Chapitre 1

Calcul de criticité en théorie de la diffusion

1.1 Criticité

Le but est de voir s'il existe une solution à l'équation de diffusion dans un milieu fini homogène **sans** sources externes. C'est un effet la définition de la criticité, une réaction en chaîne auto-alimentée ce qui revient mathématiquement à tirer la source externe. Nous allons voir qu'il existe une solution en problème mais attention si l'on obtiens une solution sinusoïdale, le flux ne peut jamais être négatif ! Nous allons commencer par l'étude sans réflecteur

1.1.1 Diffusion monocinétique

Considérons un réacteur nu (pas de réflecteur) mais **avec** fissions (le terme "source" ici)

$$-D\Delta\varphi(\bar{r}) + \Sigma_a\varphi(\bar{r}) = \nu\Sigma_f\varphi(\bar{r}) \tag{1.1}$$

Il est toujours possible d'associer la CL précédemment vue, à savoir l'annulation du flux à la frontière extrapolée $\varphi(\bar{r}_s, \bar{n}d_s) = 0$. Il s'agit d'un problème aux valeurs propres qui peut s'écrire comme une équation d'Helmholtz

$$\Delta\varphi(\bar{r}) + B^2\varphi(\bar{r}) = 0 \tag{1.2}$$

où $B^2 = \dfrac{\nu\Sigma_f - \Sigma_a}{D}$. En en tire un ensemble dénombrable de valeurs propres, toutes de multiplicité unitaire

$$0 < B_o^2 < B_1^2 \leq B_2^2 \leq \dots \tag{1.3}$$

D'un point de vue physique, seul le mode fondamental est acceptable physiquement pour un flux car pas de changement de signe.

Il y a deux façons possible d'exprimer les valeurs propres du fondamental : la résolution du problème aux valeurs propres et la définition du même facteur :

1. *Buckling géomatrique*

$$B_g^2 = \frac{-\Delta\varphi_o}{\varphi_o} \tag{1.4}$$

2. *Buckling matériel*

$$B_m^2 = \frac{\nu\Sigma_f - \Sigma_a}{D} \tag{1.5}$$

On peut voir B_m comme la courbure du lobe. On parle de criticité lorsque

$$\boxed{B_g^2 = B_m^2} \tag{1.6}$$

Le fondamental ne s'annulant pas, un certain nombre de fois la solution est toujours solution. La solution du flux n'est pas totalement déterminée mais la forme oui. Comme on fonctionne à une constante près, cela montre bien que la criticité ne donne **pas** la puissance !

Problème dépendant du temps

En introduisant les *opérateurs de diffusion*

$$(J-K)\varphi(\bar{r}) = \nu\Sigma_f\varphi(\bar{r}) + D\Delta\varphi(\bar{r}) - \Sigma_a\varphi(\bar{r}) \tag{1.7}$$

On peut en tirer un spectre de valeurs propres réelles

$$\lambda_o > \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \tag{1.8}$$

où $\lambda_i = \nu\Sigma_f - \Sigma_a - DB_i^2$ et $B_i^2 \in \sigma(-\Delta)$.

Si λ_0 est définie comme valant $\max_i \lambda_i$, elle correspond également à la valeur propre minimale de $(-\Delta)$. On associe alors φ_0 comme étant la fonction propres associée à cette valeur propre, qui est positive sur tout le volume du réacteur.

En ré-écrivant l'équation, il est possible d'avoir tout les temps à gauche et la partie spatiale à droite

$$\frac{1}{v}\frac{\partial\varphi(\bar{r},t)}{\partial t} = (J-K)\varphi(\bar{r},t) \tag{1.9}$$

On peut alors appliquer la séparation des variables en développant sur la base des fonctions propres $\varphi(\bar{r},t) = \sum_i c_i(t)\varphi_i(\bar{r})$

$$\varphi(\bar{r},t) = \sum_i c_i(0)\varphi_i(\bar{r})e^{\lambda_i vt} \tag{1.10}$$

Trois cas peuvent se présenter en fonction de la valeur propre

- $\lambda_0 < 0$: état *sous-critique*
- $\lambda_0 > 0$: état *sur-critique*
- $\lambda_0 = 0$: état *critique* avec $\varphi(\bar{r},t) \overset{t\to+\infty}{\longrightarrow} c_o(0)\varphi_o(\bar{r})$

La seule solution possible pour le problème de criticité pour **toute** condition initiale est

$$\lambda_i = \nu\Sigma_f - \Sigma_a - DB_i^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda_o = DB_m^2 - DB_g^2 \tag{1.11}$$

Criticité et facteur de multiplication

Il doit exister un lien entre la criticité et la formule des six facteurs. Définissons k_{eff} comme le rapport entre le nombre de neutrons produit et consommé (détruit). Proche de la criticité, on sait que $\varphi(\bar{r}) \approx \varphi_o(\bar{r})$. On peut écrire k_eff à l'aide des opérateurs de production J et destruction K

$$k_{eff} = \frac{J\varphi_o}{K\varphi_o} = \frac{\nu\Sigma_f}{\Sigma_a + DB^2} = \frac{\nu\Sigma_f}{\Sigma_a}\frac{1}{1+L^2B^2} \tag{1.12}$$

Une autre façon de voir φ_0 via cette définition est de voir φ_0 comme une fonction fondamentales associée à la valeur propre k_{eff}

$$K\varphi = \frac{1}{k} J\varphi \tag{1.13}$$

En oubliant le terme de fission rapide (ε), en supposant monoénergétique, sans probabilité de ralentissement et sans probabilité anti-trappe, on trouve [1] [2]

$$k_{eff} = \frac{\eta f}{1 + L^2 B^2} = \eta f P_{th} \tag{1.14}$$

La **criticité est atteinte pour** $k_{eff} = 1$. En ré-introduisant les facteurs laissés sur le côté

$$k_{eff} = \eta\varepsilon p f . P_{th} = \frac{\eta\varepsilon p f}{1 + L^2 B^2} \tag{1.15}$$

Par identification

$$P_{th} = \frac{1}{1 + L^2 B^2} \qquad \text{où} \quad B_m^2 = \frac{\eta\varepsilon p f - 1}{L^2} \tag{1.16}$$

Il n'est pas étonnant de retrouver la valeur propre B_m du buckling géométrique mais la criticité sera atteinte lorsqu'elle vaudra le buckling matériel.

Pour les sources indépendantes, l'idée est la même

$$(K - J)\varphi(\bar{r}) = Q(\bar{r}) = \sum_i Q_i \varphi_i(\bar{r}) \tag{1.17}$$

On va pouvoir associer un développement en série du flux sur la même base (vecteurs propres) et voir que par application de $(K - J)$ à ce flux on fait apparaître un facteur qui est l'inverse des λ_i

$$\varphi(\bar{r}) = \sum_i \frac{Q_i}{DB_i^2 + \Sigma_a - \nu\Sigma_f} \varphi_i(\bar{r}) \tag{1.18}$$

Pour un cas légèrement sous-critique il existe une solution stationnaire possible à condition de se rapprocher du fondamental. En première approximation, le premier terme sera dominant

$$\varphi(\bar{r}) \approx \frac{Q_o}{-\lambda_o} \varphi_o(\bar{r}) = \frac{Q_o}{DB_o^2 + \Sigma_a - \nu\Sigma_f} \varphi_o(\bar{r}) \tag{1.19}$$

En première approximation, le flux est le fondamental multiplié par un coefficient qui reprend le fondamental de la source ainsi qu'un terme $1/-\lambda_0$. Un réacteur sous-critique est donc un amplificateur du mode fondamental de la source. C'est le genre de situation dans laquelle une source pourrait suppléer au définit de neutron que la réacteur est capable de fournir par rapport à ce qu'il consomme.

1.1.2 Noyaux de modération

Nous avons fait jusqu'ici un développement à un groupe où la variable énergie a été aplatie. Hélas, le cas monoénergétique est un peu scabreux et l'objectif est ici d'essayer d'améliorer le traitement de la variable énergie.

1. Dans un milieu infini $k_\infty = \frac{\nu\Sigma_f}{\Sigma_a} = \eta f$
2. Il faudrait ajouter les notes manuscrites, un dev. a été fait au tableau.

Définitions

On définit le **noyau de ralentissement/modération** comme la densité de probabilité qu'un neutron du à une fission en $\bar{r}_0$ est ralenti jusqu'à une énergie inférieure à E en $\bar{r}$

$$P(\bar{r}_o \to \bar{r}, E) \tag{1.20}$$

La **densité de modération** est le nombre de neutrons par unité de volume et de temps qui sont ralentis en dessous de E en $\bar{r}$ (voir chapitre 7)

$$q(\bar{r}, E_{th}) = \int_V P(\bar{r}_o \to \bar{r}, E_{th}) \nu \Sigma_f \varphi_{th}(\bar{r}_o) d\bar{r}_o \tag{1.21}$$

où

$$-D\Delta\varphi_{th}(\bar{r}) + \Sigma_a \varphi_{th}(\bar{r}) = q(\bar{r}, E_{th}) \tag{1.22}$$

Il s'agit de l'équation du *flux thermique*. Le membre de gauche correspond à l'équation de diffusion à un groupe dans lequel la source $\nu\Sigma_f\varphi$ est remplacée par une densité de ralentissement (voir plus loin).
Justifions (1.21) : des neutrons vont être émis par unité de volume et de temps en quantité $\Sigma_f \varphi_{th}$. Le ralentissement permet d'aller dans la "seule zone" ou l'on peut avoir des fissions (toutes vont se faire aux énergies thermiques par hypothèses). A partir de ce nombre de neutrons de fission par unité de volume et de temps, il y a une certaine probabilité que le neutron voit son énergie réduite en dessous de la limite définissant la zone thermique en migrant de $\bar{r}_0$ à $\bar{r}$.

Plutôt que de dire que tout neutron émis des fission est directement disponible, on considère à travers P (noyau de ralentissement), une "fonction de transfert" qui fait passé les neutrons émis au point $\bar{r}_0$ avec une énergie élevée au point $\bar{r}$ avec une énergie possible.

Si l'on se place dans un réacteur de taille infinie on pourrait dire que peu importe le point $\bar{r}_0$ et $\bar{r}$ c'est la distance qui va définir l'expression de ce noyau : un produit de convolution apparaît et on peut utiliser les transformées de Fourier

$$(\Sigma_a + DB^2)\hat{\varphi}(B) = (2\pi)^{3/2}\hat{P}(B, E_{th})\nu\Sigma_f\hat{\varphi}(B) \quad \Rightarrow \quad (2\pi)^{3/2}\hat{P}(B, E_{th})\frac{\nu\Sigma_f}{\Sigma_a + DB^2} = 1 \ \to \ B_m^2 \tag{1.23}$$

On obtient une expression qui permet d'obtenir la valeur de B_m^2. En "inversant" la précédente expression

$$\varphi(\bar{r}) = \int A(\bar{u}).e^{iB_m\bar{u}.\bar{r}} d\bar{u} \tag{1.24}$$

Ce qui est solution de $\Delta\varphi(\bar{r}) + B_m^2\varphi(\bar{r}) = 0$

Solution dans un milieu fini

Il faut comme condition supplémentaire que B^2 appartienne aux valeurs propres de $(-\Delta)$ avec comme conditions aux limites la frontière extrapolée

$$B^2 = B_o^2 = B_g^2 \tag{1.25}$$

Sans oublier la condition de criticité $B_m^2 = B_g^2$ où B_m^2 est solution de

$$\underbrace{(2\pi)^{3/2}\hat{P}(B_m, E_{th})}_{\bar{P}(B_m, E_{th})} \frac{\eta f}{1 + L^2 B_m^2} = 1 \tag{1.26}$$

Où l'on introduit $\bar{P}$ la probabilité de non fuite rapide (le slide 10 donne des exemples).

1.2 Réflecteurs

1.2.1 Introduction

Cette fois-ci, le réacteur n'est plus nu mais entouré d'un réflecteur (matériau non fissible). Si l'on tient compte que le matériau peut renvoyer un certain nombre de neutrons vers la matière fissile on peut s'attendre à ce que moins de combustible soit nécessaire. En plus de renvoyé les neutrons, ils ont un rôle de ralentissement des neutrons (car bien souvent, leur composition est similaire à celle du modérateur). Le cas des réacteurs rapides ne sera ici pas considéré.

1.2.2 Sauvetage réflectif

Modèle de diffusion mono-cinétique

On va se retrouver avec la juxtaposition de deux zones de caractéristiques différentes mais supposées homogènes. Il faut résoudre l'équation de diffusion pour chacun de ces milieux et ensuite relier ces deux solutions. Dans le noyau

$$-D\Delta\varphi(\bar{r}) + \Sigma_a\varphi(\bar{r}) = \nu\Sigma_f\varphi(\bar{r}) \qquad \Leftrightarrow \qquad \Delta\varphi(\bar{r}) + B_c^2\varphi(\bar{r}) = 0 \tag{1.27}$$

où $B_c^2 = \dfrac{\nu\Sigma_f - \Sigma_a}{D} = \dfrac{\eta f - 1}{L^2} = \dfrac{k_\infty - 1}{L^2}$.

Dans le réflecteur, il n'y a pas de fission

$$-D_R\Delta\varphi(\bar{r}) + \Sigma_{aR}\varphi(\bar{r}) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \Delta\varphi(\bar{r}) - \frac{1}{L_R^2}\varphi(\bar{r}) = 0 \tag{1.28}$$

Il faut résoudre l'équation de diffusion dans chacune des m zone. La solution dépendra de $2m$ constantes à déterminer à l'aide de la continuité, des CL, ...On en tire un système d'équations non trivial qui n'a de solution non triviale que si son déterminant est nul, correspondant à la condition de criticité.

Considérons un noyau d'épaisseur $2a$ ainsi qu'un réflecteur d'épaisseur b (longueur extrapolée). Par symétrie dans la résolution des équations de diffusion

$$\begin{cases} \varphi(x) &= A\cos B_c x & 0 \le x \le a \\ \varphi(x) &= C\cosh\left(\dfrac{x}{L_R}\right) + E\sinh\left(\dfrac{x}{L_R}\right) & a \le x \le a+b \end{cases} \tag{1.29}$$

En utilisant la continuité en $x = a$ et la condition aux limites (annulation du flux en $a+b$,la seule façon de faire est d'avoir un sinh car cosh ne s'annule jamais)

$$\begin{cases} \varphi(x) &= A\cos B_c x & 0 \le x \le a \\ \varphi(x) &= A\dfrac{\cos B_c a}{\sinh \frac{b}{L_R}}\sinh\left(\dfrac{a+b-|x|}{L_R}\right) & a \le x \le a+b \end{cases} \tag{1.30}$$

Il faut que le courant soit continu entre le cœur et le réflecteur. Par continuité du courant, on en tire l'*équation de criticité* (souvent transcendantale)

$$DB_c\tan B_c a = \frac{D_R}{L_R}\coth\frac{b}{L_R} \tag{1.31}$$

Notons que le coefficient A restera indéterminé car la criticité ne dépend pas de ce par quoi on multiplie le flux.

La question légitime est de voir ce que l'on gagne en matière fissile. Pour un réacteur nu d'épaisseur $2a$, la criticité est atteinte lorsque $2a_o = \frac{\pi}{B_c}$. Les économies dues aux réacteurs (le gain) s'expriment

$$\delta = a_o - a = \frac{\pi}{2B_c} - a \tag{1.32}$$

A condition de criticité, nous avons [3]

$$\tan B_c\delta = \frac{DB_c}{D_R} L_R \tanh \frac{b}{L_R} \tag{1.33}$$

S'il n'y a pas trop de fission, $B_c\delta \ll 1$

$$\delta \approx \frac{D}{D_R} L_R \tanh \frac{b}{L_R} \tag{1.34}$$

Si on utilise le même matériau pour le réflecteur et le modérateur, D est peu affecté par la proportion de carburant

$$\delta \approx L_R \tanh \frac{b}{L_R} \tag{1.35}$$

Faisons quelques approximations

- $b \ll L_r$: $\delta \approx b$: si l'épaisseur du réflecteur est petite par rapport à la longueur de diffusion, on gagne à peu près l'épaisseur du réflecteur.
- $b \gg L_r$: $\delta \approx L_R$: si l'épaisseur du réflecteur est beaucoup plus grande que la longueur de diffusion, on peut prendre l'épaisseur L_r à l'interface avec le cœur pour donner les rétrodiffusions.

1.2.3 Modèle à deux groupes

On suppose le groupe 1 rapide et le second thermique. Dans le cœur, nous avons

$$\left\{ \begin{array}{ll} -D_1\Delta\varphi_1(\bar{r}) + \Sigma_{a1}\varphi_1(\bar{r}) + \Sigma_{s1}\varphi_1(\bar{r}) & = \nu\Sigma_{f1}\varphi_1(\bar{r}) + \nu\Sigma_{f2}\varphi_2(\bar{r}) \\ -D_2\Delta\varphi_2(\bar{r}) + \Sigma_{a2}\varphi_2(\bar{r}) & = \Sigma_{s1}\varphi_1(\bar{r}) \end{array} \right. \tag{1.36}$$

Dans le réflecteur, il n'y a pas de termes de fissions

$$\left\{ \begin{array}{ll} -D_{R1}\Delta\varphi_1(\bar{r}) + \Sigma_{R1}\varphi_1(\bar{r}) & = 0 \\ -D_{R2}\Delta\varphi_2(\bar{r}) + \Sigma_{R2}\varphi_2(\bar{r}) & = \Sigma_{R1}\varphi_1(\bar{r}) \end{array} \right. \tag{1.37}$$

Travaillons en géométrie plane. Existe des solutions de type Helmholtz $-\Delta\varphi_i = B^2\varphi_i$. Pour que ce soit le cas, il faut que le déterminant de ce système soit nul. On va obtenir un φ_1 et un φ_2 associé aux $B^2_{1,2}$

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{D_2B^2 + \Sigma_{a2}}{\Sigma_{s1}} \tag{1.38}$$

Le slide 16 donne la solution de cette équation.

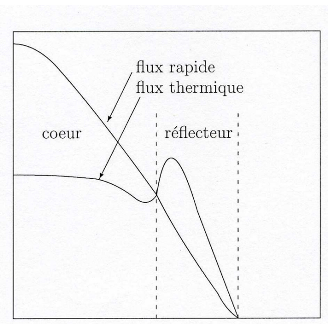

FIGURE 1.1

Ci-contre, on retrouve la solution en cosinus qui s'écrase bien jusqu'à l'annulation. Dans la partie thermique, la solution est plus constante dans le cœur et même si on retrouve au creux à proximité de la surface on retrouve un pic du flux dans le réflecteur car la longueur de diffusion doit être d'environ la moitié du réacteur (car paquet de scattering qui va se faire en renvoyer une série de neutrons vers le coeur). on a également des neutrons produit grâce aux fissions renvoyés par le scattering(c'est dans le thermique que le retour vers le cœur se fait le plus).

3. C'était pas pour un nu ?