Ha $(X, \mathcal{F}, \mu)$ egy mértéktér és $(Y, \mathcal{G})$ egy mérhető tér, valamint $T : X \to Y$ egy mérhető függvény, akkor ha $B \in \mathcal{G}$, akkor

$$T_{\#}(\mu)(B) = \mu\left(T^{-1}(B)\right)$$

mérték a μ -nek T szerinti **pushforward mértéke**.

Speciálisan ha X egy valószínűségi változó, és $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező, akkor

$$F_X(B) = X_{\#}(P)(B) = P\left(X^{-1}(B)\right)$$

, azaz az X eloszlásfüggvénye a B halmazon. Ennek következménye, hogy ha $h : (Y, \mathcal{G}) \to R$ egy mérhető függvény, akkor a

$$\int_X h(T(x))\, d\mu(x) = \int_Y h(y)\, d(T_{\#}\mu)(y)$$

fennáll, mivel itt gyakorlatilag nem történik semmi más, minthogy a (pushforward) képmérték szerint integrálunk, mivel a képet vesszük a változónak. Ekkor adódik, hogy ha $\omega \in A$, akkor

$$E(X^n(\omega)) = \int_\Omega X^n(\omega)\, dP(A) \overset{\text{előző egyenl.}}{=} \int_R x^n\, dF_X((-\infty, x])$$

Ebből következik, hogy a két oldal (a várható érték, és az eloszlásfüggvény szerinti integrál) egyszerre létezik, vagy nem, véges vagy végtelen. Mivel mind a Momentumgeneráló, mind a Karakterisztikus, mind a Laplace transzformált valójában egy várható érték. Ezért elmondható róluk hogyha léteznek, akkor az eloszlás függvény szerinti integráljuk is létezik, ha még végesek is, akkor az is elmondható róluk hogy az integrálos alakjuk is véges.

Nézzük a következő állítást : Eloszláson a valószínűségi változók által indukált mértéket értjük, amely a Borel-halmazokon van értelmezve:

Ebből a pushforward mérték definíciója szerint:

$$\mu(B) = P\left((X_1, \ldots, X_n) \in B\right), \quad B \in \mathcal{B}(R^n)$$

Ekkor T(B) = A mérhető függvény, ezáltal

$$T_{\#}(\mu)(A) = \mu\left(T^{-1}(A)\right) = \mu(B)$$

azaz a speciális esetre nézve:

$$F_X(B) = X_{\#}(P)(B) = P\left(X^{-1}(B)\right) = P(A \in \Omega) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\})$$

A speciális eset miatti következmény: **Az eloszlást egyértelműen jellemzi az eloszlásfüggvény.**

Most nézzük a következő tételt: **A karakterisztikus függvény egyértelműen meghatározza az eloszlást!**

Legyen F_1, F_2 két eloszlás, amely karakterisztikus függvénye megegyezik. Ekkor azon korlátos és mérhető függvények halmazára (ezek az u(x)-k), melyre

$$\int_R u(x)\, dF_1(x) = \int_R u(x)\, dF_2(x)$$

, igaz, hogy F_1, F_2 mérték voltuk miatt, az u(x) függvény mérhető, tehát fennáll rá a monoton konvergencia tétel. Mivel F_1, F_2 mértékek karakterisztikus függvénye a feltétel szerint megegyezik, ezért az is igaz, hogy az u(x) függvények osztálya tartalmazza a sin(tx), és cos(tx) függvényt is. Ennek fényében kijelenthető, hogy a lehetséges u függvények egy monoton osztályt alkotnak, hiszen ezen monoton osztályban lévő függvények szorzatára is fennáll a monoton konvergencia tétel az u korlátossága miatt. Ekkor az osztály elemei is korlátosak. A trigonometrikus függvények gyűrűje σ-gyűrűt alkot, és benne van a monoton osztályban is, hiszen a trigonometrikus polinomok előállnak trigonometrikus függvények összegeként, és szorzataként. U(x) lehet 1 is, tehát a Dynikin-tétel miatt ennek a σ-gyűrű által generált legszűkebb σ-algebra szerint mérhető függvények halmaza benne van monoton osztályban.

Azaz az egyértelműség miatt $F_1(G) = F_2(G)$. Most azt kell megmutatni, hogy G tetszőleges Borel-halmaz lehet. Be kell ehhez látni hogy a trigonometrikus függvények által generált σ-algebra megegyezik a Borel halmazokkal. Ehhez elég az, hogy ezeknek a h(x) függvények osztályában benne vannak a Borel-mérhető halmazok. Ehhez találni kell egy olyan függvényt, amely által generált σ-algebra megegyezik a Borel-mérhető függvények halmazával. Tudunk egy ilyen függvény készíteni, hiszen

Legyen u(x) egy olyan függvény, ami $f_n(x) = \frac{n \sin(x/n)}{n}$ alakú. Ekkor hogyha n-nel tartunk végtelenbe, akkor igaz, hogy az ezen függvény által generált σ-algebra a borel mérhető függvények halmaza, mivel

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(x/n)}{x/n} \cdot x = x.$$

az identitás függvény inverze is az identitás, vagyis mindenképpen Borel-mérhető.

Az egyszerűen bizonyítható, hogy a Laplace transzformált $X \geq 0$ esetén szintén egyértelműen meghatározza az eloszlást, hiszen ha egy monoton növekedő függvényt veszünk, akkor az e^{-tx} korlátos.

0.1 Komplex függvénytan

Vegyünk egy $\Gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$ Függvényt.

Ekkor egy f(z) függvény,(ahol $z \in \Gamma[a, b] \in \mathbf{C}$) halmazon vett integrálja:

$$\int_{\Gamma[a,b]} f(z)dz$$

Ez az integrál egy közönséges Stieltjes-integrál, hiszen a közelítő összegek hazárértékeként definiáljuk. $\Gamma \in \mathbf{C}$ miatt lehet egy kör, egy háromszög, vagy akármilyen komplex síkon értelmezhezhető halmaz is. Speciálisan ha ez a Γ függvény egy intervallumhoz kört rendel, akkor ez egy körintegrál, amit

$$\oint f(z)\, dz$$

módon jelölünk. A komplex integrál definíciójából továbbgondolva, és $\Gamma(t) = z$ miatt,

$$\int_{\Gamma[a,b]} f(z)dz \overset{\frac{dz}{dt}=\Gamma'(t)}{=} \int_a^b f(\Gamma(t)) * \Gamma'(t)dt$$

Mese: Számoljuk ki a z^n körintegrálját! $f(z) = z^n, \Gamma(t) = z = e^{it}$

$$\oint z^n\, dz = \int_0^{2\pi} (e^{it})^n * ie^{it}dt = i\int_0^{2\pi} (e^{it})^{(n+1)}dt = i\int_0^{2\pi} cos((n+1)t) + i * sin((n+1)t)dt$$

ami $n \neq 1$ esetén egyenlő 0 -val, hiszen mind a sinusos, mind a cosinusos tag integrálja a 2π és 0 helyen azonos, hiszen ez 1 periódus eltérés.

viszont az a baj, hogy n = -1 esetén a

$$i\int_0^{2\pi} (e^{it})^{(n+1)}dt$$

$(e^{it})^{(n+1)}$ tag 0 kitevős, így az e^0 miatt ez a tag 1 lesz, tehát az integrál $2\pi i$ lesz.

Az iránymenti derivált képlete a következő:

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

Egy komplex változós függvény egy z pontban deriválható, ha egyrészt deriválható a z pontban mint a síkot a síkba képező függvény, másrészt a deriváltmátrix

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

alakú.

Cauchy-tétel

Def:Ha G egy csillagszerű nyílt halmaz, $f(z)$ egy komplex változós függvény, amely G minden pontjában deriválható, és γ egy zárt görbe, akkor:

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0.$$

Speciálisan, ha z_1 és z_2 a G két pontja, akkor az

$$\int_\gamma f(z)\, dz$$

integrál értéke nem függ a két pontot összekötő γ görbe konkrét megválasztásától.

Bizonyítás: Jelöljünk ki egy akármilyen pontot a csillagszerű halmazban, legyen ez z^*. Nézzük az

$$f(z^* + h)$$

függvényt.

Ekkor átrendezve az $f'(z^*) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z^*+h)-f(z^*)}{h}$ egyenlőséget,

$$f(z^* + h) = f(z^*) + f'(z^*) * h + o(h).$$

az f(z*) konstans volta miatt a

$$\oint_{\triangle} f(z^*)\, dz$$

háromszögintegrál kifejezhető a komplex halmazon értelmezett integrál definíciója miatt $\sum c * (\Gamma(t_i) - \Gamma(t_{i-1}) = c * \sum(\Gamma(t_i) - \Gamma(t_{i-1}))$, -ként, ami a háromszög zártsága miatt, a körbejárás azt eredményezi, hogy $\sum(\Gamma(t_i) - \Gamma(t_{i-1}))$, 0 lesz, azaz a deriváltja(az f(z*)) is 0. Ahhoz, hogy belássuk, hogy a második tag is 0 be kell bizonyítanunk, hogy a

$$\oint_{\triangle} h\, dh$$

is 0.

Mivel ez nem konstans, hanem tart a 0, ba, ezért nem triviálisan 0 az integrál. Nézzük a jobboldali és a baloldali integrálját az adott függvénynek. Ekkor az integrál értéke a korlátos növekmény miatt nem függ a tesztpontok megválasztásától, tehát

$$\sum h_i(h_i - h_{i-1}) = \sum h_{i-1}(h_i - h_{i-1}) = I, \text{ tehát } \sum h_i(h_i - h_{i-1}) + \sum h_{i-1}(h_i - h_{i-1}) = 2I$$

Na mármost a $h_i * h_{i-1}$ tagok a teleszkopikus összeg miatt kiesnek az utóbbi egyenlőségből, így azt kapjuk, hogy

$$\sum h_i(h_i - h_{i-1}) + \sum h_{i-1}(h_i - h_{i-1}) = \sum h_i^2 - h_{i-1}^2 = h_1^2 - h_N^2$$

, ezek a körbejárás miatt megegyeznek, tehát ez is 0.

Az o(h)-s tagot könnyű bizonyítani, hisz ahogyan háromszöggel közeledünk a 0 felé h-val, úgy mindig kiválasztjuk azt a háromszöget, amiben benne van a pont, így ha az alapterülete a háromszögnek A, akkor így $A/4^n$-nél kisebb lesz az o(h) integráljának értéke. Viszont A háromszög kerületénél mindig nagyobb, így ha negyedeljük a háromszöget, akkor ez az érték nagyobb lesz L = háromszög kerülete esetén $L/2^n$-nél.

Tétel: Ha egy függvény minden pontban komplex értelemben deriváható, akkor analitikus, vagyis kifejezhető

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k,$$

alakban, ahol $z \in intB(z_0, r)$, és $B(z_0, r)$ része az f értelmezési tartományának.
Bizonyítás: Legyen

$$g(u) = \frac{f(u) - f(z)}{u - z}$$

, ahol a körvonalon van az u pont, azaz $u \in \partial B(z_0, r)$ A Cauchy-tétel közvetlenül nem alkalmazható, ugyanis g(u) nem deriválható a z pontban. Ekkor az adott körön igaz, hogy

$$\int_{B(z_0,r)} g(u)du = \int_{B(z,u-z)} g(u)du,$$

mivel a z pont egy tetszőleges általunk kiválasztott pont. Ekkor vehetünk egy $B(z, \delta)$ sugarú gömböt hogy a körüljárási szabály miatt igaz, hogy

$$\int_{B(z,u-z)} g(u)du = \int_{B(z,\delta)} g(u)du$$

Ekkor sem $B(0, \delta)$ nem csillagszerűek, de akárhogy a z ponton átmenve végzünk 2 vágást, akkor már a kapott 4 halmaz csillagszerű lesz, $u \in \partial B(z_0, r)$, tehát $B(z, u - z)$ zárt, így alkalmazható rá a Cauchy -tétel. Vagyis az integrálja 0. Ezáltal, tudjuk, hogy a u = z esetén a g függvény deriválható.

Ekkor ebből triviális, hogy

$$\int_{B(z_0,r)=\Gamma} \frac{f(u) - f(z)}{u - z} du = 0, \text{ vagyis} \int_{B(z_0,r)=\Gamma} \frac{f(u)}{u - z} du = \int_{B(z_0,r)=\Gamma} \frac{f(z)}{u - z} du =$$

$$f(z) \int_{B(z_0,r)=\Gamma} \frac{1}{u - z} du \overset{\text{integrál u-tól függ, z konstans.}}{=} f(z) \oint_{\gamma} \frac{1}{u} du =$$

$$f(z) \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} \cdot ie^{it} \, dt = f(z)i \int_0^{2\pi} dt = f(z)2\pi i$$

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(u)}{u-z}\,du \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(u)}{(u-z_0)-(z-z_0)}\,du \quad \text{(Robin Hood)} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{1}{u-z_0}\cdot\frac{f(u)}{1-\frac{z-z_0}{u-z_0}}\,du \quad \text{(Kiemelés)} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{1}{u-z_0}\cdot f(u)\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{u-z_0}\right)^k du \\
&\quad \text{(Mivel } |z-z_0|<|u-z_0|,\ \text{ezért } \left|\frac{z-z_0}{u-z_0}\right|<1,\ \text{így a mértani sor konvergens,} \\
&\quad \text{és felírható zárt alakban)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^k}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(u)}{(u-z_0)^{k+1}}\,du \\
&\quad \text{(itt } (u-z_0)^k\cdot(u-z_0)=(u-z_0)^{k+1},\ \text{a számlálóban pedig } (z-z_0)^k\text{)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^k\ \text{, ahol } a_k=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(u)}{(u-z_0)^{k+1}}\,du
\end{aligned}
$$

A fenti tétel feltételeinek teljesülése esetén: **Cauchy-formula**

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(u)}{u-z}\,du,$$

Miért is jó ez? Azért, mert eszerint amennyiben az f analitikus egy Γ görbe mentén, egy z pont benne van a nyílt halmazban, jelen esetben a körben, akkor egyértelműen meghatározható az értéke, a körvonal értékével.

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(u)}{(u-z)^{n+1}}\,du.$$

,ezáltal még az is elmondható, hogy végtelenszer deriválható, és az összes deriváltját meg tudjuk határozni egyértelműen.

Tétel: Analitikus függvény zérushelyeinek izoláltsága

Legyen $\Gamma \subset C$ összefüggő nyílt halmaz, és legyen $f : \Gamma \to C$ analitikus. Ha f azonosan nulla, akkor $f \equiv 0$ az egész tartományon, 0, ha nem akkor f = 0 esetén csak egy ilyen pont van a tartományon belül. Vagyis elmondható, hogy a zérushelyek nem sűrűn helyezkednek el.

Ez azért van, mert ha

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k,$$

-ban $\forall a_k = 0$ akkor triviálisan a kifejezés 0 minden környezetében a z_0-nak. Amennyiben $\exists a_k \neq 0$, akkor a kifejezés csak a $z = z_0$ pontban 0, viszont ha $z \neq z_0$, akkor a kifejezés nem 0, mivel ekkor $z \in (U_r(z_0) \setminus \{z_0\})$, tehát az analitikus függvény folytonossága miatt, ha $z \neq z_0$, akkor az $f(z) \neq 0$).

Ez biztosítja, hogy a kiterjesztés egyértelmű legyen, hiszen a zérushelyeik megegyeznek, vagyis ha ismerjük egy környezetét, akkor kimondható, hogy ismerjük a teljes függvényt a hatványsorba fejthetőség miatt, mivel ha nem a triviális eset van, akkor szét tudjuk őket választani egy nem nullmértékű halmazzal.

Definíció: Ha K egy monoton növekvő súlyfüggvény, akkor a momentumgeneráló függvény az alábbi módon is felírható:

$$M(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{sx}\, dK(x)$$

, ahol $s \in R$.

Ekkor igaz rá, hogy amennyiben veszünk egy olyan I intervallumot, amelyben igaz, hogy $s \in I$, igaz, hogy az M(z), ahol z = s+ik, ahol $\forall s \in I$. Azaz a valós része benne marad az intervallumban.

Bizonyítás: Félig triviális, hiszen már meggondoltuk, hogy az analitikus függvények egyértelműen terjeszthetők ki a komplex síkra. Lássuk be, hogy konvergens:

$$M(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(zx)\, dK(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp((s + iu)x)\, dK(x)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(sx)(\cos(ux) + i \sin(ux))\, dK(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(sx) \cos(ux)\, dK(x) + i \int_{-\infty}^{\infty} \exp(sx) \sin(ux)$$

$$|\exp(sx)\cos(ux)| \leq \exp(sx)$$

, ugyanez a sinusos tagra is igaz, tehát konvergens. Triviálisan deriválható is, hiszen a Jacobi mátrixa folytonos minden pontban.

Vagyis, **Tétel:** Ha a momentumgeneráló függvény az s = 0 pontot tartalmazó nyílt intervallumon véges, akkor a függvény egyértelműen meghatározza az eloszlást.

A bionyítása triviális, hiszen az egyértelmű kiterjesztés miatt, a karakterisztikus függvényre egyértelműen ki lehet terjeszteni a momentumgeneráló függvényt, a karakterisztikus függvényről a Dynikyn-tétel miatt beláttuk, hogy egyértelműen meghatározza az eloszlást.

Reziduum- tétel: Egy halmazban, amennyiben az nem csillagszerű, előfordulhat, hogy bizonyos pontokban nem egyezik meg a jobboldali, és a baloldali határérték, nem deriváható. Ekkor ki lehet számolni úgy az integrált, hogy rákonvergálunk ezekre az úgynevezett reziduum pontokra kis sugarú gömbökkel, és ezeknek kiszámoljuk az értékeit.Ez megegyezik a teljes integrál értékével a köruljárás miatt. Például számoljuk ki a Cauchy-eloszlás karakterisztikus függvényét:

$$\phi(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(itx)}{1+x^2}\, dx$$

Itt a Reziduum-tétel miatt, az $(-\infty, \infty)$ halmazon szerinti integrálja pontosan ugyanaz, mint egy $B(0, r)$ intervallumon, ahol $\lim r \to 0$. Ezt a feladatot oldjuk meg úgy hogy Tegyük fel, hogy

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}, \text{alakú}, \quad \text{ahol } h(z_0) = 0,\ h'(z_0) \neq 0,\ g(z_0) \neq 0.$$

Ekkor

$$\phi(t) = \lim_{r\to 0} \int_{C_r} \frac{g(z)}{h(z)}\, dz = \lim_{r\to 0} \int_{C_r} \frac{g(z)}{h(z) - h(z_0)}\, dz$$

$$= \lim_{r\to 0} i \int_0^{2\pi} \frac{g(z_0 + r\exp(iu))}{h(z_0 + r\exp(iu)) - h(z_0)} r\exp(iu)\, du$$

(Mivel $h(z_0 + r\exp(iu)) - h(z_0)$ r $\to 0$ miatt megegyezik $rh'(z_0)$ -val)

(Mivel $e^{iu} - nek$ 2π-ben és az eggyel azelőtti periódusban, 0-ban is 1 az értéke)

$$= i \int_0^{2\pi} \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}\, du = 2\pi \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

azaz

$$\phi(t) = \frac{2\pi}{i} \exp(iti) = \exp(-t).$$

Majd, mivel az eloszlás szimmetrikus, így:

$$\phi(t) = \exp(-|t|).$$

0.1.1 Konvergencia fajták

Def: Azt mondjuk, hogy a súlyfüggvények (F_n) sorozata **szorosan** tart az F súlyfüggvényhez, ha minden $f \in C_0(R)$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} \int_R f(x)\, dF_n(x) = \int_R f(x)\, dF(x).$$

A konvergenciát szokás $F_n \xrightarrow{n} F$ módon is jelölni. (narrow) Ha a konvergencia minden $f \in C_b(R)$ esetén fennáll, akkor azt mondjuk, hogy a sorozat **gyengén** konvergens, és ezt az $F_n \xrightarrow{w} F$ módon jelöljük.

Ahol $C_0(R)$ azon folytonos függvények osztálya, amelyekre $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ azaz ez a lecsengő függvények osztálya, és $C_b(R)$ a korlátos folytonos függvények halmaza.

Def: Azt mondjuk, hogy az (F_n) súlyfüggvények sorozata a **folytonossági pontokban** az F súlyfüggvényhez tart, jelölésben $F_n \xrightarrow{c!} F$, ha az F minden x folytonossági pontjában $F_n(x) \to F(x)$.

Például, a folytonossági pontokban igaz, hogy egy Binomiális eloszlás tart egy normálishoz, míg a gyengében nem, hiszen könnyen látható, hogy ekkor nincsen folytonossági pont, így ugyanúgy 0-ba tart a $P(X_n \in B)$ mint a $P(X \in B)$, míg ez a szorosságban,nem igaz.

A gyenge implikálja a folytonossági pontokbeli konvergenciát, a folytonossági pontokbeli, pedig implikálja a szűk konvergenciát. Nézzük miért!

gyenge $\rightarrow$ folytonossági

$$\limsup_{n\to\infty} F_n(x) \leq F(x)\text{-es rész:}$$

Legyen x az F-nek egy folytonossági pontja. Ekkor legyen:

$$g(y) = \begin{cases} 1, & \text{ha } y < x, \\ \text{az } (x,1) \text{ és } (x+\epsilon, 0) \text{ pontokat összekötő lin. fgv.,} & \text{ha } y \in [x, x+\epsilon], \\ 0, & \text{ha } y > x+\epsilon \end{cases}$$

ekkor,

$$\chi_{(-\infty,0)} \leq g(y),$$

mivel a lin fgv.-es részén a g nagyobb, mint a karakterisztikus függvény. Ekkor az integrál monotonitása miatt

$$\int_R \chi_{(-\infty,x)}\, dF_n \overset{\text{kar fv kiint.}}{=} F_n((-\infty,x)) \overset{\text{jelölés}}{=} F_n(x) \overset{\text{int. mon.}}{\leq} \int_R g\, dF_n.$$

Hasonlóan, igaz, hogy

$$\chi_{(-\infty,x+\epsilon)} \geq g(y)$$

Mivel a lin fgv.-es részén a g ekkor kisebb, mint a karakterisztikus függvény. Ekkor ugyanúgy következésképp:

$$\int_R \chi_{(-\infty,x+\epsilon)}\, dF \overset{\text{kar fv kiint.}}{=} F((-\infty,x+\epsilon)) \overset{\text{jelölés}}{=} F(x+\epsilon) \overset{\text{int. mon.}}{\geq} \int_R g\, dF.$$

Ekkor az előzőekből:

$$\limsup_{n\to\infty} F_n(x) \leq \limsup_{n\to\infty} \int_R g\, dF_n = \int_R g\, dF \leq F(x+\epsilon).$$

Mivel x az F egy folytonossági pontja, ezért F jobbról folytonos, tehát ha $\epsilon \to 0$, akkor

$$\limsup_{n\to\infty} F_n(x) \leq F(x).$$

$$\liminf_{n\to\infty} F_n(x) \geq F(x)\text{-es rész:}$$

Legyen ekkor

$$g(y) = \begin{cases} 1, & \text{ha } y < x - \epsilon, \\ \text{az } (x-\epsilon, 1) \text{ és } (x, 0) \text{ pontokat összekötő lin. fgv.,} & \text{ha } y \in [x-\epsilon, x], \\ 0, & \text{ha } y > x \end{cases}$$

Ekkor ugyanúgy mint az előző részben:

$$\liminf_{n\to\infty} F_n(x) \geq \liminf_{n\to\infty} \int_R g dF_n = \int_R g dF \geq F(x - \epsilon)$$

Mivel x az F egy folytonossági pontja, ezért F balról is folytonos, tehát ha $\epsilon \to 0$, akkor

$$\liminf_{n\to\infty} F_n(x) \geq F(x)$$

Azaz $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$.

folytonossági $\rightarrow$ szűk

A függvény korlátos, valamint a függvény részsorozata egyenletesen korlátos.

Ekkor legyen K az F_n sorozat korlátja, vagyis $|F_n| < K$. Legyen ekkor g(x) egy olyan függvény, hogy $g \in C_0(R)$. Ekkor legyenek a, valamint b olyan folytonossági pontok F-en, amelyekre igaz, hogy egy előre meghtározott ϵ-ra ha veszünk az [a, b) intervallumon kívül egy tetszőleges x pontot, akkor arra biztosan igaz, hogy

$$|g(x)| < \epsilon/K$$

Mivel

$$\int_R g\,dF_n = \int_a^b g\,dF_n + \int_{R\setminus[a,b)} g\,dF_n,$$

ezért

$$\left|\int_R g\,dF_n - \int_a^b g\,dF_n\right| = \left|\int_{R\setminus[a,b)} g\,dF_n\right|.$$

Használva, hogy $|g(x)| < \frac{\epsilon}{K}$ ha $x \notin [a, b)$, kapjuk:

$$\left|\int_{R\setminus[a,b)} g\,dF_n\right| \overset{\text{háromszög}}{\leq} \int_{R\setminus[a,b)} |g(x)|\,dF_n(x) \overset{|g(x)|<\frac{\epsilon}{K}}{\leq} \frac{\epsilon}{K}\int_R dF_n(x).$$

Mivel (F_n) egyenletesen korlátos, azaz létezik K úgy, hogy

$$\int_R dF_n(x) \leq K,$$

ezért

$$\left|\int_{R\setminus[a,b)} g\,dF_n\right| \leq \frac{\epsilon}{K} \times K = \epsilon.$$

Így végül:

$$\left|\int_R g\,dF_n - \int_a^b g\,dF_n\right| \leq \epsilon,$$

ugyanígy:

$$\left|\int_R g\,dF - \int_a^b g\,dF\right| \leq \epsilon.$$

Ezekből:

$$\left|\int_R g\,dF_n - \int_R g\,dF\right| \leq$$

$$\left|\int_R g\,dF_n - \int_a^b g\,dF_n\right| + \left|\int_a^b g\,dF_n - \int_a^b g\,dF\right| + \left|\int_a^b g\,dF - \int_R g\,dF\right| < 3\epsilon$$

, ahol a középső tagot úgy kapjuk, hogy az $g(R \setminus [a,b])$ tart 0 -hoz, ∞, és $-\infty$-ben így, a véges [a, b) intervallumon vett integráljainak különbsége is tart 0-hoz az alábbi lemma miatt.

Ha (F_n) és F súlyfüggvények (, és $F_n \xrightarrow{c} F$ (azaz F_n konvergál F-hez minden folytonossági pontban), továbbá a és b az F eloszlásfüggvény folytonossági pontjai, és $g \in C([a,b])$, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b g\,dF_n = \int_a^b g\,dF.$$

Vagyis elmondható, hogy mivel ϵ tetszőlegesen kicsire választható, ezért

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\int_R g\,dF_n - \int_R g\,dF\right) = 0$$

Ez pont a szűk konvergencia definíciója!

Definíció: szorosság Azt mondjuk, hogy az F eloszlásfüggvény szoros, amennyiben elmondható róla, hogy $\forall\epsilon$-ra van egy olyan K kompakt halmaz, például az $[a_\epsilon, b_\epsilon]$intervallum, amelyre: $F(b_\epsilon) - F(a_\epsilon) < 1 - \epsilon$, vagyis $F(K_\epsilon^c) < \epsilon$.

Tétel: Helly: Minden egyenletesen korlátos, monoton növekedő függvényekből álló sorozatnak van olyan részsorozata, amely minden pontban egy monoton növekedő függvényhez tart. Speciálisan, amennyiben ez az F_n egy súlyfüggvénysorozat, és F balról folytonos akkor igaz, hogy $F_{n_k} \xrightarrow{c!} F$.

A bizonyítása ennek a tételnek nem túl izgalmas. Nagyvonalakban, úgy működik, hogy tudjuk a **Cantor féle átlós módszer** segítségével, hogy a **racionális számokban van részsorozata** a súlyfüggvénynek, az irracionálisakra pedig úgy **terjesztjük** ki őket, hogy vesszük a lnáluk kisebb racionális pontokat, **vesszük a suprémumukat**, ezután a racionális pontok**sűrűsége miatt** adódik, hogy a folytonossági pontban, az így kapott függvény alatt, valamint felett találunk egy nála ϵ-nal nagyobb, valamint alatta egy ugyanennyivel kisebbet, és konvergálunk ezzel 0 hoz.

Speciálisan a Prokhorov-tétel ugyanezt mondja ki eloszlásfüggvényekre.

Szűk konvergencia + nincs mértékszivárgás → gyenge konvergencia

Bizonyítás: Ez már sokkal izgalmasabb mint az előző! Szóval a halvány konvergencia minden C_0-beli függvényre igaz → venni kell egy olyat amilyenben nincs mértékszivárgás. → Egy ilyen függvény a

$$\text{f(x)} = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq -N-\delta, \\ \text{lineárisan nő } 0 \to 1, & \text{ha } x \in [-N-\delta, -N], \\ 1, & \text{ha } x \in [-N, N], \qquad \text{trapézfüggvény.} \\ \text{lineárisan csökken } 1 \to 0, & \text{ha } x \in [N, N+\delta], \\ 0, & \text{ha } x \geq N+\delta. \end{cases}$$

Ekkor az F_n tart F-be szűken.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[-N,N]} dF_n = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[-N,N]} dF = 1-\epsilon$$

Tehát ∃ olyan nagy n, ahol már igaz, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} f dF_n < 1-2\epsilon$$

, hiszen a deltán vett integrál elhanyagolhatóan kicsi. Azaz mivel ez egy tetszőleges ϵ lehet, ezért a szorosság igazolt. → Prokhorov-tétel miatt, van gyengén konvergens részsorozata → $F_{n_k} \xrightarrow{w!} F$. → Szűk konvergencia miatt az összes részsorozat határértéke megegyezik, szóval $F_n \xrightarrow{w!} F$.

Nézzünk egy másik állítást! Amennyiben $F_n \xrightarrow{w!} F$. $\leftrightarrow \phi_n(t) \xrightarrow{pontonként} \phi$
Azt kell bebizonyítani (már megint), hogy az F_n sorozat szoros. Ezt úgy tudjuk bebizonyítani, hogy oda **Oda:**

Könnyű, hiszen bizonyítottuk, hogy a karakterisztikus függvény egyértelműen meghatározza az eloszlást, és fordítva, tehát

Vissza

$$\forall \tau > 0\text{-ra}: \quad 1 - F\left(\frac{2}{\tau}\right) + F\left(-\frac{2}{\tau}\right) \leq 2\left(1 - \frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau} \varphi(t)\, dt\right).$$

Ezt nem fogom bebizonyítani, mert nagyon hosszú.

Fontos, hogy a τ-t itt is a karakterisztikus függvényhez választjuk, azt szeretnénk, hogy elég nagy tömeg benne legyen az intervallumban. Válasszunk ki egy előre meghatározott $\epsilon > 0$-hoz, valamint ϕ-hez egy olyan ϵ-t, hogy

$$\int_{-\tau}^{\tau} \phi(t)\, dt = 2\tau - \epsilon/4$$

Majorált konvergencia miatt:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\tau}^{\tau} \phi_n(t)\, dt = \int_{-\tau}^{\tau} \phi(t)\, dt.$$

, azaz a pontonkénti konveregncia miatt létezik egy elég nagy n, hogy

$$\int_{-\tau}^{\tau} \phi_n(t)\, dt = 2\tau - \epsilon/2$$

A nem bizonyított egyenlőtlenség miatt:

$$1 - \left[F_n\left(\frac{\tau}{2}\right) - F_n\left(-\frac{\tau}{2}\right)\right] \leq 2 - \frac{1}{\tau}\int_{-\tau}^{\tau} \varphi_n(t)\, dt \leq \epsilon$$

Azaz az F_n sorozat szoros, $\rightarrow$ Prokhorov-tétel miatt, van gyengén konvergens részsorozata $\rightarrow F_{n_k} \xrightarrow{w!} F$. $\rightarrow$ Karakterisztikus függvény pontonkénti konvergenciája miatt, valamint, mivel az összes részsorozat határértéke megegyezik, és egyértelműen határozzák meg azt, mivel a karakterisztikus függvények egyértelműen határozzák meg az eloszlást, szóval $F_n \xrightarrow{w!} F$.

0.2 Feltételes várható érték

Teljes valószínűség-tétel értelmében, amennyiben Y diszkrét valószínűségi változó:

$$P(X < x) = \sum_k P(X < x \mid Y = y_k) \cdot P(Y = y_k)$$

Amennyiben folytonos:

$$F_X(x) = \int_R P(X < x \mid Y = y)\, dF_Y(y)$$

Definíció. Az $F(x \mid y)$ függvényt az X valószínűségi változó $Y = y$ melletti *feltételes eloszlásfüggvényének* nevezzük, azaz:

$$F(x \mid y) := P(X < x \mid Y = y).$$

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{y} F(x \mid u)\, dF_Y(u)$$

Azaz ezt a feltételes eloszlásfüggvényt nagyon szemléletesen fel lehet fogni ebben az esetben úgy, mint egy adott y ra rögzített eloszlást, és az eloszlásfüggvényt pedig úgy megkaphatjuk, hogy összeadjuk ezeket az y-okat, ugye ez folytonos esetben az integrálásal írható fel. A probléma az u függvény definiálásából fog adódni.

Tegyük fel, hogy amennyiben a peremsűrűségek 0-k, annyiban a feltételes sűrűségfüggvény is legyen 0.

$$f(x \mid y) := \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$$

kifejezést az *feltételes sűrűségfüggvényének* nevezzük.

A hozzá tartozó *feltételes eloszlásfüggvény* pedig:

$$F(x \mid y) = \int_{-\infty}^{x} f(v \mid y)\, dv.$$

valójában ezek a feltételes sűrűségfüggvények ekvivalenciaosztályok, mivel nullmértékű halmazokban különbözhetnek egymástól.

Együttes eloszlásfüggvény felírható feltáteles eloszlás Y szerinti peremeloszlásának integráljával Bizonyítás:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{y} F(x \mid u)\, dF_Y(u) &= \int_{-\infty}^{y} \left(\int_{-\infty}^{x} f(v \mid u)\, dv \right) dF_Y(u) \text{ (eloszlásfüggvény behelyettesítés)} \\
&= \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f(v \mid u)\, dv\, g(u)\, du \text{ (} dF_y(u)\text{-ról du-ra váltás)} \\
&= \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} \frac{f(v, u)}{f_Y(u)} \cdot f_Y(u)\, dv\, du \\
&= \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f(v, u)\, dv\, du \\
&= F(x, y)
\end{aligned}$$

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ egy valószínűségi mező, és X egy $\mathcal{A}$-ban mérhető valószínűségi változó.

Definíció. Az $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ szigma-algebra szerint vett *feltételes várható értéken*, amit $E(X \mid \mathcal{F})$-fel jelölünk. Ekkor az $E(X \mid \mathcal{F}) : (\Omega, \mathcal{A}, P) \ \to (\Omega, \mathcal{F}, P)$

$$\int_F X\,dP = \int_F E(X \mid \mathcal{F})\,dP.$$

Ha $\mathcal{F} = \sigma(y_\alpha, \alpha \in A)$, azaz $\mathcal{F}$ egy y_α-k család által generált szigma-algebra, akkor az egyszerűség kedvéért gyakran így jelöljük:

$$E(X \mid y_\alpha, \alpha \in A).$$

Speciálisan, ha $X = \chi_A$, akkor a feltételes várható értéket szokás:

$$P(A \mid \mathcal{F})$$

alakban írni, és ezt nevezzük az A esemény $\mathcal{F}$-re vonatkozó *feltételes valószínűségének*. Ilyenkor a definíció értelmében:

$$P(A \cap F) = \int_F P(A \mid \mathcal{F})\,dP, \quad \forall F \in \mathcal{F}.$$

Nézzük az alábbi állításokat!

1. Ha X-nek létezik várható értéke, akkor $E(X \mid \mathcal{F})$ is létezik.

2. Ha X-nek létezik várható értéke, akkor $E(X \mid \mathcal{F})$ P-majdnem mindenütt véges.

3. Ha $X \geq 0$, akkor $E(X \mid \mathcal{F}) \geq 0$ P-majdnem mindenütt.

4. Az $E(X \mid \mathcal{F})$ egy ekvivalenciaosztály, tehát csak egy $A \in (\Omega, \mathcal{F}, P)$-nullmértékű halmazokon kívűl azonosak, azoko különbözhetnek.

Ha X integrálható (azaz $E[|X|] < \infty$), akkor definiálhatunk egy mértéket:

$$\nu(C) := \int_C X\,dP, \quad C \in \mathcal{F}.$$

Ha $X \geq 0$, akkor $\nu \geq 0$, tehát a mérték pozitív mérték.
Ha $\mu := P|_\mathcal{F}$ a P mérték leszűkítése az $\mathcal{F}$-re, akkor

$$\nu \ll \mu,$$

azaz ν abszolút folytonos μ-ra: ha $\mu(C) = 0$, akkor $\nu(C) = 0$ is teljesül.

Ha $P(C) = 0$, akkor $\nu(C) = 0$, azaz $\nu \ll \mu$. Az $(\Omega, \mathcal{F})$ mérhető téren vegyük a $\frac{d\nu}{d\mu}$ Radon–Nikodym-féle deriváltat. Definiáljuk a feltételes várható értéket mint

$$E(X \mid \mathcal{F}) := \frac{d\nu}{d\mu}.$$

A derivált definíciója alapján teljesül a következő integrálegyenlet minden $C \in \mathcal{F}$ halmazra:

$$\int_C X\, dP = \int_C E(X \mid \mathcal{F})\, dP.$$

Az egyértelműség a Radon-Nikodym-derivált egyértelműségének következménye: $E(X \mid \mathcal{F})$ csak P-nullhalmazon térhet el más verzióktól. Ha $\nu \geq 0$, azaz $X \geq 0$, akkor a derivált is nemnegatív: $E(X \mid \mathcal{F}) \geq 0$ P-majdnem mindenütt.

Tegyük fel, hogy X független a $\mathcal{F}$-től. Ekkor a következő azonosság teljesül **minden** $F \in \mathcal{F}$ eseményre:

$$\int_F X\, dP = E(\chi_F X) = E(\chi_F) \cdot E(X) = \int_F E(X)\, dP.$$

Ebből a **minden** szóból sok minden adódik, hiszen ekkor ebből triviális, hogy nem lehet 2 várható értéke egy valváltozónak (Ez már amúgy a Radon-Nikodym-tételből is kiderült) ,

$$\int_F X\, dP - \int_F X\, dP = 0 = \int_F E_1(X) - E_2(X)\, dP$$

Vagyis $E_1 = E_2$.

Továbbá adott a toronyszabály is:

$$E(X) = \int_F X\, dP = \int_F E(X)\, dP = E(E(X))$$

Nézzük mi van általánosabb esetben, amikor Feltételes várható értékeket nézünk az $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ szerint. Ekkor igaz az, hogy a durvább győz, vagyis, durvítani tudjuk a σ-algebrákat, de finomítani nem. Viszont az triviális, hogy a várható értékük megegyezik, az R-N-tételből:

$$\int_G E(E(X \mid \mathcal{F}) \mid \mathcal{G})\, dP = \int_G E(X \mid \mathcal{F})\, dP = \int_G (X \mid \mathcal{A})\, dP = \int_G X\, dP.$$

vagyis,

$$E(E(X \mid \mathcal{F}) \mid \mathcal{G}) \overset{\text{m.m.}}{=} E(X \mid \mathcal{F}) \overset{\text{m.m.}}{=} X$$

Ami még fontos lehet ezzel kapcsolatban, hogy működik a kiemelés mind konstans, mind valváltozó kiemelésénél.

$$E(aX \mid \mathcal{F}) = a \cdot E(X \mid \mathcal{F})$$

ezeknek a bizonyítása egyszerű, azt kell kihasználni, hogy

$$\int_G X\,dP = \int_G E(X \mid \mathcal{F})\,dP$$

Legyen Y véges, és $\mathcal{F}$ mérhető. Ekkor igaz, hogy

$$YE(X \mid \mathcal{F}) = E(XY \mid \mathcal{F})$$

Ez azért igaz, mert

$$\int_F YE(X \mid \mathcal{F})dP$$

$$\int_A E(XY \mid \mathcal{F})\,dP = \int_A XY\,dP = \int_A (Y \mid \mathcal{F})E(X \mid \mathcal{F})dP = \int_A Y \cdot E(X \mid \mathcal{F})\,dP \quad \forall A \in \mathcal{F}$$

Mivel Y $\mathcal{F}$-mérhető.

Doob-lemma: Legyen X tetszőleges halmaz, $(Y, \mathcal{Y})$ tetszőleges mérhető tér, és $f : X \to Y$ tetszőleges leképezés. Tegyük fel, hogy $g : X \to R^n$ egy $\sigma(f)$-mérhető függvény, azaz g mérhető a f által generált szigma-algebrára.

Ekkor létezik egy $h : (Y, \mathcal{Y}) \to R^n$ mérhető leképezés, amelyre:

$$g = h \circ f.$$

Tegyük fel, hogy $g : X \to R$ egy egyszerű $\sigma(f)$-mérhető függvény, azaz:

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k\,\chi_{B_k}(x),$$

ahol $B_k \in \sigma(f)$, tehát léteznek olyan $A_k \in \mathcal{Y}$, hogy $B_k = f^{-1}(A_k)$.

Definiáljunk egy $h : Y \to R$ függvényt:

$$h(y) := \sum_{k=1}^{n} c_k\,\chi_{A_k}(y).$$

Ekkor:

$$h(f(x)) = \sum_{k=1}^{n} c_k\,\chi_{A_k}(f(x)) = \sum_{k=1}^{n} c_k\,\chi_{f^{-1}(A_k)}(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k\,\chi_{B_k}(x) = g(x).$$

Bizonyítás: A pushforward mérték definíciójából:

$$\int_X h(f(x))\,d\mu(x) = \int_Y h(y)\,d(f_{\#}\mu)(y)$$

Bernstein-tétel:
Legyen $L : (0, \infty) \to R$ egy

Az alábbi két állítás ekvivalens

1. $L(s)$ egyvalószínűségi eloszlás Laplace-transzformáltja, amely a nemnegatív számokra koncentrálódik

2. $L(0) = 1$ és $L(s)$ teljesen monoton a $[0, \infty)$ intervallumon.

Bizonyítás:
$\mathbf{1 \Rightarrow 2}$

Legyen $L(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\, dF(x)$, ahol F pozitív mérték. Deriválhatunk az integrál alatt:

$$L^{(n)}(s) = (-1)^n \int_0^\infty x^n e^{-sx}\, dF(x),$$

amiből következik, hogy

$$(-1)^n L^{(n)}(s) = (-1)^{2n}\, E\left[X^n e^{-sX}\right] = E\left[X^n e^{-sX}\right] \geq 0.$$

azaz a Laplace transzformált teljesen monoton $\mathbf{2 \Rightarrow 1}$

Tegyük fel, hogy $L \in C^\infty((0, \infty))$, teljesen monoton és $L(0+) = 1$. Definiáljuk a következő halmazt:

$$K := \{f \in C^\infty((0, \infty)) \mid f \text{ teljesen monoton}, 0 \leq f(s) \leq 1\}.$$

Vegyük a $C^\infty(0, \infty)$ teret (ebben azok a függvények vannak, amelyek végtelenül sokszor differenciálhatóak), ezen a téren a távolság:

$$d_n(f, g) = max(|f^{(n)} - g^{(n)}|)_{[0,n]}$$

ezen a téren a topológiát a félnormarendszer alkotja

$$p_n(f) := \sup_{s \in [1/n, n]} |f^{(n)}(s)|.$$

Ez egy Fréchet-tér: teljes:

minden cauchy sorozat konvergens

,

, Mivel ez egy félnomra sereg, tehát felál rá a skalár kiemelési szabály, és a háromszög -egyenlőtlenség, és igaz, hogy egy adott n-re

$$||f||_\alpha < \epsilon$$

alakú halmazok **konvexek**. **Hausdorrf-tulajdonságú** (azaz ha van x $\neq$ y pont, akkor azok szeparálhatóak)

mivel az f függvények teljesen monotonak, ezért ha az összes $||f_\alpha|| = 0$, akkor f $= 0$, vagyis fennáll a Hausdorrf-tulajdonság. Azaz ezek a

$$||f||_\alpha < \epsilon$$

halmazok egy lokálisan konvex téren vannak értelmezve, mégpedig így a $C^\infty_{loc}((0,\infty)$-n Továbbá metrizálható, mivel megszámlálhatóan sok félnorma van, hiszen a félnormák az $[\frac{1}{n}, n]$ intervallumon vannak értelmezve, azaz létrehozhatunk egy

$$d(f,g) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|f^{(n)} - g^{(n)}|_{[1/n,n]}}{1 + |f^{(n)} - g^{(n)}|_{[1/n,n]}}$$

Metrikát.

Ekkor nézzük meg Krein-Milman tételét

[12pt]article [utf8]inputenc amsmath, amssymb, amsthm geometry margin=3cm

A Krein–Milman-tétel bizonyítása

Ábris Wunderlich

March 2025

Tétel

Legyen X egy *lokálisan konvex topologikus vektortér*, és legyen $A \subset X$ egy *kompakt, konvex* halmaz. Ekkor:

1. Az A halmaznak van *externális pontja*,
2. Az A halmaz *megegyezik az externális pontjainak zárt konvex burkával*:

$$A = \overline{\mathrm{conv}}(\mathrm{Ext}(A))$$

Definíciók

externális pont: Egy $x \in A$ pont externális, ha nem létezik olyan $y, z \in A, y \neq z, \alpha \in (0,1)$, hogy

$$x = \alpha y + (1-\alpha)z.$$

Részhalmaz pereme: Egy nemüres $F \subseteq A$ halmaz akkor az A részhalmaz pereme, ha:

$$\alpha x + (1-\alpha)y \in F, \text{ valamilyen } x, y \in A, \ 0 \leq \alpha \leq 1 \Rightarrow x, y \in F.$$

1. rész: létezik externális pont

Szükségünk lesz egy segédállításra:

Lemma: Legyen $\ell \in X^*$. Ekkor a

$$F_\ell := \left\{ y \in A : \ell(y) = \max_{x \in A} \ell(x) \right\}$$

halmaz az A egy részhalmaz pereme.

Bizonyítás: A kompakt, ℓ folytonos, tehát a maximum létezik, így $F_\ell \neq \emptyset$. Ha $z = \alpha x + (1-\alpha)y \in F_\ell$, akkor:

$$\ell(z) = \alpha\ell(x) + (1-\alpha)\ell(y) \leq \max \ell,$$

esetlegesség miatt csak akkor lehet egyenlőség, ha $\ell(x) = \ell(y) = \max \ell$. Tehát $x, y \in F_\ell$.

Fő bizonyítás:

Ha A csak egy pontból áll, kész vagyunk. Ha nem, és létezik $x \neq y \in A$, akkor a Hahn–Banach-tétel szerint van $\ell \in X^*$ úgy, hogy $\ell(x) > \ell(y)$.

Legyen F_ℓ a fenti lemma alapján. Ebben nincs benne y, tehát $F_\ell A$.

Ezt a folyamatot ismételjük: minden új részhalmaz peremet tovább szűkítünk. Így egy csökkenő láncolatot kapunk:

$$A \supset F_{\ell_1} \supset F_{\ell_2} \supset \cdots$$

Ezek kompaktok, így a metszetük is nem üres:

$$F := \bigcap_i F_{\ell_i} \neq \emptyset.$$

Ez is részhalmaz perem.

Legyen egy minimális ilyen perem F. Ha több pontból állna, akkor szétválasztható lenne, és tovább szűkíthető — ellentmondás.

Így F egyetlen pontból áll: ez egy externális pont.

2. rész: zárt konvex burok lefedi A-t

Legyen $E = \mathrm{Ext}(A)$, és $\overline{\mathrm{conv}}(E)$ az externális pontok zárt konvex burka.

Nyilván:

$$\overline{\mathrm{conv}}(E) \subseteq A$$

Tegyük fel indirekten, hogy szigorú a befoglalás: van $x \in A \setminus \overline{\mathrm{conv}}(E)$.

A Hahn–Banach-tétel szerint létezik $\ell \in X^*$, ami elválasztja x-et és $\overline{\mathrm{conv}}(E)$-t:

$$\sup_{y \in \overline{\mathrm{conv}}(E)} \ell(y) < \ell(x)$$

Definiáljuk a részhalmaz peremet:

$$F_\ell := \left\{ z \in A : \ell(z) = \max_{w \in A} \ell(w) \right\}$$

Ez nem metszi $\overline{\mathrm{conv}}(E)$-t. De az 1. rész szerint minden részhalmaz perem tartalmaz externális pontot ellentmondás.

Következtetés

Tehát:

$$A = \overline{\mathrm{conv}}(\mathrm{Ext}(A))$$