \oint dl = B_\phi \cdot 2\pi r = \mu_0 I$ , ce qui nous donne :

$$\begin{cases} \vec{B} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi b^2} \vec{1}_\phi & r < b \\ \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{1}_\phi & r > b \end{cases} \quad (5.4)$$

### 5.3.2 Solénoïde infini

La loi d'Ampère permet d'établir que le champ est uniforme à l'intérieur du solénoïde et nul à l'extérieur.

$$\begin{cases} \vec{B} = n\mu_0 I \vec{1}_z & \text{à l'intérieur} \\ 0 & \text{à l'extérieur} \end{cases} \quad (5.5)$$



où  $n$  est le nombre de spires par unité de longueur.

Pour le solénoïde fini, le champ est non nul à l'extérieur, les lignes de champ devant se refermer.

FIGURE 5.3 – Solénoïde

### 5.3.3 Tore

Un tore est une bobine refermée sur elle-même : symétrie cylindrique implique que le champ aura seulement une composante en  $\phi$ <sup>4</sup>. On peut dès lors appliquer Ampère et trouver le champ à l'intérieur :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \vec{1}_\phi \quad (5.6)$$

ou  $N$  est le nombre total de spires. Le champ est nul à l'extérieur.

## 5.4 Le potentiel vecteur magnétique

La divergence d'un rotationnel est toujours nulle. Comme  $\text{div } \vec{B} = 0$  on peut imaginer un vecteur  $\vec{A}$  satisfaisant :

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} \quad (5.7)$$

où  $\vec{A}$  est le *potentiel vecteur magnétique* (ou "potentiel vecteur")<sup>5</sup>.

En électrostatique,  $V$  n'était défini qu'à une constante près. Comme on ne connaît que  $\text{rot } \vec{A}$ , celui-ci n'est défini qu'à une "constante vectorielle" près.

Une fonction dont le rotationnel s'annule est le gradient de quelque chose, ici le gradient d'un potentiel scalaire :

$$\vec{A}' = \vec{A} + \text{grad } \Psi \quad (5.8)$$

3. Aussi appelée loi d'Oersted en version intégrale)

4. Utiliser Biot-Savart pour s'en convaincre.

5. On peut voir cette expression comme "l'équivalent" de  $\vec{E} = -\text{grad } V$  en électrostatique.

On peut profiter de ceci pour imposer  $\text{div } \vec{A} = 0$ <sup>6</sup>.

Que devient la 4<sup>e</sup> équation de Maxwell  $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$  ?

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{A}) = \mu_0 \vec{J} \quad (5.9)$$

Comme  $\text{rot}(\text{rot } \vec{A}) = \text{grad}(\text{div } \vec{A}) - \Delta \vec{A}$  et la divergence de  $\vec{A}$  est nulle, on obtient :

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} \quad (5.10)$$

où  $\Delta$  est le Laplacien. L'équation du potentiel vecteur est équivalent à trois équations de Poisson :

$$\begin{cases} \Delta A_x = -\mu_0 J_x \\ \Delta A_y = -\mu_0 J_y \\ \Delta A_z = -\mu_0 J_z \end{cases} \quad (5.11)$$

Nous connaissons la solution de l'équation de Poisson pour l'électrostatique :  $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho}{R} d\tau$ . Par analogie, la solution sera (sous forme vectorielle) :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}}{R} d\tau \quad (5.12)$$

Deux cas particuliers sont renseignés dans les slides (T31, 32) et (ancien) syllabus page 74. Le potentiel vecteur est globalement orienté comme les courants.

Le flux magnétique voit également son expression modifiée :  $\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$  où  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ . Par Stokes, on trouve que le flux à travers une surface est la circulation du potentiel vecteur sur le contour fermé s'appuyant sur la surface.

$$\Phi = \int_S \text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad (5.13)$$

La vraie utilité du potentiel vecteur apparaîtra lors de l'étude des champs variables.

## 5.5 Formule de Biot-Savart

Une longue démonstration (non vue au cours et pas à connaître) nous donne la formule de Biot-Savart :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{\vec{J} \times \vec{r}_R}{R^2} d\tau \quad (5.14)$$

Elle permet d'obtenir le champ magnétique à partir des courants. Pour un fil, on aura  $\vec{J} = I d\vec{l}$ .

## 5.6 Exemples de potentiel vecteur

Les calculs sont dans le syllabus, ce qui est important c'est de voir que le potentiel vecteur est orienté dans le même sens que le courant (En  $\vec{1}_z$  pour le fil en 5.6.1)

---

6. On impose bien un potentiel nul à l'infini, alors pourquoi pas ça ?

## 5.7 Dipôle magnétique

Un dipôle magnétique est une boucle circulaire et filiforme parcourue par un courant  $I$ . On ne s'intéresse ici qu'aux cas à grande distance par rapport au rayon de la boucle. Le champ dû à un dipôle magnétique est (démonstration non vue en cours) :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I b^2}{4R^3} (2 \cos \theta \vec{1}_R + \sin \theta \vec{1}_\theta), \quad \vec{A} = \frac{\mu_0 I b^2}{4R^2} \sin \theta \vec{1}_\phi \quad (5.15)$$

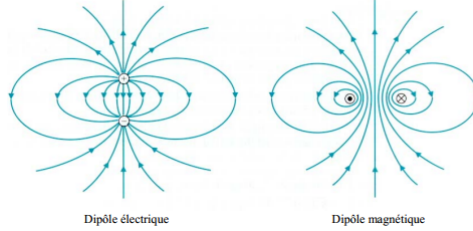


FIGURE 5.4 – Champ électrique et magnétique des dipôles

Le moment dipolaire  $m$  est le produit du courant par la surface de la boucle :

$$\vec{m} = m \cdot \vec{1}_z = I \pi b^2 \cdot \vec{1}_z = I S \vec{1}_z \quad (5.16)$$

Le champ d'un dipôle vaut :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 m}{4\pi R^3} (2 \cos \theta \vec{1}_R + \sin \theta \vec{1}_\theta) \quad (5.17)$$

À grande distance, ce champ est identique à celui du dipôle électrique.

## 5.8 Forces et couples sur des courants

L'élément de force vu au début de chapitre étant  $d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$ , la force totale sur une boucle parcourue de courant est :

$$\vec{F} = \oint_C I d\vec{l} \times \vec{B} \quad (5.18)$$

où le champ  $\vec{B}$  est celui produit par un autre courant :  $\vec{F}_{12} = \oint_{C_2} I_2 d\vec{l}_2 \times \vec{B}_1$ . Si le champ est **uniforme** la force totale sur un circuit fermé est toujours nulle :

$$\vec{F} = I \oint d\vec{l} \times \vec{B} = I \left( \oint d\vec{l} \right) \times \vec{B} = 0 \quad (5.19)$$

mais le champ uniforme produira cependant un couple sur le circuit.

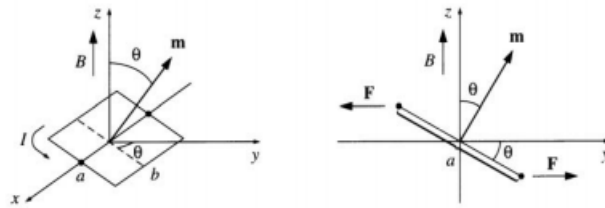


FIGURE 5.5 – Couple sur une boucle de courant

Les forces sur les côtés de longueur  $a$  sont alignées et opposées : pas de couple. Sur les côtés  $b$  elle sont opposées mais non alignées : couple. L'amplitude de chacune des forces est  $F = IbB$ . Le couple résultat est :

$$\vec{C} = aF \sin \theta \vec{1}_x = iAbB \sin \theta \vec{1}_x = mB \sin \theta \vec{1}_x = \vec{m} \times \vec{B} \quad (5.20)$$

Le couple tend à aligner le moment magnétique  $\vec{m}$  sur le champ  $\vec{B}$ . Des applications de ceci sont le galvanomètre (Slide T76) et le moteur électrique à courant continu (Slide 77)

## 5.9 Effet Hall (pas connaître les formules)

Il s'agit de l'apparition d'une ddp dans un conducteur parcouru par un courant et placé dans un champ magnétique, ddp orthogonale à  $\vec{B}$  et  $I$ . Le champ  $\vec{B}$  crée une force magnétique qui agit sur les électrons<sup>7</sup>  $\vec{F}_B = |q_e|v_d B \vec{1}_z$ . Cette force étant dirigée vers le haut, les charges négatives se concentrent dans le haut de la plaque. Cette séparation produit un champ électrique correspondant à une force en sens opposé :

$$\vec{F}_E = -|q_e|\vec{E}_t \quad (5.21)$$

A l'équilibre, la position des  $e^-$  est telle que la force électrique compense exactement la force magnétique :  $\vec{F}_E = -\vec{F}_B = -|q_e|\vec{E}_t$ . Comme  $\vec{E}_t = v_d B \vec{1}_z$ , le courant  $I = JS = J L l = N_e |q_e| v_d L l$  on trouve :

$$V_{Hall} = E_t L = v_d B L = \frac{IB}{N_e |q_e| l} \quad (5.22)$$

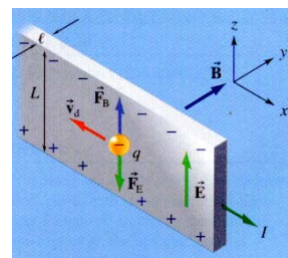


FIGURE 5.6 – Effet Hall

## 5.10 Conditions aux limites

Le champ électrique subit une discontinuité de sa composante normale alors que le champ magnétique va subir une discontinuité de sa composante tangentielle (Spoil++).

### Continuité du champ normal

En considérant un volume cylindrique situé de part et d'autre d'une surface  $K$ , on aura :  $\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \Leftrightarrow \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_1 + \vec{B}_2 \cdot d\vec{S}_2 = 0 \Leftrightarrow B_{1n} = B_{2n}$ .

### Discontinuité du champ tangentiel

Considérons un petit contour normal au courant de surface. On a dès lors  $\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \Leftrightarrow (B_{1t}^\perp - B_{2t}^\perp)l = \mu_0 K l \Leftrightarrow B_{1t}^\perp - B_{2t}^\perp = \mu_0 K$ . Si l'on prend un contour parallèle au courant, les composantes tangentielles sont continues. En toute généralité :

$$\vec{1}_n \times (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = \mu_0 \vec{K} \quad (5.23)$$

Une illustration est proposée au slide T46.

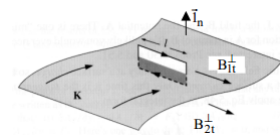


FIGURE 5.7 – Discontinuité de  $\vec{B}_t$

7. Sens opposé au courant



## Chapitre 6

# Champ magnétique dans la matière - Milieux magnétiques

### 6.1 Diamagnétisme et paramagnétisme

Les propriétés magnétiques de la matière sont également associées à la présence de courants, mais à l'échelle microscopique. Elles sont associées au mouvement des électrons.

On remarque 2 types de courants microscopiques :

1. orbital ( $e^-$  autour du noyau) :
  - En l'absence de champ magnétique extérieur  $B$ , les moments dipolaires orbitaux sont répartis aléatoirement et donc s'équilibrent au niveau macroscopique.
2. spin ( $e^-$ ) :
  - les moments magnétiques de spin sont souvent couplés par paires de sens opposés et donc le moment dipolaire net est nul de spin = 0. Si pas couplé  $\Rightarrow$  moment dipolaire permanent.

#### 6.1.1 Diamagnétisme

Dans un diamagnétique, il n'y a pas de moment magnétique permanent. Lorsqu'on applique un champ extérieur, le moment orbital des  $e^-$  est modifié de telle manière que la variation du moment dipolaire soit dirigée dans le sens opposé au champ externe (Loi de Lenz, le champ induit s'oppose à la variation de  $\Phi$ ). Ainsi, les moments magnétiques induits des atomes sont dirigés à l'opposé du champ magnétique extérieur. Cette variation du courant d' $e^-$  persiste même après que le champ extérieur = *cste*. L'effet diamagnétique est très faible (répulsion car s'oppose au champ).

#### 6.1.2 Paramagnétisme

Dans un paramagnétique, il y a des moments magnétiques permanents, mais ceux-ci ont des orientations aléatoires (en l'absence de champ extérieur). Lorsqu'on amène un champ extérieur, les dipôles ont tendance à s'aligner suivant ce champ à cause du couple  $\vec{m} \times \vec{B}$ . L'effet paramagnétique reste généralement faible à cause de l'agitation thermique qui vient s'opposer à ce processus (attraction car s'aligne avec le champ).

#### 6.1.3 Répartition dipolaire en volume - Vecteur magnétisation

Sous l'effet d'un champ extérieur, la matière devient aimantée/magnétisée, c-à-d que les dipôles élémentaires prennent une orientation élémentaire (en moyenne). Pour étudier les phé-

nomènes au niveau macroscopique, on définit la magnétisation/aimantation d'un milieu comme le *moment magnétique résultant par unité de volume*.

$$\vec{m} = \int_V \vec{M} d\tau \quad \vec{M} : \text{densité de moment magnétique} \quad \left[ \frac{A}{m} \right] \quad (6.1)$$

$\vec{M}$  joue un rôle semblable à  $\vec{P}$  dans les diélectriques.

## 6.2 Champ créé par de la matière magnétisée

### 6.2.1 Courants de magnétisation

Supposons avoir un volume de matière magnétisée,  $\vec{M}$  connue,  $B_{\text{produit}} = ?$   
On veut le champ produit par la magnétisation, pas la cause de la magnétisation. On passera par le potentiel vecteur

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{M} \times \vec{1}_R}{R^2} \quad (6.2)$$

Démonstration p.90–91 (pas connaître).

En définissant la *densité volumique de courants de magnétisation*

$$\vec{J}_{\text{mag}} = \text{rot } \vec{M} \quad \left[ \frac{A}{m^2} \right] \quad (6.3)$$

et la *densité surfacique de courants de magnétisation*

$$\vec{K}_{\text{mag}} = \vec{M} \times \vec{1}_n \quad \left[ \frac{A}{m} \right] \quad (6.4)$$

on obtient

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau'} \frac{\vec{J}_{\text{mag}}}{R} d\tau' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S'} \frac{\vec{K}_{\text{mag}}}{R} dS' \quad (6.5)$$

où  $S'$  est la surface extérieure du volume magnétisé  $\tau'$

## 6.3 Équation magnétostatiques en présence de milieux magnétiques

### 6.3.1 Loi d'Ampère dans un milieu magnétique

Rappel : La loi d'Ampère exprime que la densité de courant est la source du champ magnétique ( $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ ), elle doit donc inclure **tous** les courants

$$\vec{J} = \vec{J}_l + \vec{J}_{\text{mag}} \quad (6.6)$$

où  $\vec{J}_{\text{mag}}$  est le courants de magnétisation dû à la présence d'un matériau magnétique et  $\vec{J}_l$  est le courant "libre" (en général tous les autres courants, même celui de conduction).

La loi d'Ampère s'écrit donc

$$\frac{1}{\mu_0} \text{rot } \vec{B} = \vec{J} = \vec{J}_l + \vec{J}_{\text{mag}} \quad (6.7)$$

$$= \vec{J}_l + \text{rot } \vec{M} \quad (6.8)$$

ou encore

$$\text{rot} \left( \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \right) = \vec{J}_l \quad (6.9)$$

On introduit alors une nouvelle grandeur, l'*excitation magnétique* ou le *champ magnétisant*

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \quad \left[ \frac{A}{m} \right] \quad (6.10)$$

Ainsi la loi d'Ampère s'écrit

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{J}_l \quad (6.11)$$

et sous forme intégral (via Stokes)

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_l \quad (6.12)$$

où  $I_l$  est le courant libre total passant à travers le contour fermé  $C$

Le champ  $H$ , permettant d'écrire les relations en fonction des seuls courants libres, joue un rôle semblable au courant de déplacement  $D$  qui lui permettait d'écrire la loi de Gauss en fonction des seules charges libres



Petit piège :  $\text{div} \vec{H}$  ne s'annule généralement **PAS** (contrairement à  $\vec{B}$ ).

### 6.3.2 Milieux magnétiques linéaires

Généralement, pour les milieux paramagnétiques et diamagnétiques,  $\vec{m} \propto \vec{B}$ .  
Pour des raisons historique, on écrit ce lien en fonction de  $H$  (matériau linéaire et isotrope)

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad (6.13)$$

où  $\chi_m :=$  susceptibilité magnétique du milieu.

A partir de (??), on peut écrire

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} \quad (6.14)$$

$$= \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H} \quad (6.15)$$

où  $\mu :=$  perméabilité du milieu       $\mu_r :=$  perméabilité relative       $\mu_0 :=$  perméabilité du vide

Dans un milieu linéaire et homogène (homogène  $:= \mu = \text{cste}$  dans l'espace), on aura

$$\vec{J}_{mag} = \text{rot} \vec{M} = \text{rot} (\chi_m \vec{H}) = (\mu_r - 1) \vec{J}_l \quad (6.16)$$

En particulier, si il n'y a pas de courant libre à l'intérieur du matériau, on aura  $\vec{J}_{mag} = \vec{0} \Rightarrow$  tout les courants de magnétisation seront en surface.

La relation  $\vec{B} = \mu \vec{H}$  est la *relation constitutive* du matériau magnétique linéaire (similaire à  $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$  ou  $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ ).

Il s'en suit quelques exemples qu'il faut savoir refaire (pp. 97–99)

## 6.5 Conditions aux limites

Les conditions aux limites de la Section ?? peuvent être écrite en fonction de  $H$  et des courants libres

Comme le champ magnétique normal est continu  $B_{1n} = B_{2n}$  et  $\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$ , on en déduit :

$$H_{1n} - H_{2n} = -(M_{1n} - M_{2n}) \quad (6.17)$$

à la surface de séparation entre 2 milieux.

Pour le champ  $H$  tangentiel, en appliquant (??) à un contour élémentaire, on obtient :

$$\vec{l}_n \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{K}_l \quad (6.18)$$

où  $\vec{l}_n :=$  normal dirigée de 2  $\rightarrow$  1  $\quad \vec{K}_l :=$  densité superficielle de courant libre à la surface de séparation.

En l'absence de courant libre de surface, le champ  $H$  tangentiel est continu :

$$H_{1t} = H_{2t} \quad (6.19)$$

On remarquera un cas particulier : au niveau de l'interface entre 2 milieux magnétiques linéaires, la continuité du champ implique :

$$\mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n} \quad (6.20)$$

Les conditions sur le champ magnétique s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} B_{1n} &= B_{2n} \\ \frac{B_{1t}}{\mu_1} &= \frac{B_{2t}}{\mu_2} \end{aligned}$$

## 6.6 Ferromagnétisme

### 6.6.1 Introduction

Le ferromagnétisme est un effet beaucoup plus grand que le diamagnétisme ou le paramagnétisme. Tout comme le paramagnétisme, le ferromagnétisme provient du moment magnétique associé au spin des  $e^-$  dans la couche interne de l'atome. La nouvelle chose est une force d'interaction entre les dipôle voisins, qui est beaucoup plus grande que l'interaction magnétique directe. Les moments magnétiques des atomes voisins ont tendance à s'aligner // l'un à l'autre.

En pratique, les moments ne s'alignent qu'à l'intérieur de petits domaines magnétiques ( $< 1\text{ mm}$ ). Ainsi, ils existent différents domaines dont les orientations sont aléatoires  $\Rightarrow$  pas de magnétisation globale.

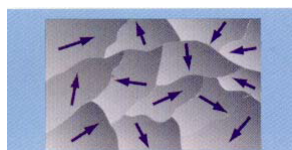


FIGURE 6.1 – Répartition des domaines magnétique

Les domaines sont séparés par des parois de quelques atomes d'épaisseur dans lesquelles la direction de l'aimantation varie progressivement d'une orientation à l'autre.

Le ferromagnétisme n'apparaît que dans les milieux où l'énergie est réduite si les spins sont // plutôt que s'ils sont opposés. Les dimensions et l'orientation aléatoire des domaines correspondent à la situation où l'énergie totale du système est minimale.

Lorsqu'on applique un champ extérieur, il y a 2 situations possibles :

1. si le champ est faible : les domaines dont les moments sont alignés // au champ grandissent aux dépens des autres
2. si le champ est fort : les domaines subissent également une rotation qui les fait s'aligner sur le champ extérieur

Si le champ est suffisamment élevé, il ne restera qu'un seul domaine et le matériau sera *saturé*

### 6.6.2 Courbe de première aimantation et cycle d'hystérésis

On considère un tore en matériau ferromagnétique enroulé d'un bobinage parcouru par un courant  $I_l$ .

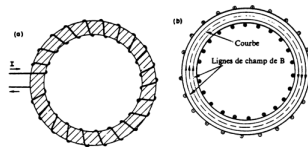


FIGURE 6.2 – Tore en matériau ferromagnétique

En appliquant  $\oint_C \vec{H} d\vec{l} = N I_l$ , on obtient le champ  $H$  dans le fer :

$$\vec{H} = \frac{N I_l}{2\pi r} \vec{1}_\varphi \quad \left[ \frac{A}{m} \right] \quad (6.21)$$

où  $N$  est le nombre de spires.

Le champ magnétique  $B$  dans le fer est :

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \quad (6.22)$$

Seul soucis, il n'y a aucun lien direct entre  $H$  et  $M$  pour un matériau ferromagnétique.

On fera donc l'hypothèse que le matériau est isotrope, que  $\vec{B}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\vec{M}$  sont aligné (c-à-d suivant  $\vec{1}_\varphi$ ) et que  $H$  ne varie pas beaucoup dans la section du tore (c-à-d tore suffisamment "délié") :

$$\vec{H} \approx \frac{N I_l}{2\pi a} \vec{1}_\varphi \quad (6.23)$$

où  $a$  est le grand rayon du tore.

Voici la courbe du lien entre  $B$  et  $H$  obtenue expérimentalement.

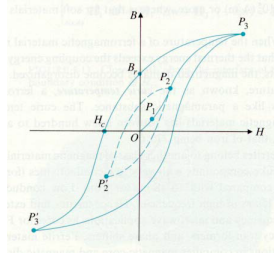


FIGURE 6.3 – Coure de première aimantation et cycle d’hystérésis

On part de l’état neutre  $B = H = M = 0$  et on  $\nearrow$  progressivement  $I$  et donc le champ  $H$ . Le champ  $B \nearrow$  le long de la courbe  $0 P_1 P_2 P_3$ . Cette courbe est appelée *courbe de première aimantation* du matériau

Les parois commencent à se déplacer et des domaines orientés comme le champ grandissent.  $M$  et  $B \nearrow \Rightarrow$  la magnétisation devient  $\gg H$ .

Au début (genre jusque  $P_1$ ) le phénomène est réversible. Dans la 2<sup>ème</sup> partie de la courbe, la rotation des domaines pour s’aligner avec le champ produit des déformations et des dislocations. Le phénomène devient irréversible. de l’énergie est perdue (chaleur) à cause des forces de friction lors des déplacements de parois.

Finalement, pour un champ suffisamment élevé, presque tous les dipôles seront alignés et on atteindra la *saturation* vers  $P_3$ ,  $M$  n’augmente plus et  $\forall H$  supplémentaire,  $B$  varie comme  $\mu_0 H$

A partir de  $P_3$ , si on réduit  $H$ , on ne revient plus sur la courbe de première aimantation, mais sur la courbe  $P_3 B_r H_c P_3'$  car une fois que la plupart des domaines ont tourné pour s’aligner sur le champ, ils ne reprennent pas leur orientation initiale.

La boucle complète s’appelle le *cycle d’hystérésis* du matériau. La surface du cycle d’hystérésis correspond à l’énergie perdue (par unité de volume et par cycle).

On y distingue 2 points particulier :

- $B_r :=$  champ rémanent ( $H, I = 0$ ), caractérisant un aimant permanent (pas de courant, mais existence d’un champ)
- $H_c :=$  champ coercitif ( $B = 0$ ), champ (courant) à appliquer pour annuler le champ magnétique (l’aimantation)

Les courbes de 1<sup>ère</sup> aimantation et d’hystérésis dépendent de la nature matériau, de sa composition chimique, de sa préparation et des traitements physiques qu’il a subis.

Pour démagnétiser (revenir à  $H = B = 0$ ), il faut le soumettre à plusieurs cycles d’hystérésis en faisant décroître progressivement le champ extérieur (ex : courant alternatif d’amplitude décroissante).

### 6.6.3 Matériaux ferromagnétiques

Pour certaines applications, on veut un cycle le plus étroit possible pour réduire les pertes énergétiques par hystérésis. Une manière de réduire ce cycle est de diminuer le champ maximum à chaque cycle.

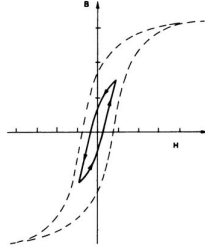


FIGURE 6.4 – Cycle d’hystérésis qui n’atteint pas la saturation

⇒ matériaux ferromagnétiques *doux* (matériaux purs avec très peu de dislocations et d’impuretés pour permettre un déplacement facile des parois).

Dans le cas d’un matériau doux, on peut approcher la relation  $B, H$  à  $B = \mu H$  (valable que sur certaines plage de valeurs et que la quantité  $\mu = B/H$  soit fonction de  $H$ )

Si on veut faire un aimant permanent, le cycle doit être très large pour avoir un  $B_r$  grand  
⇒ matériaux ferromagnétiques *durs*.

#### 6.6.4 Blindage magnétique

Le blindage consiste à protéger un appareil électrique de l’influence des champs extérieurs en l’entourant d’un matériau ferromagnétique de grand  $\mu$ .

Effectivement, reprenons les conditions aux limites de la Section ?? et considérons le milieu 2 comme l’air et le 1 comme le matériau ferromagnétique de perméabilité  $\mu$

Les conditions sont :

$$\begin{aligned} B_{1n} &= B_{2n} \\ H_{1t} &= H_{2t} \Rightarrow \mu_0 B_{1t} = \mu B_{2t} \\ \tan \theta_1 &= \frac{\mu}{\mu_0} \tan \theta_2 = \mu_r \tan \theta_2 \end{aligned} \quad (6.24)$$

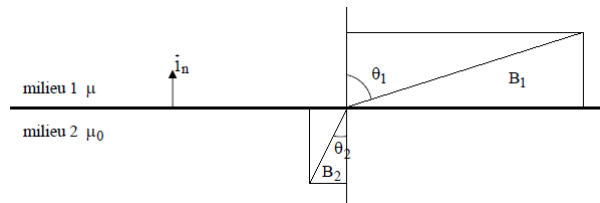


FIGURE 6.5 – Réfraction des lignes de champ

Il y a réfraction des lignes de champ (s’alignent le long de la paroi à l’intérieur du matériaux) dû au  $\mu$  élevé ( $\theta_1 \gg \theta_2$ ).

#### 6.6.5 Point de fonctionnement d’un aimant

Soit un aimant constitué d’une armature ferromagnétique entourée d’une bobine de  $N$  spires (interrompu de manière à faire un entrefer). Si l’épaisseur de l’entrefer est petite, on peut supposer que  $B$  ferme la boucle comme le tore (Sous-section ??). On supposera aussi que le  $\Phi = cste$  à travers toute section de l’armature et que  $B$  est uniforme sur la section.

Comme la composante normale en  $B$  est continue à l'interface fer-air, on aura

$$B_1 = B_2 \quad (6.25)$$

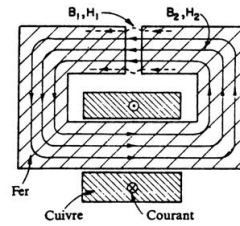


FIGURE 6.6 – Electro-aimant

On a donc (loi d'Ampère) :

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_1 l_1 + H_2 l_2 = NI \quad (6.26)$$

avec  $l_1 :=$  longueur entrefer,  $l_2 :=$  longueur du trajet dans le fer

Dans l'entrefer, la magnétisation est nulle,  $M = 0$ , et on a la relation

$$B_1 = \mu_0 H_1 \quad (6.27)$$

Et comme  $B_1 = B_2$

$$\frac{B_2}{\mu_0} l_1 + H_2 l_2 = NI \quad (6.28)$$

$B_2, H_2 = ?$

Si on fait l'approximation que le milieu est linéaire ( $B_2 = \mu H_2$ ) alors, c'est facile. Mais évidemment, on ne va pas faire comme ça.

Dans le cas général,  $B_2$  et  $H_2$  n'ont pas de relation linéaire. Ainsi, l'équation (??) donne la relation linéaire entre  $B_2$  et  $H_2$

$$H_2 = -\frac{l_1}{\mu_0 l_2} B_2 + \frac{NI}{l_2} \quad (6.29)$$

Pour différentes valeurs de  $I$ , les droites translatent horizontalement. Le *point de fonctionnement* sera le point d'intersection entre cette droite et le cycle d'hystérésis.

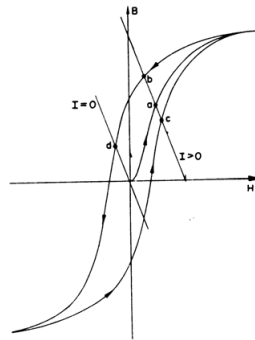


FIGURE 6.7 – Point de fonctionnement d'un aimant

Si le matériau avait été démagnétisé :  $a$

Si on avait ↗ courant jusqu'à la saturation pour faire ensuite ↘ jusqu'à la valeur  $I : b$

Si on avait un courant  $< 0$  puis qu'on l'a ↗ jusqu'à  $I : c$

⇒ Le champ dans l'entrefer sera toujours le même que celui dans le fer ( $B_1 = B_2$ )



Le point  $d$  représente le cas où  $I = 0$  avec un matériau préalablement saturé (aimant permanent). Dans ce cas nous aurons

$$\begin{aligned} B_1 &= B_2 = \mu_0 H_1 \\ H_1 &= -\frac{l_2}{l_1} H_2 \\ H_2 &= -\frac{l_1}{\mu_0 l_2} B_2 \end{aligned} \tag{6.30}$$

Et donc  $H$  n'est **pas nul** (alors que  $I = 0$ ), son sens est opposé en fonction que l'on soit dans le fer ou dans l'air.

## 6.7 Circuits magnétiques

Circuit magnétique := système dans lequel les lignes de champs magnétiques suivent, sur une partie important de leur parcours, des milieux magnétiques de formes appropriées, et se ferment éventuellement dans l'air à travers des parcours relativement courts appelés entrefers (ex : le tore).

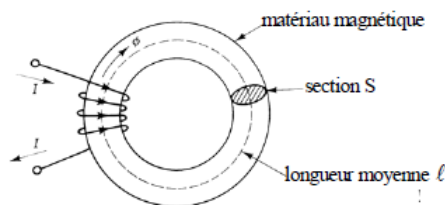


FIGURE 6.8 – Circuit magnétique

On fera les hypothèses suivantes

1. Les lignes de champ magnétique suivent, sans dispersion, les pièces ferromagnétiques dont elles épousent la forme et dans les entrefers, on leur suppose une forme schématique simple. Le flux magnétique  $\Phi$  est donc conservé tout au long du circuit.
2. Dans chaque section, on admet que le champ  $B$  est uniforme et que le flux magnétiques est donné par :

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = B S \tag{6.31}$$

3. Les matériaux magnétiques sont linéaires avec une certaine perméabilité  $\mu$

De là, on peut l'analogie que  $J \Leftrightarrow B$  et que  $I \Leftrightarrow \Phi$  à la différence que contrairement aux lignes de courant, qui ne peuvent pas s'échapper des conducteurs car la conductivité  $\sigma = 0$  dans l'air, les lignes de champ le peuvent car  $\mu_0 \neq 0$

En écrivant la loi d'Ampère et le flux et en sachant que  $H$  et  $B$  sont liés de manière linéaire, on peut dire que :

$$N I = \mathfrak{R}_T \Phi \quad \text{où} \quad \mathfrak{R}_T := \text{réductance} \quad \left[ H^{-1} = \frac{A^2}{J} \right] \tag{6.32}$$

Semblable à la loi d'Ohm, on appellera donc par analogie  $NI$  la "*force magnétomotrice*" (en "ampère-tours", "tours" est adimensionnel). L'inverse de la réluctance est la perméance.

En décomposant la loi d'Ampère suivant les différentes parties du circuit :

$$\oint_C \vec{H} \, d\vec{l} = \sum_i \int_{l_i} \vec{H} \, d\vec{l} = \sum_i \mathfrak{R}_i \Phi \quad (6.33)$$

La relation (??) est semblable à la loi des mailles de Kirchhoff :

$$NI = \sum_i \mathfrak{R}_i \Phi \quad (6.34)$$

Pour une section de longueur  $l$ , dont matériau à une perméabilité  $\mu$ , la réluctance est :

$$\mathfrak{R} = \frac{\int_l \vec{H} \, d\vec{l}}{\Phi} = \frac{\int_l \frac{\vec{B}}{\mu} \, d\vec{l}}{\int_S \vec{B} \, d\vec{S}} \quad (6.35)$$

Si  $B = cste$  dans la section normale,  $B = \Phi/S$ , l'expression devient

$$(6.36)$$

$$= \frac{\int_l \frac{\Phi}{\mu S} dl}{\Phi} = \int_l \frac{dl}{\mu S} \quad (6.37)$$

Si la section est constante, on a

$$(6.38)$$

$$= \frac{l}{\mu S} \quad (6.39)$$

S'ensuit des exemples à savoir refaire pp. 112–115

# Chapitre 7

## Les champs variables

### 7.1 La loi de Faraday

Electrodynamique := étude des champs variables dans le temps.

La *loi de Faraday* ou *loi de l'induction électromagnétique*, sous forme différentielle, et valable en tout point de l'espace est :

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (7.1)$$

Comme  $\text{div } \vec{B} = 0$ , même pour des champs variables, on peut utiliser le potentiel vecteur magnétique  $\vec{A}$  (Rappel :  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ )

En injectant ceci dans la loi de Faraday, on a

$$\text{rot} \left( \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \vec{0} \quad (7.2)$$

Or comme  $\text{rot } = \vec{0}$ , l'argument vaut le gradient d'une fonction scalaire. Ainsi on a :

$$\vec{E} = -\text{grad } V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (7.3)$$

Comme en statique  $\partial \vec{A} / \partial t = 0$  on retrouve bien  $\vec{E} = -\text{grad } V$

Au niveau intégral, la loi de Faraday devient (théorème de Stokes) :

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (7.4)$$

où le sens de circulation de  $C$  et la normale de  $S$  est défini par la règle de la main droite.

On définit aussi la *force électromotrice induite*

$$\varepsilon = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (7.5)$$

### 7.3 Application

Application à connaître (pas les formules) pp. 122–124

## 7.4 Énergie magnétique

La démonstration n'a pas été vue au cours (il ne faut ici pas la connaître) et est matière de *Physique Générale*.

$$W_m = \frac{1}{2\mu_0} \int B^2 d\tau \quad (7.6)$$

Il s'agit de l'énergie nécessaire pour établir une certaine configuration de densité de courant. C'est également le travail réversible<sup>1</sup> à effectuer pour contrer le champ électrique induit (= fem induite) lorsqu'on établit le courant  $J$  dans le système. C'est une approximation *quasi-statique*.

## 7.5 Coefficient de couplage (pas connaître)

Les *coefficients de couplage*, ou l'*inductance* expriment le lien entre le flux et le courant :

$$\Phi = Li \quad (7.7)$$

où  $\Phi$  doit être défini relativement à une surface (contour fermé).

Prenons un ensemble de volume  $D_i$  parcourus par des courants  $I_i$  constants, de densité  $\vec{J}_i$ . L'énergie magnétique totale vaut :

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_i \int_{D_i} \vec{J}_i \cdot \vec{A} \cdot d\vec{\tau}_i \quad \text{où} \quad \vec{A} = \sum_j \vec{A}_j \quad (7.8)$$

où  $A_j$  est le potentiel produit par les sources du volume  $j$ . On peut ré-écrire cette expression :

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \int_{D_i} \vec{J}_i \cdot \vec{A}_j \cdot d\vec{\tau}_i \quad (7.9)$$

En **définissant** les *coefficient de couplage inductifs*  $L_{ij}$  comme :

$$L_{ij} = \frac{1}{I_i I_j} \int_{D_i} \vec{J}_i \cdot \vec{A}_j \cdot d\vec{\tau}_i \quad (7.10)$$

on obtient :

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j L_{ij} I_i I_j \quad (7.11)$$

"L'énergie magnétique est une forme quadratique des coefficients  $L_{ij}$ . Si  $W_M > 0 \Rightarrow$  matrice  $[L_{ij}]$  symétrique et définie positive.

En utilisant l'expression liant potentiel vecteur et densité de courant, on obtient pour les  $L_{ij}$  une forme symétrique ; la **Formule de Neumann** :

$$L_{ij} = \frac{\mu_0}{4\pi I_i I_j} \int_{D_i} \int_{D_j} \frac{\vec{J}_i \cdot \vec{J}_j}{R} d\vec{\tau}_i d\vec{\tau}_j \quad (7.12)$$

Où  $L_{ii}$  est le *coefficient d'inductance propre* de  $D_i$  et  $L_{ij} (i \neq j)$  est le *coefficient d'inductance mutuelle* entre  $D_i$  et  $D_j$ .

Les slides 59 et T60 donnent deux exemples concrets de cette magnifique théorie.

Notons que  $L_{ij}$  est indépendant des courants et ne dépend que de la géométrie du problème.

---

1. On pourrait la récupérer en annulant le courant (pertes résistances négligées)

## 7.6 Exemples

A savoir refaire, pas connaître par coeur.

## 7.7 Forces magnétiques

On considère un circuit fermé, avec une inductance  $L$  et parcouru par un courant  $I$ . Suite à un déplacement virtuel  $\Delta x$ , le bilan sera :

$$\underbrace{\Delta W_S}_{\text{travail source}} + \underbrace{F \Delta x}_{\text{travail méc. ext.}} = \underbrace{\Delta W_m}_{\text{var. } E_{pot}} \quad (7.13)$$

L' $E_{pot}$  est  $W_m = \frac{1}{2}LI^2$

Le déplacement produira un  $\Delta\Phi$  et un  $\Delta\varepsilon$ . Le travail fourni par la source pour contre cette fem pendant le temps  $\Delta t$  du déplacement vaut :

$$\Delta W_S = -\varepsilon I \Delta t = I \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \Delta t = I \Delta\Phi \quad (7.14)$$

S'ensuit 2 exemples a connaître (pp. 134–136)

## 7.8 Le courant de déplacement

En appliquant le théorème de Stokes, la forme intégrale de la loi d'Ampère s'écrit :

$$\oint_C \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I + \varepsilon_0 \mu_0 \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} d\vec{S} \quad (7.15)$$

Pour des raisons historiques, on appelle le *courant de déplacement* :

$$I_D = \varepsilon_0 \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} d\vec{S} \quad (7.16)$$

Un exemple avec un condensateur plan est donné pp. 137–138

## 7.9 Les équations de Maxwell dans la matière

Reprenons les équations de Maxwell :

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (7.17)$$

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad (7.18)$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (7.19)$$

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (7.20)$$

Or, il faut prendre en considération toutes les charges et tous les courants.

Dans un diélectrique, la polarisation  $\vec{P}$  produit une densité de charges :

$$\rho_{pol} = -\text{div } \vec{P} \quad (7.21)$$

Si  $\vec{P}$  varie, la densité provoque un courant  $\vec{J}_{pol}$   
Ainsi, on a :

$$\text{div } \vec{J}_{pol} = -\frac{\partial \rho_{pol}}{\partial t} \quad (7.22)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} (\text{div } \vec{P}) \quad (7.23)$$

et donc

$$\vec{J}_{pol} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \quad (7.24)$$

De même, dans un milieu magnétique, la magnétisation  $\vec{M}$  produit une densité de courant

$$\vec{J}_{mag} = \text{rot } \vec{M} \quad (7.25)$$

La charge totale est donc

$$\rho = \rho_l + \rho_{pol} = \rho_l - \text{div } \vec{P} \quad (7.26)$$

et le courant total

$$\vec{J} = \vec{J}_l + \vec{J}_{pol} + \vec{J}_{mag} \quad (7.27)$$

$$= \vec{J}_l + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \text{rot } \vec{M} \quad (7.28)$$

L'équation (??) devient

$$\text{div } \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho_l - \text{div } \vec{P}) \quad (7.29)$$

Et en introduisant le champ de déplacement ( $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ ,  $\text{div } \vec{D} = \rho_l$ ), l'équation (??) devient :

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{J}_l + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \text{rot } \vec{M} \right) + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (7.30)$$

Et en introduisant l'excitation magnétique  $\vec{H}$  ( $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0 - \vec{M}$ ,  $\text{rot } \vec{H} = \vec{J}_l + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ ), les équations de Maxwell peuvent s'écrire en fonction des charges et courants libres :

$$\text{div } \vec{D} = \rho_l \quad (7.31)$$

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad (7.32)$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (7.33)$$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J}_l + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (7.34)$$

Il faut alors ajouter les relations constitutives suivantes :

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad (7.35)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (7.36)$$

## 7.10 Conditions aux limites des champs électromagnétiques

## 7.12 Ondes électromagnétiques

(pas les formules)

### **7.12.1 Ondes planes dans le vide**

(pas les formules)

### **7.12.2 Propagation dans un milieu linéaire**

(pas les formules)

## **7.13 Le spectre électromagnétique**