



ECOLE  
POLYTECHNIQUE  
DE BRUXELLES

UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES

SYNTHÈSE

---

# Physique des lasers

## PHYS-H-410

---

*Auteur :*  
Nicolas ENGLEBERT

*Professeur :*  
Simon-Pierre GORZA

Année 2016 - 2017

# Appel à contribution

## Synthèse Open Source



Ce document est grandement inspiré de l'excellent cours donné par Simon-Pierre GORZA à l'EPB (École Polytechnique de Bruxelles), faculté de l'ULB (Université Libre de Bruxelles). Il est écrit par les auteurs susnommés avec l'aide de tous les autres étudiants et votre aide est la bienvenue ! En effet, il y a toujours moyen de l'améliorer

surtout que si le cours change, la synthèse doit être changée en conséquence. On peut retrouver le code source à l'adresse suivante

<https://github.com/nenglebert/Syntheses>

Pour contribuer à cette synthèse, il vous suffira de créer un compte sur *Github.com*. De légères modifications (petites coquilles, orthographe, ...) peuvent directement être faites sur le site ! Vous avez vu une petite faute ? Si oui, la corriger de cette façon ne prendra que quelques secondes, une bonne raison de le faire !

Pour de plus longues modifications, il est intéressant de disposer des fichiers : il vous faudra pour cela installer L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X, mais aussi *git*. Si cela pose problème, nous sommes évidemment ouverts à des contributeurs envoyant leur changement par mail ou n'importe quel autre moyen.

Le lien donné ci-dessus contient aussi un README contenant de plus amples informations, vous êtes invités à le lire si vous voulez faire avancer ce projet !

## Licence Creative Commons

Le contenu de ce document est sous la licence Creative Commons : *Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International (CC BY-NC-SA 4.0)*. Celle-ci vous autorise à l'exploiter pleinement, compte- tenu de trois choses :



1. *Attribution* ; si vous utilisez/modifiez ce document vous devez signaler le(s) nom(s) de(s) auteur(s).
2. *Non Commercial* ; interdiction de tirer un profit commercial de l'œuvre sans autorisation de l'auteur
3. *Share alike* ; partage de l'œuvre, avec obligation de rediffuser selon la même licence ou une licence similaire

Si vous voulez en savoir plus sur cette licence :

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

**Merci !**

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
1.1	Principe des lasers . . . . .	1
1.2	Caractéristiques des sources lasers . . . . .	3
1.2.1	Cohérence temporelle . . . . .	4
1.2.2	Cohérence spatiale . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Interactions lumière-matière</b>	<b>6</b>
2.1	Propagation d'onde EM dans un milieu diélectrique . . . . .	6
2.1.1	Approche "particulaire" . . . . .	6
2.1.2	Modèle de l'oscillateur harmonique . . . . .	8
2.2	Particule de lumière . . . . .	11
2.2.1	Équations de Maxwell : onde électromagnétique . . . . .	11
2.2.2	Lumière : un ensemble de photons . . . . .	11
2.2.3	Description simplifiée de la quantification des champs EM . . . . .	11
2.2.4	Flux de photon $\mathcal{J}$ et densité $n_p$ . . . . .	12
2.3	Cavité radiative . . . . .	13
2.3.1	Spectre de la cavité radiative . . . . .	14
2.4	Interactions dans un milieu à deux niveaux atomiques . . . . .	16
2.4.1	Coefficients d'Einstein . . . . .	16
2.4.2	Lien avec le temps de vie spontané . . . . .	17
2.4.3	Gain optique et forme de raie . . . . .	17
2.4.4	Fonction forme de raie et mécanismes d'élargissement . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Théorie semi-classique des laser</b>	<b>25</b>
3.1	Équations de Maxwell-Bloch du laser . . . . .	25
3.1.1	Équations du champ électromagnétique dans la cavité . . . . .	25
3.1.2	Équation de Bloch du milieu . . . . .	28
3.2	État stationnaire d'un laser . . . . .	32
3.2.1	Intensité laser et inversion de population . . . . .	33
3.2.2	Susceptibilité électrique et gain . . . . .	34
3.2.3	Fréquence du champ laser . . . . .	35
<b>4</b>	<b>Équations de bilan du laser et du mécanisme de pompe</b>	<b>38</b>
4.1	Équation de bilan du laser et équations de Maxwell-Bloch . . . . .	38
4.2	Systèmes à deux niveaux . . . . .	39
4.3	Laser à trois niveaux d'énergie . . . . .	41



# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Principe des lasers

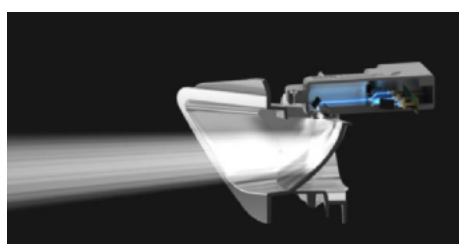


FIGURE 1.1

Avant d'en venir au principe des lasers, demandons-nous ce qu'est un laser, et qu'est-ce qu'une "lumière laser"? Le "phare laser" utilisé dans les Audi est-il une émission laser? En réalité non car la lumière est non monochromatique et non cohérente : l'appellation vient du fait que ce phare utilise un laser bleu pour pomper, la conversion optique/électrique étant importante.

Un **laser** est un *oscillateur optique faisant recours à l'émission stimulée*. Afin de clarifier la notion d'oscillateur, voici un exemple d'oscillateur acoustique avec l'effet Larsen. L'effet Larsen est une oscillation acoustique auto-entretenue dans une boucle constituée d'un microphone et d'un haut-parleur. Si le microphone est trop près du haut-parleur, une partie va être captée et amplifiée (seulement les fréquences de 20 à 20 kHz) via la rétroaction.

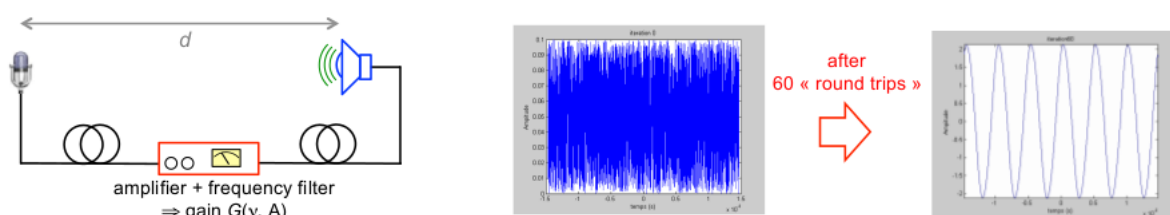


FIGURE 1.2

En modélisant numériquement le système et en lui fournissant un bruit en entrée, après une soixantaine de passages dans la boucle on observe un signal sinusoïdal : c'est le sens strident entendu. Ceci n'est possible que si il y a amplification, le "bruit" ayant une faible amplitude.

Essayons de modéliser une telle boucle. Si le gain sur une boucle est supérieur aux pertes, nous aurons bien une amplification même si les perturbations sont petites. Cependant, le gain ne peut pas augmenter de façon infinie. On modélise cette **saturation**

$$G = \frac{G_0}{1 + \frac{A}{A_S}} \quad (1.1)$$

où  $A_0$  est le gain à petit signaux. Limiter le gain n'est pas suffisant : il faut que le système se stabilise vers un état stationnaire. Imaginons qu'à un moment, le microphone capte une onde acoustique monofréquence :

$$\delta P_n = A \cos(2\pi\nu t) \quad (1.2)$$

Après un premier tour dans la boucle, on obtient

$$\delta P_{n+1} = A \cos(2\pi\nu t + \delta\varphi) G(\nu) \alpha(\nu, d) \quad (1.3)$$

où l'on a pris un certain déphasage qui peut s'exprimer

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi d}{\lambda} + \phi_{elec} \quad (1.4)$$

où  $\phi_{elec}$  est le déphasage induit par l'amplificateur et où  $\lambda_0\nu_0 = c$ . Ce déphasage est multiplié par un gain  $G$  mais nous avons aussi une certaine atténuation par propagation (seule une petite partie est captée par le microphone).

Nous serons en condition stationnaire à la fréquence  $\nu_0$  lorsque

$$\delta P_n = \delta P_{n+1} \quad (1.5)$$

Ceci n'est possible que si les gains sont équivalents aux pertes et si le déphasage est un multiple de  $2\pi$ .

$$\begin{cases} \text{Amplitude} & : G(\nu_0)\alpha(\nu_0, d) & = 1 \\ \text{Phase} & : \Delta\varphi & = m2\pi \\ & : (m - \phi_{elec}/2\pi)\lambda_0 & = d \end{cases} \quad (1.6)$$

Un laser en régime sera dans une telle situation. Mais pour avoir un laser, il faut un gain et une rétroaction positive. Pour avoir du *feedback* en acoustique, on utilise un microphone. En optique, nous l'obtiendrons à l'aide de miroirs formant une cavité optique (*résonateur*). Deux d'entre eux sont largement répandus : la cavité linéaire de Fabry-Perot et la cavité circulaire

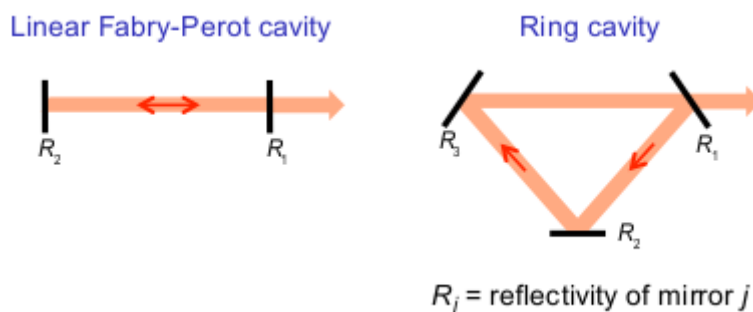


FIGURE 1.3

Avec un Fabry-Perot, on peut placer un milieu à gain pour avoir un effet de rétroaction. De façon générale, Fabry-Perot désigne un résonateur où la lumière fait des allers-retours.

La *condition de résonance* s'énonce

$$kL = \frac{2\pi}{\lambda}L = m2\pi \quad \Leftrightarrow \quad \nu = l \frac{c}{L} \quad (1.7)$$

où  $L$  est la longueur de la cavité<sup>1</sup> Dans un laser, seulement quelques fréquences optiques peuvent en sortir : ce sont celles qui satisfont cette condition. Ils portent le nom de *modes*. Ainsi, cette condition établit la fréquence des modes longitudinaux dans le résonateur optique. Notons que pour être dans le visible, les ordres doivent être très élevés.

1. Prendre le double de la longueur entre deux miroirs pour un Fabry-Perot.

Une cavité n'est pas suffisante pour avoir un laser, il faut aussi un gain optique. En effet, 'Laser' est l'acronyme de **l**ight **a**mplification by **s**timulated **e**mission **r**adiation. Or, il manque quelque chose dans cet acronyme; l'émission stimulée, postulée par Einstein. Si les atomes peuvent capturer de la lumière, ils peuvent également en émettre. Dès lors, si l'énergie d'un photon est proche de la différence entre deux niveaux d'énergie ( $E_1$  et  $E_2$ ), il est émis un photon indistinguishable du photon incident (même fréquence, même direction, même état de polarisation et phase identique).

En pratique, on utilise un milieu à gain : un paquet d'atomes excité dans l'état  $E_2$  grâce à un mécanisme de pompage.

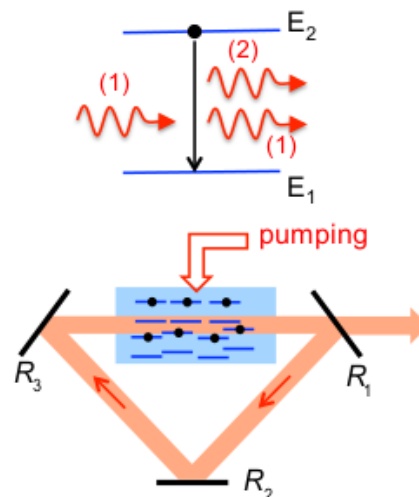


FIGURE 1.4

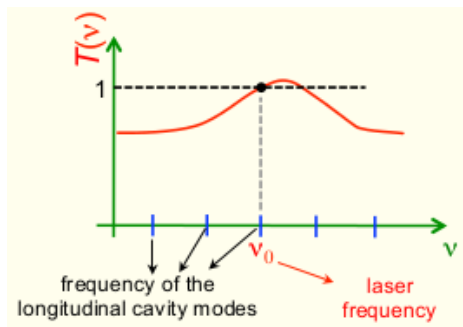


FIGURE 1.5

Considérons le produit pertes-gain

$$T(\nu) = R_1 R_2 R_3 \exp(-\alpha_i L) \exp(\mathcal{G}d) = 1 \quad (1.8)$$

où  $d$  est la longueur du milieu à gain,  $\alpha_i$  les pertes internes (diffusion d'un laser dans l'eau, ...),  $R_i$  les coefficients de réflectivité et  $\mathcal{G}$  le gain.

Si  $T(\nu) > 1$ , il y a plus de gain que de perte : amplification du gain dans la cavité. L'intensité va augmenter mais le gain diminuer (saturation) de sorte à évoluer vers le cas stationnaire.

Cependant, il faut que l'effet laser démarre : ceci sera possible grâce à l'émission spontanée. Ce principe est très général mais est applicable à tous lasers. La diversité de lasers est donc très importante :

**Taille du laser** : quelques micromètres à des centaines de kilomètres

**Milieu à gain** : gaz, ions, semi-conducteurs, ...

**Pompage** : pompage laser (on utilise un laser pour exciter les atomes du milieu à gain le temps qu'un photon arrive pour provoquer une émission), électrique (énergie des électrons), ...

## 1.2 Caractéristiques des sources lasers

Une source laser n'est certainement pas équivalente à une source thermique. On retrouve pour les sources laser :

- Quasi-monochromatique<sup>2</sup>
- Grande directivité

Ces deux caractéristiques se cachent sous le nom de *cohérence spatiale et temporelle*.

2. Pas nécessairement monochromatique, mais dépasse le cadre du cours.

### 1.2.1 Cohérence temporelle

Soit  $\cos(\omega t)$ . Si après certains temps on ne peut plus prédire la phase de l'onde, la lumière n'est plus *temporellement cohérente*. Si on observe des sauts de phase, elle sera dite *partiellement cohérente*. La cohérence temporelle est donc l'intervalle temporel dans lequel on peut prédire la phase.

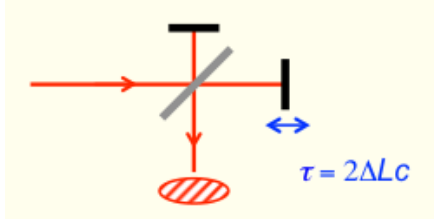


FIGURE 1.6

Si les deux bras d'un interféromètre n'ont pas la même longueur, un délai temporel va apparaître et il est possible d'observer des franges d'interférences. Mais plus on éloigne le miroir, plus cette visibilité diminue jusqu'à ce que l'on observe plus rien<sup>3</sup>. Ceci est la longueur de cohérence  $L_C$ , liée par la relation

$$\tau_c = L_C c \quad (1.9)$$

Il existe un lien entre  $\tau_c$  et la largeur spectrale de la source :

$$\delta\nu \approx \frac{1}{\tau_c} \quad (1.10)$$

Pour le soleil  $\Delta\nu = 4 * 10^{14} \text{ Hz} \rightarrow \tau_c = 2.5 \text{ fs}, L_c = 0.7 \text{ }\mu\text{m}$ . Pour l'émission d'une raie Néon à 633 nm, on trouve une longueur de cohérence de 2 cm. Ces deux longueurs sont trop court pour des applications comme de l'interférométrie. Par contre, à l'aide d'un laser qui possède une largeur spectrale de  $\Delta\nu = 500 \text{ Hz}$ , on trouve  $L_c = 600 \text{ km}$  ce qui est beaucoup plus intéressant !

### 1.2.2 Cohérence spatiale

Nous regardons cette fois-ci dans l'espace. Connaissant le champ à un endroit, sommes-nous capable de le prédire à un autre ? Considérons une source composée de points sources indépendants les uns des autres et plaçons un plan  $\Sigma$  possédant deux trous à une distance  $D$  de la source. Plaçons ensuite un écran  $\Sigma_0$  comme le suggère l'image ci-dessous

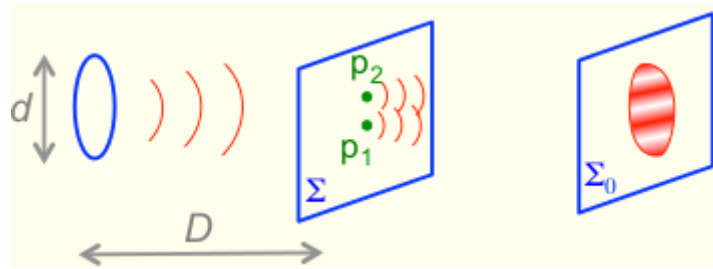


FIGURE 1.7

3. Ceci est du à un défilement trop rapide des franges d'interférences.



Si les franges sur  $\Sigma_0$  sont fixes, c'est que la phase est constante : si ce n'est pas le cas, les franges défilent et les points  $p_1$  et  $p_2$  seront dit incohérent l'un par rapport à l'autre. Il est possible de démontrer que les franges sont visibles sur  $\Sigma_0$  si

$$\nu = 2 \left| \frac{J_1 \left( \frac{\pi \Delta x d}{\bar{\lambda} D} \right)}{\left( \frac{\pi \Delta x d}{\bar{\lambda} D} \right)} \right| \quad (1.11)$$

où  $J_1$  est la fonction de Bessel,  $\overline{p_1 p_2} = \Delta x$  et  $\bar{\lambda}$  est la longueur d'onde moyenne.

Si à  $D = 1m$  et  $|p_1 - p_2| < 30 \mu m$  on verra les franges de Young : ce n'est pas très cohérent. Par contre en grossissant la sortie d'un laser on peut avoir deux mètres d'écart pour  $\Delta x$  ce qui est bien mieux.

### Application

La fin du chapitre illustre les différentes applications que l'on peut trouver avec des lasers.

## Chapitre 2

# Interactions lumière-matière

Ce modèle est loin de la réalité mais "correct" en pratique. Il est donc intéressant pour développer une certaine intuition du problème.

### 2.1 Propagation d'onde EM dans un milieu diélectrique

#### 2.1.1 Approche "particulaire"

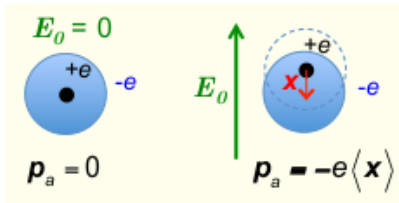


FIGURE 2.1

Si la lumière se propage dans un milieu non vide, il y aura des interactions : comment on pourrait décrire ces interactions et d'où elles viennent ? Lorsque l'on applique un champ électrique  $\vec{E}$  à un système de charges, elles ont la possibilité de bouger : le nuage électronique se déforme et il apparaît un moment dipolaire électrique

$$\vec{p}_a = - \int e|\psi|^2 \vec{r} d\vec{r} \quad (2.1)$$

où  $-e|\psi|^2 d\vec{r}$  est l'élément de charge à la position  $\vec{r}$  donnant lieu à une intégrale non nulle<sup>1</sup>. Dans un milieu contenant  $N$  atome par unité de volume, la polarisation (macroscopique) est donnée par

$$\vec{P} = N\vec{p}_a \quad (2.2)$$

soit la densité atomique multiplié par le moment dipolaire de chaque atome (on suppose que tous les dipôles sont orientés dans le même sens).

Pour illustrer, penchons-nous sur le cas du condensateur en prenant l'hypothèse d'un milieu linéaire et isotrope (sans quoi la susceptibilité  $\chi$  serait un tenseur). Dans ce cas, la polarisation va être proportionnelle à l'amplitude du champ total  $E = E_0 + E'_0$  où  $E_0$  est le champ initial et  $E'_0$  le champ induit.

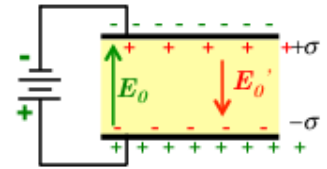


FIGURE 2.2 (2.3)

$$\begin{cases} \vec{E}'_0 &= -\vec{P}/\epsilon_0 \\ \vec{E} &= \vec{E}_0 - \vec{P}/\epsilon_0 \end{cases} \Rightarrow \vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$$

où  $\chi$  est la **susceptibilité électrique**.

Calculons la divergence de ce champ électrique total

$$\nabla \cdot \vec{E} = \nabla \cdot (\vec{E}_0 - \vec{P}/\epsilon_0) \Leftrightarrow \nabla \cdot (\vec{E} + \vec{P}/\epsilon_0) = \nabla \cdot (\vec{E}_0) \quad (2.4)$$

1. Si cette intégrale est nulle lorsque  $\vec{E} = \vec{0}$ , c'est dû au fait que la fonction d'onde est antisymétrique.

Dans le vide  $\nabla \cdot (\vec{E}_0) = \rho_{libre}/\epsilon_0$ . Pour tenir compte de l'apparition des dipôles, on introduit un **champ de déplacement**  $\vec{D}$  de sorte à pouvoir écrire une formule de divergence "classique". Par définition

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0(1 + \chi) \vec{E} = \epsilon \vec{E} \quad (2.5)$$

où  $\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0 = (1 + \chi)$ . On peut alors écrire

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_{libre} \quad (2.6)$$

En toute généralité, cette susceptibilité  $\chi$  sera complexe : absorption, gain, ... en découleront. En toute généralité, le champ électrique peut varier dans le temps. On définit alors la **densité de courant** (densité d'électron \* charge \* variation de la position de cette charge) :  $\vec{J}$

$$J_{liee} = -Ne \frac{d}{dt} \langle x \rangle \Leftrightarrow J_{liee} = N \frac{d}{dt} p_a = \frac{d}{dt} \vec{P} \quad (2.7)$$

Il y aura toujours un dipôle accompagné d'un moment dipolaire atomique mais cette fois-ci dépendant du temps.

Partons maintenant des équations de Maxwell et des équations constitutives. Considérons un milieu diélectrique ( $\rho_{libre} = 0$ ) et non magnétique ( $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ )

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \\ \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} \\ \nabla \cdot \vec{D} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{D} = \epsilon \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \\ \vec{B} = \mu_0 \vec{H} \end{array} \right. \quad (2.8)$$

En calculant le rotationnel du rotationnel du champ électrique<sup>2</sup>, on trouve l'équation d'onde

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} = \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{P} \quad (2.9)$$

où  $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$  est la vitesse de la lumière dans le vide.

Trois cas sont particulièrement intéressants

1. Dans le vide :  $\vec{P} = \vec{0}$  et on retrouve la solution harmonique, décrite par des ondes planes

$$\vec{E} = \frac{1}{2} (\mathcal{E} \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) \vec{e} + c.c.) \quad (2.10)$$

où  $\vec{e}$  est le vecteur de polarisation. Pour que ce soit bien solutions des équations de Maxwell, il faut que  $\vec{k} \cdot \vec{e} = 0$  (polarisation transverse) et  $|\vec{k}| = \omega/c = 2\pi/\lambda_0$ .

2. Dans un diélectrique, la polarisation varie dans le temps : effets de réfractions, de perte et de gain

3. **Indice de réfraction complexe**  $\mathcal{N}$ .

Soit la solution harmonique et  $\vec{k} = \mathcal{K} \cdot \vec{1}_z$ . Jusqu'ici, nous avons toujours considéré que l'indice de réfraction n'était du qu'à des effets de phase.

Adoptons des notations en phaseurs

$$\vec{E} = \frac{1}{2} (\mathcal{E} \exp(i(\mathcal{K}z - \omega t)) \vec{e} + c.c.) = \frac{1}{2} (\hat{E} + c.c.), \quad \vec{P} = \frac{1}{2} (\hat{P} + c.c.) \quad (2.11)$$

---

2.  $\text{rot rot} = \nabla \cdot \nabla - \Delta$

où nous avons cette fois-ci autorisé  $\mathcal{K}$  à être complexe. En faisant de même pour  $\hat{\vec{P}}$  (par identification) :

$$\hat{\vec{P}} = \varepsilon_0 \chi \hat{\vec{E}} = \varepsilon_0 (\chi' + i\chi'') \hat{\vec{E}} \quad (2.12)$$

Après substitution de ces équations dans l'équation de propagation (la dérivée en  $z$  fait apparaître un  $\mathcal{K}^2$ ).

$$\mathcal{K}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} (1 + \chi' + i\chi'') \quad (2.13)$$

où l'on note  $\mathcal{K} = k + i\alpha_E$  où  $\alpha_E$  est le coefficient d'atténuation du champ électrique. Si l'on substitue cette nouvelle expression de  $\mathcal{K}$  dans l'expression de  $\vec{E}$ , on fait apparaître une exponentielle négative

$$\vec{E} = \mathcal{E} \exp(-\alpha_E z) \cos(kz - \omega t) \quad (2.14)$$

On définit le coefficient d'absorption en énergie  $\alpha = 2\alpha_E$ . Si  $\alpha > 0$  il s'agit d'un milieu à pertes (à gain, inversement).

Venons-en à ce qui nous intéresse ici : l'**indice de réfraction complexe** défini

$$\mathcal{N} = \eta + i\kappa \quad (2.15)$$

tel que  $\mathcal{K} = \frac{\omega}{c} \mathcal{N}$ . Le champ électrique établi ci-dessus devient alors

$$\vec{E} = \vec{\mathcal{E}} \exp\left[-\frac{\omega}{c} \kappa z\right] \cos\left(\frac{\omega}{c} \eta z - \omega t\right) \quad (2.16)$$

L'absorption vaut alors  $\alpha = 2\frac{\omega}{c} \kappa$  et la vitesse de phase  $v_\phi = \frac{\omega}{c} = \frac{c}{\eta} \rightarrow \lambda = \frac{\lambda_0}{\eta}$ . En identifiant la partie réelle et imaginaire :

$$\begin{cases} \eta^2 - \kappa^2 &= 1 + \chi' \\ \eta\kappa &= \chi''/2 \end{cases} \quad (2.17)$$

Souvent on peut entendre que la partie réelle correspond à des effets de phase ( $\vec{k}$ ) alors que la partie imaginaire correspond à des pertes/gain : ce n'est pas exact, les deux sont "mélangés". Cependant, si  $\kappa \ll 1$

$$\begin{cases} \eta &\approx \sqrt{1 + \chi'} \\ \kappa &\approx \chi''/(2\sqrt{1 + \chi'}) \end{cases} \quad (2.18)$$

On remarque que  $\eta, \kappa$  dépendent de  $\omega$ . On nomme alors **relation de dispersion** l'équation  $\eta = f(\omega)$ .

### 2.1.2 Modèle de l'oscillateur harmonique

Le souci est que nous ne connaissons pas les expressions de  $\eta, \kappa, \chi'$  et  $\chi''$ , tous fonction de  $\omega$ . On va utiliser un modèle qualitativement correct (mais assez loin de la réalité) pour les obtenir dans un milieu diélectrique isotrope (gaz, ions dans un solide, ...)

Considérons un électron élastiquement (constante de rappel  $k$ ) lié à un noyau infiniment lourd sur lequel on applique  $E(t)$ . On introduit un terme de relaxation (damping)  $m\gamma\dot{x}(t)$  si on veut

une description assez fidèle, le nuage électronique ne peut osciller infiniment<sup>3</sup>. Il faut donc perdre de l'énergie, ce qui est le rôle de ce terme. Nous obtenons alors

$$\ddot{x}(t) + \omega_a^2(t) + \gamma\dot{x}(t) = -\frac{eE(t)}{m} \quad (2.19)$$

où  $\omega_a = \sqrt{k/m}$ ,  $\frac{1}{\gamma}$  est le temps caractéristique de relaxation pour la polarisation  $\vec{P}$  et le membre de droite comporte le terme d'oscillation forcée. En utilisant les deux phaseurs

$$E(t) = \frac{\mathcal{E} \exp(-i\omega t) + c.c.}{2}, \quad x(t) = \frac{X \exp(-i\omega t) + c.c.}{2} \quad (2.20)$$

On trouve

$$(\omega_a^2 - \omega^2 - i\gamma\omega)X \exp(-i\omega t) + c.c. = \frac{e\mathcal{E}}{m} \exp(-i\omega t) + c.c. \quad (2.21)$$

Sachant que  $\vec{P} = -eN\vec{x}(t) = \frac{\hat{P} + c.c.}{2}$  où  $\hat{P} = \varepsilon_0\chi\hat{E}$ , on trouve

$$\chi(\omega) = \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m} \frac{1}{\omega_a^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \quad (2.22)$$

Comme  $\chi$  est complexe, il peut y avoir un déphasage entre l'excitation et la position du système masse-ressort. Les parties réelles et imaginaires valent alors

$$\chi'(\omega) = \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m} \frac{\omega_a^2 - \omega^2}{(\omega_a^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}, \quad \chi''(\omega) = \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m} \frac{\gamma\omega}{(\omega_a^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \quad (2.23)$$

Jusqu'ici, nous travaillons sans approximations mais ces résultats ne sont pas évidents à interpréter. Pour se faire, nous allons faire l'hypothèse que l'amortissement est lent. Dès lors,  $\vec{E}$  fait un grand nombre d'oscillation avant une atténuation totale du système masse-ressort

$$\omega_a^2 - \omega^2 = 2\omega_a(\omega_a - \omega) \quad (2.24)$$

Avec cette hypothèse,  $\chi''$  devient directement proportionnel à  $\alpha$  et on le montrera. Il s'agit d'une *lorentzienne*

$$\chi''(\omega) = \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m \gamma \omega_a} \frac{1}{1 + \frac{(\omega_a - \omega)^2}{(\gamma/2)^2}} > 0 \quad (2.25)$$

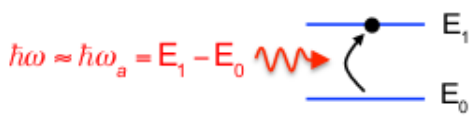


FIGURE 2.3

Cette fonction est positive  $\forall \omega$ , ce qui implique que  $\alpha$  sera toujours positif ce qui correspond à de l'absorption : passage d'un niveau fondamental vers un état excité.

Pour  $\chi'(\omega)$ , on trouve

$$\chi'(\omega) = \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m \gamma \omega_a} \frac{(\omega_a - \omega)/(\gamma/2)}{1 + \frac{(\omega_a - \omega)^2}{(\gamma/2)^2}} \quad (2.26)$$

Ceci met en évidence une variation de l'indice de réfraction : c'est une relation de dispersion.

3. Une densité de charge liée bougeant agit comme une antenne : émission d'onde EM.

Traçons ces deux courbes. Ci-dessous, en rouge, nous avons une absorptions. En vert, une variation de l'indice de réfraction : nous verrons que s'il y a un effet d'absorption, il y a forcément un effet de réfraction  $\eta$  alors que  $\kappa \propto \chi''(\omega)$

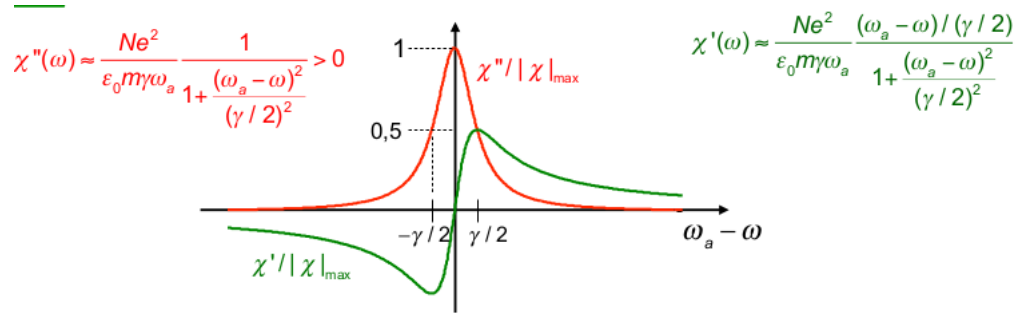


FIGURE 2.4

Si l'on excite le système en balayant sur les fréquences, nous observerons des pics d'absorption ( $\kappa$ ) et une modification de  $\eta$ . Le verre se situe entre deux pics : il est transparent car il n'y a pas d'absorption par contre on observe tout de même une variation de l'indice de réfraction permettant de distinguer les différentes couleurs.

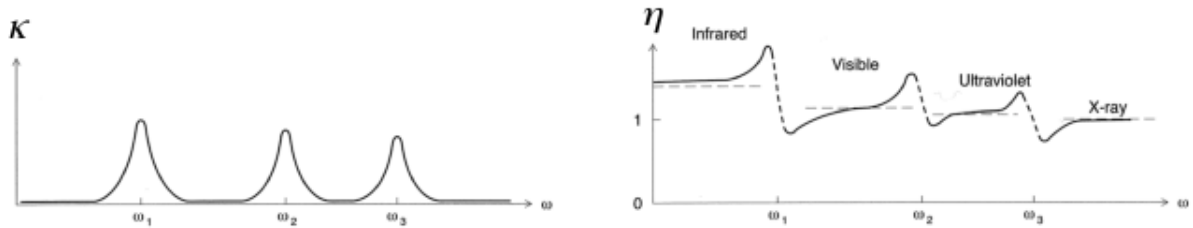


FIGURE 2.5

## 2.2 Particule de lumière

### 2.2.1 Équations de Maxwell : onde électromagnétique

Jusqu'ici nous avons utilisé une approche électromagnétique : passons cette fois-ci à une approche corpusculaire. Intéressons-nous à l'énergie (ce qui est quantifié). On s'intéresse à l'intensité ( $W/m^2$ ) qui est liée au vecteur de Poynting  $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$  et on en prend la moyenne<sup>4</sup>

$$I = \langle |\vec{S}| \rangle = \langle |\vec{E} \times \vec{H}| \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 \eta \mathcal{E}^2 \quad (2.27)$$

La solution harmonique des équations de Maxwell étant

$$\vec{E} = \mathcal{E} \cos(kz - \omega t) \vec{e} \quad (2.28)$$

Nous remarquons qu'il n'y a aucune condition sur l'amplitude  $\mathcal{E}$  qui peut varier de façon continue : de même pour l'intensité. Toutes les énergies seraient alors possibles ce qui est faux expérimentalement (effet photoélectrique notamment).

### 2.2.2 Lumière : un ensemble de photons

Planck par l'étude du corps noir et Einstein avec l'effet photoélectrique ont proposés une quantification du champ électromagnétique : les quanta de lumières ont une énergie  $\Delta E = \hbar \omega$ .

### 2.2.3 Description simplifiée de la quantification des champs EM

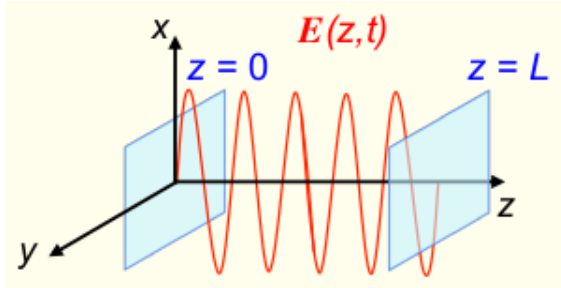


FIGURE 2.6

Supposons une cavité vide (pas de radiation, charge, milieu diélectrique), unidimensionnelle selon  $z$  formée de murs parfaitement conducteurs (un miroir parfait, rien ne sort de la cavité) en  $z = 0, L$  où passe un champ  $\vec{E}$  polarisé selon  $x$ . Nous allons toujours appliquer les équations de Maxwell, mais avec ces conditions de cavité

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} E_x(z, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_x(z, t) = 0 \quad (2.29)$$

avec comme CL  $E_x = 0$  en  $z = 0, L$ . La solution n'est rien d'autre que l'harmonique

$$E_x(z, t) = f_0 \sin(kz) q(t), \quad k = \frac{m\pi}{L}; \quad m = 1, 2, \dots \quad (2.30)$$

où  $E_x$  dépend de  $z$  et  $t$ ,  $f_0$  est l'amplitude multipliée par la variation spatiale et par une fonction non définie. C'est exactement ce que nous avons obtenu (et heureusement, nous décrivons la même chose). On en tire facilement le champ magnétique

$$B_y(z, t) = \frac{\mu_0 \epsilon_0}{k} f_0 \cos(kz) \dot{q} \quad (2.31)$$

où  $\dot{q} = \frac{dq}{dt}$ . Ces deux équations, pour  $m$  fixé, forment un **mode de cavité** pour le champ électromagnétique de fréquence angulaire  $\omega = m\pi c/L$ .

4. Un flux d'énergie oscillant n'a pas de sens.

Intéressons-nous à l'énergie totale d'un mode : il s'agit de la densité d'énergie du champ magnétique et du champ électrique.

$$H = \int \left[ \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_x^2 + \frac{1}{2\mu_0} B_y^2 \right] dV \quad (2.32)$$

Sachant que  $V$  est le volume effectif de la cavité, on trouve

$$H = \frac{1}{4} f_0^2 \varepsilon_0 V \left[ \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{k^2} \dot{q}^2 \right] \quad (2.33)$$

Pour simplifier, on considère la constante de normalisation  $f_0 = \left( \frac{2\omega^2}{\varepsilon_0 V} \right)^2$  :

$$H = \frac{1}{2} (p^2 + \omega^2 q^2) \quad (2.34)$$

Ce qui n'est rien d'autre que l'Hamiltonien de l'oscillateur harmonique où  $q$  est la position de la masse et où la force de rappel est  $F = -\omega^2 q$  (et  $p = \dot{q}$ ). Par analogie, un mode de champ électromagnétique est équivalent à un oscillateur harmonique qui aurait une masse unitaire et où les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  jouent le même rôle que la position et le moment. L'idée venant naturellement est alors d'essayer de quantifier cette O.H. en utilisant le principe de correspondance  $p \rightarrow \hat{p}, q \rightarrow \hat{q}$  tel que  $\hat{p} = -i\hbar\nabla$ .

Passons donc en mécanique quantique sans se soucier que  $H$  est l'énergie d'un cas classique. L'équation de Schrödinger indépendante du temps s'écrit

$$\left( \frac{\hbar^2}{2} \frac{d}{dq^2} + \frac{\omega^2}{2} q^2 \right) \phi(q) = E \phi(q) \quad (2.35)$$

On trouve comme énergie quantifiée

$$E_n = \left( n_p + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega \quad (2.36)$$

où on va interpréter  $n_p$  comme le nombre de photons contenus dans la cavité considérée. On nomme  $E_0$  les *fluctuations du vide* qui peuvent être utiles mais pas ici : comme nous allons sommer une infinité de modes, on obtiendrait une énergie infinie. On n'en tiendra donc pas compte.

Nous n'avons pas défini  $q(t)$  : il s'agit d'une fonction évoluant au cours du temps : celle-ci donnera l'amplitude du champ. L'énergie contenue dans le champ est ainsi proportionnelle au carré de l'amplitude de ce champ ce qui n'est rien d'autre que le cas classique où chaque oscillateur est défini par  $\omega, \vec{k}$ .

$$\langle q \rangle = \langle \phi | q | \phi \rangle = 0, \quad \langle q^2 \rangle \propto E_n \quad (2.37)$$

#### 2.2.4 Flux de photon $\mathcal{J}$ et densité $n_p$

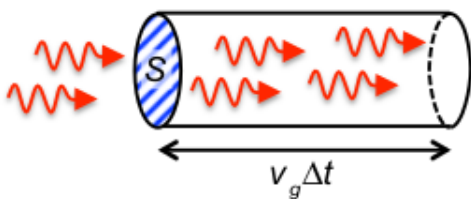


FIGURE 2.7

Nous allons suivre la démarche de Planck, à savoir tenter de quantifier le corps noir. Supposons que les photons soient monochromatiques et qu'ils se déplacent à la vitesse de groupe

$$v_g = \frac{c}{n_g} = \left( \frac{\partial k}{\partial \omega} \right)^{-1} \quad (2.38)$$



Il est dès lors utile de s'intéresser au flux du photon car l'intensité peut facilement s'en déduire : l'intensité est donnée par le produit de l'énergie d'un photon par le flux photonique. La valeur moyenne du vecteur de Poynting donne l'intensité<sup>5</sup>

$$\langle |\vec{S}| \rangle = \mathcal{J} \hbar \omega = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c \eta \mathcal{E}^2 = I \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{J} = \frac{\eta \varepsilon_0 c}{2 \hbar \omega} \mathcal{E}^2 \quad (2.39)$$

où  $\mathcal{J}$  est le **flux de photon** [ $m^{-2}.s^{-1}$ ]. On a donc un lien direct entre le flux de photon et le module carré de l'amplitude du champ. A l'aide du schéma ci-dessus, nous pouvons montrer que la **densité de photon** [ $m^{-3}$ ] vaut

$$\mathcal{J} S \Delta t = n_p S v_G \Delta t \quad \Leftrightarrow \quad n_p = \frac{\mathcal{J}}{v_g} = \frac{\eta n_g \varepsilon_0}{2 \hbar \omega} \mathcal{E}^2 \quad (2.40)$$

ce qui n'est **pas**  $n_p$  (nombre de photons).

## 2.3 Cavité radiative

Le but est d'obtenir la densité d'énergie par unité de fréquence d'un corps noir. Ce que l'on va faire pour y parvenir, c'est faire un tout petit trou en supposant que l'équilibre thermique n'est pas perturbé, et observer ce qui sort. Planck a ainsi trouvé que la probabilité de trouver un mode à une certaine énergie donnée est donnée par la loi de Boltzmann.

La probabilité  $p_{n_p}$  qu'un mode (oscillateur) soit dans l'état  $n_p$  est donnée par

$$p_{n_p} = \frac{\exp(-E_{n_p}/k_B T)}{\sum_{n_p=0}^{\infty} \exp(-E_{n_p}/k_B T)} \quad (2.41)$$

où la division par la série permet la normalisation et où  $E_{n_p} = (n_p + 1/2) \hbar \omega$ . Après substitution

$$p_{n_p} = \frac{\exp(-n_p \hbar \omega / k_B T)}{\sum_{n_p=0}^{\infty} \exp(-n_p \hbar \omega / k_B T)} \quad (2.42)$$

Le nombre moyen de photon est donnée par l'espérance mathématique. En adoptant la notation

$$\langle n_p \rangle = \sum_{n_p=0}^{\infty} n_p p_{n_p}, \quad x = \frac{\hbar \omega}{k_B T} \quad (2.43)$$

On trouve

$$\langle n_p \rangle = \frac{\sum_{n_p=0}^{\infty} n_p \exp(-n_p \hbar \omega / k_B T)}{\sum_{n_p=0}^{\infty} \exp(-n_p \hbar \omega / k_B T)} \quad (2.44)$$

Le résultat (numérique et graphique) après résolution des séries est donnée ci-dessous.

---

5. Pq  $\mathcal{J} \hbar \omega$  ?

Average number of photons in the mode

$$\langle n_p \rangle = \frac{1}{\exp(\hbar\omega / k_B T) - 1}$$

Average energy of the mode

$$\langle E \rangle = \frac{\hbar\omega}{\exp(\hbar\omega / k_B T) - 1}$$

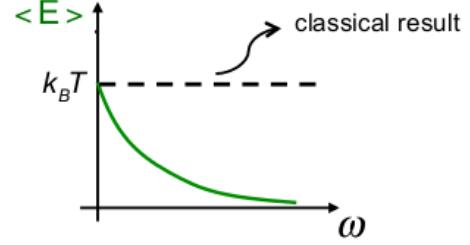
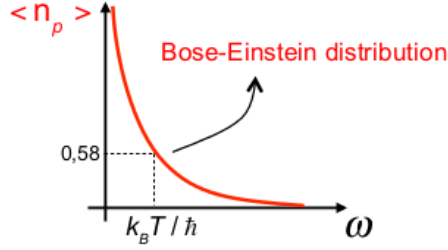


FIGURE 2.8

Le nombre moyen de photons dans un mode est donné par la distribution de Bose-Einstein : sa multiplication par  $\hbar\omega$  donne l'énergie moyenne du mode. Il s'agit d'une fonction décroissante tendant vers  $k_B T$  lorsque  $\omega \rightarrow 0$ .

Si l'on effectue le calcul, à température ambiante, il y a à peu près  $e^{-100}$  photons visible : ceci est cohérent avec le fait que la lumière ne rayonne pas. Dans un cadre classique, Rayleigh-Jeans avaient obtenu (variation continue d'énergie)

$$\langle E \rangle = \frac{\int_0^\infty E e^{-E/k_B T} dE}{\int_0^\infty e^{-E/k_B T} dE} = k_B T \quad (2.45)$$

Ceci est vrai à faible fréquences, mais totalement faux à hautes fréquences.

### 2.3.1 Spectre de la cavité radiative

Connaître l'énergie dans un mode n'est que peu intéressant si l'on ne sait pas combien il y a de mode par unité de fréquence. On va émettre l'hypothèse que le spectre de la radiation du corps noir est proportionnel à la **densité spectrale d'énergie**  $u(\omega)$  dans la cavité. On va utiliser

$$u(\omega) d\omega \quad (2.46)$$

Il s'agit de la multiplication entre l'énergie moyenne dans un mode par la densité spectrale<sup>6</sup> en énergie, soit le nombre de mode par unité de volume dans un intervalle  $[\omega, \omega + d\omega]$ . Dès lors

$$u(\omega) d\omega = \langle E \rangle \rho(\omega) d\omega \quad (2.47)$$

où  $\rho(\omega)$  est la densité spectrales des mode dans le champ EM. Intéressons-nous aux nombres de mode par unité de fréquence par unité de volume  $\rho(\omega)$  d'une cavité rectangulaire de volume  $V = L_1 L_2 L_3$  (on va montrer que c'est indépendant de la géométrie) composée de murs parfaitement conducteurs et à l'équilibre thermique à la température  $T$ .

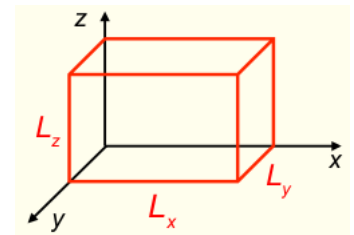


FIGURE 2.9

6. "Combien j'ai de mode par unité de volume par fréquence  $\omega$ "

Le slide 19 donne la résolution (par séparation de variable) de ce problèmes aux limites. Si l'on fixe  $l, m$  et  $n$  le vecteur d'onde est fixé : il y aura deux solutions possibles correspondant à deux polarisations orthogonales.

$$k_x = \frac{l\pi}{L_x}, \quad k_y = \frac{m\pi}{L_y}, \quad k_z = \frac{n\pi}{L_z} \quad (2.48)$$

où  $l, m, n = 0, 1, 2, \dots$ . Nous pouvons maintenant calculer le nombre de mode présent dans l'intervalle de fréquences  $[\omega, \omega + d\omega]$  : ce calcul est plus simple dans l'espace réciproque car une cellule de cette espace à les dimensions  $\pi/L_x, \pi/L_y, \pi/L_z$ . En notant ce nombre de mode  $N_k$ , on trouve

$$N_k = 2 \frac{1}{8} \frac{4\pi k^2 dk}{\frac{\pi}{L_x} \frac{\pi}{L_y} \frac{\pi}{L_z}} = \frac{k^2 dk}{\pi^2} V \quad (2.49)$$

où nous avons deux états de polarisation, le facteur  $1/8$  correspond au huitième de sphère et où l'on a divisé le volume de la calotte sphérique par le volume d'une cellule élémentaire. Sachant que  $k^2 = \omega^2/c^2 \rightarrow k dk = \omega d\omega/c^2$

$$\frac{N_\omega}{V} = \rho(\omega) d\omega = \frac{\omega}{c} \frac{\omega d\omega}{\pi^2 c^2} \quad (2.50)$$

où nous avons divisé par le volume, voulant une densité. Après intégration, on trouve la densité spectrale de mode

$$\rho(\omega) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \quad (2.51)$$

En multipliant par l'énergie moyenne (espérance mathématique), on trouve la **loi de radiation de Planck**

$$u(\omega) = \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{\hbar \omega / k_B T} - 1} \quad (2.52)$$

Cette expression est en excellent accord avec l'expérience, impliquant une quantification du champ EM. Cette loi n'est strictement valable que pour une cavité fermée en équilibre thermique. Cependant, elle décrit bien les radiations de sources thermiques non nécessairement à l'équilibre thermique, comme le soleil. Si la cavité n'est pas vide (diélectrique) il suffit de remplacer  $c$  par  $c/\eta$ . La généralisation est immédiate

$$u(\omega) = \frac{\hbar \omega^3 \eta^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{\hbar \omega / k_B T} - 1} \quad (2.53)$$

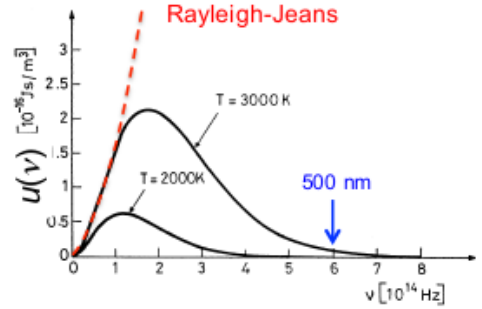


FIGURE 2.10

Il est possible d'obtenir une telle courbe pour le spectre du soleil. Le seul paramètre libre étant la température, il a été possible de mesurer la température du soleil sans devoir y tremper son doigt. Si l'on regarde la courbe de radiation du corps noir à  $T = 2.726 K$  on se rend compte que la courbe ne peut pas plus coller les prédictions expérimentales.

## 2.4 Interactions dans un milieu à deux niveaux atomiques

### 2.4.1 Coefficients d'Einstein

Nous allons maintenant considérer le point de vue d'A. Einstein et ses coefficients. Soit un système atomique avec seulement deux niveaux d'énergies  $E_1$  et  $E_2$  et soit  $N_1, N_2$  le nombre d'atome par unité de volume dans chacun de ces niveaux.

Il existe plusieurs interactions possibles entre ce système et un champ électromagnétique : nous allons commencer par supposer que tout photon que l'on trouve dans ce système possède une énergie proche de l'écart énergétique entre les deux niveaux :  $\hbar\omega_a = E_2 - E_1$  où  $\omega_a$  est la fréquence de Bohr de la transition. On suppose également que le champ EM a une densité spectrale de radiation  $\omega_a : u(\omega_a)$ .

Notons que  $u(\omega_a)$  ne vaut pas forcément celle que nous venons d'obtenir pour le corps noir. Pour un laser, nous aurions

$$u(\omega_a) = \delta(\omega - \omega_a) \hbar \omega n_p \quad (2.54)$$

où  $n_p$  est la densité de photon. Trois interactions sont possibles

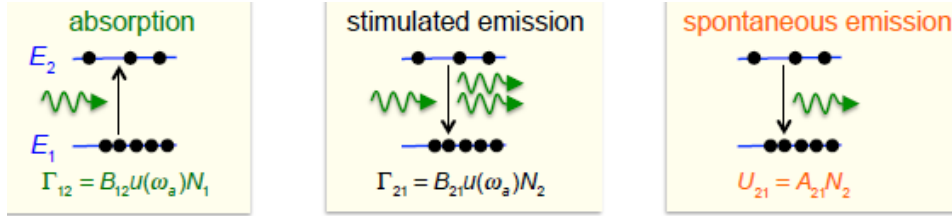


FIGURE 2.11

où  $\Gamma_{12}(\Gamma_{21})$  est le taux d'absorption (d'émission stimulée) par unité de volume ( $s^{-1}.m^{-3}$ ),  $U_{21}$  est le taux d'émission spontanée par unité de volume et  $A_{ij}, B_{ij}$  sont les coefficients d'Einstein.

On peut alors se demander que vaut  $\Gamma_{21}$  pour un photon/mode à  $\omega_a$ . La seule inconnue est  $u(\omega_a)$  qui est une énergie par unité de fréquence par unité de volume

$$u(\omega_a) = 1 * \hbar \omega_a * \left( \frac{\omega_a^2}{\hbar^2 2c^3} * \eta^3 \right) \quad (2.55)$$

où 1 est le nombre de photon que l'on multiplie par l'énergie et la densité spectrale de mode.

Intéressons-nous au cas particulier d'atomes à l'équilibre thermique dans une cavité à la température  $T$ . A l'équilibre, le taux de création doit correspondre au taux d'annihilation

$$B_{12}u(\omega_a)N_1 = B_{21}u(\omega_a)N_2 + A_{21}N_2 \quad (2.56)$$

On peut en déduire la densité spectrale d'énergie du champ qui permet d'être à cet équilibre

$$u(\omega_a) = \frac{A_{21}}{\frac{N_1}{N_2} B_{12} - B_{21}} \quad (2.57)$$

Comme nous sommes en situation d'équilibre, le rapport de  $N_1$  et  $N_2$  est donné par la statistique de Boltzmann

$$\frac{N_1}{N_2} = \exp[(E_2 - E_1)/k_B T] = \exp(\hbar\omega_a/k_B T) \quad (2.58)$$

Plank nous donne une autre expression de  $u(\omega_a)$  :

$$u(\omega_a) = \frac{A_{21}/B_{21}}{B_{12}/B_{21} \exp(\hbar\omega_a/k_B T) - 1} = \frac{\hbar\omega_a^3 \eta^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{\exp(\hbar\omega_a/k_B T) - 1} \quad (2.59)$$

Ces deux expressions de  $u(\omega_a)$  décrivent une cavité fermée à l'équilibre : il s'agit de corps noirs, nous pouvons évaluer les deux expressions. On en tire que

$$B_{12} = B_{21}, \quad \frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{\hbar\omega_a^3 \eta^3}{\pi^2 c^3} \quad (2.60)$$

Dès lors

$$\Rightarrow U_{21} = B_{21} \rho(\omega_a) \hbar\omega_a N_2 \quad (2.61)$$

On peut interpréter l'émission spontanée comme étant une émission stimulée par l'émission du vide : le taux d'émission spontanée correspond au taux d'émission stimulée à 1 photon/mode.

À l'équilibre thermique, il y a plus d'atomes dans  $E_1$  que  $E_2$  car le taux d'émission spontanée est bien plus important que le stimulé à l'équilibre thermique.

$$R = \frac{\text{spontaneous emission rate}}{\text{stimulated emission rate}} = \exp(\hbar\omega_a/k_B T) - 1 \quad (2.62)$$

### 2.4.2 Lien avec le temps de vie spontanée

La variation de la densité d'atome dans le niveau excité s'écrit

$$\frac{dN_2}{dt} = -A_{21}N_2 \quad (2.63)$$

Ce qui correspond à un photon émis pour un atome désexciter. Après résolution

$$N_2(t) = N_{20} e^{-A_{21}t} \quad (2.64)$$

On parle alors de *temps de vie radiatif* (temps de vie avant une émission spontanée)

$$t_{sp} = 1/A_{21} \quad (2.65)$$

Il s'agit de l'inverse de  $A_{21}$  et cela correspond au temps de vie de notre atome dans l'état d'énergie supérieure. Ceci n'est valable que pour deux niveaux, mais on peut généraliser à plusieurs niveaux

$$\frac{dN_2}{dt} = -\sum_k A_{2k}N_2 = -N_2/t_{sp} \quad (2.66)$$

### 2.4.3 Gain optique et forme de raie

Jusqu'ici nous avons considéré que les niveaux d'énergies sont bien déterminés :  $\hbar\omega_a = E_2 - E_1$  ce qui correspond à un delta de Dirac en fréquence. Ceci signifierait une onde continue temporellement ce qui n'est pas possible

$$\text{Temps de vie spontanée } t_{sp} \neq \infty \quad \Rightarrow \quad \text{spectre d'émission} \neq \delta(\omega - \omega_a)$$

En conclusion, l'atome interagit avec un continuum de fréquences de radiation centrée sur la fréquence atomique  $\nu_a$  et la probabilité de transition dépend de la fréquence. On définit la **forme de raie normalisée**  $g(\omega)$  tel que

$$\int g(\omega) d\omega = 1 \quad (2.67)$$

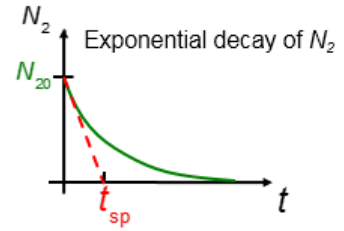


FIGURE 2.12

- Le taux d'absorption par unité de volume dans l'intervalle de fréquence angulaire  $[\omega, \omega + \delta\omega]$  vaut

$$\Gamma_{12}(\omega)\delta\omega = B_{12}N_1g(\omega)u(\omega)\delta\omega \quad (2.68)$$

On en tire le taux d'absorption total

$$\Gamma_{12} = \int B_{12}u(\omega)g(\omega)N_1d\omega \quad (2.69)$$

- Taux d'émission stimulée total

$$\Gamma_{21} = \int B_{21}u(\omega)g(\omega)N_2d\omega \quad (2.70)$$

A la fréquence  $\omega$ , le système réagit avec une certaine intensité pondérée par  $g(\omega)$ .

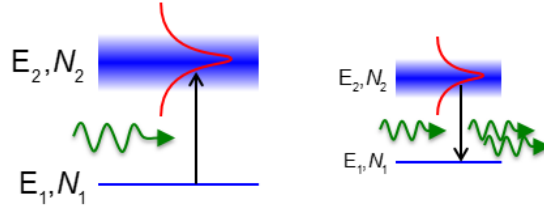
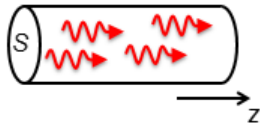


FIGURE 2.13 – Absorption à  $\omega_a$  à l'énergie  $E_2$  (gauche) et émission stimulée (droite)

(1 mode, z direction)



Penchons-nous sur l'absorption d'une onde monochromatique à  $\omega_0$ . La densité spectrale d'énergie s'obtient facilement : proportionnel à un delta de Dirac centré en  $\omega_0$ , à l'énergie des photons et à la densité de photon

$$u(\omega) = \hbar\omega_0 n_p \delta(\omega - \omega_0) \quad (2.71)$$

FIGURE 2.14

Sachant que  $B_{21} = B_{12} = B = \frac{\pi^2 c^3}{\hbar\omega_0^3 \eta^3} A_{21}$ , avec les deux relations intégrales que nous venons d'obtenir, on trouve

$$\Gamma_{12} = B\hbar\omega_0 n_p g(\omega_0) N_1, \quad \Gamma_{21} = B\hbar\omega_0 n_p g(\omega_0) N_2 \quad (2.72)$$

Considérons le taux de variation de la densité de photon  $n_p$  : celle-ci peut augmenter (absorption) ou diminuer (émission spontanée et stimulée)

$$\frac{dn_p}{dt} = (\Gamma_{21} - \Gamma_{12}) + \underbrace{\text{spontaneous emission}}_{\approx 0} \quad (2.73)$$

La contribution de l'émission spontanée peut être négligée : elle se produit dans toutes les directions et dans toutes les fréquences, peu de chance de jouer un rôle dans l'émission laser. Après ré-écriture

$$\frac{dn_p}{dt} = B\hbar\omega_0 n_p g(\omega_0) (N_2 - N_1) \quad (2.74)$$

En laboratoire, nous avons accès à l'intensité ( $I = \langle S_z \rangle$  ( $W.m^{-2}$ )). Sachant que  $I$  est le flux de photon (flux\*énergie photon) et  $\mathcal{J}$  est le courant (densité de photon \* vitesse de groupe) :

$$\left. \begin{aligned} I &= \mathcal{J}\hbar\omega_0 \\ \mathcal{J} &= n_p v_g \end{aligned} \right\} \Rightarrow I = \hbar\omega_0 n_p v_g \quad (2.75)$$

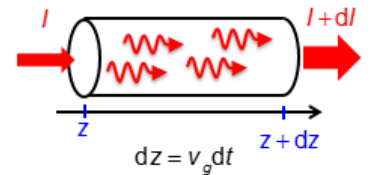


FIGURE 2.15

La variation de l'intensité en fonction de la position dans la cavité s'exprime alors

$$\frac{dI}{dz} = \hbar\omega_0 v_g \frac{dn_p}{dz} = \hbar\omega_0 \frac{dn_p}{dt} = \hbar\omega_0 B \hbar\omega_0 g(\omega_0) (N_2 - N_1) \frac{I}{\hbar\omega_0 v_g} = -\alpha I \quad (2.76)$$

où  $\frac{I}{\hbar\omega_0 v_g} = n_p$ . Il s'agit d'une simple relation constante\*intensité : cela donne lieu à une exponentielle décroissante de l'intensité lors de la propagation dans un milieu. Dès lors,  $\alpha$  est proportionnel au coefficient d'Einstein (échange matière-lumière) mais aussi à la différence  $N_1 - N_2$

$$\alpha = \frac{\hbar\omega_0 B n_g}{c} g(\omega_0) (N_1 - N_2) = -\mathcal{G} \quad (2.77)$$

Dans un laser, on cherche à obtenir  $N_2 > N_1$  de façon à avoir  $\mathcal{G}$  positif, soit un milieu à gain.

La seule chose qui peut changer est le  $N_1 - N_2$  (densité atomique en  $m^{-3}$ ). On introduit alors la section efficace  $\sigma$  ( $m^2$ )

$$\alpha = \frac{\pi^2 c^2 n_g}{\eta^3 t_{sp} \omega_0^2} g(\omega_0) (N_1 - N_2) = -\mathcal{G} = \sigma(\omega_0) (N_1 - N_2) \quad (2.78)$$

- A l'équilibre thermique

$$N_2/N_1 = \exp(-\hbar\omega_a/k_B T) \ll 1 \quad \Rightarrow \quad N_1 > N_2 \quad \rightarrow \quad \alpha > 0 : \text{atténuation} \quad (2.79)$$

- Lors d'une *inversion de la population*, loin de l'équilibre

$$N_2 > N_1 \Rightarrow \mathcal{G} > 0 : \text{amplification} \quad (2.80)$$



FIGURE 2.16 – Commentaires intéressants slide 30

#### 2.4.4 Fonction forme de raie et mécanismes d'élargissement

Le but de cette sous-section est d'établir une expression de  $g(\omega)$  à partir des calculs des spectres d'émission et d'absorptions.

##### Largeur naturelle

Il s'agit du cas le plus simple, celui où l'atome se désexcite en émettant une radiation à  $\omega_a$ . Plusieurs hypothèses sont faites

1. Système à deux niveaux, le retour vers l'état fondamental n'est possible que par émission radiative
2. Le temps d'excitation des atomes est petite par rapport à  $t_{sp} \Rightarrow N_2(t=0) = N_{20}$  et  $N_2(t < 0) \approx 0$
3. Faible excitation :  $1 \ll R$  (émission spontanée prédominante)

L'énergie émise au cours du temps varie car la densité fait de même : l'énergie émise par unité de temps par unité de volume  $W$  s'exprime<sup>7</sup>

$$W(t) = -\hbar\omega_a \frac{dN_2}{dt} = \frac{\hbar\omega_a}{t_{sp}} N_{20} \exp(-t/t_{sp}) (t \geq 0) \quad (2.81)$$

Le champ EM classique associé à cette désexcitation est un champ oscillant à  $\omega_a$  et dont l'amplitude décroît au cours du temps.

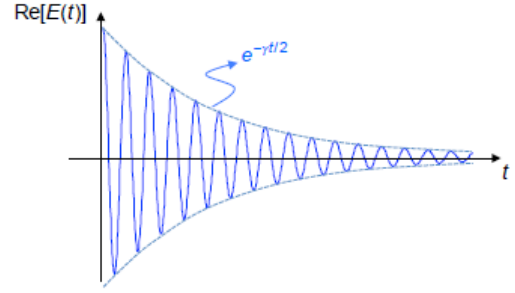


FIGURE 2.17

Calculons l'amplitude spectrale (transformée de Fourier, le tilde désigne le domaine des fréquences)

$$\tilde{E}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(t) \exp(i\omega t) dt = \int_0^{+\infty} E_0 \exp(-t/2t_{sp} - i\omega_a t) \exp(i\omega t) dt = \int_0^{+\infty} E_0 \exp\{t[i(\omega - \omega_a) - 1/2t_{sp}]\} dt \quad (2.82)$$

Après intégration

$$\tilde{E}(\omega) = \frac{E_0}{-i(\omega - \omega_a) + 1/2t_{sp}} \quad (2.83)$$

Le spectre vaut alors

$$\tilde{I}(\omega) = |\tilde{E}(\omega)|^2 \Rightarrow \tilde{I}(\omega) = \frac{E_0^2}{(\omega - \omega_a)^2 + \gamma^2/4} \quad (2.84)$$

Ceci n'est rien d'autre qu'une lorentzienne avec un profil d'épaisseur  $\gamma = 1/t_{sp} = A_{21}$  (spectre d'émission). Si l'atome reste très peu longtemps dans son état excité  $g(\omega)$  sera important mais s'il reste très longtemps dans le niveau excité  $g(\omega)$  sera très petit<sup>8</sup>

$$g(\omega) = \frac{K}{1 + (\frac{\omega - \omega_a}{\gamma/2})^2} \quad (2.85)$$

où  $K = \frac{2}{\pi\gamma}$ ,  $\gamma = 1/t_{sp}$  (largeur spectrale (largeur totale à la moitié du maximum) :  $\Delta\omega = \gamma$ ).

Jusqu'ici nous n'avons travaillé qu'à deux niveaux : il est possible de généraliser l'expression de  $\gamma$  (forme de raie) avec le principe d'incertitude temps-énergie : il suffit de considérer plusieurs coefficients d'Einstein, un pour chaque transition possible

1. Pour le niveau supérieur :  $\Delta E_s = \hbar\Delta t_s^{-1} = \hbar \sum_k A_{sk}$
2. Pour le niveau inférieur :  $\Delta E_i = \hbar\Delta t_i^{-1} = \hbar \sum_l A_{il}$

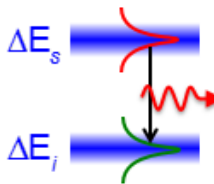


FIGURE 2.18

En effet, le système ne reste qu'un certain temps sur les niveaux excités : il y a une incertitude sur les niveaux d'énergie et donc une incertitude sur les photons émis, c'est ce que traduit  $g(\omega)$ . La largeur de raie naturelle tient compte de ceci

$$\gamma_n = \Delta\omega = \frac{\Delta E_s + \Delta E_i}{\hbar} = \gamma_s + \gamma_i = \sum_{\substack{l \text{ t.q.} \\ E_k < E_s}} A_{sk} + \sum_{\substack{l \text{ t.q.} \\ E_l < E_i}} A_{il} \quad (2.86)$$

7. Seulement un photon émis par chaque atome.

8. Calcul de la normalisation slide 33 passé



## Mécanisme d'élargissement homogène

Il existe des principes physiques qui vont "agrandir" la grandeur naturelle (qui est la plus petite que possible). Il en existe deux type (selon le type de laser)

1. Homogène : tous les atomes sont impactés de la même façon par ce mécanisme, ils subissent tous le même "élargissement".
2. Inhomogène : le milieu atomique est divisé en classe d'atomes qui interagissent tous un peu différemment.

Voyons ici différents mécanismes homogènes.

### TRANSITION NON-RADIATIVE

Celles-ci sont dues à des collisions entre les atomes (laser à gaz comme dans le laser He-Ne) où les interactions avec des photons (laser solide)<sup>9</sup>

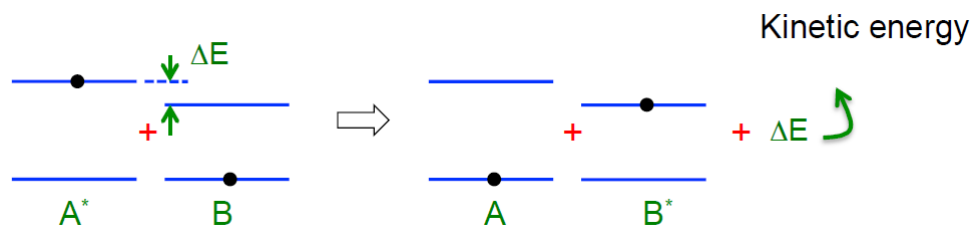


FIGURE 2.19 – La différence entre les deux niveaux part en énergie cinétique

$$\gamma = \gamma_n + 1/t_{nr-low} + 1/t_{nr-up} \quad (2.87)$$

avec  $t_{nr-low/up}$  le temps de vie non radiatif de l'état haut/bas.

### COLLISIONS (SANS TRANSITIONS)

Cet effet est plus subtil : il se déroule entre les atomes pour les gaz et avec les phonons pour les solides (pas de modification du temps de vie). Considérons un atome oscillant. Si un second atome arrive dans son environnement avec son propre champ électrique, il va modifier les écarts d'énergie entre les niveaux : effet Stark. Ceci se traduit par un déphasage durant l'émission radiative, qui est aléatoire.

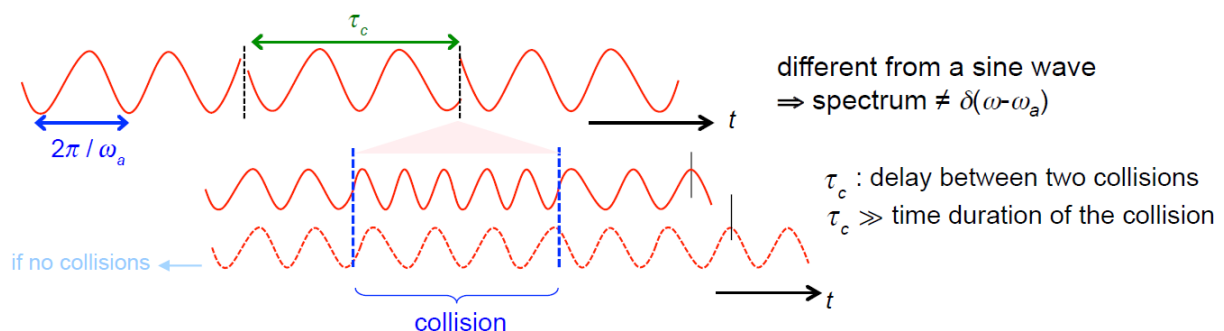


FIGURE 2.20

9. Nous avons vu l'incertitude temps-énergie : plus un atome reste longtemps dans un état, plus cet état est incertain.

La solution est entrecoupée de sauts de phase :  $\tau_c$  est l'intervalle entre deux collisions qui est supposé beaucoup plus grand que le temps de la collision. Si l'on a une onde continue le spectre n'est qu'un Delta de Dirac mais comme la solution est entrecoupée de sauts de phase, le spectre se voit élargi.

Durant l'intervalle  $\tau_c$ , le dipôle atomique oscille à  $\omega_a$ , le champ est donc une exponentielle proportionnelle à ce temps

$$E(t) \propto \exp(-i\omega_a t') \quad t < t' < t + \tau \quad (2.88)$$

Le spectre correspondant vaut

$$\tilde{E}(\omega; \tau_c) \propto \int_t^{t+\tau_c} e^{-i\omega_a t'} e^{i\omega t'} dt' = \frac{\exp(i\Delta\omega\tau_c) - 1}{i\Delta\omega} e^{i\Delta\omega t} \quad (2.89)$$

où  $\Delta\omega = \omega - \omega_a$ . L'intensité spectrale est donnée par le module carré de cette transformée de Fourier

$$\tilde{I}(\omega; \tau_c) \propto \frac{(\cos[\Delta\omega\tau_c] - 1)^2 + \sin^2[\Delta\omega\tau_c]}{\Delta\omega^2} = \frac{2 - 2\cos[\Delta\omega\tau_c]}{\Delta\omega^2} \quad (2.90)$$

Nous allons sommer sur tous les spectres en tenant compte du poids de chaque spectre : probabilité. On suppose que le saut de phase est aléatoire et que  $p(\tau_c)$  est la probabilité que le temps entre deux collisions soit  $\tau_c$  :

$$\tilde{I}(\omega) \propto \int_0^\infty \tilde{I}(\omega; \tau_c) p(\tau_c) d\tau_c \quad (2.91)$$

La théorie cinétique nous donne une expression de la distribution de probabilité du délai entre deux collisions

$$p(\tau_c) d\tau_c = 1/\tau_0 \exp(-\tau_c/\tau_0) d\tau_c \quad (2.92)$$

Pour calculer l'intensité, on s'intéresse à la valeur moyenne de ce délai entre deux collisions

$$\int_0^\infty \tau_c p(\tau_c) d\tau_c = \tau_0 \quad (2.93)$$

Il ne reste plus qu'à calculer

$$\tilde{I}(\omega) \propto \int_0^\infty \frac{1 - \cos[\Delta\omega\tau_c]}{\Delta\omega^2} e^{-\tau_c/\tau_0} d\tau_c = \frac{1}{2\Delta\omega^2} \int_0^\infty (2e^{-\tau_c/\tau_0} - e^{-(1/\tau_0 - i\Delta\omega)\tau_c} - e^{-(1/\tau_0 + i\Delta\omega)\tau_c}) d\tau_c \quad (2.94)$$

Après intégration

$$\tilde{I}(\omega) \propto \frac{1}{2\Delta\omega^2} \left[ 2\tau_0 - \frac{1}{1/\tau_0 - i\Delta\omega} - \frac{1}{1/\tau_0 + i\Delta\omega} \right] = \frac{\tau_0}{(1/\tau_0)^2 + \Delta\omega^2} \quad (2.95)$$

Il s'agit d'une lorentzienne ! En normalisant à l'unité, on peut trouver la forme de raie  $g(\omega)$ <sup>10</sup>

$$g(\omega) = \frac{\tau_0}{\pi} \frac{1}{1 + \Delta\omega^2/(\gamma_{co}/2)^2} \quad (2.96)$$

C'est également un profil lorentzien de largeur  $\gamma_{co} = 2/\tau_0$ .

---

10. Si on considère que la forme de raie est rectangulaire (vrai si très petit) :  $\int g(\omega) d\omega = 1 \Leftrightarrow g(\omega) = 1/\Delta\omega$ .

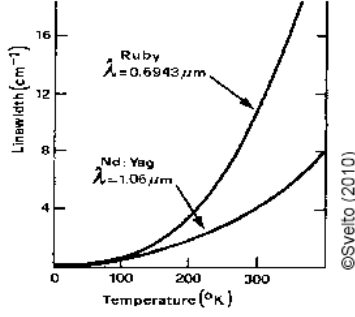


FIGURE 2.21

On peut comptabiliser la largeur naturelle avec la modification obtenue par les collisions : décroissance exponentielle de l'amplitude d'oscillation et saut de phases aléatoires

$$\gamma_h = \gamma_n + 1/t_{nr} + 2/\tau_0 \quad (2.97)$$

En pratique, on remarque que le spectre d'émission est beaucoup plus large que ce à quoi on s'attend pour la décroissance exponentielle : ceci est du à l'influence de la température. Quand celle-ci augmente, la densité de photon augmente et le temps entre deux collisions diminue, causant un élargissement de la largeur spectrale.

### Élargissement inhomogène

Il s'agit d'un mécanisme qui fait que ça ne se déroule pas toujours de la même façon au niveau des interactions lumière-matière. Le milieu est donc un ensemble de groupe d'atomes ayant une fréquence de résonance différente. Il faut donc connaître la distribution statistique des groupes d'atomes ayant une fréquence  $\omega_c$

$$F(\omega_c) : \text{fonction de distribution statistique normalisée à l'unité} \quad (2.98)$$

On a donc que  $\delta N_c = F(\omega_c)N\delta\omega_c$  est le nombre d'atomes entrant en résonance pour un champ électromagnétique de fréquence dans  $[\omega_c, \omega_c + \delta\omega_c]$ .

Chaque groupe d'atome  $\delta N_c$  interagit avec une onde optique de fréquence  $\omega$  proportionnelle à  $g_h(\omega - \omega_c)$  où  $g_h$  est la forme de raie normalisée centrée en  $\omega = 0$ . La contribution de chaque groupe d'atome au taux d'émission stimulée à la fréquence  $\omega$  vaut donc

$$\Gamma_{21,c} = B_{21}u(\omega)g_h(\omega_c - \omega)\delta N_{2,c} \quad (2.99)$$

On retrouve le coefficient d'Einstein, la densité spectrale d'énergie et  $g$  qui permet de ne considérer que la fraction correspondante à la fréquence qui nous intéresse. Pour obtenir le taux d'émission stimulée total, il faut intégrer

$$\Gamma = \sum_c \Gamma_{21,c} = B_{21}uN_2 \underbrace{\int_0^\infty g_h(\omega_c - \omega)F(\omega_c)d\omega_c}_{g=F*g_h} \quad (2.100)$$

La nouvelle forme de raie est donnée par la convolution entre l'élargissement homogène et la fonction de distribution  $F$ . Cette forme tient ainsi compte des élargissements non-homogène. Dès lors, pour que l'élargissement inhomogène affecte le fonctionnement du laser, il faut que  $F$  soit au moins aussi large que  $g_h$ .

Passons en revue deux exemples d'élargissement non-homogène

1. Doppler. Affecte tous les lasers à gaz : on peut créer des sous-ensemble d'atomes qui réagissent à des fréquences différentes. Si les photons vont vers la droite et l'atome également, la fréquence sera plus importante et inversement. La vitesse  $c$  devient alors une certaine vitesse  $v(z)$  à cause de ce décalage

$$\omega \rightarrow \omega - \vec{k} \cdot \vec{v} = \omega - (\pm k \cdot v_z) \quad (2.101)$$

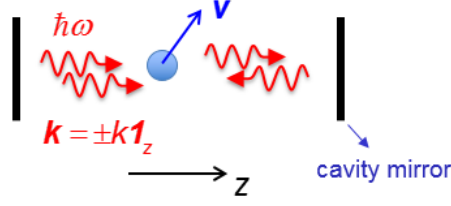


FIGURE 2.22

Pour des atomes de masse  $m$  à température  $T$ , la distribution des vitesses est celle de Maxwell

$$f(v_z) = \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{1/2} \exp\left( -\frac{mv_z^2}{2k_B T} \right) \quad (2.102)$$

Exprimée en fréquence

$$F(\omega) = \left( \frac{m}{2\pi k_B T k^2} \right)^{1/2} \exp\left( -\frac{m}{2k_B T} \frac{(\omega - \omega_a)^2}{k^2} \right) \quad (2.103)$$

Le profil tenant compte de l'élargissement homogène et inhomogène est donné par la convolution entre une lorentzienne et une gaussienne.

$$g(\omega) = \int g_h(\omega_c - \omega) F(\omega_c) d\omega_c \quad (2.104)$$

Il s'agit d'une *intégrale de Voigt*. Si  $\gamma_h \ll k\sqrt{2k_B T/m}$  alors

$$g(\omega) \approx \frac{e^{-\frac{[\omega - \omega_a]^2}{k^2 2k_B T/m}}}{k\sqrt{2\pi k_B T/m}} \Rightarrow \Delta\omega \approx 1.66k\sqrt{2k_B T/m} \quad (2.105)$$

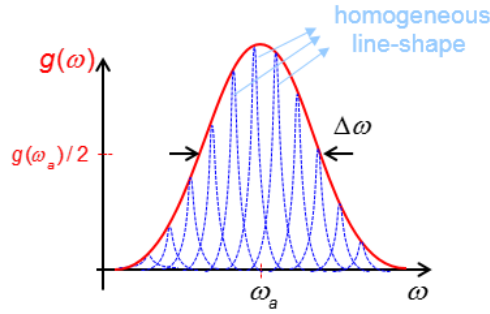


FIGURE 2.23

2. Environnement. Les environnements amorphes comme le verre : les distances entre chaque atomes ne sont pas connues. Si l'environnement électrique est différent il y aura un déplacement des niveaux d'énergies différent (Stark), ... Si le milieu est plus ordonné par exemple YAG (cristallin) à la place de Nd glass (amorphe) l'élargissement est moins important.

## Chapitre 3

# Théorie semi-classique des laser

### 3.1 Équations de Maxwell-Bloch du laser

Classique : le champ EM est décrit par les équations de Maxwell

$$\Delta E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E = \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} P \quad (3.1)$$



FIGURE 3.1

Il existe un couplage entre la radiation et le milieu : le champ électrique introduit une polarisation atomique qui induit un champ de polarisation macroscopique qui elle même donne lieu au champ électrique total, la boucle recommence alors.

#### 3.1.1 Équations du champ électromagnétique dans la cavité

##### Mode longitudinal de la cavité

Il existe deux type de cavité : la cavité circulaire et la linéaire de type Fabry-Perot. S'il n'y a pas de pertes, le champ lors de la  $n+1^e$  résonance dans la cavité vaut celui de la  $n^e$  résonance avec un terme de phase

$$\mathcal{E}_{n+1} = \mathcal{E}_n \exp(ikL) \quad (3.2)$$

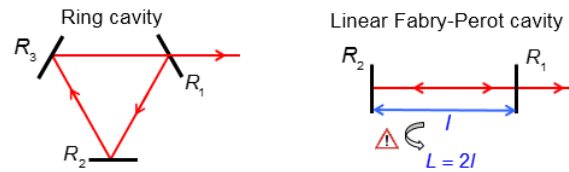


FIGURE 3.2

Ce qui donne lieu à une résonance pour  $kL = m2\pi$ .

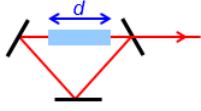


FIGURE 3.3

Avec  $k = \omega/c$ , on trouve que les modes longitudinaux (équidistants en fréquence, mais **pas** en longueur d'onde) de la cavité sont caractérisés par

$$\omega_m = m \frac{2\pi}{L} c \quad (3.3)$$

où l'indice de réfraction du milieu a été omis (mais il faut garder à l'esprit qu'il existe). Si l'on insère un milieu à gain dans la cavité

$$\nu_m = mc \left( \frac{1}{\eta_c(L-d) + \eta_L d} \right) \quad (3.4)$$

Cependant, pour avoir un laser, il faut forcément des pertes : un des miroirs doit être un semi-miroir. Dans le cas idéal, on pourrait imaginer l'utilisation de miroirs 100% sauf un et pas d'autres pertes. Nous faisons l'hypothèse que les variations dues à l'atténuation sont petites.

- Réflexivité  $R_j < 1$
- Pertes internes (diffusion, ...) :  $\alpha_j$
- Sur une résonance, peu de variation :  $R_j \approx 1, \alpha_i \ll 1$

Pour une cavité circulaire<sup>1</sup>

$$I_{n+1} = R_1 R_2 R_3 e^{-\alpha_i L} I_n \quad (3.5)$$

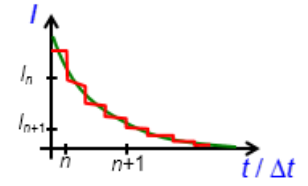


FIGURE 3.4

Si l'on adopte le point de vue d'un modèle continu sur un tour de cavité

$$\frac{dI}{dt} = -I/t_c \quad (3.6)$$

où  $t_c$  est le temps de vie d'un photon dans la cavité (on fait un flash et on compte le temps qu'il faut pour que le photon redescende). Après intégration

$$I_{n+1} = e^{-\Delta t/t_c} I_n \quad (3.7)$$

où  $\Delta t = L/c$ . Les deux modèles sont très proches, nous pouvons évaluer les expressions de  $I_{n+1}$  pour en tirer

$$\Rightarrow 1/t_c = K_c = \alpha_i c - \frac{c}{L} \ln(R_1 R_2 R_3) \quad (3.8)$$

Connaissant  $K_c$ , on peut écrire une équation différentielle qui décrit l'évolution de l'amplitude du champ dans une cavité vide. En partant de (3.6)

$$\dot{\mathcal{E}} = -\frac{K_c}{2} \mathcal{E} \quad (3.9)$$

où  $\mathcal{E}$  est l'amplitude du champ électrique,  $\omega = \omega_m$  et le 1/2 vient du lien entre intensité et amplitude.

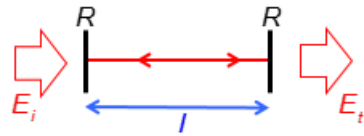


FIGURE 3.5

La fonction de transfert d'une cavité Fabry-Pérot est donnée par

$$|E_t|^2 = \frac{|E_i|^2}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2(kl)} \quad (3.10)$$

Il s'agit d'une fonction d'Airy qui est fonction de la finesse. Plus la finesse est grande, plus il y aura d'allers-retours dans la cavité et plus les pics (en transmission) deviennent étroits.

1. Notons que cette formule est valable même en cas de fortes pertes.

Sous les conditions

- Bonne cavité :  $R \approx 1 \rightarrow \ln(R) \approx 1 - R$
- Proche de la résonance :  $\omega = \omega_m + \delta\omega \rightarrow \sin^2(kl) = \sin^2(\frac{\omega_m + \delta\omega}{c}l) \approx (\frac{\delta\omega}{c}l)^2$
- Pas de pertes internes distribuées :  $\alpha_j = 0 \rightarrow K_c = -(c/l) \ln(R)$

La fonction de transfert devient

$$|E_t|^2 \approx \frac{|E_i|^2}{1 + \frac{4}{\ln(R)^2} (\frac{\delta\omega}{c}l)^2} = \frac{|E_i|^2}{1 + \frac{\delta\omega^2}{(K_c/2)^2}} \quad (3.11)$$

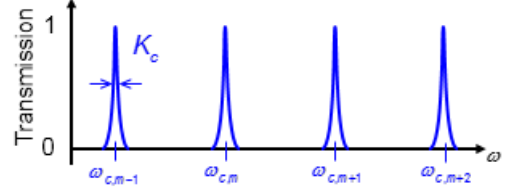


FIGURE 3.6

On en tire le spectre du champ électromagnétique

$$|\tilde{\mathcal{E}}|^2 = \frac{|\tilde{\mathcal{E}}_0|^2}{1 + \frac{\delta\omega^2}{(K_c/2)^2}} \quad (3.12)$$

qui est solution de (3.9) pour les C.I.  $\mathcal{E}(t=0) = \mathcal{E}_0$ .

### Équation de Maxwell du laser

Pour avoir un laser, il faut que la cavité ai un milieu à gain ( $\mathcal{P} \neq 0$ ). Si l'on se décale par rapport à la résonance, des effets de déphasages vont apparaître. En général, la fréquence du laser est légèrement différente de celle de cavité car il y a une variation de l'indice de réfraction d'un milieu à l'autre. La fréquence du laser  $\omega_L$  n'est a priori pas connue : on choisi arbitrairement  $\omega_c$  comme référence.

Le but est de simplifier l'équation d'onde. Pour ça, on va considérer

- $z$  est la direction de propagation et  $x, y$  les directions transverses
- $\vec{E}, \vec{P}$  ont la même direction (vrai si milieu isotrope et donc le tenseur de susceptibilité est scalaire). On utilisera

$$\vec{E} = 1/2[\mathcal{E}(z, t)e^{i(k_c z - \omega_c t)}\vec{e} + c.c.] = 1/2[Ee + c.c.], \quad \vec{P} = 1/2[\mathcal{P}(z, t)e^{i(k_c z - \omega_c t)}\vec{e} + c.c.] = 1/2[Pe + c.c.] \quad (3.13)$$

- Les enveloppes  $\mathcal{E}(z, t), \mathcal{P}(z, t)$  varient lentement : elle varie sur une échelle de temps beaucoup plus grande que la période du champ EM.
- La fréquence de résonance vaut  $\omega_c = k_c c$ .

Pour simplifier d'avantage, considérons l'équation scalaire 1D :

$$E = \mathcal{E}(z, t)e^{i(k_c z - \omega_c t)}, \quad P = \mathcal{P}(z, t)e^{i(k_c z - \omega_c t)} \quad (3.14)$$

En effectuant les dérivées, on trouve

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = [\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial z^2} + 2ik_c \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} - k_c^2 \mathcal{E}]e^{i(k_c z - \omega_c t)}, \quad \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = [\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} - 2i\omega_c \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} - \omega_c^2 \mathcal{E}]e^{i(k_c z - \omega_c t)}, \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = [\frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial t^2} - 2i\omega_c \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} - \omega_c^2 \mathcal{P}]e^{i(k_c z - \omega_c t)} \quad (3.16)$$

Après substitution

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial z^2} + 2ik_c \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} - k_c^2 \mathcal{E} - \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} - 2i\omega_c \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} - \omega_c^2 \mathcal{E} \right) = \mu_0 \left( \frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial t^2} - 2i\omega_c \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} - \omega_c^2 \mathcal{P} \right) \quad (3.17)$$

Comme  $\omega_c = k_c c$ ,  $k_c^2 \mathcal{E}$  se simplifie avec  $\omega_c^2 \mathcal{E}$ . L'hypothèse de la lente variation de l'enveloppe intervient alors. Comme

$$t_c, \Delta t, 1/\gamma, 1/(\mathcal{G}v_g) \gg 1/\nu_c \quad (3.18)$$

Ce qui implique que

$$\begin{aligned} |\partial_z \mathcal{E}| &\ll k_c |\mathcal{E}|, & |\partial_{zz} \mathcal{E}| &\ll k_c^2 |\mathcal{E}| \\ |\partial_t \mathcal{E}| &\ll \omega_c |\mathcal{E}|, & |\partial_{tt} \mathcal{E}| &\ll \omega_c^2 |\mathcal{E}| \\ |\partial_t \mathcal{P}| &\ll \omega_c |\mathcal{P}|, & |\partial_{tt} \mathcal{P}| &\ll \omega_c^2 |\mathcal{P}| \end{aligned} \quad (3.19)$$

Les dérivées secondes peuvent ainsi être négligées<sup>2</sup>. Sachant que  $\mu_0 = 1/(\varepsilon_0 c^2)$ , l'équation s'écrit

$$2ik_c \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} + \frac{2i\omega_c}{c^2} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = -\mu_0 \omega_c^2 \mathcal{P} \quad (3.20)$$

Cette équation décrit une "chose" qui se propage à une certaine vitesse : il est possible de choisir un repère particulier pour simplifier. Plaçons-nous dans le repère bougeant à la vitesse  $c$  :  $z' = z - ct, t' = t$ . L'équation devient

$$2i \frac{\omega_c}{c} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z'} + \frac{2i\omega_c}{c^2} \left( \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t'} - c \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z'} \right) = -\frac{\omega_c^2}{\varepsilon_0 c^2} \mathcal{P} \quad (3.21)$$

Le premier terme se simplifie avec le second terme de la parenthèse pour donner

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = \frac{i\omega_c}{2\varepsilon_0} \mathcal{P} \quad (3.22)$$

On n'observe plus que les variations temporelle de  $\mathcal{E}$ . C'est normal : le repère se déplace à la vitesse  $c$  et une lumière qui se propage ne reste pas stationnaire. L'**équation de Maxwell du laser** s'obtient en rajoutant un terme d'amortissement

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = -\frac{K_c}{2} \mathcal{E} + \frac{i\omega_c}{2\varepsilon_0} \mathcal{P} \quad (3.23)$$

où le second terme obtenu ci-dessus est la réponse du milieu à gain<sup>3</sup>. Le slide 9 donne une application de cette équation.

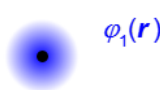
### 3.1.2 Équation de Bloch du milieu

#### Polarisation et inversion de la population

Comme pour chaque modèle, il est nécessaire d'énoncer les différentes hypothèses faites

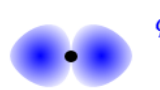
- Approche semi-classique : le champ EM est classique à fréquence (inconnue)  $\omega_L$
- Le milieu à gain contient  $N$  atomes par unité de volumes, indépendants et identiques (un seul groupe d'atome, à de l'influence sur ce que ce modèle ne permet pas de décrire (laser à gaz ?))
- Seuls les deux niveaux  $E_1$  et  $E_2$  interagissent avec le champ EM
- Un atome est constitué d'un noyau lourd et d'un électron de charge  $-e$

Fundamental state

$$\psi_1(\mathbf{r}, t) = \varphi_1(\mathbf{r}) e^{-i \frac{E_1}{\hbar} t}$$


$\varphi_1(\mathbf{r})$

Excited state

$$\psi_2(\mathbf{r}, t) = \varphi_2(\mathbf{r}) e^{-i \frac{E_2}{\hbar} t}$$


$\varphi_2(\mathbf{r})$

FIGURE 3.7

2. Pq ?

3. Remarque :  $K_c$  est l'inverse du temps de vie, il s'agit donc de perte.



Si l'on regarde les états propres de ces atomes, on se rend compte que la densité de probabilité est stationnaire. Or il faut que les choses bougent sans quoi il n'y aurait pas de radiation.

$$|\psi_i(\mathbf{r}, t)|^2 = |\varphi_i(\mathbf{r})|^2 \quad (3.24)$$

Pour palier à ce problème, on introduit une superposition cohérente

$$\psi(\mathbf{r}, t) = c_1\psi_1(\mathbf{r}, t) + c_2\psi_2(\mathbf{r}, t) \quad (3.25)$$

où  $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$  et  $|c_i|^2$  est la probabilité que cet atome se trouve dans l'état  $i$ . Soit  $\varepsilon^2$ , la probabilité que cet atome soit dans l'état fondamental avec  $c_2 \approx 1, c_1 = \varepsilon \ll 1$ . En remplaçant et en prenant le module carré

$$|\psi|^2 = |\varphi_2(\mathbf{r})|^2 + \varepsilon^2 |\varphi_1(\mathbf{r})|^2 + 2\text{Re}[\varepsilon\varphi_1^*\varphi_2 e^{-i(E_2-E_1)t/\hbar}] \quad (3.26)$$

Ici, la densité de probabilité oscille à la fréquence  $\omega_a = (E_2 - E_1)/\hbar$ , il va donc y avoir radiation d'énergie par émission de photon à l'énergie  $\hbar\omega_a$ .

Regardons maintenant ce qui se passe au niveau de la polarisation macroscopique

$$\vec{P} : N\vec{p}_a \quad (3.27)$$

où  $\mathbf{p}_a = -e \langle \mathbf{r} \rangle = -e \langle \psi | \mathbf{x} | \psi \rangle$ . On suppose ici que tous les atomes ont la même polarisation microscopique. Supposons que le centre du nuage se déplace selon  $x$  et que l'on soit dans l'état de polarisation cohérente où l'on suppose que les coefficients peuvent évoluer au cours du temps

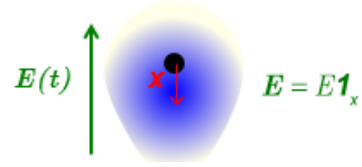


FIGURE 3.8

$$|\psi(t)\rangle = c_1(t) |\psi_1\rangle + c_2(t) |\psi_2\rangle \quad (3.28)$$

où  $|\psi_j\rangle = |\varphi_j\rangle \exp(-i\frac{E_j}{\hbar}t)$ ,  $H_0 |\varphi_j\rangle = E_j |\varphi_j\rangle$  avec  $H_0$  l'Hamiltonien de l'atome non perturbé. Sachant que la densité d'atome dans l'état propre d'énergie  $E_j$  vaut  $N|c_j|^2$ , on trouve

$$p_a = -e \langle c_1^*\psi_1 + c_2^*\psi_2 | x | c_1\psi_1 + c_2\psi_2 \rangle = -e \left[ c_1^*c_2 \langle \varphi_1 | x | \varphi_2 \rangle e^{-i\omega_a t} + c_2^*c_1 \langle \varphi_2 | x | \varphi_1 \rangle e^{+i\omega_a t} \right] \quad (3.29)$$

En effet, pas mal de termes sont nuls car  $\langle \psi_j | x | \psi_j \rangle = 0$  (le moment dipolaire d'un atome dans ses états propres est nul).

Posons  $\mu_{21} = -e \langle \varphi_1 | x | \varphi_2 \rangle$  le *moment dipolaire de la transition*  $2 \rightarrow 1$ . On peut alors écrire

$$\Rightarrow p_a = c_1^*c_2\mu_{21}e^{-i\omega_a t} + c_2^*c_1\mu_{21}^*e^{+i\omega_a t} \quad (3.30)$$

où  $\mu_{12} = \mu_{21}^*$ . Selon la définition  $P = Np_a = 1/2[\mathcal{P}e^{-i\omega_c t} + c.c.]$  et pas identification avec celle-ci (le premier terme ensemble et le c.c. ensemble) :

$$\mathcal{P}(t) = 2Nc_1^*c_2\mu_{21}\exp[-i(\omega_a - \omega_c)t] \quad (3.31)$$

où  $\mathcal{P}$  est l'enveloppe de variation lente. Le souci est que jusqu'ici, la variation temporelle des coefficients est inconnue. Pour se faire, nous allons résoudre l'équation de Schrödinger pour un système perturbé par un champ électrique  $\vec{E}$

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle \quad (3.32)$$

où  $H = H_0 + H_{int}$  avec  $H_0$  l'Hamiltonien de l'atome non perturbé :  $\begin{cases} H_0 |\varphi_1\rangle = E_1 |\varphi_1\rangle = \hbar\omega_1 |\varphi_1\rangle \\ H_0 |\varphi_2\rangle = E_2 |\varphi_2\rangle = \hbar\omega_2 |\varphi_2\rangle \end{cases}$ .

Nous sommes ici dans un chapitre traitant de la théorie semi classique : on fait l'approximation que le champ EM est uniforme à l'échelle de la taille de l'atome pour pouvoir écrire que  $H_{int} = exE$  où  $W = -\vec{P} \cdot \vec{E}$  l'énergie d'un dipôle dans un champ  $\vec{E}$  uniforme où  $\vec{E}$  est polarisé linéairement selon l'axe  $x$ .

En substituant le tout dans Schrödinger  $|\psi(t)\rangle = c_1 |\varphi_1\rangle \exp(-i\omega_1 t) + c_2 |\varphi_2\rangle \exp(-i\omega_2 t)$  on trouve

$$i\hbar[(\dot{c}_1 - i\omega_1 c_1) |\varphi_1\rangle e^{-i\omega_1 t} + (\dot{c}_2 - i\omega_2 c_2) |\varphi_2\rangle e^{-i\omega_2 t}] = [\mathbf{H}_0 + exE](c_1 |\varphi_1\rangle e^{-i\omega_1 t} + c_2 |\varphi_2\rangle e^{-i\omega_2 t}) \quad (3.33)$$

Par projection sur  $\langle\varphi_1|$

$$(i\hbar\dot{c}_1 + \underbrace{\hbar\omega_1}_{E_1} c_1) e^{-i\omega_1 t} = (E_1 + eE \underbrace{\langle\varphi_1|x|\varphi_1\rangle}_{=0}) c_1 e^{-i\omega_1 t} + eE \langle\varphi_1|x|\varphi_2\rangle c_2 e^{-i\omega_2 t} \quad (3.34)$$

car il n'y a pas de moment dipolaire permanent (les éléments de matrices diagonaux sont nuls, ceci car la fonction est de parité paire ou impaire). On trouve alors une équation pour  $c_1$

$$\dot{c}_1 = \frac{-i}{\hbar} eE \langle\varphi_1|x|\varphi_2\rangle c_2 e^{-i\omega_a t} \quad (3.35)$$

En projetant sur  $\langle\varphi_2|$ , on trouve

$$\dot{c}_2 = \frac{-i}{\hbar} eE \langle\varphi_2|x|\varphi_1\rangle c_1 e^{+i\omega_a t} \quad (3.36)$$

Nos deux coefficients sont alors donnés par

$$\dot{c}_1 = \frac{i}{\hbar} \mu_{21} c_2 E e^{-i\omega_a t}, \quad \dot{c}_2 = \frac{i}{\hbar} \mu_{21}^* c_1 E e^{+i\omega_a t} \quad (3.37)$$

Il serait intéressant de trouver une équation liant (3.31) et (3.37). Pour se faire, il suffit de différencier (3.31)

$$\dot{\mathcal{P}}(t) = -i(\omega_a - \omega_c) \mathcal{P}(t) + 2N c_2 \mu_{21} e^{-i(\omega_a - \omega_c)t} \underbrace{\left(\frac{-i}{\hbar} \mu_{21}^* c_2^* E e^{+i\omega_a t}\right)}_{c_1^*} + 2N c_1^* \mu_{21} e^{-i(\omega_a - \omega_c)t} \underbrace{\left(\frac{i}{\hbar} \mu_{21}^* c_1 E e^{+i\omega_a t}\right)}_{c_2} \quad (3.38)$$

On voit apparaître les coefficients et leur conjugué, il est possible de faire apparaître les modules carrés

$$\dot{\mathcal{P}}(t) = -i(\omega_a - \omega_c) \mathcal{P}(t) + 2N \frac{i}{\hbar} |\mu_{21}|^2 (|c_1|^2 - |c_2|^2) \exp(i\omega_c t) E \quad (3.39)$$

où  $E = \frac{1}{2}[\mathcal{E}(t)e^{-i\omega_c t} + \mathcal{E}^*(t)e^{i\omega_c t}]$ . On peut négliger le terme en  $\mathcal{E}^*$  car il va générer des oscillations à  $2\omega_c$  ce qui est trop rapide que pour être perçu dans la moyenne.

On définit alors l'**inversion de population**  $\mathcal{D}(t)$  :  $N(|c_2|^2 - |c_1|^2) = N_2 - N_1$

$$\dot{\mathcal{P}}(t) = -i(\omega_a - \omega_c) \mathcal{P}(t) - \frac{i}{\hbar} |\mu_{21}|^2 \mathcal{D} \mathcal{E} \quad (3.40)$$

Le problème est que nous ne savons pas comment cette inversion de population varie. Pour se faire, dérivons  $\mathcal{D}$

$$\dot{\mathcal{D}}(t) = N(\dot{c}_2 c_2^* + c_2 \dot{c}_2^* - \dot{c}_1 c_1^* - c_1 \dot{c}_1^*) \quad (3.41)$$

Sachant que

$$\begin{cases} N\dot{c}_1c_1^* = Nc_1^*\frac{i}{\hbar}\mu_{21}c_2Ee^{-i\omega_a t} = \frac{i}{\hbar}\frac{1}{2}\mathcal{P}e^{-i\omega_c t}E = -N\dot{c}_2^*c_2 \\ N\dot{c}_2c_2^* = Nc_2^*\frac{i}{\hbar}\mu_{21}^*c_1Ee^{+i\omega_a t} = \frac{i}{\hbar}\frac{1}{2}\mathcal{P}^*e^{+i\omega_c t}E = -N\dot{c}_1^*c_1 \end{cases} \quad (3.42)$$

On peut ré-écrire  $\dot{D}$

$$\dot{D}(t) = -\frac{i}{\hbar}(\mathcal{P}e^{-i\omega_c t} - \mathcal{P}^*e^{+i\omega_c t})E \quad (3.43)$$

Sachant que  $E = \frac{1}{2}[\mathcal{E}(t)e^{-i\omega_c t} + \mathcal{E}^*(t)e^{i\omega_c t}]$

$$\dot{D}(t) = -\frac{i}{2\hbar}(\mathcal{P}\mathcal{E}^* - \mathcal{E}\mathcal{P}^*) - \frac{i}{2\hbar}(\mathcal{P}\mathcal{E}e^{-2i\omega_c t} - \mathcal{P}^*\mathcal{E}^*e^{+2i\omega_c t}) \quad (3.44)$$

où le dernier terme est nul, la fréquence d'oscillation étant trop élevée. Nous avons alors établi l'équation régissant l'évolution de l'inversion de population

$$\dot{D}(t) = -\frac{i}{2\hbar}(\mathcal{P}\mathcal{E}^* - \mathcal{E}\mathcal{P}^*) \quad (3.45)$$

## Termes de relaxation et de pompe

### A. AMORTISSEMENT DE LA POLARISATION MACROSCOPIQUE

Le système d'équation (3.37) montre que  $c_i \propto E$  : si le champ est nul et que l'atome est excité alors l'atome reste indéfiniment dans cet état. Ceci n'est pas possible et cette aberration vient du fait que (3.37) ne tien compte que des interactions cohérentes mais il faut également tenir compte que les niveaux d'énergies ont un temps de vie fini, ces amplitudes de probabilité doivent donc décroire même en absence de champ.

Supposons  $E = 0$ . Soit  $|c_j|^2$  la probabilité que le système soit dans l'état  $j$  et  $1/\gamma_j$  le temps de vie dans l'état  $j$

$$\begin{aligned} |c_1|^2 &\propto \exp(-\gamma_1 t) \\ |c_2|^2 &\propto \exp(-\gamma_2 t) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} c_1 &\propto \exp(-\gamma_1 t/2) \\ c_2 &\propto \exp(-\gamma_2 t/2) \end{aligned} \quad (3.46)$$

Avec (3.31) :  $\mathcal{P}(t) \propto c_1^*c_2$  et comme  $\mathcal{P}(t) \propto \exp\left(-\frac{\gamma_1+\gamma_2}{2}t\right)$ , on en tire

$$\dot{\mathcal{P}}(t) = -\gamma_{\perp}\mathcal{P}, \quad \text{où } \gamma_{\perp} = (\gamma_1 + \gamma_2)/2 \quad (3.47)$$

Ce terme  $\gamma_{\perp}$  est un terme d'amortissement qui permet de tenir compte des dés-excitations spontanées.

Lorsqu'on parle de la largeur de raie correspondant au profil du gain, il n'y avait pas que le temps de vie qui entrainait en jeu : il fallait tenir compte des déphasages introduits par les collision. Après un certain temps, les dipôles microscopiques deviennent indépendants

$$\vec{P} \neq N\vec{p}_a \quad (3.48)$$

Il faut donc modifier l'expression<sup>4</sup> du  $\gamma_{\perp}$

$$\gamma_{\perp} = \frac{1}{2} \left( \gamma_1 + \gamma_2 + \frac{1}{t_{nr1}} + \frac{1}{t_{nr2}} + \frac{2}{\tau_0} \right) \quad (3.49)$$

On trouve alors la **première équation de Bloch**

---

4. Le 2 avec  $\tau_0$  vient du fait qu'il y a deux polarisations

**À retenir :**

$$\dot{\mathcal{P}}(t) = -\gamma_{\perp} \mathcal{P} - i(\omega_a - \omega_c) \mathcal{P}(t) - \frac{i}{\hbar} |\mu_{21}|^2 \mathcal{D} \mathcal{E} \quad (3.50)$$

où le premier terme est l'amortissement de  $\mathcal{P}$ , le second met en évidence la différence de fréquence entre la cavité et le laser qui veulent tous deux avoir leur résonance et le troisième terme le couplage entre le champ EM et le milieu atomique.

#### AMORTISSEMENT DE $\mathcal{D}$ ET TERME DE POMPE

Nous avons pour l'instant procédé de façon très générale en tenant compte de l'amortissement de la densité de population. On se rend bien compte qu'il faut un mécanisme qui mette le système hors équilibre pour que  $N_1 \ll N_2$  de façon à avoir émission laser. On va donc procéder à un pompage incohérent dont le but est de créer une inversion de la population<sup>5</sup> (collisions, pompage optique, électrique,...)<sup>6</sup>

$$\dot{\mathcal{D}} = +\gamma_{\parallel} \hat{\mathcal{D}} + \dots \quad (3.51)$$

où  $\hat{\mathcal{D}}$  est le **coefficient de pompe**. On en tire la **deuxième équation de Bloch**

**À retenir :**

$$\dot{\mathcal{D}}(t) = -\frac{i}{2\hbar} (\mathcal{P} \mathcal{E}^* - \mathcal{E} \mathcal{P}^*) - \gamma_{\parallel} (\mathcal{D} - \hat{\mathcal{D}}) \quad (3.52)$$

où le premier terme est le couplage entre le champ EM et le milieu et le second le terme d'amortissement et de pompage.

#### THÉORÈME : EQUATION DE MAXWELL-BLOCH POUR LE LASER

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{E}}(t) &= -\frac{K_c}{2} \mathcal{E} + \frac{i\omega_c}{2\varepsilon_0} \mathcal{P} \\ \dot{\mathcal{P}}(t) &= -\gamma_{\perp} \mathcal{P} - \frac{i}{\hbar} |\mu_{21}|^2 \mathcal{D} \mathcal{E} - i(\omega_a - \omega_c) \mathcal{P}(t) \\ \dot{\mathcal{D}}(t) &= -\gamma_{\parallel} (\mathcal{D} - \hat{\mathcal{D}}) - \frac{i}{2\hbar} (\mathcal{P} \mathcal{E}^* - \mathcal{E} \mathcal{P}^*) \end{aligned} \quad (3.53)$$

où  $\mathcal{E}, \mathcal{P}$  sont des enveloppes complexe variant lentement et  $\mathcal{D}$  est réel.

## 3.2 État stationnaire d'un laser

Le slide 20 détaille une longue étape mathématique ayant pour but d'écrire la relation d'inversion de population. Les équations importantes sont

$$[K_c/2 - i(\omega_L - \omega_c)] \mathcal{E}_0 = \frac{i\omega_c}{2\varepsilon_0} \mathcal{P}_0 \quad (3.54)$$

$$\mathcal{P}_0 = \frac{|\mu_{21}|^2}{\hbar} \frac{\mathcal{D} \mathcal{E}_0}{(\omega_L - \omega_a) + i\gamma_{\perp}} \quad (3.55)$$

Avec celles-ci, on en tire

$$\mathcal{D} = \hat{\mathcal{D}} \left/ \left[ 1 + \frac{|\mathcal{E}_0|^2}{\mathcal{I}_s} \frac{1}{1 + [(\omega_L - \omega_a)/\gamma_{\perp}]^2} \right] \right. \quad (3.56)$$

5. Celui-ci est indépendant du fait que le milieu lasse.

6. D'où vient ce truc ?

Lorsque  $\omega_L = \omega_a$  la cavité est accordée :

$$\mathcal{D} = \frac{\hat{\mathcal{D}}}{1 + |\mathcal{E}_0|^2/\mathcal{I}_s} \quad (3.57)$$

On parle de **saturation de l'inversion de population** où  $\mathcal{I}_s$  est l'intensité de saturation qui ne dépend que des paramètres du milieu. On peut remarquer que plus l'intensité est élevée, plus l'inversion de population est petite. On remarque en effet que l'inversion est plus faible en présence d'un champ EM car celui-ci provoque de l'émission stimulée qui tend à diminuer cette inversion de population.

### 3.2.1 Intensité laser et inversion de population

Considérons  $\omega_c = \omega_a = \omega_L$ . Si on n'a pas de champ  $\mathcal{E}_0 = 0$ , pas de dipôle, polarisation nulle  $\mathcal{P}_0 = 0$  et  $\mathcal{D} = \hat{\mathcal{D}}$ . Ceci est la solution triviale mais il en existe une autre. Sachant que

$$K_c \mathcal{E}_0 = \frac{i\omega_c}{\varepsilon_0} \mathcal{P}_0, \quad \mathcal{P}_0 = -i \frac{|\mu_{21}|^2}{\hbar\gamma_\perp} \mathcal{D} \mathcal{E}_0 \quad (3.58)$$

On en tire

$$-i \frac{|\mu_{21}|^2}{\hbar\gamma_\perp} \mathcal{D} \mathcal{E}_0 = -i \frac{K_c \varepsilon_0}{\omega_c} \mathcal{E}_0 \quad (3.59)$$

Soit encore

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_s = \frac{K_c \varepsilon_0 \hbar \gamma_\perp}{\omega_c |\mu_{21}|^2} \quad (3.60)$$

L'inversion de population est "bloquée" à une constante  $\mathcal{D}_s$ . En terme d'intensité (avec (3.56))

$$\mathcal{D}_s = \frac{\hat{\mathcal{D}}}{1 + |\mathcal{E}_0|^2/\mathcal{I}_s} \Rightarrow |\mathcal{E}_0|^2 = \left(\frac{\hat{\mathcal{D}}}{\mathcal{D}_s} - 1\right) \mathcal{I}_s \quad (3.61)$$

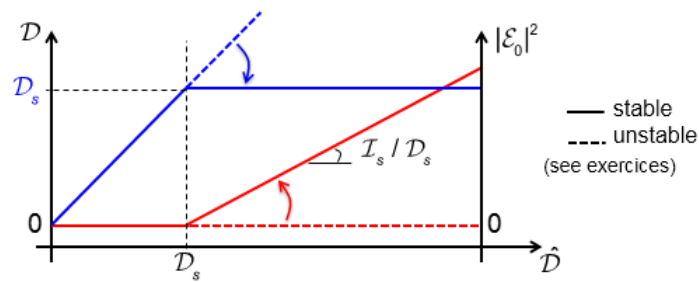


FIGURE 3.9 – Courbes caractéristiques d'un laser

La première solution  $\mathcal{D} < \mathcal{D}_s$  correspond au laser éteint, champ d'intensité nul dont la densité de population est directement proportionnelle (il n'y a que de la fluorescence ici). A partir d'un certain moment il y a bifurcation vers une seconde solution et on retrouve la solution non triviale pour laquelle l'inversion est bloquée à une constante et l'inversion augmente linéairement avec  $\hat{\mathcal{D}}$ . On nomme alors  $\mathcal{D}_s$  le *seuil laser*.

### 3.2.2 Susceptibilité électrique et gain

Reprenons notre équation de polarisation (3.55) et isolons  $\chi(\omega)$

$$\mathcal{P}_0 = \frac{|\mu_{21}|^2}{\hbar} \frac{\mathcal{D}\mathcal{E}_0}{(\omega_L - \omega_a) + i\gamma_\perp} \equiv \varepsilon_0 \chi(\omega) \mathcal{E}_0 \quad \Leftrightarrow \quad \chi(\omega) = \frac{|\mu_{21}|^2}{\hbar \varepsilon_0} \frac{\mathcal{D}}{(\omega_L - \omega_a) + i\gamma_\perp} \quad (3.62)$$

Avec (3.56)

$$\chi = \frac{|\mu_{21}|^2}{\hbar \varepsilon_0} \frac{\hat{\mathcal{D}}}{\gamma_\perp^2} \left( \frac{(\omega_L - \omega_a) - i\gamma_\perp}{(\omega_L - \omega_a)^2 + \gamma_\perp^2} \right) \left( \frac{\gamma_\perp^2 + (\omega_L - \omega_a)^2}{1 + |\mathcal{E}_0|^2/\mathcal{I}_s + [(\omega_L - \omega_a)/\gamma_\perp]^2} \right) \quad (3.63)$$

Après simplification

$$\chi(\omega) = \frac{|\mu_{21}|^2}{\hbar \varepsilon_0 \gamma_\perp} \hat{\mathcal{D}} \frac{(\omega_L - \omega_a)/\gamma_\perp - i}{1 + |\mathcal{E}_0|^2/\mathcal{I}_s + [(\omega_L - \omega_a)/\gamma_\perp]^2} = \chi' + i\chi'' \quad (3.64)$$

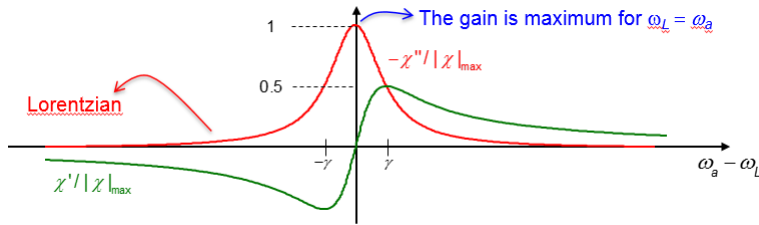


FIGURE 3.10

serve une observation de la partie réelle de la susceptibilité et donc une variation de l'indice de réfraction.

Le terme  $\chi''$  donne le gain ou les pertes. Il apparait un terme  $|\mathcal{E}_0|^2/\mathcal{I}_s$  qui dépend de l'amplitude du champ

$$\chi = -\frac{|\mu_{21}|^2}{\hbar \varepsilon_0 \gamma_\perp} \hat{\mathcal{D}} \frac{1}{1 + |\mathcal{E}_0|^2/\mathcal{I}_s + [(\omega_L - \omega_a)/\gamma_\perp]^2} \quad (3.65)$$

où  $\mathcal{G} = -\alpha = -\frac{\omega_L}{c} \chi$ . Étudions celle-ci en fonction de l'intensité du champ

1. *Cas non-sature* ( $|\mathcal{E}_0|^2 \ll \mathcal{I}_s$ ).

$$\mathcal{G} = \frac{\hbar \omega_0 B n_g}{c} g(\omega_0) (N_2 - N_1) \quad (3.66)$$

Il s'agit du cas où l'amplitude du champ est petite par rapport à l'intensité de saturation. Comme le champ est très petit, nous sommes en dessous du seuil laser et le gain est donné en fonction de la fréquence via  $g(\omega)$  (une lorentzienne) comme l'expression  $\chi''$  ci-dessus. L'avantage est que l'on va pouvoir, avec Maxwell-Bloch, tirer par identification un coefficient d'Einstein

$$B \propto |\mu_{21}|^2 \quad (3.67)$$

Notons que l'on retrouve la même expression qu'au chapitre 2 pour  $g(\omega)$  avec  $\gamma_n = 2\gamma_\perp$ .

2. *Cas sature* ( $\mathcal{I}_s \ll |\mathcal{E}_0|^2$ ).

$$\mathcal{G}(\omega) = \frac{\omega_L |\mu_{21}|^2}{c \hbar \varepsilon_0 \gamma_\perp} \frac{\hat{\mathcal{D}}}{1 + |\mathcal{E}_0|^2/\mathcal{I}_s} \frac{1}{1 + [(\omega - \omega_a)/\gamma]^2} \quad (3.68)$$

Il n'est plus ici possible de le négliger, mais on peut le mettre en évidence. On retrouve également une lorentzienne mais plus large car le "nouveau"  $\gamma$  est l'ancien multiplié par un facteur supérieur à l'unité

$$\gamma_{\perp} \rightarrow \gamma = \gamma_{\perp} \sqrt{1 + |\mathcal{E}_0|^2 / \mathcal{I}_s} \quad (3.69)$$

Il s'agit d'un élargissement homogène de  $g(\omega)$  (tous les atomes réagissent de la même façon, par exemple avoir un champ dans la cavité rend le spectre plus large car celui-ci crée de l'émission stimulée).

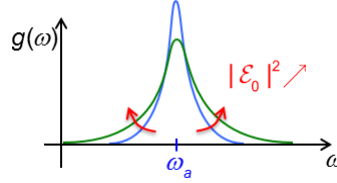


FIGURE 3.11 –  $\omega_{c,j}$  est la fréquence angulaire de mode de la cavité.  $\omega_{c,0}$  est la fréquence la plus proche de la fréquence atomique  $\omega_a$ .

Une question légitime serait de se demander ce que vaut le gain après la saturation. On sait qu'il vaut les pertes ce qui ne saute pas aux yeux en regarder MB. Reprenons (3.54) et (3.55)

$$K_c \mathcal{E}_0 = \frac{i\omega_c}{\varepsilon_0} \mathcal{P}_0, \quad \mathcal{P}_0 = -i \frac{|\mu_{21}|^2}{\hbar \gamma_{\perp}} \mathcal{D} \mathcal{E}_0 \quad (3.70)$$

En combinant les deux, on exprime pour les pertes

$$K_c = \frac{\omega_L}{\varepsilon_0} \frac{|\mu_{21}|^2}{\hbar \gamma_{\perp}} \mathcal{D}_s \quad (3.71)$$

De l'autre côté, nous avons pour le gain

$$\mathcal{G} = -\frac{\omega_L}{c} \chi = \frac{\omega_L}{c} \frac{|\mu_{21}|^2}{\hbar \varepsilon_0} \frac{\mathcal{D}}{\gamma_{\perp}} \quad (3.72)$$

Comme à la saturation  $\mathcal{D} = \mathcal{D}_s$ , on arrive à

$$K_c = c \mathcal{G} \quad (3.73)$$

Ce qui est une solution non triviale pour pertes = gain (condition d'oscillation laser). En conclusion en dessous du seuil laser  $\hat{\mathcal{D}}_s$ ,  $\mathbb{D}$  et  $\mathcal{G}$  garde une valeur constante tel que le gain soit égal aux pertes. Quand  $\hat{\mathcal{D}}$  augmente au dessus du seuil, cette augmentation supplémentaire d'énergie est convertie en photons lasant

### 3.2.3 Fréquence du champ laser

Jusqu'ici nous avons considéré que  $\omega_c = \omega_a$  mais que se passe-t-il (pour  $\omega_L$ ) si les deux sont différents ? Reprenons (3.54) et (3.55)

$$[K_c/2 - i(\omega_L - \omega_c)] \mathcal{E}_0 = \frac{i\omega_c}{2\varepsilon_0} \mathcal{P}_0, \quad \mathcal{P}_0 = \frac{|\mu_{21}|^2}{\hbar} \frac{\mathcal{D} \mathcal{E}_0}{(\omega_L - \omega_a) + i\gamma_{\perp}} \quad (3.74)$$

En substituant l'une dans l'autre

$$[K_c/2 - i(\omega_L - \omega_c)] \mathcal{E}_0 = \frac{i\omega_c}{2\varepsilon_0} \frac{|\mu_{21}|^2}{\hbar} \frac{\mathcal{D} \mathcal{E}_0}{(\omega_L - \omega_a) + i\gamma_{\perp}} \quad (3.75)$$

En isolant l'inversion de population

$$\Rightarrow \mathcal{D} = \frac{-2i\varepsilon_0\hbar}{\omega_c|\mu_{21}|^2} [K_c/2 - i(\omega_L - \omega_c)][(\omega_L - \omega_a) + i\gamma_\perp] \quad (3.76)$$

Il s'agit d'un nombre complexe : comme nous savons que l'inversion de population est réelle, la partie imaginaire doit forcément être nulle

$$\mathcal{D} = \frac{2\varepsilon_0\hbar}{\omega_c|\mu_{21}|^2} \left\{ \underbrace{-i\left[\frac{K_c}{2}(\omega_L - \omega_a) + \gamma_\perp(\omega_L - \omega_c)\right]}_{=0} - (\omega_L - \omega_a)(\omega_L - \omega_c) + \frac{K_c\gamma_\perp}{2} \right\} \quad (3.77)$$

La partie imaginaire étant nulle, on en tire que

$$(\omega_L - \omega_a)K_c/2 = -\gamma_\perp(\omega_L - \omega_c) \quad (3.78)$$

Et donc

$$\omega_L = \frac{\omega_c 2\gamma_\perp + \omega_a K_c}{2\gamma_\perp + K_c} \quad (3.79)$$

La fréquence laser est une sorte de moyenne entre les deux pondérée par le coefficient d'amortissement  $K_c$  et  $2\gamma_\perp = \gamma_h$ . Si la cavité est de très haute finesse (par rapport à la largeur de la transition atomique), la fréquence laser va coïncider avec celle de la cavité

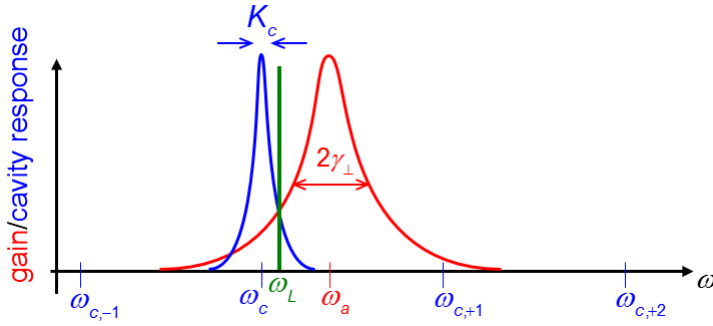


FIGURE 3.12

$\omega_c$ . Inversement, si c'est le milieu atomique qui a une raie très étroite on observera  $\omega_L = \omega_a$ . On nomme  $\omega_L$  le terme de *tirage en fréquence*.

Nous avons vu que la forme de raie a tendance à s'élargir lorsque l'on est au delà du seuil laser (ceci n'a de sens que si le gain a une largeur qui s'étend sur plusieurs mode). La courbe en noir est obtenue lorsque l'on augmente la pompe (de largeur  $2\gamma_\perp$ ). A un moment donné, la courbe noire croise la ligne des pertes et donne lieu à la courbe rouge : cela commence à laser. Si on augmente encore la puissance le point vert ne va pas changer de place mais nous aurons plus d'émission stimulée. Une seule fréquence lasera, les autres, étant en dessous du seuil gain = pertes, ne laseront pas.

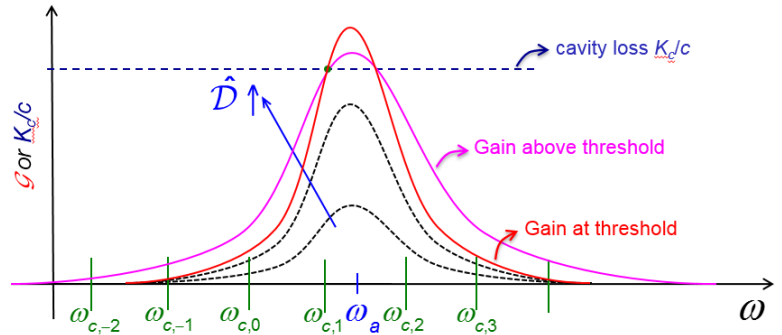


FIGURE 3.13

Nous venons de voir le cas homogène, regardons ce qu'il en est pour les *lasers with inhomogeneously broadened gain line shape*. En effet, les lasers sont souvent multimodes. Si il y a des classes d'atomes, elles auront chacune un mode différent et on peut avoir plusieurs émissions



laser : régime multimodale. Pour comprendre ceci, regardons l'équation de l'inversion de population (3.77)

$$\mathcal{D} = \frac{2\varepsilon_0\hbar}{\omega_c|\mu_{21}|^2} \left\{ \frac{K_c\gamma_{\perp}}{2} - (\omega_L - \omega_a)(\omega_L - \omega_c) \right\} \quad (3.80)$$

Sachant que  $\omega_L - \omega_a = -\frac{2\gamma_{\perp}}{K_c}(\omega_L - \omega_c)$

$$\mathcal{D} = \frac{2\varepsilon_0\hbar}{\omega_c|\mu_{21}|^2} \frac{K_c\gamma_{\perp}}{2} \left\{ 1 + \frac{4}{K_c^2}(\omega_L - \omega_c)^2 \right\} = \mathcal{D}_s \left\{ 1 + \frac{4}{K_c^2}(\omega_L - \omega_c)^2 \right\} = \mathcal{D}_s \left\{ 1 + \frac{1}{\gamma_{\perp}^2}(\omega_L - \omega_a)^2 \right\} \quad (3.81)$$

Ici comme  $\omega_L \neq \omega_a$ , l'inversion de population se fait à  $\mathcal{D} > \mathcal{D}_s$  : comme il y a un petit décalage entre les résonances, il faut un peu plus d'inversion de population que si on était à résonance (nous sommes dans un cas moins optimal, le cas optimal étant  $\mathcal{D} \approx \mathcal{D}_s$ ).

La solution stationnaire est représentée en rouge. En noir, il s'agit du cas où le gain est supérieur aux pertes, il va donc y avoir une diminution du gain jusqu'à arriver à la condition où le gain vaut les pertes. Il est possible d'avoir un multimode car le fait qu'on ait un lasage à un  $\omega_c$  n'influence pas le lasage d'un autre  $\omega_c$ . Entre deux de ces fréquences, le champ n'est pas résonant. En l'absence de lasage, le gain peut être supérieur aux pertes. En dessous de la ligne en pointillé, il n'y aura pas de lasage, nous décrivons bien ici un laser multimode (on parle de trous spectraux, typique He-Ne)<sup>7</sup>.

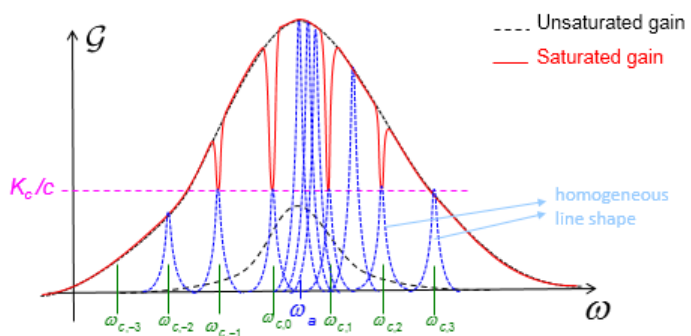


FIGURE 3.14

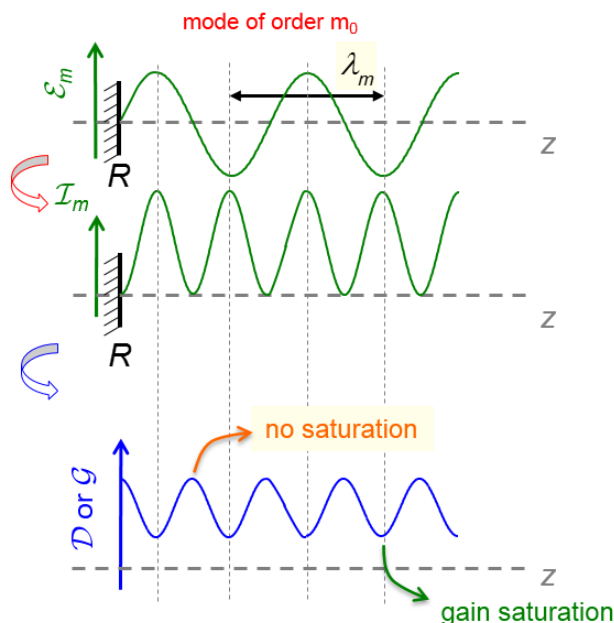


FIGURE 3.15

La réalité est plus compliquée, car la géométrie joue également un rôle. Nous n'avons pour l'instant fait aucune différence entre une cavité anneau et FP. Le FP peut donner lieu à des interférences et donc une onde stationnaire. En augmentant la pompe pour un mode  $\omega_0$  on va rencontrer à un certain moment la condition *gain=pertes* donnant lieu à un certain profil d'intensité. Comme l'inversion de population varie avec  $I/I_s$  on crée des trous spatiaux. Si un mode se situe juste dans le creux de  $\mathcal{G}$  il n'y a pas assez de gain et on n'observera jamais de lasage. Par contre, il est possible (sur un pic de  $\mathcal{G}$ ) d'avoir un autre lasage car la fréquence ne va pas se "nourrir spatialement" au même endroit que le premier mode qui s'est mis à laser.

7. Paragraphe pas clair, lire slide 31

## Chapitre 4

# Équations de bilan du laser et du mécanisme de pompe

### 4.1 Équation de bilan du laser et équations de Maxwell-Bloch

Reprenons les équations de Maxwell-Bloch d'un laser

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathcal{E}}(t) = -\frac{K_c}{2}\mathcal{E} + \frac{i\omega_c}{2\varepsilon_0}\mathcal{P} \\ \dot{\mathcal{P}}(t) = -\gamma_{\perp}\mathcal{P} - \frac{i}{\hbar}|\mu_{21}|^2\mathcal{D}\mathcal{E} - i(\omega_a - \omega_c)\mathcal{P}(t) \\ \dot{\mathcal{D}}(t) = -\gamma_{\parallel}(\mathcal{D} - \hat{\mathcal{D}}) - \frac{i}{2\hbar}(\mathcal{P}\mathcal{E}^* - \mathcal{E}\mathcal{P}^*) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \quad (4.1)$$

Les différents temps de vies définissent les *classes* des lasers : *AB* si la polarisation est la plus rapide alors que si le champ est le plus lent, on parlera de la classe *A*. Faisons ici l'hypothèse que la polarisation répond très rapidement par rapport à la dynamique de  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{D}$

$$\gamma_{\perp} \gg \gamma_{\parallel}, K_c/2 \quad (4.2)$$

Considérons  $\omega_a = \omega_c$  mais aussi  $\omega_L = \omega_c$ . La seconde équation de MB (2) devient

$$\dot{\mathcal{P}}(t) = -\gamma_{\perp}\mathcal{P} - \frac{i}{\hbar}|\mu_{21}|^2\mathcal{D}\mathcal{E} \quad (4.3)$$

En supposant  $\mathcal{E}, \mathcal{D}$  constant

$$\mathcal{P}(t) = \mathcal{P}(0)e^{-\gamma_{\perp}t} - \frac{i|\mu_{21}|^2}{\hbar\gamma_{\perp}}\mathcal{E}\mathcal{D}(1 - e^{-\gamma_{\perp}t}) \quad (4.4)$$

Si  $t \gg 1/\gamma$  (équivalent à  $\dot{\mathcal{P}}(t) = 0$  dans (2))

$$\mathcal{P} = -\frac{i|\mu_{21}|^2}{\hbar\gamma_{\perp}}\mathcal{E}\mathcal{D} \quad (4.5)$$

Il s'agit d'une évolution adiabatique de  $\mathcal{P}$  qui garde sa valeurs stationnaire. Remplaçons cette dernière expression de  $\mathcal{P}$  dans (1)

$$\dot{\mathcal{E}}(t) = -\frac{K_c}{2}\mathcal{E} + \frac{i\omega_c}{2\varepsilon_0}\left(-\frac{i|\mu_{21}|^2}{\hbar\gamma_{\perp}}\mathcal{E}\mathcal{D}\right) \quad (4.6)$$

Faisons pareil avec (3)

$$\dot{\mathcal{D}}(t) = -\gamma_{\parallel}(\mathcal{D} - \hat{\mathcal{D}}) - \frac{|\mu_{21}|^2}{2\hbar^2\gamma_{\perp}} 2\mathcal{D}|\mathcal{E}|^2 \quad (4.7)$$

Cette expression de l'inversion de population dépend du terme de pompage ainsi que du module carré de  $\mathcal{E}$ . Afin de remplacer l'une dans l'autre, on va multiplier cette expression par son conjugué ( $\mathcal{E}^*\mathcal{E} = |\mathcal{E}|^2$ ). Si  $\mathcal{I} = |\mathcal{E}|^2$ , alors

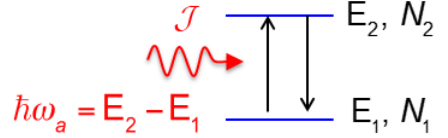
**À retenir :**

$$\begin{cases} \dot{\mathcal{I}}(t) = -K_c\mathcal{I} + \frac{\omega_c|\mu_{21}|^2}{\hbar\gamma_{\perp}\varepsilon_0}\mathcal{D}\mathcal{I} & (4) \\ \dot{\mathcal{D}}(t) = -\gamma_{\parallel}(\mathcal{D} - \hat{\mathcal{D}}) - \frac{|\mu_{21}|^2}{\hbar^2\gamma_{\perp}}\mathcal{D}\mathcal{I} & (5) \end{cases} \quad (4.8)$$

Ces deux équations sont connues comme les équations de bilan d'un laser. Elles décrivent la dynamique des laser de classes dynamiques A et B.

## 4.2 Systèmes à deux niveaux

Considérons un flux de photon incident dont l'énergie est celle entre deux niveaux. Pour une onde monochromatique incidente à  $\omega_0$  :



$$u = n_p\hbar\omega_0\delta(\omega - \omega_0), \quad \mathcal{J} = n_pv_g, \quad \hbar\omega_a = E_2 - E_1 \quad (4.9)$$

FIGURE 4.1

Il est possible de calculer le taux d'absorption  $\Gamma_{12} = \int B_{12}u(\omega)g(\omega)N_1d\omega$  en y remplaçant  $u$  monochromatique

$$\Gamma_{12} = \sigma\mathcal{J}N_1 \quad (4.10)$$

où  $\sigma = B\hbar\omega_0g(\omega_0)/v_g$  est la section efficace ( $m^2$ ). Le taux de variation de la population atomique s'exprime

$$\dot{N}_2 = \Gamma_{12} - \Gamma_{21} - T_{21}N_2, \quad \dot{N}_1 = -(\Gamma_{12} - \Gamma_{21}) + T_{21}N_2 \quad (4.11)$$

où  $T_{21} = A_{21} + S_{21}$  (le premier est radiatif, pas le second)<sup>1</sup>. En tire

$$\frac{d}{dt}(N_1 + N_2) = 0 \Rightarrow N_1 + N_2 = N \quad (4.12)$$

Pour la solution stationnaire (par exemple  $\dot{N}_2 = 0$ )

$$\sigma\mathcal{J}(N_1 - N_2) = T_{21}N_2 \quad (4.13)$$

Sachant que  $\mathcal{D} = N_2 - N_1 \leftrightarrow \mathcal{D} + N = 2N_2$

$$-\sigma\mathcal{J}\mathcal{D} = T_{21}(\mathcal{D} + N)/2 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{D} = -N \frac{1}{1 + 2\sigma\mathcal{J}/T_{21}} \quad (4.14)$$

Cette expression est logique car s'il n'y a pas de courant on trouve  $\mathcal{D} = -N$  : on ne peut pas avoir d'inversion de population car  $\mathcal{D}$  est toujours négatif.

1. Qu'est ce que ça représente exactement ?

Explicitons cette expression de l'inversion de population. Nous savons (en substituant les expressions terme à terme) que

$$2\sigma\mathcal{J}/T_{21} = 2\frac{B\hbar\omega_0 g(\omega_0)}{v_g} \frac{I}{\hbar\omega_0} / T_{21} = \frac{I}{I_s} \tilde{g}(\omega_0) \quad (4.15)$$

où  $\tilde{g}(\omega_0) = \frac{g(\omega_0)}{g(\omega_a)}$ . L'**intensité de saturation** est définie comme ( $W.m^{-2}$ )

$$I_s = \frac{v_g T_{21}}{2Bg(\omega_a)} \quad (4.16)$$

On arrive alors à ré-écrire  $\mathcal{D}$

$$\mathcal{D} = -N/[1 + \frac{I}{I_s} \tilde{g}(\omega_0)] \quad (4.17)$$

Comme  $\mathcal{D} < 0$ , cela montre qu'il n'est pas possible d'atteindre l'inversion de population dans un régime stationnaire ( $\alpha = -\sigma\mathcal{D} > 0$ , pas de gain).

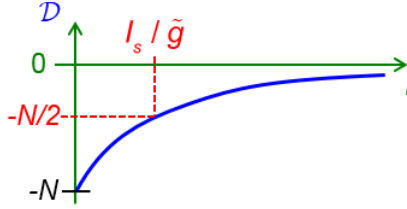


FIGURE 4.2

Considérons le cas d'une absorption

$$\frac{d}{dz}I = -\alpha I \quad (4.18)$$

où  $\alpha = -\sigma\mathcal{D} = \sigma N/[1 + \frac{I}{I_s} \tilde{g}(\omega_0)]$ . Passons en revue deux cas

1.  $I \ll I_s$  (absorption non saturée)

$$\alpha \approx \sigma N \quad \Rightarrow \quad I(z) = I_0 \exp(-\sigma N z) \quad (4.19)$$

A faible intensité (par rapport à celle de saturation) il y a donc beaucoup d'absorption

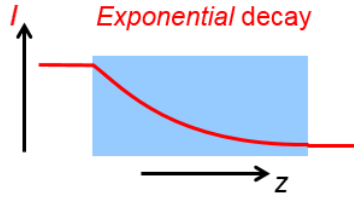


FIGURE 4.3

2.  $I \gg I_s$  (absorption saturée)

$$\alpha \approx \sigma N \frac{I_s}{I} \quad \Rightarrow \quad I(z) = I_0 - I_s \sigma N z \quad (4.20)$$

Lorsque l'on atteint une intensité proche de celle de saturation, on observe une décroissance linéaire de l'intensité ce qui est une grosse différence. On parle de *transparence auto-induite*<sup>2</sup>

---

2. Heu.. ?

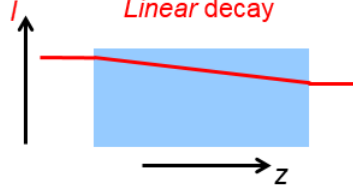


FIGURE 4.4

Même si ce système a deux niveaux, il n'est pas utile pour en faire un laser (car  $\mathcal{D} < 0$ ) mais on peut l'utiliser pour générer de courtes impulsions. Pour avoir un gain dans le système ( $\mathcal{D} > 0$ ) il faut un système atomique avec plus de deux niveaux (au moins trois ou autre niveaux d'énergie participant au lasage/pompage).

### 4.3 Laser à trois niveaux d'énergie

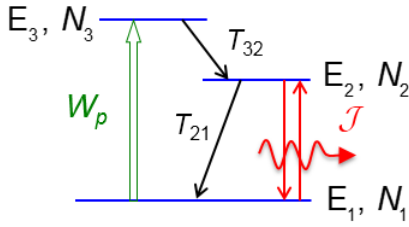


FIGURE 4.5

Pour contrer ce problème, nous allons utiliser un niveau de plus haute énergie dont le but est de nourrir le second niveau et non pas que deux niveau qui se peuplent et dépeuplent. L'idée est de s'arranger pour que le taux de  $3 \rightarrow 1 \ll 3 \rightarrow 2$ . Nous allons ici considérer un système Er (erbium) à trois niveaux. La densité totale est la somme des densités de chaque niveau.

$$N = N_1 + N_2 + N_3 \quad (6) \quad (4.21)$$

Comme annoncé, on fait l'hypothèse que le niveau 3 se désexcite préférentiellement vers le second niveau et non pas le fondamental

$$T_{31}N_3 \ll T_{32}N_3 \quad (4.22)$$

Soit  $W_p = \sigma_p \mathcal{J}_p$  ( $s^{-1}$ ) le taux de pompage optique. Étudions la variation de densité du niveau trois

$$\dot{N}_3 = W_p N_1 - W_p N_3 - T_{32} N_3 \quad (7) \quad (4.23)$$

Il s'agit de la contribution de la pompe, mais aussi l'émission stimulée  $3 \rightarrow 1$  du à la pompe et aux transitions<sup>3</sup>. De même pour le niveau 2

$$\dot{N}_2 = +T_{32}N_3 - (N_2 - N_1)\sigma\mathcal{J} - T_{21}N_2 \quad (4.24)$$

Il peut être peuplé depuis le niveau 3, il peut avoir de l'émission stimulée, de l'absorption et  $T_{21}N_1$  l'émission stimulée de  $2 \rightarrow 1$ . En faisant de même pour le niveau fondamental

$$\dot{N}_1 = (N_2 - N_1)\sigma\mathcal{J} + T_{21}N_2 - W_p(N_1 - N_3) \quad (4.25)$$

En faisant un peu de mathématiques (non détaillées ici) on peut obtenir une équation donnant le rapport entre l'inversion de population et la densité totale

$$\frac{\mathcal{D}}{N} = \frac{W_p(T_{32} - T_{21}) - T_{21}T_{32}}{3\sigma\mathcal{J}W_p + 2W_pT_{21} + 2\sigma\mathcal{J}T_{32} + T_{21}T_{32} + W_pT_{32}} \quad (4.26)$$

Le dénominateur n'a que des signes positif. S'il n'y a pas de pompe, le rapport est négatif et on n'a pas d'inversion de population (ce qui est cohérent). Pour avoir une inversion, il faut que

3. Expliciter

$T_{32} \gg T_{21}$  ce qui signifie que le temps de désexcitation de  $2 \rightarrow 3$  doit être plus petit que  $2 \rightarrow 1$ .

On peut définir un taux de pompage de transparence (autant d'absorption que d'émission stimulée, dès qu'un photon descend dans le niveau 1, un autre remonte directement dans le niveau 3).

$$W_p^{t-th} = T_{21}T_{32}/(T_{32} - T_{21}) \quad (4.27)$$

Pour obtenir ce milieu transparent, il faut que  $T_{32} \gg T_{21} \Rightarrow W_p^{t-th} \approx T_{21}$ .

Faisons cette supposition de milieu transparent impliquant une élimination adiabatique en  $N_3$ . Après quelques substitutions (slide 8)

$$\dot{\mathcal{D}} = 2W_p(N - \mathcal{D})/2 - 2\mathcal{D}\sigma\mathcal{J} - 2T_{21}(N + \mathcal{D})/2 = -(W_p + T_{21})\mathcal{D} - 2\mathcal{D}\sigma\mathcal{J} + (W_p - T_{21})N \quad (4.28)$$

La dernière égalité est formellement égale à

$$\dot{\mathcal{D}}(t) = -\gamma_{\parallel}(\mathcal{D} - \hat{\mathcal{D}}) - \frac{|\mu_{21}|^2}{\hbar^2\gamma_{\perp}}\mathcal{D}\mathcal{I} \quad (4.29)$$

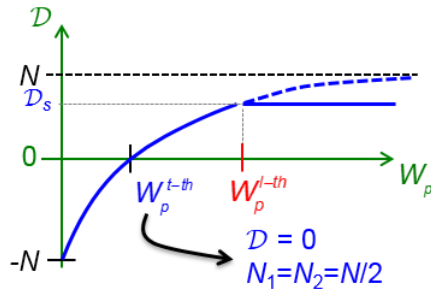


FIGURE 4.6

On trouve une valeur du coefficient de relaxation qui dépend de  $T_{21}$  mais aussi du taux de pompage ce qui peut ne pas paraître évident. Tout se répartit donc entre le niveau fondamental et le second niveau, le niveau 3 n'est qu'une "étape nécessaire" pour atteindre le second niveau.

Regardons la solution stationnaire au dessus, en dessous et au seuil laser

- En dessous du seuil laser  $\mathcal{J} = 0$

$$\mathcal{D} = \frac{(W_p - T_{21})}{(W_p + T_{21})}N = \hat{\mathcal{D}} \quad (4.30)$$

Lorsque  $W_p > W_p^{t-th}$ ,  $\mathcal{G} = \sigma\mathcal{D}$  et l'on retrouve une amplification exponentielle.

- Au seuil laser.

$$\mathcal{G}_s = \sigma\mathcal{D}_s = K_c/c \quad \Rightarrow \quad W_p^{l-th} = T_{21} \frac{1 + K_c/Nc\sigma}{1 - K_c/Nc\sigma} > T_{21} = W_p^{t-th} \quad (4.31)$$

On observe une diminution de la transparence  $W$  si  $T_{21}$  et  $K_c$  diminuent.

- Au dessus du seuil laser :  $\mathcal{J} \neq 0$

$$\mathcal{D} = \frac{(W_p - T_{21})/(W_p + T_{21})}{1 + 2\sigma\mathcal{J}/(W_p + T_{21})}N \quad (4.32)$$

Ceci correspond à la saturation de l'inversion de population :  $\mathcal{D} = \mathcal{D}_s = c^{te}$ .

En résumé, on augmente  $W_p$  jusqu'au seuil de transparence où l'on commence à obtenir du gain. En continuant d'augmenter le laser démarre jusqu'à arriver à quelque chose de constant. On peut voir que ce taux diminue si  $T_{21}$  : si tous les atomes restaient en  $N_2$  sans redescendre en  $N_1$  ce serait effectivement génial mais forcément ce n'est pas réalisable et on perd des photons dans une fluorescence inutile.