Université Libre de Bruxelles

Synthèse

Compléments de mathématiques
MATH-H-301

Auteur :
Nicolas Englebert

Professeur :
Anne Delandtsheer

Année 2015 - 2016

Appel à contribution

Synthèse Open Source

Ce document est grandement inspiré de l'excellent cours donné par Anne Delandtsheer à l'EPB (École Polytechnique de Bruxelles), faculté de l'ULB (Université Libre de Bruxelles). Il est écrit par les auteurs susnommés avec l'aide de tous les autres étudiants et votre aide est la bienvenue ! En effet, il y a toujours moyen de l'améliorer surtout que si le cours change, la synthèse doit être changée en conséquence. On peut retrouver le code source à l'adresse suivante

`https://github.com/nenglebert/Syntheses`

Pour contribuer à cette synthèse, il vous suffira de créer un compte sur *Github.com*. De légères modifications (petites coquilles, orthographe, ...) peuvent directement être faites sur le site ! Vous avez vu une petite faute ? Si oui, la corriger de cette façon ne prendra que quelques secondes, une bonne raison de le faire !

Pour de plus longues modifications, il est intéressant de disposer des fichiers : il vous faudra pour cela installer LaTeX, mais aussi *git*. Si cela pose problème, nous sommes évidemment ouverts à des contributeurs envoyant leur changement par mail ou n'importe quel autre moyen.

Le lien donné ci-dessus contient aussi un `README` contenant de plus amples informations, vous êtes invités à le lire si vous voulez faire avancer ce projet !

Licence Creative Commons

Le contenu de ce document est sous la licence Creative Commons : *Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International (CC BY-NC-SA 4.0)*. Celle-ci vous autorise à l'exploiter pleinement, compte- tenu de trois choses :

1. *Attribution* ; si vous utilisez/modifiez ce document vous devez signaler le(s) nom(s) de(s) auteur(s).
2. *Non Commercial* ; interdiction de tirer un profit commercial de l'œuvre sans autorisation de l'auteur
3. *Share alike* ; partage de l'œuvre, avec obligation de rediffuser selon la même licence ou une licence similaire

Si vous voulez en savoir plus sur cette licence :

`http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/`

Merci !

Table des matières

Chapitre 18

Méthode des approximations successives pour problèmes de Cauchy

18.4 Principe de contraction de Banach

18.4.1 Contraction (de constante α)

Le principe d'une contraction est que si deux points sont à une distance d, la distance entre leur image par la contraction sera inférieure à αd où $\alpha < 1$.

DÉFINITION : CONTRACTION DE BANACH
Une application $T : E \to E$ est une **contraction de constante** α ssi

$$\begin{cases} (i) & \forall x, x' \in E : \|Tx - Tx'\| \leq \alpha \|x - x'\| \\ (ii) & \alpha < 1 \end{cases} \tag{18.1}$$

Ainsi, une fonction lipschitzienne de constante strictement inférieure à 1 est une contraction.

Il est intéressant de travailler dans un espace de Banach (par exemple V), c'est à dire un espace vectoriel réel normé (on aura besoin de la notion de distance) **complet**. V est dit complet ssi toute suite dite de Cauchy converge. Pour rappel :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N : \forall n \geq N, \forall l > 0 : \|u_{n+l} - u_n\| < \epsilon \tag{18.2}$$

On travaille souvent avec des fermés. Si E est fermé dans V alors toute suite d'éléments de E converge dans E !

18.4.2 Théorème de contraction de Banach

THÉORÈME : PRINCIPE DE CONTRACTION DE BANACH
Si $T : E \to E$ est une contraction de constante α, alors

1. T admet **un** et **un** seul point fixe $\tilde{x}$
2. $\forall x \in E : T^n(x) \to \tilde{x}$
3. $\forall x \in E : \|T^n(x) - \tilde{x}\| \leq \frac{\alpha^n}{-1\alpha} \|Tx - x\|$

De façon francisée, cela signifie que :

1. On admet un point fixe
2. D'où que l'on parte, pour chaque $x \in E$ $(T^1, \dots T^n)$ cette suite converge vers ce point fixe
3. Quel que soit $x \in E$, si j'ai appliqué n fois la contraction je suis à une distance du point fixe majorée par le longueur du premier pas multiplié par ... Comme $\alpha < 1$, cela tend fortement vers zéro

Démonstration.
Prouvons d'abord qu'il s'agit d'une suite de Cauchy.
Soit $x_0 \in E, x_n := T^n(x_0)$. On peut écrire

$$\|x_{n+l} - x_n\| = \|T^{n+l}(x_0\text{à} - T^n(x_0)\| \tag{18.3}$$

L'idée à exploiter est que $T^n(x_0) = T(T^{n-1}(x_0))$. Je peux alors appliquer une majoration en sachant que appliquer T, c'est multiplier par α

$$\begin{aligned} \|x_{n+l} - x_n\| &\leq \alpha\|T^{n+l-1}(x_0) - T^{n-1}(x_0)\| \\ &\leq \alpha^2\|T^{n+l-2}(x_0) - T^{n-2}(x_0)\| \\ &\leq \dots \\ &\leq \alpha^n\|T^l(x_0) - x_0\| \end{aligned} \tag{18.4}$$

On a alors

$$\|x_{n+l} - x_n\| \leq \alpha^n.\|x_l - x_0\| \qquad (*) \tag{18.5}$$

En appliquant l'inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} \|x_l - x_0\| &\leq \|x_l - x_{l-1}\| + \dots + \|x_2 - x_1\| + \|x_1 - x_0\| \\ &\leq \underbrace{(\alpha^{l-1} + \dots + \alpha^1 + \alpha^0)}_{\frac{1-\alpha^l}{1-\alpha} \leq \frac{1}{1-\alpha}} \|x_1 - x_0\| \end{aligned} \tag{18.6}$$

On a alors

$$\|x_l - x_0\| \leq \frac{1}{1-\alpha}\|x_1 - x_0\| \qquad (**) \tag{18.7}$$

En rassemblant $(*)$ et $(**)$:

$$\|x_{n+l} - x_n\| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\|x_1 - x_0\| \qquad \underbrace{< \epsilon}_{\text{dès que } n \text{ grand } (l \geq 0)} \tag{18.8}$$

Ceci démontre que x_n est une suite de Cauchy.

Cette suite converge, car par hypothèse $V, +, \|\|$ est complet. Comme x_n est une suite de Cauchy, $x_n \to \tilde{x} \in V$. Par hypothèse E est fermé dans V. Comme $\underbrace{x_n}_{\in E\ \forall n} \to \tilde{x} \in V \Rightarrow \tilde{x} \in E$. [1]

Il faut maintenant prouver que $\tilde{x}$ est fixe : $T(\tilde{x}) = \tilde{x}$. Par continuité de la contraction :

$$T(\lim_{n\to\infty} x_n) \underbrace{=}_{T \in C^0} = \lim_{n\to\infty} T(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n = \tilde{x} \tag{18.9}$$

1. x_n est une suite d'éléments dans E, elle converge forcément dans E : sa "limite", $\tilde{x} \in E$.

Prouvons maintenant l'unicité de ce point fixe par l'absurde.
Soit $\tilde{x}, \tilde{y}$ fixés par T contraction de sorte que $\|\tilde{x} - \tilde{y}\| \neq 0$. Alors

$$\|\tilde{x} - \tilde{y}\| = \|T(\tilde{x}) - T(\tilde{y})\| \leq \alpha\|\tilde{x} - \tilde{y}\| < \|\tilde{x} - \tilde{y}\| \tag{18.10}$$

On peut éviter la contradiction si $\|\tilde{x} - \tilde{y}\| = 0$ impliquant l' unicité du point fixe.

Il ne reste qu'a prouver la qualité de approximation :

$$\begin{aligned} \|x_n - \tilde{x}\| &= \|x_n - \lim_{l\to\infty} x_{n+l}\| \\ &= \lim_{l\to\infty} \|x_n - x_{n+l}\| \\ &\leq \left(\lim_{l\to\infty}\right) \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\|x_1 - x_0\| \end{aligned} \tag{18.11}$$

On peut donc dire que $\tilde{x} \approx x_n$ avec une erreur $\leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\|x_1 - x_0|$ soit la longueur du premier pas. □

18.1 EDO normale du premier ordre

18.1.1 Attention

Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} xy' + 2y &= 4x^2 \\ y(0) &= 1 \end{cases} \tag{18.12}$$

n'admet pas de solution car 0 est un point singulier ! Il faut faire attention à pas confondre une ED implicite avec une ED explicite ($y' = f(x, y)$).

18.1.2 Solution maximale et globale dans un cylindre

Considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' &= f(t, y) \\ y_0 &= y(t_0) \end{cases} \tag{18.13}$$

Si l'ED est scalaire, considérons un domaine rectangulaire et un cylindre s'il s'agit d'un SD. Les différents types de solutions sont :

- **Maximale** ; Une solution est dite maximale ssi elle ne peut pas être prolongée en une autre solution, c'est à dire qu'on ne peut la prolonger sur un intervalle plus grand (Pas de solution dans un domaine plus étendu restant dans le domaine de f)
- **Globale** ; Une solution est globale ssi la solution au problème de Cauchy est définie sur I tout entier.
- **Locale** ; Une solution est locale ssi il existe un voisinage $\mathcal{V}$ du point de la C.I. tel que la fonction est définie dans un sous-intervalle de I.

Exemple. Soit l'EDO $y' = y^2$. Sa solution générale est $y(t) = -\frac{1}{t+C}$. A cause de l'asymptote, toutes ces solutions sont maximales mais seule la solution nulle est globale.

18.1.3 Régularité des solutions d'une EDO

PROPOSITION
Si $\vec{\varphi}$ est solution de $\vec{y}' = \vec{f}(t, \vec{y})$ pour $\vec{f} \in C^k$, alors $\vec{\varphi} \in C^{k+1}$

Démonstration.
Comme φ est solution d'EDO, il est dérivable (et donc C^0).

- Supposons $k = 0$
$$\left.\begin{array}{r}\varphi \in C^0 \\ f \in C^0\end{array}\right\} \Rightarrow t \mapsto f(t, \varphi(t)) \in C^0 \tag{18.14}$$
Or $f(t, \varphi(t)) = \varphi'(t) \Rightarrow \phi \in C^1$.
- Récurrence [2]. Supposons vrai pour $k - 1$ et montrons vrai pour k
$$\left.\begin{array}{l}\text{Vrai pour } k-1 \\ C^k \subset C^{k-1} \\ \vec{f} \in C^k\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{\varphi} \in C^k \Rightarrow t \mapsto \vec{f}(t, \vec{\varphi}(t)) \in C^k \tag{18.15}$$
Or $\vec{\varphi}'(t) = \vec{f}(t, \vec{\varphi}(t))$, d'où $\vec{\varphi}' \in C^k$ c'est-à-dire $\vec{\varphi} \in C^{k+1}$

□

18.1.4 Équation intégrale d'un problème de Cauchy

PROPOSITION
φ est solution du problème de Cauchy sur I
$$\left\{\begin{array}{ll} y' & = f(t, y) \\ y(t_0) & = y_0 \end{array}\right. \tag{18.16}$$
ssi
$$\left\{\begin{array}{l} \varphi \in C^0(I) \\ \forall t \in I : \varphi(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau \end{array}\right. \tag{18.17}$$

Démonstration.
Sens direct : $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$ par hypothèse, il suffit d'intégrer les deux membres de t_0 à t.

Sens indirect : $\varphi \in C^0 \Longrightarrow \tau \mapsto f(\tau, \varphi(\tau)) \in C^0$, d'où $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$ en dérivant l'équation intégrale. □

18.2 Théorème de résolubilité locale

18.2.1 Théorème

THÉORÈME : CAUCHY-PAENO-ARZELA
Le problème de Cauchy
$$\left\{\begin{array}{ll} y' & = f(t, y) \\ y(t_0) & = y_0 \end{array}\right. \tag{18.18}$$
où $f \in C^0(\mathcal{U})$ ($\mathcal{U}$ étant ouvert) et $(t_0, y_0) \in \mathcal{U}$ admet **au moins** une solution locale.

2. ??

18.3 L'opérateur intégral de Picard

18.3.1 L'opérateur intégral de Picard

Inspiré par l'écriture intégrale d'un problème de Cauchy :

$$\vec{\varphi}(t) = \vec{y_0} + \int_{t_0}^{t} \vec{f}(\tau, \varphi(\tau))d\tau \tag{18.19}$$

On définit l'opérateur intégral de Picard :

Définition : Opérateur intégral de Picard

$$\begin{aligned} T : z \mapsto \quad & T(z) \\ & T(z)|_t := \vec{y}_0 + \textstyle\int_{t_0}^{t} \vec{f}(\tau, z(\tau))d\tau \end{aligned} \tag{18.20}$$

T est l'opérateur intégral de Picard **associé au problème de Cauchy** ci-dessus. Les solutions de l'équation intégrale du problème de Cauchy sont donc exactement les points fixes de cet opérateur, c'est-à-dire les fonctions $\vec{\varphi}$ telles que $\vec{\varphi} = T(\vec{\varphi})$.

18.3.9 Erreur d'une approximation de la solution

Étudions la différence entre la solution exacte et l'approximation

$$\begin{aligned} |y(t) - y_n(t)| \quad & = |y_0 + \textstyle\int_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau))d\tau - y_0 - \int_{t_0}^{t} f(\tau, y_n(\tau))d\tau| \\ & = |\textstyle\int_{t_0}^{t} (f(\tau, y(\tau)) - f(\tau, y_n(\tau)))d\tau| \\ & \leq \sup_t |t - t_0|; \sup_\tau |f(\tau, y(\tau)) - f(\tau, y_n(\tau))| \end{aligned} \tag{18.21}$$

Pour que l'erreur soit petite, il faut que t soit proche de t_0, que l'on parte d'une bonne approximation et aussi que f ne varie pas trop vite en sa deuxième variable y (c'est à dire $\sup |\partial f / \partial y|$ petit si f est "brave" (c'est-à-dire lipschitzienne)).

18.5 Condition de Lipschitz

18.5.1 Fonction totalement ou partiellement lipschitzienne

Définition : Fonction lipschitzienne

$f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite **lipschitzienne** ssi

$$\exists M \in \mathbb{R}(= V) : \forall x, \tilde{x} \in A : |f(x) - f(\tilde{x}) \leq M|x - \tilde{x}| \tag{18.22}$$

Ceci signifie que M majore toutes les valeurs absolues de pentes de cordes du graphe de f. Être lipschitzienne est plus fort qu'être continue, mais cela n'implique pas la dérivabilité. Par contre si une fonction est dérivable à dérivée bornée alors elle est lipschitzienne.

On peut généraliser dans le cas où $V = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ en considérant une condition de Lipschitz "partielle", avec $\vec{x}$ constant

Définition :

$\vec{f} : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ est $\Lambda-$ **lipschitzienne** en $\vec{y}$ (sur $\mathcal{U}$) ssi

$$\forall (x, y), (x, \tilde{y}) \in \mathcal{U} : ||f(x, y) - f(x, \tilde{y})|| \leq \Lambda ||y - \tilde{y}|| \tag{18.23}$$

On remarque bien qu'ici x est fixé, constant.

18.5.2 Fonctions localement lipschitzienne

Comme être lipschitzienne est fort contraignant, on ne demande parfois que localement. La définition est presque identique, sauf que l'on se limite à comparer les points de même abscisse en restant dans un voisinage $\mathcal{V}_0$.

DÉFINITION :
$\forall (x_0, y_0) \in \mathcal{U}, \exists \mathcal{V}_0$ voisinage de $(x_0, y_0), \exists \Lambda_0 \in \mathbb{R}$:

$$\forall (x, y), (x, \tilde{y}) \in \mathcal{V}_0 \cap \mathcal{U} : |f(x, y) - f(x, \tilde{y}| \leq \Lambda_0 |y - \tilde{y}| \tag{18.24}$$

Ceci se généralise aux fonction vectorielles en changeant $|\ |$ par $\|\ \|$.

18.5.4 CNS pour Lipschitz : composante par composante

PROPOSITION
$\vec{f}$ est lipschitzienne en $\vec{y}$ ssi $\forall i = 1, \ldots, p : f_i$ est lipschitzienne en $\vec{y}$

Démonstration.
$\vec{f}$ Λ-**lipschitzienne** en $\vec{y}$

$$\begin{aligned}
&\iff \forall\,(\vec{x}, \vec{y}), (\vec{x}, \tilde{\vec{y}}) \in \mathcal{U} : ||\vec{f}(\vec{x}, \vec{y}) - \vec{f}(\vec{x}, \tilde{\vec{y}})||_p^2 \leq \Lambda^2 ||\vec{y} - \tilde{\vec{y}}||_m^2 \\
&\iff \forall\,(\vec{x}, \vec{y}), (\vec{x}, \tilde{\vec{y}}) \in \mathcal{U} : \sum_{i=1}^{p} (f_i(\vec{x}, \vec{y}) - f_i(\vec{x}, \tilde{\vec{y}}))^2 \leq \Lambda^2 ||\vec{y} - \tilde{\vec{y}}||_m^2 \\
&\overset{?}{\iff} \forall i = 1, \ldots, p, \quad \forall\,(\vec{x}, \vec{y}), (\vec{x}, \tilde{\vec{y}}) \in \mathcal{U} : (f_i(\vec{x}, \vec{y}) - f_i(\vec{x}, \tilde{\vec{y}}))^2 \leq \lambda_i^2 ||\vec{y} - \tilde{\vec{y}}||_m^2 \\
&\iff \forall i = 1, \ldots, p, \quad f_i \text{ est } \lambda_i \text{ -lipschitzienne.}
\end{aligned}$$

L'équivalence surmontée d'un point d'interrogation s'établit comme suit :

$\Longrightarrow$ est vraie si on a posé $\lambda_i := \Lambda$.

$\Longleftarrow$ est vraie si on a posé $\Lambda := \sqrt{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i^2}$. □

Cette démonstration est naturelle dans le sens ou si $\vec{f}$ est vectorielle et lipschitzienne de même constante, chacune de ses composantes l'est également. Notons que dès que l'on a une constante de Lipschitz, tout nombre supérieur à celle-ci est également une constante de Lipschitz.

18.5.5 C^1 garantit localement Lipschitz

Le plus simple est de travailler avec des dérivées. Si les dérivées d'ordre p sont bornées alors la fonction est lipschitzienne.

LEMME :
Si $\vec{f}$ est différentiable sur $\text{int}(\mathcal{U})$ et continue sur $\mathcal{U}$ et que ses fonctions dérivées $\frac{\partial \vec{f}}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial \vec{f}}{\partial y_m}$ sont bornées sur $\text{int}(\mathcal{U})$, alors $\vec{f}$ est lipschitzienne en $\vec{y}$ sur $\mathcal{U}$.

Démonstration.
Supposons que f est scalaire (grâce à la précédente proposition). Grâce au théorème des ac-

croissement fini on peut écrire la différence selon la première égalité si $\exists \vec{c} \in]\vec{y}\tilde{\vec{y}}[\subset \mathbb{R}^m$:

$$\begin{aligned}
|f(\vec{x},\vec{y}) - f(\vec{x},\tilde{\vec{y}})| &= \left|< \vec{\nabla} f\right|_{(\vec{x},\ \vec{c})}, (\vec{x},\vec{y}) - (\vec{x},\tilde{\vec{y}}) > | \\
&= | < \left(\frac{\partial f}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y_m}\right)\Big|_{(\vec{x},\vec{c})}, (y_1 - \tilde{y}_1, \dots, y_m - \tilde{y}_m) > | \\
&= | \sum_i \frac{\partial f}{\partial y_i}\Big|_{(\vec{x},\vec{c})} (y_i - \tilde{y_i}) | \\
&\leq \sqrt{\sum_i \frac{\partial f}{\partial y_i}\Big|^2_{(\vec{x},\vec{c})}} \ ||\vec{y} - \tilde{\vec{y}}||_m
\end{aligned} \tag{18.25}$$

On pourrait directement écrire la troisième égalité. Comme il n'y a pas de différence entre $\vec{x}$ et $\vec{x}$, seul intervienne les dérivées par rapports aux y_i. La dernière inégalité s' obtient grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
Si toute les dérivées $\dfrac{\partial f}{\partial y_i}$ sont en valeurs absolue majorée par M, alors f est $\sqrt{mM^2}$-lipschitzienne en $\vec{y}$. □

PROPOSITION
Si $\vec{f} \in C^1(\mathcal{U})$, alors $\vec{f}$ est localement lipschitzienne sur $\mathrm{int}(\mathcal{U})$.

Démonstration. Non vu ? □

18.5.3 Fonctions à variables séparées de Lipschitz

PROPOSITION
Si

- $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$ est continue,
- $g : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} : y \mapsto g(x)$ est localement lipschitzienne,

alors

$$F : A \times B \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto\to f(x).g(y) \tag{18.26}$$

est localement lipschitzienne en y

Démonstration.
Une telle fonction est-elle lipschitzienne ? On va essayer de la majorer. Comme x est constant, je peux écrire

$$|f(x)g(y) - f(x)g(\tilde{y})| = |f(x)|.|g(y) - g(\tilde{y})| \tag{18.27}$$

Je peux toujours majorer de la sorte

$$|f(x)g(y) - f(x)g(\tilde{y})| \leq \sup_{\mathcal{V}_{x_0}} |f|.\lambda_0.|y - \tilde{y}| \tag{18.28}$$

Si $\sup_{\mathcal{V}_{x_0}} = M_0 \in \mathbb{R}$, F est $\lambda_0 M_0$- lipschitzienne en y. [3] □

3. J'applique la "définition" de Lipschitz pour la partie en $|g(y) - g(\tilde{y})|$.

18.5.6 Fonctions linéaires en $\vec{y}$ à coefficients continus en t

Considérons la fonction

$$\vec{f}(t,\vec{y}) := A(t)\vec{y} + \vec{b}(y) \tag{18.29}$$

où $A(y)$ est $\forall t$ une application linéaire $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$. Une telle fonction est-elle lipschitzienne ? On va essayer de la majorer. Par linéarité, je peux mettre en évidence un facteur $\|y - z\|$ pour prendre l'image d'un vecteur normé par $A(t)$ ($\vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^m$)

$$\begin{aligned} \vec{f}(t,\vec{y}) - \vec{f}(t,\vec{z}) &= A(t)\vec{y} + \vec{b} - (A(t)\vec{z} + \vec{b}) \\ &= A(t)(\vec{y} - \vec{z}) = \|\vec{y} - \vec{z}\| A(t) \left(\frac{\vec{y}-\vec{z}}{\|\vec{y}-\vec{z}\|}\right) \end{aligned} \tag{18.30}$$

Notons l'utilisation d'une petit artifice de calcul à la deuxième ligne, on à multiplié par $\frac{\|\vec{y}-\vec{z}\|}{\|\vec{y}-\vec{z}\|}$. On peut majorer et y aller à la grosse louche à l'aide de la norme de l'application linéaire $A(t)$. Je peux en effet dire que le carré d'une somme est majoré par le carré des éléments de la matrice

$$\|\vec{f}(t,\vec{y}) - \vec{f}(t,\vec{z})\| \leq \|\vec{y} - \vec{z}\| \underbrace{\max_{\|\vec{u}\|=1} \|A(t)(\vec{u})\|}_{|||A(t)||| \leq \sqrt{\sum_{ij}(a_{ij}(t))^2} := \Lambda(t)} \qquad (t \text{ fixé !}) \tag{18.31}$$

Dernier souci : $\Lambda(t)$ n'est pas constante. Heureusement, si on prend le suprémum des normes quand t est confiné à un compact, ce suprémum existe dans $\mathbb{R}$.

18.6 Théorèmes d'existence et d'unicité pour Cauchy

18.6.1 Méthode des approximations successives de Picard

Considérons l'opérateur intégral[4] $T : z \to T(z)$ où

$$T(z)|_t := y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, z(\tau)) d\tau \tag{18.32}$$

relatif au **problème de Cauchy** $\left\{ \begin{array}{ll} y'(t) & = f(t,y) \\ y(t_0) & = y_0 \end{array} \right.$ dont les solutions sont les points fixes de T. Si on arrive à prouver que T est contractant et que l'on est dans un espace de Banach alors on prouve que cet opérateur admet un et un seul point fixe, soit une et une seule solution pour le problème de Cauchy. De plus, d'où que l'on parte, on convergera vers cette sainte solution.

18.6.2 Espace normé, cylindres internes et de sécurité

Il faut travailler dans un espace de Banach, c'est-à-dire un espace vectoriel réel normé et complet. Je m'intéresse à des fonctions au moins dérivables, et donc continue : $V = C^0(I, \mathbb{R}^m)$ (où I est un intervalle autour de t_0 à préciser) muni de la norme suprémum :

$$\| \|_\infty : \vec{y} \to \|\vec{y}\|_\infty = \sup_{t \in I} \|\vec{y}(t)\| \tag{18.33}$$

On a maintenant un espace de Banach dont la convergence sera même uniforme. Il faut maintenant définir E. Je travaille dans un intervalle centrée sur t_0 de demi- côté l et r.

$$C = [t_0 - l, t_0 + l] \times \vec{B}(\vec{y_0}, \vec{r}) \subseteq \mathcal{U} \tag{18.34}$$

4. Revient très souvent à l'examen !

De façon préventive, le cylindre sera dit *de sécurité* si $l.\sup_C \|\vec{f}\| \leq r$. Autrement dit, le maximum de la pente en valeur absolue ne dépasse pas r ; on n'en sortira pas.

Dès lors $E :=$ ensemble des fonctions $y \in C^0(\underbrace{[t_0 - l, t_0 + l]}_{:=I}, \mathbb{R}^m)$ telles que $\text{gph}(y) \subset C$, le cylindre de sécurité. C'est-à- dire : $\forall t \in I : \|y(t) - y_0\| \leq r$. On dit bien que $y(t)$ est à une distance de y_0 qui ne dépassera jamais r.

18.6.3 T, opérateur interne et lipschitzien dans E

La première chose à vérifier est que l'on reste toujours dans E

1. T est un opérateur interne à E : $y \in E \to T(y) \in E$.
   Si $y \in C^0(I, \mathbb{R}^m) \implies T(\vec{y}) \in C^0(I, \mathbb{R}^m)$ Comme le graphe de $T(y)$ reste dans C (et on majore l'intégrale comme d'hab) :

$$\begin{aligned} \|y(t) - y_0\| \leq r \implies \|T(y)|_t - y_0\| &= \| \textstyle\int_{t_0}^t f(\tau, y(\tau)) d\tau \| \\ &\leq |t - t_0| \underbrace{\sup_{\tau \in I} \|f(\tau, y(\tau))\|_m}_{\mu} \\ &\leq l\mu \\ &\leq r \qquad \text{(par def. du cylindre de sécurité)} \end{aligned} \tag{18.35}$$

2. T est lipschitzien (...si f l'est par rapport à y).
   Il faut avant tout que f ne varie pas trop vite par rapport à y, c'est à dire que pour un même t, la pente ne devrait pas varier trop vite. Je dois prouver que la distance entre les images est inférieure à une constante*... (def. lips.)

$$\begin{aligned} \|T(y) - T(z)\|_\infty &= \sup_{t \in I} \left\| \textstyle\int_{t_0}^t (f(\tau, y(\tau)) - f(\tau, z(\tau))) d\tau \right\| \\ &\leq \sup_{\tau \in I} \|f(\tau, y(\tau)) - f(\tau, z(\tau))\|. \sup_{t \in I} |t - t_0| \\ &\leq \Lambda. \sup_{\tau \in I} \|y(\tau) - z(\tau)|.l \end{aligned} \tag{18.36}$$

   où Λ est une constante de Lipschitz de f_C relativement à y. On a ici majoré pour faire apparaître la définition d'une fonction lipschitzienne. D'où

$$\|T(y) - T(z)\|_\infty \leq \Lambda \|y - a\|_\infty \tag{18.37}$$

   C'est-à-dire que Tt est Λl-lipschitzien.

18.6.4 T est contractant dans E^* (de haute sécurité)

Si l est suffisament petit, on rentre dans les conditions de haute sécurité. Le cylindre :

$$C^*[t_0 - l^*, t_0 + l^*] \times \vec{B}(y_0, r) \tag{18.38}$$

est dit de **haute sécurité** si de plus $\Lambda l^* =: \alpha < 1$.
Si l'on définit l'ensemble E^* des fonctions admissibles associé au cylindre C^* alors $T : E^* \to E^*$ est une contraction.

18.6.5 Théorème d'existence et d'unicité locale

Compte-tenu des deux sections précédentes, le principe de contraction de Banach peut s'appliquer. On conclut à l'existence et l'unicité de la solution du problème de Cauchy dont le graphe est inclus dans C^*.

THÉORÈME :
Si $\vec{f} : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m : (t, \vec{y}) \to \vec{f}(t, \vec{y})$ est continue et lipschitzienne en $\vec{y}$ au **voisinage** de $(t_0, \vec{y}_0) \in \operatorname{int} \mathcal{U}$, alors le problème de Cauchy $\begin{cases} \vec{y}\,' = \vec{f}(t, \vec{y}) \\ \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0 \end{cases}$ admet une seule courbe intégrale au voisinage de $(t_0, \vec{y}_0)$.

18.6.6 Théorème d'existence et d'unicité d'une solution maximale

C'est possible de l'étendre, mais ce n'est pas vu !

Chapitre 17

Polynômes orthogonaux, fonctions spéciales et résolution d'ED par séries de puissances

17.17 Polynômes orthogonaux

17.17.2 Espaces à produit scalaire

Pour toute fonction w continue et positive sur $[a, b]$:

$$< a, b >:= \int_a^b w \ f \ g^* \tag{17.1}$$

Celui-ci défini un produit scalaire hermition sur l'EV $C^0([a, b], \mathbb{K})$ et un presque" produit scalaire sur[1] $L^2([a, b], \mathbb{K})$.

Soit E un espace pré-hilbertien et E_n un sous-espace de dimension n de E. Notons $pr_{E_n} \ f$ la projection de f sur E_n.

> PROPOSITION
> $pr_{E_n} \ f$ existe ($n < \infty$) et est la meilleure approximation de $f \in E$ par un élément de E_n pour $\| \ \|$.

17.17.3 Polynômes orthogonaux

Considérons une fonctions poids $w \in C^0(]a, b[, \mathbb{R}_0^+)$ telle que $\forall n \in \mathbb{N} : \int_a^b |x|^n w(x)dx$ converge. Soit E l'EV des fonctions continues dans $]a, b[$ et de carré sommable pour le produit scalaire

$$< f, g >:= \int_a^b f(x) g^*(x) w(x) dx \tag{17.2}$$

Notons $\| \ \|_2$ la norme L_2, la norme en moyenne quadratique. Donc

$$E = C^0(]a, b[, \mathbb{R}) \cap L_2(]a, b[, \mathbb{R}) \tag{17.3}$$

Un polynôme p_n de degré n est dit **unitaire** (ou **monique**) ssi le coefficient de x^n dans $p_n(x)$ vaut 1.

1. Fonction de carré sommable si $\int_a^b |f|^2 w < +\infty$.

THÉORÈME :
$\forall w, \exists 1!$ suite de polynôme unitaire $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que

$$\left\{\begin{array}{l} \deg p_n = n \\ p_n \perp p_m \quad \text{si } n \le m \end{array}\right. \tag{17.4}$$

Démonstration.
$\forall n$ les polynômes $1, x, x^2, \dots, x^n$ sont L.I. dans $\mathcal{P}$. Il s'agit d'une suite de polynômes unitaires de degré 0,1,dots, n. En appliquant Gram-Schmidt on obtient une suite satisfaisant aux hypothèses.

$$\begin{array}{ll} p_0 & := 1 \\ p_n & := x^n - \text{proj }_{\mathcal{P}_{n-1}} x^n \\ & = x^n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{<x^n, p_k>}{<p_k, p_k>} p_k \end{array} \tag{17.5}$$

□

Voir le théorème 17.31 page 113 également, un peu la flemme.

THÉORÈME :
$\forall w|_{[a,b]}, p_n$ possède n zéros distincts dans $]a, b[$.

Démonstration.
Soit $x_1, \dots, x_k$ les zéros de p_n dans $]a, b[$ et leurs multiplicités $m_1, \dots, m_k$. On a que $m_1 + \cdots + m_k \le n$ =deg p_n. Définissons $\epsilon_i := \left\{\begin{array}{ll} 0 & \text{si } m_i \text{ pair} \\ 1 & \text{si } m_i \text{ impair} \end{array}\right.$ et construisons le produit suivant

$$q(x) := \Pi_{i=1}^{k} (x - x_i)^{\epsilon_i} \qquad \deg q \le k \le n \tag{17.6}$$

Je multiplie p_n par q : si l'exposant est impair je l'augmente d'une unité et s'il est pair je ne fais rien. Le polynôme $p_n q$ a pour zéros $x_1, \dots, x_k$ avec comme multiplicité $m_1 + \epsilon_1 + \cdots + m_k + \epsilon_k$, toutes paires. Dans $]a, b[\setminus\{x_1, \dots, x_k\}, p_n q$ est de signe constant [2]. On a alors

$$< p_n, q >= \int_a^b p_n q w \ne 0 \tag{17.7}$$

Or $p_n \perp \mathcal{P}_{n-1}$ et deg $q \le n$. On en déduit que deg $q = n \Longrightarrow k = n$ et tous les $m_i = 1$. □

THÉORÈME :
$\forall f \in E, \forall n \in \mathbb{N}, \exists 1!$ polynôme $q_n \in \mathcal{P}_n$ tel que $\|f - q_n\| = \min\{\|f - p\|_2; p \in \mathcal{P}_n\} =: d_2(f, \mathcal{P}_n)$

On dit que q_n est le polynôme de meilleure approximation quadratique de f à l'ordre n.

Démonstration. Cf. Analyse II □

THÉORÈME :
Si $]a, b[$ est **borné** (!), alors $\forall f \in E$: $\lim_{n\to\infty} \|f - q_n\|_2 = 0$

Cela signifie que l'ensemble $(p_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ est complet relativement à E ; le développement de Fourier va converger quadratiquement.

2. ? ?

Démonstration.
Pour se simplifier la vie, on travaille dans un fermer et f est continue en a et b : $f \in C^0([a,b])$. Considérons r_n, un polynôme de degré au plus n étant la meilleure approximation UNIFORME de f dans $\mathcal{P}_n$ (alors que q_n est le champion en quadratique). On a donc

$$\begin{aligned} \|f-q_n\|_2^2 \leq \|f-r_n\|_2^2 &= \int_a^b |f-r_n|^2 w \\ &\leq \|f-r_n\|_\infty^2 \int_a^b w \end{aligned} \tag{17.8}$$

En effet [3], par définition $\|f-r_n\|_\infty^2 = \sup_{[a,b]} |f-r_n|^2$. Par le théorème de Weirestrass $\|f - r_n\|_\infty^2 \to 0$ quand $n \to \infty$. □

17.18 Théorème d'approximation de Weierstrass

17.18.1 Fonctions continues comme limites uniformes de polynômes

THÉORÈME :
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe une fonction polynomiale p telle que $\|f-p\|_\infty < \epsilon$

Autrement dit, $\forall \epsilon > 0, \exists$ polynôme $p(x)$ tel que

$$\forall x \in [a,b] : p(x) - \epsilon \leq f(x) \leq p(x) + \epsilon + \tag{17.9}$$

17.18.2 Suites de Dirac

On définira l'outil de Dirac

$$\varphi_n(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [-1,1] \\ \mu_n(1-x^2)^n & \text{si } x \in [-1,1] \end{cases} \tag{17.10}$$

où μ_n est un réel tel que $\int_{-1}^1 \varphi_n = 1$ et donc

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n = 1 \tag{17.11}$$

On peut prouver qu'il $\exists \mathcal{C} : \mu_n \leq \mathcal{C}\sqrt{n}$.

17.18.3 Polynôme p_n d'approximation "à la Dirac"

Supposons que a et b sont compris entre 0 et 1 (par changement de variable par exemple), ceci n'est pas restrictif. Définitions le produit de convolution suivant (et utilisons l'outil de Dirac) :

$$\begin{aligned} \forall \xi \in [a,b] : p_n(\xi) &:= \int_0^1 f(x)\varphi_n(x-\xi)dx \\ &= \mu_n \int_0^1 f(x)(1-(x-\xi)^2)^n dx \end{aligned} \tag{17.12}$$

où $(1-(x-\xi)^2)^n$ est un polynôme en ξ de degré $2n$.
Deux cas :

1. Si $x \notin V_\xi$, alors $\varphi_n(x-\xi).f(x) \approx 0$ au point que l'$\int = 0$. En effet, $\varphi_n(x-\xi)$ est très centrée autour de ξ. Si on en est loin, le produit est forcément proche de zéro.

3. On peut majorer cette fonction par le suprémum de ce carré et le sortir de l'intégrale. (On majore l'intégrale comme d'hab ?)

2. Si $x \in V_\xi$, on remplace brutalement $f(x)$ par $f(\xi)$ et on peut le sortir de l'intégrale. Il ne reste que l'intégrale de φ_n près de x et celle ci ≈ 1

$$\int_{V_\xi} f(x).\varphi_n(x-\xi)dx \approx f(\xi)\int_{V_0}\varphi_n \approx f(\xi) \tag{17.13}$$

17.9 L'ELD de Tchebychev

17.9.1 Présentation trigonométrique des polynômes de Tchebychev

On peut utiliser la formule du binôme de Newton sur le deuxième membre de la formule d'Euler $\cos(n\theta) + i\sin(n\theta\text{à} = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$. On obtient alors :

$$\cos^n\theta + n\cos^{n-1}\theta(i\sin\theta) + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix}\cos^{n-2}\theta(i\sin\theta)^2 + \cdots + (i\sin\theta)^n \tag{17.14}$$

En identifiant les parties réelles des deux membres :

$$\cos(n\theta) = \text{ combili}(\cos^{n-2k}\theta \quad \underbrace{(i\sin\theta)^{2k}}_{(-1)^k(1-\cos^2\theta)^k} \quad) \tag{17.15}$$

soit un polynôme en $\cos\theta$.
On définit le n^e polynôme de Tchebychev à partir de $\cos n\theta =: T_n(\cos\theta)$ où T_n est défini sur $[-1,1]$. Autrement dit :

$$T_n(x) = \cos(n\arccos x) \tag{17.16}$$

Ceci revient par exemple à considérer $T_n(\cos\theta)$ comme le développement de $\cos n\theta$ sous forme de polynôme en $\cos\theta$. Le polynôme $T_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de degré n en $x \in \mathbb{R}$ est obtenu en prolongeant $T_n|_{[-1,1]}$. Il n'est **pas** unitaire et est normé pour la norme sup.

$$\|T_n\|_{\infty,[-1,1]} = \sup_{x\in[-1,1]}|T_n(x)| = \sup_{\theta\in[0,\pi]}|\cos n\theta| = 1 \tag{17.17}$$

La fonction $y = \cos(n\theta)$ est solution de

$$\frac{d^2y}{d\theta^2} + n^2y = 0 \tag{17.18}$$

En posant $x := \cos\theta \to \tilde{y}(x) = y(\cos n\theta)$ on obtient l'**EDL de Tchebychev**

$$(1-x^2)\frac{d^2\tilde{y}}{dx^2} - x\frac{d\tilde{y}}{dx} + n^2\tilde{y} = 0 \tag{17.19}$$

Une telle EDL (si $n^2 \in \mathbb{R}^+$) admet une solution $\tilde{y}$ dont la dérivée est bornée pour $x \to 1 \Leftrightarrow n^2$ est un carré parfait $\Leftrightarrow \tilde{y}$ est un polynôme de Tchebychev de degré n.

17.9.4 Quelques propriétés des polynômes de Tchebychev

Voir syllabus page 54 et slide 26.
Les polynômes unitaires de Tchebychev sont $2^{1-n}T_n$, c'est-à-dire que $\|T_n\|_{\infty,[-1,1]} = \|\cos(n\theta)\|_{\infty,[0,\pi]} = 1$. Donc

$$\|2^{1-n}T_n\|_{\infty,[-1,1]} = 2^{1-n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \tag{17.20}$$

Ce polynôme réalise le minimum pour cette norme, c'est le "champion" : celui possédant la plus petite distance dans l'espace des polynômes unitaires est donné par Tchebychev.

On en tire la *Proposition du* ***minimax***

PROPOSITION

Dans $\mathcal{PU}_n$, les polynômes unitaires de degré $n > 0$:

1. $2^{1-n}T_n$ minimise $\| \|_{\infty,[-1,1]}$ dans l'ensemble des polynômes unitaires.
2. $\|2^{1-n}T_n\|_{\infty,[-1,1]} = 2^{1-n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

Démonstration par l'absurde.
Supposons P, un polynôme unitaire dont la norme est plus petite, encore meilleur que celui de Tchebychev : $\|P\|_{\infty,[-1,1]} < 2^{1-2}$. L'équation

$$2^{1-n}T_n(x) = 2^{1-n}\cos n\theta \tag{17.21}$$

prends les valeurs $2^{1-n}, -2^{1-n}, 2^{1-n}, \ldots, (-1)^n 2^{1-n}$ aux points $\theta = 0, \pi/n, 2\pi/n, \ldots, n\pi/n$. Comme P est la meilleure approximation, la fonction $Q(x)$ ci-dessous est forcément positive (l'autre terme étant forcément plus grand)

$$Q(x) := 2^{1-n}T_n(x) - P(x) \tag{17.22}$$

$Q(x)$ a le même signe que 2^{1-n} en ces points, donc Q à au moins n zéros sur $[-1, 1]$. Or, deg $Q \leq n-1$. (car $2^{1-n}T_n$ et P sont unitaires, du coup le terme avec le facteur 1 disparaît d'office : degré $n-1$). On a contradiction. $\square$

17.19 Quadratures et polynômes orthogonaux

17.19.7 Quadrature par interpolation

On préfère le mot quadrature à interpolation. Ces méthodes consistent à approcher l'intégrale $\int_a^b fw$ par une formule d'interpolation

$$\int_a^b fw \approx \sum_{k=0}^{l} A_k f(x_k) \tag{17.23}$$

où les A_k sont les coefficients d'interpolation.

17.19.8 Méthode de quadrature $M_{l,X}$

Supposons que l'on possède l points $x_0, \ldots, x_l$. Soit $P_l(x_k) \approx f(x)$, le polynôme d'interpolation de degré $\leq l$ par les $(x_k, f(x_k))$. Au différents points connus, $f(x_k) = P_l(x_k) \forall k = 0, \ldots, l$.
On associe un *polynôme de Lagrange* aux points $x_0, \ldots, x_l$. Soit $L_k(x) :=$ le polynôme de degré l tel que $\begin{cases} L_k(x_k) & = 1 \\ L_k(x_j) & = 0 \ \forall j \neq k \end{cases}$ On l'écrit

$$L_l(x) = \prod_{j=0,\ldots,l; j\neq k} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \tag{17.24}$$

Le **polynôme d'interpolation** est combili des polynômes de Lagrange

$$P_l(x) = \sum_{k=0}^{l} f(x_k) L_k(x) \tag{17.25}$$

Par exemple, pour $l = 1$: $P_1(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x)$. Cette fonction vérifie bien les points donnés : $P_1(x_0) = f(x_0) * 1 + 0, \ldots$. Cette fonction $P_l(x)$ va alors servir à approcher des fonctions dont on connaît une série de points.
Ici l'idée est d'approcher $\int_a^b fw$ par $\int_a^b P_l w$:

$$\begin{aligned} \int_a^b fw \approx \int_a^b P_l(x)w(x)dx &= \int_a^b \sum_{k=0}^{l} f(x_k)L_k(x)w(x)dx \\ &= \sum_{k=0}^{l} f(x_k) \int_a^b L_k(x)w(x)dx \\ &= \sum_{k=0}^{l} f(x_k)\ A_k := M_{l,X}(f) \end{aligned} \tag{17.26}$$

Il s'agit de la méthode $M_{l,\{x_0,\ldots,x_l\}}$. L'approximation est fournie par la somme ci-dessous où les A_k sont calculés indépendamment de f.

LEMME : L'ordre de toute méthode de quadrature $M_{l,X}$ (par interpolation) est $\geq l$.

Cela signifie que si on prend un polynôme de degré au plus l, l'approximation sera parfaite.

Démonstration.
Les points $x_0, \ldots, x_l$ sont donnés. Si f est un polynôme de degré $\leq l$, alors f **est** le polynôme d'interpolation de f par les points $x_0, \ldots, x_l$. Donc

$$\int_a^b fw = \sum_{k=0}^{l} f(x_k)A_k \tag{17.27}$$

□

17.19.9 Méthode de Gauss

PROPOSITION
La méthode de quadrature par interpolation $M_{l,X}$ est d'ordre $2l+1$ ssi les points d'interpolations $x_0, \ldots, x_l$ sont les zéros du $(l+1)^{\text{ème}}$ polynôme (noté P_{l+1}) dans la suite des polynômes unitaires orthogonaux de degrés croissants pour le produit scalaire $< f, g >= \int_a^b fgw$.

Si $w = 1$, on parlera de la *méthode de Gauss*.

Démonstration.
Définissons le polynôme unitaire α de degré $l+1$: $\alpha(x) := (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_l) \perp_w \mathcal{P}_l$.
Par hypothèse si l'ordre $\geq 2l+1$ j'obtiens la solution exacte :

$$\forall f \in \mathcal{P}_{2l+1} : \int_a^b fw = \sum_{k=0}^{l} f(x_k)A_k \qquad \text{où } A_k = \int_a^b L_k(x)w(x)dx \tag{17.28}$$

Notons que comme $\alpha'(x) = \prod_{j\neq l}(x_k - x_j)$, on a

$$L_k(x) = \frac{\alpha(x)/(x - x_k)}{\alpha'(x)} \tag{17.29}$$

Si $Q \in \mathcal{P}_l$ un polynôme quelconque[4] de degré $\leq l$: $\alpha Q \in \mathcal{P}_{2l+1}$, d'où

$$\int_a^b \alpha Q w = \sum_{k=0} \underbrace{\alpha(x_k)}_{=0} Q(x_k)A_k = 0 \tag{17.30}$$

$\Longrightarrow \forall Q \in \mathcal{P}_l : \alpha \perp_w Q \Rightarrow \alpha \perp_w \mathcal{P}_l \Rightarrow \alpha = P_{l+1}$. □

4. Attention, $\mathcal{P}_l$ ne désigne pas seulement les polynômes unitaires !

Proposition
Toute méthode de quadrature par interpolation en $x_0, \ldots, x_l$ est d'ordre $\leq 2l+1$.

Démonstration par l'absurde.
Par le même raisonnement : $\alpha \perp_m \mathcal{P}_{l+1}$ et donc $\alpha \perp_m \alpha$, ce qui est absurde. $\square$

Théorème :
Les méthodes de quadrature par interpolation polynomiales en $l+1$ points sont d'ordre σ : $l \leq \sigma \leq 2l+1$.

Démonstration. Voir les trois lemmes précédents. $\square$

Théorème :
La méthode $M_{l,X}$ est d'ordre maximal $(2l+1)$ ssi les points d'interpolation $x_0, \ldots, x_l$ sont les zéros du polynôme P_{l+1} de degré $l+1 \perp_m \mathcal{P}_l$ pour le produit scalaire...

Démonstration. Voir lemmes précédents $\square$

Proposition
Si $\alpha \perp_m \mathcal{P}_l$, alors la méthode est d'ordre $\geq 2l+1$.

Démonstration. Voir page 136. $\square$

17.20 Résolution par séries : généralités

17.20.1 EDL à coefficients analytiques

Considérons la série entière en $(x - x_0)$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k \tag{17.31}$$

converge dans un voisinage de x_0 autour de x_0. Si l'on multiplie cette série par $(x-x_0)^r$, on parlera de *série de Frobenius.*

Une fonction f de classe C^∞ au voisinage de x_0 est **analytique** en x_0 ssi sa série de Taylor de f autour de x_0 converge vers f au voisinage de x_0.

À retenir *:*
La série $\sum_{k=0}^{\infty}$ est **d'exposant** r ssi $\forall k > 0 : a_k = 0 \quad$ et $\quad a_r \neq 0$? Son terme dominant pour $x \to 0$ est le terme de plus bas degré (il donne une première approximation du comportement pour cette limite.

Proposition

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^{r_P}(a_0 + a_1 x + \dots)}{x^{r_Q}(b_0 + b_1 x + \dots)} \tag{17.32}$$

est analytique en 0 $\Leftrightarrow r_Q \leq r_P \Leftrightarrow$ 0 n'est pas racine de Q ou la multiplicité de 0 dans $Q \leq$ multiplicité de 0 dans P.

17.20.2 EDL et série-solution

Considérons l'équation (à droite, sous sa forme normale)

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0, \qquad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{17.33}$$

Cette équation est facilement généralisable aux ordres supérieurs, pareil pour la version non-homogène. On va chercher une solution au voisinage d'un point $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ de la forme

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \tag{17.34}$$

Si $x_0 = 0$, il s'agit de la série de Maclaurin. Si l'on désire, on peut effectuer le changement $t := x - x_0$ pour travailler autour de 0. Si $x_0 = \infty$, poser $t = 1/x$ et travailler autour de zéro.

17.20.3 Point ordinaire, singulier, régulier ou non

Considérons deux prototypes, une EDLcc et une EDLee :

1. $y'' + p_0 y' + q_0 y = 0$
2. $x^2 y'' + x p_0 y' + q_0 y = 0$

Remplaçons p_0 et q_0 par une fonction analytique en zéro, à savoir leur développement de Maclaurin. Pour le point 0, trois cas sont possibles :

1. *Ordinaire* : $y'' + \left(\sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k\right) y' + \left(\sum_{k=0}^{\infty} q_k x^k\right) y = 0$
2. *Singulier régulier* : $x^2 y'' + x\left(\sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k\right) y' + \left(\sum_{k=0}^{\infty} q_k x^k\right) y = 0$
3. *Singulier irrégulier* : $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$

À retenir *:*
Soit la définition générale : $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$.

- x_0 est un **point ordinaire** ssi $P(x_0) \neq 0$.
- x_0 est un **point singulier** ssi $P(x_0) = 0$.
- x_0 est un **point singulier régulier** ssi
  - * Soit x_0 est un zéro simple de P.
  - * Soit x_0 est un zéro double de P, mais aussi un zéro de Q.

Notons que dans ce cours, on travaillera toujours au voisinage de $x_0 = 0$ par changement de variable.

17.3 La théorie autour d'un point ordinaire

17.3.2 Unicité : formules de récurrence pour l'EDL normale

On cherche une solution de la forme $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ de l' équation $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$. On remplace :

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} + \left(\sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1}\right) + \left(\sum_{k=0}^{\infty} q_k x^k\right)\left(\sum_{k=0} a_k x^k\right) = 0 \tag{17.35}$$

Il faut changer un peu les termes pour commencer partout en $k=0$: $\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)a_{k+2}x^k$ et $\sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)a_{k+1}x^k$.
En regroupant les termes en x^k et en effectuant le produit de Cauchy :

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left((k+2)(k+1)a_{k+2} + \sum_{n=0}^{\infty}((n+1)a_{n+1}p_{k-n} + a_n q_{k-n})\right) = 0 \tag{17.36}$$

On trouve alors l'équation de récurrence (R_k) :

$$\underbrace{(k+2)(k+1)}_{\neq 0} a_{k+2} + \sum_{n=0}^{\infty}((n+1)a_{n+1}p_{k-n} + a_n q_{k-n} = 0 \tag{17.37}$$

Grâce à cette équation, si a_0, a_1 sont donnés, on peut univoquement déterminer tout le reste : cela prouve l'unicité des a_k. L'ennui est que beaucoup de calculs ont été fait et il faudrait être assurer de trouver un résultat avant ça.

17.3.3 Théorème de convergence de Fuchs

Ce théorème nous donne un **minorant** du rayon de convergence de la série. On l'énonce ici en toute généralité (et pas autour de 0).

Théorème : (admis)
Soient p et q analytiques en x_0, de rayons de convergences respectifs ρ_p et ρ_q. Soient a_0, a_1, deux réels arbitraires.
La solution de $y'' + py' + qy = 0$ satisfaisant à $y(x_0) = a_0$ et $y'(x_0) = a_1$ (CI de Cauchy) est analytique en x_0 et peut s'écrire

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k \tag{17.38}$$

qui converge (au moins) sur $]x_0 - \rho_m, x_0 + \rho_m[$ où $\rho_m := \min\{\rho_p, \rho_q\}$.

17.3.5 Récurrences pour l'EDL non-normale

Si l'on a une EDL $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$ où P, Q, R sont des polynômes, il n'est pas utile de se ramener à $y'' + p(x) + q(x)y = 0$: on ne s'encombre pas avec les séries de Taylor

17.5 EDL et polynômes de Hermite

17.5.1 Les séries-solutions canoniques de Hermite

Voici l'**EDL de Hermite**, définie sur $\mathbb{R}$

$$y'' - 2xy' + 2py = 0 \qquad \text{où } p \in \mathbb{R} \tag{17.39}$$

On peut en tirer une équation de récurrence. En effet, tout point x_0 est ordinaire, les coefficients a_k de toute série solution $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ satisfont la relation de récurrence

$$a_{k+2} = -\frac{2(p-k)}{(k+2)(k+1)}a_k \tag{17.40}$$

On peut en tirer deux séries-solutions canoniques : une paire et une impaire. Si $p \in \mathbb{N}$, alors une de ces solutions est un polynôme de degré n (à un multiple scalaire près) alors que l'autre est infinité de termes non nuls (pas top-top).

17.5.2 Les polynômes de Hermite

En choisissant le multiple scalaire[5] comme valant 2^n, on définit le n^{eme} polynôme de Hermite, noté H_n

$$\begin{aligned} H_n(x) &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{n!}{k!(n-2k)!} (2x)^{n-2k} \\ &= 2^n x^n + \dots \\ &= \text{le polynome de Hermite de degré } n. \end{aligned} \tag{17.41}$$

Les section 17.5.3/4 donnent la fonction génératrice ainsi que quelques propriétés intéressantes. Je ne l'inclus pas ici, mais à lire.

17.5.7 L'EDP de l'oscillateur harmonique quantique 1D

Page 22-25 et slides 27-28. C'est plus une illustration qu'autre chose.

17.7 Théorie à droite d'un point singulier régulier

17.7.1 Série de Frobenius et exposant de la singularité

Considérons une EDLee $x^2y'' + xp_0y' + q_0y = 0$. Plus généralement, si 0 est un point singulier régulier

$$x^2y'' + x\left(\sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k\right) y' + \left(\sum_{k=0}^{\infty} q_k x^k\right) y = 0 \tag{17.42}$$

L'**espoir** et que si r est solution de l'équation indicielle (cette solution est l'*exposant de la singularité*) $r(r-1) + p_0r + q_0 = 0$, alors x^r est solution de l'EDLee et on peut espérer une solution pour notre cas général de la forme

$$x^r \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+r} \tag{17.43}$$

soit une **série de Frobenius** d'exposant r. Si $a_0 \neq 0$ on peut l'écrire sous la forme

$$a_0 x^r \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{a_0} x^k\right) \tag{17.44}$$

qui sera dite **canonique** quand $a_0 = 1$. On verra que si r_1, r_2 sont les deux exposants de la singularité on obtiendra deux solutions L.I. sauf dans certains cas malheureux.

17.7.2 Convergence et dérivation des séries de Frobenius

La série $x^r \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ converge $\Leftrightarrow$ $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+r}$ convergent et leurs sommes sont égales. La dérivée de cette série converge uniformément sur $]0, R[$, on peut donc la dériver terme à terme.

17.7.4 Calcul des coefficients de solutions formelles de type Frobenius

Comme précédemment, on dérive et on remplace !

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{r+k} \\ xS'(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (r+k) a_k x^{r+k} \\ x^2 S''(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (r+k)(r+k-1) a_k x^{r+k} \end{aligned} \tag{17.45}$$

5. ? ?

On remarque que grâce aux x, x^2 il ne faut plus rien modifier : on effectue le produit de Cauchy et on déduit la relation de récurrence (R_k) :

$$(r+k)(r+k-1)a_k + \sum_{l=0}^{k}(a_l(r+l)p_{k-l} + a_l q_{k-l}) = 0 \tag{17.46}$$

où encore

$$((r+k)(r+k-1) + (r+k)p_0 + q_0)a_k = -\sum_{l=0}^{k-1} a_l((r+l)p_{k-l} + q_{k-l}) = 0 \tag{17.47}$$

R_0 est ainsi l'équation indicielle et r est forcément solution (sinon il n'existera pas de solution de Frobenius). En déballant la somme pour une valeur de k, je peux obtenir les premiers a_k.

Définissons le premier membre de l'équation, $\mathcal{P}_0(r) := r(r-1) + p_0 r + q_0$, comme étant le polynôme indiciel de degré 2 et $\mathcal{P}_n(r) := p_n r + q_n$ le polynôme de degré ≤ 1. On peut réécrire R_k :

$$\mathcal{P}_0(r+k)a_k = -\sum_{m=0} \mathcal{P}_{k-l}(r+l)a_l \tag{17.48}$$

où le premier terme est non nul, si $r + k \neq r_1, r_2$.
Rappelons que $a_0 = 1$ et que pour $R_0 \implies \mathcal{P}_0(r) = 0 \Leftrightarrow r = r_1, r_2$.

Si[6] $r_1 \in \mathbb{R}$ et $r_1 - r_2 \neq \mathbb{Z}$ et $a_0 = 1$ alors les (R_k) déterminent univoquement les $a_k(r_1)$ et les $a_k(r_2)$. Les deux séries solutions sont alors

$$\begin{array}{ll} x^{r_1}(1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(r_1)x^k) & (= y_1(x)) \\ x^{r_2}(1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(r_2)x^k) & (= y_2(x)) \end{array} \tag{17.49}$$

Ces deux solutions ayant un comportement différent pour $x \to 0$, elles sont forcément L.I.

Si $r_1 \notin \mathbb{R}$: $r_1 = \alpha + i\beta, r_2 = r_1^*$ comme les coefficients sont réels. On trouve alors en remplaçant r_1 dans la série solution trouvée précédemment pour trouver la série solutions à valeurs dans $\mathbb{C}$. Pour le reste ça ne change pas et l'on pourra tout déterminer à partir de $a_0 (= 1)$.

Si $r_1 + r_2 + \tilde{k}$ avec $\tilde{k} \in \mathbb{N}_0$, alors $R_{\tilde{k}}$ pour $r = r_2$ est : $0.a_{\tilde{k}} = \underbrace{-\sum_{l=0}^{\tilde{k}-1} \mathcal{P}_{\tilde{k}-l}(r_2+l)a_l}_{?=0}$.

Si c'est nul, alors $a_{\tilde{k}}$ est indéterminé et l'on peut choisir $a_{\tilde{k}} = 0$ pour déterminer tout le reste. La série-solution vaut alors

$$x^{r_2}\left(1 + \sum_{k \neq \tilde{k}, 0}^{\infty} a_k x^k\right) \tag{17.50}$$

Si c'est non nul, il n'existe pas de série de Frobenius d'exposant r_2 et on peut trouver une solution du type (admis)

$$b_1 y_1(x)\ln(x) + x^{r_1}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k\right) \tag{17.51}$$

Pour le cas $r_1 = r_2$, voir slide 39.

6. ??

17.7.10 Théorème de Frobenius (admis)

Théorème :

- Toutes les séries solutions formelles trouvées (section 7) convergent dans $]0, \rho[$.
- Leurs sommes sont des solutions de l'EDL

$$x^2 y'' + x \left(\sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k \right) y' + \left(\sum_{k=0}^{\infty} q_k x^k \right) y = 0 \tag{17.52}$$

où $\rho := \min\{\rho_p, \rho_q\}$.

17.8 L'EDL hypergéométrique de Gauss

17.8.1 Définition

17.12 Fonctions de Bessel

17.12.1 L'EDL de Bessel

L'EDL suivante, où $p \in \mathbb{R}^+$, est celle de Bessel

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0 \tag{17.53}$$

On retrouve cette équation lors de l'étude des mouvements d'une chaînette, des planètes, ...

17.12.2 La fonction J_p

On peut ré-écrire cette équation de la façon suivante

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{x^2 - p^2}{x^2}y = 0 \tag{17.54}$$

On voit alors clairement que 0 est un *point singulier régulier* : $xp(x) = 1$ et $x^2q(x) = x^2 - p^2$. L'équation indicielle vaut dès lors

$$r^2 - p^2 = 0 \tag{17.55}$$

Celle-ci est d'exposant $r_{1,2} = \pm p$. On peut alors chercher des solutions de cette équation, des fonctions de Bessel, de la forme d'une série de Frobenius. Intéressons-nous ici au cas $r_1 = +p$ en considérant une série de Frobenius d'exposant p :

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{p+k} \tag{17.56}$$

Pour la résoudre, on peut faire comme au TP2 et dans le syllabus (équation indicielle, de récurrence,...). Je propose ici une autre approche : on remplace y dans l'équation et on en déduit la relation de récurrence :

$$\begin{aligned}
x^2y'' &= \sum_{k=0}^{\infty}(k+p)(k+p-1)a_k x^{p+k} \\
xy' &= \sum_{k=0}^{\infty}(k+p)a_k x^{p+k} \\
x^2y &= \sum_{k=0}^{\infty}(k+p)a_{k-2}x^{p+k} \qquad \text{avec } a_{-1} = a_{-2} = 0 \\
-p^2y &= \sum_{k=0}^{\infty} -p^2 a_k x^{p+k}
\end{aligned} \tag{17.57}$$

En mettant tout ensemble, on se rend compte que le terme de la série doit forcément s'annuler : c'est l'équation de récurrence

$$k(k+2p)a_k = -a_{k-2} \tag{17.58}$$

Si l'on choisit $a_0 := \dfrac{1}{2^p p'}$, la solution de Bessel dite *paire* (car on a posé $a_1 = 0 \Rightarrow a_{2n+1} = 0$) :

$$J_p = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p}}{k!(p+k)!} \tag{17.59}$$

C'est la *fonction de Bessel de première espèce d'ordre p*

17.12.3 La S.G. de l'EDL de Bessel

Nous avions aussi $r_2 = -p$, la solution d'exposant $-p$. Cependant, on voit avec l'équation de récurrence qu'il peut ici y avoir un problème. Considérons le gentil cas ou $2p \notin 2\mathbb{N}$. Par un raisonnement similaire :

$$k(k-2p)a_k = a_{k-2} \quad \to a_0 = \frac{1}{2^{-p}(-p)!}, a_1 = 0, \quad J_{-p} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-p}}{k!(-p+k)!} \tag{17.60}$$

où $(-p)! = \Gamma(1-p)$. Par contre, pour le cas ou $2p \in \mathbb{N}$:

$$0.a_{2p} = -a_{2p-2} = \cdots = c^{te}.a_0, \qquad a_0 \neq 0 \tag{17.61}$$

Ceci est *incompatible* : pas de solution d'exposant $-p$. La solution générale est alors

$$y(x) = c_1 J_p(x) + c_2 J_{-p}(x) \tag{17.62}$$

Une fonction de Bessel de seconde espèce d'ordre p est toute solution de Bessel d'ordre p linéairement indépendante de J_p. Petite remarque : si $p \notin \mathbb{N}$, J_p et J_{-p} sont L.I. car leur comportant pour x tendant vers zéro n'est pas le même [7].
Par le théorème de Fuchs, on peut conclure que ces séries ont un rayon de convergence infini !

La fonction Gamma

Comment obtenir la factorielle d'un nombre négatif ? La fonction Γ généralise la factorielle à tout $\mathbb{R}_0^+$. On la définit

$$\Gamma(p) := \int_0^{\infty} t^{p-1}e^{-t}\mathrm{d}t \tag{17.63}$$

Cette fonction vérifie $\Gamma(p+1) = p\gamma(p)$. En corollaire, on peut dire que $\Gamma(p) = (p-1)!$. Notons que $\frac{1}{\Gamma}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et s'annule exactement sur $-\mathbb{N}$.

17.12.4 La fonction $\mathcal{Y}_p$

La **fonction de Bessel standard de seconde espèce** (ou fonction de Weber ou Neumann) est définie :

$$\mathcal{Y}_p(x) := \begin{cases} \dfrac{J_p(x)\cos(p\pi) - J_{-p}(x)}{\sin(p\pi)} & \text{si } p \in \mathbb{R}^+\backslash\mathbb{N} \\ \lim\limits_{q\to p} \mathcal{Y}_q(x) & \text{si } p \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{17.64}$$

On peut montrer qu'il s'agit bien d'une solution de l'EDL de sorte à pouvoir écrire comme solution générale

$$y(x) = c_1 J_p(x) + c_2\mathcal{Y}_p(x) \tag{17.65}$$

Notons que $c_1 J_p(x)$ sont les seules solutions bornées ! La fonction $\mathcal{Y}_p$ est bien définie sur $\mathbb{R}$, non bornée en 0^+ et indépendante de J_p.

17.12.7 Formules de dérivation et de récurrence

La démonstration est donnée faite en séance d'exercices. Voici les deux résultats

$$\begin{aligned} 2J_p' &= J_{p-1}(x) - J_{p+1}(x) \\ \frac{2p}{x}J_p(x) &= J_{p-1}(x) + J_{p+1}(x) \end{aligned} \tag{17.66}$$

7. Parce que dans J_{-p}, x^{-p} n'est pas borné au voisinage de 0, alors que J_p l'est.

17.12.8 Les zéros des fonction J_p

Encore une application des TP. Notons juste que, sous certaines conditions sur p (très peu contraingnantes, voir page 76), la différence entre deux zéros consécutifs tend vers π.

17.12.9 x-orthogonalité des fonction $J_p(x)$

Le système $\{J_p(\lambda_m x); n \in \mathbb{N}_0, 0 \leq x \leq 1\}$ où λ_n est le n^e zéro de J_p est x-orthogonal sur $[0,1]$. Autrement dit

$$< \sqrt{x} J_p(\lambda_n x), \sqrt{x} J_p(\lambda_m x) >= 0 \text{ si } m \neq n \tag{17.67}$$

ou encore

$$\int_0^1 x J_p(\lambda_m x) J_p(\lambda_n x) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \dfrac{1}{2} J_{p+1}(\lambda_n)^2 & \text{si } m = n \end{cases} \tag{17.68}$$

17.12.10 Séries de Bessel

Par définition

$$f(x) \backsim \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_p(\lambda_n x) =: S(x) \tag{17.69}$$

où $a_n = \dfrac{2}{(J_{p+1}(\lambda_n))^2} \int_0^1 x f(x) J_p(\lambda_n x) \mathrm{d}x$.

Théorème : Développement de Bessel
Soit $f \in C^1_{morc}[0,1]$.

i. Si $x \in]0,1[$, alors $S(x)$ converge vers sa régularisée $\dfrac{f(x-)+f(x+)}{2}$
ii. Si $x = 1$, alors $S(x) = 0$
iii. Si $x = 0$, alors $S(x)$ converge vers $\begin{cases} 0 & \text{si } p > 0 \\ f(0+) & \text{si } p = 0. \end{cases}$

Chapitre 20

Lignes de champ et intégrales premières

20.1 ED exactes sur $\mathbb{R}^2$ et fonction potentielle

20.1.1 Cas des EDO à variables séparées

Soit $y' = f(x).g(x)$. La résolution de cette équation est maintenant bien connue :

$$f(x)\mathrm{dx} - \frac{1}{g(y)}\mathrm{dy} = 0 \Leftrightarrow G(y) := \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx =: F(x) + \text{cste} \equiv F(x) - G(y) = \text{cste} \tag{20.1}$$

Posons $h(x, y) = F(x) - G(y)$: h est une **intégrale première** de cette ED car h est constante tout le long de la courbe intégrale. La 1-forme différentielle de h peut s'écrire

$$dh(x, y) = f(x)dx - \frac{1}{g(y)}dy \tag{20.2}$$

Comme ED $\Leftrightarrow dh = 0$, l'ED est dite exacte et h est une fonction potentielle. La solution générale de cette ED n'est rien autre que $h(x, y) = c$.

20.2 ED non exacte, FI et intégrale première

20.2.1 ED non exacte

L'ED suivante sous sa forme générale :

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \tag{20.3}$$

est **exacte** $\Leftrightarrow \exists h : \dfrac{\partial h}{\partial x} = P(x, y), \dfrac{\partial h}{\partial y} = Q(x, y) \Leftrightarrow dh(x, y) = 0$. Autrement dit, si il existe une fonction potentielle exacte pour cette ED. Cette ED peut ne pas être exacte mais en la multipliant par une fonction $\mu(x, y)$ elle peut le devenir. Notre ED est alors essentiellement [1] équivalente à

$$\mu P dx + \mu P dy = 0 \tag{20.4}$$

où μ est un **facteur intégrant**. Bien sur, cette ED doit avoir les mêmes solutions. Cette ED sera **exacte** $\Leftrightarrow \exists h : \dfrac{\partial h}{\partial x} = \mu P(x, y), \dfrac{\partial h}{\partial y} = \mu Q(x, y) \Leftrightarrow dh(x, y) = 0$.

1. Si l'on rejette $\mu(x, y) = 0$.

DÉFINITION : μ est un facteur intégrant de

$$F_x dx + F_y dy = 0 \tag{20.5}$$

ssi $F_x dx + F_y dy$ est exacte.

Les courbes intégrales sont $h(x, y) = c$ qui sont aussi les intégrales premières de l'ED (avec et sans μ). *L' intégrale première est donc une fonction non constante qui est constante le long de toute courbe intégrable.* EXEMPLE. Voir exemple 20.2, page 8, slide 4.

20.2.2 Existence et multiplicité des facteurs intégrants

Supposons que l'ED suivante

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \tag{20.6}$$

soit **non exacte**, c'est-à-dire [2] $\nexists h(x, y) : \vec{\nabla} h = P\vec{1_x} + Q\vec{1_y}$. Comment savoir s'il existe un facteur intégrant rendant cette ED exacte ? C'est-à-dire si il $\exists h(x, y) : \vec{\nabla} h = (\mu P, \mu Q)$?

20.2.3 EDP des facteurs intégrants

a.

La fonction $\mu(x, y)$ est facteur intégrant de $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad (\mu P, \mu Q) \text{ dérive d'un potentiel (rotationnel nul)} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial y}(\mu P) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu Q) \qquad \text{(dans un domaine simplement connexe)} \\
&\Leftrightarrow \quad P\frac{\partial \mu}{\partial y} - Q\frac{\partial \mu}{\partial x} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mu
\end{aligned} \tag{20.7}$$

la dernière ligne est une **EDP linéaire du premier ordre** en μ dont la résolution n'est pas simple mais considérons le cas particulier très simple où $\mu(x)$ est indépendant de y.

PROPOSITION
Si $\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\Big/ Q =: \varphi(x)$ est indépendante de y et si ϕ est une primitive de φ, alors $\mu(x) := e^{-\phi(x)}$ est un F.I.

Démonstration.
Avec un facteur intégrant ne dépendant que de x, $\mu(x)$, l'EDP linéaire du premier ordre en μ devient [3]

$$\mu' = -\,\mu\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\Big/ Q \tag{20.8}$$

Cette équation à variable séparée ne dépend que de x. On peut alors écrire $\frac{\mu'}{\mu} = -\phi$

$$\Leftrightarrow -\mu' = \varphi\mu = -\varphi \Leftrightarrow \mu(x) = e^{-\phi(x)} \tag{20.9}$$

Ceci prouve qu'il existe un F.I. $\mu(x)$. □

La réciproque est vraie : si l'ED admet un F.I. $\mu(x)$ alors (...) est indépendant de y.

2. Notation intéressante car elle permet d'effectuer simplement le rotationnel
3. $\partial\mu/\partial y = 0$ et $\partial\mu/\partial x = \mu'$.

20.1.5 Les courbes intégrales vues comme courbes de niveau

Voir slide 10, il montre que $\vec{\nabla} h \perp (dx, dy)$.

20.2.3 EDP des facteurs intégrants (suite)

b.

Si $Q \neq 0$, l'équation $Q(x,y) = 0$ décompose le problème oxy en secteurs délimités par les courbes incluses dans l'ensemble de niveau $Q(x,y) = 0$. Ainsi, dans chacun de ces secteurs $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \Leftrightarrow y' = -P/Q$.

Proposition
Si $-P/Q$ est $\begin{cases} \text{continue} \\ \text{localement lipschitzienne en } y \end{cases}$, alors il existe (localement) **une** solution à

$$\begin{cases} y' & = -P/Q \\ y(x_0) & = y_0 \end{cases} \tag{20.10}$$

où la dernière ligne est valable $\forall (x_0, y_0)$ dans le secteur dans lequel on travail.

On a changé notre problème en un problème de Cauchy et utilisé notre unicité locale, fournissant l'existence et l'unicité !
La solution de ce problème, donc la courbe intégrale correspondante est $y = y(x; x_0, y_0) = y(x; y_0)$ avec x_0 **fixé** ! La famille des courbe est $y = y(x; c)$ et la résolution par rapport à c donne $c = h(x,y)$ impliquant que h est intégrale première. [4]

c.

Résumons : $h(x,y)$ est intégrale première de $Pdx + Qdy = 0$ ssi ses courbes intégrales $\equiv h(x,y) = c$ ssi cette ED est (à un facteur près)

$$\frac{\partial h}{\partial x} dx + \frac{\partial h}{\partial y} dy = 0 \tag{20.11}$$

Soit $g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ avec $g' \neq 0$. Multiplions notre dernière équation par g' :

$$g'|_{h(x,y)} \frac{\partial h}{\partial x} dx + g'|_{h(x,y)} \frac{\partial h}{\partial y} dy = 0 \tag{20.12}$$

Cette fonction n'est rien d'autre que la dérivée de la fonction suivante

$$g(h(x,y)) = c \equiv \text{ ses courbes intégrales} \tag{20.13}$$

qui n'est rien d'autre que ses courbes intégrales !

Proposition
Si h est intégrale première alors $g \circ h$ est intégrale première

Corollaire : *S'il existe au moins une intégrale première, alors il en existe une infinité.*

4. A éclaircir/reformuler.

20.3 Lignes de champ dans $\mathbb{R}^2$ et point singulier

20.3.1 Ligne de champ vue comme image, ensemble de niveau ou graphe d'une fonction

Soit $\vec{F} = F_x\vec{1_x} + F_y\vec{1_y}$, un champ de vecteurs dans $\mathbb{R}^2$.

Définition : $\mathcal{C}$ est une **ligne de champ** de $\vec{F}$ ssi

$$\forall(x,y) \in \mathcal{C}, \vec{F}(x,y) \text{ est tangent à } C \text{ en } (x,y) \tag{20.14}$$

Si $\mathcal{C}$ admet une paramétrisation $\vec{\gamma} : t \mapsto (x(t), y(t))$ (de classe C^1 telle que la dérivée $\neq 0$), alors $\forall t, \exists k(t) \in \mathbb{R} : \vec{\gamma'}(t) = k(t)\vec{F}(\gamma(t))$. On peut écrire ceci sous la forme d'un système qui peut encore donner [5] :

$$\frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{F_y}{F_x} \tag{20.15}$$

Considérons des $\mathcal{C}$ particuliers :

- Si $\mathcal{C} \equiv y = y(x)$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{F_y}{F_x} \tag{20.16}$$
- Si $\mathcal{C} \equiv u(x,y) = \text{cste}$
$$\frac{dx}{F_x} = \frac{dy}{F_y} \tag{20.17}$$

On peut bien évidemment généraliser tout ceci à $\mathbb{R}^3$:

- Paramétriques ($F_x \neq 0$)
$$\begin{cases} \frac{dy/dt}{dx/dt} &= \frac{F_y}{F_x} \\ \frac{dz/dt}{dx/dt} &= \frac{F_z}{F_x} \end{cases} \tag{20.18}$$
- Cartésienne (graphe)($F_x \neq 0$)
$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} &= \frac{F_y}{F_x} \\ \frac{dz}{dx} &= \frac{F_z}{F_x} \end{cases} \tag{20.19}$$
- Cartésienne (ens. de niveau) ($F_x, F_y, F_z \neq 0$)
$$\frac{dx}{F_x} = \frac{dy}{F_y} = \frac{dz}{F_z} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} du &= 0 \\ dv &= 0 \end{cases} \tag{20.20}$$

Exemples. Slide 17 et 18 et section 20.3.2. Comme $\mathbb{R}^3$ c'est pour les n00b, passons à m dimensions !

20.4 Lignes de champ et intégrale première dans $\mathbb{R}^m$

20.4.3 Lignes de champ : cas mD

On peut adopter quatre points de vues pour ses lignes de champ :

1. orbites des solutions de :
$$\vec{y'} = \vec{F}(\vec{y}) \tag{20.21}$$
(vision vision paramétrique qui caractérise les lignes de champ de $\vec{F}$ comme des orbites de solution du SD autonome en $\vec{y}(t)$)

5. ? ?

2. courbes intégrales ($F_m \neq 0$) :
$$\frac{dy_1}{F_1} = \cdots = \frac{dy_m}{F_m} \tag{20.22}$$
3. courbes intégrales de
$$\begin{aligned} \tfrac{dy_1}{dy_m} &= \tfrac{F_1}{F_m} &&=: f_i \\ &\vdots \\ \tfrac{dy_{m-1}}{dy_m} &= \tfrac{F_{m-1}}{F_m} &&=: f_{m-1} \end{aligned} \tag{20.23}$$
4. courbes intégrales de
$$\frac{d\vec{z}}{dx} = \vec{f}(x, \vec{z}) \tag{20.24}$$

Attention section pas claire ! A retravailler !

20.4.4 Intégrales première ou invariant d'un SD

Définition : Dans les notations $\vec{z'} = \vec{f}(x, \vec{z})$, la fonction $u : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, non constante, est une intégrale première du SD ssi
$$\forall \text{ sol. } \vec{\varphi}(x), \exists c \in \mathbb{R}, \forall x : u(x, \vec{\varphi}(x)) = c \tag{20.25}$$

Autrement dit, u est une *fonction qui reste constante tout le long de toute courbe intégrale.* Pour une même valeur fixée atteinte par u, on a plusieurs courbe donnant une hypersurface, fibrée par des courbes. L'intégrale première permet de repérer une courbe intégrale mais pas de la caractériser.

Plus généralement :

Définition : Une **intégrale première d'un SD** sur $D \subseteq \mathbb{R}^m$ est une fonction non constante
$$u : \mathcal{U} \subseteq D \to \mathbb{R} = \vec{y} \mapsto u(\vec{y}) \tag{20.26}$$
qui reste constante tout le long de *toute courbe intégrale.*

La notion d'intégrale première (ou **invariant**) d'une **ED d' ordre supérieur** découle du fait qu'une telle ED est équivalent au SD d'ordre 1 en les fonctions inconnues : on peut appliquer ce que nous venons de voir.

Cette fonction u a pour interprétation physique d'être un invariant du système (énergie totale, moment cinétique, ...). Une loi de conservation implique la connaissance d'une intégrale première et est un premier par vers la résolution.

20.4.6 Fonctions indépendantes

Définition : $u_1, \ldots, u_p$ sont **fonctionnellement indépendantes** ssi aucune n'est fonction des autres localement ssi $\nexists G$, une fonction non constante tel que $G(u_1, \ldots, u_p) = 0$.

Proposition
Si $\exists \vec{x_0} : \vec{\nabla} u_1|_{\vec{x_0}}, \ldots, \vec{\nabla} u_p|_{\vec{x_0}}$ sont linéairement indépendant, alors $u_1, \ldots, u_p$ sont fonctionnellement indépendant

20.4.7 Intégrales premières d'un SD

Considérons le SDLH suivant ($m = 3$)

$$\begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} & = -2y \\ \dfrac{dz}{dx} & = -z \end{cases} \quad \Longrightarrow dx = \frac{dy}{-2y} = \frac{dz}{-z} \tag{20.27}$$

Notre champ de pentes et notre champ de vecteur $\vec{F}$ valent tous deux $(1, -2y, -z)$. La solution de ce SDL avec $(y(0), z(0)) = (y_0, z_0)$ est simple. On remarque que si on résout le système pour y_0 et z_0 on trouve deux intégrales premières :

$$\begin{cases} y & = y_0 e^{-2x} \\ z & = z_0 e^{-x} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} (y_0 =) & y^{2x} & =: u(x, y, z) \\ (y_0 =) & z^{x} & =: v(x, y, z) \end{matrix} \tag{20.28}$$

En effet, chacune des intersections d'une courbe intégrale avec le plan $x = 0$ est constant le long de la courbe intégrale.

Théorème :
Le SD $\begin{cases} z_1' & = f_1(x, z_1, \ldots, z_{n-1}) \\ \vdots & \vdots \\ z_{n-1}' & = f_{n-1}(x, z_1, \ldots, z_{n-1}) \end{cases}$ où $\vec{f} : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m-1}$ est de classe C^1 possède, **au voisinage** de tout point $(x_0, \vec{z_0}) \in \int\ D$, $m-1$ intégrales premières indépendantes.

Pour un x_0 fixé, l'ensemble des CI (cf. $\vec{z_0}$) est $(m-1)D$: ensemble de solution dépendantes de $m-1$ constantes arbitraire. La résolution par rapport à ces constantes donne les $m-1$ intégrales premières.

Corollaire : *Le SD* $\dfrac{dy_1}{F_1} = \cdots = \dfrac{dy_m}{F_m}$ *des lignes de champ de* $\vec{F}$ *possède (au voisinage d'un point* $\vec{y_0}$ *t.q.* $\vec{F}(\vec{y_0}) \neq \vec{0}$*)* $m-1$ *intégrales premières indépendantes.*

20.4.9 Espace vectoriel des intégrales premières

Proposition
L'ensemble des intégrales premières de $\vec{z}' = \vec{f}(x, \vec{z})(\vec{z} = (z_1, \ldots, z_{m-1})$(soit $m-1$ équations scalaires) (ou le SD du corollaire précédent) est l'espace fonctionnellement engendré par $m-1$ intégrales premières.

On ne travaille plus ici avec des EV linéairement indépendant, mais *fonctionnellement indépendant.*

Démonstration.
$\supseteq$ *Toute fonction d'intégrales premières d'un SD est aussi une intégrale première.*
Soit $u_1, \ldots, u_k$ les intégrales premières. $g \in C^1(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}) \Rightarrow g(u_1, \ldots, u_k)$ est aussi intégrale première.

$\subseteq$[6] Soient $u_1, \ldots, u_{m-1}$, $m-1$ intégrales premières.
u intégrale première $\Rightarrow \exists g \in C^1(\mathbb{R}^{m-1}, \mathbb{R}) : u = g(u_1, \ldots, u_{m-1})$. □

6. Admis.

20.4.10 Utilité pratique des intégrales premières

Soit $\vec{z}' = \vec{f}(x, \vec{z})$, un SD à $m-1$ équations. La connaissance de la solution générale permet la connaissance de $m-1$ intégrales premières indépendantes.
Le fait de connaître une intégrale première "réduit" le SD à $m-2$ inconnues.
Exemple. Slide 34

20.4.5 EDP des intégrales premières

Proposition
Soit $\vec{f} : D \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m-1}$ de classe C^1. Alors $u \in C^1(D, \mathbb{R})$ est une intégrale première du SD

$$\vec{z}' = \vec{f}(x, \vec{z}) \tag{20.29}$$

$$\iff$$

$$\vec{\nabla} u \perp (1, \vec{f}) \text{ en tout point de } D. \tag{20.30}$$

Démonstration.
$\Longrightarrow$ Soit $\vec{\phi}$, l'unique solution du problème de Cauchy $\begin{cases} \vec{z}' & = \vec{f}(x\vec{z}) \\ \vec{z}(x_0) & = \vec{z}_0 \end{cases}$. On a donc $\phi_i'(x) = f_i(x, \phi(x))$. Comme u est intégrale première

$$\exists c \in \mathbb{R} : \forall x \in I : u(x, \vec{\phi}(x)) = c \qquad \Longrightarrow \frac{d}{dx}(\dots) = 0 \tag{20.31}$$

D'où, en calculant la dérivée en x_0 :

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(x_0, \vec{\phi}(x_0))} + \sum_{i=1}^{m-1} \left.\frac{\partial u}{\partial z_i}\right|_{(x_0, \vec{\phi}(x_0))} \cdot \left.\frac{d\phi_i}{dx}\right|_{x_0} = 0 \tag{20.32}$$

Or, $\vec{\phi}(x_0) = \vec{z}_0$ et $\phi_i'(x_0) = f_i(x_0, \vec{z}_0)$. On a alors

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\partial u}{\partial z_i}.f_i\right)\right|_{(x_0, \vec{z}_0)} = 0 \tag{20.33}$$

Comme ceci est vrai $\forall (x_0, \vec{z}_0)$, donc ($\equiv$ signifie en tant que fonction de m variable réelle) :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\partial u}{\partial z_i}.f_i \equiv 0 \tag{20.34}$$

On a bien

$$\vec{\nabla} u \perp (1, \vec{f}) \tag{20.35}$$

$\Longleftarrow$ Supposons que $\vec{\nabla} u \perp (1, \vec{f})$ dans D :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\partial u}{\partial z_i}.f_i \equiv 0 \text{ sur } D \tag{20.36}$$

Soit $\vec{\phi}$ une solution de $\vec{z}' = \vec{f}(x, \vec{z})$ (d'où $\phi_i'(x) = f_i(x, \vec{\phi}(x))$).
Or

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\partial u}{\partial z_i}.f_i\right)\right|_{(x, \vec{\phi}(x))} = 0 \quad \forall x \tag{20.37}$$

D'où (la dérivée de la fonction composée $u(x, \phi(x))$ prouve que si u est solution de l'EDP alors d'office u est une intégrale première du SD) :

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(x_0,\vec{\phi}(x_0))} + \sum_{i=1}^{m-1} \left.\frac{\partial u}{\partial z_i}\right|_{(x_0,\vec{\phi}(x_0))} . \left.\phi_i'\right|_{x_0} = 0 \quad \forall x \tag{20.38}$$

C'est-à-dire $u(x, \vec{\phi}(x)) = \ cste$. Comme ceci est vrai $\forall \vec{\phi}$, u est bien intégrale première. $\square$

Le sens direct offre une C.N.et le sens indirect une C.S. Attention, ceci est une ancienne question d'examen (de même pour le corollaire ci-dessous) !

Corollaire : *$u(x, y, z)$ est une intégrale premières du SD des lignes de $\vec{F}(x, y, z)$ (Hyp. $u, \vec{F} \in C^1$) $\Leftrightarrow \vec{\nabla} u \perp \vec{F}$ en tout point du domaine.*

Autrement dit : $\vec{\nabla} u \perp \vec{F} \Longrightarrow u$ est une intégrale première du SD $\dfrac{dx}{F_1} = \dfrac{dy}{F_2} = \dfrac{dz}{F_3}$.

Démonstration. Soit $\vec{\nabla} u \perp \vec{F}$. Soit $(x(t), y(t), z(t))$ une ligne de champ de $\vec{F}$, c'est-à-dire $(F_1, F_2, F_3) // \left(\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}, \dfrac{dz}{dt}\right)$.
Ceci implique que

$$\vec{\nabla} u \perp \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0 \tag{20.39}$$

Autrement dit

$$\frac{d}{dt} u(x(t), y(t), z(t)) = 0 \tag{20.40}$$

Ceci est vrai pour toute ligne de champ de $\vec{F}$. Donc u est intégrale première du *SD* des lignes du champ $\vec{F}$. $\square$

Notons que la réciproque est vraie : si u est une intégrale première, alors $\forall$ lignes de champ $(x(t), y(t), z(t))$: $\dfrac{d}{dt} u(x(t), y(t), z(t)) = 0$ donc $\vec{\nabla} u \perp \vec{F}$.

Chapitre 21

EDP du premier ordre

21.1 Introduction

Une **EDP du premier ordre** en la fonction inconnue $u : D \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} : \vec{x} \mapsto u(x)$ est une expression de la forme

$$f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{x}\right) \tag{21.1}$$

où $f \in C^1$. Une solution d'une telle expression u sera telle que $f(\vec{x}, u(\vec{x}), \vec{\nabla}(\vec{x})) = 0$. On restreindra notre étude au cas ou $\dfrac{\partial f}{\partial u} = 0$ avec f linéaire en $\vec{\nabla} u$: les EDP linéaire homogène :

$$\alpha(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + \beta(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + \gamma(x,y)u = 0 \tag{21.2}$$

Cette équation peut s'écrire $L(u) = 0$ où $L : u \mapsto \alpha(x,y)\dfrac{\partial u}{\partial x} + \beta(x,y)\gamma(x,y)u$. On dira que L est un opérateur différentiel. Le noyau de L est un EV réel qui n'est rien d'autre que l'ensemble des solutions (ou combili) de l'EDP.

On retrouvera aussi notre EDP préférée d'Analyse II : l'EDP quasi-linéaires

$$\alpha(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + \beta(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} = \gamma(x,y,u) \tag{21.3}$$

On rencontrera également le cas de trois variables indépendantes : $u(x,y,z)$. On aura alors une EDP complètement homogène :

$$\alpha(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial x} + \beta(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial y} + \gamma(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial z} + \underbrace{\delta(x,y,z)u}_{=0} = 0 \tag{21.4}$$

Cela nous inspire déjà le fameux $\vec{\nabla} u \perp \vec{F}$ du chapitre 20.

21.2 EDPL hyper-homogène

21.2.2 La solution générale

Dans le cas ou $F_0 = 0$ et F_i est le coefficient des $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, ces F_i forment le champ de vecteur $\vec{F} = (F_1, \ldots, F_m)$ sur D de sorte qu'on puisse écrire l'EDP [1] :

$$\vec{F} \perp \vec{\nabla} u \tag{21.5}$$

1. Si u possède m variable, sa représentation à besoin de $m+1$ axes.

Les coefficients de l'EDP sont les composantes d'un champ de vecteur $\vec{F}$ dans l'espace des variables. On a vu au précédent chapitre que cette relation caractérise u comme des intégrales premières de $\vec{F}$

On définit alors les **courbes caractéristiques** de l'EDP comme les lignes de champ de $\vec{F}$, mais surtout les courbes intégrales du système

$$\frac{dx_1}{F_1} = \cdots = \frac{dx_n}{F} \tag{21.6}$$

Ceci forme le **système différentiel des caractéristiques.**. Les solutions de l'EDP $\vec{\nabla} u \perp \vec{F}$ sont les intégrales premières de ce système, soit des fonctions qui sont constante tout le long de toute ligne de champ de $\vec{F}$.

La résolution d'une telle EDPL est équivalente à la recherche de $m-1$ solutions particulières fonctionnellement indépendantes de sorte que la S.G. est :

$$u = G(u_1, \ldots, u_{m-1}) \tag{21.7}$$

Exemple. Voir section 21.2.3 et 21.2.4

21.2.5 Problème de Cauchy pour $\vec{\nabla} u \perp \vec{F}$

Reprenons notre équation

$$F_1(\vec{x})\frac{\partial u}{\partial x_1} + \cdots + F_n(\vec{x})\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0 \tag{21.8}$$

Supposons que les courbes caractéristiques sont connues. Si $u : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est solution de l'EDP, alors u est connue si on connaît sa valeur sur toute courbe caractéristique.
Autrement dit, si l'on a toutes les caractéristiques il suffit de connaître la valeur de u en un point pour chaque caractéristique pour déterminer la valeur de u dans tout l'espace (ou tout domaine). Par exemple, en $2D$, il suffit de donner la valeur de u le long d'une transversale à une courbe caractéristique.

Soit H, une hypersurface coupant chaque caractéristique en **un** point $\Rightarrow$ u est univoquement déterminé par la C.I. $u|_H$ donné [2].

21.3 EDP quasi linéaire sur $\mathbb{R}^m$

21.3.1 Interprétation géométrique pour $m = 2$

Considérons

$$F_x|_{(x,y,z)}\frac{\partial z}{\partial x} + F_y|_{(x,y,z)}\frac{\partial z}{\partial y} = F_z|_{(x,y,z)} \tag{21.9}$$

La fonction $Z : (x, y) \mapsto Z(x, y)$ est solution de l'EDPQL ssi $\forall (x, y) \in D$:

$$F_x|_{(x,y,Z(x,y))} \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x,y,Z(x,y))} + F_y|_{(x,y,Z(x,y))} \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x,y,Z(x,y))} = F_z|_{(x,y,Z(x,y))} \tag{21.10}$$

L'équation du plan tangent au graphe de Z en $(x_0, y_0, Z(x_0, y_0))$:

$$\left.\frac{\partial Z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} (x - x_0) + \left.\frac{\partial Z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} (y - y_0) = z - z_0 \tag{21.11}$$

2. Qui sera C^1.

En graphe de Z en ce point est orthogonal aux vecteurs

$$\text{gph } Z \perp \left(\left.\frac{\partial Z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}, \left.\frac{\partial Z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}, -1 \right) \perp \vec{F}_{x,y,Z(x,y)} \tag{21.12}$$

La deuxième $\perp$ est donné par l'EDP. On peut voir le vecteur ci-dessus comme le vecteur directeur du plan. Dès lors, on en déduit que $\vec{F}$ est tangent au graphe de Z.
Z est solution de l'EDP ssi son graphe est (en chacun de ses points) tangent au champ de vecteur $\vec{F}$.

Le graphe de Z n'est rien d'autre qu'une réunion de lignes de champ de $\vec{F}$. Il forme un ensemble de niveau d'une intégrale première des du système des caractéristiques de F et est donc le système caractéristique de l'EDP.

21.3.2 Résolution pour $m = 2$ (= EDPQL)

PROPOSITION
$Z : (x, y) \mapsto Z(x, y)$ est localement solution de

$$F_x \frac{\partial z}{\partial x} + F_y \frac{\partial z}{\partial y} = F_z \tag{21.13}$$

ssi $\exists \mathcal{U} : (x, y, z) \mapsto \mathcal{U}(x, y, z)$ intégrale première du système des caractéristiques

$$\frac{dx}{F_x} = \frac{dy}{F_y} = \frac{dz}{F_z} \tag{21.14}$$

et $\exists c \in \mathbb{R}$ t.q. Z est localement solution de

$$\mathcal{U}(x, y, Z(x, y)) = c \tag{21.15}$$

Démonstration. Vue ? □

En pratique :
- On écrit le SD des lignes.
- On cherche deux intégrales premières indépendantes $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$.
- On l'écrit l'intégrale première $g(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2) = c$
- On résout $g(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2) = c$ par rapport à z (si possible)

EXEMPLE. Section 214.3.3 ou slide 14.

21.3.4 Condition de Cauchy pour EDPQL

On a vu que si $Z : (x, y) \mapsto Z(x, y)$ est une solution de l'EDPQL alors le graphe de Z est une réunion des lignes de champ de $\vec{F}$. Qu'est ce qu'une bonne C.I. ? Il suffit de considérer une courbe transversale Γ transversale aux caractéristiques de sorte à ce que le graphe de Z s'appuie sur Γ. [3]
On demande à ce que cette restriction soit au moins de classe C^1 et z non tangent à une courbe caractéristique.

3. Ceci semble naturel lorsqu'on se rappelle que l'on a ramené la résolution de l'EDPQL à la résolution de l'EDPLHH : $\vec{\nabla}\mathcal{U} \perp \vec{F}$.