МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ» (ДГТУ)

Кафедра Робототехника и мехатроника

Методическое руководство к выполнению практических работ по дисциплине

Моделирование мехатронных и робототехнических систем

Ростов-на-Дону 2022

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Целью практических занятий по дисциплине «Математическое моделирование процессов в машиностроении» является необходимость овладения студентами знаниями и навыками в области анализа и синтеза математических моделей, теории принятия решений, математической статистики, измерений и надёжности производственных систем; формирования представления о месте и роли математического моделирования технологических процессов в машиностроении; изучения видов математических моделей; обеспечения квалифицированного использования знаний основ моделирования, аналитических, имитационных и неформальных моделей, оценки надёжности производственных систем, моделей управления запасами, а также обработки полученных результатов.

Пособие ориентировано на студентов старших курсов технических специальностей, в первую очередь, специальностей «Технология машиностроения», «Металлообрабатывающие станки и комплексы» и направления «Технология, оборудование и автоматизация машиностроительных производств». Для работы с большинством разделов пособия достаточно знания вузовского курса математики (математический анализ, элементы теории вероятности и математической статистики, теория обыкновенных дифференциальных уравнений).

Авторы выражают признательность канд. техн. наук А. С. Жогину за формулировки многих интересных задач, послуживших отправной точкой при создании пособия.

1. ОДНОМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ

Цель работы – ознакомиться с примерами использования выводов высшей «классической» математики для поиска оптимальных решений в области конструирования, технологического проектирования и организации производства.

1.1. Введение

Методы решения одномерных задач оптимизации рассматриваются в **математическом программировании** – области математики, разрабатывающей теорию и численные методы решения многомерных экстремальных задач с ограничениями, т. е. задач на экстремум функции многих переменных с ограничениями на область изменения этих переменных.

Поиск экстремальных значений для различных функций осуществляется разнообразными методами – использование свойств производных для поиска минимума (максимума) дифференцируемых функций одной переменной; численные методы решения; алгоритмы направленного и случайного поиска для сложных функций и др.

В данной работе рассмотрен пример использования производных для исследования свойств функций в интересующих областях.

Суть метода заключается в том, что наибольшие и наименьшие значения функции $f(x)$ на отрезке (a, b) определяют путём оценки $f(x)$ на критических точках, к которым принадлежат и $f(x=a)$ и $f(x=b)$. Экстремальные решения внутри отрезка (a, b) находят путём решения уравнения

$$f'(x) = 0.$$

Таким образом, для решения задачи оптимизации необходимо:

– определить *целевую функцию*, т. е. такую функцию, которая принимает максимум или минимум в том случае, когда параметр имеет оптимальное значение;

– при необходимости, привести целевую функцию к однопараметрическому виду;

– определить *область допустимых решений* – границы, в пределах которых будет отыскиваться оптимальное значение параметра целевой функции;

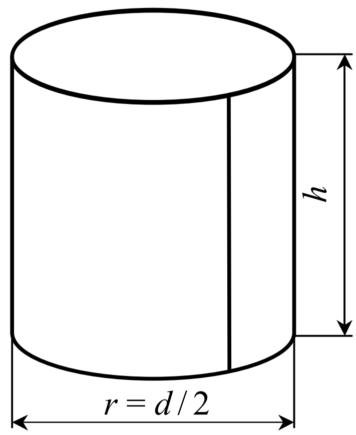
– найти производную целевой функции;

– определить, при каком значении параметра (внутри заданных границ) производная целевой функции обращается в ноль.

1.2. Определение рациональных параметров конструкции

Необходимо определить оптимальные параметры цилиндрической емкости заданного объёма V при известных целевых условиях. Ёмкость сваривается аргонодуговой сваркой из листов коррозионно-стойкой стали 12Х18Н9Т.

Выбор конкретного целевого условия при конструировании может быть обусловлен, например, требованиями ресурсосбережения. Поскольку для изготовления ёмкости используется дорогостоящий материал (листовая коррозионно-стойкая сталь), для экономии материала ёмкость должна иметь наименьшую площадь поверхности S, таким образом, на её изготовление будет затрачено наименьшее количество металла. Может рассматриваться и другой вариант. Так как затраты на выполнение сварочной операции пропорциональны длине сварных швов, следовательно, ёмкость должна иметь минимальную длину швов L.



Рассмотрим решение задачи для целевого условия, предполагающего минимизацию площади поверхности S, т. е. экономию листового материала. Исходными данными для решения будут являться заданный объём ёмкости V и границы изменения параметров ёмкости (для цилиндра – это высота h и радиус основания r). Поскольку в условии задачи явных ограничений не задано, примем в первом приближении, что h и r могут меняться в диапазоне от 0 до ∞.

Далее необходимо определить целевую функцию, которая своим максимумом или минимумом будет сигнализировать о нахождении оптимальных значений неизвестных параметров. Из условия задачи следует, что такой функцией является площадь поверхности ёмкости S, которую можно определить по следующей формуле

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh.$$

Целевая функция в том виде, в котором она представлена в формуле, не может быть использована при решении задачи, поскольку включает в себя не один, а два независимых параметра. Для того чтобы привести целевую функцию к однопараметрическому виду, воспользуемся тем фактом, что объём ёмкости фиксирован и известен заранее. Тогда имеет место следующая зависимость

$$h = V/\pi r^2 .$$

Подставляя эту зависимость в формулу для площади поверхности, получаем в итоге целевую функцию с одним параметром

$$S(r) = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}, \qquad (0 < r < \infty).$$

Далее находим производную целевой функции, приравниваем её к нулю и находим решение полученного уравнения:

$$S'(r) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = 0; \;\Rightarrow\; 2\pi r^3 = V; \;\Rightarrow\; r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}; \;\Rightarrow\; 2r = h .$$

Таким образом, для минимизации площади поверхности цилиндрической ёмкости при заданном объёме необходимо, чтобы высота ёмкости была равна удвоенному радиусу основания (т. е. диаметру), иными словами, ёмкость должна вписываться в куб со стороной h.

1.3. Определение оптимального периода стойкости режущего инструмента

Известно, что увеличение скорости резания при лезвийной обработке приводит к уменьшению машинного времени. Однако скорость резания нельзя назначать без учёта конкретных условий обработки, поскольку при её увеличении резко возрастёт износ инструмента, т. е. снизится его стойкость – машинное время работы инструментом от переточки до переточки (или до определённой величины износа). Это вызовет более частую переточку инструмента, а следовательно, и затрату труда заточника, затрату времени на снятие и установку инструмента (поскольку станок в это время будет простаивать) и перевод в отходы (при заточке) определённого количества материала, идущего на изготовление режущей части инструмента. Таким образом, стойкость инструмента влияет и на производительность, и на себестоимость обработки.

В зависимости от условий обработки, конструкции режущего инструмента и станка, общего технического уровня производства и технико-экономических условий эксплуатации станка и инструмента, значения стойкости и соответствующей ей скорости резания должны быть различными. Так, чем более сложна и дорога конструкция инструмента, больше времени уходит на его переточку после затупления, больше расход материала режущей части инструмента при переточке и расход материала инструмента, которым ведётся переточка, больше времени затрачивается на снятие со станка затупленного инструмента и установку нового (переточенного), меньше показатель относительной стойкости инструмента, тем больше должна быть стойкость инструмента. На практике, в нормальных условиях, при назначении скорости резания используют оптимальную стойкость.

Оптимальная стойкость – стойкость режущего инструмента, при которой общая сумма затрат общественного труда при выполнении той или иной технологической операции будет наименьшей. При установлении величины оптимальной стойкости учитываются затраты, связанные как с самим инструментом, так и с использованием заданного станка при выполнении на нём данной технологической операции.

Оптимальный период стойкости инструмента T для целевого условия минимальной себестоимости операции можно определить, используя известную теоретическую зависимость себестоимости операции механической обработки. На примере токарной обработки выражение для себестоимости операции C представляет собой сумму трёх слагаемых, неявно зависящих от стойкости инструмента T:

$$C = t_{\text{о}} \cdot C_{\text{м}} + \frac{t_{\text{с}}}{Q} \cdot C_{\text{м}} + \frac{1}{Q} \cdot C_{\text{и}},$$

где $t_{\text{о}}$ – основное время; $C_{\text{м}}$ – стоимость станкоминуты, включает затраты на станок и зарплату рабочего; $t_{\text{с}}$ – время смены инструмента; Q – количество деталей, обработанных за T; $C_{\text{и}}$ – затраты на инструмент за период стойкости T.

Используя известные из технологии машиностроения соотношения, выражение для C можно привести к виду функции одного неизвестного:

$$Q = \frac{T}{t_{\text{о}}}; \qquad t_{\text{о}} = \frac{L}{n \cdot S}; \quad n = 1000\frac{V}{\pi D}; \qquad V = \frac{K}{T^m};$$

$$t_{\text{о}} = \frac{\pi DL}{1000V \cdot S} = \frac{\pi DL \cdot T^m}{1000K \cdot S} = BT^m.$$

В конечном итоге

$$C(T) = C_{\text{м}} \cdot B \cdot T^m + t_{\text{с}} \cdot C_{\text{м}} \cdot B \cdot T^{m-1} + C_{\text{и}} \cdot B \cdot T^{m-1},$$

где $B = \dfrac{\pi DL}{1000K \cdot S}$ – постоянная величина, зависящая от длины резания L, подачи S и коэффициента K; m – эмпирический показатель степени.

Далее для нахождения оптимальной стойкости необходимо найти производную $C'(T)$ и, приравняв её к нулю, определить искомый период стойкости T.

1.4. Задания для самостоятельной работы

Определение рациональных параметров конструкции

1.4.1. Требуется определить оптимальные параметры конструкции для заданного варианта исходных данных и требований. Варианты заданий представлены в табл. 1.1, требования к конструкции – в табл. 1.2, эскизы проектируемых ёмкостей – на рис. 1.1.

Примечание. Основные геометрические соотношения для полусферы: объём $V = 2\pi r^3/3$, площадь поверхности $S = 2\pi r^2$.

Таблица 1.1

Варианты заданий

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
№ исходных данных в табл. 1.2	4	3	2	4	5	1	3	2	4	1	2	6
Вариант	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
№ исходных данных в табл. 1.2	2	3	5	3	2	5	6	5	6	1	6	1

Таблица 1.2

Исходные данные для конструирования

№	Требования к конструкции	Рис.
1	Цилиндрическая ёмкость без крышки, имеющая при заданном объёме V минимальную длину швов L	1.1, *а*
2	Цилиндрическая ёмкость с крышкой, имеющая при заданном объёме V минимальную длину швов L	1.1, *б*
3	Ёмкость без крышки, с квадратным дном, имеющая при заданном объёме V минимальную площадь поверхности S	1.1, *в*
4	Ёмкость с крышкой, с квадратным дном, имеющая при заданном объёме V минимальную площадь поверхности S	1.1, *в*
5	Ёмкость с крышкой, с квадратным дном, имеющая при заданном объёме V минимальную длину швов L	1.1, *в*
6	Ёмкость без крышки, с квадратным дном, имеющая при заданном объёме V минимальную длину швов L	1.1, *в*

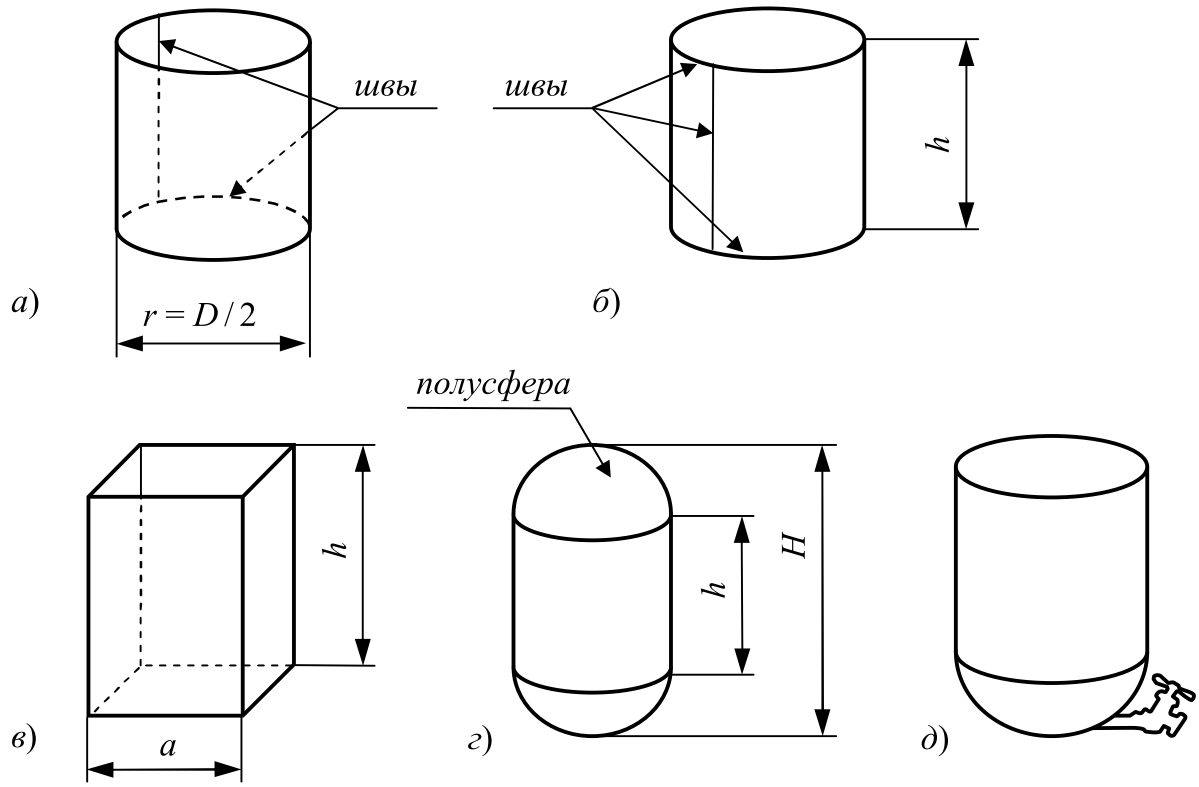


Рис. 1.1. Эскизы проектируемых ёмкостей

Определение оптимального периода стойкости режущего инструмента

1.4.2. Определить оптимальный период стойкости инструмента T для целевого условия минимальной себестоимости операции токарной обработки. Исходные данные для расчётов приведены в табл. 1.3.

Таблица 1.3

Варианты исходных данных

Вариант	m	$t_с$, мин	$C_и$, р.	$C_м$, р./мин		Вариант	m	$t_с$, мин	$C_и$, р.	$C_м$, р./мин
1	0,13	1,5	50	5,0		13	0,23	3,5	90	5,0
2	0,14	2,0	60	5,0		14	0,24	3,0	100	5,0
3	0,15	2,5	70	5,0		15	0,25	3,5	110	5,0
4	0,16	3,0	80	5,0		16	0,26	4,0	120	5,0
5	0,17	3,5	90	5,0		17	0,20	3,5	130	5,0
6	0,18	5,5	100	5,0		18	0,21	3,0	140	5,0
7	0,19	4,0	110	5,0		19	0,22	3,0	150	5,0
8	0,20	2,5	120	5,0		20	0,23	3,5	120	5,0
9	0,21	3,0	130	5,0		21	0,24	3,0	130	5,0
10	0,22	3,5	140	5,0		22	0,25	4,0	140	5,0
11	0,21	3,5	150	5,0		23	0,26	3,5	150	5,0
12	0,22	3,0	80	5,0		24	0,20	4,0	180	5,0

1.5. Дополнительные задания повышенной сложности

1.5.1. Какую форму (рис. 1.1, *б* или *в*) должна иметь ёмкость для хранения СОЖ объёмом V, чтобы на её изготовление было потрачено наименьшее количество материала? Толщину стенок обеих конструкций считать одинаковой.

1.5.2. На складе ГСМ проектируемого цеха необходимо установить ряд ёмкостей для СОЖ. Форма ёмкостей приведена на рис. 1.1, *г*. Требуется спроектировать ёмкость, имеющую при заданной высоте H максимальный объём V.

1.5.3. На складе ГСМ проектируемого цеха необходимо установить ряд ёмкостей для СОЖ. Форма ёмкостей приведена на рис. 1.1, *д*. Требуется спроектировать ёмкость, имеющую при заданном объёме V минимальную площадь поверхности S с целью экономии материала.

1.5.4. Определить оптимальный период стойкости инструмента T для целевого условия наибольшей производительности операции токарной обработки.

Примечания: а) принять затраты на инструмент $C_и = 0$; б) перейти от условия наибольшей производительности к условию минимальных затрат времени на выполнение операции: $t\,(T) = t_о + t_с \,/\, Q \to \min$.

1.6. Контрольные вопросы

1. В чём заключается суть классического метода минимизации (максимизации) функции одной переменной?
2. Какие исходные данные необходимы для решения задачи оптимизации?
3. Какова последовательность этапов поиска решения одномерной задачи оптимизации?
4. Какова роль области допустимых решений задачи оптимизации?
5. В каких случаях классический метод применить невозможно?

2. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Цель работы – освоить некоторые классические задачи линейного программирования.

2.1. Введение

Математическое программирование – раздел математики, посвящённый теории и методам решения задач о нахождении экстремумов функций на множествах, определяемых некоторыми ограничениями (равенствами или неравенствами). Если изучаемая функция линейна (1-й степени) и определена на множестве, заданном линейными равенствами и неравенствами, то соответствующий раздел математического программирования называется **линейным программированием** (ЛП). Математическое программирование называется также оптимальным программированием.

Модель задачи математического программирования включает:

– совокупность неизвестных величин, действуя на которые, систему можно совершенствовать. Их называют *планом задачи* (вектором управления, решением, управлением, стратегией, поведением и др.);

– целевую функцию (функцию цели, показатель эффективности, критерий оптимальности, функционал задачи и др.). Целевая функция позволяет выбирать наилучший вариант из множества возможных. Наилучший вариант доставляет целевой функции экстремальное значение. Это может быть прибыль, объём выпуска или реализации, затраты производства, издержки обращения, уровень обслуживания или дефицитности, число комплектов, отходы и т. д.;

– набор условий или ограничений. Эти условия следуют из ограниченности ресурсов предприятия, из особенностей производственных и технологических процессов. Ограниченными могут быть материальные, финансовые и трудовые ресурсы, возможности технического, технологического и научного потенциала.

Математически ограничения выражаются в виде уравнений и неравенств. Их совокупность образует **область допустимых решений**. План, удовлетворяющий системе ограничений задачи, называется **допустимым**. Допустимый план, доставляющий целевой функции экстремальное значение, называется **оптимальным**. Оптимальное решение не обязательно является единственным, также возможны случаи, когда оно не существует или имеется бесчисленное множество оптимальных решений.

Задача математического программирования формулируется следующим образом: найти значения переменных $x_1, x_2,\dots, x_n$, доставляющие максимум (минимум) заданной целевой функции $y = f(x_1, x_2,\dots, x_n)$ при условиях:

$$g_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \le (\ge, =) b_j, \ (j = \overline{1,m}).$$

Методы решения задач ЛП основаны на численном решении системы линейных уравнений для поиска экстремального значения целевой функции. ЛП применяется в различных областях – рациональное распределение ресурсов (задачи об ассортименте продукции, раскрое материала, смесях и др.), транспортные задачи, для поиска оптимальных решений в теории игр, управлении запасами и пр.

2.2. Графо-аналитический метод решения задач линейного программирования

Геометрическая интерпретация задач линейного программирования даёт возможность наглядно представить их структуру, выявить особенности и открывает пути исследования более сложных свойств. Задачи с двумя переменными всегда можно решить графически. Однако уже в трёхмерном пространстве такое решение усложняется, а в пространствах, размерность которых больше трёх, графическое решение невозможно.

Пусть дана задача максимизации целевой функции Z

$$\max Z = c_1 x_1 + c_2 x_2, \tag{1}$$

при ограничениях

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m \end{array}\right\} \tag{2}$$

и условии неотрицательности переменных

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \tag{3}$$

Каждое из ограничений (2) и (3) задаёт на координатной плоскости x_1Ox_2 некоторую полуплоскость (рис. 2.1). Полуплоскость – выпуклое множество. Пересечение любого числа выпуклых множеств является выпуклым множеством. Отсюда следует, что область допустимых решений задачи есть выпуклое множество.

Пусть область допустимых решений – непустое множество, например, многоугольник $A_1A_2A_3A_4A_5$.

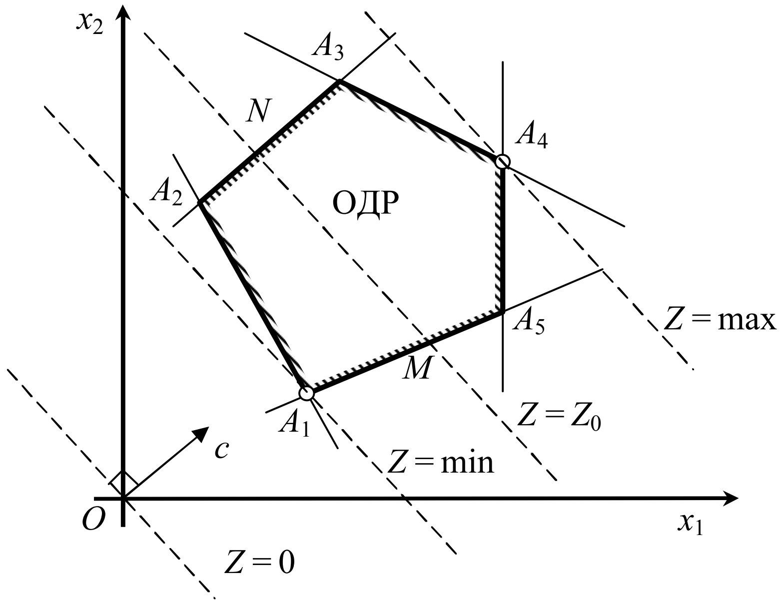


Рис. 2.1. Схема поиска решения задачи графо-аналитическим методом

Выберем произвольное значение целевой функции $Z = Z_0$. Получим $c_1x_1 + c_2x_2 = Z_0$. Это уравнение прямой линии. В точках прямой NM целевая функция сохраняет одно и то же постоянное значение Z_0. Считая в равенстве (1) Z параметром, получим уравнение семейства параллельных прямых, называемых **линиями уровня целевой функц***ии* (линиями постоянного значения).

Найдём частные производные целевой функции по x_1 и x_2:

$$\partial Z / \partial x_1 = c_1, \tag{4}$$

$$\partial Z / \partial x_2 = c_2. \tag{5}$$

Частные производные (4) и (5) функции показывают скорость её возрастания вдоль соответствующих осей. Следовательно, c_1 и c_2 – скорости возрастания Z вдоль осей Ox_1 и Ox_2. Вектор $c = (c_1, c_2)$ называется **градиентом функции**. Он показывает направление наискорейшего возрастания целевой функции:

$$c = \left(\partial Z / \partial x_1 , \partial Z / \partial x_2 \right).$$

Вектор $c = (c_1, c_2)$ перпендикулярен к прямым $Z = \text{const}$ семейства $c_1x_1 + c_2x_2 = Z$.

Вектор $(-c)$ указывает направление наискорейшего убывания целевой функции. Его называют **антиградиентом**.

Из геометрической интерпретации элементов задачи вытекает общий порядок её графического решения:

1) с учётом системы ограничений строится область допустимых решений;

2) определяется вектор $c = (c_1, c_2)$ наискорейшего возрастания целевой функции, т. е. вектор градиентного направления;

3) проводится произвольная линия уровня $Z = Z_0$;

4) при решении задачи на максимум линия уровня перемещается $Z = Z_0$ в направлении вектора c так, чтобы она касалась области допустимых решений в её крайнем положении (крайней точке). В случае решения задачи на минимум линия уровня $Z = Z_0$ перемещается в антиградиентном направлении;

5) определяется оптимальное решение $x^* = (x_1^*, x_2^*)$ и экстремальное значение целевой функции $Z^* = z(x^*)$.

2.3. Пример решения задачи линейного программирования

Компания R&M производит краску для внутренних и наружных работ из сырья двух типов: M1 и M2. Расход сырья для производства 1 т краски указан в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Исходные данные

	Расход сырья (т) на 1 т краски		Максимальный ежедневный расход сырья, т
	для наружных работ	для внутренних работ	
Сырьё M1	6	4	24
Сырьё M2	1	2	6
Доход (тыс. р.) на 1 т краски	5	4	

Отдел маркетинга компании ограничил ежедневное производство краски для внутренних работ до 2 т (из-за отсутствия надлежащего спроса), а также поставил условие, чтобы ежедневное производство краски для внутренних работ не менее чем на 1 т превышало ежедневный объём производства краски для наружных работ. Требуется определить наилучшее соотношение между видами выпускаемой продукции для получения максимального ежедневного дохода.

Решение. Прежде чем построить математическую модель задачи, необходимо ответить на следующие вопросы:

– что является искомыми величинами?

– какова цель решения? Какой параметр задачи служит критерием оптимальности решения (прибыль, себестоимость, время)? В каком направлении должно изменяться значение этого параметра – к максимуму или к минимуму – для достижения наилучших результатов?

– какие условия в отношении искомых величин и ресурсов задачи должны быть выполнены? Эти условия устанавливают, как должны соотноситься друг с другом различные параметры задачи, например: количество ресурса, затраченного при производстве, и его запас на складе; количество выпускаемой продукции и ёмкость склада, где она будет храниться; количество выпускаемой продукции и рыночный спрос на эту продукцию, и т. д.

Первый этап разработки модели – определение **переменных**. В данном примере необходимо определить ежедневные объёмы производства краски для внутренних и наружных работ. Обозначим эти объёмы как переменные:

x_1 – объём производства краски для наружных работ, т/сутки;

x_2 – объём производства краски для внутренних работ, т/сутки.

В условии задачи сформулирована цель – добиться максимального дохода от реализации продукции, т. е. критерием эффективности служит параметр суточного дохода, который должен стремиться к максимуму. Чтобы рассчитать величину суточного дохода от продажи краски обоих видов, необходимо знать объёмы производства красок, т. е. x_1 и x_2 тонн краски в сутки, а также цену 1 т краски каждого вида – согласно условию, это 5 и 4 тыс. р. за тонну соответственно. Таким образом, доход от продажи краски для наружных работ в сутки составит $5x_1$ тыс. р., а доход от продажи краски для внутренних работ – $4x_2$ тыс. р. Поэтому запишем **целевую функцию**, обозначив её как z (она измеряется в тысячах рублей), в виде суммы дохода от продажи красок обоих видов

$$z = 5x_1 + 4x_2 \rightarrow \max.$$

Последний элемент модели – **ограничения**, которые должны учитывать возможности ежедневного потребления сырья и ограниченность спроса на готовую продукцию.

Ограничения на сырьё можно записать следующим образом:

объём сырья для производства краски	$\leq$	максимальный суточный расход сырья

Из таблицы с исходными данными имеем следующее:
– используемый объём сырья М1: $C_1 = 6x_1 + 4x_2$ (т);
– используемый объём сырья М2: $C_2 = 1x_1 + 2x_2$ (т).

Поскольку ежедневный расход сырья ограничен, получаем:
– сырьё М1: $6x_1 + 4x_2 \leq 24$;
– сырьё М2: $1x_1 + 2x_2 \leq 6$.

Существует ещё два ограничения по спросу на готовую продукцию. Первое ограничение показывает, что ежедневный объём производства краски для внутренних работ x_2 не должен превышать ежедневный объём производства краски для наружных работ x_1 больше чем на тонну, т. е. $x_2 - x_1 \leq 1$. Второе ограничение: максимальный ежедневный объём производства краски для внутренних работ не должен превышать двух тонн, то есть $x_2 \leq 2$.

Ещё одно неявное ограничение состоит в том, что объёмы производства краски не могут быть отрицательными, т. е. $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

Окончательно задача записывается в виде:
максимизировать целевую функцию

$$z = 5x_1 + 4x_2 \to \max,$$

при выполнении ограничений

$$\begin{aligned}
&6x_1 + 4x_2 \leq 24,\\
&1x_1 + 2x_2 \leq 6,\\
&x_2 - x_1 \leq 1,\\
&x_2 \leq 2,\\
&x_1 \geq 0,\\
&x_2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Любое решение, удовлетворяющее ограничениям модели, является **допустимым**. Например, решение $x_1 = 3$, $x_2 = 1$ является допустимым, так как не нарушает ни одного ограничения. В целом, задача имеет бесконечное множество допустимых решений, поэтому искать оптимальное путём простого перебора всех решений нецелесообразно.

Для поиска **оптимального допустимого решения**, т. е. такого сочетания x_1 и x_2, при котором значение целевой функции (доходов) будет максимальным, воспользуемся графо-аналитическим методом. Данный метод включает два основных этапа:

1) построение области допустимых решений, удовлетворяющих всем ограничениям модели;

2) поиск оптимального решения среди всех точек пространства допустимых решений.

Выполним построение области допустимых решений на координатной плоскости x_1Ox_2 (рис. 2.2). Условие неотрицательности переменных x_1 и x_2 говорит о том, что область допустимых решений будет лежать в первом квадранте (между положительными направлениями осей).

Чтобы учесть остальные ограничения, заменим неравенства на равенства и получим уравнения прямых. Например, неравенство $6x_1 + 4x_2 \le 24$ заменяется уравнением прямой $6x_1 + 4x_2 = 24$. Чтобы провести эту линию, необходимо найти две точки, принадлежащие этой прямой. Через $x_1 = 0$ получим $x_2 = 24/4 = 6$, через $x_2 = 0$ получим $x_2 = 24/6 = 4$. Аналогично строятся остальные прямые.

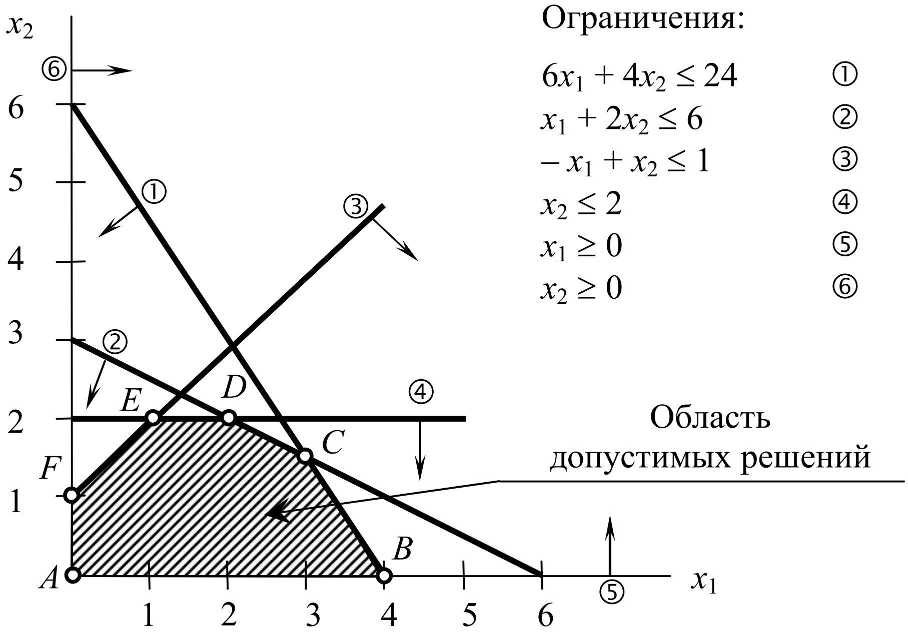


Рис. 2.2. Область допустимых решений задачи

Рассмотрим, как графически интерпретируются неравенства. Каждое неравенство делит плоскость на два полупространства, которые располагаются по обе стороны соответствующей прямой. Точки по одну сторону прямой удовлетворяют неравенству, по другую сторону – нет. «Тестовой» точкой, проверяющей, точки какого полупространства удовлетворяют неравенству, а какого – нет, может служить точка (0, 0).

Точки в области допустимого решения удовлетворяют всем ограничениям задачи. Эта область ограничена отрезками *A-F-E-D-C-B*. Чтобы найти оптимальное решение, необходимо определить направление возрастания целевой функции. Для этого целевую функцию z можно приравнять к двум значениям, например к 10 и к 15, и получить уравнения прямых. На рис. 2.3 эти прямые показаны штриховыми линиями, а направление возрастания целевой функции – жирной стрелкой. Целевая функция может возрастать до тех пор, пока прямые, соответствующие значениям этой функции, пересекают область допустимых решений. Точка пересечения области допустимых решений и прямой, соответствующей максимально возможному значению целевой функции, и будет точкой оптимума.

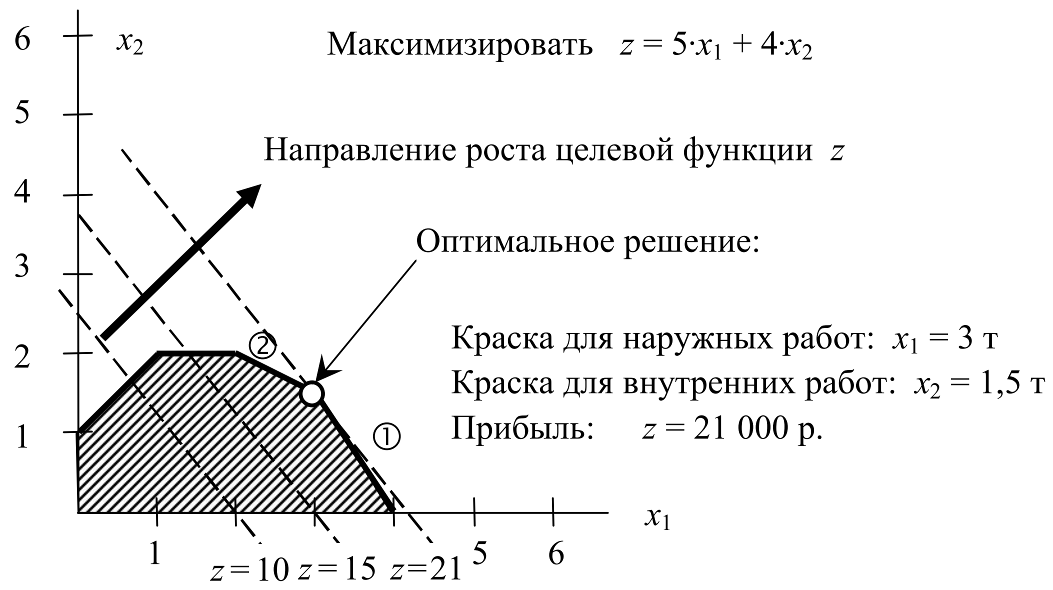


Рис. 2.3. Поиск оптимального решения

На рис. 2.3 видно, что оптимальное решение соответствует точке пересечения прямых (1) и (2), поэтому её координаты x_1 и x_2 находятся как решение системы уравнений, задающих эти прямые:

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 = 24, \\ 1x_1 + 2x_2 = 6. \end{cases}$$

Отсюда оптимальное решение задачи: $x_1 = 3$; $x_2 = 1{,}5$; $z = 21$. Полученное решение означает, что для компании оптимальным выбором будет ежедневное производство 3 т краски для наружных работ и 1,5 т – для внутренних работ с ежедневным доходом в 21 тыс. р.

2.4. Задания для самостоятельной работы

2.4.1. Компания R&M производит краску для внутренних и наружных работ из сырья 2 типов: М1 и М2. Доход от реализации краски для внутренних работ составляет 5000 р./т, краски для наружных работ – 4000 р./т. Отдел маркетинга компании ограничил ежедневное производство краски для внутренних работ до 2 т (из-за отсутствия надлежащего спроса), а также поставил условие, чтобы ежедневное производство краски для внутренних работ не превышало более чем на 1 т ежедневный объём производства краски для наружных работ.

Требуется определить оптимальное соотношение между видами выпускаемой продукции для получения максимального ежедневного дохода. Варианты исходных данных и ограничений представлены в табл. 2.2.

Таблица 2.2

Варианты исходных данных

<table>
<tr><th rowspan="2">Варианты</th><th rowspan="2">Вид сырья</th><th colspan="3">Расход сырья</th></tr>
<tr><th>на 1 т краски для наружных работ</th><th>на 1 т краски для внутренних работ</th><th>максимальный ежедневный</th></tr>
<tr><td rowspan="2">1, 5, 9, 13, 17, 21</td><td>Сырьё М1, т</td><td>6</td><td>4</td><td>от 3 до 6</td></tr>
<tr><td>Сырьё М2, т</td><td>1</td><td>2</td><td>6</td></tr>
<tr><td colspan="5"></td></tr>
<tr><td rowspan="3">2, 6, 10, 14, 18, 22</td><td>Сырьё М1, т</td><td>6</td><td>4</td><td>24</td></tr>
<tr><td>Сырьё М2, т</td><td>1</td><td>2</td><td>6</td></tr>
<tr><td colspan="4">Ежедневный объём производства краски для внутренних работ не может быть меньше ежедневного объёма производства краски для наружных работ.</td></tr>
<tr><td colspan="5"></td></tr>
<tr><td rowspan="3">3, 7, 11, 15, 19, 23</td><td>Сырьё М1, т</td><td>6</td><td>4</td><td>24</td></tr>
<tr><td>Сырьё М2, т</td><td>1</td><td>2</td><td>6</td></tr>
<tr><td colspan="4">Минимальный ежедневный общий объём производства краски обоих типов составляет 3 т.</td></tr>
<tr><td colspan="5"></td></tr>
<tr><td rowspan="3">4, 8, 12, 16, 20, 24</td><td>Сырьё М1, т</td><td>6</td><td>4</td><td>24</td></tr>
<tr><td>Сырьё М2, т</td><td>1</td><td>2</td><td>6</td></tr>
<tr><td colspan="4">Отношение ежедневного объёма производства краски для внутренних работ к общему объёму производства краски обоих типов не должно превышать 0,5.</td></tr>
</table>

2.4.2. Решить одну из представленных ниже задач линейного программирования графо-аналитическим методом.

Вариант № 1. При изготовлении изделий И1 и И2 используются сталь и цветные металлы, а также токарные и фрезерные станки. По технологическим нормам на производство единицы изделия И1 требуется 400 и 170 станко-часов соответственно токарного и фрезерного оборудования, а также 10 и 19 кг соответственно стали и цветных металлов. Для производства единицы изделия И2 требуется 248, 200, 20 и 17 соответствующих единиц тех же ресурсов. Цех располагает 12400 и 6800 станко-часами соответственно токарного и фрезерного оборудования и 640 и 646 кг соответственно стали и цветных металлов. Прибыль от реализации единицы изделия И1 составляет 12 р., от единицы изделия И2 – 16 р. Требуется определить структуру производства, обеспечивающую максимальную прибыль.

Вариант № 2. Студент-вечерник собирается устроиться на завод на сокращённый рабочий день со сдельной оплатой. Его работа будет заключаться в обслуживании двух станков, причём на каждые 3 ч работы на первом станке будет приходиться не больше 5 ч работы на втором; кроме того, мастер участка требует, чтобы на втором станке он работал не менее 2 ч в день. Оплата за час работы составляет соответственно 80 и 96 р. Студенту необходимо зарабатывать не меньше 7,2 тыс. р. в месяц (при 20 рабочих днях), однако он не может выделить для этой работы больше 6 ч в день. Сколько часов в день нужно работать студенту, чтобы суммарное время работы было минимальным? Сколько часов при этом он потратит на обслуживание 1-го станка? Сколько денег он заработает при выбранном графике работы?

Вариант № 3. В районе лесного массива имеются лесопильный завод и фанерная фабрика. Чтобы получить 2,5 м^3 коммерчески реализуемых пиломатериалов, необходимо израсходовать 5 м^3 еловых и 3 м^3 пихтовых лесоматериалов. Для приготовления листов фанеры площадью 100 м^2 требуется 4 м^3 еловых и 6 м^3 пихтовых лесоматериалов. Лесной массив содержит 160 м^3 еловых и 150 м^3 пихтовых лесоматериалов. Согласно условиям поставок, в течение планируемого периода необходимо произвести не менее 8 м^3 пиломатериалов и 1400 м^2 фанеры. Доход с 1 м^3 пиломатериалов составляет 200 р., а со 100 м^2 фанеры – вдвое больше. Требуется составить план производства, обеспечивающий максимальный доход.

Вариант № 4. Компания имеет возможность рекламировать свою продукцию по местному радио и телевидению. Бюджет на рекламу ограничен суммой 10500 долларов в месяц. Одна минута рекламного времени на радио стоит 25, а на телевидении – 300 долларов. Компания предполагает, что реклама на радио по времени должна превышать рекламу на телевидении не менее чем в два раза. Вместе с тем, известно, что нерационально использовать более 200 мин рекламы на радио в месяц. Последние исследования показали, что реклама на телевидении в 25 раз эффективнее рекламы на радио. Требуется разработать оптимальный бюджет рекламы исходя из условия достижения максимального эффекта.

Вариант № 5. Для выработки электрического тока электростанция использует уголь. Агентство по защите окружающей среды установило следующие ограничения: концентрация выбрасываемого в воздух сернистого газа не должна превышать 0,002, количество выбрасываемых аэрозольных частиц не должно превышать 3 кг в час. Электростанция для генерации электрического тока использует пылевидный уголь двух сортов, С1 и С2. Перед сжиганием эти сорта угля смешиваются. Характеристика используемых сортов угля приведена в таблице. Требуется найти оптимальный состав смеси угля обоих сортов (долю угля С1 и долю угля С2), позволяющей произвести максимальное количество пара.

Сорт угля	Концентрация серы, %	Количество выделяемых аэрозольных частиц, кг/ч	Количество вырабатываемого пара, кг/ч
С1	0,12	4	12000
С2	0,21	1,5	9000

Вариант № 6. Конвейер состоит из трёх последовательных линий для сборки двух видов радиоприёмников: HiFi-1 и HiFi-2. Время, необходимое для сборки одного приёмника на каждой линии, приведено в таблице. Ежедневные профилактические работы на соответствующих линиях составляют 10, 20 и 12,5 % от всего рабочего времени, которое для каждой линии не превышает 480 мин в смену. Требуется определить структуру выпускаемой продукции, при которой минимизируется время простоя всех трёх линий.

Сборочная линия	Количество минут, затрачиваемых на сборку одного изделия	
	HiFi-1	HiFi-2
1	4	6
2	5	5
3	6	4

Вариант № 7. С вокзала можно отправлять ежедневно курьерские и скорые поезда. Вместимость вагонов и наличный парк вагонов на станции указаны в таблице. Требуется найти такое соотношение между числом курьерских и скорых поездов, чтобы число ежедневно отправляемых пассажиров достигло максимума.

Характеристики парка вагонов	Тип вагона				
	Багажный	Почтовый	Плацкартный	Купейный	Мягкий
Число вагонов в поезде, шт. – курьерском – скором	1 1	– 1	5 8	8 5	3 1
Вместимость вагонов, чел.	–	–	58	40	32
Наличный парк вагонов, шт.	12	8	81	80	27

Вариант № 8. Фармацевтическая фирма производит не менее 800 кг пищевой добавки – смеси кукурузной и соевой муки, состав которой представлен в таблице. Диетологи требуют, чтобы в пищевой добавке было не менее 30 % белка и не более 5 % клетчатки. Требуется определить рецептуру смеси минимальной стоимости с учётом требований диетологов.

Мука	Белок	Клетчатка	Стоимость, р./кг
	в кг на кг муки		
кукурузная	0,09	0,02	0,3
соевая	0,6	0,06	0,9

Вариант № 9. Для пошива одного изделия требуется выкроить из ткани 6 деталей. На швейной фабрике были разработаны 2 варианта раскроя ткани. В таблице приведены характеристики вариантов раскроя 10 м^2 ткани и комплектность, т. е. количество деталей определённого вида, которые необходимы для пошива одного изделия. Ежемесячный запас для пошива изделий данного типа составляет 205 м^2. В ближайший месяц планируется сшить 90 изделий.

Необходимо построить математическую модель задачи, позволяющую в ближайший месяц выполнить план по пошиву с минимальным количеством отходов.

Вариант раскроя	Количество деталей, шт./отрез					Отходы, $м^2$/отрез
	1	2	4	5	6	
1	45	0	10	30	90	0,05
2	6	60	36	20	0	0,25
Комплектность, шт./изделие	1	2	2	2	2	

Вариант № 10. Компания производит два вида продукции, A и B. Объём продаж продукта A составляет не менее 80 % от общего объёма продаж продуктов A и B. Вместе с тем, компания не может производить более 100 единиц продукта A в день. Для производства этих продуктов используется одно и то же сырьё, поступление которого ограничено 240 кг в день. На изготовление единицы продукта A расходуется 2 кг сырья, а единицы продукта B – 4 кг. Цена единицы продуктов A и B составляет соответственно 200 и 500 р. Требуется найти оптимальную структуру производства компании с целью получения максимальной прибыли.

Вариант № 11. Инструментальное производство должно изготовить два вида токарных резцов: проходные и отрезные. На складе инструментального производства имеются 15 кг порошкового сплава ВК6М для изготовления твердосплавных пластин и 120 м прутка для изготовления корпусов. Из этих материалов можно изготовить проходные и отрезные токарные резцы по цене соответственно 270 и 90 р. На данный момент потребность в проходных резцах не превышает 400 шт.; кроме того, известно, что спрос на проходные резцы превышает спрос на отрезные, но не более чем в два раза. Требуется сформировать план производства обоих видов инструмента, обеспечивающий получение максимальной прибыли.

Материал	Нормы расхода материалов на один резец	
	отрезной	проходной
Сплав ВК6М (порошок), г	15	25
Пруток из стали 45, мм	200	80

Вариант № 12. Завод может приобрести не более 30 каров, в том числе не более 8 каров грузоподъёмностью 3 т, остальные кары – грузоподъёмностью 1 т. На покупку каров завод может выделить не более 7,68 млн. р. Сколько каров должен купить завод, чтобы их суммарная грузоподъёмность оказалась максимальной? Кар грузоподъёмностью 1 т стоит 160 тыс. р., кар грузоподъёмностью 3 т стоит 640 тыс. р.

Вариант № 13. Завод производит два типа электрических двигателей, каждый на отдельной сборочной линии. Производительность этих линий составляет 600 и 750 двигателей в день. Двигатель 1-го типа использует 10 единиц некоего комплектующего, а двигатель 2-го типа – 8 единиц этого же компонента. Поставщик может обеспечить на день 8000 единиц этих деталей. Доходность изготовления двигателя 1-го типа составляет 6000, а второго – 4000 р. Требуется определить оптимальную структуру ежедневного производства двигателей.

Вариант № 14. Магазин продаёт два вида велосипедов: для взрослых и для детей. Доход от одного взрослого велосипеда составляет 700 р., от одного детского – 500 р. В среднем магазин за месяц продаёт не более 50 велосипедов обоих видов. Менеджеры подсчитали, что продажи велосипедов для взрослых больше чем в два раза превышают продажи велосипедов для детей. Известно также, что в месяц продаётся не менее 10 детских велосипедов. Требуется определить, сколько велосипедов обоих видов должен заказать магазин на начало месяца для получения максимального дохода.

Вариант № 15. Магазин продаёт два вида детских колясок: обычные прогулочные и трансформеры. Доход от одной коляски-трансформера составляет 1400 р., от обычной коляски – 1000 р. В среднем магазин за месяц продаёт не более 45 колясок обоих видов. Менеджеры подсчитали, что на каждую проданную обычную коляску приходится не более двух колясок-трансформеров. Известно также, что в месяц продаётся не менее 12 обычных колясок. Требуется определить, сколько колясок обоих видов должен заказать магазин на начало месяца для получения максимального дохода.

Вариант № 16. Мебельная фабрика для сборки столов и стульев привлекает к работе на 10 дней четырёх столяров. Каждый столяр тратит 2 ч на сборку стола и 30 мин – на сборку стула. Покупатели обычно приобретают вместе со столом от 4 до 6 стульев. Доход от одного стола составляет 540 р., 250 р. – от одного стула. На фабрике установлен 8-часовой рабочий день. Требуется определить структуру производства, которая позволяла бы получить наибольший доход.

Вариант № 17. Мебельная фабрика изготавливает из готовых комплектующих два вида шкафов: обычные и дорогие. Обычный шкаф покрывается белой краской, а дорогой – лаком. Покраска и покрытие лаком производятся на одном покрасочном участке. Сборочная линия фабрики ежедневно может собирать не более 200 обычных шкафов и 150 дорогих. Лакирование одного шкафа требует вдвое больше времени, чем покраска.

Если покрасочный участок занят только лакированием дорогих шкафов, то за день можно изготовить 180 таких шкафов. Фабрика оценивает доход от обычных и дорогих кухонных шкафов в 1000 и 1400 р. соответственно. Требуется составить оптимальное расписание ежедневной работы участка.

Вариант № 18. Фабрика производит два вида машинок для стрижки газонов. Производство машинок первого вида требует вдвое больше времени, чем производство машинок второго вида. Если фабрика будет производить только машинки второго вида, то она сможет изготавливать их в количестве 400 шт. в день. Рынок налагает ограничения на производство машинок: не более 150 машинок первого и 200 машинок второго типа. Доход от производства машинок составляет 800 р. на производство первого и 500 р. на производство второго вида. Требуется определить ежедневное производство машинок обоих видов для получения максимального дохода.

Вариант № 19. Компания производит два продукта. Производство каждого продукта состоит из последовательного выполнения трёх процессов, каждый из которых производится на отдельном участке. Данные по этим продуктам и процессам приведены в таблице. Рабочее время 1 и 2 участка составляет 9 ч в день, 3-го – не менее 6 ч. Требуется определить оптимальную с точки зрения получения прибыли структуру производства.

Продукт	Количество минут выполнения процесса на единицу продукта			Доход на единицу продукта, р.
	Процесс 1	Процесс 2	Процесс 3	
A	4	8	4	360
B	8	6	5	450

Вариант № 20. Швейная фабрика производит мужские сорочки и женские блузки и продаёт их в своём фирменном магазине. Производство изделия состоит из раскроя, пошива и пакетирования готового изделия. На участке раскроя работают 25 человек, на пошиве изделий – 35 человек, пакетируют готовые изделия 5 человек. Фабрика работает в одну смену (8 ч) 5 дней в неделю. Трудозатраты на выпускаемые фабрикой изделия и доход от них показаны в таблице. Требуется определить оптимальную структуру ежедневного производства, предполагая, что спрос на изделия не ограничен.

Изделие	Количество минут выполнения процесса на одно изделие			Доход на изделие, р.
	Раскрой	Пошив	Пакетирование	
Рубашка	20	70	12	80
Блузка	60	60	4	120

Вариант № 21. Завод бытовой химии производит два вида чистящих средств, А и В, используя при этом сырьё 1 и сырьё 2. Для производства чистящих средств ежедневно имеется 150 единиц сырья каждого вида. На получение одной единицы средства А используется 0,5 единиц сырья 1 и 0,6 единиц сырья 2. На производство одной единицы средства В используется 0,5 единицы сырья 1 и 0,4 единиц сырья 2. Доход на единицу средства А и В составляет соответственно 100 и 80 р. Ежедневное производство средства А должно быть не менее 30 и не более 180 единиц. Для производства средства В аналогичные ограничения составляют 40 и 200 единиц. Требуется определить оптимальную структуру выпуска чистящих средств.

Вариант № 22. Для сохранения нормальной жизнедеятельности человек должен в сутки потреблять белков не менее 120 условных единиц (усл. ед.), жиров – не менее 70 и витаминов – не менее 10 усл. ед. Содержание их в каждой единице продуктов П1 и П2 равно соответственно (0,2; 0,075; 0) и (0,1; 0,1; 0,1) усл. ед. Стоимость 1 единицы продукта П1 – 2,5 р., П2 – 3 р. Требуется определить оптимальную структуру питания, имеющего минимальную стоимость и обеспечивающего при этом необходимое количество питательных веществ для организма.

Вариант № 23. Завод производит два вида ленточных транспортёров – наклонные и горизонтальные. Производство наклонных транспортёров требует вдвое больше времени, чем производство горизонтальных. Если фабрика будет производить только горизонтальные транспортёры, то она сможет изготавливать их в количестве 400 шт. в день. Рынок налагает ограничения на производство транспортёров: не более 150 наклонных и не более 200 горизонтальных. Доход от производства составляет 800 р. на производство наклонных и 500 р. на производство горизонтальных транспортёров. Требуется определить ежедневное производство транспортёров обоих видов для получения максимального дохода.

Вариант № 24. Предприятие производит два вида изделий – А и В, каждое из которых проходит три этапа производства: получение заготовок, механическую обработку и сборку. При этом цена изделия А составляет 3 тыс. р., изделия В – 15 тыс. р. Известно время, которое требуется каждому из подразделений на выпуск изделий (T_1 – для заготовительного подразделения, T_2 – для механообрабатывающего, T_3 – для сборочного). Все подразделения работают в 2 смены по 8 ч, количество рабочих дней в году равно 250.

Требуется построить математическую модель, позволяющую установить, какое количество изделий каждого вида нужно производить, чтобы доход от реализации продукции был максимальным.

Изделие	Затраты времени на изготовление изделий, смен/шт.			Цена изделия, тыс. р.	Спрос на изделие, тыс. шт./год
	T_1	T_2	T_3		
A	2	1	1,6	3	1,75
B	2	4	3,2	15	1

2.5. Контрольные вопросы

1. Какие основные элементы включает в себя задача математического программирования?
2. В чём характерная особенность задач линейного программирования?
3. Что такое целевая функция?
4. Какие исходные данные необходимы для решения задачи линейного программирования?
5. Может ли задача иметь более одного допустимого решения? Более одного оптимального решения?
6. В чём преимущество графо-аналитического метода решения задач линейного программирования?
7. С какой целью строится вектор градиентного направления целевой функции?
8. Можно ли графо-аналитически решить задачу с более чем двумя неизвестными?

3. РАСЧЁТЫ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Цель работы – освоить некоторые классические задачи теории массового обслуживания.

3.1. Введение

Теория массового обслуживания (ТМО) составляет один из разделов теории вероятностей. В этой теории рассматриваются вероятностные задачи и математические модели. Первые задачи теории массового обслуживания были рассмотрены в период между 1908 и 1922 годами сотрудником Копенгагенской телефонной компании, учёным Агнером Эрлангом (1878 – 1929) – датским математиком, статистиком и инженером, основателем научного направления по изучению трафика в телекоммуникационных системах и теории массового обслуживания. Перед Эрлангом стояла задача упорядочить работу телефонной станции и заранее рассчитать качество обслуживания потребителей в зависимости от числа используемых устройств.

Теорию массового обслуживания иногда называют теорией очередей. Появление очередей возможно не только при обслуживании в магазинах или в работе телефонной станции, но имеются очень частые случаи возникновения очередей в производственных условиях. Так, детали скапливаются перед станком в ожидании обработки, заявки от требующих обслуживания станков встают в очередь к оператору-многостаночнику, наладчику, ремонтникам. Примером возникновения очередей может быть:

– поступление транспортных средств, требующих технического обслуживания, на ремонтную базу, когда, в зависимости от численности технического персонала, ремонтная база может одновременно обслуживать одно или несколько транспортных средств;

– прибытие пациентов на приём к врачу, когда даже при наличии системы предварительной записи по целому ряду причин число ожидающих может флуктуировать, и, таким образом, возможно образование очереди;

– попытки дозвониться по телефону, когда набирающие телефонные номера абоненты нуждаются в обслуживании в виде телефонных разговоров;

– возникновение очереди у железнодорожной кассы.

Основными элементами систем массового обслуживания (МО) являются заявки (требования) на обслуживание и механизм их обслуживания. Для моделей МО характерно, что поступление заявок и/или обслуживание по времени имеют вероятностный характер.

Важной характеристикой для систем МО является механизм (дисциплина) обслуживания. Наиболее часто имеет место дисциплина обслуживания по правилу «первым пришёл – первым обслужен». Нередко заявки группируются по принципу приоритетности. Например, при разработке плановых заданий и их реализации предпочтение сначала отдают срочным и опаздывающим заявкам на выпуск деталей, далее запускаются детали, срок выпуска которых приходится на данный планируемый период. И в последнюю очередь планируются к запуску детали для задела, срок выпуска которых приходится на очередные плановые периоды.

Результаты этого научного направления весьма эффективно используются в экономических расчётах, в теориях принятия решений, надёжности и т. д.

3.2. Одноканальная система массового обслуживания с отказами

В СМО одна или более переменных, участвующих в описании системы, подчиняются вероятностному закону. Введём общепринятые для теории массового обслуживания обозначения:

$\frac{1}{t} = \lambda$	**интенсивность потока заявок** (среднее число заявок, поступивших в систему за единицу времени)
$\frac{1}{f} = \mu$	**интенсивность обслуживания** (среднее число обслуженных заявок за единицу времени)
$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$	**нагрузка системы**

Пусть система имеет один канал обслуживания, на который поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ. Поток обслуживаний имеет интенсивность μ. Заявка, заставшая систему занятой, сразу же покидает её. Требуется найти абсолютную и относительную пропускные способности СМО и вероятность того, что заявка, пришедшая в момент времени t, получит отказ.

При описании СМО удобно пользоваться геометрической схемой – **графом состояний**. Вершины графа представляют собой различные состояния системы. Дуги графа – возможные переходы из состояния в состояние. Для наглядности на графе состояний системы у каждой дуги проставляют интенсивности потока событий, который переводит систему по данной дуге из состояния S_i в S_j. Такой граф называется **размеченным графом состояний** (рис. 3.1).

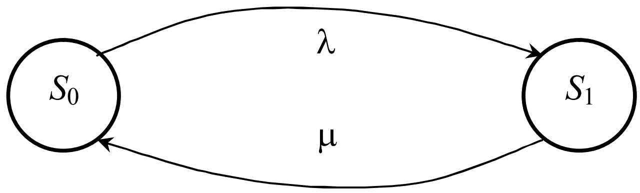


Рис. 3.1. Граф состояний одноканальной СМО с отказами

Система при любом $t > 0$ может находиться в двух состояниях: S_0 – канал свободен; S_1 – канал занят. Переход из S_0 в S_1 связан с появлением заявки и немедленным началом её обслуживания. Переход из состояния S_1 в S_0 осуществляется, как только очередное обслуживание завершится.

Абсолютная пропускная способность (среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени)

$$A = \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu}, \text{ шт/ед. времени.}$$

Относительная пропускная способность (средняя доля заявок, обслуживаемых системой)

$$Q = \frac{\mu}{\lambda + \mu}.$$

Вероятность отказа (вероятность того, что заявка покинет СМО необслуженной)

$$P_{\text{отк}} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.$$

Очевидны следующие соотношения:

$$Q = 1 - P_{\text{отк}},$$

$$P_{\text{отк}} = 1 - Q.$$

3.3. Одноканальная система массового обслуживания с ограниченной очередью

Рассмотрим систему массового обслуживания (СМО), имеющую один источник заявок (требований), проходящих через единственный канал обслуживания (обслуживающее устройство, узел) (рис. 3.2).

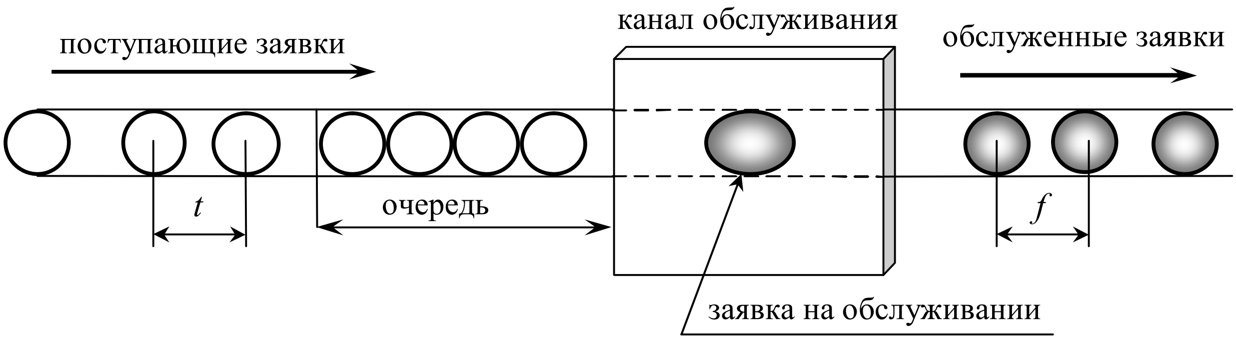


Рис. 3.2. Структура одноканальной системы массового обслуживания

Требования поступают через интервалы времени продолжительностью в t единиц. Обслуживаются требования за интервалы времени продолжительностью в f единиц. Как только заканчивается обслуживание одного требования, канал обслуживания готов без задержек к обработке очередной заявки. Очередь заявок на обслуживание имеет одну из простейших и часто используемых дисциплин – «первым пришёл – первым обслужен».

Поведение приведённой СМО зависит от соотношения f и t. Если $f > t$, т. е. скорость обслуживания меньше, чем скорость поступления заявок, то образуется очередь, которая будет всё время возрастать. Если $f = t$ и эти величины детерминированы, то число поступающих требований будет равно числу обслуженных. Если $f < t$, то скорость обслуживания больше, чем скорость поступления требований, и в случае детерминированных величин очередей не возникает, пропускная способность СМО достаточна для избавления от любой очереди.

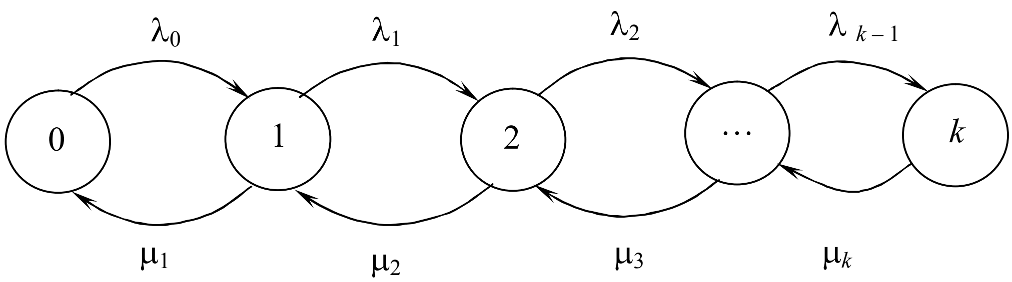


Рис. 3.3. Граф состояний одноканальной СМО

На рис. 3.3 представлена цепь с конечным состоянием k, где λ_0, λ_1, …, λ_{k-1} – поток заявок (требований); μ_1, μ_2, …, μ_k – поток обслуживания; нулевое состояние системы – отсутствие заявок; 1, 2, …, k – количество заявок в системе в рассматриваемый момент времени.

Используя аппарат дифференциально-разностных уравнений и условие стационарности процесса, можно записать

$$\lambda_0 \cdot P_0 = \mu_1 \cdot P_1 \Rightarrow P_1 = P_0 \cdot \frac{\lambda_0}{\mu_1} \Rightarrow \lambda_1 \cdot P_1 + \mu_1 \cdot P_1 = \lambda_0 \cdot P_0 + \mu_2 \cdot P_2.$$

После подстановки и преобразований получаем

$$P_2 = P_0 \cdot \frac{\lambda_0 \cdot \lambda_1}{\mu_1 \cdot \mu_2},$$

где P_0 – вероятность простоя канала обслуживания; P_1, P_2 – вероятности нахождения в системе соответственно одной и двух заявок.

По аналогии можно получить выражение для *вероятности нахождения СМО в произвольном, k-м состоянии*

$$P_k = P_0 \cdot \frac{\lambda_0 \cdot \lambda_1 \ldots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \cdot \mu_2 \ldots \mu_k}.$$

Поскольку для рассматриваемой элементарной модели

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_{k-1} = \lambda,$$

$$\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k = \mu,$$

откуда окончательное выражение

$$P_k = P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k = P_0 \cdot \rho^k.$$

Определим *вероятность простоя* P_0:

$$P_0 + P_1 + P_2 + \ldots + P_k = 1,$$

$$P_0 = 1 - P_0\,\rho - P_0\,\rho^2 - \ldots - P_0\,\rho^{\mathrm{k}},$$

$$P_0 = 1 - P_0\,\rho\,(1 + \rho + \rho^2 + \ldots + \rho^{k-1}).$$

Выражение в скобках является геометрической прогрессией, сумма которой при $\rho < 1$ равна $1/(1-\rho)$. Тогда искомая вероятность равна

$$P_0 = 1 - \rho.$$

Приведём без вывода ряд конечных расчётных выражений для элементарной СМО. Элементарная СМО часто используется для оценочных расчётов и характеризуется следующим: одно обслуживающее устройство, мощность источника заявок не ограничена, время между поступающими и обслуженными заявками определяется по экспоненциальному распределению.

$\overline{\overline{N}} = \dfrac{\rho}{1-\rho}$	**среднее число требований в системе**
$T = \dfrac{1}{\mu(1-\rho)}$	**среднее время пребывания заявки в системе**
$N_q = \dfrac{\rho}{\mu(1-\rho)}$	**время нахождения заявки в очереди**
$L_q = \dfrac{\rho^2}{1-\rho}$	**средняя длина очереди**

3.4. *n*-КАНАЛЬНАЯ СИСТЕМА МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ОТКАЗАМИ

Это одна из первых задач теории массового обслуживания. Она возникла из практических нужд телефонии и была решена в начале XX века датским математиком Эрлангом.

Пусть в системе имеется n каналов, на которые поступает поток заявок с интенсивностью λ. Поток обслуживаний имеет интенсивность μ. Заявка, заставшая систему занятой, сразу же покидает её.

Требуется найти абсолютную и относительную пропускную способность СМО; вероятность того, что заявка, пришедшая в момент времени t, получит отказ; среднее число заявок, обслуживаемых одновременно (среднее число занятых каналов).

Состояние системы S (СМО) нумеруется по максимальному числу заявок, находящихся в системе (оно совпадает с числом занятых каналов):

– S_0 – в СМО нет ни одной заявки;

– S_1 – в СМО находится одна заявка (один канал занят, остальные свободны);

– S_2 – в СМО находятся две заявки (два канала заняты, остальные свободны);

– . . .

– S_n – в СМО находится n заявок (все n каналов заняты).

Граф состояний СМО представлен на рис. 3.4.

Из состояния S_0 в состояние S_1 систему переводит поток заявок с интенсивностью λ (как только приходит заявка, система переходит из S_0 в S_1). Если система находилась в состоянии S_1 и пришла ещё одна заявка, то она переходит в состояние S_2, и т. д.

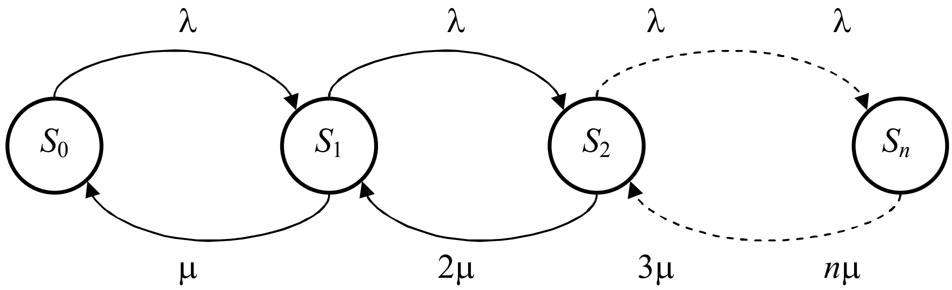


Рис. 3.4. Граф состояний *n*-канальной СМО с отказами

Пусть система находится в состоянии S_1 (работает один канал). Он производит μ обслуживаний в единицу времени. Поэтому дуга перехода из состояния S_1 в состояние S_0 нагружена интенсивностью μ. Пусть теперь система находится в состоянии S_2 (работают два канала). Чтобы ей перейти в S_1, нужно, чтобы закончил обслуживание либо первый канал, либо второй. Суммарная интенсивность их потоков равна 2μ и т. д.

Выходные характеристики (характеристики эффективности) данной СМО определяются следующим образом.

Абсолютная пропускная способность

$$A = \lambda\left[1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot \frac{p_0}{n!}\right], \text{ шт./ед. времени,}$$

где n – количество каналов СМО; p_0 – вероятность нахождения СМО в начальном состоянии, когда все каналы свободны (финальная вероятность нахождения СМО в состоянии S_0).

Вероятность нахождения СМО в начальном состоянии

$$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{1 \cdot 2 \cdot \mu^2} + \frac{\lambda^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \mu^3} + \ldots + \frac{\lambda^n}{n!\mu^n}\right)^{-1}.$$

При этом $p_1 = \dfrac{\lambda}{\mu} p_0$; $p_2 = \dfrac{\lambda^2}{2\mu^2} p_0$; $p_n = \dfrac{\lambda^n}{n!\mu^n} p_0$.

Относительная пропускная способность $Q = 1 - \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot \dfrac{p_0}{n!}$.

Абсолютная пропускная способность $A = \lambda Q$.

Вероятность отказа $P_{\text{отк}} = \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot \dfrac{p_0}{n!}$.

Среднее число занятых каналов (среднее число заявок, обслуживаемых одновременно)

$$\bar{k} = \frac{\lambda}{\mu}\left[1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot \frac{p_0}{n!}\right] = \frac{\lambda}{\mu} Q .$$

3.5. Задания для самостоятельной работы

Одноканальная СМО с отказами

3.5.1. Технологическая система состоит из одного станка – многоцелевого обрабатывающего центра. На станок поступают заявки на изготовление деталей в среднем через t ч (табл. 3.1). Среднее время изготовления одной детали равно f ч. Если при поступлении заявки на изготовление детали станок занят, то деталь направляется на другой станок.

Требуется определить: а) производительность работы станка, деталей в час; б) процент деталей, которые обрабатываются на данном станке; в) вероятность того, что очередная деталь будет перенаправлена на обработку на другой станок.

Таблица 3.1

Варианты исходных данных

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
t, ч	0,5	0,45	0,6	0,3	1,1	2	0,15	0,8	0,9	1,5	2,3	0,7
f, ч	0,6	0,2	0,1	0,25	0,45	2,3	1,3	0,4	0,1	0,6	1,75	0,7
Вариант	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
t, ч	0,8	0,7	1	0,4	2	3,8	0,1	1,4	1,6	2,8	4,4	1,2
f, ч	1	0,2	0,15	0,3	0,7	4,4	2,4	0,6	0,8	1	3,3	1,2

Одноканальная СМО с ограниченной очередью

3.5.2. На участке автоматизированного производства имеется гибкий производственный модуль (ГПМ, рис. 3.5), состоящий из одного обслуживающего устройства (токарного станка с ЧПУ), накопителя для размещения очереди заявок (тактового стола) и промышленного робота.

Известно среднее время между поступающими заявками (заготовками для последующей обработки) t и среднее время обслуживания (токарной обработки заготовок по управляющей программе) f. Поскольку ёмкость накопителя ограничена, может создаться неблагоприятная ситуация, когда очередной заявке будет отказано в обслуживании по причине отсутствия свободных ячеек в накопителе. В таком случае заготовка транспортируется на другой, свободный ГПМ, что приводит к дополнительным транспортным потерям.

Необходимо определить минимальную ёмкость накопителя, если вероятность переполнения накопителя и, следовательно, отказа от приёма очередной заявки не должна превышать $P_{\text{отк}}$. Варианты заданий приведены в табл. 3.2.

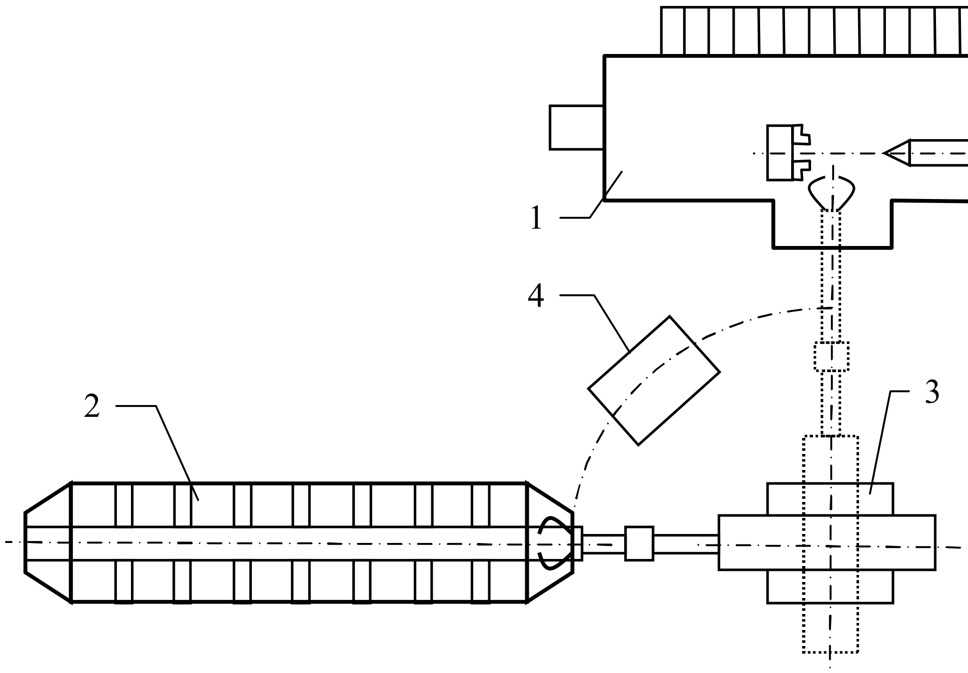


Рис. 3.5. Схема гибкого производственного модуля 16В16ПФ3РМ:
1 – токарный станок с ЧПУ мод. 16Б16Ф331; 2 – накопитель (тактовый стол);
3 – промышленный робот; 4 – стол кантования заготовок

Примечание. При решении задачи можно использовать следующие рассуждения. Пусть n – ёмкость накопителя. Тогда в зависимости от того, сколько заготовок находится в данный момент времени в системе, можно перечислить все состояния, при которых не происходит отказа в обслуживании:

0-е состояние – ни одной заготовки в системе;

1-е состояние – одна заготовка обрабатывается;

2-е состояние – одна заготовка обрабатывается, вторая находится в накопителе; и т. д.;

n-е состояние – одна заготовка обрабатывается, n находятся в накопителе.

Вероятность того, что система находится в одном из перечисленных «благоприятных» состояний, есть сумма вероятностей появления каждого из них. С учётом заданной допустимой вероятности отказа в обслуживании, можно записать следующее неравенство:

$$P_0 + P_1 + P_2 + \ldots + P_n \geq 1 - P_{\text{отк}} .$$

После подстановки формулы для вероятности произвольного k-го состояния системы

$$(1 - \rho)\cdot(1 + \rho + \ldots + \rho^n) \geq 1 - P_{\text{отк}} .$$

Сумма $(1 + \rho + ... + \rho^n)$ в левой части неравенства представляет собой сумму первых $n + 1$ членов геометрической прогрессии, которую можно вычислить по формуле

$$(1 + \rho + \ldots + \rho^n) = (1 - \rho^{n+1}) / (1 - \rho).$$

Дальнейшее решение сводится к упрощению неравенства, его логарифмированию и получению выражения, из которого можно определить минимальную ёмкость накопителя n.

Таблица 3.2

Варианты исходных данных

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
t, мин	43	33	22	20	21	25	35	47	26	32	21	17
f, мин	28	21	16	17	14	20	23	22	18	24	14	12
$P_{\text{отк}}$, %	1	0,1	0,1	1	0,1	1	1	0,1	1	0,1	0,1	1
Вариант	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
t, мин	22	39	24	30	38	48	40	30	51	38	35	24
f, мин	12	18	17	22	25	34	26	19	37	32	23	19
$P_{\text{отк}}$, %	0,1	0,1	1	0,1	0,1	1	1	0,1	0,1	1	0,1	1

n-канальная СМО с отказами

3.5.3. Имеется технологическая система, состоящая из трёх одинаковых станков. На станок поступают заявки на изготовление деталей в среднем через t мин. Среднее время изготовления одной детали равно f мин. Если при поступлении заявки на изготовление детали все станки заняты, то деталь направляется на другой участок таких же станков.

Необходимо найти вероятности состояний и характеристики (показатели эффективности) данной СМО: а) сколько процентов направляемых деталей обрабатывается в данной системе; б) какова вероятность отказа; в) сколько станков в среднем работает одновременно; г) какова вероятность того, что все станки простаивают?

Варианты заданий приведены в табл. 3.3.

Таблица 3.3

Варианты исходных данных

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
t, мин	66	53	39	36	37	43	56	71	44	52	37	32
f, мин	57	47	31	32	28	36	40	39	33	41	28	26
Вариант	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
t, мин	39	61	41	49	59	72	62	49	76	59	56	41
f, мин	26	33	32	39	43	54	44	35	58	52	40	35

3.6. Дополнительные задания повышенной сложности

3.6.1. В инструментальном отделении сборочного цеха работают три кладовщика. В среднем за 1 мин за инструментом приходят λ рабочих. Обслуживание одного рабочего занимает у кладовщика f мин. Очередь не имеет ограничения. Стоимость 1 мин работы рабочего равна K р., а кладовщика – M р.

Требуется определить средние потери цеха при данной организации обслуживания в инструментальном отделении (стоимость простоя, р./мин). Варианты заданий приведены в табл. 3.4.

Таблица 3.4

Варианты исходных данных

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
λ, мин$^{-1}$	0,91	1,13	1,54	1,67	1,62	1,40	1,07	0,85	1,36	1,15	1,62	1,88
f, мин	0,95	0,78	0,52	0,53	0,47	0,60	0,67	0,65	0,55	0,68	0,47	0,43
K, р.	30	25	26	32	44	50	27	36	28	44	42	31
M, р.	15	14	16	13	12	21	14	18	19	29	27	22
Вариант	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
t, мин	1,54	0,98	1,46	1,22	1,02	0,83	0,97	1,22	0,79	1,02	1,07	1,46
f, мин	0,43	0,55	0,53	0,65	0,72	0,90	0,73	0,58	0,97	0,87	0,67	0,58
K, р.	36	28	44	42	31	30	25	26	32	44	50	36
M, р.	18	19	29	27	22	15	14	16	13	12	21	18

3.6.2. На промышленном предприятии решается вопрос о том, сколько потребуется механиков для работы в ремонтном цехе. В среднем отказы машин происходят с частотой $\lambda = 10$ отказов в час. Для устранения неисправности механику требуется в среднем $f = 3$ мин. Возможно организовать 4 или 6 рабочих мест в цехе для механиков предприятия.

Необходимо выбрать наиболее эффективный вариант обеспечения ремонтного цеха рабочими местами для механиков. Критерий эффективности сформулировать самостоятельно.

3.6.3. Крупное машиностроительное предприятие эксплуатирует автомобили одной марки. Простейший поток отказов автомобилей имеет интенсивность $\lambda = 0{,}25$ отказа в день. Среднее время устранения одного отказа автомобиля одним механиком равно 2 ч. Возможны два варианта обслуживания: 1) все автомобили обслуживают два механика с одинаковой производительностью; 2) все автомобили предприятия обслуживают три механика, причём производительность каждого из них вдвое меньше, чем у механиков в предыдущем случае.

Необходимо выбрать наилучший вариант организации обслуживания автомобилей. Критерий выбора сформулировать самостоятельно.

3.7. Контрольные вопросы

1. Какие основные элементы включает в себя СМО?
2. Какие правила могут использоваться в механизме обслуживания СМО?
3. Какие данные необходимы для расчёта интенсивностей потока заявок и обслуживания?
4. С какой целью используется размеченный граф состояний СМО?
5. Что характеризуют абсолютная и относительная пропускные способности СМО?
6. Как зависит пропускная способность одноканальной СМО с ограниченной очередью от соотношения между скоростями поступления заявок и обслуживания?

4. МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ

Цель работы – освоить ряд практических примеров использования теории управления запасами

4.1. Основы теории управления запасами

Управление запасами – это поддержание оптимальной величины текущего остатка запасов с целью:

– недопущения образования избыточного уровня запасов, ведущего к излишней иммобилизации средств предприятия и дополнительным складским издержкам;

– обеспечения нормальной ритмичности производственно-финансового цикла.

Задача управления запасами возникает, когда необходимо создать запас материальных ресурсов или предметов потребления с целью удовлетворения спроса на заданном интервале времени. Для обеспечения непрерывного и эффективного функционирования практически любой организации необходимо создание запасов. В любой задаче управления запасами требуется определить количество заказываемой продукции и сроки размещения заказов.

Спрос можно удовлетворить:

– путём однократного создания запаса на весь рассматриваемый период времени;

– посредством создания запаса для каждой единицы времени этого периода.

Эти два случая соответствуют избыточному запасу (по отношению к единице времени) и недостаточному запасу (по отношению к полному периоду времени).

При **избыточном запасе** требуются более высокие удельные (отнесённые к единице времени) капитальные вложения, но дефицит возникает реже, и частота размещения заказов меньше.

При **недостаточном запасе** удельные капитальные вложения снижаются, но частота размещения заказов и риск дефицита возрастают.

Для любого из этих двух крайних случаев характерны значительные экономические потери. Таким образом, решения относительно размера заказа и момента его размещения могут основываться на минимизации соответствующей функции общих затрат, включающих затраты, обусловленные потерями от избыточного запаса и дефицита.

Для обеспечения непрерывного функционирования любого подразделения необходимо создание запасов. Поэтому в задачах управления запасами требуется определять количество заказываемой продукции и сроки размещения заказов.

4.2. Детерминированная модель управления запасами

Для многих оценочных расчётов используют простейшую детерминированную модель управления запасами. Модель управления запасами простейшего типа характеризуется постоянным во времени спросом, мгновенным пополнением запаса и отсутствием дефицита.

Такую модель можно применять в следующих типичных ситуациях:

– использование некоторых промышленных изделий, таких как крепёжные элементы;

– использование осветительных ламп в здании;

– использование канцелярских товаров крупной фирмой;

– потребление основных продуктов питания и т. д.

На рис. 4.1 показано изменение уровня запаса во времени. Предполагается, что интенсивность спроса (в единицу времени) равна β. Наивысшего уровня запас достигает в момент поставки заказа размером y (предполагается, что запаздывание поставки является заданной константой). Уровень запаса достигает нуля спустя $t_0 = y/\beta$ единиц времени после получения заказа размером y.

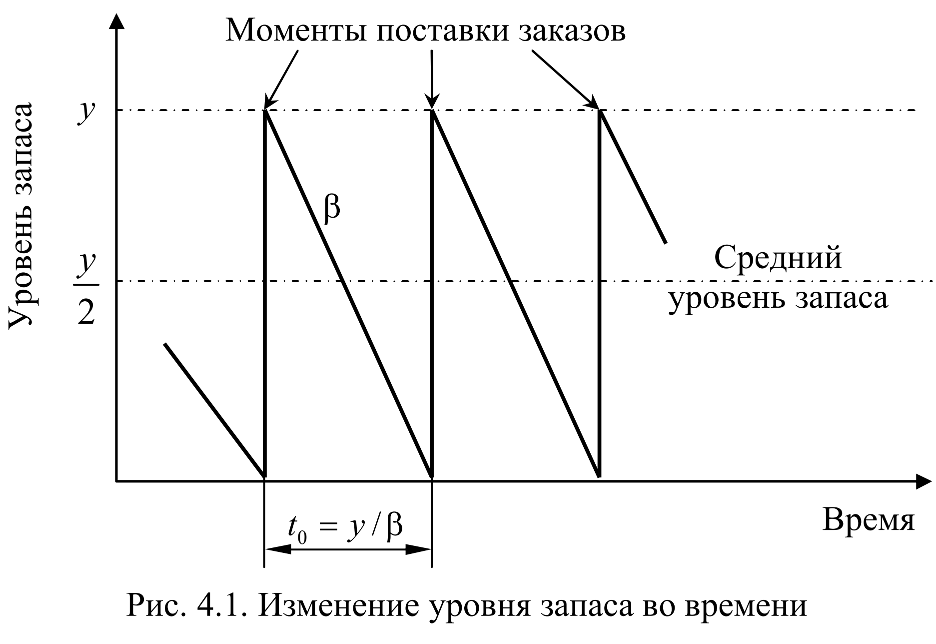


Рис. 4.1. Изменение уровня запаса во времени

Чем меньше размер заказа y, тем чаще нужно размещать заказы. Однако при этом средний уровень запаса будет уменьшаться. С другой стороны, с увеличением размера заказов уровень запаса повышается, но заказы размещаются реже (рис. 4.2).

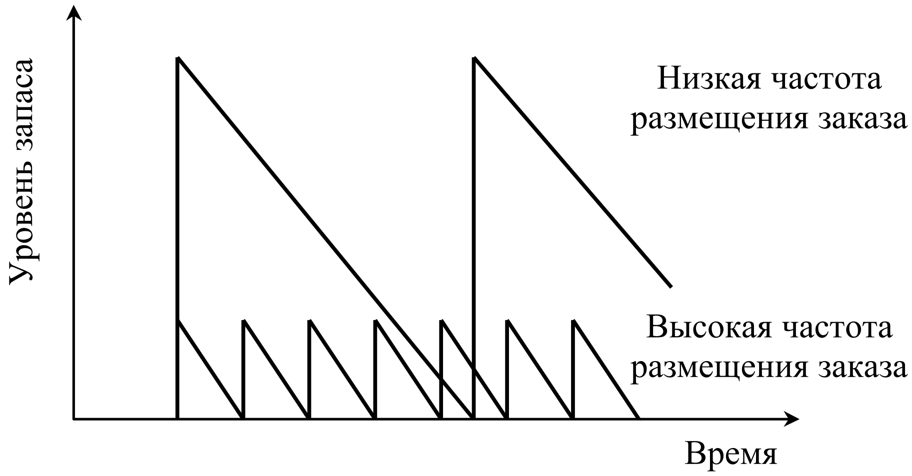


Рис. 4.2. Частота размещения заказа

Так как затраты зависят от частоты размещения заказа и объёма хранимого запаса, то величина y выбирается из условия обеспечения сбалансированности между двумя видами затрат. Это лежит в основе построения соответствующей модели управления запасами.

Пусть K – *затраты на оформление заказа*, имеющие место всякий раз при его размещении, h – *затраты на хранение единицы заказа* в единицу времени. Следовательно, суммарные затраты в единицу времени можно представить в виде

$$C(y)=\frac{K}{y/\beta}+h\cdot\frac{y}{2},$$

где $\frac{K}{y/\beta}$ – затраты на оформление заказа в единицу времени; $h\cdot\frac{y}{2}$ – затраты на хранение запасов в единицу времени; $t_0=y/\beta$ – продолжительность цикла движения заказа; $y/2$ – средний уровень запаса.

Оптимальное значение y получается в результате минимизации $C(y)$ по y. Таким образом, в предположении, что y – непрерывная переменная, имеем

$$\frac{dC(y)}{dy}=-\frac{K\beta}{y^2}+\frac{h}{2}=0,$$

оптимальный размер заказа определяется выражением

$$y^* = \sqrt{\frac{2K\beta}{h}}\,.$$

Данное выражение называют **формулой экономичного размера заказа Уилсона**. Можно доказать, что y^* доставляет минимум $C(y)$, показав, что вторая производная в точке y^* строго положительна.

Таким образом, оптимальная стратегия модели предусматривает заказ y^* единиц продукции через каждые $t_0^* = y^*/\beta$ единиц времени. Оптимальные затраты в данном случае равны

$$C(y^*) = \sqrt{2K\beta h}\,.$$

4.3. Модель с дополнительной финансовой составляющей

Для обеспечения производственных процессов сырьём, материалами и заготовками многие промышленные предприятия обычно используют краткосрочный банковский кредит, плата за который зависит от размера и времени кредитования t. Таким образом, при расчёте оптимального размера заказа в модели управления затратами необходимо учитывать **дополнительную финансовую составляющую**

$$C_K = П \cdot Ц \cdot y + Д \cdot Ц \cdot y \cdot t\,,$$

где $П$ – процент за банковский кредит, %/100; $Ц$ – цена единицы запаса; $Д$ – коэффициент увеличения процента за банковский кредит с ростом времени кредитования t.

Для определения дополнительных затрат в единицу времени поделим оба слагаемых на $t = y/\beta$, тогда

$$C_K(y) = П \cdot Ц \cdot \beta + Д \cdot Ц \cdot y\,.$$

Дополнив полученным выражением формулу для суммарных затрат в единицу времени, получаем

$$C(y) = \frac{K}{y/\beta} + h \cdot \frac{y}{2} + П \cdot Ц \cdot \beta + Д \cdot Ц \cdot y\,.$$

Из условия минимума целевой функции $C(y)$ получаем формулу для расчёта *оптимального размера партии деталей*

$$y^* = \sqrt{\frac{2K \cdot \beta}{h + 2Д \cdot Ц}}\,.$$

4.4. Модель непрерывного контроля состояния запаса

Для большинства реальных ситуаций существует положительный **срок выполнения заказа** (запаздывание) $t_п$ от момента размещения заказа до его действительной поставки. Поэтому стратегия размещения заказов должна определять **точку возобновления заказа**.

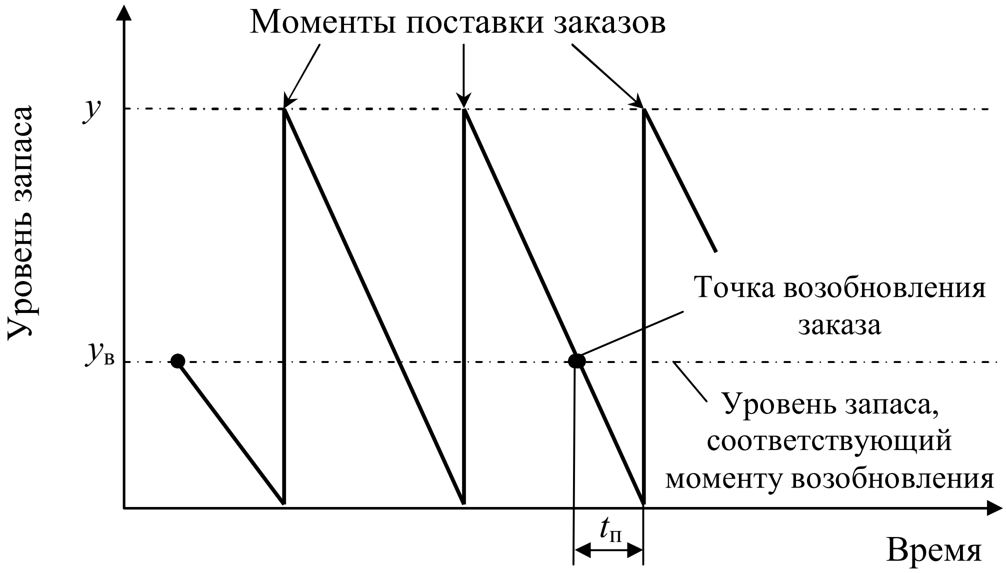


Рис. 4.3. Положение точки возобновления заказа

На рис. 4.3 показан случай, когда точка возобновления заказа должна опережать на $t_п$ единиц времени ожидаемую поставку. Срок выполнения заказа $t_п$ можно всегда принять меньше продолжительности цикла t_0*. В практических целях эту информацию можно просто преобразовать, определив точку возобновления заказа через уровень запаса $y_в$, соответствующий моменту возобновления. На практике это реализуется путём непрерывного контроля уровня запаса до момента достижения очередной точки возобновления заказа.

4.5. Модель со стохастическим запаздыванием поставок

Параметры элементарной модели являются детерминированными, что редко встречается на практике. Предположим, что время выполнения заказа не равно нулю и имеет вероятностный характер с нормальным законом распределения, для которого известны математическое ожидание $t_п$ и стандартное отклонение σ (рис. 4.4).

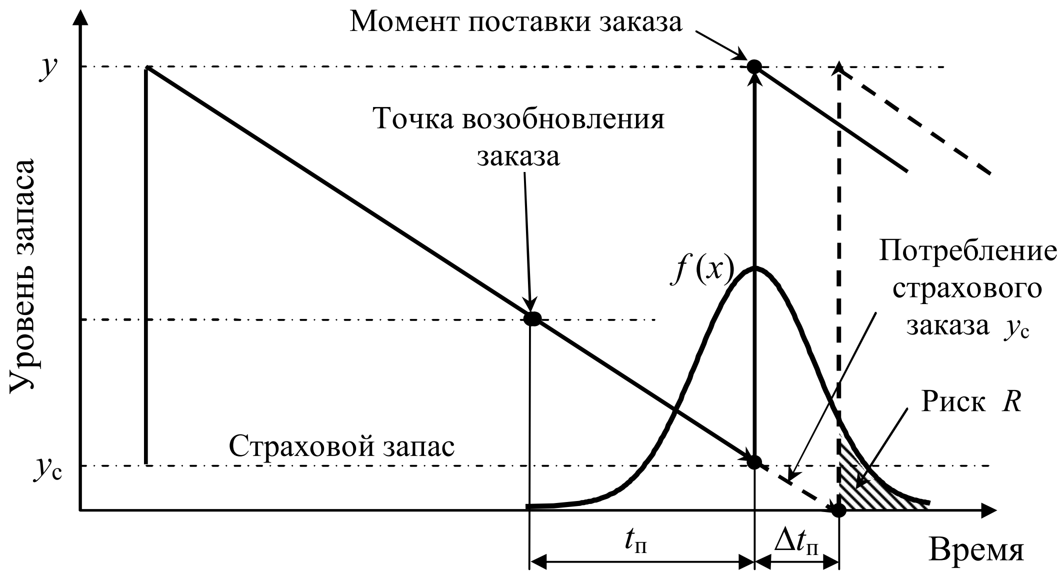


Рис. 4.4. Распределение времени выполнения заказа $t_п$

Чтобы не сорвать подачу заказа, можно использовать две стратегии:

– уменьшить среднее время выполнения заказа $t_п$;

– создать страховой запас на время возможного опоздания $\Delta t_п$.

При ограниченном круге поставщиков первая стратегия трудновыполнима. Вторая стратегия требует обоснованного выбора размера страхового запаса, поскольку его создание приводит к связыванию оборотных средств предприятия. Например, если необходимо с почти 99,7 % вероятностью исключить дефицит, тогда запас должен быть создан на время $\Delta t_п = 3\sigma$.

В общем случае для определения величины страхового запаса $y_с$ можно использовать следующую методику:

1) исходя из допускаемого риска R возникновения дефицита, определяют вероятность $P_с$ того, что запаздывание поставки будет находиться в интервале от $t_п$ (страховой запас не используется) до $t_п + \Delta t_п$ (страховой запас используется полностью):

$$P_с = 0{,}5 - R;$$

2) по таблице функции Лапласа (см. Приложение) находят аргумент z функции нормального распределения, принимая значение функции $\Phi(z) = P_с$;

3) определяют время возможного опоздания поставки $\Delta t_п$, т. е. время, на которое должен быть создан страховой запас:

$$\Delta t_п = z \cdot \sigma;$$

4) рассчитывают величину страхового запаса

$$y_с = \Delta t_п \cdot \beta.$$

4.6. Модель планирования экономичного размера партии

Детерминированную модель, используемую для моделирования процессов закупки продукции у внешнего поставщика, можно модифицировать и применять в других ситуациях, например при планировании размера партии деталей в производственном процессе.

Рассмотрим некоторый производственный процесс, когда на первом станке производится партия деталей с интенсивностью λ дет./ч, которые используются на втором станке с интенсивностью β дет./ч (рис. 4.5). График изменения уровня запасов представлен на рис. 4.6.

Рис. 4.5. Последовательный процесс производства
с разной производительностью станков

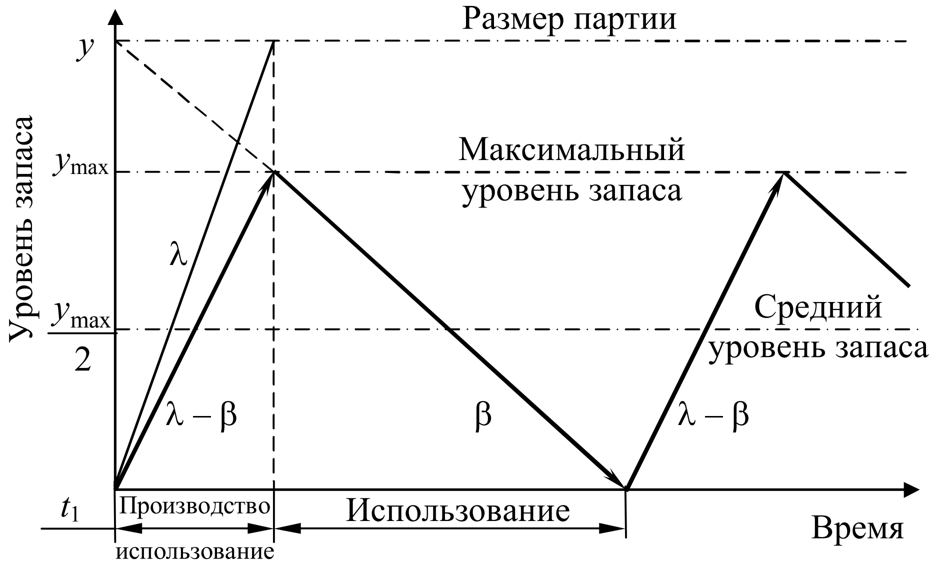


Рис. 4.6. Изменение уровня запасов

В данном случае модель должна определять оптимальный размер партии деталей для первого станка. Уравнение общих затрат имеет вид

$$C(y) = \frac{K}{y/\beta} + h \cdot \frac{y_{\max}}{2}.$$

Средний уровень запасов равен половине его максимального уровня $y_{\max}$, который в данном случае отличен от размера партии y. Из рис. 4.6 видно, что максимальный уровень достигается за время t_1, возрастая с интенсивностью $(\lambda - \beta)$, таким образом

$$y_{\max} = t_1 \cdot (\lambda - \beta) = \frac{y}{\lambda} \cdot (\lambda - \beta) = y\left(1 - \frac{\beta}{\lambda}\right),$$

откуда средний запас равен

$$\frac{y_{\max}}{2} = \frac{y}{2}\left(1 - \frac{\beta}{\lambda}\right).$$

Тогда уравнение общих затрат принимает следующий вид:

$$C(y) = \frac{K}{y/\beta} + h \cdot \frac{y}{2}\left(1 - \frac{\beta}{\lambda}\right).$$

Из условия минимизации общих затрат получаем формулу **оптимального размера партии деталей**

$$y^* = \sqrt{\frac{2K\beta}{h \cdot (1 - \beta/\lambda)}}.$$

4.7. Задания для самостоятельной работы

Детерминированная модель управления запасами

4.7.1. На машиностроительном заводе «Редуктор» в технологическом процессе изготовления зубчатых колёс используются покупные заготовки – поковки из стали 14ХГСН2МА. Затраты на оформление заказа заготовок составляют K р., затраты на складское хранение одной заготовки в день составляют h р. (табл. 4.1).

Требуется определить: а) оптимальный размер заказа y^*, исходя из условия минимизации суммарных затрат; б) периодичность заказа заготовок t_0^*; в) величину оптимальных затрат. После выполнения расчётов представить графически изменение уровня запаса во времени.

Модель с дополнительной финансовой составляющей

4.7.2. Отдел логистики завода «Редуктор» принял решение использовать краткосрочный банковский кредит для закупки заготовок зубчатых колёс. Требуется определить, насколько изменится оптимальный размер заказа y^* по сравнению с результатами расчётов в предыдущей задаче, если известно, что процент за банковский кредит составляет 10 %, цена одной заготовки равняется 1950 р., коэффициент увеличения процента за банковский кредит с ростом времени кредитования равен 0,001.

Модель непрерывного контроля состояния запаса

4.7.3. ОАО «Штамп», которое поставляет заводу «Редуктор» заготовки зубчатых колёс, способно выполнять поставки в среднем в течение $t_п$ дней с момента оформления и оплаты заказа (табл. 4.1).

Требуется определить, при каком остаточном уровне запаса заготовок на складе $y_в$ необходимо оформлять очередной заказ. Показать на графике из задачи 4.7.1 положение точки возобновления заказа.

Модель со стохастическим запаздыванием поставок

4.7.4. В связи с внедрением на заводе «Редуктор» новой политики в области качества, отдел логистики этого предприятия принял решение минимизировать вероятность простоя производства по причине срыва сроков поставки заготовок зубчатых колёс. Для реализации данного решения отделом была экономически обоснована допустимая вероятность дефицита R, а также выполнены статистические оценки, согласно которым, сроки поставки заготовок ОАО «Штамп» имеют среднее значение $t_п$ дней и стандартное отклонение σ дней (табл. 4.1).

Требуется определить величину страхового запаса заготовок на складе, при котором вероятность дефицита не будет превышать допустимую.

Таблица 4.1

Варианты исходных данных к задачам 4.7.1 – 4.7.4

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
K, р.	4000	4500	5000	6000	7000	8000	9000	9500	4000	4500	5000	6000
β, шт./день	10	15	12	10	15	12	10	15	12	10	15	12
h, р./день	2	1,5	1,2	1,8	2	1,7	3	3,5	1	1,5	1,3	1,4
$t_п$, дней	4	7	6	5	7	9	8	4	5	8	6	7
R, %	5	2,5	5	2,5	5	2,5	5	2,5	5	2,5	5	2,5
σ, дней	1	1,2	1,4	2,3	2	1,7	1,8	1,1	1,4	1,3	2,1	1,9
Вариант	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
K, р.	7000	8000	9000	4000	4500	5000	6000	7000	8000	9000	9500	4000
β, шт./день	10	15	12	10	15	12	10	15	12	10	15	12
h, р./день	0,2	0,1	0,12	0,1	0,15	0,12	0,18	0,2	0,08	0,09	0,11	0,1
$t_п$, дней	9	10	12	4	5	6	7	8	9	10	4	5
R, %	5	2,5	5	5	2,5	5	2,5	5	2,5	5	2,5	5
σ, дней	1,4	1,3	2,1	1,9	1	1,2	1,4	2,3	2	1,7	1,8	1,1

4.8. Дополнительные задания повышенной сложности

Модель планирования экономичного размера партии

4.7.5. На некотором станке производятся детали в количестве N штук в месяц. Эти детали используются для производства продукции на другом станке с интенсивностью M штук в месяц. По оценкам специалистов компании, издержки хранения составляют 20 % средней стоимости запасов в год. Стоимость производства одной детали равна C р., а стоимость на подготовку производства составляет 1200 р.

Требуется определить: а) экономичный размер партии деталей, производимой на первом станке; б) период запуска производства этих партий; в) общие затраты на управление запасами.

Исходные данные приведены в табл. 4.2.

Таблица 4.2

Варианты исходных данных к задаче 4.7.5

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N, шт.	100	200	120	150	170	230	210	60	45	155	140	190
M, шт.	50	65	39	90	70	110	100	34	20	105	80	115
C, р.	20	25	50	55	50	45	49	25	70	20	30	80
Вариант	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
N, шт.	45	155	140	190	200	120	150	170	100	200	120	150
M, шт.	20	105	80	115	65	39	90	70	50	65	39	90
C, р.	45	49	25	70	20	30	80	20	25	50	55	50

4.9. Контрольные вопросы

1. В чём заключается основная цель управления запасами?
2. Чем характеризуется детерминированная модель управления запасами?
3. Как меняется частота размещения заказов при уменьшении их размера?
4. Какие затраты рассматриваются в детерминированной модели управления запасами?
5. С какой целью используется непрерывный контроль уровня запаса?
6. Какие стратегии применяются для снижения риска срывов поставок?

5. ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ НЕДОСТАТОЧНОСТИ ИНФОРМАЦИИ

Цель работы – освоить ряд классических методов принятия решений.

5.1. Введение

Теория принятия оптимальных решений представляет собой совокупность математических и численных методов, ориентированных на нахождение наилучших вариантов из множества альтернатив и позволяющих избежать их полного перебора. Ввиду того, что размерность практических задач, как правило, достаточно велика, а расчёты в соответствии с алгоритмами оптимизации требуют значительных затрат времени, то методы принятия оптимальных решений главным образом ориентированы на реализацию их с помощью ЭВМ.

С точки зрения знаний об исходных данных в процессе принятия решений можно представить два крайних случая: **определённость** и **неопределённость**. В некоторых случаях неопределённость знаний дополняется сведениями о действующих факторах, например законами распределения описывающих их случайных величин. Этот промежуточный случай соответствует ситуации **риска**.

5.2. Принятие решений в условиях риска

Принятие решений в условиях риска может быть основано на одном из следующих критериев:

- критерии ожидаемого значения;
- комбинации ожидаемого значения и дисперсии;
- критерии предпочтения и др.

5.2.1. Критерий ожидаемого значения

Использование критерия ожидаемого значения (ОЗ) предполагает принятие решения, обуславливающего максимальную прибыль (или минимальные затраты) при имеющихся исходных данных о вероятности полученного результата при том или другом решении. Критерий ОЗ представляет собой *выборочные средние значения случайной величины.*

Использование ожидаемых величин предполагает возможность многократного решения одной и той же задачи, пока не будут получены достаточно точные расчётные формулы. Другими словами, при достаточно большом объёме выборки разница между средним арифметическим значением и математическим ожиданием стремится к нулю (так называемая предельная теорема теории вероятности). Следовательно, использование критерия ОЗ справедливо только в случае, когда одно и то же решение приходится применять достаточно большое число раз. Верно и обратное: ориентация на ожидания будет приводить к неверным результатам для решений, которые приходится принимать небольшое число раз.

5.2.2. Критерий ожидаемого значения в сочетании с минимизацией его дисперсии

Критерий ОЗ можно модифицировать так, что его можно будет применить и для редко повторяющихся ситуаций. В этом случае используют комплексный критерий (комбинацию ожидаемого значения и дисперсии), в котором максимизация ожидаемого значения прибыли сочетается с минимизацией её дисперсии:

$$\text{ОЗ}^* = \text{ОЗ} \pm K \cdot D,$$

где K – коэффициент (0,1…1); D – дисперсия или мера разброса (например: стандартное отклонение, размах, выборочный коэффициент вариации); знак минус для доходов, плюс – для убытков.

Коэффициент K можно рассматривать как уровень несклонности к риску. Например, если недопустимы большие отрицательные отклонения доходов от их математического ожидания, то можно выбрать K много больше 1. Это придаёт больший вес дисперсии и приводит к решению, уменьшающему вероятность больших потерь.

5.2.3. Критерий предпочтения

Критерий предпочтения часто используется при сравнении изделий, оборудования или производственных систем, параметры которых имеют различные масштаб и размерность.

Общая формула для расчёта критерия принятия решения:

$$\sum П = K_1 П_1 + K_2 П_2 + \ldots + K_i П_i ,$$

где $П$ – параметры; K – частные коэффициенты предпочтения для каждого из параметров, при равновзвешенности оценок $K_1 = K_2 = \ldots = K_i$.

Перед использованием выражения следует выполнить *операцию приведения*. Например, максимальное значение однородных параметров принимается за 1 (или за 100 %), а остальные сравниваются и приводятся к нему (табл. 5.1).

В ряде случаев параметры имеют противоречивый характер (например: себестоимость – производительность, доходы – убытки). Тогда при расчётах параметры затратного типа («чем больше, тем хуже») необходимо учитывать со знаком минус.

Таблица 5.1

Пример приведения параметров к безразмерному виду

Параметры	Изделие		
	A	*B*	*C*
Производительность, шт./смену	56 (max)	45	22
Себестоимость, р.	600	800 (max)	450
Надёжность, баллы	6	7	8 (max)

Изделие		
A	*B*	*C*
1	$0{,}8 = \frac{45}{56}$	$0{,}4 = \frac{22}{56}$
$0{,}8 = \frac{600}{800}$	1	$0{,}6 = \frac{450}{800}$
$0{,}8 = \frac{6}{8}$	$0{,}9 = \frac{7}{8}$	1

5.3. Принятие решений в условиях неопределённости

Для принятия решений в условиях неопределённости наиболее часто используют критерии Лапласа, максимина (Вальда), Сэвиджа и др.

Пусть имеется множество из m альтернативных вариантов (стратегий) решения проблемы $P_1 \ldots P_m$. Указанные варианты считаются контролируемыми (управляемыми факторами). Наряду с управляемыми факторами действуют факторы $П_1 \ldots П_n$, которые не поддаются контролю. К ним можно отнести, например, уровень спроса на товары, рыночные цены, условия эксплуатации технических и производственных систем и т. д. (табл. 5.2).

По *критерию Лапласа* в качестве оптимального выбирается такой вариант решения, для которого наблюдается максимальное значение среднего арифметического всех реализаций:

$$W_{\text{Л}} = \max_i \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} W_{ij} \right),$$

где $\sum W_{ij}$ – сумма всех возможных ожидаемых значений; n – количество реализаций каждого из вариантов.

Таблица 5.2

Матрица решений $[W_{ij}]$

Варианты решения, *Р*	Реализации вариантов, *П*			
	1	2	…	n
1	W_{11}	W_{12}	…	W_{1n}
2	W_{21}	W_{22}	…	W_{2n}
3	W_{31}	W_{32}	…	W_{3n}
…	…	…	…	…
m	W_{m1}	W_{m2}	…	W_{mn}

В соответствии с *критерием Вальда* (максимина) в качестве оптимальной выбирается стратегия, гарантирующая выигрыш не меньший, чем

$$W_{\text{В}} = \max_i \min_j W_{ij}.$$

Матрица решений $[W_{ij}]$ дополняется ещё одним столбцом из наименьших результатов W_{ij} каждой строки. Выбирается тот вариант, в строке которого стоит наибольшее значение W_{ij} этого столбца. Выбранное таким образом решение *полностью исключает риск*. Это означает, что принимающий решение не может столкнуться с худшим результатом, чем тот, на который он ориентируется.

В соответствии с *критерием Сэвиджа* в качестве оптимальной выбирается такая стратегия, при которой величина риска принимает наименьшее значение в самой неблагополучной ситуации:

$$W_{\text{С}} = \min_i \max_j \left(\max_j W_{ij} - W_{ij} \right).$$

Каждый элемент матрицы решений $[W_{ij}]$ вычитается из наибольшего результата $\max W_{ij}$ соответствующего столбца. Разности образуют *матрицу рисков*. Эта матрица дополняется столбцом наибольших разностей W_{ij}. Выбирается тот вариант, в строке которого наименьшее значение.

5.4. Пример задачи принятия решений

Предприятием сельскохозяйственного машиностроения осваивается производство трёх типов товаров (A_1, A_2, A_3), опытные партии которых реализуются в различных пунктах (B_1, B_2, B_3, B_4). Продажа опытных партий дала следующие результаты (табл. 5.3). Ввиду значительных объёмов опытных партий установлено, что значения доходов подчиняются нормальному закону распределения. Требуется выбрать наиболее выгодный товар. Для решения задачи использовать критерии: 1) (О.З. – $K \cdot D$); 2) Лапласа; 3) Вальда; 4) Сэвиджа.

Таблица 5.3

Матрица доходов от реализации товаров за 1 месяц

Товар	Доход от реализации, тыс. р., в пунктах			
	B_1 Ярославль	B_2 Рыбинск	B_3 Тутаев	B_4 Углич
A_1 – мотоблок «Нева»	40	20	30	10
A_2 – мотоблок «Салют»	20	35	20	20
A_3 – мотоблок «Каскад»	30	15	25	10

Решение.

1. Для расчёта значений критерия (О.З. – $K \cdot D$) принимаем коэффициент несклонности к риску $K = 0{,}5$. Дисперсию D оцениваем приближённо как квадрат 1/6 части размаха R (разности между максимальным и минимальным значением). Так, дисперсия и О.З. для товара A_1 будут равны:

$$D = \left(\frac{R}{6}\right)^2 = \left(\frac{40-10}{6}\right)^2 = 25; \quad \text{О.З.} = (40+20+30+10) - 0{,}5 \cdot 25 = 87{,}5.$$

2. В основе критерия Лапласа лежит принцип «недостаточного основания»: когда невозможно выяснить вероятности возникновения того или иного состояния, им сопоставляют равные вероятности, находят средний эффект для каждого из рассматриваемых вариантов решения и выбирают тот из них, где средний эффект максимален.

Критерий Лапласа рассчитывается как среднее арифметическое значений каждой строки матрицы доходов. Например, для A_1 получаем значение критерия $(40+20+30+10)/4 = 25$.

3. Критерий Вальда (максимина) для доходов более пессимистичен, чем критерий Лапласа. Величина критерия Вальда определяется как максимальное значение среди минимальных по строкам.

Результаты расчётов сводим в табл. 5.4.

Таблица 5.4

Результаты расчёта критериев (О.З. – $K{\cdot}D$), $W_Л$ и $W_В$

	B_1	B_2	B_3	B_4	Критерий О.З. – $K{\cdot}D$	Критерий Лапласа $W_Л$	Критерий Вальда $W_В$
A_1	40	20	30	10	87,5	**25,0 (max)**	10
A_2	20	35	20	20	**91,9 (max)**	23,8	**20 (max)**
A_3	30	15	25	10	74,4	20,0	10
Наиболее выгодный товар:					A_2	A_1	A_2

4. При определении значений критерия Сэвиджа на основании матрицы доходов рассчитывается матрица рисков (табл. 5.5). Для этого в каждом столбце матрицы доходов находится максимальное значение, а затем каждое значение дохода в столбце вычитается из максимального.

К полученным таким образом результатам применяется критерий минимакса, т. е. выбирается тот вариант, в строке которого наименьшее значение.

Таблица 5.5

Таблица результатов расчёта критерия $W_С$

Товар	Матрица доходов				Матрица рисков				Критерий Сэвиджа $W_С$
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	40	20	30	10	40 – 40 = 0	15	0	10	15
A_2	20	35	20	20	40 – 20 = 20	0	10	0	**10 (min)**
A_3	30	15	25	10	40 – 30 = 10	20	5	10	20
max в столбце	40	35	30	20	Наиболее выгодный товар:				A_2

Проанализировав табл. 5.4 и 5.5, можно сделать вывод, что имеет место разная выгодность товаров при использовании критериев с разной степенью учёта риска и разной полнотой использования исходной информации. Так, по критериям (О.З. – $K{\cdot}D$), Вальда и Сэвиджа наиболее выгодным является товар A_2 (мотоблок «Салют»), а по критерию Лапласа – товар A_1 (мотоблок «Нева»). При этом следует обратить внимание на то, что при расчёте критериев Вальда и Сэвиджа принимаются во внимание не все результаты, а лишь самый плохой или, наоборот, самый лучший, а потому часть информации теряется.

5.5. Задания для самостоятельной работы

5.5.1. На предприятии необходимо проконтролировать партию из N деталей. Зарплата контролёра составляет $З_к = 30$ р./ч. Одна деталь контролируется $t_к$ мин.

Возможны два варианта организационной формы контроля:

1) выборочный контроль с 10 % сплошностью (контролируется каждая 10-я деталь) и вероятностью пропуска брака 4 %;

2) сплошной контроль всех деталей в партии с вероятностью пропуска брака 0,5 %.

В любом из этих вариантов пропуск дефектной детали влечёт за собой убытки предприятию в размере $C_П$ р.

Требуется выбрать рациональную организационную форму контроля по критерию минимума *ожидаемого значения* суммарных затрат на зарплату контролёров и потерь от пропуска брака. После выбора формы контроля уточнить её в предположении, что за каждую 10-ю дефектную деталь предприятию со стороны потребителей предъявляется рекламация в размере $C_Р$ р.

Варианты исходных данных представлены в табл. 5.6.

Таблица 5.6

Варианты исходных данных

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N, шт.	100	105	110	115	85	90	100	70	130	70	90	80
$t_к$, мин	40	60	50	60	30	35	45	28	40	40	37	40
$C_П$, р.	500	600	400	500	200	400	400	300	450	400	400	500
$C_Р$, р.	1000	2000	2500	2800	2100	1400	3500	1250	1200	1400	950	1850
Вариант	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
N, шт.	85	80	70	100	70	110	90	115	130	100	105	90
$t_к$, мин	30	40	28	40	40	50	35	60	40	45	60	37
$C_П$, р.	200	500	300	500	400	400	400	500	450	400	600	400
$C_Р$, р.	2100	1850	1250	1000	1400	2500	1400	2800	1200	3500	2000	950

5.5.2. Имеется три варианта эскизных проектов производственной системы, отличающихся по своим технико-экономическим характеристикам: производительности, себестоимости и качеству выпускаемой продукции (табл. 5.7).

Требуется выбрать наилучший вариант производственной системы по *критерию предпочтения*, исходя из коэффициентов предпочтения: $K_1 = 0{,}5$ – для производительности, $K_2 = 0{,}7$ – для себестоимости и $K_3 = 0{,}9$ – для качества. При решении задачи необходимо обратить внимание на приведение характеристик и затратный характер себестоимости.

Таблица 5.7

Характеристики вариантов производственной системы

Характеристики	Номер варианта системы		
	1	2	3
Производительность $П_1$, шт./ч	$100 \cdot N - 50$	$100 \cdot N$	$100 \cdot N + 100$
Себестоимость $П_2$, р./шт.	$50 \cdot N + 70$	$50 \cdot N$	$50 \cdot N - 20$
Качество $П_3$, баллы	5	7	6

Примечание. N – номер варианта по списку.

5.5.3. Используя критерии (О.З. – $K \cdot D$), Лапласа, Вальда и Сэвиджа, выбрать наиболее выгодное из трёх изделий (A_1, A_2, A_3), опытные партии которых реализовались в пунктах (B_1, B_2, B_3). Объяснить причины различия результатов выбора по разным критериям.

Матрицы доходов представлены в табл. 5.8. Коэффициент несклонности к риску принять равным 0,5.

Таблица 5.8

Варианты исходных данных

Варианты	Матрица доходов				Варианты	Матрица доходов			
Варианты 1, 5, 9, 13, 17, 21		B_1	B_2	B_3	Варианты 2, 6, 10, 14, 18, 22		B_1	B_2	B_3
	A_1	20	10	30		A_1	15	20	10
	A_2	15	25	18		A_2	10	8	40
	A_3	12	20	30		A_3	20	15	15
Варианты 3, 7, 11, 15, 19, 23	Матрица доходов				Варианты 4, 8, 12, 16, 20, 24	Матрица доходов			
		B_1	B_2	B_3			B_1	B_2	B_3
	A_1	30	15	12		A_1	35	18	20
	A_2	15	20	24		A_2	22	28	34
	A_3	12	23	30		A_3	8	25	15

5.6. Дополнительные задания повышенной сложности

5.6.1. На этапе выбора оборудования в ходе технологической подготовки производства нового изделия рассматриваются три модели многоцелевых обрабатывающих центров с ЧПУ (М1, М2, М3). Технические характеристики станков представлены в табл. 5.9.

Требуется провести сравнение данных моделей по *критерию предпочтения*, учитывая в первую очередь характеристики надёжности. Коэффициенты предпочтения выбрать самостоятельно.

Таблица 5.9

Технические характеристики станков

Характеристика	Модель станка		
	М1	М2	М3
Цена, млн. р.	25,5	14	20,8
Объём инструментального магазина, шт.	60	16	32
Мощность, кВт	25	30	18
Наработка на отказ, ч.	1500	1000	1000
Ресурс до капитального ремонта, лет	7,5	10	8
Масса, т	15	20	12,2

5.7. Контрольные вопросы

1. В чём заключается смысл критерия ожидаемого значения?
2. При каких условиях применение критерия ожидаемого значения оправдано?
3. С какой целью критерий ожидаемого значения дополняют дисперсией?
4. В каких случаях применяют критерий предпочтения?
5. Какие критерии используют для принятия решений в условиях неопределённости?
6. В чём заключается отличие критерия Лапласа от критерия Вальда с точки зрения учёта риска в ходе принятия решения?

6. КОЛЛЕКТИВНОЕ ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ

Цель работы – освоить приёмы коллективного принятия решений.

Коллективные методы принятия решений являются весьма эффективным инструментом исследования сложных плохо формализуемых задач. Широко используется в прогнозировании, проектных работах, при постановке задач математического моделирования процессов и систем и т. д.

Основными достоинствами этих методов являются: распределение ответственности, генерация свежих идей, соперничество, учёт разнообразных мнений, подготовка к совместному дальнейшему решению проблем.

К коллективным методам принятия решений относят: совещания (дискуссионные и установочные); деловые игры; ситуационные задачи; «мозговой штурм» и пр. Для решения ситуационных задач в прогнозировании нередко используют хорошо апробированный метод «Дельфи».

Методы «Дельфи» и «мозгового штурма» интересны совершенно различными требованиями к обсуждению результатов решения. Так, в методе «Дельфи» обязательным является многоэтапный процесс принятия решений, а между этапами эксперты знакомятся с результатами предыдущей экспертизы и доводами «за» или «против» того или иного решения.

При «мозговом штурме» обсуждение, а тем более критика выдвигаемых идей запрещается, что позволяет выдвигать «невероятные» варианты решения проблем, которые нередко становятся наиболее приемлемыми.

6.1. Метод «Дельфи»

Одним из широко используемых методов групповой оценки прогнозного решения является метод «Дельфи», который представляет собой ряд последовательно осуществляемых процедур, направленных на подготовку и обоснование прогноза. Эти процедуры характеризуются анонимностью (независимостью ответов экспертов) опроса, регулируемой обратной связью между результатами опроса предыдущего этапа и подготовкой их нового варианта, а также групповым характером ответа. Регулируемая обратная связь осуществляется путём проведения нескольких туров опроса экспертов, на каждом из которых характеристики их ответов обрабатываются с применением математико-статистических методов, и результаты сообщаются анонимно. Групповой ответ формируется путём обработки и анализа результатов ответов экспертов. Критерием окончания его разработки, как правило, служит «близость» мнений экспертов.

Общая схема проведения экспертизы по методу «Дельфи» состоит в следующем. На первом туре эксперты дают ответы на поставленные вопросы, как правило, без аргументации. Ответы обрабатываются, определяются их статистические характеристики (средняя, среднеквадратическое отклонение, крайние значения ответов), и результаты обработки сообщаются экспертам. После этого проводится второй тур опроса, в ходе которого эксперты должны объяснить, почему они изменили или не изменили своего мнения.

Данные обработки результатов второго тура опроса и аргументация ответов с сохранением анонимности снова сообщаются экспертам перед проведением третьего тура опроса. Последующие туры проводятся по такой же схеме. Подобная организация экспертизы позволяет экспертам учесть в своих ответах новые для них обстоятельства и в то же время избавляет их от какого бы то ни было давления при отстаивании своей позиции.

Как правило, на практике оказывается достаточным проведение четырёх туров опросов, после чего мнения всех экспертов либо сближаются, либо образуют две (или больше) группы существенно различающихся мнений. В первом случае достигнутый результат со значительной степенью обоснованности может быть рассмотрен в качестве прогнозного решения, во втором – необходимо продолжить исследование проблем развития объекта с учётом выдвигаемой различными группами аргументации.

Метод «Дельфи» имеет несомненные преимущества по сравнению с методами, основанными на обычной статистической обработке результатов индивидуальных опросов. Он позволяет уменьшить колебания по всей совокупности индивидуальных ответов, ограничивает колебания внутри групп. При этом, как показывают проводимые эксперименты, наличие малоквалифицированных экспертов оказывает менее сильное влияние на групповую оценку, чем простое усреднение результатов ответов, поскольку ситуация помогает им исправить ответы за счёт получения новой информации от своей группы.

К характерным особенностям метода «Дельфи» можно отнести следующие:

– вопросы в анкетах ставятся так, чтобы можно было дать количественную оценку ответам экспертов;

– все эксперты после каждого этапа знакомятся с результатами опроса и могут менять своё первоначальное мнение в последующих этапах опроса;

– эксперты обосновывают оценки и мнения, отклоняющиеся от усреднённых результатов;

– от этапа к этапу выполняется статистическая обработка результатов, в ходе которой постепенно уточняются и вопросы, и ответы. Часто используется «взвешивание» ответов отдельных экспертов.

6.2. Метод «мозгового штурма»

От метода «Дельфи» по организации работы экспертов принципиально отличается метод, получивший название «мозговой штурм», который также называют методом «мозговой атаки» или методом коллективной генерации идей. Этот метод подразумевает получение решения как продукта коллективного творчества специалистов в ходе заседания-сеанса, проводимого по определённым правилам, и последующего анализа его результатов. Его сущность состоит в том, что при обосновании прогноза дифференцированно решаются две задачи:

– генерирование новых идей о возможных вариантах развития процесса (решения поставленной задачи);

– анализ и оценка выдвинутых идей.

Обычно все специалисты в ходе заседания разделяются на две группы, состоящие из одних и тех же или разных представителей так, что одна группа генерирует идеи, а вторая – их анализирует. При этом в ходе заседания запрещается высказывать любые критические оценки ценности идеи; приветствуется выдвижение как можно большего их количества, поскольку предполагается, что вероятность появления действительно ценной идеи повышается с увеличением их общего числа; поощряется свободный обмен мнениями, т. е. высказанные мысли должны подхватываться и развиваться, и т. п. Ходом заседания руководит беспристрастный ведущий. Его задача состоит в том, чтобы направлять развитие дискуссии в нужное русло, к достижению заданной цели, не сбиваясь на беседу, соревнование в остроумии. В то же время, он не должен навязывать участникам дискуссии своё мнение, ориентировать их на определённый способ мышления.

Роль ведущего в поиске решения с помощью метода «мозгового штурма» чрезвычайно велика. Он должен следить за тем, чтобы эксперты при выработке решения не встали на путь компромиссов и взаимных уступок. Психологически для группы как для единого организма проблема достижения соглашения часто оказывается более важной, чем разработка тщательно продуманного и полезного прогноза. Кроме того, в силу чрезмерной активности один или несколько членов группы, обладающие даром убеждения, могут направить всю группу по ложному пути. Группа может оказать давление на своих членов, вынуждая отдельных специалистов соглашаться с большинством, даже если каждый из них понимает, что точка зрения большинства ошибочна.

Особое значение в этом методе придаётся вопросам формирования группы экспертов. При неудачном их подборе группа может разделять общее предубеждение, и прогноз в этом случае оказывается предрешённым без проведения глубокого анализа проблемы. Вследствие этого нежелательна слишком тесная связь между членами группы. Никто из них не должен «давить» на окружающих своим высоким авторитетом, и потому экспертов целесообразно подбирать из людей, занимающих примерно одинаковое служебное и общественное положение.

После проведения заседания наступает второй этап разработки прогноза, состоящий в анализе его результатов, выборе и обосновании окончательного решения. В ходе его выдвинутые предположения классифицируются по определённым критериям, оцениваются по принятой шкале значимости. Если возможности формализации решений достаточно велики, то на этапе анализа целесообразно использовать и математико-статистические методы обработки их количественных характеристик.

Метод «мозгового штурма» рекомендуется использовать в практических ситуациях, характеризующихся отсутствием реальных, достаточно очевидных вариантов развития процессов в перспективе.

Характерные особенности метода «мозгового штурма»:

– группа экспертов во главе с руководителем не превышает 7 – 15 человек;

– каждый эксперт должен выдвигать какую-то идею решения проблемы. Это может быть или новая идея, что максимально приветствуется, или развитие ранее высказанной;

– критика, обсуждение идей строго запрещается;

– суть проблемы рекомендуется сообщать непосредственно перед обсуждением, т. е. не рекомендуется предварительная подготовка, которая нередко приводит к выдвижению стереотипных решений;

– обсуждение и принятие решений выполняется после окончания сеанса «мозгового штурма» проблемы.

При анализе результатов «мозгового штурма» можно использовать ряд вспомогательных инструментов, например диаграммы Парето и причинно-следственные диаграммы.

6.3. Диаграмма Парето

Диаграмма Парето – инструмент, позволяющий выявить и отобразить проблемы, установить основные факторы, с которых нужно начинать действовать, и распределить усилия с целью эффективного разрешения этих проблем.

В повседневной деятельности предприятия постоянно возникают проблемы, такие как возникновение брака, неполадки оборудования, наличие на складах сверхнормативных запасов сырья и материалов, поступление рекламаций, количество которых не уменьшается, невзирая на старания повысить качество. Поиск решения этих проблем начинают с их классификации по отдельным факторам (проблемы, относящиеся к оборудованию, к работе исполнителей, к качеству материалов и т. д.), сбора и анализа данных отдельно по группам проблем. Чтобы выяснить, какие из этих факторов являются основными, строят диаграмму Парето и проводят анализ диаграммы. Итальянский учёный Вильфредо Парето показал, что очень часто бо́льшая часть проблем (80 %) обуславливается небольшой частью факторов (20 %) – так называемый принцип (правило) Парето.

Диаграмма Парето позволяет объективно сравнить виды нарушений производственного процесса, выявить наиболее важные вопросы, на которые необходимо обратить основное внимание, и наметить последовательность решения задач по совершенствованию процесса. Например, при анализе причин возникновения дефектов в выпускаемой продукции по горизонтальной оси указывают причины дефектов, по вертикальной – число или долю этих причин, и чертят столбиковую диаграмму. На графике вычерчивают также кумулятивную кривую (ломаную), показывающую накопленный процент различных причин возникновения дефектов.

Пример. В результате анализа и классификации причин брака выпускаемой продукции была составлена табл. 6.1.

На основании этой таблицы построена диаграмма Парето (рис. 6.1), из которой видно, что подавляющее большинство случаев брака приходится на первые три вида, и, соответственно, на них необходимо обратить внимание в первую очередь. Наиболее часто встречающиеся виды брака анализируют отдельно, составляя новую диаграмму Парето, аналогичную рассмотренной.

Таблица 6.1

Исходные данные для построения диаграммы Парето

Причины возникновения брака	Число бракованных деталей	Доля бракованных деталей, %
1. Ошибки в процессе производства	80	42
2. Некачественное сырье	50	27
3. Некачественный инструмент	30	16
4. Оборудование	15	8
5. Документация	5	3
6. Прочее	8	4
Всего	188	100

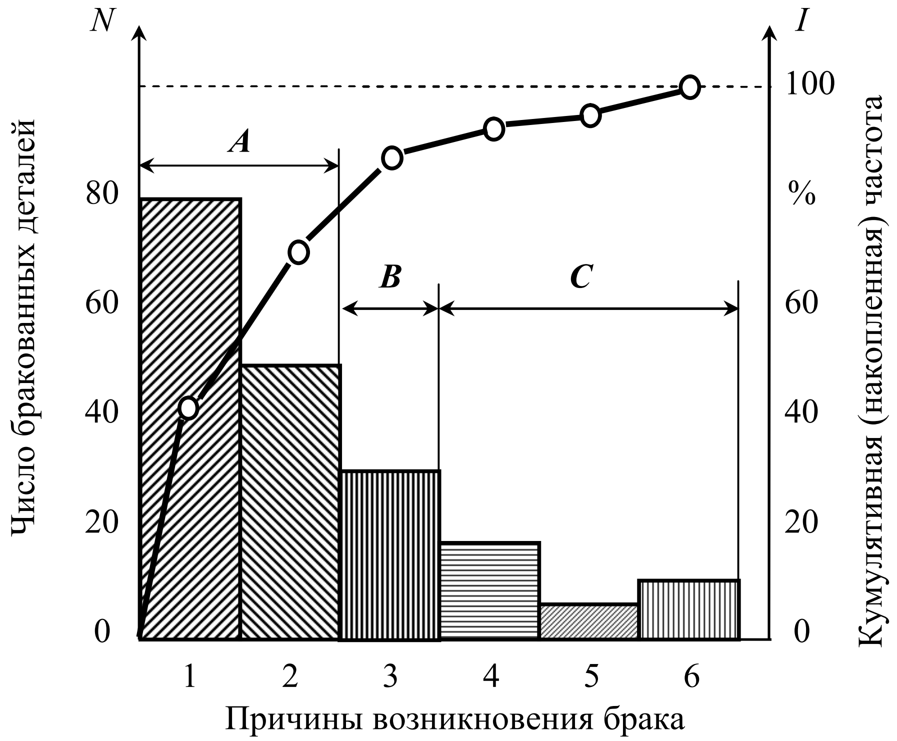


Рис. 6.1. Диаграмма Парето

На практике можно использовать различные диаграммы Парето. По вертикальной оси можно откладывать материальные потери от брака или затраты времени на исправление брака. Можно построить диаграммы Парето, по горизонтальной оси которых откладывают стадии технологического процесса, места появления дефектов в изделии, различные службы, бригады, причины нарушения производственного процесса, распределение нарушений по исполнителям, контролёрам и т. п.

С диаграммой Парето тесно связан так называемый *ABC-анализ*, суть которого в следующем. Вся область диаграммы Парето делится на три зоны: *A*, *B* и *C*. Приблизительно соотношение размеров зон следующее:

зона *A* – от 20 до 30 %*;* зона *C* – от 40 до 50 %; остальное занимает зона *B*. Оказывается, что в зоне *A* находятся причины, дающие 70 – 80 % следствий, тогда как в зоне *C* – всего лишь 5 – 10 % следствий. Соответственно, первоочередное внимание должно быть уделено анализу зоны *A*.

При построении диаграмм Парето необходимо обращать внимание на следующие моменты:

– диаграмма Парето оказывается наиболее эффективной, если число факторов, размещаемых по оси абсцисс, составляет 7 – 10;

– при обработке данных необходимо проводить их расслоение по отдельным факторам, которые должны быть хорошо известны;

– в случае, когда фактор «прочие» оказывается слишком большим, необходимо проанализировать содержание фактора «прочие»;

– если фактор, стоящий первым по порядку, технически труден для анализа, следует начать с анализа следующего за ним;

– если обнаруживается фактор, в отношении которого легко провести улучшение, то его следует проводить, не обращая внимание на его место.

Диаграмму Парето целесообразно применять совместно с причинно-следственной диаграммой. После проведения корректирующих мероприятий диаграмму Парето можно построить вновь для изменившихся условий и проверить эффективность проведённых улучшений.

6.4. Причинно-следственная диаграмма

Как было сказано выше, диаграмма Парето позволяет определить главные причины возникающих в производстве проблем. После их определения необходимо установить связи между показателями качества и факторами, влияющими на него, т. е. между результатом и причинами. При этом установить истину довольно трудно. Обычно существует значительное количество субъективных мнений сотрудников, участвующих в обсуждении вопроса. Чтобы учесть и упорядочить все эти мнения, используют схемы причинно-следственных связей.

Одна из форм построения таких схем была предложена в 1950 г. профессором Токийского университета Исикава Каору. Эти схемы часто называют «диаграммами Исикава», или «рыбья кость» из-за внешней формы (рис. 6.2). При построении диаграмм причинно-следственных связей результат, называемый «характеристикой», изображается центральной стрелкой. Явления, прямо или косвенно влияющие на характеристику, называют «факторами» и изображают в виде стрелок, направленных остриём к центральной линии (стрелке).

Для выявления факторов вначале записывают мнения 5 – 10 сотрудников, занимающих различное служебное положение и имеющих разные интересы. При этом, как и при любой форме экспертной оценки, желательно избегать излишних вопросов и критики. Затем все записанные в специальном перечне факторы классифицируют. Выделяют главные факторы («отцы»), которые делятся на все более конкретные («сыновья», «внуки», «правнуки» и т. д.). Деление продолжают до тех пор, пока не будет ясно, какие меры нужно принять для изменения исследуемой характеристики.

Чтобы установить подчинённость факторов, вначале обсуждают те из них, которые существенно влияют на характеристику (в перечне такие факторы обводят красным кружком). Затем из выделенных факторов опять выделяют важнейшие и обводят их двойным кружком, среди последних вновь выделяют факторы и обводят тройным кружком и т. д.

При этом факторы, имеющие количественные показатели, можно анализировать с помощью диаграмм Парето. Правильность выявления важнейших факторов, влияющих на характеристику, целесообразно проверить экспериментально.

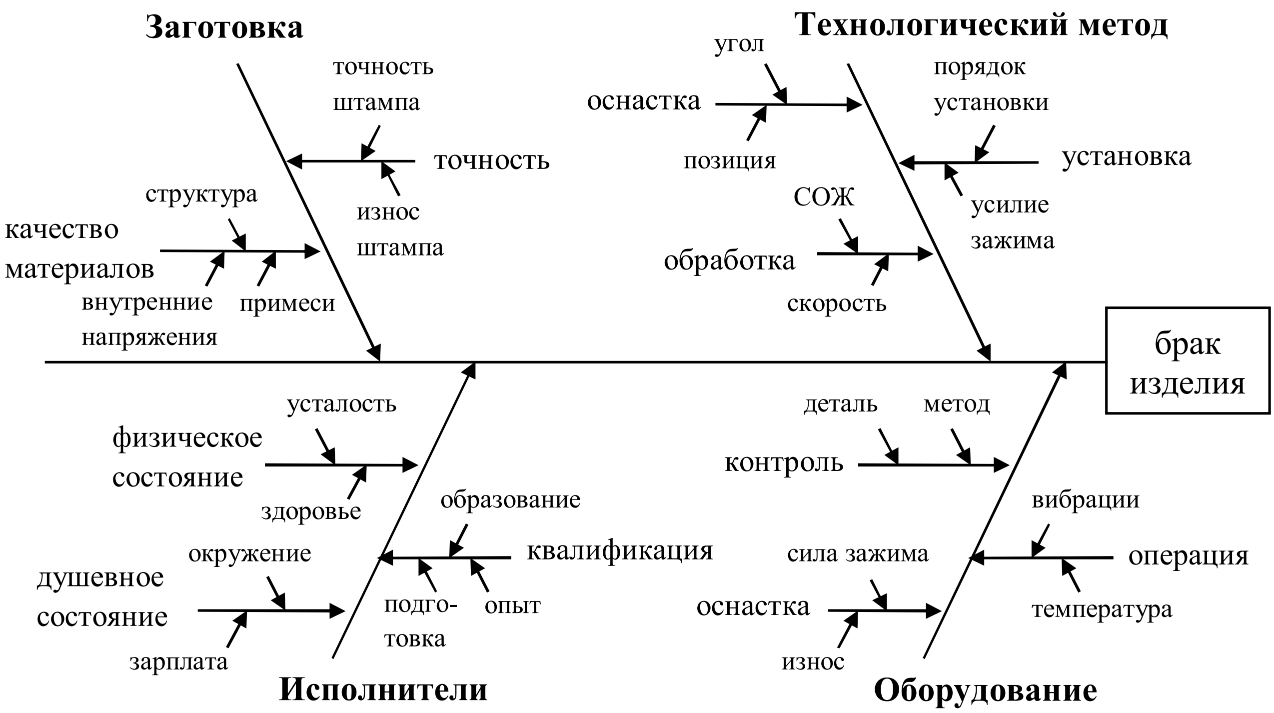


Рис. 6.2. Пример диаграммы Исикава для случая появления брака при выполнении операции черновой механической обработки заготовки-штамповки

При построении графика расположение стрелок, углы их наклона и другие формальные признаки значения не имеют. Важна лишь подчинённость факторов. Желательно возможно более подробное деление факторов, чтобы схема имела вид ветвистого дерева.

В специальной таблице или тетради, прилагаемой к схеме, записывают дополнительные сведения: уровень важности фактора; как контролировать данный фактор; имеются ли нормы для значений факторов; как влияет фактор на характеристику: вызывает систематическое смещение или разброс; если для характеристики применяются контрольные карты, то влияет ли фактор на колебания признака от выборки к выборке и т. д.

После анализа факторов составляют перечень мероприятий в отношении наиболее важных из них.

6.5. Задания для самостоятельной работы

6.5.1. Отечественный рынок постепенно заполняется изделиями (бытовая техника) и услугами по ценам ниже зарубежных. Качество этих изделий и услуг ниже зарубежных аналогов. Таким образом, теряется одна из ниш рынка. Предложены три возможных варианта решения проблемы:

1) осваивать и завоёвывать большую группу потребителей, оставив качество без изменений;

2) постепенно повышать качество;

3) за счёт инвестиций и научно-технических инноваций быстро освоить изделия и услуги повышенного качества.

Используя метод «Дельфи», необходимо выполнить опрос группы экспертов (5 – 6 человек) минимум в два этапа.

Предложенные варианты решения проблемы оцениваются каждым экспертом по 10-бальной шкале: 10 – максимальное предпочтение одному из решений. Результаты опросов заносятся в соответствующую таблицу (табл. 6.2). По окончании каждого этапа рассчитываются и заносятся в таблицу среднее $\overline{X}$, стандартное отклонение σ, крайние значения ответов $\min$ и $\max$, которые доводятся до сведения экспертов.

После второго этапа требуется проанализировать результаты и ответить на следующие вопросы: а) найдено ли решение проблемы; б) единственное ли оно; в) какова дисперсия мнений экспертов; г) целесообразно ли продолжать опрос?

Таблица 6.2

Шаблон таблицы для занесения результатов опроса экспертов

Решение	Эксперт 1	Эксперт 2	Эксперт 3	Эксперт 4	Эксперт 5	$\overline{X}$	σ	min	max
№1	оценка	оценка	оценка	оценка	оценка				
№2	оценка	оценка	оценка	оценка	оценка				
№3	оценка	оценка	оценка	оценка	оценка				

6.5.2. Используя метод «мозгового штурма», необходимо найти рациональный вариант устранения отклонений в ходе производственного процесса. Возможные варианты отклонений (на выбор):

1) дефицит ресурсов:
   - временных (срыв плана);
   - финансовых;
   - трудовых;
   - оборудования;
2) появление дефектов:
   - на стадии проектирования;
   - на стадии производства продукции (брак);
   - в ходе эксплуатации.

Примечание. В ходе «мозгового штурма» группа экспертов должна предложить не менее 20 – 25 причин возникновения отклонений.

6.6. Дополнительные задания повышенной сложности

6.6.1. К результатам «мозгового штурма», полученным при решении предыдущей задачи, применить следующие инструменты: причинно-следственную диаграмму, диаграмму Парето и ABC-анализ. Установить причинно-следственные связи между выявленными в ходе «мозгового штурма» факторами и отклонением в ходе производственного процесса. Составить перечень мероприятий в отношении группы наиболее важных факторов.

6.7. Контрольные вопросы

1. В каких случаях целесообразно применять коллективные методы принятия решений?
2. В чём отличие методов «Дельфи» и «мозгового штурма»?
3. Почему в методе «Дельфи» используют несколько этапов опроса экспертов?
4. С какой целью в методе «Дельфи» выполняется статистическая обработка результатов опроса экспертов?
5. В чём заключается основная идея метода «мозгового штурма»?
6. Какие требования предъявляются к экспертам при формировании группы для проведения «мозгового штурма»?
7. Какой принцип используется при построении диаграммы Парето и проведении ABC-анализа?
8. Какие задачи позволяет решить причинно-следственная диаграмма?

7. НАДЁЖНОСТЬ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Цель работы – освоить методику решения задач по оценке надёжности технических систем.

7.1. Понятие и характеристики надёжности

Надёжность является одним из главных параметров, определяющих качество изделий и систем, наряду с безопасностью, экономичностью, удобством в эксплуатации, эргономичностью и другими параметрами.

Согласно ГОСТ 27.002-89 «Надёжность в технике. Основные понятия. Термины и определения», **надёжность** – это свойство объекта сохранять во времени в установленных пределах значения всех параметров, характеризующих способность выполнять требуемые функции в заданных режимах и условиях применения, технического обслуживания, хранения и транспортирования. В более широком смысле надёжность является комплексным свойством, которое в зависимости от назначения объекта и условий его применения может включать безотказность, долговечность, ремонтопригодность и сохраняемость.

Работоспособное состояние – состояние объекта, при котором значения всех параметров, характеризующих способность выполнять заданные функции, соответствуют требованиям нормативно-технической и (или) конструкторской (проектной) документации.

Безотказность – свойство объекта непрерывно сохранять работоспособное состояние в течение некоторого времени или наработки.

Долговечность – свойство объекта сохранять работоспособное состояние до наступления предельного состояния при установленной системе технического обслуживания и ремонта.

Ремонтопригодность – свойство объекта, заключающееся в приспособленности к поддержанию и восстановлению работоспособного состояния путём технического обслуживания и ремонта.

Сохраняемость – свойство объекта сохранять в заданных пределах значения параметров, характеризующих способности объекта выполнять требуемые функции, в течение и после хранения и (или) транспортирования.

Отказ – событие, заключающееся в нарушении работоспособного состояния объекта.

Сбой – самоустраняющийся отказ или однократный отказ, устраняемый незначительным вмешательством оператора. Сбой можно отнести к событиям, которые частично нарушают работоспособность, снижают некоторые параметры системы.

Вероятность безотказной работы – вероятность того, что в пределах заданной наработки отказ объекта не возникнет. Определяется коэффициентом надёжности $P(t)$, который характеризует вероятность того, что в заданном интервале времени t (наработка) не возникнет отказ изделия. Коэффициент надёжности изменяется в пределах от 0 до 1.

Вероятность отказа – вероятность того, что объект откажет хотя бы один раз в течение заданной наработки, будучи работоспособным в начальный момент времени. Вероятность отказа $Q(t)$ и вероятность безотказной работы образуют полную группу событий $Q(t) + P(t) = 1$.

Наработка на отказ – отношение суммарной наработки восстанавливаемого объекта к математическому ожиданию числа его отказов в течение этой наработки.

При оценке надёжности чаще всего используется экспоненциальное распределение, что существенно упрощает теоретические выводы. Например, для экспоненциального распределения *наработка на отказ* будет равняться

$$T = \int_0^\infty e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda},$$

где λ – интенсивность отказов.

Величина λ не является постоянной и может меняться, например, в зависимости от времени эксплуатации системы (рис. 7.1).

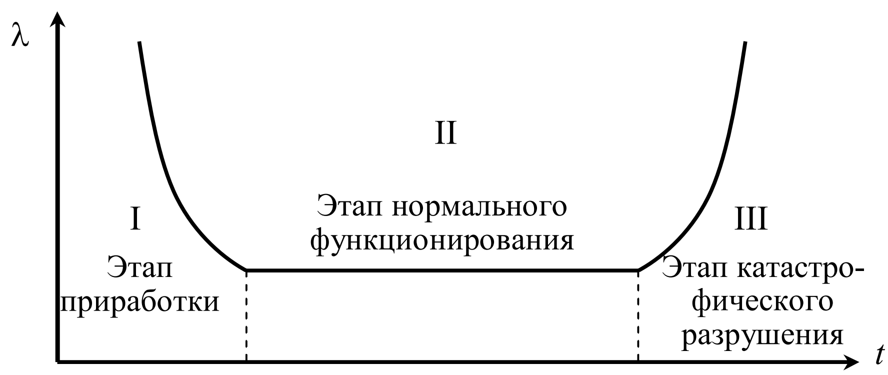


Рис. 7.1. Зависимость интенсивности отказов от времени эксплуатации системы

Допустимое значение $P(t)$ выбирается в зависимости от степени опасности отказа. Так, для ответственных изделий авиационной техники $P(t)$ доходит до величины 0,9999 и более.

Следует иметь в виду, что применение $P(t)$ без указания времени $t = t'$, в течение которого рассматривается работа изделия, не имеет смысла (рис. 7.2).

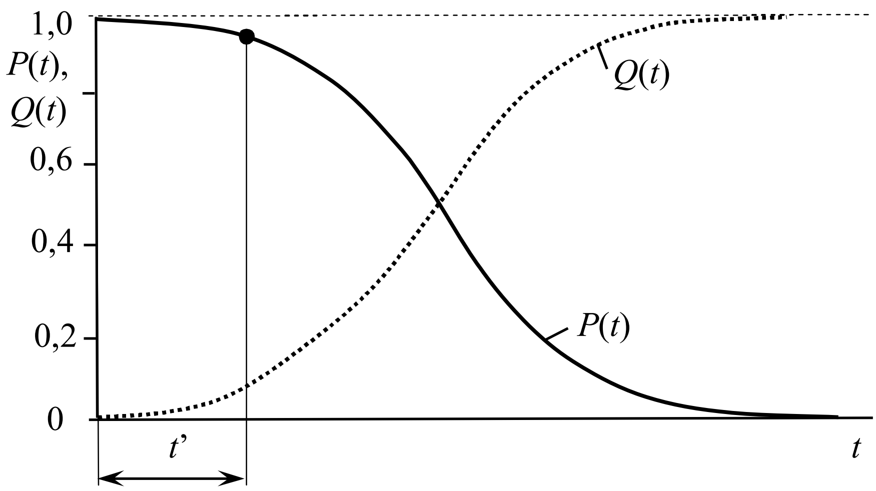


Рис. 7.2. Зависимость вероятности безотказной работы $P(t)$ и отказа $Q(t)$ от времени эксплуатации изделия

Для экспоненциального распределения, которое наиболее часто используется в работах по надёжности, данные показатели имеют вид:

$$P(t) = e^{-\lambda t},$$

$$T = \frac{1}{\lambda}.$$

При значениях $P(t) \geq 0,9$ применимо приближённое выражение

$$P(t) = 1 - \lambda \cdot t.$$

Если имеются *экспериментальные* данные, то величину λ можно определить как отношение числа отказов в интервале времени $[t, t + \Delta t]$ к произведению числа исправных объектов в момент времени t на длительность интервала времени Δt

$$\lambda = \frac{n(t + \Delta t) - n(t)}{N(t) \cdot \Delta t} = \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{N(t) \cdot \Delta t},$$

где $n(t)$ и $n(t + \Delta t)$ – соответственно число вышедших из строя элементов в начале и в конце интервала; $N(t)$ и $N(t + \Delta t)$ – соответственно число работоспособных элементов в начале и в конце интервала.

Окончательно имеем формулы для оценок вероятностей отказа и безотказной работы

$$Q(t)=\frac{n(t)}{N}, \qquad P(t)=1-\frac{n(t)}{N},$$

где N – число объектов, работоспособных в начальный момент времени; $n(t)$ – число объектов, отказавших на отрезке от 0 до t.

Поскольку большинство технических систем относятся к восстанавливаемым, для оценки вероятности застать систему в работоспособном состоянии применяют *коэффициент готовности* (коэффициент технического использования)

$$K_{\Gamma}=\frac{T}{T+T_{\text{В}}}=\frac{1}{1+\lambda/\mu},$$

где $T_{\text{В}}$ – среднее время восстановления (например ремонта оборудования); λ и μ – соответственно интенсивности отказов и восстановлений.

Коэффициент готовности представляет собой комплексный показатель надёжности и количественно характеризует два свойства – безотказность и ремонтопригодность.

7.2. Надёжность производственных систем

В терминах теорий массового обслуживания и надёжности производственная система испытывает разнообразные по природе и интенсивности случайные воздействия, которые частично или полностью нарушают её работоспособность. Эти воздействия характеризуются *потоком отказов* с интенсивностью λ.

Характер отказов может быть различным, например: авария технических средств, отсутствие рабочего, выпуск бракованной продукции, поставки не в срок заготовок, оснастки, документации и т. д. и т. п. Это приводит к потере определённой *трудоёмкости* $T_{\text{П}}$, которую необходимо восстановить до наступления ближайшего отказа. Таким образом, кроме потока отказов, имеется и *поток восстановлений* с интенсивностью μ.

Для восстановления «потерянной» трудоёмкости используются несколько *стратегий ввода резервов*:

1) увеличение производительности оборудования за счёт изменения режимов резания, интенсификации приёмов труда, сверхурочных, полного использования мощностей для ранее незагруженных станков;

2) использование страховых запасов;

3) обращение к вышестоящей системе управления для привлечения дополнительных ресурсов, для перепланирования, для направления заказов в другие производственные подразделения.

Из перечисленных наиболее доступными и наименее затратными являются первая и вторая стратегии.

Восстановление «потерянной» трудоёмкости $T_{\text{П}}$ должно быть выполнено до момента наступления очередного отказа в производственной системе. Тогда *нагрузка системы* $\rho = \lambda/\mu < 1$.

Граф состояний производственной системы, состоящей из m станков, изображён на рис. 7.3. Нулевое состояние отвечает моменту, когда работоспособны все станки, отказов в системе нет; первое состояние – неработоспособен 1 станок, и т. д.; состояние m – выход из строя всех станков.

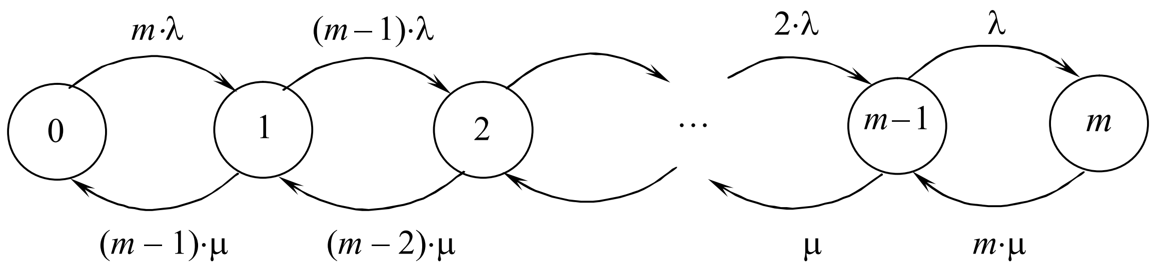


Рис. 7.3. Граф состояний производственной системы

Данная система является *саморегулируемой*, поскольку отказ одного станка (состояние 1) приводит к уменьшению суммарного потока отказов, и поэтому поток отказов из этого состояния будет $(m-1)\cdot\lambda$, и т. д.

Аналогичные соображения относятся и к потоку восстановлений, т. к. выход из сбоя обеспечивается по первой стратегии за счёт работоспособных станков. Отличием является лишь момент восстановления из состояния m, который принят равным $\mu\cdot m$. Состояние m является поглощающим, т. е. из него нет выхода, если не принять особых мер. Поэтому принимается решение, что для состояний $1, 2, \ldots, m-1$ действует первая стратегия, а для состояния m назначается вторая стратегия, т. е. использование страховых запасов.

Если случайные потоки отказов и восстановлений описываются экспоненциальным распределением, то вероятность нахождения системы в состоянии k будет равна

$$P_k = \frac{\lambda_0 \cdot \lambda_1 \ldots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \cdot \mu_2 \ldots \mu_k} \cdot P_0 .$$

Тогда для цепи переходов, представленной на рис. 7.3, имеем:

$$P_k = P_0 \frac{m\lambda \cdot (m-1)\lambda \cdot (m-2)\lambda \cdot \ldots \cdot \lambda}{(m-1)\mu \cdot (m-2)\mu \cdot \ldots \cdot \mu \cdot m\mu},$$

$$P_k = P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k.$$

Поскольку рассматриваемая производственная система относится к элементарным системам массового обслуживания, можно получить формулу для расчёта вероятности исходного состояния P_0:

$$\sum_0^k P_k = 1 \quad => \quad P_0 = 1 - (P_1 + P_2 + \ldots + P_k) = 1 - \rho.$$

7.3. Задания для самостоятельной работы

Понятие и характеристики надежности

7.3.1. В конструкцию силового редуктора подъёмно-транспортной машины были внесены изменения, позволившие увеличить вероятность безотказной работы $P(t)$ с 0,90 до 0,95 при одной и той же наработке изделия t. Как при этом изменилась вероятность отказа $Q(t)$?

7.3.2. Предприятие закупило партию измерительного инструмента – штангенциркулей цифровых ШЦЦ-I-150-0,01 в количестве M шт. Надёжность всех инструментов предполагается равной. В течение 4000 ч вышло из строя K штангенциркулей. Требуется определить интенсивность отказов λ и среднее время безотказной работы T инструментов. Варианты заданий представлены в табл. 7.1

Таблица 7.1

Статистика отказов инструментов

Вариант	M	K		Вариант	M	K		Вариант	M	K
1	100	11		9	185	12		17	115	6
2	160	19		10	205	13		18	150	6
3	190	25		11	130	25		19	170	13
4	125	10		12	155	17		20	200	23
5	195	16		13	105	9		21	120	5
6	175	4		14	110	11		22	215	12
7	165	7		15	210	29		23	135	8
8	140	14		16	180	19		24	145	16

7.3.3. На участках механического цеха установлено *K* единиц оборудования. Для организации местного освещения этого оборудования используются светильники с лампами накаливания на номинальное напряжение 36 В. Средняя продолжительность горения ламп (до отказа) по данным предприятия-поставщика составляет *M* ч. Какое количество запасных ламп на 4000 ч работы оборудования должен указать в заявке энергетик цеха? Варианты заданий представлены в табл. 7.2.

Таблица 7.2

Исходные данные

Вариант	*K*	*M*		Вариант	*K*	*M*		Вариант	*K*	*M*
1	100	800		9	107	1600		17	111	1300
2	105	1200		10	113	1800		18	119	900
3	120	2000		11	117	900		19	124	1600
4	110	1500		12	128	1300		20	126	1100
5	131	900		13	104	1500		21	113	1700
6	129	1000		14	130	1400		22	123	1200
7	99	1100		15	121	800		23	106	1800
8	103	1500		16	114	1700		24	112	1900

7.3.4. Средняя наработка на отказ стационарного дизельного электрогенератора составляет *K* ч. Через какой период времени необходимо сделать планово-предупредительный ремонт, если установленный нижний предел вероятности безотказной работы равен *P*? Варианты заданий представлены в табл. 7.3. Принять экспоненциальный закон распределения.

Таблица 7.3

Исходные данные

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
K	5000	4500	5000	4700	5500	6000	4800	5400	5200	6700	5300	5600
P	0,90	0,80	0,85	0,90	0,95	0,95	0,85	0,90	0,90	0,95	0,90	0,90
Вариант	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
K	6000	5500	5400	4700	5300	5000	6700	4800	5600	4500	5200	5000
P	0,95	0,90	0,90	0,80	0,90	0,90	0,95	0,90	0,95	0,90	0,90	0,85

7.3.5. Согласно паспорту металлорежущего станка, средняя наработка на отказ равняется *K* ч, а время восстановления – *M* ч. Необходимо оценить долю времени, в течение которого станок будет находиться в работоспособном состоянии. Варианты заданий в табл. 7.4.

Таблица 7.4

Исходные данные

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
K	500	1000	750	250	300	800	1200	1100	2000	600	500	360
M	5,5	2	1,5	0,5	0,9	1	2,5	6	10	3	1,7	2
Вариант	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
K	2000	500	300	500	1000	750	800	1100	900	250	600	360
M	12	2,5	1,2	3,5	10	1,4	2,7	4	1,7	5	2	1,5

7.4. Дополнительные задания повышенной сложности

Надёжность производственных систем

7.4.1. Рассматриваются два варианта производственной системы, включающей в себя *автоматизированные технологические ячейки*. Каждая ячейка представляет собой комплекс из группы однотипных станков, автоматического манипулятора и транспортно-накопительных устройств, объединенный общей системой управления и обеспечивающий обработку определённого типа деталей.

Первый вариант системы включает автоматизированные технологические ячейки с числом станков $m_1 = 2$, второй вариант – с числом станков $m_2 = 4$. Все станки имеют одинаковые показатели надёжности и равную производительность. Известна нагрузка ρ каждой технологической ячейки, рассчитанная исходя из паспортных данных по средней наработке на отказ и времени восстановления (ремонта) станков

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{T_{\text{В}}}{T}.$$

Необходимо оценить надёжность предложенных вариантов производственной системы, используя в качестве критерия суммарное время $T_{\text{с}}$, в течение которого будут расходоваться страховые запасы при выходе из строя всех станков в технологической ячейке, т. е. когда система находится в поглощающем состоянии m

$$T_{\text{с}} = P_m \cdot \Phi \to \min,$$

где Φ – фонд времени производственной системы (технологической ячейки) при 2-сменной работе, ч. При расчёте Φ необходимо учитывать количество станков в ячейке.

Варианты исходных данных представлены в табл. 7.5.

7.4.2. Для условий предыдущей задачи необходимо дать предложение по изменению нагрузки ρ станков в составе автоматизированных технологических ячеек, если задана предельно допустимая вероятность выхода из строя одновременно всех станков (нахождения системы в поглощающем состоянии m) не более R (табл. 7.5).

Примечания:

1. При решении задачи можно использовать неравенство:

$$1 - (P_0 + P_1 + \ldots + P_{m-1}) \le R,$$

откуда, после преобразований

$$1 - (1 - \rho)\cdot(1 + \rho + \rho^2 + \ldots + \rho^{m-1}) = 1 - \frac{(1-\rho)\cdot(1-\rho^m)}{(1-\rho)} = \rho^m \le R.$$

В полученном неравенстве в качестве переменной величины выступает нагрузка ρ, поскольку число станков m в автоматизированной технологической ячейке определяется рассматриваемыми вариантами производственной системы.

2. При формулировании рекомендаций необходимо использовать тот факт, что нагрузка ρ станка определяется отношением интенсивностей потоков отказов и восстановлений и связана со средней наработкой на отказ и временем восстановления (ремонта).

Таблица 7.5

Характеристики производственной системы

Вариант	ρ	Фонд времени $Ф$	R	Вариант	ρ	Фонд времени $Ф$	R
1	0,20	7 дней	0,03	13	0,40	10 рабочих дней	0,05
2	0,25	14 дней	0,04	14	0,35	1 месяц	0,04
3	0,30	10 дней	0,05	15	0,30	20 рабочих дней	0,03
4	0,35	20 рабочих дней	0,06	16	0,25	1 месяц	0,02
5	0,40	1 месяц	0,07	17	0,20	2 недели	0,07
6	0,20	1 месяц	0,02	18	0,40	1 неделя	0,06
7	0,25	20 рабочих дней	0,03	19	0,35	2 недели	0,05
8	0,30	10 рабочих дней	0,04	20	0,30	10 рабочих дней	0,04
9	0,35	2 недели	0,05	21	0,25	20 рабочих дней	0,03
10	0,40	1 неделя	0,06	22	0,20	1 месяц	0,02
11	0,20	2 недели	0,07	23	0,40	1 месяц	0,07
12	0,25	1 месяц	0,02	24	0,35	20 рабочих дней	0,06

7.5. Контрольные вопросы

1. Почему интенсивность отказов не является постоянной и может меняться в зависимости от времени эксплуатации системы?

2. Почему стратегия № 1 для ввода резервов является наиболее предпочтительной?

3. По какой причине объём страховых запасов изменяется при увеличении числа станков в системе m?

4. Интенсивность отказов λ при авариях оборудования зависит от m, а при появлении бракованной продукции – от числа деталей. В чём причина?

5. Почему интенсивность восстановлений μ зависит от характера отказа?

6. В каком из случаев и почему интенсивность восстановлений будет выше: а) отказ оборудования; б) выпуск бракованной продукции?

7. В чём недостаток использования в производственных системах уникального оборудования?

8. СТАТИСТИЧЕСКИЕ РАСЧЁТЫ В МАШИНОСТРОЕНИИ

Цель работы – получить общие представления о применении методов теории вероятностей и математической статистики для решения задач в технологии машиностроения.

8.1. Базовые сведения теории вероятностей и математической статистики

8.1.1. Основные понятия

Статистика как наука исследует не отдельные факты, а массовые явления и процессы, выступающие как множество отдельных факторов, обладающих как индивидуальными, так и общими признаками.

Объект статистического исследования (в каждом конкретном случае) в статистике называют статистической совокупностью. **Статистическая совокупность** – это множество единиц, обладающих массовостью, однородностью, определённой целостностью, взаимозависимостью состояния отдельных единиц и наличием вариации.

Каждый отдельно взятый элемент данного множества называется **единицей статистической совокупности**. Единицы статистической совокупности характеризуются общими свойствами, именуемыми в статистике признаками, т. е. под качественной однородностью совокупности понимается сходство единиц (объектов, явлений, процессов) по каким-либо существенным признакам, но различающихся по каким-либо другим признакам.

Единицы совокупности, наряду с общими для всех единиц признаками, обусловливающими качественную определённость совокупности, также обладают индивидуальными особенностями и различиями, отличающими их друг от друга, т. е. существует вариация признаков. Она обусловлена различным сочетанием условий, которые определяют развитие элементов множества.

Статистическая закономерность – это форма проявления причинной связи, выражающаяся в последовательности, регулярности, повторяемости событий с достаточно высокой степенью вероятности, если причины (условия), порождающие события, не изменяются или изменяются незначительно.

Статистическая закономерность устанавливается на основе анализа массовых данных. Так как статистическая закономерность обнаруживается в итоге массового статистического наблюдения, это обуславливает её взаимосвязь с законом больших чисел.

Статистическое наблюдение представляет собой массовое, планомерное, научно организованное наблюдение, заключающееся в регистрации отобранных признаков у каждой единицы совокупности.

Различают ряд *видов статистического наблюдения*, классифицируемых по следующим трём признакам:

1) охват наблюдением единиц совокупности, подлежащей статистическому исследованию;

2) систематичность наблюдения;

3) источник сведений, на основании которого устанавливаются факты, подлежащие регистрации в процессе наблюдения.

По первому признаку выделяют *сплошное* наблюдение, когда наблюдению подвергаются все без исключения единицы совокупности, и *несплошное*, при котором сведения собирают не обо всех единицах совокупности, а только о некоторой части, отобранной определённым образом.

По признаку систематичности наблюдения различают *непрерывное*, или текущее, и *прерывное* наблюдение. Текущее – это наблюдение, которое проводится постоянно: факты, подлежащие регистрации, фиксируются по мере их возникновения. Прерывное проводится с перерывами, время от времени.

По источнику сведений различают наблюдение *непосредственное*, когда факты, подлежащие регистрации, устанавливаются лицами, проводящими наблюдение (путём замера, подсчёта чисел каких-либо предметов и т. д.), *документированное*, при котором необходимые сведения берутся из соответствующих документов, и *опрос*, особенность которого состоит в том, что сведения фиксируются со слов опрашиваемого.

Важнейшая *задача наблюдения* – получение доброкачественных, достоверных данных. Её решение зависит от успешного выполнения требований, предъявляемых к наблюдению. Погрешности, появляющиеся в процессе наблюдения, называются ошибками наблюдения.

В машиностроении статистические выводы используются при оценке точности измерений, определении необходимого количества экспериментов, для управления технологическими процессами, в расчётах баланса точности, корреляционных зависимостях и т. д. Процессы изготовления и эксплуатации для технологических систем подвержены случайным воздействиям, поэтому, например, в партии изготовленных деталей всегда имеется разброс по выполняемым размерам.

Испытание – воспроизводимая совокупность условий, при которых фиксируется тот или другой результат. О всяком новом испытании говорится как о повторении прежнего, чтобы лишний раз подчеркнуть, что испытания происходят в одних и тех же условиях.

Результат испытания называют *событием*. События обозначают большими буквами A, B, C и т. д. Если при повторении испытания его результаты могут отличаться друг от друга, т. е. могут произойти события A, B, C и т. д., то о результате испытания говорят как о *случайном событии*.

Случайной величиной называется переменная величина, которая в результате испытаний может принять то или иное значение в границах определённого интервала.

Например, контроль партии изделий – испытание. Две бракованные единицы продукции, выявленные в результате контроля, – случайное событие. Возможное число бракованных единиц продукции в партии изделий – случайная величина. Измерение глубины отверстия, обработанного на токарном полуавтомате с заданными на чертеже предельными размерами от 29,7 до 30,3 мм – испытание. Глубина отверстия 29,75 мм, полученная в результате измерения, – случайное событие. Глубина отверстия – случайная величина.

Любое случайное событие обладает той или иной объективной возможностью или необходимостью своего появления. Для количественной оценки возможности случайного события пользуются понятием вероятности. Существует классическое и статистическое определение вероятности. По классическому определению **вероятностью события A** называется отношение числа случаев m, благоприятствующих этому событию, к числу n всех возможных случаев при данном испытании, т. е.

$$P(\mathrm{A}) = m / n .$$

Случайные события называются *несовместными* в данном испытании, если никакие два из них не могут появиться вместе. *Вероятность суммы несовместных событий* A и B, т. е. того, что произойдёт или событие A, или событие B, равна

$$P(\mathrm{A}\ \text{или}\ \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B}) .$$

Событие A называется *независимым* от события B, если вероятность появления события A не зависит от того, произошло событие B или не произошло. Если случайные события A и B независимы, то *вероятность* *одновременного наступления событий* А и В (т. е. вероятность того, что произойдет и событие А, и событие В) равна произведению вероятностей появления событий А и В:

$$P(\text{А и В}) = P(\text{А}) \cdot P(\text{В}).$$

Вероятность суммы совместных событий А и В, т. е. вероятность того, что произойдет событие А или событие В, или оба события вместе, вычисляется по формуле

$$P(\text{А или В}) = P(\text{А}) + P(\text{В}) - P(\text{А}) \cdot P(\text{В}).$$

Дискретной случайной величиной называют такую случайную величину, которая может принимать конечное число или последовательность различных значений. **Непрерывной случайной величиной** называют такую случайную величину, которая может принимать все значения из некоторого интервала.

Законом распределения случайной величины называется любое правило, позволяющее находить вероятности всевозможных событий, связанных со случайной величиной.

Рядом распределения дискретной случайной величины *X* называется таблица, в верхней строке которой перечислены в порядке возрастания все возможные значения случайной величины, а в нижней – вероятности этих значений. Ряды распределения могут быть построены только для дискретной случайной величины.

Функцией распределения случайной величины X называется вероятность того, что она примет значение, меньшее или равное x:

$$F(x) = P(X \le x).$$

Зная функцию распределения $F(x)$ случайной величины X, можно вычислять вероятности любых событий, с нею связанных. Например, вероятность попадания случайной величины в заданный интервал от x_1 до x_2 равна приращению функции распределения на этом участке

$$P(x_1 \le X < x_2) = P(X < x_2) - P(X < x_1) = F(x_2) - F(x_1).$$

Первая производная от функции распределения называется **плотностью распределения (плотностью вероятности)** непрерывной случайной величины X в точке x.

8.1.2. Числовые характеристики случайных величин

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называется сумма произведений всех возможных её значений на вероятности этих значений:

$$M[X]=\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i .$$

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины называется определённый интеграл от произведения плотности распределения на действительное переменное x, взятый в пределах от минус ∞ до плюс ∞.

$$M[X]=\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx .$$

Модой (Мо) случайной величины называется её наиболее вероятное значение.

Медианой (Ме) случайной величины называется такое её значение, для которого функция распределения равна 0,5. Иначе говоря, это значение варьирующего признака, которое делит ряд распределения на две равные части по объёму частот. Например, для множества чисел в виде числового ряда медианой будет являться число, которое является серединой множества чисел, при этом половина чисел имеют значения большие, а половина – меньшие, чем медиана.

Оценкой для математического ожидания случайной величины X является **среднее арифметическое** её значений:

$$M[X] \approx \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i .$$

Характеристиками разброса случайной величины около её среднего значения являются **дисперсия** и **стандартное отклонение**.

Оценкой для дисперсии является *статистическая дисперсия*:

$$D[X] \approx s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 .$$

Оценкой стандартного отклонения является *корень из статистической дисперсии*:

$$\sigma[X] \approx s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} .$$

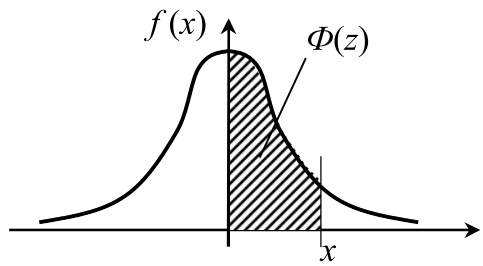
8.1.3. Закон нормального распределения

Закон нормального распределения (закон Гаусса) играет исключительно важную роль в технологии машиностроения и занимает среди других законов распределения особое положение. Говорят, что случайная величина X распределена по нормальному закону (закону Гаусса) с параметрами μ и σ, если **плотность её распределения** имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right].$$

На практике нормальное распределение имеет место, если случайная величина является результатом действия множества несвязанных слабых факторов. При определённых условиях нормальное распределение можно применить как приближение биномиального распределения или распределения Пуассона.

Для нахождения вероятностей попадания нормально распределённой случайной величины в какой-либо интервал чаще всего используют таблицы. В Приложении приведена таблица значений функции Лапласа $\Phi(z)$. Для возможности использования данной таблицы проводят нормирование случайной величины x по формуле $z = (x-\mu)/\sigma$. Соответственно, в таблице приведены вероятности того, что нормированная случайная величина не превзойдёт значение z.



На практике функцию Лапласа удобно использовать для определения вероятности возникновения брака в каком-либо технологическом процессе или нахождения доли продукции с отклонениями.

Пример. В ходе выполнения операции контроля партии втулок после механической обработки были получены значения диаметрального размера каждой из деталей. Анализ результатов показал, что рассеяние размеров подчиняется нормальному закону с математическим ожиданием $\mu = 41{,}1$ мм и стандартным отклонением $\sigma = 0{,}5$ мм. Заданный на чертеже детали размер с допуском 41±0,8 мм, т. е. нижняя граница допуска $x_1 = 40{,}2$ мм, верхняя граница $x_2 = 41{,}8$ мм. Необходимо оценить возможную долю брака.

Решение. На рис. 8.1 представлен график функции плотности распределения значений размеров деталей, на котором указаны середина поля рассеяния μ и границы поля допуска x_1, x_2. Геометрический смысл функции плотности распределения позволяет определить вероятность брака через площади двух участков под кривой распределения P_1 и P_2, отсекаемых границами поля допуска x_1 и x_2.

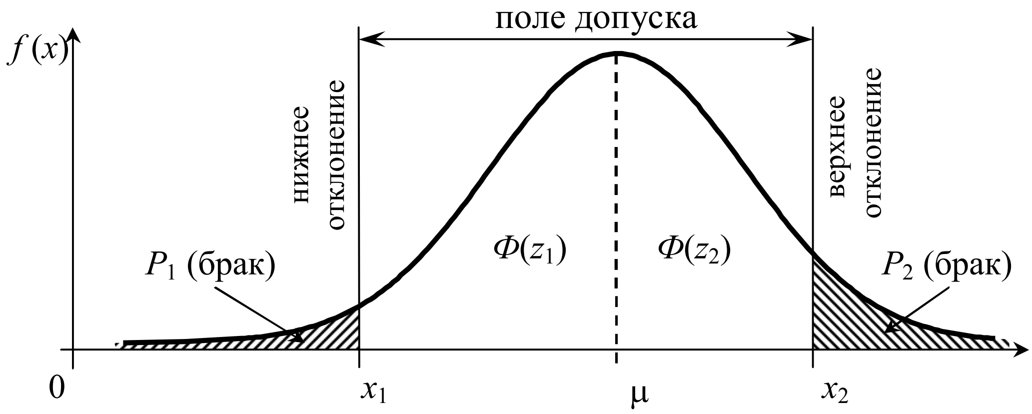


Рис. 8.1. К определению вероятности выхода за границы допуска

Используя тот факт, что площадь под всей кривой равна 1, а также то, что кривая симметрична относительно μ, определяем соответствующие вероятности выхода за границы поля допуска P_1 и P_2 через значения функции Лапласа:

$$P_1 = 0{,}5 - \Phi(z_1), \qquad P_2 = 0{,}5 - \Phi(z_2),$$

где $z_1 = |x_1 - \mu|/\sigma$, $z_2 = (x_2 - \mu)/\sigma$ – аргументы функции Лапласа.

Численно получаем:

$$z_1 = |40{,}2 - 41{,}1|/0{,}5 = 1{,}8; \quad z_1 = |41{,}8 - 41{,}1|/0{,}5 = 1{,}4;$$

$$P_1 = 0{,}5 - \Phi(z_1) = 0{,}5 - 0{,}46407 = 0{,}036;$$

$$P_2 = 0{,}5 - \Phi(z_2) = 0{,}5 - 0{,}41924 = 0{,}080.$$

В конечном итоге, суммарная ожидаемая доля брака

$$P = P_1 + P_2 = 0{,}036 + 0{,}080 = 0{,}116 = 11{,}6\ \%.$$

Следует отметить, что в простейших случаях при решении аналогичных задач удобнее использовать интервалы значений случайной величины, выраженные через σ, и соответствующие им вероятности попадания нормально распределённой случайной величины (табл. 8.1).

Таблица 8.1

Типичные интервалы и вероятности попадания нормально распределённой случайной величины

Интервал	$\mu \pm 1\sigma$	$\mu \pm 1{,}96\sigma$	$\mu \pm 2\sigma$	$\mu \pm 2{,}58\sigma$	$\mu \pm 3\sigma$	$\mu \pm 3{,}29\sigma$
Вероятность попадания, %	68,3	95,0	95,5	99,0	99,7	99,9

На математическом аппарате нормального распределения основано множество статистических методов и инструментов, применяемых в машиностроении: наладка оборудования, анализ состояния технологических процессов с помощью контрольных карт (карт Шухарта), определение показателей возможностей процессов (коэффициентов точности), обработка результатов измерений и т. д.

Нормальное распределение – важнейшее ограничение применимости этих инструментов. Именно поэтому в первую очередь требуется применение описательной статистики и подтверждение (или опровержение) гипотезы о нормальном законе распределения.

8.2. Статистический анализ технологических процессов

При проведении статистического анализа необходимо учитывать длительность и стоимость этой процедуры и ряд требований: репрезентативность (представительность), случайность, несмещённость, эффективность, состоятельность. Началом любого статистического анализа является описательная статистика.

Описательная статистика – техника сбора и суммирования количественных данных, используемая для превращения массы цифровых данных в форму, удобную для восприятия и обсуждения

Описательная статистика чаще всего начинается с иллюстрированного изображения данных, что позволяет быстро оценить характер данных и предварительный тип распределения. На этом этапе чаще всего используют диаграммы рассеяния (разброса) и гистограммы.

8.2.1. Диаграмма рассеяния

Диаграмма рассеяния позволяет оценить стабильность процессов во времени, провести предварительное исследование взаимосвязи между двумя факторами, определить тренд. С помощью диаграммы рассеяния можно установить, например, зависит ли разброс размеров детали от изменения числа оборотов шпинделя, связана ли долговечность детали с температурными условиями её эксплуатации и т. п.

При построении диаграммы предварительно получают ряд парных значений двух факторов Y и X (например, Y – контролируемый размер, X – порядковый номер детали в партии), которые откладывают на соответствующих координатных осях. Построив диаграмму, можно выявить закономерности поведения факторов, оценить величину их разброса, отклонения от общей закономерности, корреляцию и др.

8.2.2. Гистограмма

Гистограмма – это столбчатая диаграмма, показывающая число точек, попадающих в заданные интервалы. Число точек в интервале называют **частотой**. Гистограмма используется для анализа разброса параметров и предварительного выбора типа (закона) распределения, т. е. по внешнему виду гистограммы можно ориентировочно определить тип распределения.

Если процесс стабилен, его гистограмма имеет форму колоколообразной кривой. При этом, если весь диапазон гистограммы разделить на 6 равных отрезков (по три с каждой стороны от центра), то данные распределятся так, как показано на рис. 8.2.

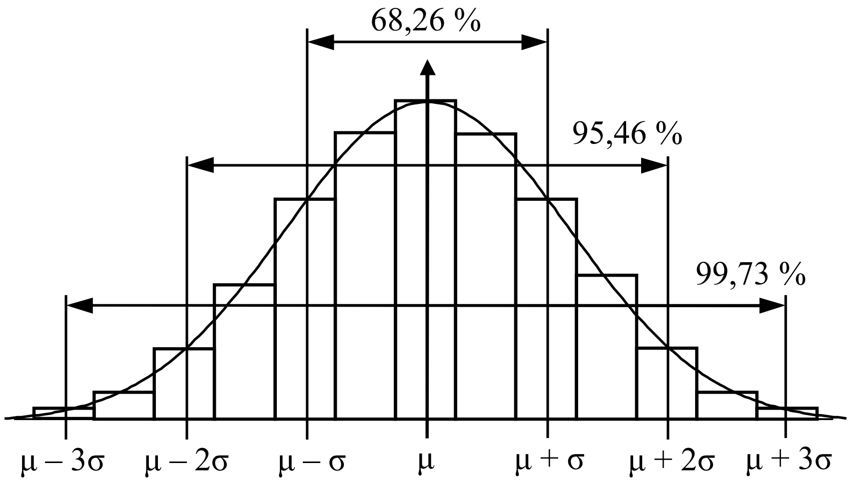


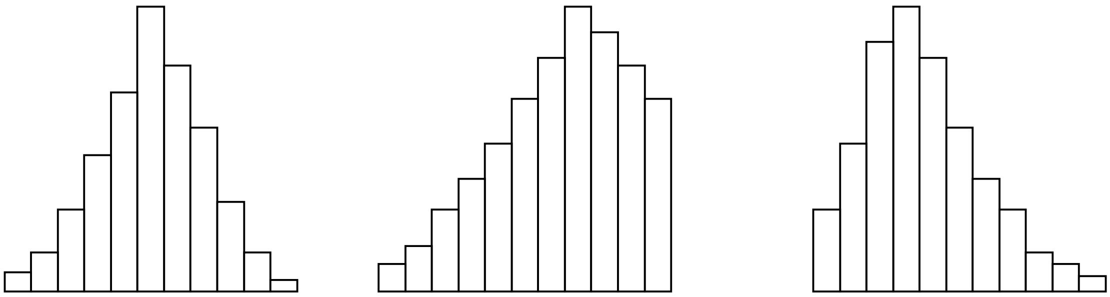
Рис. 8.2. Пример гистограммы стабильного процесса

Различают несколько типичных форм гистограмм, в частности (рис. 8.3):

а) гистограмма с двусторонней симметрией (нормальное распределение). Гистограмма с таким распределением встречается чаще всего. Она указывает на стабильность процесса;

б) гистограмма с ненормально высоким краем. Такая гистограмма отражает случаи, когда была допущена ошибка при измерениях, когда наблюдались отклонения от нормы в ходе процесса и т. д.;

в) гистограмма, вытянутая вправо (влево). Такую форму с плавно вытянутым основанием гистограмма принимает в случае, когда невозможно получить значения меньше (больше) определённого, например для диаметра отверстий, процента содержания примесей в металле.



а) б) в)

Рис. 8.3. Типичные формы гистограмм

Таким образом, форма гистограммы позволяет получить информацию о законе распределения размеров и о наличии или отсутствии отклонений в ходе процесса.

Дальнейший анализ процесса с помощью гистограмм может выполняться сравнением гистограмм с границами допуска. Если нанести на гистограмму линии границ допуска, то можно увидеть, как гистограмма располагается внутри границ, имеется ли брак, есть ли запас по точности и т. д.

Если гистограмма удовлетворяет допуску, то возможны следующие случаи (рис. 8.4):

а) центр гистограммы совпадает с серединой поля допуска. Поле рассеяния небольшое. В этом случае достаточно поддерживать текущее состояние;

б) допуск выдерживается, но нет никакого запаса. Следует уменьшить разброс значений, иначе возможно появление брака.

Если гистограмма не удовлетворяет допуску, ситуации могут быть следующими:

в) разброс размеров небольшой, но центр рассеяния смещён в сторону. Появляется брак. Необходимо сместить центр рассеяния к середине поля допуска;

г) центр рассеяния совпадает с серединой поля допуска, но разброс слишком велик. Появляется брак. Необходимо уменьшить разброс размеров;

д) комбинация вариантов в) и г). То есть необходимо одновременно сместить центр рассеяния к середине поля допуска и при этом уменьшить разброс размеров.

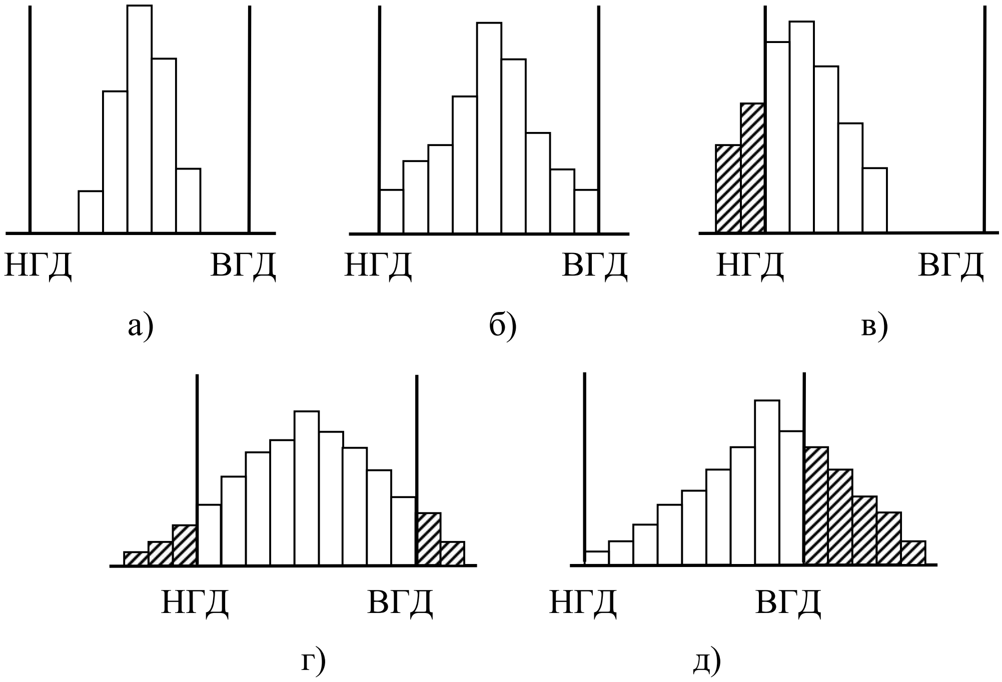


Рис. 8.4. Варианты расположения гистограмм и границ поля допуска: НГД и ВГД – соответственно нижняя и верхняя границы поля допуска

8.2.3. Уточнение закона распределения

Для уточнения закона распределения используют одни из критериев согласия, например **критерий согласия Пирсона** χ^2 (хи-квадрат):

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(m_{\text{т}} - m_{\text{э}}\right)^2}{m_{\text{т}}},$$

где k – число интервалов; $m_{\text{т}}$ – теоретическая частота для i-го интервала; $m_{\text{э}}$ – экспериментальная частота для i-го интервала.

Расчёт значения критерия χ^2 выполняется в следующем порядке.

1. Для выборки значений фактора рассчитывают оценки – среднее арифметическое μ и выборочное стандартное отклонение σ.

2. Разбивают значения на k ($k > 4$) интервалов (при необходимости интервалы могут иметь различную ширину) таким образом, чтобы в каждом интервале находилось, по крайней мере, пять значений фактора.

Для каждого интервала определяют эмпирическую частоту $m_{\text{э}}$ – количество значений исследуемого фактора x, попадающих в данный интервал.

Для нормального распределения с параметрами μ и σ находят вероятность попадания значений фактора в i-й интервал. По ней определяют теоретические частоты $m_{\text{т}}$ – число значений фактора, которые должны были бы попасть в этот интервал при нормальном распределении.

Проводят вычисления значения критерия и, используя результаты, представленные в табл. 8.2, принимают или отвергают гипотезу.

Таблица 8.2

Процентные точки распределения χ^2

Число степеней свободы r	Уровень значимости α							
	0,995	0,99	0,95	0,9	0,1	0,05	0,01	0,005
2	0,0100	0,0201	0,1026	0,2107	4,6052	5,9915	9,2104	10,5965
3	0,0717	0,1148	0,3518	0,5844	6,2514	7,8147	11,3449	12,8381
4	0,2070	0,2971	0,7107	1,0636	7,7794	9,4877	13,2767	14,8602
5	0,4118	0,5543	1,1455	1,6103	9,2363	11,0705	15,0863	16,7496
6	0,6757	0,8721	1,6354	2,2041	10,6446	12,5916	16,8119	18,5475
7	0,9893	1,2390	2,1673	2,8331	12,0170	14,0671	18,4753	20,2777
8	1,3444	1,6465	2,7326	3,4895	13,3616	15,5073	20,0902	21,9549
9	1,7349	2,0879	3,3251	4,1682	14,6837	16,9190	21,6660	23,5893
10	2,1558	2,5582	3,9403	4,8652	15,9872	18,3070	23,2093	25,1881
11	2,6032	3,0535	4,5748	5,5778	17,2750	19,6752	24,7250	26,7569
12	3,0738	3,5706	5,2260	6,3038	18,5493	21,0261	26,2170	28,2997

Уровень значимости α обычно принимают равным 0,05. *Число степеней свободы r* рассчитывается по формуле $r = k - p - 1$, где k – число сравниваемых частот (интервалов); p – число параметров теоретического распределения, для нормального распределения $p = 2$.

Если рассчитанное значение критерия *не превышает табличного*, то нет оснований сомневаться в том, что генеральная совокупность, откуда произведена выборка, имеет предполагаемое нормальное распределение. Однако это не означает, что речь идёт о каждом случае нормального распределения. Можно только утверждать, что если нормальное распределение действительно имеет место, то рассчитанное значение критерия в среднем только в α всех случаев превышает табличное. Уровень значимости α ещё именуют *вероятностью ошибки первого рода*, т. е. вероятностью ошибочно отвергнуть нулевую гипотезу, когда она верна.

После подтверждения гипотезы о нормальном законе распределения можно оценить статистические возможности процесса: воспроизводимость и точность.

8.2.4. Воспроизводимость процесса

Воспроизводимый процесс – это такой процесс, разброс которого имеет колоколообразную форму и укладывается в поле допуска. Анализ воспроизводимости выполняется с целью:

– оценки нового оборудования;

– распределения оборудования по продукции (более стабильное оборудование для особо точных работ);

– отслеживания текущих показателей процесса;

– пересмотра допусков на основе внутренней изменчивости процесса.

Для анализа воспроизводимости рассчитывается *индекс воспроизводимости процесса* C_p, оценивающий возможности удовлетворять технический допуск без учёта положения среднего значения и применяемый для стабильных по разбросу процессов (ГОСТ Р 50779.44-2001 «Статистические методы. Показатели возможностей процессов»):

$$C_p = \frac{T}{6\sigma},$$

где T – допуск; σ – стандартное отклонение (мера рассеяния данных).

Среднее арифметическое позволяет определить, насколько смещён центр группирования размеров относительно середины поля допуска, а σ определяет разброс данных. Чем больше σ, тем шире и ниже кривая нормального распределения; чем σ меньше, тем кривая выше и уже.

Процесс считается воспроизводимым при $C_p > 1{,}33$; управляемым при жёстком контроле при $C_p \in [1, 1{,}33]$; неуправляемым при $C_p < 1$ (рис. 8.5).

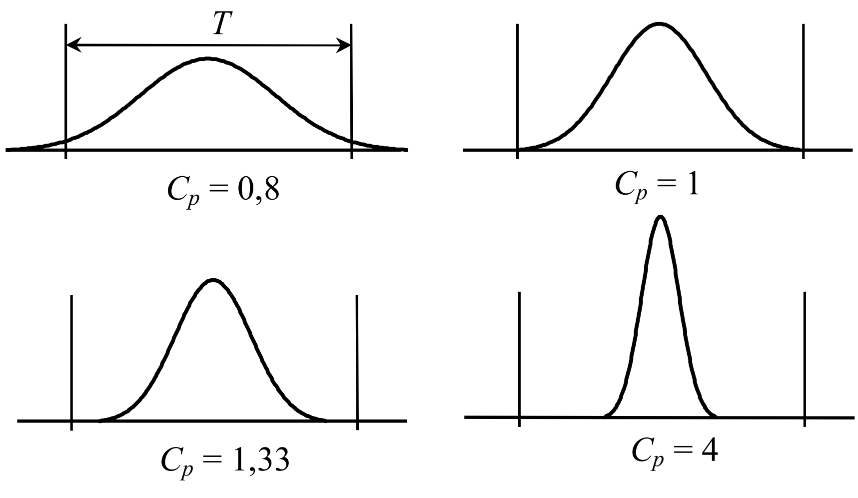


Рис. 8.5. Положения кривой рассеяния данных при разных индексах воспроизводимости

Как видно из рис. 8.5, значение $C_p = 1$ не даёт гарантии от возникновения брака из-за возможного смещения кривой распределения относительно центра допуска. Для оценки таких ситуаций используют другой индекс воспроизводимости, а именно:

$$C_{pk} = (1 - k) \cdot C_p, \quad \text{где} \quad k = \frac{\left| (НГД + ВГД)/2 - \bar{x} \right|}{(ВГД - НГД)/2}.$$

По известному значению индексов воспроизводимости можно оценить ожидаемый уровень несоответствий продукции (табл. 8.3).

Таблица 8.3

Связь индексов воспроизводимости стабильных процессов с ожидаемым уровнем несоответствий (брака) продукции

Значение C_p или C_{pk}	Уровень несоответствий продукции в	
	процентах	единицах на миллион (ppm)
0,33	32,2	322000
0,55	9,9	99000
0,75	2,4	24000
1,00	0,27	2700
1,33	0,0066	66
1,50	0,00068	6,8
1,67	0,000057	0,57

В середине прошлого века было принято считать, что границы допуска должны находиться на расстоянии $\pm 3\sigma$ от номинала. Этому соглашению соответствуют значение индекса $C_p = 1$ и уровень дефектности продукции 0,27 %. В 90-х годах прошлого века ведущие зарубежные компании, если они хотели быть конкурентоспособными, стремились снизить изменчивость своих процессов (например разброс размеров деталей) до такого уровня, чтобы значения индекса C_p были равны величинам, представленным в табл. 8.4.

Таблица 8.4

Ориентиры для индекса C_p в начале 90-х годов XX века

Существующие процессы	$C_p = 1,33$
Новые процессы	$C_p = 1,50$
Существующие процессы при наличии требований по безопасности, прочности и другим критическим параметрам	$C_p = 1,50$
Новые процессы при наличии требований по безопасности, прочности и другим критическим параметрам	$C_p = 1,67$

Величина, обратная C_p, характеризует точность технологического процесса. Считают, что возможности технологического процесса по точности удовлетворительны, если *коэффициент точности* $K_т = 1/C_p$ не превышает единицу. В табл. 8.5 приведены диапазоны коэффициента точности и соответствующие им качественные характеристики технологических процессов.

Таблица 8.5

Оценка технологического процесса по коэффициенту точности

Диапазон $K_т$	Оценка технологического процесса
$K_т < 0{,}75$	Технологический процесс точный, удовлетворительный. Точность стабильна, имеется запас по точности
$0{,}98 > K_т > 0{,}76$	Технологический процесс требует внимательного наблюдения. Имеется опасение, что появятся дефектные изделия
$K_т > 0{,}98$	Дефектные изделия по обе стороны допуска. Технологический процесс неудовлетворительный

8.3. Задания для самостоятельной работы

Числовые характеристики случайных величин

8.3.1. На участке изготовления зубчатых колёс при механической обработке наиболее часто возникают два типа дефектов: 1) шлифовочные прижоги на боковых поверхностях зубьев; 2) коробление зубьев из-за остаточных напряжений. Возникновение этих типов дефектов не зависит друг от друга. Известно, что в среднем 5 % зубчатых колёс имеют прижоги, а 10 % – коробление. Необходимо дать ответы на следующие вопросы: а) какова доля исправной продукции; б) какова доля продукции, имеющей оба типа дефектов?

8.3.2. В ходе проведения испытаний лопаток турбины ГТД на вибростенде измерялись частоты собственных колебаний f. Результаты первых девяти измерений занесены в табл. 8.6. Для последующего статистического анализа данных необходимо определить: а) среднее арифметическое значение частоты; б) медиану; в) статистическую дисперсию; г) стандартное (среднеквадратическое) отклонение.

Таблица 8.6

Результаты измерения частот собственных колебаний лопаток

Вариант	Частота f, кГц								
1	4,082	4,069	4,077	4,074	4,072	4,064	4,070	4,071	4,065
2	4,582	4,567	4,576	4,573	4,571	4,562	4,568	4,570	4,563
3	4,020	4,008	4,015	4,013	4,011	4,003	4,009	4,010	4,004
4	3,704	3,692	3,699	3,697	3,695	3,688	3,693	3,694	3,689
5	3,387	3,377	3,383	3,381	3,379	3,372	3,377	3,378	3,373
6	3,071	3,061	3,067	3,065	3,063	3,057	3,062	3,063	3,058
7	2,754	2,746	2,751	2,749	2,748	2,742	2,746	2,747	2,743
8	2,438	2,430	2,435	2,433	2,432	2,427	2,431	2,431	2,428
9	2,121	2,115	2,119	2,117	2,116	2,112	2,115	2,116	2,113
10	1,804	1,799	1,802	1,801	1,800	1,797	1,799	1,800	1,797
11	4,182	4,169	4,177	4,174	4,172	4,164	4,170	4,171	4,165
12	3,988	3,976	3,983	3,980	3,978	3,971	3,977	3,977	3,972
13	3,794	3,782	3,789	3,787	3,785	3,778	3,783	3,784	3,779
14	3,600	3,589	3,595	3,593	3,591	3,584	3,590	3,590	3,585
15	3,406	3,395	3,402	3,399	3,398	3,391	3,396	3,397	3,392
16	3,212	3,202	3,208	3,206	3,204	3,198	3,203	3,203	3,199
17	3,017	3,008	3,014	3,012	3,010	3,005	3,009	3,010	3,006
18	2,823	2,815	2,820	2,818	2,817	2,812	2,816	2,816	2,812
19	2,629	2,621	2,626	2,624	2,623	2,618	2,622	2,623	2,619
20	2,435	2,428	2,432	2,431	2,430	2,425	2,429	2,429	2,426
21	2,241	2,235	2,239	2,237	2,236	2,232	2,235	2,236	2,233
22	2,047	2,041	2,045	2,043	2,042	2,039	2,042	2,042	2,039
23	1,853	1,848	1,851	1,850	1,849	1,846	1,848	1,848	1,846
24	1,659	1,654	1,657	1,656	1,655	1,652	1,655	1,655	1,653
25	1,465	1,461	1,463	1,462	1,462	1,459	1,461	1,461	1,460

Закон нормального распределения

8.3.3. Заготовки для дисков I ступени турбины ГТД изготавливаются из гранулированного жаропрочного сплава ЭП741НП методом порошковой металлургии. Порошковый материал для заготовок отмеряется порциями определённой массы с помощью дозирующего автомата. При настройке автомата на номинальную массу $\mu = 1001$ г было определено, что масса получающихся заготовок подчиняется нормальному распределению с математическим ожиданием μ и стандартным отклонением $\sigma = 0{,}5$ г.

Пользуясь таблицей $\Phi(z)$ приложения, необходимо найти:

а) долю брака $P_{\text{бр}}$, если поле допуска на массу заготовок ограничено пределами [998,5 г; 1001,5 г];

б) на какое значение массы μ необходимо переналадить дозирующий автомат, чтобы доля брака была минимальна? Какова эта доля брака?

8.4. Дополнительные задания повышенной сложности

Статистический анализ процессов

8.4.1. На участке механического цеха выполняется обработка деталей типа «ось сателлита». С целью анализа состояния технологического процесса провели измерение посадочного диаметра 114 деталей после обработки. Полученную выборку из 114 значений разбили на 7 интервалов. Количество попаданий в каждый интервал (эмпирическую частоту) записали в табл. 8.7. Вычислили среднее значение диаметра в выборке $\mu = 10{,}01$ мм и выборочное стандартное отклонение $\sigma = 0{,}10$ мм. Заданный чертежом детали размер с допуском составляет $10 \pm 0{,}2$ мм.

Таблица 8.7

Эмпирические частоты $m_э$

Вариант	Частота $m_э$ в интервале №						
	1	2	3	4	5	6	7
1	5	12	24	35	23	10	5
2	4	11	22	35	33	5	4
3	4	5	33	35	22	11	4
4	1	12	24	35	23	12	7
5	4	12	31	25	30	10	4
6	5	12	23	34	23	11	6
7	4	11	22	33	33	7	4
8	5	12	27	27	27	11	5
9	4	12	22	37	23	11	5
10	4	10	21	33	35	7	4
11	4	7	35	33	21	10	4
12	4	11	27	28	28	11	5
13	5	12	24	33	23	12	5
14	4	10	20	33	35	8	4
15	4	4	31	37	22	12	4
16	3	10	24	35	25	12	5
17	4	12	22	37	31	4	4
18	4	11	30	24	30	11	4
19	5	6	30	34	22	13	4
20	5	13	24	32	23	12	5
21	4	12	22	37	31	5	3
22	5	14	26	26	26	12	5
23	4	12	29	24	29	11	5
24	5	11	24	35	24	10	5
25	4	13	22	34	30	6	5

Для выполнения статистического анализа процесса необходимо:

1) построив гистограмму, сделать предварительное заключение о

законе распределения значений диаметра деталей в выборке, наличии и причинах отклонений;

2) используя критерий Пирсона χ^2, проверить гипотезу о нормальном законе распределения значений диаметра в выборке. Уровень значимости принять равным 0,05. Теоретические частоты были рассчитаны заранее и приведены в табл. 8.8. Полученный вывод сравнить с результатом анализа гистограммы;

3) определить индексы воспроизводимости процесса C_p и C_{pk}. Оценить ожидаемый уровень несоответствий (долю брака) продукции;

4) определить коэффициент точности операции. Дать оценку технологическому процессу по коэффициенту точности;

5) используя функцию Лапласа $\Phi(z)$, уточнить ранее выполненную оценку ожидаемой доли брака.

Таблица 8.8

Теоретические частоты $m_т$ при нормальном законе распределения

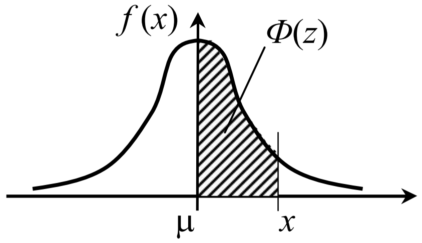
№ интервала	1	2	3	4	5	6	7
Частота $m_т$	4	11	22	33	22	11	4

8.5. Контрольные вопросы

1. С какой целью выполняется статистическое наблюдение?
2. В чём заключается задача статистического наблюдения?
3. Что характеризует стандартное отклонение случайной величины?
4. В каких случаях имеет место нормальное распределение случайной величины?
5. С какой целью используется диаграмма рассеяния?
6. Какие данные необходимы для построения гистограммы?
7. Что позволяет оценить форма гистограммы и её расположение относительно поля допуска?
8. Каким образом можно проверить гипотезу о законе распределения случайной величины?
9. Какой процесс называется воспроизводимым?
10. Как связан индекс воспроизводимости процесса с уровнем несоответствий продукции?
11. Какой величиной можно охарактеризовать возможности технологического процесса по точности?

ПРИЛОЖЕНИЕ

Значения функции Лапласа $\Phi(z)$



Вероятность попадания нормально распределённой случайной величины в интервал $[\mu; x]$

$$\Phi(z)=\int_0^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\ell^{\frac{-t^2}{2}}\,dt,\quad \text{где}\quad z=\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	,00000	,00399	,00798	,01197	,01595	,01994	,02392	,02790	,03188	,03586
0,1	,03983	,04380	,04776	,05172	,05567	,05962	,06356	,06749	,07142	,07535
0,2	,07926	,08317	,08706	,09095	,09483	,09871	,10257	,10642	,11026	,11409
0,3	,11791	,12172	,12552	,12930	,13307	,13683	,14058	,14431	,14803	,15173
0,4	,15542	,15910	,16276	,16640	,17003	,17364	,17724	,18082	,18439	,18793
0,5	,19146	,19497	,19847	,20194	,20540	,20884	,21226	,21566	,21904	,22240
0,6	,22575	,22907	,23237	,23565	,.23891	,24215	,24537	,24857	,25148	,25490
0,7	,25804	,26115	,26424	,26730	,27035	,27337	,27637	,27935	,28230	,28524
0,8	,28814	,29103	,29389	,29673	,29955	,30234	,30511	,30785	,31057	,31327
0,9	,31594	,31859	,32121	,32381	,32639	,32894	,33147	,33398	,33646	,33891
1,0	,34134	,34375	,34614	,34849	,35083	,35314	,35543	,35769	,35993	,36214
1,1	,36433	,36650	,36864	,37076	,37286	,37493	,37698	,37900	,38100	,38298
1,2	,38493	,38686	,38877	,39065	,39251	,39435	,39617	,39796	,39973	,40147
1,3	,40320	,40490	,40658	,40842	,40988	,41149	,41308	,41466	,41621	,41774
1,4	,41924	,42073	,42220	,42364	,42507	,42647	,42785	,42922	,43056	,43189
1,5	,43319	,43448	,43574	,43699	,43822	,43943	,44062	,44179	,44295	,44408
1,6	,44520	,44630	,44738	,44845	,44950	,45053	,45154	,45254	,45352	,45449
1,7	,45543	,45637	,45728	,45818	,45907	,45994	,46080	,46164	,46246	,46327
1,8	,46407	,46485	,46562	,46638	,46712	,46784	,46856	,46926	,46995	,47062
1,9	,47128	,47193	,47257	,47320	,47381	,47441	,47500	,47558	,47615	,47670
2,0	,47725	,47778	,47831	,47882	,47932	,47982	,48030	,48077	,48124	,48169
2,1	,48214	,48257	,48300	,48341	,48382	,48422	,48461	,48500	,48537	,48574
2,2	,48610	,48645	,48679	,48713	,48745	,48778	,48809	,48840	,48870	,48899
2,3	,48928	,48956	,48983	,49010	,49036	,49061	,49086	,49111	,49134	,49158
2,4	,49180	,49202	,49224	,49245	,49266	,49286	,49305	,49324	,49343	,49361
2,5	,49379	,49396	,49413	,49430	,49446	,49461	,49477	,49492	,49506	,49520
2,6	,49534	,49547	,49560	,49573	,49585	,49598	,49609	,49621	,49632	,49643
2,7	,49653	,49664	,49674	,49683	,49693	,49702	,49711	,49720	,49728	,49736
2,8	,49744	,49752	,49760	,49767	,49774	,49781	,49788	,49795	,49801	,49807
2,9	,49813	,49819	,49825	,49831	,49836	,49841	,49846	,49851	,49856	,49861
3,0	,49865	,49869	,49874	,49878	,49882	,49886	,49889	,49893	,49896	,49900
3,1	,49903	,49906	,49910	,49913	,49916	,49918	,49921	,49924	,49926	,49929
3,2	,49931	,49934	,49936	,49938	,49940	,49942	,49944	,49946	,49948	,49950
3,3	,49952	,49953	,49955	,49957	,49958	,49960	,49961	,49962	,49964	,49965
3,4	,49966	,49968	,49969	,49970	,49971	,49972	,49973	,49974	,49975	,49976
3,5	,49977	,49978	,49978	,49979	,49980	,49981	,49981	,49982	,49983	,49983
3,6	,49984	,49985	,49985	,49986	,49986	,49987	,49987	,49988	,49988	,49989
3,7	,49989	,49990	,49990	,49990	,49991	,49991	,49992	,49992	,49992	,49992
3,8	,49993	,49993	,49993	,49994	,49994	,49994	,49994	,49995	,49995	,49995
3,9	,49995	,49995	,49996	,49996	,49996	,49996	,49996	,49996	,49997	,49997
4,0	,49997	,49997	,49997	,49997	,49997	,49997	,49998	,49998	,49998	,49998

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кузнецов, Б. Т. Математические методы и модели исследования операций [Текст]: Учебное пособие для вузов / Б. Т. Кузнецов. – М.: Изд-во ЮНИТИ, 2005. – 390 с.

2. Советов, Б. Я. Моделирование систем [Текст]: Учеб. для вузов. – 4-е изд., перераб. и доп. / Б. Я. Советов, С. А. Яковлев. – М.: Высшая школа, 2005. – 343 с.

3. Исследование операций [Текст]. В 2 т. / Под ред. Дж. Моудера и С. Элмаграби. – М.: Мир, 1981. – Т.1. – 712 с.

4. Таха, Хемди А. Введение в исследование операций [Текст]. – 7-е издание / Хемди А. Таха. – Издательство «Вильямс», 2005. – 912 с.

5. Рейклетис, Г. Оптимизация в технике [Текст] / Г. Рейклетис. – М.: Мир, 1986. – 350 с.

6. Оно, Т. Производственная система Тойоты. Уходя от массового производства [Текст] / Т. Оно. – М.: Институт комплексных стратегических исследований, 2005. – 192 с.

7. Синго, С. Изучение производственной системы Тойоты с точки зрения организации производства [Текст] / С. Синго. – М.: Институт комплексных стратегических исследований, 2006. – 312 с.

8. Шапкин, А. С. Теория риска и моделирование рисковых ситуаций [Текст]: Учебник / А. С. Шапкин, В. А. Шапкин. – М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2005. – 880 с.

9. Розанов, Ю. А. Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика [Текст]: Учебник для вузов / Ю. А. Розанов. – М.: Наука, 1985. – 320 с.

Для заметок