



ECOLE
POLYTECHNIQUE
DE BRUXELLES

UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES

SYNTHÈSE

Physique des télécommunications ELEC-H-304

Auteur :
Nicolas ENGLEBERT

Professeur :
Philippe DE DONCKER

Année 2015 - 2016

Appel à contribution

Synthèse Open Source



Ce document est grandement inspiré de l'excellent cours donné par Philippe De Doncker à l'EPB (École Polytechnique de Bruxelles), faculté de l'ULB (Université Libre de Bruxelles). Il est écrit par les auteurs susnommés avec l'aide de tous les autres étudiants et votre aide est la bienvenue ! En effet, il y a toujours moyen de l'améliorer

surtout que si le cours change, la synthèse doit être changée en conséquence. On peut retrouver le code source à l'adresse suivante

<https://github.com/nenglebert/Syntheses>

Pour contribuer à cette synthèse, il vous suffira de créer un compte sur *Github.com*. De légères modifications (petites coquilles, orthographe, ...) peuvent directement être faites sur le site ! Vous avez vu une petite faute ? Si oui, la corriger de cette façon ne prendra que quelques secondes, une bonne raison de le faire !

Pour de plus longues modifications, il est intéressant de disposer des fichiers : il vous faudra pour cela installer \LaTeX , mais aussi *git*. Si cela pose problème, nous sommes évidemment ouverts à des contributeurs envoyant leur changement par mail ou n'importe quel autre moyen.

Le lien donné ci-dessus contient aussi le README contient de plus amples informations, vous êtes invités à le lire si vous voulez faire avancer ce projet !

Licence Creative Commons

Le contenu de ce document est sous la licence Creative Commons : *Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International (CC BY-NC-SA 4.0)*. Celle-ci vous autorise à l'exploiter pleinement, compte-tenu de trois choses :



1. *Attribution* ; si vous utilisez/modifiez ce document vous devez signaler le(s) nom(s) de(s) auteur(s).
2. *Non Commercial* ; interdiction de tirer un profit commercial de l'œuvre sans autorisation de l'auteur
3. *Share alike* ; partage de l'œuvre, avec obligation de rediffuser selon la même licence ou une licence similaire

Si vous voulez en savoir plus sur cette licence :

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Merci !

Chapitre 1

L'électrodynamique

1.1 Les équations de Maxwell

Soit les densités de charges ρ et de courant \vec{J} . Ces équations s'écrivent **dans le vide**

$$\begin{aligned}\text{rot } \vec{E}(\vec{r}, t) &= -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \\ \text{rot } \vec{B}(\vec{r}, t) &= \mu_0 \vec{J}(\vec{r}, t) + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) &= \frac{\rho(\vec{r}, t)}{\epsilon_0}\end{aligned}\tag{1.1}$$

où $\epsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi} \text{ F/m}$ et $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ H/m}$. Celles-ci sont locales : en un \vec{r} et t donnés. Souvent, à l'endroit où l'on souhaite résoudre ces équations il n'y a pas de ρ et \vec{J} . Dès lors, à l'instant t :

$$\begin{aligned}\text{rot } \vec{E}(\vec{r}, t) &= -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \\ \text{rot } \vec{B}(\vec{r}, t) &= \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) &= 0\end{aligned}\tag{1.2}$$

Ces équations sont bien locales ; les champs satisfont à cette équation, mais il faut bien avoir une source quelque part : il y en a forcément (au moins) une, mais elle n'apparaît pas localement.

△ Il peut exister \vec{J} en un point en l'absence de ρ en ce point, car ρ est la densité **totale** de charge en un point : on somme toutes les charges + et - ce qui donne un résultat généralement nul. C'est typiquement le cas dans un fil conducteur où le courant circule, mais $\rho = 0$. Cependant, \vec{J} et ρ sont liés par l'équation de continuité

$$\nabla \cdot \vec{J}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t}\tag{1.3}$$

Considérons un courant traversé par un courant. Si la quantité sortante est inférieure à la quantité entrante, il y a accumulation : c'est ce que nous montre cette équation.

Tenir compte du milieu est difficile (courant, charges de polarisation, ...). Pour régler ça facilement, on procède à un astuce mathématique en remplaçant μ_0 et ϵ_0 par μ et ϵ possédant les caractéristique du milieu. Il s'agit d'un formalisme plus simple, mais la physique se voit être "cachée".

1.1.1 La statique

Dans ce cas, on obtient deux équations d'électrostatique et deux équations de magnétisme

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E}(\vec{r}) &= 0, & \nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} \\ \text{rot } \vec{B}(\vec{r}) &= \mu_0 \vec{J}(\vec{r}), & \nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) &= 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

Pour résoudre ces équations, il existe deux méthodes

1. Résolution directe
2. Méthode des potentiels

La première méthode n'étant efficace que pour des géométries simples, intéressons-nous à la seconde méthode. La petite difficulté est qu'il faut considérer en plus des équations le potentiel scalaire V et vecteur \vec{A} . Il suffit de voir ceci comme une méthode de résolution des ED sans donner plus d'importance à ces potentiels. Pour résoudre les équations il faut premièrement calculer les potentiels

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{D}} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV', \quad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{D}} \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad (1.5)$$

Et en déduire les champs

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r}), \quad \vec{B}(\vec{r}) = \text{rot } \vec{A}(\vec{r}) \quad (1.6)$$

Physiquement, c'est plus facilement interprétable que les équations de Maxwell car on peut clairement voir le lien de cause à effet. En effet, si le circuit possède une densité de charge ρ et que l'on veut le potentiel scalaire au point r , on peut facilement deviner que celui-ci sera $\propto \rho$ et diminuera avec la distance. Pour avoir le potentiel en tout point, il suffira d'intégrer.

1.1.2 L'électrodynamique

Les équations ne peuvent plus être découplées : "*bon chance*" pour la résolution analytique. La méthode des potentiels reste d'application dans un cas général si on déduit les champs à partir de :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\nabla V(\vec{r}, t) - \frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t}, \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \text{rot } \vec{A}(\vec{r}, t) \quad (1.7)$$

où le "terme correcteur" traduit le couplage entre \vec{E} et \vec{B} . Jusqu'ici nous avons considéré une approche quasi-statique en supposant que V à l'instant t dépendait de la densité de charge à ce même instant, de même pour \vec{A} négligeant ainsi le temps de propagation.

La nouveauté, c'est qu'à partir de maintenant on considérera que s'il y a une cause quelque part, l'effet ne peut se faire ressentir qu'ultérieurement. Ainsi V et \vec{A} ne peuvent dépendre des sources qu'à un moment un peu ultérieur : le temps de propagation. On peut postuler le délai de propagation

$$t_p = \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} \quad (1.8)$$

soit la distance divisée par la vitesse de la lumière. Pour tenir compte de ces délais, il faut réadapter nos définitions

A retenir : *Tout l'électromagnétisme en une box*

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{D}} \frac{\rho(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV', \quad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{D}} \frac{\vec{J}(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad (1.9)$$

On les dénomme les **potentiels retardés**.

Il est utile de savoir lorsque l'approximation quasi-statique peut être utilisée. Soit τ l'échelle de temps caractéristique de variation des sources et L la dimension caractéristique du système étudié. Le retard doit être pris en compte s'il est de l'ordre du temps caractéristique : $L/c \sim \tau$, ou encore

$$L \sim c\tau \quad (1.10)$$

Si la source est sinusoïdale de fréquence f , on peut considérer que τ est la période d'oscillation ($\tau = 1/f$) de sorte à écrire la précédente équation

$$L \sim \frac{c}{f} = \lambda \quad (1.11)$$

En résumé

A retenir : La modélisation quasi-statique n'est plus applicable si les dimensions du système sont comparables ou supérieures à la longueur d'onde

$$L \sim \lambda$$

Pour 1 GHz, la longueur d'onde dans le vide vaut 30cm. On fera ainsi l'approximation quasi-statique lorsque $L/\lambda \ll 1$.

Région	f (Hz)	λ (m)
ELF	< 300	$> 10^6$
ULF	$300 - 3000$	$10^5 - 10^6$
radio	$3 \cdot 10^3 - 3 \cdot 10^9$	$0,1 - 10^5$
micro-ondes	$3 \cdot 10^9 - 3 \cdot 10^{11}$	$10^{-3} - 10^{-1}$
infrarouge	$3 \cdot 10^{11} - 4 \cdot 10^{14}$	$7 \cdot 10^{-7} - 10^{-3}$
lumière visible	$4 \cdot 10^{14} - 7,5 \cdot 10^{14}$	$4 \cdot 10^{-7} - 7 \cdot 10^{-7}$
ultra-violet	$7,5 \cdot 10^{14} - 3 \cdot 10^{16}$	$10^{-8} - 4 \cdot 10^{-7}$
rayons X	$3 \cdot 10^{16} - 3 \cdot 10^{19}$	$10^{-11} - 10^{-8}$
rayons gamma	$> 3 \cdot 10^{19}$	$< 10^{-11}$

Nous nous intéresserons à la zone radio/micro-onde ou $\lambda \approx 30\text{cm}$. Pour un GSM, la taille de ce-dernier n'est pas négligeable par rapport à ce λ de même pour le wifi à 5.5GHz où $\lambda \approx 12\text{cm}$. C'est aussi vrai dans l'infrarouge, mais il existe un formalisme plus simple à hautes fréquences.

Tableau 1.1 – Régions du spectre électromagnétique

"En fait, passer de la quasi-statique à l'électrodynamique revient à déplacer la modélisation physique des charges et courants vers les champs."

1.2 Énergétique

1.2.1 L'énergie électrique

Il existe dans tout l'espace une densité d'énergie électrique, venant de la "séparation" des charges électriques (énergie potentielle pouvant être libérée) :

$$w_e(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \epsilon |\vec{E}(\vec{r}, t)|^2 \quad (1.12)$$

On obtient l'énergie électrique du système de charge par intégration.

1.2.2 L'énergie magnétique

Déplacer des charges pour créer un courant exige de fournir un travail stocké sous la forme "d'énergie cinétique" : on définit une densité d'énergie magnétique :

$$w_m(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\mu} |\vec{B}(\vec{r}, t)|^2 \quad (1.13)$$

Chapitre 2

Les lignes de transmission

2.1 Résultat numérique

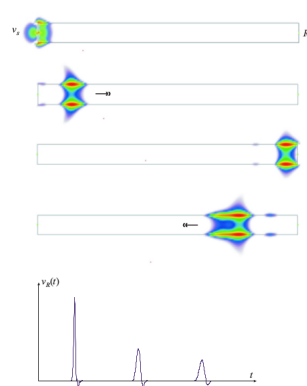


FIGURE 2.1

Considérons un circuit composé uniquement d'une source de tension s et d'une résistance R . Dans l'approximation quasi-statique

$$v_R(t) = v_s(t) \quad (2.1)$$

Sortons de cette approximation et considérons que la tension de la source est gaussienne. Ci-dessous, coloré, la norme de la composante verticale du champ électrique. La où il est non-nul, une ddp se crée : une *onde de tension* se propage. Après R , une partie est *réfléchie* vers la source. Elle peut ainsi faire plusieurs aller-retours. La **ligne de transmission** relie la source à la charge. Ce vocable est utilisé lorsque l'approximation quasi-statique ne s'applique plus. Trois types de lignes différentes sont représentées ci-dessous.

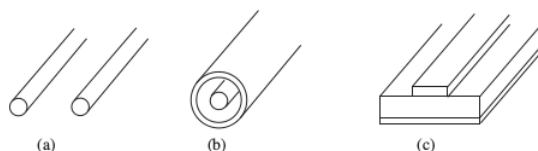


FIGURE 2.2 – (a) Ligne bifilaire (b) ligne coaxiale (c) ligne micro-ruban (microstrip). Notons que l'on désigne le *plan de masse* la ligne du dessous.

2.2 Propagation sur une ligne infinie

La ligne infinie permet de se débarrasser des "aller-retours". Considérons une source "continue" de type créneau. La nouveauté est que l'on considère ici les fils : nous avons vu que la ddp entre ceux-ci dépend de la position et du temps : $v = v(z, t)$.

Considérons une source idéale v_s . Avant enclenchement, la ligne est neutre. Une fois celle-ci allumée, sous l'effet d'un champ électrique, il apparaît des densités de charges induites créant une ddp v_s . Ces charges induites provoquent l'apparition d'un champ électrique un peu plus loin sur la ligne : ce dernier se propage sans être atténué. Le signal n'est donc pas donné par le mouvement des e^- (qui eux sont "plaqués" à l'extérieur de la ligne) mais par le déplacement du champ électrique. La ligne sert ainsi de *guide* pour le champ électrique par apparition de charges induites.

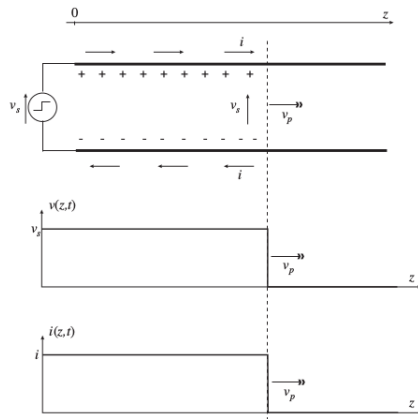


FIGURE 2.3
n'est pas passé et vaut $v_s C_1$ la où il est déjà passé : la ligne se charge. La où le front d'onde est passé, les e^- ont subi un déplacement microscopique formant un champ qui lui même, crée un courant : *onde de courant*. Celle-ci doit satisfaire

$$\frac{\partial i}{\partial z} = -\frac{1}{v_p} \frac{\partial i}{\partial t} \quad (2.5)$$

Avec cette relation et la conservation de la charge $\frac{\partial i}{\partial z} = -\frac{\partial q_l}{\partial t}$ on obtient après intégration (charge initiale et courant initial nuls $\forall z$)

$$i(z, t) = v_p q_l(z, t) \quad (2.6)$$

En utilisant cette relation de (2.2) on remarque que le rapport tension/courant est constant en tout point de la ligne¹

$$\frac{v(z, t)}{i(z, t)} = \frac{1}{v_p C_1} \triangleq Z_C \quad (2.7)$$

où Z_C est l'**impédance caractéristique** de la ligne : vraie pour la source en $z = 0$ et équivalente pour la ligne infinie à une résistance de cette valeur : la ligne absorbe en permanence un courant v_s / Z_C .

2.3 Les équations des lignes

Il faut procéder à une décomposition infinitésimale car pas d'effet de retard. Considérons un tel tronçon. On peut voir un tel tronçon comme une capacité valant $C_1 dz$. Comme un courant génère un \vec{B} , le tronçon captera un flux : apparition d'une inductance par unité de longueur

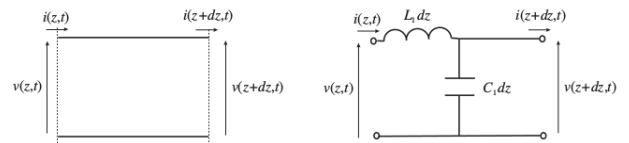


FIGURE 2.4

$$L_1 = \frac{\phi_1}{i} \quad (2.8)$$

Comme le tronçon est infinitésimal, la théorie des circuit s'applique. Le circuit équivalent peut s'écrire mathématiquement

$$\begin{aligned} v(z + dz, t) &= v(z, t) - L_1 dz \frac{\partial i(z, t)}{\partial t} \\ i(z + dz, t) &= i(z, t) - C_1 dz \frac{\partial v(z, t)}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.9)$$

1. Pour une onde de tension/courant donnée.

où encore

A retenir : équations des télégraphistes.

$$\begin{aligned}\frac{\partial v(z,t)}{\partial z} &= -L_1 \frac{\partial i(z,t)}{\partial t} \\ \frac{\partial i(z,t)}{\partial z} &= -C_1 \frac{\partial v(z,t)}{\partial t}\end{aligned}\quad (2.10)$$

Ces équations montre que le courant correspond au courant injecté, diminué du courant de fuite dans les capacités. En découplant le système (remplace l'une dans l'autre après en avoir dérivée une) en augmentant l'ordre, on retrouve les équations d'ondes

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2} &= L_1 C_1 \frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial z^2} &= L_1 C_1 \frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial t^2}\end{aligned}\quad (2.11)$$

Les tensions et courants se propagent donc à la vitesse

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} \quad (2.12)$$

On peut écrire, à partir de la définition (2.7) de Z_C

A retenir :

$$Z_C = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \quad (2.13)$$

La solution de ces équations est bien connues : il s'agit d'ondes progressives (droite) ou régressives (gauche) se déplaçant à vitesse constante. Le premier type de solution à la forme

$$v_+(z,t) = V_+ f(t - z/v_p) \quad V_+ \in \mathbb{R} \quad (2.14)$$

où f est une fonction quelconque. Cette solution satisfaisant (2.4) correspond à une tension se propageant le long de la ligne sans atténuation ni déformation. Pour trouver le courant $i_+(z,t)$ associé, on utilise

$$\begin{cases} (2.4) \\ (2.10) \end{cases} \implies \frac{\partial i_+(z,t)}{\partial t} = \frac{1}{v_p L_1} \frac{\partial v_+(z,t)}{\partial t} \quad (2.15)$$

Après intégration (C.I. nulles)

$$i_+(z,t) = \frac{v_+(z,t)}{Z_c} \quad (2.16)$$

Le second type de solution (régressive) est de la forme

$$v_-(z,t) = V_- g(t + z/v_p) \quad V_- \in \mathbb{R} \quad (2.17)$$

On peut déduire le courant $i_-(z,t)$ (conventionnellement choisi opposé à $i(z,t)$, le courant étant défini positif de gauche à droite sur la ligne supérieur) associé à cette onde par résolution de l'ED suivante (similairement au cas de l'onde progressive)

$$\frac{\partial i_-(z,t)}{\partial t} = -\frac{\partial i(z,t)}{\partial t} = \frac{1}{v_p L_1} \frac{\partial v_-(z,t)}{\partial t} \quad (2.18)$$

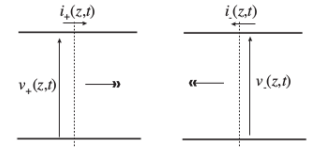


FIGURE 2.5 – Onde progressive (gauche) et régressive (droite)

Après intégration

$$i_-(z, t) = \frac{v_-(z, t)}{Z_c} \quad (2.19)$$

En fonction de l'écho, nous aurons l'une ou l'autre solution. La tension en un point est obtenue en sommant toutes les tensions de toutes les ondes progressives et régressive. Par contre, pour le courant, il faut effectuer la différence par convention. A cause de cette différence, la tension divisée par le courant ne vaut pas Z_C globalement (mais bien en un point)

2.4 Réflexions

2.4.1 Coefficients de réflexion

Soit une ligne de transmission sans pertes, uniforme, guidant une onde progressive, de longueur finie L . Si $R = R_C$, la condition sur la tension et le courant à ses bornes s'écrit

$$\frac{v(L, t)}{i(L, t)} = Z_c \quad (2.20)$$

Soit la relation précédemment trouvée : l'onde n'est pas perturbée par la présence de la résistance et pas de formation d'onde réfléchie (entièrement absorbé par la résistance²) : la résistance de charge est **adaptée**, c'est le cas optimal (rien n'est renvoyé à la source. Si $R \neq Z_c$

$$\frac{v(L, t)}{i(L, t)} = R \quad (2.21)$$

Ce qui n'est plus compatible avec (2.7) : la quantité de charges induites associée à l'onde ne correspond plus à la valeur du courant exigée par R : perturbation de l'onde et apparition d'une onde réfléchie :

$$\begin{aligned} v(L, t) &= v_+(L, t) + v_-(L, t) \\ i(L, t) &= i_+(L, t) - i_-(L, t) = \frac{v_+(L, t)}{Z_c} - \frac{v_-(L, t)}{Z_c} \end{aligned} \quad (2.22)$$

On définit alors Γ_L , la fraction de l'onde incidente réfléchie : le **coefficient de réflexion** à la charge

$$\Gamma_L = \frac{v_-(L, t)}{v_+(L, t)} = \frac{i_-(L, t)}{i_+(L, t)} \quad (2.23)$$

Avec (2.21) on trouve

A retenir :

$$\Gamma_L = \frac{R - Z_c}{R + Z_c} \quad (2.24)$$

Lorsque la ligne est court-court-court-circuitée $R = 0 \rightarrow \Gamma_L = -1$: tension nulle en bout de ligne. Lors que la ligne est ouverte $R = \infty \rightarrow \Gamma = 1$ (courant nul en fin de ligne). L'onde revient à la source et le même phénomène se produit (remplacer R par R_S) : nouvelle onde progressive qui se propage !

2.4.2 Application

Voir page 21-23 : rien de compliqué, ce ne sont que des math. Quelques commentaires sur l'équation (2.30) du syllabus. Le premier terme correspond à un aller, le second au retour, le troisième à un aller-retour, ... En mettant Γ_L en évidence, on fait apparaître une série géométrique. Ces calculs décrivent ainsi un état transitoire : après allumage de la source, on observe plusieurs échos jusqu'à une stabilisation vers le résultat quasi-statique.

2. "Les charges induites associées à l'onde, "s'écoulent" dans la résistance pour y former un courant"

2.5 Les lignes en régime sinusoïdal permanent

2.5.1 Tension et courant sur la ligne

Considérons cette fois-ci une source sinusoïdale : légèrement plus compliqué, car tout variera de façon sinusoïdale également (en supposant que la charge en fin de ligne est linéaire).

$$v_s(t) = V_S \cos(\omega t + \phi_s) = \operatorname{Re} \left(\underline{V}_S e^{j\omega t} \right) \quad (2.25)$$

où V_s est l'amplitude de la tension, ϕ_s sa phase, ω sa pulsation et $\underline{V}_S = V_S e^{j\phi_s}$, un phaseur. On peut faire de même pour les tensions et courants

$$\begin{aligned} v(z, t) &= \operatorname{Re} \left(\underline{V}(z) e^{j\omega t} \right) \\ i(z, t) &= \operatorname{Re} \left(\underline{I}(z) e^{j\omega t} \right) \end{aligned} \quad (2.26)$$

△ Ces phaseurs dépendent ici de z ! On peut ré-écrire les équations des télégraphistes

A retenir :

$$\begin{aligned} \frac{d\underline{V}(z)}{dz} &= -j\omega L_1 \underline{I}(z) \\ \frac{d\underline{I}(z)}{dz} &= -j\omega C_1 \underline{V}(z) \end{aligned} \quad (2.27)$$

On peut, comme précédemment, découpler le système

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \underline{V}(z)}{dz^2} &= -\omega^2 L_1 C_1 \underline{V}(z) = -\beta^2 \underline{V}(z) \\ \frac{d^2 \underline{I}(z)}{dz^2} &= -\omega^2 L_1 C_1 \underline{I}(z) = -\beta^2 \underline{I}(z) \end{aligned} \quad (2.28)$$

où $\beta = \omega \sqrt{L_1 C_1}$. La résolution de ces équations donne

$$\begin{aligned} \underline{V}_+(z) &= V_+ e^{-j\beta z}, & \underline{V}_-(z) &= V_- e^{j\beta z} \\ \underline{I}_+(z) &= I_+ e^{-j\beta z}, & \underline{I}_-(z) &= I_- e^{j\beta z} \end{aligned} \quad (2.29)$$

Nous avons travaillé en phaseur : il s'agit de la situation en régime décrite par la superposition d'une seule onde progressive et une seule onde régressive.

$$\begin{aligned} \underline{V}(z) &= V_+ e^{-j\beta z} + V_- e^{j\beta z} \\ \underline{I}(z) &= I_+ e^{-j\beta z} - I_- e^{j\beta z} \end{aligned} \quad (2.30)$$

En utilisant les équations des télégraphistes, on obtient

$$\frac{V_+}{I_+} = \frac{V_-}{I_-} = Z_c \quad (2.31)$$

Notons que le terme d'exponentielle imaginaire correspond aux changements de phases dus au délai de propagation. Pour voir une phase constante (argument constant), il faut se déplacer à vitesse

$$\frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = v_p \quad (2.32)$$

soit la **vitesse de phase** (qui vaut bien la vitesse de propagation sur la ligne). La longueur d'onde, elle, vaut $\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$.

2.5.2 Application

Avec Z_C , on peut écrire la tension et le courant le long de la ligne

$$\begin{aligned}\underline{V}(z) &= V_+ e^{-j\beta z} + V_- e^{j\beta z} \\ \underline{I}(z) &= \frac{V_+}{Z_c} e^{-j\beta z} - \frac{V_-}{Z_c} e^{j\beta z}\end{aligned}\quad (2.33)$$

En $Z = L$

$$\frac{\underline{V}(L)}{\underline{I}(L)} = Z_L \quad (2.34)$$

En définissant le coefficient de réflexion à la charge

$$\Gamma_L = \frac{\underline{V}_-(L)}{\underline{V}_+(L)} = \frac{V_-}{V_+} e^{2j\beta L} \quad (2.35)$$

On peut alors écrire la condition en bout de ligne

$$Z_L = Z_c \frac{1 + \Gamma_L}{1 - \Gamma_L} \Leftrightarrow \Gamma_L = \frac{Z_L - Z_c}{Z_L + Z_c} \quad (2.36)$$

Les C.I permettent de déterminer V_+ et V_- . Le calcul ne sera pas détaillé ici. Discutons néanmoins l'expression obtenue

$$V_+ = \frac{Z_c}{Z_S + Z_c} \left(1 + \Gamma_L \Gamma_S e^{-2j\beta L} + \Gamma_L^2 \Gamma_S^2 e^{-4j\beta L} + \dots \right) \underline{V}_S \quad (2.37)$$

La tension en situation de régime est la superposition de la tension appliquée par la source et de l'ensemble des échos (chaque exp. correspond au délai supplémentaire de chaque écho). Cette expression est intéressante car celle-ci dépend de L . Plaçons-nous en $L = \lambda/4$: la ligne se comporte comme un circuit ouvert. En augmentant L , la partie imaginaire devient négative : elle se comporte comme une capacité. On repasse ensuite par $Z = 0$, puis on retrouve un comportement inductif. Il s'agit de la courbe pleine ci-contre.

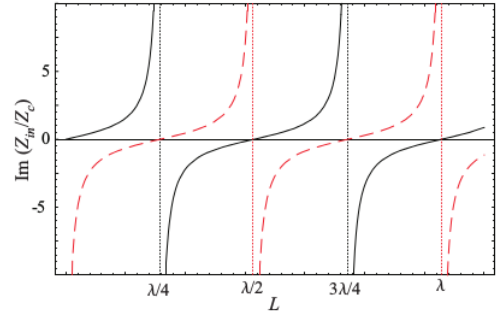


FIGURE 2.6

Analysons maintenant la courbe en pointillée correspondant à une ligne *ouverte* (!). Si $L = \lambda/4$, le générateur "verra" un circuit fermé ! On voit dès lors qu'à partir d'une ligne, il est possible de réaliser ce que l'on souhaite rien qu'en jouant sur la longueur.

2.5.3 Impédance d'entrée

L'impédance d'entrée de la ligne est celle vue par la source

$$Z_{in} = \frac{\underline{V}(0)}{\underline{I}(0)} \quad (2.38)$$

Avec (2.33) et (2.35) :

$$\begin{aligned}\underline{V}(z) &= V_+ \left(e^{-j\beta z} + \Gamma_L e^{-2j\beta L} e^{j\beta z} \right) \\ \underline{V}(z) &= \frac{V_+}{Z_c} \left(e^{-j\beta z} + \Gamma_L e^{-2j\beta L} e^{j\beta z} \right)\end{aligned}\quad (2.39)$$

Par définition de Z_{in}

A retenir :

$$Z_{in} = Z_c \frac{1 + \Gamma_L e^{-2j\beta L}}{1 - \Gamma_L e^{-2j\beta L}} \quad (2.40)$$

L'impédance d'entrée va non seulement dépendre de l'impédance de charge connectée, mais également de la longueur de la ligne (un déphasage pouvant causer des interférences est à prendre en compte).

2.5.4 Ondes stationnaires

Nous avons vu que pour bien bosser à HF, il fallait que les éléments soient adaptées pour le traitement des signaux. Or, les composants présentent toujours des tolérances : comment caractériser la désadaptation ? Un outil est le taux d'ondes stationnaires. La tension sur la ligne est la somme d'une onde progressive et régressive (où l'on a utilisé la définition de V_- de la sous-section 2.5.1) :

$$\begin{aligned} \underline{V}(z) &= V_+(e^{-j\beta z} + \Gamma_L e^{-2j\beta L} e^{j\beta z}) \\ &= V_+ e^{-j\beta z} (1 + \Gamma_L e^{-2j\beta(L-z)}) \end{aligned} \quad (2.41)$$

Si la charge est adaptée $\Gamma_L = 0 \rightarrow \underline{V}(z) = V_+ e^{-j\beta z}$, soit une seule onde progressive d'amplitude constante $|\underline{V}(z)| = |V_+|$: en chaque point de la ligne l'oscillation est la même. On remarque bien l'onde progressive dans le temporel

$$v(z, t) = V_+ \cos(\omega t - \beta z) \quad (2.42)$$

Si la ligne est ouverte $\Gamma_L = 1$, on peut faire apparaître un cosinus après mise en évidence :

$$\underline{V}(z) = V_+ e^{-j\beta z} (1 + e^{-2j\beta(L-z)}) = 2V_+ e^{-j\beta L} \cos(\beta(L-z)) \Rightarrow |\underline{V}(z)| = |2V_+ \cos(\beta(L-z))| \quad (2.43)$$

Ici l'amplitude dépend de la position. En temporel (si $V_+ \in \mathbb{R}$)

$$v(z, t) = 2V_+ \cos(\beta(L-z)) \cos(\omega t - \beta L) \quad (2.44)$$

Il n'y a plus de terme de propagation ($\omega t \pm \beta z$) : ceci est une onde stationnaire³. Si on repère des zéros parfait ou des "doublement d'amplitude" parfait c'est que rien n'est absorbé, le récepteur ne fonctionne donc pas.

△ Si la ligne est ouverte mais de longueur $L = \lambda/4 \rightarrow \beta L = \pi/2$ la tension de ligne est nulle et cette ligne apparaît pour la source comme un court-circuit :

$$\underline{I}(z) = \frac{V_+}{Z_c} e^{j\beta z} (1 - e^{-2j\beta(L-z)}) = \frac{2jV_+}{Z_c} e^{-j\beta L} \sin(\beta(L-z)) \quad (2.45)$$

Le courant est bien nul en bout de ligne, mais pas ailleurs : le courant est du à des oscillations locales et non globales des e^{\pm} , un courant local peut donc exister. S'il y a du courant, il y a production d'onde EM, c'est le principe de fonctionnement des antennes : un fil suffit car le courant passe même si le fil est ouvert.

Étudions maintenant le cas général (tension le long de la ligne en phaseur) :

$$\underline{V}(z) = V_+ e^{-j\beta z} (1 + \Gamma_L e^{-2j\beta(L-z)}) \rightarrow |\underline{V}(z)| = |V_+| |1 + \Gamma_L e^{-2j\beta(L-z)}| \quad (2.46)$$

3. On peut s'en rendre compte en remarquant que les zéros ne dépendent pas de t .

Le module de l'imaginaire valant l'unité, l'amplitude varie entre :

$$|\underline{V}(z)|_{\max} = |V_+|(1 + |\Gamma_L|), \quad |\underline{V}(z)|_{\min} = |V_+|(1 - |\Gamma_L|) \quad (2.47)$$

Ces deux valeurs ne sont égales que si la charge est adaptée. La désadaptation est alors caractérisée par

A retenir : VSWR

$$\frac{|\underline{V}(z)|_{\max}}{|\underline{V}(z)|_{\min}} = \frac{(1 + |\Gamma_L|)}{(1 - |\Gamma_L|)} \quad (2.48)$$

Soit le **taux d'onde stationnaire en tension**. Plus il est proche de l'unité, mieux c'est. En pratique, on espère $VSWR \leq 2$.

2.5.5 Puissance transmise à la charge

La puissance moyenne dissipée dans une impédance vaut

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T v(t)i(t) dt \quad \leftrightarrow \quad P = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\underline{V}\underline{I}^*) \quad (2.49)$$

La puissance de l'onde progressive et régressive vaudront (on remplace, distribue,...)

$$\begin{aligned} P_+ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\underline{V}_+ \underline{I}_+^*) = \frac{|V_+|^2}{2Z_c} \\ P_- &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\underline{V}_- \underline{I}_-^*) = \frac{|V_-|^2}{2Z_c} = |\Gamma_L|^2 \frac{|V_+|^2}{2Z_c} \end{aligned} \quad (2.50)$$

où l'on a remplacé V_- par son expression utilisant le coefficient de réflexion. Calculons la puissance consommée

$$\begin{aligned} P_L &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\underline{V}(L) \underline{I}^*(L)] \\ &= \operatorname{Re} \left[\frac{|V_+|^2}{Z_c} (e^{-j\beta L} + \Gamma_L e^{-j\beta L}) (e^{j\beta L} - \Gamma_L^* e^{j\beta L}) \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[\frac{|V_+|^2}{Z_c} (1 - |\Gamma_L|^2) + \frac{|V_+|^2}{Z_c} (\Gamma_L - \Gamma_L^*) \right] \end{aligned} \quad (2.51)$$

Comme $\Gamma_L - \Gamma_L^*$ est purement imaginaire :

$$P_L = \frac{1}{2} \frac{|V_+|^2}{Z_c} (1 - |\Gamma_L|^2) = P_+ - P_- \quad (2.52)$$

Ce que l'utilisateur "utilise" est bien la différence entre ce qui est injecté et réfléchi. Conventionnellement on fixe $\Gamma_L = 1/3$ pour avoir une puissance transmise de 90%.

2.5.6 Les pertes

IRL, il y a toujours des pertes (joules dans les fils et dans les diélectriques (ils chauffent, effet four à micro-onde)). Modélisons les pertes joules par une résistance linéaire R_1 et les pertes diélectriques par une conductance linéique G_1 en parallèle. Les équations des télégraphistes s'écrivent

$$\begin{aligned} \frac{d\underline{V}(z)}{dz} &= -(R_1 + j\omega L_1) \underline{I}(z) \\ \frac{d\underline{I}(z)}{dz} &= -(G_1 + j\omega C_1) \underline{V}(z) \end{aligned} \quad (2.53)$$

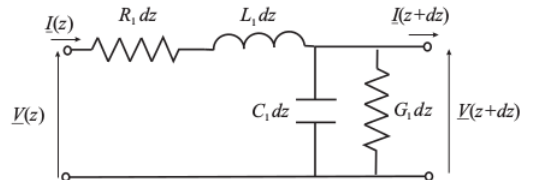


FIGURE 2.7

En découplant

$$\begin{aligned}\frac{d^2 \underline{V}(z)}{dz^2} &= (R_1 + j\omega L_1)(G_1 + j\omega C_1) \underline{V}(z) = \gamma^2 \underline{V}(z) \\ \frac{d^2 \underline{I}(z)}{dz^2} &= (R_1 + j\omega L_1)(G_1 + j\omega C_1) \underline{I}(z) = \gamma^2 \underline{I}(z)\end{aligned}\quad (2.54)$$

où $\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R_1 + j\omega L_1)(G_1 + j\omega C_1)}$, la constante de propagation complexe. Les solutions de la première équations sont

$$\begin{aligned}\underline{V}_+(z) &= V_+ e^{-\gamma z} = V_+ e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} \rightarrow v_+(z, t) = V_+ e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) \\ \underline{V}_-(z) &= V_- e^{\gamma z} = V_- e^{\alpha z} e^{j\beta z} \rightarrow v_-(z, t) = V_- e^{\alpha z} \cos(\omega t + \beta z)\end{aligned}\quad (2.55)$$

Les pertes causent une atténuation exponentielle du signal. Pour l'onde régressive, on pourrait croire que l'exponentielle positive n'est pas physique mais il n'en n'est rien : les z décroissent. On retrouve des solution semblables pour le courant

$$\begin{aligned}\underline{I}_+(z) &= I_+ e^{-\gamma z} \\ \underline{I}_-(z) &= I_- e^{\gamma z}\end{aligned}\quad (2.56)$$

Selon les équations des télégraphistes $\frac{V_+}{I_+} = \frac{V_-}{I_-} = Z_c$, désormais $Z_c \in \mathbb{C}$:

$$Z_c = \sqrt{\frac{R_1 + j\omega L_1}{G_1 + j\omega C_1}} \quad (2.57)$$

La puissance de l'onde progressive vaut, à l'aide de la précédente sous-section :

$$P_+(z) = \text{Re} \left(\frac{|V_+|^2}{2Z_c^*} \right) e^{-2\alpha z} \quad (2.58)$$

où α est bien la partie réelle de la constante de propagation : cette constante est à connaître. Hélas, elle n'est jamais directement donnée (trop facile). On peut néanmoins la retrouver avec

$$\alpha_d [\text{dB}] = 10 \log \frac{\text{Re} \left(\frac{|V_+|^2}{2Z_c^*} \right) e^{-2\alpha z}}{\text{Re} \left(\frac{|V_+|^2}{2Z_c^*} \right) e^{-2\alpha(z+d)}} = 20 \log e^{\alpha d} = (20 \log e) \alpha d = 8,686 \alpha d \quad (2.59)$$

où d est une distance.

2.6 Scattering parameters

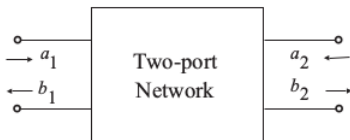


FIGURE 2.8

Considérons un quadripôle. Nous allons essayer de trouver une matrice de transformation entre l'entrée et la sortie, non plus en terme de tension mais en terme d'onde progressive et régressive. Il s'agit d'une théorie complexe mais assez simple dans le cas où $Z_c \in \mathbb{R}$.

Afin d'éliminer les Z_c , définissons les paramètres (d'entrée (a) et de sortie (b) des entrées 1 et 2) :

$$\begin{aligned}a_1 &= \frac{V_{1+}}{\sqrt{Z_c}}, & a_2 &= \frac{V_{2+}}{\sqrt{Z_c}} \\ b_1 &= \frac{V_{1-}}{\sqrt{Z_c}}, & b_2 &= \frac{V_{2-}}{\sqrt{Z_c}}\end{aligned}\quad (2.60)$$

La **matrice de répartition** (*scattering matrix*) permet de lier la sortie à l'entrée

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad (2.61)$$

La mesure des S -paramètres ne nécessite que la connaissance de l'impédance des ports. Par exemple, pour S_{11} :

$$S_{11} = \left. \frac{b_1}{a_1} \right|_{a_2=0} \quad (2.62)$$

2.7 The Smith Chart

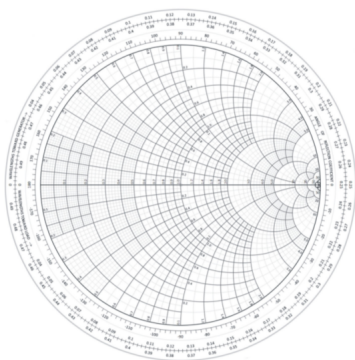


FIGURE 2.9

L'abaque de Smith est historiquement important : il était utilisé avant l'arrivée de Matlab et ses sbrabs. Nous avons vu que le coefficient de réflexion en **bout de ligne** était donné par

$$\Gamma(L) = \frac{Z_L - Z_c}{Z_L + Z_c} \quad (2.63)$$

Connaissant les phaseurs des ondes progressives et régressives, on peut obtenir une expression donnant le coefficient de réflexion en chaque point

$$\Gamma(z) = \frac{V_-(z)}{V_+(z)} = \Gamma(L)e^{2j\beta(z-L)} \quad (2.64)$$

où $\beta = \omega\sqrt{L_1C_1}$. On peut encore écrire cette expression avec celle de l'impédance d'entrée

$$\Gamma(z) = \frac{Z_{in}(z) - Z_c}{Z_{in}(z) + Z_c} \quad (2.65)$$

où $Z_{in}(z) = Z_c \frac{1 + \Gamma(z)}{1 - \Gamma(z)}$. On peut définir une impédance d'entrée normalisée $z_{in} = r + jx = Z_{in}(z)/Z_c$. En écrivant

$$\Gamma(z) = \Gamma_r + j\Gamma_i \quad (2.66)$$

Avec cette décomposition et celle de z_{in} , on peut écrire

$$r + jx = \frac{1 + \Gamma_r + j\Gamma_i}{1 - \Gamma_r - j\Gamma_i} = \frac{1 - \Gamma_r^2 - \Gamma_i^2 + 2j\Gamma_i}{(1 - \Gamma_r)^2 + \Gamma_i^2} \quad (2.67)$$

En identifiant r et x , on peut obtenir deux équations de cercles après réarrangement :

$$\begin{aligned} \left(\Gamma_r - \frac{r}{r+1} \right)^2 + \Gamma_i^2 &= \left(\frac{1}{1+r} \right)^2 \\ (\Gamma_r - 1)^2 + \left(\Gamma_i - \frac{1}{x} \right)^2 &= \left(\frac{1}{x} \right)^2 \end{aligned} \quad (2.68)$$

On obtient ainsi un ensemble de cercles r et x constant. En les superposant et en choisissant un point x et r , il est possible de trouver Γ_i et Γ_r . C'est un bazooka pour quelque chose d'assez simple, mais il faut au moins en avoir entendu parlé une fois.

2.8 Impedance matching

Flemme :D

Chapitre 3

Les états variables

3.1 Les champs en régime sinusoïdal permanent

3.1.1 Les équations de Maxwell

Si le milieu est linéaire et que la fréquence est fixée il n'y aura pas de modification de la fréquence et tous les champs oscilleront à celle-ci. En un point \vec{r} , le champ électrique polarisé en x varie selon

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_x(\vec{r}, \omega) \cos(\omega t + \phi_x(\vec{r}, \omega)) \vec{1}_x \quad (3.1)$$

On peut écrire ça sous forme de phaseur. Seule différence : le phaseur est un **vecteur complexe** : $\underline{\vec{E}}(\vec{r}, \omega) = \underline{E_x}(\vec{r}, \omega) \vec{1}_x$. Bien sûr, il faudrait normalement considérer les trois composantes :

$$\underline{\vec{E}} = \underline{E_x}(\vec{r}, \omega) \vec{1}_x + \underline{E_y}(\vec{r}, \omega) \vec{1}_y + \underline{E_z}(\vec{r}, \omega) \vec{1}_z \quad (3.2)$$

On peut également définir les phaseurs suivant : $\underline{\vec{B}}(\vec{r}, \omega)$, $\underline{\vec{J}}(\vec{r}, \omega)$ et $\underline{\rho}(\vec{r}, \omega)$. L'avantage est que les équations de Maxwell deviennent algébriques

$$\begin{aligned} \text{rot } \underline{\vec{E}}(\vec{r}, \omega) &= -j\omega \underline{\vec{B}}(\vec{r}, \omega) \\ \text{rot } \underline{\vec{B}}(\vec{r}, \omega) &= \mu \underline{\vec{J}}(\vec{r}, \omega) + j\omega \epsilon \mu \underline{\vec{E}}(\vec{r}, \omega) \\ \nabla \cdot \underline{\vec{B}}(\vec{r}, \omega) &= 0 \\ \nabla \cdot \underline{\vec{E}}(\vec{r}, \omega) &= \frac{\underline{\rho}(\vec{r}, \omega)}{\epsilon} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Ce système couple le champ électrique et magnétique. Exprimons sous forme intégrale la première équation (intégration sur la surface)

$$\int_S \text{rot } \underline{\vec{E}}(\vec{r}, \omega) \cdot d\vec{S} = -j\omega \int_S \underline{\vec{B}}(\vec{r}, \omega) \cdot d\vec{S} \quad (3.4)$$

Par le théorème de Stokes :

A retenir : Loi de Faraday en phaseur

$$\oint_C \underline{\vec{E}}(\vec{r}, \omega) \cdot d\vec{l} = -j\omega \int_S \underline{\vec{B}}(\vec{r}, \omega) \cdot d\vec{S} \quad (3.5)$$

A toute variation temporelle du champ magnétique est associé un champ électrique.

De même, pour la seconde équation

$$\int_S \text{rot } \underline{\vec{B}}(\vec{r}, \omega) \cdot d\vec{S} = \mu \underbrace{\int_S \underline{\vec{J}}(\vec{r}, \omega) \cdot d\vec{S}}_{=\underline{I}} + j\omega \epsilon \mu \int_S \underline{\vec{E}}(\vec{r}, \omega) \cdot d\vec{S} \quad (3.6)$$

Par le théorème de Stokes

A retenir : Loi d'Ampère en phaseur

$$\oint_C \vec{B}(\vec{r}, \omega) \cdot d\vec{S} = \mu I + j\omega\epsilon\mu \int_S \vec{E}(\vec{r}, \omega) \cdot d\vec{S} \quad (3.7)$$

A tout courant ou à toute variation temporelle du champ électrique, est associé un champ magnétique.

3.1.2 Résolution des équations de Maxwell

A part si la géométrie le permet, il est plus simple de passer par la méthode des potentiels retardés. Montrons que si $\vec{J}(\vec{r}, \omega)$ est le phaseur associé à la densité de courant, alors

$$\vec{J} e^{-j\beta|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad (3.8)$$

où $\beta = \omega/c$ est le nombre d'onde, est le phaseur associé à la densité de courant **retardée**. En effet

$$\begin{aligned} \text{Re} \left(\vec{J}(\vec{r}, \omega) e^{-j\beta|\vec{r}-\vec{r}'|} e^{j\omega t} \right) &= \text{Re} \left(\vec{J}(\vec{r}, \omega) e^{j\omega t - j\frac{\omega}{c}|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) \\ &= \text{Re} \left(\vec{J}(\vec{r}, \omega) e^{j\omega \left(t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c} \right)} \right) \\ &= \vec{J} \left(\vec{r}, t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c} \right) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Ceci montre que l'exponentielle implique bien ce retard : chaque $e^{j\beta\clubsuit}$ modélise le délai de propagation jusqu'à ce \clubsuit . En suivant un même raisonnement pour $\underline{\rho}$, on peut écrire l'expression phaseurs des potentiels retardés

A retenir :

$$\underline{V}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{D}} \underline{\rho}(\vec{r}') \frac{e^{-j\beta|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV', \quad \underline{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{D}} \vec{J}(\vec{r}') \frac{e^{-j\beta|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV' \quad (3.10)$$

En phaseurs, on obtient (à une constante près) les potentiels en intégrant les sources multipliées par le **propagateur** (ou *fonction de Green*)

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{e^{-j\beta|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad (3.11)$$

Si on possède la densité en \vec{r}' et qu'on la désire en \vec{r} , il suffira juste de la multiplier par le propagateur qui va décrire comment l'effet se manifestera jusque là (ce n'est pas instantané. Remarquons que en statique ceci vaudrait 1 et on retrouverait la fonction de Green de l'électrostatique). Le dénominateur sera justifié plus loin. En bref

$$e^{-j\beta|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad (3.12)$$

modélise le délai de propagation entre \vec{r}' et \vec{r} .

EXEMPLE : Considérons une ligne de courant. Avec le précédent chapitre, on peut calculer le courant en tout point en en déduire \underline{J} . On peut faire de même pour $\underline{\rho}$. Par intégration avec le propagateur, on peut calculer \underline{V} et \underline{A} en tout point et donc \underline{E} et \underline{B} .

3.1.3 La jauge de Lorentz

Si l'on effectue une étude des dimensions de notre problème, nous pouvons nous rendre compte que nous avons un degré de liberté de moins que ce nous pouvions penser : c'est la qu'intervient la théorie des jagues, où le cas de l'électromagnétisme est le prototype le plus simple de cette théorie¹.

A retenir : Jauge de Lorentz

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}, \omega) = -j\omega\mu_0\epsilon_0 V(\vec{r}, \omega) \quad (3.13)$$

En calculant cette jauge, on peut tout déduire : elle permet de se passer de l'équation du potentiel scalaire (on peut obtenir V à partir de \vec{A} et qui plus est de façon plus simple). La démonstration n'est pas à connaître.

3.2 Application : l'effet pelliculaire

A haute fréquence \vec{J} n'est plus constante au sein d'une section d'une fil. Comme nous sommes ici dans un cas *très académique*, le plus simple est de passer par les équations de Maxwell et d'appliquer $\vec{J} = \sigma \vec{E}$:

$$\text{rot } \vec{B}(\vec{r}, \omega) = \mu\sigma \vec{E}(\vec{r}, \omega) + j\omega\mu \vec{E}(\vec{r}, \omega) \quad (3.14)$$

Or $\epsilon \ll \sigma$ (En effet : $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \approx \frac{10^{18}}{f}$) : le terme de conduction est bien supérieur au terme de courant de déplacement que l'on négligera ici. Il faut alors résoudre

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{E}(\vec{r}, \omega) \cdot d\vec{l} &= -j\omega \int_S \vec{B}(\vec{r}, \omega) \cdot d\vec{S} \\ \oint_C \vec{B}(\vec{r}, \omega) \cdot d\vec{l} &= \mu\sigma \int_S \vec{E}(\vec{r}, \omega) \cdot d\vec{S} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Pour montrer que les deux champs sont liés, nous allons ici faire un raisonnement itératif. Soit un courant selon z et E_0 la valeur du champ électrique au centre de la section. A très basse fréquences

$$\vec{E} = E_0 \vec{1}_z \quad (3.16)$$

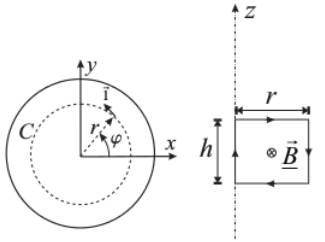


FIGURE 3.1

Ce champ est forcément associé à un champ d'induction, disons $\vec{B} = B_0 \vec{1}_\varphi$. En considérant un contour ampérien circulaire

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{B}_0 \cdot d\vec{l} &= \oint_C B_0 \vec{1}_\varphi \cdot \vec{1}_\varphi dl = 2\pi r B_0 \\ \mu\sigma \int_S \vec{E}_0 \vec{1}_z \cdot d\vec{S} &= \mu\sigma \int_S E_0 \vec{1}_z \cdot \vec{1}_z dS = \mu\sigma \pi r^2 E_0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

Dès lors $\vec{B} = B_0 \vec{1}_\varphi = \frac{\mu\sigma}{2} r E_0 \vec{1}_\varphi$. Or le champ d'induction magnétique varie, Faraday doit être vérifiée. Or, en remplaçant cette expression dans celle de la loi de Faraday cela ne fonctionne pas. Le champ électrique postulé n'est pas correct, il faut lui apporter un terme correcteur lorsqu'on s'éloigne du centre (et donc nul en $r = 0$) :

$$\vec{E} = (E_0 + E_1(r)) \vec{1}_z \quad (3.18)$$

Appliquons la loi de Faraday en choisissant un contour rectangulaire :

$$\oint_C (E_0 + E_1(r)) \vec{1}_z \cdot d\vec{l} = -j\omega \int_S \vec{B}(r) \cdot d\vec{S} \quad (3.19)$$

1. Merci à Philippe Grégoire pour l'explication complémentaire.

où la contribution du terme constant est nul $\oint_C E_0 \vec{1}_z = 0$. Il reste pour le membre de gauche

$$\oint_C E_1(r) \vec{1}_z \cdot d\vec{l} = \int_0^h \underbrace{E_1(0)}_{=0} \vec{1}_z \cdot \vec{1}_z da + \int_0^h E_1(r) \vec{1}_z \cdot (-\vec{1}_z) dz = -h E_1(t) \quad (3.20)$$

Pour le membre de droite, nous avons

$$-j\omega \int_S \vec{B}(\vec{r}, \omega) \cdot d\vec{S} = -j\omega \int_0^h \int_0^r B_0(r) \vec{1}_\varphi \cdot \vec{1}_\varphi dr dz = -j\omega h \frac{\mu\sigma}{2} E_0 \frac{r^2}{2} \quad (3.21)$$

On trouve un terme correctif dépendant de la fréquence

$$E_1 = j\omega \frac{\mu\sigma}{4} r^2 E_0 \quad (3.22)$$

Rebelote, il faut recalculer B comme $E = E_0$ a été modifié : $\vec{B} = (B_0(r) + B_1(r)) \vec{1}_\varphi$. De façon similaire, on trouve

$$B_1 = j\omega \frac{(\mu\sigma)^2}{16} r^3 E_0 \quad (3.23)$$

Rerebelote, il faut calculer un terme $E_2(r)$ correctif dans l'expression de \vec{E} , ... Après un certains nombre d'itération, on trouve

$$\begin{aligned} \vec{E} &= E_0 \left(1 + j \frac{\omega\mu\sigma}{4} r^2 - \frac{(\omega\mu\sigma)^2}{64} r^4 + \dots \right) \vec{1}_z \\ &= E_0 \left(1 - \frac{\gamma^2 r^2}{4} + \frac{\gamma^4 r^4}{64} + \dots \right) \vec{1}_z \end{aligned} \quad (3.24)$$

où $\gamma^2 = -j\omega\mu\sigma$. Cette série tend vers la fonction de Bessel d'ordre 0, J_0 :

$$\vec{E} = E_0 J_0(\gamma r) \vec{1}_z \quad (3.25)$$

En remarquant $\vec{E}(a) = E_0 J_0(\gamma a) \vec{1}_z$, on écrit

A retenir :

$$\vec{E}(r) = \frac{J_0(\gamma r)}{J_0(\gamma a)} \vec{E}(a) \quad (3.26)$$

Le comportement asymptotique à haute fréquence ($\gamma r \rightarrow \infty$) de la fonction de Bessel est disponible dans les tables. On peut, en développant γ , trouver :

A retenir : Profondeur de peau

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \quad (3.27)$$

A haute fréquence, on obtient finalement ²

$$J_0(\gamma r) \approx \sqrt{\frac{1}{2\pi\gamma r}} e^{jr/\delta} e^{r/\delta} e^{-j\pi/4} \quad (3.28)$$

Ceci montre que proche de la surface du fil, le courant évolue exponentiellement.

2. Les détails sont donnés page 53, mais ils ne sont pas physiquement intéressants.

Nous remarquons sur le schéma ci-contre que proche du centre, il n'y a pas de courant. Pour une certaine valeur, en s'approchant de la périphérie, le courant "explose". On peut considérer que le courant n'existe que dans une pellicule d'épaisseur δ . Cet effet n'est pas négligeable (50Hz : $\delta = 9mm$. 100MHz : $\delta = 6\mu m$). Cet effet est d'autant plus important car la résistance apparente n'est pas celle à considérer. Par exemple, dans les câbles coaxiaux, les courants "seulement superficiels" voir leur résistance augmentée avec le carré de la fréquence

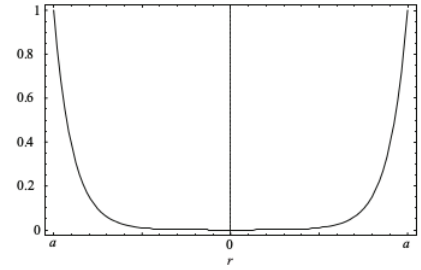


FIGURE 3.2

$$R_1 = \frac{1}{\sigma\delta} \left(\frac{1}{2\pi a} + \frac{1}{2\pi b} \right) = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} \left(\frac{1}{2\pi a} + \frac{1}{2\pi b} \right) \quad (3.29)$$

Pour le fun, l'expression du champ électrique à haute fréquence, non valable au centre ($\gamma r \rightarrow \infty$) vaut

$$\vec{E}(r) \approx \vec{E}(a) \sqrt{\frac{a}{r}} e^{-j\frac{a-r}{\delta}} e^{-\frac{a-r}{\delta}} \quad (3.30)$$