Középhaladó valószínűségszámítás, és Sztochasztika Bevezető

Ábris Wunderlich

March 2025

1 Valószínűségszámítás

Ha $(X, \mathcal{F}, \mu)$ egy mértéktér és $(Y, \mathcal{G})$ egy mérhető tér, valamint $T : X \to Y$ egy mérhető függvény, akkor ha $B \in \mathcal{G}$, akkor

$$T_{\#}(\mu)(B) = \mu\left(T^{-1}(B)\right)$$

mérték a μ -nek T szerinti **pushforward mértéke**.

Speciálisan ha X egy valószínűségi változó, és $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező, akkor

$$F_X(B) = X_{\#}(P)(B) = P\left(X^{-1}(B)\right)$$

, azaz az X eloszlásfüggvénye a B halmazon. Ennek következménye, hogy ha $h : (Y, \mathcal{G}) \to \mathbb{R}$ egy mérhető függvény, akkor a

$$\int_X h(T(x))\, d\mu(x) = \int_Y h(y)\, d(T_{\#}\mu)(y)$$

fennáll, mivel itt gyakorlatilag nem történik semmi más, minthogy a (pushforward) képmérték szerint integrálunk, mivel a képet vesszük a változónak. Ekkor adódik, hogy ha $\omega \in A$, akkor

$$E(X^n(\omega)) = \int_{\nleq} X^n(\omega)\, dP(A) \overset{\text{előző egyenl.}}{=} \int_{\mathbb{R}} x^n\, dF_X((-\infty, x])$$

Ebből következik, hogy a két oldal (a várható érték, és az eloszlásfüggvény szerinti integrál) egyszerre létezik, vagy nem, véges vagy végtelen. Mivel mind a Momentumgeneráló, mind a Karakterisztikus, mind a Laplace transzformált valójában egy várható érték. Ezért elmondható róluk hogyha léteznek, akkor az eloszlás függvény szerinti integráljuk is létezik, ha még végesek is, akkor az is elmondható róluk hogy az integrálos alakjuk is véges.

Nézzük a következő állítást : Eloszláson a valószínűségi változók által indukált mértéket értjük, amely a Borel-halmazokon van értelmezve:

Ebből a pushforward mérték definíciója szerint:

$$\mu(B) = P\left((X_1, \ldots, X_n) \in B\right), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$$

Ekkor T(B) = A mérhető függvény, ezáltal

$$T_{\#}(\mu)(A) = \mu\left(T^{-1}(A)\right) = \mu(B)$$

azaz a speciális esetre nézve:

$$F_X(B) = X_{\#}(P)(B) = P\left(X^{-1}(B)\right) = P(A \in \Omega) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\})$$

A speciális eset miatti következmény: **Az eloszlást egyértelműen jellemzi az eloszlásfüggvény.**

Most nézzük a következő Állítást: **A karakterisztikus függvény egyértelműen meghatározza az eloszlást!**

Bizonyítás: Legyen F_1, F_2 két eloszlás, amely karakterisztikus függvénye megegyezik. Ekkor azon korlátos és mérhető függvények halmazára (ezek az u(x)-k), melyre

$$\int_{\mathbb{R}} u(x)\, dF_1(x) = \int_{\mathbb{R}} u(x)\, dF_2(x)$$

, igaz, hogy F_1, F_2 mérték voltuk miatt, az u(x) függvény mérhető, tehát fennáll rá a monoton konvergencia tétel. Mivel F_1, F_2 mértékek karakterisztikus függvénye a feltétel szerint megegyezik, ezért az is igaz, hogy az u(x) függvények osztálya tartalmazza a sin(tx), és cos(tx) függvényt is. Ennek fényében kijelenthető, hogy a lehetséges u függvények egy monoton osztályt alkotnak, hiszen ezen monoton osztályban lévő függvények szorzatára is fennáll a monoton konvergencia tétel az u korlátossága miatt. Ekkor az osztály elemei is korlátosak. A trigonometrikus függvények gyűrűje σ-gyűrűt alkot, és benne van a monoton osztályban is, hiszen a trigonometrikus polinomok előállnak trigonometrikus függvények összegeként, és szorzataként. U(x) lehet 1 is, tehát a Dynikin-tétel miatt ennek a σ-gyűrű által generált legszűkebb σ-algebra szerint mérhető függvények halmaza benne van monoton osztályban.

Azaz az egyértelműség miatt $F_1(G) = F_2(G)$. Most azt kell megmutatni, hogy G tetszőleges Borel-halmaz lehet. Be kell ehhez látni hogy a trigonometrikus függvények által generált σ-algebra megegyezik a Borel halmazokkal. Ehhez elég az, hogy ezeknek a h(x) függvények osztályában benne vannak a Borel-mérhető halmazok. Ehhez találni kell egy olyan függvényt, amely által generált σ-algebra megegyezik a Borel-mérhető függvények halmazával. Tudunk egy ilyen függvény készíteni, hiszen

Legyen u(x) egy olyan függvény, ami $f_n(x) = \frac{n\sin(x/n)}{n}$ alakú. Ekkor hogyha n-nel tartunk végtelenbe, akkor igaz, hogy az ezen függvény által generált σ-algebra a borel mérhető függvények halmaza, mivel

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(x/n)}{x/n} \cdot x = x.$$

az identitás függvény inverze is az identitás, vagyis mindenképpen Borel-mérhető.

Az egyszerűen bizonyítható, hogy a Laplace transzformált $X \geq 0$ esetén szintén egyértelműen meghatározza az eloszlást, hiszen ha egy monoton növekedő függvényt veszünk, akkor az e^{-tx} korlátos.

1.1 Komplex függvénytan

Vegyünk egy $\Gamma : [a, b] \to \mathbf{C}$ Függvényt.

Ekkor egy f(z) függvény,(ahol $z \in \Gamma[a, b] \in \mathbf{C}$) halmazon vett integrálja:

$$\int_{\Gamma[a,b]} f(z)dz$$

Ez az integrál egy közönséges Stieltjes-integrál, hiszen a közelítő összegek hazárértékeként definiáljuk. $\Gamma \in \mathbf{C}$ miatt lehet egy kör, egy háromszög, vagy akármilyen komplex síkon értelmezhezhető halmaz is. Speciálisan ha ez a Γ függvény egy intervallumhoz kört rendel, akkor ez egy körintegrál, amit

$$\oint f(z)\, dz$$

módon jelölünk. A komplex integrál definíciójából továbbgondolva, és $\Gamma(t) = z$ miatt,

$$\int_{\Gamma[a,b]} f(z)dz \overset{\frac{dz}{dt}=\Gamma'(t)}{=} \int_a^b f(\Gamma(t)) * \Gamma'(t)dt$$

Mese: Számoljuk ki a z^n körintegrálját! $f(z) = z^n, \Gamma(t) = z = e^{it}$

$$\oint z^n\,dz = \int_0^{2\pi} (e^{it})^n * ie^{it}dt = i\int_0^{2\pi} (e^{it})^{(n+1)}dt = i\int_0^{2\pi} cos((n+1)t) + i * sin((n+1)t)dt$$

ami $n \neq 1$ esetén egyenlő 0 -val, hiszen mind a sinusos, mind a cosinusos tag integrálja a 2π és 0 helyen azonos, hiszen ez 1 periódus eltérés.

viszont az a baj, hogy n = -1 esetén a

$$i\int_0^{2\pi} (e^{it})^{(n+1)}dt$$

$(e^{it})^{(n+1)}$ tag 0 kitevős, így az e^0 miatt ez a tag 1 lesz, tehát az integrál $2\pi i$ lesz.

Az iránymenti derivált képlete a következő:

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

Egy komplex változós függvény egy z pontban deriválható, ha egyrészt deriválható a z pontban mint a síkot a síkba képező függvény, másrészt a deriváltmátrix

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

alakú.

Cauchy-tétel

Def:Ha G egy csillagszerű nyílt halmaz, $f(z)$ egy komplex változós függvény, amely G minden pontjában deriválható, és γ egy zárt görbe, akkor:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

Speciálisan, ha z_1 és z_2 a G két pontja, akkor az

$$\int_\gamma f(z)\,dz$$

integrál értéke nem függ a két pontot összekötő γ görbe konkrét megválasztásától.

Bizonyítás: Jelöljünk ki egy akármilyen pontot a csillagszerű halmazban, legyen ez z^*. Nézzük az

$$f(z^* + h)$$

függvényt.

Ekkor átrendezve az $f'(z^*) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z^*+h)-f(z^*)}{h}$ egyenlőséget,

$$f(z^* + h) = f(z^*) + f'(z^*) * h + o(h).$$

az f(z*) konstans volta miatt a

$$\oint_\triangle f(z^*)\,dz$$

háromszögintegrál kifejezhető a komplex halmazon értelmezett integrál definíciója miatt $\sum c * (\Gamma(t_i) - \Gamma(t_{i-1}) = c * \sum(\Gamma(t_i) - \Gamma(t_{i-1}))$, -ként, ami a háromszög zártsága miatt, a körbejárás azt eredményezi, hogy $\sum(\Gamma(t_i) - \Gamma(t_{i-1}))$, 0 lesz, azaz a deriváltja(az f(z*)) is 0. Ahhoz, hogy belássuk, hogy a második tag is 0 be kell bizonyítanunk, hogy a

$$\oint_\triangle h\,dh$$

is 0.

Mivel ez nem konstans, hanem tart a 0, ba, ezért nem triviálisan 0 az integrál. Nézzük a jobboldali és a baloldali integrálját az adott függvénynek. Ekkor az integrál értéke a korlátos növekmény miatt nem függ a tesztpontok megválasztásától, tehát

$$\sum h_i(h_i - h_{i-1}) = \sum h_{i-1}(h_i - h_{i-1}) = I, \text{ tehát } \sum h_i(h_i - h_{i-1}) + \sum h_{i-1}(h_i - h_{i-1}) = 2I$$

Na ármost a $h_i * h_{i-1}$ tagok a teleszkopikus összeg miatt kiesnek az utóbbi egyenlőségből, így azt kapjuk, hogy

$$\sum h_i(h_i - h_{i-1}) + \sum h_{i-1}(h_i - h_{i-1}) = \sum h_i^2 - h_{i-1}^2 = h_1^2 - h_N^2$$

, ezek a körbejárás miatt megegyeznek, tehát ez is 0.

Az o(h)-s tagot könnyű bizonyítani, hisz ahogyan háromszöggel közeledünk a 0 felé h-val, úgy mindig kiválasztjuk azt a háromszöget, amiben benne van a pont, így ha az alapterülete a háromszögnek A, akkor így $A/4^n$-nél kisebb lesz az o(h) integráljának értéke. Viszont A háromszög kerületénél mindig nagyobb, így ha negyedeljük a háromszöget, akkor ez az érték nagyobb lesz L = háromszög kerülete esetén $L/2^n$-nél.

Tétel: Ha egy függvény minden pontban komplex értelemben deriváható, akkor analitikus, vagyis kifejezhető

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k,$$

alakban, ahol $z \in intB(z_0, r)$, és $B(z_0, r)$ része az f értelmezési tartományának.
Bizonyítás: Legyen

$$g(u) = \frac{f(u) - f(z)}{u - z}$$

, ahol a körvonalon van az u pont, azaz $u \in \partial B(z_0, r)$ A Cauchy-tétel közvetlenül nem alkalmazható, ugyanis g(u) nem deriválható a z pontban. Ekkor az adott körön igaz, hogy

$$\int_{B(z_0,r)} g(u)du = \int_{B(z,u-z)} g(u)du,$$

mivel a z pont egy tetszőleges általunk kiválasztott pont. Ekkor vehetünk egy $B(z, \delta)$ sugarú gömböt hogy a körüljárási szabály miatt igaz, hogy

$$\int_{B(z,u-z)} g(u)du = \int_{B(z,\delta)} g(u)du$$

Ekkor sem $B(0, \delta)$ nem csillagszerűek, de akárhogy a z ponton átmenve végzünk 2 vágást, akkor már a kapott 4 halmaz csillagszerű lesz, $u \in \partial B(z_0, r)$, tehát $B(z, u - z)$ zárt, így alkalmazható rá a Cauchy -tétel. Vagyis az integrálja 0. Ezáltal, tudjuk, hogy a u = z esetén a g függvény deriválható.

Ekkor ebből triviális, hogy

$$\int_{B(z_0,r)=\Gamma} \frac{f(u) - f(z)}{u - z} du = 0, \text{ vagyis} \int_{B(z_0,r)=\Gamma} \frac{f(u)}{u - z} du = \int_{B(z_0,r)=\Gamma} \frac{f(z)}{u - z} du =$$

$$f(z) \int_{B(z_0,r)=\Gamma} \frac{1}{u - z} du \overset{\text{integrál u-tól függ, z konstans.}}{=} f(z) \oint_{\gamma} \frac{1}{u} du =$$

$$f(z) \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} \cdot ie^{it} \, dt = f(z)i \int_0^{2\pi} dt = f(z)2\pi i$$

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(u)}{u-z}\,du \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(u)}{(u-z_0)-(z-z_0)}\,du \quad \text{(Robin Hood)} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{1}{u-z_0}\cdot\frac{f(u)}{1-\frac{z-z_0}{u-z_0}}\,du \quad \text{(Kiemelés)} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{1}{u-z_0}\cdot f(u)\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{u-z_0}\right)^k du \\
&\ \text{(Mivel } |z-z_0|<|u-z_0|,\ \text{ezért } \left|\frac{z-z_0}{u-z_0}\right|<1,\ \text{így a mértani sor konvergens,} \\
&\ \text{és felírható zárt alakban)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^k}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(u)}{(u-z_0)^{k+1}}\,du \\
&\ \text{(itt } (u-z_0)^k\cdot(u-z_0)=(u-z_0)^{k+1},\ \text{a számlálóban pedig } (z-z_0)^k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k\ \text{, ahol } a_k=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(u)}{(u-z_0)^{k+1}}\,du
\end{aligned}
$$

A fenti tétel feltételeinek teljesülése esetén: **Cauchy-formula**

$$
f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(u)}{u-z}\,du,
$$

Miért is jó ez? Azért, mert eszerint amennyiben az f analitikus egy Γ görbe mentén, egy z pont benne van a nyílt halmazban, jelen esetben a körben, akkor egyértelműen meghatározható az értéke, a körvonal értékével.

$$
f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(u)}{(u-z)^{n+1}}\,du.
$$

,ezáltal még az is elmondható, hogy végtelenszer deriválható, és az összes deriváltját meg tudjuk határozni egyértelműen.

Tétel: Analitikus függvény zérushelyeinek izoláltsága

Legyen $\Gamma \subset \mathbb{C}$ összefüggő nyílt halmaz, és legyen $f \colon \Gamma \to \mathbb{C}$ analitikus. Ha f azonosan nulla, akkor $f \equiv 0$ az egész tartományon, 0, ha nem akkor f = 0 esetén csak egy ilyen pont van a tartományon belül. Vagyis elmondható, hogy a zérushelyek nem sűrűn helyezkednek el.

Ez azért van, mert ha

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k,$$

-ban $\forall a_k = 0$ akkor triviálisan a kifejezés 0 minden környezetében a z_0-nak. Amennyiben $\exists a_k \neq 0$, akkor a kifejezés csak a $z = z_0$ pontban 0, viszont ha $z \neq z_0$, akkor a kifejezés nem 0, mivel ekkor $z \in (U_r(z_0) \setminus \{z_0\})$, tehát az analitikus függvény folytonossága miatt, ha $z \neq z_0$, akkor az $f(z) \neq 0)$.

Ez biztosítja, hogy a kiterjesztés egyértelmű legyen, hiszen a zérushelyeik megegyeznek, vagyis ha ismerjük egy környezetét, akkor kimondható, hogy ismerjük a teljes függvényt a hatványsorba fejthetőség miatt, mivel ha nem a triviális eset van, akkor szét tudjuk őket választani egy nem nullmértékű halmazzal.

Definíció: Ha K egy monoton növekvő súlyfüggvény, akkor a momentumgeneráló függvény az alábbi módon is felírható:

$$M(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{sx} \, dK(x)$$

, ahol $s \in \mathbb{R}$.

Ekkor igaz rá, hogy amennyiben veszünk egy olyan I intervallumot, amelyben igaz, hogy $s \in I$, igaz, hogy az M(z), ahol z = s+ik, ahol $\forall s \in I$. Azaz a valós része benne marad az intervallumban.

Bizonyítás: Félig triviális, hiszen már meggondoltuk, hogy az analitikus függvények egyértelműen terjeszthetők ki a komplex síkra. Lássuk be, hogy konvergens:

$$M(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(zx) \, dK(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp((s + iu)x) \, dK(x)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(sx)(\cos(ux) + i \sin(ux)) \, dK(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(sx) \cos(ux) \, dK(x) + i \int_{-\infty}^{\infty} \exp(sx) \sin(ux)$$

$$|\exp(sx)\cos(ux)| \leq \exp(sx)$$

, ugyanez a sinusos tagra is igaz, tehát konvergens. Triviálisan deriválható is, hiszen a Jacobi mátrixa folytonos minden pontban.

Vagyis, **Tétel:** Ha a momentumgeneráló függvény az s = 0 pontot tartalmazó nyílt intervallumon véges, akkor a függvény egyértelműen meghatározza az eloszlást.

A bionyítása triviális, hiszen az egyértelmű kiterjesztés miatt, a karakterisztikus függvényre egyértelműen ki lehet terjeszteni a momentumgeneráló függvényt, a karakterisztikus függvényről a Dynikyn-tétel miatt beláttuk, hogy egyértelműen meghatározza az eloszlást.

Reziduum- tétel: Egy halmazban, amennyiben az nem csillagszerű, előfordulhat, hogy bizonyos pontokban nem egyezik meg a jobboldali, és a baloldali határérték, nem deriváható. Ekkor ki lehet számolni úgy az integrált, hogy rákonvergálunk ezekre az úgynevezett reziduum pontokra kis sugarú gömbökkel, és ezeknek kiszámoljuk az értékeit.Ez megegyezik a teljes integrál értékével a köruljárás miatt. Például számoljuk ki a Cauchy-eloszlás karakterisztikus függvényét:

$$\phi(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(itx)}{1+x^2}\, dx$$

Itt a Reziduum-tétel miatt, az $(-\infty, \infty)$ halmazon szerinti integrálja pontosan ugyanaz, mint egy $B(0,r)$ intervallumon, ahol $\lim r \to 0$. Ezt a feladatot oldjuk meg úgy hogy Tegyük fel, hogy

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}, \text{alakú}, \quad \text{ahol } h(z_0) = 0,\ h'(z_0) \neq 0,\ g(z_0) \neq 0.$$

Ekkor

$$\phi(t) = \lim_{r\to 0} \int_{C_r} \frac{g(z)}{h(z)}\, dz = \lim_{r\to 0} \int_{C_r} \frac{g(z)}{h(z) - h(z_0)}\, dz$$

$$= \lim_{r\to 0} i \int_0^{2\pi} \frac{g(z_0 + r\exp(iu))}{h(z_0 + r\exp(iu)) - h(z_0)} r\exp(iu)\, du$$

(Mivel $h(z_0 + r\exp(iu)) - h(z_0)$ r $\to 0$ miatt megegyezik $rh'(z_0)$ -val)

(Mivel $e^{iu} - nek$ 2π-ben és az eggyel azelőtti periódusban, 0-ban is 1 az értéke)

$$= i\int_0^{2\pi} \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}\,du = 2\pi\frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

azaz

$$\phi(t) = \frac{2\pi}{i}\exp(iti) = \exp(-t).$$

Majd, mivel az eloszlás szimmetrikus, így:

$$\phi(t) = \exp(-|t|).$$

1.2 Konvergencia fajták

Def: Azt mondjuk, hogy a súlyfüggvények (F_n) sorozata **szorosan** tart az F súlyfüggvényhez, ha minden $f \in C_0(\mathbb{R})$ esetén

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dF_n(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dF(x).$$

A konvergenciát szokás $F_n \xrightarrow{n} F$ módon is jelölni. (narrow) Ha a konvergencia minden $f \in C_b(\mathbb{R})$ esetén fennáll, akkor azt mondjuk, hogy a sorozat **gyengén** konvergens, és ezt az $F_n \xrightarrow{w} F$ módon jelöljük.

Ahol $C_0(\mathbb{R})$ azon folytonos függvények osztálya, amelyekre $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ azaz ez a lecsengő függvények osztálya, és $C_b(\mathbb{R})$ a korlátos folytonos függvények halmaza.

Def: Azt mondjuk, hogy az (F_n) súlyfüggvények sorozata a **folytonossági pontokban** az F súlyfüggvényhez tart, jelölésben $F_n \xrightarrow{c!} F$, ha az F minden x folytonossági pontjában $F_n(x) \to F(x)$.

Példa, amikor nem teljesül a gyenge konvergencia, de a folytonossági pontokbeli igen: $f_n(x) = \chi_{[0,1/n]}(x)\cdot n$ idő után nincs ebben x

A gyenge implikálja a folytonossági pontokbeli konvergenciát, a folytonossági pontokbeli, pedig implikálja a szűk konvergenciát. Nézzük miért!

gyenge → folytonossági

$$\limsup_{n\to\infty} F_n(x) \leq F(x)\text{-es rész:}$$

Legyen x az F-nek egy folytonossági pontja. Ekkor legyen:

$$g(y) = \begin{cases} 1, & \text{ha } y < x, \\ \text{az } (x,1) \text{ és } (x+\epsilon, 0) \text{ pontokat összekötő lin. fgv.,} & \text{ha } y \in [x, x+\epsilon], \\ 0, & \text{ha } y > x+\epsilon \end{cases}$$

ekkor,

$$\chi_{(-\infty,0)} \leq g(y),$$

mivel a lin fgv.-es részén a g nagyobb, mint a karakterisztikus függvény. Ekkor az integrál monotonitása miatt

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_{(-\infty,x)}\, dF_n \overset{\text{kar fv kiint.}}{=} F_n((-\infty,x)) \overset{\text{jelölés}}{=} F_n(x) \overset{\text{int. mon.}}{\leq} \int_{\mathbb{R}} g\, dF_n.$$

Hasonlóan, igaz, hogy

$$\chi_{(-\infty,x+\epsilon)} \geq g(y)$$

Mivel a lin fgv.-es részén a g ekkor kisebb, mint a karakterisztikus függvény. Ekkor ugyanúgy következésképp:

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_{(-\infty,x+\epsilon)}\, dF \overset{\text{kar fv kiint.}}{=} F((-\infty,x+\epsilon)) \overset{\text{jelölés}}{=} F(x+\epsilon) \overset{\text{int. mon.}}{\geq} \int_{\mathbb{R}} g\, dF.$$

Ekkor az előzőekből:

$$\limsup_{n\to\infty} F_n(x) \leq \limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g\, dF_n = \int_{\mathbb{R}} g\, dF \leq F(x+\epsilon).$$

Mivel x az F egy folytonossági pontja, ezért F jobbról folytonos, tehát ha $\epsilon \to 0$, akkor

$$\limsup_{n\to\infty} F_n(x) \leq F(x).$$

$$\liminf_{n\to\infty} F_n(x) \geq F(x)\text{-es rész:}$$

Legyen ekkor

$$g(y) = \begin{cases} 1, & \text{ha } y < x - \epsilon, \\ \text{az } (x-\epsilon, 1) \text{ és } (x, 0) \text{ pontokat összekötő lin. fgv.,} & \text{ha } y \in [x-\epsilon, x], \\ 0, & \text{ha } y > x \end{cases}$$

Ekkor ugyanúgy mint az előző részben:

$$\liminf_{n\to\infty} F_n(x) \geq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g dF_n = \int_{\mathbb{R}} g dF \geq F(x-\epsilon)$$

Mivel x az F egy folytonossági pontja, ezért F balról is folytonos, tehát ha $\epsilon \to 0$, akkor

$$\liminf_{n\to\infty} F_n(x) \geq F(x)$$

Azaz $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$.

folytonossági $\to$ szűk

A függvény korlátos, valamint a függvény részsorozata egyenletesen korlátos.

Ekkor legyen K az F_n sorozat korlátja, vagyis $|F_n| < K$. Legyen ekkor g(x) egy olyan függvény, hogy $g \in C_0(\mathbb{R})$. Ekkor legyenek a, valamint b olyan folytonossági pontok F-en, amelyekre igaz, hogy egy előre meghtározott ϵ-ra ha veszünk az [a, b) intervallumon kívül egy tetszőleges x pontot, akkor arra biztosan igaz, hogy

$$|g(x)| < \epsilon/K$$

Mivel

$$\int_{\mathbb{R}} g\,dF_n = \int_a^b g\,dF_n + \int_{\mathbb{R}\setminus[a,b)} g\,dF_n,$$

ezért

$$\left| \int_{\mathbb{R}} g\,dF_n - \int_a^b g\,dF_n \right| = \left| \int_{\mathbb{R}\setminus[a,b)} g\,dF_n \right|.$$

Használva, hogy $|g(x)| < \frac{\epsilon}{K}$ ha $x \notin [a,b)$, kapjuk:

$$\left| \int_{\mathbb{R}\setminus[a,b)} g\,dF_n \right| \overset{\text{háromszög}}{\leq} \int_{\mathbb{R}\setminus[a,b)} |g(x)|\,dF_n(x) \overset{|g(x)|<\frac{\epsilon}{K}}{\leq} \frac{\epsilon}{K} \int_{\mathbb{R}} dF_n(x).$$

Mivel (F_n) egyenletesen korlátos, azaz létezik K úgy, hogy

$$\int_{\mathbb{R}} dF_n(x) \leq K,$$

ezért

$$\left| \int_{\mathbb{R} \setminus [a,b)} g \, dF_n \right| \leq \frac{\epsilon}{K} \times K = \epsilon.$$

Így végül:

$$\left| \int_{\mathbb{R}} g \, dF_n - \int_a^b g \, dF_n \right| \leq \epsilon,$$

ugyanígy:

$$\left| \int_{\mathbb{R}} g \, dF - \int_a^b g \, dF \right| \leq \epsilon.$$

Ezekből:

$$\left| \int_{\mathbb{R}} g \, dF_n - \int_{\mathbb{R}} g \, dF \right| \leq$$

$$\left| \int_{\mathbb{R}} g \, dF_n - \int_a^b g \, dF_n \right| + \left| \int_a^b g \, dF_n - \int_a^b g \, dF \right| + \left| \int_a^b g \, dF - \int_{\mathbb{R}} g \, dF \right| < 3\epsilon$$

, ahol a középső tagot úgy kapjuk, hogy az $g(\mathbb{R} \setminus [a,b])$ tart 0 -hoz, ∞, és $-\infty$-ben így, a véges [a, b) intervallumon vett integráljainak különbsége is tart 0-hoz az alábbi lemma miatt.

Ha (F_n) és F súlyfüggvények (, és $F_n \xrightarrow{c} F$ (azaz F_n konvergál F-hez minden folytonossági pontban), továbbá a és b az F eloszlásfüggvény folytonossági pontjai, és $g \in C([a,b])$, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b g \, dF_n = \int_a^b g \, dF.$$

Vagyis elmondható, hogy mivel ϵ tetszőlegesen kicsire választható, ezért

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\int_{\mathbb{R}} g \, dF_n - \int_{\mathbb{R}} g \, dF \right) = 0$$

Ez pont a szűk konvergencia definíciója!

Definíció: szorosság Azt mondjuk, hogy az F eloszlásfüggvény szoros, amennyiben elmondható róla, hogy $\forall\epsilon$-ra van egy olyan K kompakt halmaz, például az $[a_\epsilon, b_\epsilon]$intervallum, amelyre: $F(b_\epsilon) - F(a_\epsilon) < 1 - \epsilon$, vagyis $F(K_\epsilon^c) < \epsilon$.

Tétel: Helly: Minden egyenletesen korlátos, monoton növekedő függvényekből álló sorozatnak van olyan részsorozata, amely minden pontban egy monoton növekedő függvényhez tart. Speciálisan, amennyiben ez az F_n egy súlyfüggvénysorozat, és F balról folytonos akkor igaz, hogy $F_{n_k} \xrightarrow{c!} F$.

A bizonyítása ennek a tételnek nem túl izgalmas. Nagyvonalakban, úgy működik, hogy tudjuk a **Cantor féle átlós módszer** segítségével, hogy a **racionális számokban van részsorozata** a súlyfüggvénynek, az irracionálisakra pedig úgy **terjesztjük** ki őket, hogy vesszük a lnáluk kisebb racionális pontokat, **vesszük a suprémumukat**, ezután a racionális pontok**sűrűsége miatt** adódik, hogy a folytonossági pontban, az így kapott függvény alatt, valamint felett találunk egy nála ϵ-nal nagyobb, valamint alatta egy ugyanennyivel kisebbet, és konvergálunk ezzel 0 hoz.

Speciálisan a Prokhorov-tétel ugyanezt mondja ki eloszlásfüggvényekre.

Szűk konvergencia + nincs mértékszivárgás → gyenge konvergencia

Bizonyítás: Ez már sokkal izgalmasabb mint az előző! Szóval a szűk konvergencia minden C_0-beli függvényre igaz → venni kell egy olyat amilyenben nincs mértékszivárgás. → Egy ilyen függvény a

$$\text{f(x)} = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq -N-\delta, \\ \text{lineárisan nő } 0 \to 1, & \text{ha } x \in [-N-\delta, -N], \\ 1, & \text{ha } x \in [-N, N], \\ \text{lineárisan csökken } 1 \to 0, & \text{ha } x \in [N, N+\delta], \\ 0, & \text{ha } x \geq N+\delta. \end{cases} \qquad \text{trapézfüggvény.}$$

Ekkor az F_n tart F-be szűken.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[-N,N]} dF_n = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[-N,N]} dF = 1 - \epsilon$$

Tehát ∃ olyan nagy n, ahol már igaz, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} f dF_n < 1 - 2\epsilon$$

, hiszen a deltán vett integrál elhanyagolhatóan kicsi. Azaz mivel ez egy tetszőleges ϵ lehet, ezért a szorosság igazolt. → Prokhorov-tétel miatt, van gyengén konvergens részsorozata → $F_{n_k} \xrightarrow{w!} F$. → Szűk konvergencia miatt az összes részsorozat határértéke megegyezik, szóval $F_n \xrightarrow{w!} F$.

Nézzünk egy másik állítást! Amennyiben $F_n \xrightarrow{w!} F. \quad \leftrightarrow \phi_n(t) \xrightarrow{pontonként} \phi$
Azt kell bebizonyítani (már megint), hogy az F_n sorozat szoros. Ezt úgy tudjuk bebizonyítani, hogy oda **Oda:**

Könnyű, hiszen bizonyítottuk, hogy a karakterisztikus függvény egyértelműen meghatározza az eloszlást, és fordítva.

Vissza

$$\forall \tau > 0\text{-ra}: \quad 1 - F\left(\frac{2}{\tau}\right) + F\left(-\frac{2}{\tau}\right) \leq 2\left(1 - \frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau} \varphi(t)\,dt\right).$$

Ezt nem fogom bebizonyítani, mert nagyon hosszú.

Fontos, hogy a τ-t itt is a karakterisztikus függvényhez választjuk, azt szeretnénk, hogy elég nagy tömeg benne legyen az intervallumban. Válasszunk ki egy előre meghatározott $\epsilon > 0$-hoz, valamint ϕ-hez egy olyan ϵ-t, hogy

$$\int_{-\tau}^{\tau} \phi(t)\,dt = 2\tau - \epsilon/4$$

Majorált konvergencia miatt:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\tau}^{\tau} \phi_n(t)\,dt = \int_{-\tau}^{\tau} \phi(t)\,dt.$$

, azaz a pontonkénti konveregncia miatt létezik egy elég nagy n, hogy

$$\int_{-\tau}^{\tau} \phi_n(t)\,dt = 2\tau - \epsilon/2$$

A nem bizonyított egyenlőtlenség miatt:

$$1 - \left[F_n\left(\frac{\tau}{2}\right) - F_n\left(-\frac{\tau}{2}\right)\right] \leq 2 - \frac{1}{\tau}\int_{-\tau}^{\tau} \varphi_n(t)\,dt \leq \epsilon$$

Azaz az F_n sorozat szoros, $\to$ Prokhorov-tétel miatt, van gyengén konvergens részsorozata $\to$ $F_{n_k} \xrightarrow{w!} F$. $\to$ Karakterisztikus függvény pontonkénti konvergenciája miatt, valamint, mivel az összes részsorozat határértéke megegyezik, és egyértelműen határozzák meg azt, mivel a karakterisztikus függvények egyértelműen határozzák meg az eloszlást, szóval $F_n \xrightarrow{w!} F$.

1.3 Feltételes várható érték

Teljes valószínűség-tétel értelmében, amennyiben Y diszkrét valószínűségi változó:

$$P(X < x) = \sum_k P(X < x \mid Y = y_k) \cdot P(Y = y_k)$$

Amennyiben folytonos:

$$F_X(x) = \int_{\mathbb{R}} P(X < x \mid Y = y)\,dF_Y(y)$$

Definíció. Az $F(x \mid y)$ függvényt az X valószínűségi változó $Y = y$ melletti *feltételes eloszlásfüggvényének* nevezzük, azaz:

$$F(x \mid y) := P(X < x \mid Y = y).$$

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{y} F(x \mid u) \, dF_Y(u)$$

Azaz ezt a feltételes eloszlásfüggvényt nagyon szemléletesen fel lehet fogni ebben az esetben úgy, mint egy adott y ra rögzített eloszlást, és az eloszlásfüggvényt pedig úgy megkaphatjuk, hogy összeadjuk ezeket az y-okat, ugye ez folytonos esetben az integrálásal írható fel. A probléma az u függvény definiálásából fog adódni.

Tegyük fel, hogy amennyiben a peremsűrűségek 0-k, annyiban a feltételes sűrűségfüggvény is legyen 0.

$$f(x \mid y) := \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$$

kifejezést az *feltételes sűrűségfüggvényének* nevezzük.

A hozzá tartozó *feltételes eloszlásfüggvény* pedig:

$$F(x \mid y) = \int_{-\infty}^{x} f(v \mid y) \, dv.$$

valójában ezek a feltételes sűrűségfüggvények ekvivalenciaosztályok, mivel nullmértékű halmazokban különbözhetnek egymástól.

Együttes eloszlásfüggvény felírható feltételes eloszlás Y szerinti peremeloszlásának integráljával Bizonyítás:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{y} F(x \mid u) \, dF_Y(u) &= \int_{-\infty}^{y} \left(\int_{-\infty}^{x} f(v \mid u) \, dv \right) dF_Y(u) \text{ (eloszlásfüggvény behelyettesítés)} \\
&= \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f(v \mid u) \, dv \, g(u) \, du \text{ (} dF_y(u)\text{-ról du-ra váltás)} \\
&= \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} \frac{f(v, u)}{f_Y(u)} \cdot f_Y(u) \, dv \, du \\
&= \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f(v, u) \, dv \, du \\
&= F(x, y)
\end{aligned}$$

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ egy valószínűségi mező, és X egy $\mathcal{A}$-ban mérhető valószínűségi változó.

Definíció. Az $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ szigma-algebra szerint vett *feltételes várható értéken*, amit $E(X \mid \mathcal{F})$-fel jelölünk. Ekkor az $E(X \mid \mathcal{F}) : (\Omega, \mathcal{A}, P) \ \rightarrow (\Omega, \mathcal{F}, P)$

$$\int_F X\,dP = \int_F E(X \mid \mathcal{F})\,dP.$$

Ha $\mathcal{F} = \sigma(y_\alpha, \alpha \in A)$, azaz $\mathcal{F}$ egy y_α-k család által generált szigma-algebra, akkor az egyszerűség kedvéért gyakran így jelöljük:

$$E(X \mid y_\alpha, \alpha \in A).$$

Speciálisan, ha $X = \chi_A$, akkor a feltételes várható értéket szokás:

$$P(A \mid \mathcal{F})$$

alakban írni, és ezt nevezzük az A esemény $\mathcal{F}$-re vonatkozó *feltételes valószínűségének.* Ilyenkor a definíció értelmében:

$$P(A \cap F) = \int_F P(A \mid \mathcal{F})\,dP, \quad \forall F \in \mathcal{F}.$$

Nézzük az alábbi állításokat!

1. Ha X-nek létezik várható értéke, akkor $E(X \mid \mathcal{F})$ is létezik.

2. Ha X-nek létezik várható értéke, akkor $E(X \mid \mathcal{F})$ P-majdnem mindenütt véges.

3. Ha $X \geq 0$, akkor $E(X \mid \mathcal{F}) \geq 0$ P-majdnem mindenütt.

4. Az $E(X \mid \mathcal{F})$ egy ekvivalenciaosztály, tehát csak egy $A \in (\Omega, \mathcal{F}, P)$-nullmértékű halmazokon kívűl azonosak, azoko különbözhetnek.

Ha X integrálható (azaz $E[|X|] < \infty$), akkor definiálhatunk egy mértéket:

$$\nu(C) := \int_C X\,dP, \quad C \in \mathcal{F}.$$

Ha $X \geq 0$, akkor $\nu \geq 0$, tehát a mérték pozitív mérték.
Ha $\mu := P|_{\mathcal{F}}$ a P mérték leszűkítése az $\mathcal{F}$-re, akkor

$$\nu \ll \mu,$$

azaz ν abszolút folytonos μ-ra: ha $\mu(C) = 0$, akkor $\nu(C) = 0$ is teljesül.

Ha $P(C) = 0$, akkor $\nu(C) = 0$, azaz $\nu \ll \mu$. Az $(\Omega, \mathcal{F})$ mérhető téren vegyük a $\frac{d\nu}{d\mu}$ Radon–Nikodym-féle deriváltat. Definiáljuk a feltételes várható értéket mint

$$E(X \mid \mathcal{F}) := \frac{d\nu}{d\mu}.$$

A derivált definíciója alapján teljesül a következő integrálegyenlet minden $C \in \mathcal{F}$ halmazra:

$$\int_C X\, dP = \int_C E(X \mid \mathcal{F})\, dP.$$

Az egyértelműség a Radon-Nikodym-derivált egyértelműségének következménye: $E(X \mid \mathcal{F})$ csak P-nullhalmazon térhet el más verzióktól. Ha $\nu \geq 0$, azaz $X \geq 0$, akkor a derivált is nemnegatív: $E(X \mid \mathcal{F}) \geq 0$ P-majdnem mindenütt.

Tegyük fel, hogy X független a $\mathcal{F}$-től. Ekkor a következő azonosság teljesül **minden** $F \in \mathcal{F}$ eseményre:

$$\int_F X\, dP = E(\chi_F X) = E(\chi_F) \cdot E(X) = \int_F E(X)\, dP.$$

Ebből a **minden** szóból sok minden adódik, hiszen ekkor ebből triviális, hogy nem lehet 2 várható értéke egy valváltozónak (Ez már amúgy a Radon-Nikodym-tételből is kiderült) ,

$$\int_F X\, dP - \int_F X\, dP = 0 = \int_F E_1(X) - E_2(X)\, dP$$

Vagyis $E_1 = E_2$.

Továbbá adott a toronyszabály is:

$$E(X) = \int_F X\, dP = \int_F E(X)\, dP = E(E(X))$$

Nézzük mi van általánosabb esetben, amikor Feltételes várható értékeket nézünk az $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ szerint. Ekkor igaz az, hogy a durvább győz, vagyis, durvítani tudjuk a σ-algebrákat, de finomítani nem. Viszont az triviális, hogy a várható értékük megegyezik, az R-N-tételből:

$$\int_G E(E(X \mid \mathcal{F}) \mid \mathcal{G})\, dP = \int_G E(X \mid \mathcal{F})\, dP = \int_G (X \mid \mathcal{A})\, dP = \int_G X\, dP.$$

vagyis,

$$E(E(X \mid \mathcal{F}) \mid \mathcal{G}) \overset{\text{m.m.}}{=} E(X \mid \mathcal{F}) \overset{\text{m.m.}}{=} X$$

Ami még fontos lehet ezzel kapcsolatban, hogy működik a kiemelés mind konstans, mind valváltozó kiemelésénél.

$$E(aX \mid \mathcal{F}) = a \cdot E(X \mid \mathcal{F})$$

ezeknek a bizonyítása egyszerű, azt kell kihasználni, hogy

$$\int_G X\,dP = \int_G E(X \mid \mathcal{F})\,dP$$

Legyen Y véges, és $\mathcal{F}$ mérhető. Ekkor igaz, hogy

$$YE(X \mid \mathcal{F}) = E(XY \mid \mathcal{F})$$

Ez azért igaz, mert

$$\int_F YE(X \mid \mathcal{F})dP$$

$$\int_A E(XY \mid \mathcal{F})\,dP = \int_A XY\,dP = \int_A (Y \mid \mathcal{F})E(X \mid \mathcal{F})dP = \int_A Y{\cdot}E(X \mid \mathcal{F})\,dP \quad \forall A \in \mathcal{F}$$

Mivel Y $\mathcal{F}$-mérhető.

Doob-lemma: Legyen X tetszőleges halmaz, $(Y, \mathcal{Y})$ tetszőleges mérhető tér, és $f : X \to Y$ tetszőleges leképezés. Tegyük fel, hogy $g : X \to \mathbb{R}^n$ egy $\sigma(f)$-mérhető függvény, azaz g mérhető a f által generált szigma-algebrára.

Ekkor létezik egy $h : (Y, \mathcal{Y}) \to \mathbb{R}^n$ mérhető leképezés, amelyre:

$$g = h \circ f.$$

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $g : X \to \mathbb{R}$ egy egyszerű $\sigma(f)$-mérhető függvény, azaz:

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k\,\chi_{B_k}(x),$$

ahol $B_k \in \sigma(f)$, tehát léteznek olyan $A_k \in \mathcal{Y}$, hogy $B_k = f^{-1}(A_k)$.

Definiáljunk egy $h : Y \to \mathbb{R}$ függvényt:

$$h(y) := \sum_{k=1}^{n} c_k\,\chi_{A_k}(y).$$

Ekkor:

$$h(f(x)) = \sum_{k=1}^{n} c_k\,\chi_{A_k}(f(x)) = \sum_{k=1}^{n} c_k\,\chi_{f^{-1}(A_k)}(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k\,\chi_{B_k}(x) = g(x).$$

1.4 Bernstein-tétel

Bernstein-tétel:

Legyen $L : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ egy valószínűségeloszlás Laplace-transzformáltja:

Az alábbi két állítás ekvivalens

1. $L(s)$ egy valószínűségi eloszlás Laplace-transzformáltja, amely a nemnegatív számokra koncentrálódik

2. $L(0) = 1 \quad$ és $\quad L(s)$ teljesen monoton a $[0, \infty)$ intervallumon.

Bizonyítás:

1 ⇒ 2

Legyen $L(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\, dF(x)$, ahol F pozitív mérték. Deriválhatunk az integrál alatt:

$$L^{(n)}(s) = (-1)^n \int_0^\infty x^n e^{-sx}\, dF(x),$$

amiből következik, hogy

$$(-1)^n L^{(n)}(s) = (-1)^{2n}\, E\left[X^n e^{-sX}\right] = E\left[X^n e^{-sX}\right] \geq 0.$$

azaz a Laplace transzformált teljesen monoton

2 ⇒ 1

Tegyük fel, hogy $L \in C^\infty((0, \infty))$, teljesen monoton és $L(0+) = 1$. Definiáljuk a következő halmazt:

$$K := \{f \in C^\infty((0, \infty)) \mid f \text{ teljesen monoton, } 0 \leq f(s) \leq 1\}.$$

Vegyük a $C^\infty(0, \infty)$ teret (ebben azok a függvények vannak, amelyek végtelenül sokszor differenciálhatóak), ezen a téren a távolság:

$$d_n(f, g) = max(|f^{(n)} - g^{(n)}|)_{[0,n]}$$

ezen a téren a topológiát a félnormarendszer alkotja

$$p_n(f) := \sup_{s \in [1/n, n]} |f^{(n)}(s)|.$$

Ez egy Fréchet-tér: teljes:

minden cauchy sorozat konvergens

,

, Mivel ez egy félnomra sereg, tehát felál rá a skalár kiemelési szabály, és a háromszög -egyenlőtlenség, és igaz, hogy egy adott n-re

$$||f||_\alpha < \epsilon$$

alakú halmazok **konvexek**. **Hausdorrf-tulajdonságú** (azaz ha van x $\neq$ y pont, akkor azok szeparálhatóak)

mivel az f függvények teljesen monotonak, ezért ha az összes $||f_\alpha|| = 0$, akkor f = 0, vagyis fennáll a Hausdorrf-tulajdonság. Azaz ezek a

$$||f||_\alpha < \epsilon$$

halmazok egy lokálisan konvex téren vannak értelmezve, mégpedig így a $C^\infty_{loc}((0,\infty)$-n Továbbá metrizálható, mivel megszámlálhatóan sok félnorma van, hiszen a félnormák az $[\frac{1}{n}, n]$ intervallumon vannak értelmezve, azaz létrehozhatunk egy

$$d(f,g) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|f^{(n)} - g^{(n)}|_{[1/n,n]}}{1 + |f^{(n)} - g^{(n)}|_{[1/n,n]}}$$

Metrikát.

Ekkor nézzük meg Krein-Milman tételét

Tétel

Legyen X egy *lokálisan konvex topologikus vektortér*, és legyen $A \subset X$ egy *kompakt, konvex* halmaz. Ekkor:

1. Az A halmaznak van *extremális pontja*,
2. Az A halmaz *megegyezik az extremális pontjainak zárt konvex burkával*:

$$A = \overline{\text{conv}}(\text{Ext}(A))$$

Definíciók:

extremális pont: Egy $x \in A$ pont extremális, ha nem létezik olyan $y, z \in A, y \neq z, \alpha \in (0,1)$, hogy

$$x = \alpha y + (1-\alpha)z.$$

Részhalmaz pereme: Egy nemüres $F \subseteq A$ halmaz akkor az A részhalmaz pereme, ha:

$$\alpha x + (1-\alpha)y \in F, \text{ valamilyen } x, y \in A, \ 0 \leq \alpha \leq 1 \Rightarrow x, y \in F.$$

1. rész: létezik extremális pont

Szükségünk lesz egy segédállításra:

Lemma: Legyen $\ell \in X^*$. Ekkor a

$$F_\ell := \left\{ y \in A : \ell(y) = \max_{x \in A} \ell(x) \right\}$$

halmaz az A egy részhalmaz pereme.

Bizonyítás: A kompakt, ℓ folytonos, tehát a maximum létezik, így $F_\ell \neq \emptyset$. Ha $z = \alpha x + (1-\alpha)y \in F_\ell$, akkor:

$$\max_{x \in A} \ell(x) = \ell(z) = \alpha\ell(x) + (1-\alpha)\ell(y) = \alpha\ell(x) + (1-\alpha)\max_{x \in A} \ell(x) \leq \max \ell(x),$$

miatt csak akkor lehet egyenlőség, ha $\ell(x) = \ell(y) = \max \ell(x)$. Tehát $x, y \in F_\ell$.

Fő bizonyítás:

Ha A csak egy pontból áll, kész vagyunk. Ha nem, és létezik $x \neq y \in A$, akkor a Hahn–Banach-tétel szerint van $\ell \in X^*$ úgy, hogy $\ell(x) > \ell(y)$.

Legyen F_ℓ a fenti lemma alapján. Ebben nincs benne y, tehát $F_\ell \in A$

Ezt a folyamatot ismételjük: minden új részhalmaz peremet tovább szűkítünk. Így egy csökkenő láncolatot kapunk:

$$A \supset F_{\ell_1} \supset F_{\ell_2} \supset \cdots$$

Ezek kompaktok, így a metszetük is nem üres:

$$F := \bigcap_i F_{\ell_i} \neq \emptyset.$$

Ez is részhalmaz perem.

Legyen egy minimális ilyen perem F. Ha több pontból állna, akkor szétválasztható lenne, és tovább szűkíthető — ellentmondás.

Így F egyetlen pontból áll: ez egy extremális pont.

Úgy képzeljük el a tételt, hogy ezek a peremek, mindig egy dimenzióval kisebbek mint az a halmaz amelynek az adott perem a pereme, mivel a hanh-banach szerint tudunk két pont között találni elválasztást egy ℓ funkcionál segítségével, így az egyik szeparált halmaznak léteznek olyan pontjai amelyek maximálisak lesznek (Zorn-lemma). Ezek a pontok létrehoznak egy peremet. Ezzel a peremmel megcsináljuk ugyanezt, és ezt addig csináljuk, amíg nem kapunk egy extremális pontot. Véges dimenzióban meg lehet csinálni, Zorn-lemma segítségével.

Tehát mindig vannak maximális elemei ezeknek a peremeknek, amelyek ugye mind egy dimenzióval kevessebbel rendelkeznek, mint az elöttük lévő perem, hiszen ezek a peremek, az algoritmus szerinti előző peremnek a pereme. Ezt egészen addig csináljuk, ami egy pontot nem kapunk. Ez egy extremális pont lesz. Fontos, hogy a Hausdorrf-tulajdonság azért kellett, hogy ezeknek a peremeknek a metszete soha ne legyen üres, és kompakt legyen. Így végtelen dimenzióban is működik, mert azt mondjuk, hogy csak a láncoknak a metszetét vesszük, ami ugye nemüres, és kompakt. **2. rész: zárt konvex burok lefedi A-t**

Legyen $E = \mathrm{Ext}(A)$, és $\overline{\mathrm{conv}}(E)$ az extremális pontok zárt konvex burka.

Nyilván:

$$\overline{\mathrm{conv}}(E) \subseteq A$$

Tegyük fel indirekten, ez nem igaz, vagyis: létezik $x \in A \setminus \overline{\mathrm{conv}}(E)$ pont.

A Hahn–Banach-tétel szerint létezik $\ell \in X^*$, ami elválasztja x-et és $\overline{\mathrm{conv}}(E)$-t:

$$\sup_{y \in \overline{\mathrm{conv}}(E)} \ell(y) < \ell(x)$$

Definiáljuk a részhalmaz peremet:

$$F_\ell := \left\{ z \in A : \ell(z) = \max_{w \in A} \ell(w) \right\}$$

Ez nem metszi $\overline{\mathrm{conv}}(E)$-t. De az 1. rész szerint minden részhalmaz perem tartalmaz extremális pontot, vagyis ennek az új peremnek is kell, hogy legyen extremális pontja, vagyis találhatunk még olyan pontot, amely eleme a $\overline{\mathrm{conv}}(E)$-nek. Ezzel ellentmondásra jutottunk.

Vagyis:

$$A = \overline{\mathrm{conv}}(\mathrm{Ext}(A)).$$

Térjünk vissza a Bernstein-tételhez:

Vegyünk egy olyan K halmazt amelyre igaz, hogy a bennelévő függvények **teljesen monotonok**, valamint a **0 pontban vett baloldali határértéke 1**.

Két dolgot kell bebizonyítani: 1.: K egy konvex kompakt halmaz, 2: ennek az extremális pontjai az $e^{\alpha x}$.

Tegyük fel, hogy az extremális pontok az $e^{-\beta x}$-ek.

Krein - Milman tétel szerint tetszőleges f-re az extrmális pontoknak a konvex lezártja

$$f = lim_{n\to\infty} \sum_i \alpha_i^{(n)} e^{\beta_i^{(n)} x} =$$

Mivel konvex lezártság szerint:

$$\sum \alpha_i = 1, \alpha \geq 0,$$

ezért a kifejezés egyenlő azal a súlyfügvénnyel, ahol a súlyok α_i-k és ezek a súlyok β-khoz tartoznak. Vagyis:

$$= \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty e^{-\beta x} d\mu_n(\beta)$$

Valószínűségi mértékeknek a Helly-féle kiválasztási tétel szerint, a folytonossági pontokban van konvergens részsorozata.

$$= f(x) = \int_0^\infty e^{-\beta x} d\mu(\beta)$$

viszont itt előfordul a mértékvesztés, azaz $\mu(\mathbb{R}_+) < 1$. De ez nem probléma, hiszen feltettük a K-beli függvényekről, hogy 0+-ban a határértékük 1, vagyis ha

$$lim_{x\to 0} f(x) = lim_{x\to 0} \int_0^\infty e^{-\beta x} d\mu(\beta) = \int_0^\infty 1 d\mu(\beta) = 1$$

Azaz ez egy valószínűségi mérték. De miért pont az exponenciális függvény alkotja az extremális pontokat? legyen f egy extremális pont. Tekintsük az u(x) = f(x+y)-f(x)f(y), ahol rözítsük y-t. Amennyiben u(x) = 0, akkor f(x+y)=f(x)f(y), vagyis $f = e^{-\beta x}$.

Lássuk be, hogy f+u, és f-u $\in$ K akkor, és csak akkor ha u = 0. Ahhoz, hogy az f+u benne legyen K-ban az kell, hogy (f+u)(0+) $\leq$ 1. legyen α = f(y). Ekkor 0 $\leq$ $\alpha\leq$ 1, mivel α ekkor teljesen monoton. Nézzük meg mi is itt a helyzet:

$$(f+u)(0+) = f(0+)(1-\alpha) + \alpha \leq 1$$

$$(-1)^n (f+u)^{(n)}(x) = (-1)^n f^{(n)}(x) + (-1)^n u^{(n)}(x)$$

$$= (-1)^n f^{(n)}(x) + (-1)^n [f^{(n)}(x+y) - \alpha f^{(n)}(x)]$$

$$= (-1)^n f^{(n)}(x)(1-\alpha) + (-1)^n f^{(n)}(x+y) \geq 0$$

$$(-1)^n (f-u)^{(n)}(x) =$$

$$= (-1)^n f^{(n)}(x) - (-1)^n u^{(n)}(x)$$

$$= (-1)^n f^{(n)}(x) - (-1)^n [f^{(n)}(x+y) - f(y)f^{(n)}(x)]$$

$$= (-1)^n [f^{(n)}(x) - f^{(n)}(x+y)] + (-1)^n \alpha f^{(n)}(x) \geq 0$$

Be kell látnunk, hogy ez a K ez kompakt. Mivel metrizálható, elég azt bizonyítani, hogy f_k sorozatoknak van konvergens részsorozata. Ehhez elég megmutatni, hogy rögzített k-ra, és rögzített n-re van olyan részsorozata, hogy $f_\alpha^{(k)}([\frac{1}{n}, n]) \rightarrow f^{(k)}$ egyenletesen.

Egy rögzített n-re és k-ra vegyük olyan sorozatokat, hogy például az $[\frac{1}{2}, 2]$ intervallumon első derivált szerint, $[\frac{1}{3}, 3]$-n a második derivált szerint, és így tovább. Ekkor látható, hogy ezek az intervallumok szerint is részsorozatot alkotnak k, és n szerint, valamint egy adott rögzített k,ra és n-re is részsorozatot alkotnak, így a Cantor-féle átlós eljárás szerint az átlókban lévő tagok is tartanak a bal felső sarokban lévőhöz. Így kapunk egy olyan sorozatot, amelyik az összes [1/n, n]-es részsorozaton az összes deriváltra konvergál, vagyis sorozatkompakt a függvény.

Rögzítsünk egy k-t, és rögzítsünk egy ilyen intervallumot. Az Arzelá - Ascoli tétel szerint ha van egy kompakt halmaz, ahol vannak folytonos függvények, akkor akkor lehet ebből kiválasztani egyenletesen konvergens részsorozatot, ha függvénysorozat **egyenletesen korlátos**, valamint **egyenlő mértékben való egyenletes folytonosság** fennáll, azaz ($\forall \epsilon - ra, \exists \delta > 0, hogy : |f(x) - f(y)| \leq \epsilon$ esetén $|x - y| < \delta$. az ϵ-hoz tartózó δ-t az f függvénytől függetlenül meg lehet választani.) Rögzítsünk egy K-t. Azt kell megmutatni, hogy rögzített k-ra ezek e függvények egyenletesen folytonosak.

Tegyük fel, hogy beláttuk, hogy az $f_n^{(k)}(x)$ sorozat minden $x > 0$ esetén korlátos. Tekintsük azt az esetet, amikor az $f_n^{(k+1)}$ nem negatív és csökken, a másik eset analóg módon igazolható. Mivel $x > 0$, ezért alkalmas $\epsilon > 0$ számra a középértéktétel alapján

$$\frac{f_n^{(k)}(x) - f_n^{(k)}(x - \epsilon)}{\epsilon} = f_n^{(k+1)}(c) \geq f_n^{(k+1)}(x)$$

Mivel az , $f_n^{(k)}(y)$ sorozat minden $y > 0$ pontban korlátos, ezért minden $x > 0$ pontban az $f_n^{(k+1)}(x)$ is korlátos. Az $[a, b]$ szakaszon való egyenlő mértékben való egyenletes folytonosság szintén a középértéktétel, illetve a már belátott egyenletes korlátosság következménye, ugyanis

$$|f_n^{(k)}(x) - f_n^{(k)}(y)| \leq \sup_{c \in [a,b]} |f_n^{(k+1)}(c)| \cdot |x - y| \leq L_{k+1}|x - y|$$

minden $x, y \in [a, b]$ esetén, amiből az egyenlő mértékben való egyenletes folytonosság már evidens.

Így tehát a K egy kompakt és konvex részhalmaza a $C^\infty((0, \infty))$ térnek.

1.5 A nagy tételek

Tétel. Ha van sűrűségfüggvény, a koordináták függetlenek és az eloszlás csak a sugártól függ, akkor az eloszlás normális.

A feladatot elegendő $n = 2$ esetben megoldani. A feltételek szerint ha $f_1(x)$ és $f_2(y)$ az x és az y koordináta sűrűségfüggvénye és f_3 az (x, y) síkban az együttes sűrűségfüggvény, akkor a feltételek szerint

$$f_1(x)f_2(y) = f_3\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right).$$

Az f_i függvényeket valódi függvényeknek tekintjük és nem ekvivalenciaosztályoknak, így az értékük minden pontban definiált. Az együttes sűrűségfüggvény csak egy körgyűrűn lehet nulla, azonban ez ellentmond annak, hogy a koordináták függetlenek, ugyanis az $f_1(x)f_2(y)$ egy kereszten" lesz nulla. Ebből látható, hogy az f_i függvények mindegyike pozitív. Ha $x = 0$, illetve ha $y = 0$, akkor azonnal látható, hogy a függvények csak konstans szorzókban különböznek egymástól. Ugyancsak azonnal látható, hogy az f_1 és az f_2 függvények szimmetrikusak, ugyanis például

$$f_1(x)f_2(0) = f_3\left(\sqrt{x^2}\right) = f_3(|x|) = f_1(-x)f_2(0).$$

Ha az egyenletet végigosztjuk az $f_1(0)f_2(0) = f_3(0)$ konstanssal és bevezetjük a $g(x) = \ln\left(\frac{f_i(x)}{f_i(0)}\right)$ függvényt, akkor a

$$g\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) = g\left(\sqrt{x^2}\right) + g\left(\sqrt{y^2}\right)$$

egyenletet kapjuk. Ha a g helyébe a $h(u) = g\left(\sqrt{u}\right)$ függvényt írjuk, akkor

$$h(x^2 + y^2) = h(x^2) + h(y^2).$$

Másképpen fogalmazva, tetszőleges $u, v \geq 0$ számokra:

$$h(u + v) = h(u) + h(v).$$

Minden sűrűségfüggvény definíció szerint Lebesgue-mérhető, így a Cauchy-féle függvényegyenlet szerint $h(x) = ax$, vagyis

$$\frac{f_i(x)}{f_i(0)} = \exp(g(x)) = \exp(h(x^2)) = \exp(ax^2),$$

amiből már könnyen, hogy az eloszlás normális.

Crámer-tétel: Amennyiben X, és Y független valószínűségi változók, és X+Y normális, annyiban X, és Y is normálisak.

Bizonyítás: Feltehető, hogy az $X+Y$ eloszlása $\mathcal{N}(0,1)$. Legyen $M_X(z)$ az X és $M_Y(z)$ a Y

$$E\left(\exp(zX)\right) = E\left(\exp((x+iy)X)\right) = E\left(\exp(xX)\cdot(\cos(yX)+i\sin(yX))\right)$$

komplex momentumgeneráló függvénye. Mivel X és Y függetlenek, ezért

$$M_X(z)M_Y(z) = \exp\left(\frac{z^2}{2}\right).$$

A bizonyítás annak megmutatásából áll, hogy az $M_X(z)$ és az $M_Y(z)$ csak

$$\exp\left(\frac{\sigma^2 z^2}{2}\right)$$

alakú lehet.

Először megmutatjuk, hogy az értelmezési tartományok mindegyike a teljes komplex sík. Ehhez elegendő belátni, hogy a valós momentumgeneráló függvények mindenhol értelmezettek. Ez azonban nyilvánvaló, ugyanis a valós számokra leszűkítve:

$$\exp\left(\frac{s^2}{2}\right) = M_{X+Y}(s) = M_X(s)M_Y(s)$$

és mivel a valós momentumgeneráló függvény mindig pozitív, ha valamelyik tag végtelen lenne, akkor a szorzat is végtelen lenne.

Vagyis minden egyes z-re A MOMENTUMGENERÁLÓ FÜGGVÉNYEK ÉRTELMEZETTEK. Mivel ezek a teljes síkban értelmezettek, ezért be lehet deriválni a függvénybe, ezért az összes momentum is létezik.

Mivel

$$E\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{s^n}{n!}X^n\right) = E\left(\exp(|sX|)\right) \le E\left(\exp(sX)\right) + E\left(\exp(-sX)\right),$$

így az X és a Y összes momentuma véges, speciálisan rendelkeznek várható értékkel.

Mivel feltételeztük, hogy az összeg várható értéke nulla, feltehetjük, hogy az összeadandók várható értéke is nulla. Mivel az X és a Y várható értéke nulla, felhasználva, hogy az $\exp(|x|)$ függvény konvex, a

$$\exp\left(\int |g(x)|\, dF(x)\right) \le \int \exp(|g(x)|)\, dF(x)$$

(Jensen-egyenlőtlenség) alapján, felhasználva, hogy X és Y függetlenek, illetve hogy az $X+Y$ eloszlása standard normális, az $M_X(z)$, illetve analóg módon az $M_Y(z)$ függvényekre

$$|M_X(z)| = |E(\exp(zX))| \overset{háromszög}{\leq} E(|\exp(zX)|) \overset{|e^x|<e^{|x|}}{\leq} E(\exp(|zX|))$$

$$= E\left(\exp(|z||X+0|)\right) \overset{E(Y)=0}{=} E\left(\exp\left(|z||X+E(Y)|\right)\right) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \exp\left(|z|\left(x + \int_{\mathbb{R}} y\, dF_Y(y)\right)\right) dF_X(x) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \exp\left(|z| \int_{\mathbb{R}} (x+y)\, dF_Y(y)\right) dF_X(x) \overset{Jensen}{\leq} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(|z||x+y|\right) dF_Y(y)\, dF_X(x) =$$

$$= E\left(\exp\left(|z||X+Y|\right)\right) \overset{X+Y norm}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(|z||u|\right) \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \exp\left(|z|u\right) \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du \leq \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(|z|u\right) \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$$

$$= 2M_{\mathcal{N}(0,1)}(|z|) = 2\exp\left(\frac{z^2}{2}\right)$$

$$M_X(z)M_Y(z) = \exp\left(\frac{z^2}{2}\right) \neq 0, \quad M_X(0) = M_Y(0) = 1.$$

$$M_X(z) \text{ és } M_Y(z) \text{ nem nulla,}$$

ezért léteznek a

$$g_X(z) = \log M_X(z), \quad g_Y(z) = \log M_Y(z) \text{ logaritmusok, és}$$

$$|M_X(z)| = |\exp(g_X(z))| \leq 2\exp\left(\frac{|z|^2}{2}\right), \quad |M_Y(z)| = |\exp(g_Y(z))| \leq 2\exp\left(\frac{|z|^2}{2}\right).$$

Ha $f(z) \neq 0$, akkor a $\log f(z)$ függvényt definiálhatjuk az

$$h(w) = \int_0^w \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz$$

integrállal, ugyanis ha $I(z) := \exp(h(z))$, akkor

$$I'(z) = \exp(h(z)) \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} = I(z) \cdot \frac{f'(z)}{f(z)}.$$

Szorozzuk meg mindkét oldalt $f(z)$-nel:

$$I'(z)f(z) = I(z)f'(z) \Rightarrow I'(z)f(z) - I(z)f'(z) = 0.$$

Osszuk le $f(z)^2$-tel:

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{\exp(h(z))}{f(z)}\right) = 0,$$

azaz $\exp(h(z)) = cf(z)$ valamilyen $c \in \mathbb{C}$ konstanssal. Mivel $h(0) = 0$ és $f(0) = 1$, ezért

$$\exp(h(0)) = \exp(0) = 1 = cf(0) = c \cdot 1 \Rightarrow c = 1.$$

Tehát:

$$\exp(h(z)) = f(z),$$

és így $h(z) = \log f(z)$, azaz az integrál valóban a logaritmusfüggvényt adja.

Az exponenciális függvény abszolút értékének számolásánál elegendő a kitevő valós részét venni, ezért:

$$|\exp(g_X(z))| = \exp(\Re g_X(z)) \leq 2\exp\left(\frac{|z|^2}{2}\right).$$

Valós logaritmust véve:

$$\Re g_X(z) \leq \ln 2 + \frac{|z|^2}{2} \leq 1 + \frac{|z|^2}{2}.$$

Hasonlóan látható, hogy:

$$\Re g_Y(z) \leq 1 + \frac{|z|^2}{2}.$$

Ezután kell: **Lemma.** Ha valamely $|z| < r_0$ körben

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

és

$$A(r) := \max_{|z|=r} \Re f(z),$$

akkor minden n és minden $r < r_0$ esetén

$$|a_n| r^n \leq 4A(r) - 2\Re f(0).$$

A g_X logaritmusfüggvény a teljes komplex síkon analitikus, ezért

$$g_X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Így minden $r > 0$ számra

$$|a_n|r^n \leq 4\left(1 + \frac{r^2}{2}\right)^2.$$

Ebből következik, hogy ha $n > 2$, akkor $a_n = 0$, vagyis

$$g_X(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2.$$

De mivel

$$1 = M_X(0) = \exp(a_0),$$

ezért $a_0 = 0$, és mivel

$$a_1 = M'_X(0) = E(X) = 0, \quad a_2 = \frac{1}{2}M''_X(0) = \frac{\sigma_X^2}{2} > 0,$$

ezért

$$M_X(z) = \exp\left(\frac{\sigma_X^2 z^2}{2}\right).$$

Hasonlóan belátható, hogy

$$M_Y(z) = \exp\left(\frac{\sigma_Y^2 z^2}{2}\right).$$

Bernstein tétel: Ha X és Y azonos eloszlású és független valószínűségi változók, és az alábbi állítások **valamelyike teljesül**, akkor a **közös eloszlás normális**.

1. A $\dfrac{X+Y}{\sqrt{2}}$ eloszlása megegyezik a közös eloszlással.

2. $X + Y$ és $X - Y$ függetlenek.

Bizonyítás:

Jelölje a φ közös karakterisztikus függvényt. Ekkor az első feltétel alapján:

$$\varphi\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) = \varphi^2(t),$$

Ez a bizonyítás kulcsa, hiszen ezt használjuk szinte az összes számolásnál amiből normanégyzetet véve:

$$|\varphi|^2\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) = |\varphi^2(t)|^2 = \left(|\varphi|^2(t)\right)^2.$$

A $|\varphi|^2$ a közös eloszláshoz tartozó szimmetrizált eloszlás karakterisztikus függvénye. Elegendő belátni, hogy a szimmetrizált változó normális, ugyanis ha a szimmetrizált eloszlása normális, akkor a Cramér-tétel miatt az eredeti változó is normális.

Feltehető tehát, hogy φ valós értékű

A feltételt induktív módon alkalmazva:

$$\varphi\left(\frac{t}{2^{k/2}}\right) = \varphi^{2^k}(t).$$

A $\varphi \equiv 1$ függvényhez tartozó eloszlás a nullapontra koncentrálódik, amely definíció szerint elfajult normális eloszlásnak tekinthető.

Ellenkező esetben legyen $t_0 \neq 0$ olyan, hogy alkalmas $\sigma^2 > 0$ konstansra

$$\varphi(t_0) = \exp(-\sigma^2).$$

Ilyen σ^2 létezik, mivel $\varphi(0) = 1$, φ folytonos, valós értékű, és φ nem azonosan 1. Ebből:

$$\exp(-\sigma^2) = \varphi(t_0) = \varphi(t_0 2^{k/2} 2^{-k/2}) = \varphi\left(\frac{t_0}{2^{k/2}}\right)^{2^k},$$

amiből, mindkét oldalból 2^k-adik gyököt vonva, ha $t_k = t_0/2^{k/2}$, akkor:

$$\varphi(t_k) = \varphi\left(\frac{t_0}{2^{k/2}}\right) = \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2^k}\right) = \exp\left(-\sigma^2 t_k^2/t_0^2\right).$$

A második esetben:

$$X + Y + (X - Y) = 2X.$$

A feltételezett függetlenség alapján:

$$\varphi(2t) = \varphi^2(t) \cdot \varphi(t) \cdot \varphi(t) = \varphi^2(t) \cdot |\varphi(t)|^2,$$

amiből ismételten normanégyzetet véve:

$$|\varphi|^2(2t) = \left(|\varphi|^2(t)\right)^4.$$

Ismételten: ha $|\varphi|^2$-hez tartozó szimmetrizált eloszlás normális, akkor a Cramér-tétel miatt az eredeti eloszlás is normális, így feltehető, hogy a φ valós értékű.

Az egyenlőséget induktíve alkalmazva:

$$\varphi(2^n t) = \varphi^{2 \cdot 2^{n-1}}(t) = \varphi^{4 \cdot 2^{n-2}}(t) = \cdots = \varphi^{4^n}(t),$$

amiből, az első esettel analóg módon:

$$\exp(-\sigma^2) = \varphi(t_0) = \varphi\left(\frac{t_0}{2^k}\right)^{4^k} = \left(\varphi\left(\frac{t_0}{2^k}\right)\right)^{4^k},$$

vagyis ha $t_k = \frac{t_0}{2^k}$, akkor az előző egyenletből 4^k-adik gyököt vonva:

$$\varphi(t_k) = \varphi\left(\frac{t_0}{2^k}\right) = \exp\left(-\frac{\sigma^2}{4^k}\right) = \exp\left(-\frac{t_0^2}{4^k} \cdot \frac{\sigma^2}{t_0^2}\right) = \exp\left(-t_k^2 \cdot \left(\frac{\sigma}{t_0}\right)^2\right).$$

Mivel mindkét esetben $t_k \to 0$, az állítás következik a Linnik-tétel alapján.

Linnik-tétel Ha a φ karakterisztikus függvény egy $t_k \to 0$ sorozaton megegyezik a ψ karakterisztikus függvénnyel, amely egy $t = 0$ körüli sávban analitikus, akkor a két karakterisztikus függvény megegyezik.

(Elegendő feltenni, hogy a ψ mögötti eloszlás egyértelműen meghatározott a momentumai által, de az analitikusság ennél erősebb feltétel, tehát igaz.)

Bizonyítás: Tételezzük fel, hogy megmutatjuk, hogy a φ a $t = 0$ pontban végtelen sokszor deriválható. Miként alább megmutatjuk, a feltétel következtében

$$\varphi^{(n)}(0) = \psi^{(n)}(0),$$

vagyis a φ és a ψ nulla pontban vett deriváltjai, így a momentumaik, megegyeznek.

Mivel a ψ a feltétel szerint egy a nulla körüli sávban analitikus, ezért ott hatványsorba fejthető. De akkor a nulla körül a φ is hatványsorba fejthető, tehát φ is analitikus, így $\varphi = \psi$.

Emlékeztetünk, hogy abból, hogy két karakterisztikus függvény egy origó körüli intervallumon megegyezik, még nem következik, hogy mindenütt megegyeznek. Ugyanakkor ha a momentumgeneráló függvényeik egy origó körüli nyílt intervallumon megegyeznek, akkor a két eloszlás megegyezik. szükséges és elegendő feltétele.

Majd be fogjuk látni, hogy ha a páros deriváltak léteznek, akkor léteznek a páros momentumok is.

Lemma: Tegyük fel, hogy a $\varphi^{(2n+1)}(t)$ derivált létezik minden t-re. A

$$\frac{\varphi^{(2n+1)}(t) - \varphi^{(2n+1)}(0)}{t}$$

differenciahányados korlátossága a $2n+2$-edik momentum végességének **Bizonyítás:** először $n=1$-re látjuk be. Tekintsük a

$$\frac{\varphi(t)+\varphi(-t)-2\varphi(0)}{t^2}=\frac{E[\exp(itX)+\exp(-itX)-2]}{t^2}=\frac{E[2(\cos(tX)-1)]}{t^2}.$$

$$=E(\frac{2(\cos^2\left(\frac{tX}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{tX}{2}\right)-\cos^2\left(\frac{tX}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{tX}{2}\right))}{t^2})=-E\left[\frac{4\sin^2\left(\frac{tX}{2}\right)}{t^2}\right].$$

Ez egy másodrendű differencia, vagyis a numerikus közelítése a karakterisztikus függvény második deriváltjának.

A középérték-tétel alapján, felhasználva, hogy a kifejezés valós, és hogy a feltétel szerint az első derivált létezik:

$$\frac{\varphi(t)+\varphi(-t)-2\varphi(0)}{t^2}=\frac{\varphi'(\theta t)-\varphi'(-\theta t)}{t}=\theta\cdot\frac{\varphi'(\theta t)-\varphi'(0)}{\theta t}$$

Ez a kifejezés a feltétel miatt korlátos, legyen felső korlátja 2c.

A Fatou-lemma alapján

$$2c\geq\lim_{t\to 0}E\left(\frac{4\sin^2\left(\frac{tX}{2}\right)}{t^2}\right)\geq E\left(\lim_{t\to 0}\frac{\sin^2\left(\frac{tX}{2}\right)}{(t/2)^2}\right)=E(X^2).$$

Az általános eset igazolásához tegyük fel, hogy véges a $2n$-edik momentum, és a $(2n+1)$-edik derivált létezik, valamint a $(2n+2)$-edik deriválthoz tartozó differenciahányados korlátos.

Legyen

$$G(x)=\frac{\int_x^\infty t^{2n}\,dF(t)}{\int_{-\infty}^\infty t^{2n}\,dF(t)}$$

egy valószínűségi mérték, a hozzá tartozó karakterisztikus függvény pedig

$$E\left(X^{2n}\exp(itX)\right),\qquad E(X^{2n})=\frac{\varphi^{(2n)}(t)}{\varphi^{(2n)}(0)}.$$

Az előző lépést erre alkalmazva, és használva az integrálokra vonatkozó asszociativitási szabályt:

$$\infty>\int_{-\infty}^\infty x^2\,dG(x)=\frac{\int_{-\infty}^\infty x^2x^{2n}\,dF(x)}{\int_{-\infty}^\infty t^{2n}\,dF(t)},$$

vagyis a $(2n+2)$-edik momentum is véges.

Linnik-tétel: Ha X független normális és Poisson-eloszlású valószínűségi változók összege, azaz

$$X = X_{\text{norm}} + X_{\text{Poisson}},$$

ahol $X_{\text{norm}} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $X_{\text{Poisson}} \sim \text{Poisson}(\lambda)$, és ezek függetlenek egymástól,

és $X = X_1 + X_2$, ahol X_1 és X_2 függetlenek,

akkor X_1 és X_2 is független normális és Poisson-eloszlású valószínűségi változók összegei.

Más szavakkal: ha egy valószínűségi változó az $\mathcal{N}+$Poisson típusú eloszlások osztályába tartozik, akkor bármilyen független felbontása is ebbe az osztályba tartozik.

Bizonyítás: Jelölje X és Y a φ és ψ mögötti valószínűségi változókat. Első lépésként vegyük észre, hogy

$$\varphi(-t_k) = E[\exp(-it_kX)] = E\overline{[\exp(it_kX)]} = \overline{\varphi(t_k)} = \overline{\psi(t_k)} = \overline{E[\exp(it_kY)]} = \psi(t_k).$$

Hasonlóan látható, hogy amennyiben a megfelelő deriváltak léteznek és

$$\varphi^{(n)}(t_k) = \psi^{(n)}(t_k),$$

akkor

$$\varphi^{(n)}(t_k) = E[X^n \exp(it_kX)] = \psi^{(n)}(t_k) = E[Y^n \exp(it_kY)].$$

Így az alábbiakban a szimmetrikus differenciával való számolások során nem lépnek fel problémák.

A tétel feltétele, illetve a bizonyítás elején tett megjegyzés szerint, kihasználva, hogy $\varphi(0) = \psi(0) = 1$, az alábbi azonosság teljesül:

$$\Delta_h^2\varphi(0) = \frac{\varphi(h) + \varphi(-h) - 2\varphi(0)}{h^2} = \frac{\psi(h) + \psi(-h) - 2\psi(0)}{h^2} = \Delta_h^2\psi(0).$$

Mivel a ψ függvény végtelen sokszor deriválható, ezért a

$$\lim_{h\to 0} \Delta_h^2\psi(0)$$

határérték létezik, következésképpen

$$\sup_h \left|\Delta_h^2\psi(0)\right| \le c < \infty,$$

és ezért a $\Delta_h^2\varphi(0)$ kifejezés is korlátos.

Az x helyébe a X változót téve, és várható értéket véve $t = 0$ esetén:

$$\left|\Delta_{t_k}^2\varphi(0)\right| = \left(\frac{2}{t_k}\right)^2 E\left[\exp(ih0)\cdot\sin^2\left(\frac{Xt_k}{2}\right)\right] = \left(\frac{2}{t_k}\right)^2 E\left[\sin^2\left(\frac{Xt_k}{2}\right)\right] = E\left[\frac{\sin^2\left(\frac{Xt_k}{2}\right)}{\left(\frac{t_k}{2}\right)^2}\right].$$

Mivel $t_k \to 0$, ismételten a Fatou-lemma alapján:

$$c \leq E\left[\lim_{t_k \to 0} \frac{\sin^2\left(\frac{Xt_k}{2}\right)}{\left(\frac{t_k}{2}\right)^2}\right] = E\left[X^2\right].$$

Tegyük fel, hogy valamilyen n-re már igazoltuk, hogy ha $k \leq 2n$, akkor

$$\varphi^{(k)}(0) = \psi^{(k)}(0).$$

A jobb érthetőség kedvéért tegyük fel először, hogy a φ és ψ valós értékű karakterisztikus függvények.

A Taylor-polinomokat felírva, és kihasználva, hogy a deriváltak a nulla pontban azonosak, azaz

$$(\varphi - \psi)^{(k)}(0) = 0,$$

a Lagrange-féle maradéktag képlete szerint létezik alkalmas $0 < \tau_k < t_k$, hogy

$$0 = (\varphi - \psi)(t_k) = (\varphi - \psi)^{(2n)}(\tau_k) t_k^{2n},$$

amiből tehát alkalmas $\tau_k \to 0$ sorozatra

$$\varphi^{(2n)}(\tau_k) = \psi^{(2n)}(\tau_k).$$

Mivel

$$\varphi^{(2n)}(t) = E\left[X^{2n} \exp(itX)\right],$$

ezért a már bemutatott gondolatmenetet értelemszerűen módosítva:

$$\left|\Delta^2_{\tau_k} \varphi^{(2n)}(0)\right| = \left(\frac{2}{\tau_k}\right)^2 E\left[X^{2n} \sin^2\left(\frac{X\tau_k}{2}\right)\right].$$

Ugyancsak a már bemutatott gondolatmenetet értelemszerűen megismételve kapjuk az indukciós feltételt $n+1$ indexre.

A bizonyítás befejezését közvetlenül is kaphatjuk, ha a már belátott $n = 1$ esetet alkalmazzuk a következő eloszlásra:

$$G(x) := \frac{\int_x^\infty t^{2n}\, dF(t)}{\int_{-\infty}^\infty t^{2n}\, dF(t)},$$

amely egy valószínűségi mérték.

Ehhez tartozik a karakterisztikus függvény:

$$\frac{E\left[\xi^{2n} \exp(it\xi)\right]}{E[\xi^{2n}]} = \frac{\varphi^{(2n)}(t)}{\varphi^{(2n)}(0)},$$

illetve a hozzátartozó analitikus karakterisztikus függvény:

$$\frac{\psi^{(2n)}(t)}{\psi^{(2n)}(0)}.$$

A már belátott $n = 1$ esetre támaszkodva, és figyelembe véve egy $\tau_n \to 0$ sorozatot, a fenti karakterisztikus függvények alapján az analitikus függvényazonosság kiterjeszthető, így

$$\varphi^{(2n)}(t) = \psi^{(2n)}(t) \quad \text{minden } t \in \mathbb{R}.$$

Ezáltal a karakterisztikus függvények minden deriváltja megegyezik, tehát a függvények és az eloszlások is.

Az általános esetben, amikor a φ vagy a ψ karakterisztikus függvény komplex értékeket vesz fel, a Lagrange-maradéktag képlete nem érvényes a teljes karakterisztikus függvényre, csak külön-külön a valós és az imaginárius részre — adott esetben eltérő τ_k értékekkel.

Ilyenkor a gondolatmenetet elegendő a valós részre alkalmazni, vagyis a τ_k értékeket a valós részhez tartozó Taylor-polinom maradéktagjából számolhatjuk, ugyanis csak a szimmetrikus másodrendű differenciára van szükségünk, és az imaginárius tag ennek kiszámolásakor kiesik. A bizonyítás kulcsa a következő azonosság:

$$\left|\Delta^2_{\tau_k}\psi^{(2n)}(0)\right| = \left|\Delta^2_{\tau_k}\varphi^{(2n)}(0)\right| = \left|\frac{\varphi^{(2n)}(\tau_k) + \varphi^{(2n)}(-\tau_k) - 2\varphi^{(2n)}(0)}{\tau_k^2}\right|.$$

Felhasználva, hogy

$$\varphi^{(2n)}(0) = E[X^{2n}], \quad \text{és} \quad \varphi^{(2n)}(\pm\tau_k) = E[X^{2n}e^{\pm i\tau_k X}],$$

azaz

$$\varphi^{(2n)}(\tau_k) + \varphi^{(2n)}(-\tau_k) = 2\Re\varphi^{(2n)}(\tau_k),$$

ezért:

$$\left|\Delta^2_{\tau_k}\varphi^{(2n)}(0)\right| = \left|\frac{2\Re\varphi^{(2n)}(\tau_k) - 2E[X^{2n}]}{\tau_k^2}\right| = \left(\frac{2}{\tau_k}\right)^2 E\left[X^{2n}\sin^2\left(\frac{\tau_k X}{2}\right)\right].$$

Ez a kifejezés pontosan az, amelynek **korlátossága** kulcsszerepet játszik a teljes indukciós bizonyításban. És mivel ez csak a φ valós részétől függ, elegendő azt vizsgálni.

Darmois–Szkitovics-tétel.

Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független valószínűségi változók. Legyenek továbbá a_k és b_k nem nulla valós számok, és tekintsük az alábbi lineáris kombinációkat:

$$L_1 = \sum_{k=1}^{n} a_k X_k, \quad L_2 = \sum_{k=1}^{n} b_k X_k.$$

Tegyük fel, hogy L_1 és L_2 függetlenek. Ekkor minden olyan X_k, amelyre $a_k b_k \neq 0$, normális eloszlású.

Heurisztikus Bizonyítás: Ekkor a függetlenség miatt tudjuk, hogy ezek az L1, L2 többdimenziós valószínűségi változók függetlenségük miatt, vagyis ortogonalitásuk miatt, az L1+L2, és az L1-L2 is függetlenek. Ekkor a Bernstein-tétel miatt, tudjuk, hogy ezek összege normális. A Crámer-tételt alkalmazva, L1, és L2 is normális, L1, és L2 függetlensége miatt. A Crámer-tétel újbóli használata miatt az is fennáll, hogy ekkor az összes $a_k X_k$ normális, hiszen az X_k-k függetlensége implikálja, hogy egy skalárszorosaik is függetlenek. A stabil eloszlások lineárisan zártak, tehát X_k-k is normálisak.

Tétel: Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók. Tegyük fel, hogy az

$$X = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

számtani átlag eloszlása valamilyen n_1 és n_2 esetén megegyezik, azaz

$$\frac{X_1 + \cdots + X_{n_1}}{n_1} \stackrel{d}{=} \frac{X_1 + \cdots + X_{n_2}}{n_2},$$

és teljesül, hogy

$$\frac{\log n_1}{\log n_2} \notin \mathbb{Q},$$

akkor az X_i változók eloszlása Cauchy-eloszlású.

Speciálisan: Ha minden n-re teljesül, hogy

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \stackrel{d}{=} X_1,$$

akkor az X_i eloszlása Cauchy-eloszlás.

2 Sztochasztika

2.1 Bevezetés, definíciók, szabályok

Definíció: Filtráció Adott

$$\mathcal{F}_t = \sigma(X_s : s \leq t) = \sigma\left(\bigcup_{s \leq t} X^{-1}(s)(B) : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))\right)$$

Azaz azon események alkotta σ-algebra, amelyeket a t időpontig az X (s)(ω)valószínűségi változók a B Borel-halmazba rendeltek.

Legyen $X(t, \omega)$ kétváltozós valószínűségi változó. Ez egy sztocshasztikus folyamat.

Definíció Martingál:

1) $E(|X(t)|) < \infty$

2)$E(X(t)|\mathcal{F}_s) = X(s)$

3) Trajektóriák jobbról regulárisak.

Mérhetőségi struktúra, ami kell a sztochasztikus folyamatok vizsgálatához:

$$1)(\Omega, \mathcal{A}, P) \text{ közönséges valószínűségi mező.}$$

Technikai okokból a mező teljes, vagyis ha

$$B \subset A \in \mathcal{A} \text{ és } P(A) = 0, \text{ akkor } B \in \mathcal{A}$$

is teljesül. A számegyenesen a Borel-mérhető halmazok nem teljesek, de a Lebesgue-mérhetőek igen.

2)Adott egy $\mathcal{F}$-fel jelölt filtráció. A filtráció elemei maguk is σ-algebrák. Ha $s < t,$ akkor $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{A}$.

3)$\mathcal{F}_{t+} = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$, a filtráció jobbról folytonos, ha $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$ minden t időpontban.

4)$(\Omega, \mathcal{A}, P, \mathcal{F})$ teljesíti a szokásos feltételeket, ha $\mathcal{F}$ jobbról folytonos, és $\mathcal{F}_0$ tartalmazza az $\mathcal{A}$

összes nullmértékű halmazát.

A szokásos feltételek nélkül nincs élet a sztochasztikus folyamatok elméletében.

Definíció: Adaptált folyamat
Ha minden t-re az $X(t)$ mérhető az $\mathcal{F}_t$-re nézve, akkor adaptált folyamatról beszélünk. Ez a parciális mérhetőségnek felel meg, és túl enyhe megkötés.
Definíció: Ha minden t-re a folyamat leszűkítése a $[0, t]$-re mérhető az $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$ szorzatra, akkor progresszíven mérhető folyamatokról beszélünk.

Példa olyan folyamatra, ami adaptáltan mérhető, de progresszíven nem:
Legyen $\Theta = \Omega = [0, 1]$, a σ-algebra mind a két halmazon legyen $\mathcal{B}([0, 1])$. Az $\mathcal{F}$ filtráció minden t-re álljon a $[0, 1]$ egy pontból álló halmazai által generált σ-algebra halmazaiból. Legyen

$$X(t, \omega) = \begin{cases} 1 & \text{ha } t = \omega, \\ 0 & \text{ha } t \neq \omega. \end{cases}$$

Vagyis X legyen a

$$\Delta = \{(t, \omega) : t = \omega\} \subset [0, 1] \times [0, 1]$$

átló karakterisztikus függvénye.

Az $X(t)$ minden t időpontban triviálisan adaptált az $\mathcal{F}$ filtrációra nézve. Ugyanakkor az X például nem $\mathcal{B}(\Theta) \otimes \mathcal{F}_{1/2}$-mérhető, és ezért az X nem progresszíven mérhető.

Ha a folyamat szorzat-mérhető lenne, akkor a $[0,1/2] \times \Omega \cap \Delta$ halmaz is szorzat-mérhető halmaz lenne, és az Ω halmazra való vetületének, vagyis a $[0,1/2]$ halmaznak $\mathcal{F}$-mérhetőnek kellene lennie. De nem az, mivel maga az átló, egy adott t-re, csak egy omegához tartozik, így nem szorzatmérhető, mivel a [0, 1/2] halmazon mindig csak megszámlálható pontban értelmezett.

A $\{w(t,\omega)\}_{t\geq 0}$ folyamatot **Wiener-folyamatnak** mondjuk, ha teljesíti az alábbi négy feltételt:

1. $w(0) = 0$,
2. a w növekményei függetlenek,
3. tetszőleges $0 \leq s < t$ esetén a $w(t)-w(s) \sim \mathcal{N}(0, t-s)$, vagyis a $w(t)-w(s)$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye:

$$g_{ts}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left(-\frac{x^2}{2(t-s)}\right),$$

4. a w folytonos abban az értelemben, hogy minden ω kimenetelre a $w(\cdot,\omega)$ trajektória folytonos.

Legyen V jobbról reguláris és adaptált folyamat. Tegyük fel továbbá, hogy a V mindegyik trajektóriája véges változású, vagyis az összes $[0,t]$ kompakt időszakaszon az összes trajektória korlátos változású.

1. Ha minden ω kimenetelre az $X(\omega)$ trajektóriák a $V(\omega)$ mértékre nézve az összes véges időszakaszon integrálhatók, akkor az

$$Y(t,\omega) := \int_0^t X(s,\omega)\, V(ds,\omega)$$

parametrikus integrálok jobbról regulárisak. Speciálisan ez a tulajdonság teljesül, ha az X trajektóriái regulárisak.

2. Ha az X progresszíven mérhető, akkor az Y adaptált.

Legyen adva az Ω kimenetelek halmaza és az $\mathcal{F}$ filtráció. Legyen

$$\tau : \Omega \to \Theta \cup \{\infty\}.$$

1. A τ függvényt az $\mathcal{F}$ filtrációhoz tartozó megállási időnek vagy nevezzük, ha minden $t \in \Theta$ esetén
$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$
2. A $\tau : \Omega \to \Theta \cup \{\infty\}$ függvényt az $\mathcal{F}$ filtrációhoz tartozó gyenge megállási időnek vagy nevezzük, ha minden $t \in \Theta$ esetén
$$\{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Tétel. Minden megállási idő gyenge megállási idő. Ha az $\mathcal{F}$ filtráció jobbról folytonos, akkor minden gyenge megállási idő megállási idő.

Bizonyítás: Felhasználva, hogy minden filtráció monoton növő, az alábbi egyenlőség teljesül:

$$\{\tau < t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{\tau \leq t - \frac{1}{n}\right\} \in \mathcal{F}_t.$$

Megfordítva, ha $\mathcal{F}$ jobbról folytonos, azaz $\mathcal{F}_t^+ = \mathcal{F}_t$, akkor

$$\{\tau \leq t\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{\tau < t + \frac{1}{n}\right\} \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_{t+\frac{1}{n}} = \mathcal{F}_t^+ = \mathcal{F}_t.$$

Tétel. Ha τ és σ megállási idők, akkor $\tau \wedge \sigma$ és $\tau \vee \sigma$ is megállási idők. Ha (τ_n) megállási idők monoton növekvő sorozata, akkor a

$$\tau := \lim_{n\to\infty} \tau_n$$

szintén megállási idő. Ha az $\mathcal{F}$ filtráció jobbról folytonos és (τ_n) megállási idők monoton csökkenő sorozata, akkor

$$\tau := \lim_{n\to\infty} \tau_n$$

szintén megállási idő. Ha az $\mathcal{F}$ filtráció jobbról folytonos, és (τ_n) megállási időkből álló sorozat, akkor a

$$\limsup_n \tau_n \quad \text{és} \quad \liminf_n \tau_n$$

is megállási idők.

Bizonyításvázlat. Legyenek τ és σ megállási idők. Ekkor:

$$\{\tau \wedge \sigma \leq t\} = \{\tau \leq t\} \cup \{\sigma \leq t\} \in \mathcal{F}_t,$$

$$\{\tau \vee \sigma \leq t\} = \{\tau \leq t\} \cap \{\sigma \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Ha $\tau_n \nearrow \tau$, akkor
$$\{\tau \leq t\} = \bigcap_n \{\tau_n \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$
Ha $\tau_n \searrow \tau$, akkor
$$\{\tau \geq t\} = \bigcap_n \{\tau_n \geq t\} \in \mathcal{F}_t.$$
Ha az $\mathcal{F}$ filtráció jobbról folytonos, akkor τ megállási idő.

Ha $\Gamma \subseteq \mathbb{R}_+ \times \Omega$, akkor a
$$\tau_\Gamma(\omega) := \inf\{t : (t, \omega) \in \Gamma\}$$
kifejezést a Γ halmaz kezdőidejének nevezzük.

Ha $B \subset \mathbb{R}$ és X sztochasztikus folyamat, akkor a
$$\tau_B(\omega) := \inf\{t : X(t, \omega) \in B\}$$
esetenként a
$$\tau_B(\omega) := \inf\{t > 0 : X(t, \omega) \in B\}$$
változót a B halmaz elérési, vagy találati idejének fogjuk nevezni.

Ha $\tau(\omega) = \infty$, akkor ezt úgy interpretáljuk, hogy az ω kimenetelre az τ által leírt esemény nem következik be.

Vetítési tétel: Ha az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező teljes és $U \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{A}$, akkor
$$\operatorname{proj}_\Omega U := \{x \in \Omega : \exists t \text{ úgy, hogy } (t, x) \in U\} \in \mathcal{A}.$$

Érdemes hangsúlyozni, hogy az állítás érvényét veszti, ha az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mező nem teljes. Meg kell még jegyezni, hogy a tétel akkor sem teljesül, ha a $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{A}$ helyett egy bővebb σ-algebrát veszünk, ami egyúttal a Borel- és a szorzatmérhetőség fogalmak fontosságát is nyomatékosítja.

Ha az $(\Omega, \mathcal{A}, P, \mathcal{F})$ kielégíti a szokásos feltételeket és a Γ halmaz progresszíven mérhető, akkor a Γ kezdőideje megállási idő.

Speciálisan, ha B Borel-mérhető, akkor a
$$\tau_B(\omega) := \inf\{t : X(t, \omega) \in B\} \quad \text{illetve a} \quad \tau_B(\omega) := \inf\{t > 0 : X(t, \omega) \in B\}$$
találati idők megállási idők.

A tétel második részét az elsőből a

$$\Gamma := \{(t,\omega) : X(t,\omega) \in B\}, \quad \text{illetve a} \quad \Gamma := \{(t,\omega) : X(t,\omega) \in B\} \cap (\{t > 0\} \times \Omega)$$

halmazok esetén kapjuk.

Bizonyítás: Vegyük a $\Gamma_t := \Gamma \cap ([0,t) \times \Omega)$ halmazt. Az elérési idő definíciója alapján

$$\{\tau_\Gamma < t\} = \mathrm{proj}_\Omega(\Gamma_t),$$

ugyanis ha $\tau_\Gamma(\omega) < t$, akkor van olyan s, hogy $(s,\omega) \in \Gamma_t$, vagyis ω eleme a vetületnek. Megfordítva, ha ω eleme a vetületnek, akkor létezik olyan $s \in [0,t)$, amelyre $(s,\omega) \in \Gamma$, tehát $\tau_\Gamma(\omega) \leq s < t$.

Mivel Γ progresszíven mérhető, ezért $\Gamma_t \in \mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$.

Emlékeztetünk, hogy általában valamely szorzatmérhető halmaz vetülete nem lesz mérhető. Az $\mathcal{A}$ a feltétel szerint teljes, $\mathcal{F}_t$ pedig a szokásos feltételek teljesülése miatt tartalmazza a nulla halmazokat, ezért $\mathcal{F}_t$ is teljes.

Így a vetítési tétel alapján Γ_t szorzatmérhető halmaz vetülete $\mathcal{F}_t$-mérhető, vagyis

$$\{\tau_\Gamma < t\} = \mathrm{proj}_\Omega(\Gamma_t) \in \mathcal{F}_t.$$

Az $\mathcal{F}$ jobbról folytonos, ezért minden gyenge megállási idő megállási idő, vagyis τ_Γ megállási idő.

Összefoglalása Azaz τ_t-k a Γ_t, ω-szerinti vetülete az idő tengelyre, vagyis azok a gyenge megállási idők, amelyek ugye kisebbek t-nél. Ugye tudjuk, hogy ez a Γ_t progresszíven mérhető, vagyis eleme, a $\Gamma_t \in \mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$- nak. Mivel $\mathcal{A}$ teljes, és a $\mathcal{F}_t$ a sztochasztikus folyamatokra vonatkozó mérhetőségi struktúra teljesülését feltéve, a szokásos feltételek igazak, ezért $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_t$ tartalmazza az összes nullmértékű halmaz, vagyis $\mathcal{F}_t$ is teljes mértékelméleti értelemben, azaz a projekciója Lebesgue-mérhető. Továbbá szinén a szokásos feltételek miatt tudjuk, hogy $\mathcal{F}$ jobbról folytonos, vagyis τ_t is megállási idő.

Legyen X sztochasztikus folyamat, τ megállási idő.

1. **Megállított folyamat:**

   $$X^\tau(t,\omega) := X(\tau(\omega) \wedge t, \omega)$$

   Ez azt jelenti, hogy a folyamat a megállási idő után konstans marad. Sokan azt mondják, hogy csak $\tau(\omega) > 0$ nem teljesülése esetén 0 az értéke.

2. **Megállított változó:**

$$X^\tau(\omega) := X(\tau(\omega), \omega)$$

Azaz, ez a folyamat értéke a megállási időpillanatban. Gyakran $X(\tau)$ jelöléssel írjuk. Sokan be szokták szorozni ezt a $X(\tau(\omega), \omega)$-t $\chi_{\tau<\infty}$-vel.

3. **Megállított σ-algebra:**

$$\mathcal{F}_\tau := \{A \in \mathcal{A} : \forall t,\ A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}$$

Ez az összes olyan esemény halmaza, amelyek a megállás előtt megtörténtek.

Legyen $\mathcal{F}$ tetszőleges filtráció, τ és σ legyenek megállási idők.

1. A τ változó $\mathcal{F}_\tau$-mérhető.
2. Ha $\sigma \leq \tau$, akkor $\mathcal{F}_\sigma \subseteq \mathcal{F}_\tau$.
3. $\mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}$.

Bizonyítás:

1. Elég megmutatni, hogy minden a-ra a $\{\tau \leq a\}$ halmaz $\mathcal{F}_\tau$-mérhető. Ez a $\mathcal{F}_\tau$ definíciója szerint azt jelenti, hogy minden t-re
$$\{\tau \leq a\} \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$
Nyilvánvaló, hogy a bal oldalon álló metszet éppen $\{\tau \leq \min(a,t)\}$. Mivel τ megállási idő, ezért
$$\{\tau \leq \min(a,t)\} \in \mathcal{F}_{\min(a,t)} \subseteq \mathcal{F}_t,$$
ahol az utolsó tartalmazás az $\mathcal{F}$ monotonitásából következik.

2. Ha $\sigma \leq \tau$, akkor $\{\tau \leq t\} \subseteq \{\sigma \leq t\}$. Ha $A \in \mathcal{F}_\sigma$, akkor
$$A \cap \{\tau \leq t\} = (A \cap \{\sigma \leq t\}) \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t,$$
hiszen mindkét tényező eleme $\mathcal{F}_t$-nek, így $A \in \mathcal{F}_\tau$.

3. Az előző pont alapján $\mathcal{F}_{\tau\wedge\sigma} \subseteq \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\sigma$. Ugyanakkor, ha $F \in \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\sigma$, akkor
$$F\cap\{\tau\wedge\sigma \leq t\} = F\cap(\{\tau \leq t\}\cup\{\sigma \leq t\}) = (F\cap\{\tau \leq t\})\cup(F\cap\{\sigma \leq t\}) \in \mathcal{F}_t,$$
így $F \in \mathcal{F}_{\tau\wedge\sigma}$, azaz $\mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\sigma \subseteq \mathcal{F}_{\tau\wedge\sigma}$.

Tétel: Ha X progresszíven mérhető és τ tetszőleges megállási idő, akkor az X_τ megállított változó $\mathcal{F}_\tau$-mérhető, az X^τ megállított folyamat pedig progresszíven mérhető.

Bizonyítás: Az első állítás következik a másodikból, ugyanis ha B Borel-mérhető és X progresszíven mérhető, akkor minden s-re
$$\{X_\tau \in B\}\cap\{\tau \leq s\} = \{X(\tau\wedge s) \in B\}\cap\{\tau \leq s\} = \{X^\tau(s) \in B\}\cap\{\tau \leq s\} \in \mathcal{F}_s,$$
hiszen a metszet mindkét tagja $\mathcal{F}_s$-mérhető. Vagyis az X_τ megállított változó $\mathcal{F}_\tau$-mérhető.

Tekintsük tehát az állítás második felét. Legyen
$$Y(t,\omega) = \begin{cases} 1 & \text{ha } t < \tau(\omega), \\ 0 & \text{ha } t \geq \tau(\omega). \end{cases}$$

Az Y triviálisan jobbról reguláris. Mivel τ megállási idő, ezért

$$\{Y(t) = 0\} = \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Tehát Y adaptált, így Y progresszíven mérhető.

Ha $\tau(\omega) = 0$, akkor $Z(\omega) = 0$. Ha $\tau(\omega) > 0$, akkor

$$Z(t,\omega) = \int_{(0,t]} X(s,\omega) Y(ds,\omega) = \begin{cases} 0 & \text{ha } t < \tau(\omega), \\ X(\tau(\omega),\omega) & \text{ha } t \geq \tau(\omega). \end{cases}$$

Mivel X progresszíven mérhető, a Z folyamat adaptált és jobbról reguláris, tehát szintén progresszíven mérhető.

Elemi megfontolással

$$X^\tau = XY - Z + X(0) \cdot \chi_{\{\tau = 0\}},$$

így az X^τ triviálisan progresszíven mérhető.

2.2 Martingálelmélet

Definíció: Logikai martingál Egy X adaptált folyamat definíció szerint logikai martingál, ha az $X(t)$ minden t időpontra integrálható, és tetszőleges $s < t$ időpontok esetén teljesül az

$$E(X(t) \mid \mathcal{F}_s) \overset{\text{m.m.}}{=} X(s).$$

Kapcsolat logikai martingál, és martingál között: Folytonos időhorizonton egy logikai martingált csak akkor tekintünk martingálnak, ha a trajektóriái jobbról folytonosak.

Definíció: módosítás erejéig egybeeső folyamatok: Az X és Y folyamatok módosítás erejéig egybeesnek, ha minden t-re

$$X(t) \overset{\text{m.m.}}{=} Y(t),$$

vagyis ami ugyanaz: minden t-re az $X(t)$ és az $Y(t)$ ugyanazt a valószínűségi változót reprezentálja.

Előrejelzhető σ-algebra: amennyiben balról folytonos függvények vannak benne.

Nem előrejelezhető, amennyiben jobbról folytonos.

Ugye az itt a logika, hogy egy intervallumon az összes adott pontot meg tudod adni az előzőkből

Tétel. Ha teljesülnek a szokásos feltételek, akkor minden logikai martingálhoz van olyan martingál, amelynek értékei minden t időpontban majdnem mindenhol megegyeznek a logikai martingál értékeivel. Ezt úgy is szokás kifejezni, hogy a szokásos feltételek teljesülése esetén a logikai martingálok regularizálhatók.

Definíció Az X sztochasztikus folyamat

1.: **független növekményű**, ha minden $0 \leq t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ időpont sorozatra az

$$X(t_1) - X(t_0),\ X(t_2) - X(t_1),\ \ldots,\ X(t_n) - X(t_{n-1})$$

növekmények függetlenek;

2.:**stacionárius növekményű**, ha $t > s$ esetén az $X(t) - X(s)$ eloszlása megegyezik az $X(t-s) - X(0)$ eloszlásával, (Azaz, csak a időhossztól függ az időnövekmény, a folyamat időpontjától nem.)

3.:Ha a folyamathoz rendelt $\mathcal{F}$ filtráció adott, akkor a **folyamatot független növekményűnek** mondjuk, ha minden t-re és $h > 0$ számra az $X(t+h) - X(t)$ növekmény független az $\mathcal{F}_t$ -algebrától, (Azaz, amennyiben már van egy filtráció, akkor a növekmény attól független. Értelemszerűen amennyiben ilyen filtráció szerint független, akkor nincs értelme az 1. pontot értelmezni, mivel itt nem a valószínűségi változók közötti növekményeket nézzük)

Példa Ha teljesülnek a szokásos feltételek, és X független növekményű folyamat, valamint minden időpontban létezik a folyamat várható értéke, akkor az

$$Y(t) := X(t) - E(X(t))$$

kompenzált folyamat martingál.

Ha $t > s$, akkor

$$E(Y(t) \mid \mathcal{F}_s) \overset{\text{Robin H}}{=} E(Y(t) - Y(s) + Y(s) \mid \mathcal{F}_s) \overset{\text{m.m. (független növ)}}{=}$$

$$E(Y(t) - Y(s) \mid \mathcal{F}_s) + E(Y(s) \mid \mathcal{F}_s)$$

$$\overset{\text{m.m.}}{=} E(Y(t) - Y(s)) + Y(s) = Y(s)$$

A szokásos feltételek miatt az Y regularizálható. Minden független növekményű folyamat jobbról reguláris, ezért az $E(X(t))$ függvény szükségszerűen jobbról reguláris, így az Y folyamat is jobbról reguláris.

Exponenciális martingál

Legyen X Lévy-folyamat. Tetszőleges t-re definiálhatjuk a

$$\varphi_t(u) := \varphi(u,t) := E(\exp(iuX(t)))$$

Fourier-transzformáltakból álló folyamatot. Mivel a Lévy-folyamatok definíció szerint jobbról regulárisak, a majorált konvergencia tétele miatt a $\varphi_t(u)$ minden u-ra jobbról reguláris.

A független és a stacionárius növekmény feltételét kihasználva:

$$\varphi_{t+s}(u) = E(\exp(iuX(t+s))) = E(\exp(iu(X(t+s) - X(t))) \cdot \exp(iuX(t)))$$

$$= E(\exp(iu(X(t+s) - X(t)))) \cdot E(\exp(iuX(t))) = E(\exp(iuX(s))) \cdot E(\exp(iuX(t))) = \varphi_s(u) \cdot \varphi_t(u)$$

Ez azt mutatja, hogy $\varphi_t(u)$ multiplikatív t-re nézve.

A jobbról folytonosság és a stacionaritás érdekes következménye, hogy

$$E\left(\exp\left(iu(X(t) - X(t-))\right)\right) = E\left(\lim_{h\to 0} \exp\left(iu(X(t) - X(t-h))\right)\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} E\left(\exp\left(iu(X(t) - X(t-h))\right)\right) = \lim_{h\to 0} \varphi_h(u) = \varphi_0(u) = 1.$$

A Fourier-transzformáció egyértelműen jellemzi az eloszlást, következésképpen

$$X(-t) \overset{\text{m.m.}}{=} X(t).$$

Másképpen fogalmazva: Lévy-folyamatok esetén tetszőleges t-re az ugrás valószínűsége nulla.

$$|\varphi_{t+s}(u)| = |\varphi_t(u) \cdot \varphi_s(u)|.$$

Mivel $|\varphi_t(u)| \leq 1$ és $|\varphi_0(u)| = 1$, a Cauchy-féle függvényegyenletből $|\varphi_t(u)| = \exp(t \cdot c(u))$. Ebből következően a $\varphi_t(u)$ soha sem lehet nulla.

Ha $t > 0$ és $h > 0$, akkor a jobbról való folytonosság miatt

$$\begin{aligned} |\varphi_t(u) - \varphi_{t-h}(u)| &= \left|\varphi_{t-h}(u)\left(\frac{\varphi_{t-h+h}(u)}{\varphi_{t-h}(u)} - 1\right)\right| \\ &= |\varphi_{t-h}(u)| \cdot |\varphi_h(u) - 1| \\ &\leq |\varphi_h(u) - 1| \to 0, \end{aligned}$$

ha $h \searrow 0$. Következésképpen a $\varphi_t(u)$ balról is folytonos. Tehát a $\varphi_t(u)$ minden u-ra a t időváltozóban folytonos.

Definíció Egy X Lévy-folyamat exponenciális martingálja

$$Z(t,u,\omega) = \frac{\exp\left(iuX(t,\omega)\right)}{\varphi_t(u)}.$$

Egy X Lévy-folyamat exponenciális martingálján szokás az

$$Z(t,s,\omega) = \frac{\exp\left(-sX(t,\omega)\right)}{L_t(s)}$$

kifejezést is érteni.

Ez nagyon-nagyon hasonlít a kivonáshoz, de itt a várható értékkel **osztani** kell (azaz a karakterisztikus függvénnyel, vagy a laplace- transzformálttal. Ezek ugye mind várható értékek.

Például **Wiener-folyamat exponenciális martingálja**

$$\begin{aligned}\varphi_t(u) &= E\left(\exp\left(iu\left(N\left(0,\sqrt{t}\right)\right)\right)\right)\\ &= E\left(\exp\left(iu\sqrt{t}\,(N(0,1))\right)\right) = \exp\left(-\frac{(u\sqrt{t})^2}{2}\right)\\ &= \exp\left(-t\frac{u^2}{2}\right).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Z(t,u) &= \frac{\exp\left(iu\left(N\left(0,\sqrt{t}\right)\right)\right)}{\exp\left(-t\frac{u^2}{2}\right)}\\ &= \exp\left(iuW(t)+t\frac{u^2}{2}\right)\end{aligned}$$

(itt a W(t) a Wiener folyamat) Ha a Fourier-transzformált helyett a Laplace-transzformáltat vesszük, akkor

$$Z(t,s) = \exp\left(-sW(t)-t\frac{s^2}{2}\right).$$

Ha X **tetszőleges Lévy-folyamat**, akkor az X-hez tartozó **exponenciális martingál valóban martingál**.

$$E(Z(t,u)\mid \mathcal{F}_s) = E\left(\frac{\exp\left(iu\left(X(t,\omega)-X(s,\omega)\right)\right)\exp(iuX(s,\omega))}{\varphi_{t-s}(u)\varphi_s(u)}\;\middle|\;\mathcal{F}_s\right)$$

$$= \frac{\exp(iuX(s,\omega))}{\varphi_s(u)} E\left(\frac{\exp\left(iu\left(X(t,\omega) - X(s,\omega)\right)\right)}{\varphi_{t-s}(u)} \;\middle|\; \mathcal{F}_s \right)$$

$$= \frac{\exp(iuX(s,\omega))}{\varphi_s(u)} E\left(\frac{\exp\left(iu\left(X(t,\omega) - X(s,\omega)\right)\right)}{\varphi_{t-s}(u)} \;\middle|\; \mathcal{F}_s \right) = \frac{\exp(iuX(s,\omega))}{\varphi_s(u)} \cdot 1.$$

Ugye a szokásos feltételeket azért kell hangsúlyozni, mert Ekkor feltehető, hogy $E(E(X(t+h) - X(t))X(t))|\mathcal{F}_t) = E(X(t)E(X(t+h) - X(t))|\mathcal{F}_t)$,vagyis X(t) kiemelhető, és E(X(t+h)-X(t) $|\mathcal{F}_t) = 0$, azaz az egész is 0.

Ha ξ tetszőleges integrálható változó, és $(\mathcal{F}_\alpha)$ tetszőleges σ-algebrákból álló halmaz, akkor az

$$\eta_\alpha = E(\xi \mid \mathcal{F}_\alpha)$$

család egyenletesen integrálható.

Speciálisan, ha X egy olyan martingál, amelyre $X(t) = E(X(\infty) \mid \mathcal{F}_t)$, akkor az X egyenletesen integrálható martingál.

Doob - féle megálássi opciókról szóló tétel. Legyen $(X, \mathcal{F})$ martingál, és legyenek $\tau_1 \leq \tau_2$ megállási idők. Ha a τ_1, τ_2 megállási idők korlátosak, vagyis ha van olyan c konstans, hogy $\tau_1 \leq \tau_2 \leq c$, akkor

$$X(\tau_1) \overset{m.m.}{=} E(X(\tau_2) \mid \mathcal{F}_{\tau_1}).$$

Egyenletes integrálhatóság Egy (X, A, μ) téren értelmezett mérhető függvényekből álló valamely $(f_\alpha)_\alpha$ függvényhalmazt egyenletesen integrálhatónak mondunk, ha

$$\lim_{N\to\infty} \sup_\alpha \int_{|f_\alpha| \geq N} |f_\alpha| \, d\mu = 0.$$

Egy X martingált egyenletesen integrálható martingálnak mondunk, ha az X értékeiből álló halmaz, vagyis az $(X_t)_t$ halmaz egyenletesen integrálható.

Világos, hogy ha f egy integrálható függvény, akkor a majorált konvergencia tétel miatt

$$\lim_{N\to 0} \int_{|f| \geq N} |f| \, d\mu = 0.$$

Így minden véges számú integrálható függvényből álló halmaz egyenletesen integrálható.

Legyen X egy martingál az $\mathbb{R}_+$ félegyenesen.

1.: Ha az X korlátos az $L^1(\Omega)$ térben, akkor van olyan $X(\infty) \in L^1(\Omega)$, hogy majdnem minden kimenetelre $\lim_{t\to\infty} X(t) = X(\infty)$.

2.: Ha az X ezen kívül még egyenletesen is integrálható, akkor a konvergencia $L^1(\Omega)$-ban is érvényes.

Vigyázat, az egyenletes integrálhatóság implikálja az $L^1(\Omega)$ korlátosságot, de nem fordítva. Csak $\infty > p > 1$ esetén ekvivalens a kettő.

Erre jó szemléletetés hogy az L^1 tér duálisa az L^∞, de fordítva nem, ebből az okból L^1-ben meg kell követelni az egyenletes integrálhatóságot.

Példa, amikor nem teljesül az egyenletes integrálhatóság nélkül: $X_n(\omega) = \chi_{[0,1/n]}(\omega) \cdot n$

Tétel: Az $\mathbb{R}_+$ félegyenesen értelmezett X martingál pontosan akkor egyenletesen integrálható, ha martingálként kiterjeszthető a $[0,\infty]$-re, vagyis ha létezik olyan $X(\infty) \in L^1(\Omega)$, amelyre

$$X(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} X(\infty) \quad \text{majdnem mindenhol és } L^1(\Omega)\text{-ban is.}$$

A feltételes várható érték $L^1(\Omega)$-ban folytonos, ezért az alábbi egyenlőség érvényes:

$$X(t) = \lim_{N\to\infty} E\left(X(N) \mid \mathcal{F}_t\right) = E\left(\lim_{N\to\infty} X(N) \mid \mathcal{F}_t\right) = E\left(X(\infty) \mid \mathcal{F}_t\right).$$

Ezért az $X(t) = E(X(\infty) \mid \mathcal{F}_t)$ alakból következik, hogy X egyenletesen integrálható martingál.

Egyenletesen integrálható martingál esetén az $X(\infty)$ értelmes, így az $X(\tau)$ is értelmes minden τ megállási idő esetén.

Megállási opciókról szóló tétel Legyen $(X, \mathcal{F})$ egy egyenletesen integrálható martingál, és legyenek $\tau_1 \le \tau_2$ tetszőleges megállási idők. Ekkor:

$$X(\tau_1) \overset{m.m.}{=} E(X(\tau_2) \mid \mathcal{F}_{\tau_1}).$$

Tétel: Egy X jobbról reguláris és adaptált folyamat pontosan akkor martingál, ha minden τ korlátos megállási időre $X(\tau) \in L^1(\Omega)$ és

$$E(X(\tau)) = E(X(0)).$$

Az egyenlőség pontosan akkor igaz minden megállási időre, ha az X egyenletesen integrálható martingál.

Ha az X martingál, illetve egyenletesen integrálható martingál, akkor a megállási opciókról szóló tétel miatt az állítás teljesül.

Példa:A martingálok jobbról való folytonossága lényeges!!!!

Legyen P egy λ paraméterű Poisson-folyamat, és legyen

$$\pi(t) = P(t) - \lambda t$$

az úgynevezett kompenzált Poisson-folyamat. Miként láttuk, a π martingál.

Ha a folyamatot nem jobbról, hanem balról tesszük folytonossá, és a $\tau > 0$ a folyamat első ugrásának az időpontja, és $N > 0$, akkor a

$$T = \tau \wedge N$$

egy korlátos megállási idő. De:

$$E(\pi(0)) = 0 < E(-\lambda T) \overset{P(t) \text{ balról folyt}}{=} E(P_T - \lambda T) = E(\pi_T).$$

Példa: Ha $a < 0 < b$ és w egy Wiener-folyamat, akkor a w folyamat τ_a és τ_b találati idejére:

$$P(\tau_a < \tau_b) = \frac{b}{b-a}, \qquad P(\tau_b < \tau_a) = \frac{-a}{b-a}.$$

A Wiener-folyamat trajektóriái 1 valószínűséggel nem korlátosak, tehát majdnem minden az origóból kiinduló trajektória valamelyik oldalon kilép az $[a, b]$ szakaszból, tehát:

$$P(\tau_a < \tau_b) + P(\tau_b < \tau_a) = 1.$$

Ha $\tau = \min(\tau_a, \tau_b)$, akkor a w^τ korlátos martingál, ugyanis $a \le w^\tau \le b$. Minden korlátos martingál triviálisan egyenletesen integrálható, így alkalmazhatjuk a megállási opciókról szóló tételt.

A w^τ vagy a, vagy b, ennek megfelelően:

$$E(w^\tau) = a \cdot P(\tau_a < \tau_b) + b \cdot P(\tau_b < \tau_a) = E(w^\tau(0)) = 0.$$

Két egyenletünk van két ismeretlennel, amit megoldva éppen a keresett összefüggéseket kapjuk.

Tétel: Ha a $[0,1]$ intervallumon értelmezett X sztochasztikus folyamat

1. stacionárius,
2. a különböző időpontokhoz tartozó valószínűségi változók függetlenek,
3. $E(X(t)) = 0$ és $0 < D(X(t)) < \infty$,

akkor az $X(t, \omega)$ kétváltozós függvény nem lehet mérhető.

Bizonyítás: A fubini-tétellel próbáljuk bizonyítani indirekt az állítást.

Tegyük fel, hogy $E(X(t)) = 0$, $D(X(t)) = 1$, és az X mint kétváltozós függvény mérhető. A Cauchy-egyenlőtlenség alapján:

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_\Omega |X(t,\omega)X(s,\omega)|\, dP(\omega)\, ds\, dt \le \int_0^1 \int_0^1 D(X(t)) \cdot D(X(s))\, ds\, dt = 1,$$

így a mérhetőségre tett feltétel miatt használható a Fubini-tétel.

$$E\left(\left(\int_0^1 X(t,\omega)\, dt\right)^2\right) = E\left(\int_0^1 X(t,\omega)\, dt \int_0^1 X(s,\omega)\, ds\right) = E\left(\int_0^1 \int_0^1 X(t,\omega)X(s,\omega)\, ds\, dt\right)$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 E\left(X(t,\omega)X(s,\omega)\right) ds\, dt = 0,$$

ugyanis a függetlenség miatt, ha $s \neq t$, akkor

$$E(X(t)X(s)) = E(X(t)) \cdot E(X(s)) = 0.$$

Ezért az

$$\int_0^1 X(t,\omega)\, dt$$

változó majdnem minden ω-ra nulla gondolatmenetet a $[0,1]$ helyett tetszőleges I racionális végpontú intervallumra megismételve megmutatható, hogy létezik olyan N_1 nullmértékű halmaz, hogy ha $\omega \notin N_1$, akkor minden I racionális intervallumra

$$\int_I X(t,\omega)\,dt = 0.$$

A Fubini-tétel alapján:

$$E\left(\int_0^1 X^2\,d\lambda\right) = \int_0^1 E(X^2)\,d\lambda = \int_0^1 D^2(X)\,d\lambda = 1,$$

ezért egy nullmértékű N_2 halmazon kívül minden ω-ra:

$$\int_0^1 X(t,\omega)^2\,dt < \infty.$$

Mivel véges mértékű halmazokon a négyzetes integrálhatóságból következik az integrálhatóság, ezért az $X(t,\omega)$ t szerint integrálható.

Következésképpen az $F(s) = \int_0^s X(t,\omega)\,dt$ integrálfüggvény folytonos.

Így ha az F a racionális végpontú intervallumokon nulla, akkor az F azonosan nulla.

Balról zárt jobbról nyílt intervallumok metszetzártak , így a Dynikin-tétel miatt az egész Borel σ-algebrán nullmértékű azaz a

$$\nu(B) = \int_B X(t,\omega)\,dt$$

mérték is nulla. Így ha $\omega \notin N_1 \cup N_2$, akkor majdnem minden t-re $X(t,\omega) = 0$, következésképpen:

$$0 = E\left(\int_0^1 X^2(t)\,dt\right) = \int_0^1 E(X^2(t))\,dt = \int_0^1 D^2(X(t))\,dt = 1,$$

ami lehetetlen.

2.3 A Lévy-folyamatokról

A X folyamat **Lévy-folyamat**, ha

1. $X(0) = 0$,
2. az X független és stacionárius növekményű, és
3. a trajektóriák jobbról regulárisak, vagyis jobbról folytonosak, és minden időpontban van bal oldali határértékük.

Tétel: Erős Markov tulajdonság Ha $\tau < \infty$ egy tetszőleges megállási idő, X egy tetszőleges Lévy-folyamat, akkor az

$$X^*(t,\omega) = X(\tau(\omega)+t,\omega) - X(\tau(\omega),\omega), \quad t \geq 0,$$

újraindított folyamat eloszlásban megegyezik az X-szel, és az X^* Lévy-folyamat az $\mathcal{F}_t^* = \mathcal{F}_{\tau+t}$ filtrációra nézve.

Speciálisan a

$$\{X^*(t) : t \geq 0\}$$

halmaz független az $\mathcal{F}_\tau$ megállított -algebrától.

Legyen

$$Z(t,u,\omega) = \frac{\exp(iuX(t,\omega))}{E(\exp(iuX(t,\omega)))} = \frac{\exp(iuX(t,\omega))}{\varphi(t,u)}.$$

A megállási opciókról szóló tétel miatt:

$$E(Z_{\tau+t} \mid \mathcal{F}_\tau) = Z_\tau.$$

Amiből a kiemelési szabály miatt:

$$E\left(\frac{Z_{\tau+t}}{Z_\tau} \,\middle|\, \mathcal{F}_\tau\right) = 1.$$

A τ nem feltétlenül korlátos, a Z nem egyenletesen integrálható, de mégis egyszerűen kicselezhető. Vegyük a $\tau_n = \tau \wedge n$ megállási időt. Ez korlátos, így alkalmazható rá a tétel. Legyen $A \in \mathcal{F}_\tau$. Megmutatjuk, hogy

$$A_n = A \cap \{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_{\tau_n}.$$

Valóban:

$$A_n \cap \{\tau_n \leq t\} = A \cap \{\tau \leq n\} \cap \{\tau \wedge n \leq t\} = A \cap \{\tau \leq t \wedge n\} \in \mathcal{F}_t.$$

A feltételes várható érték definíciója alapján:

$$\int_{A_n} \frac{Z(\tau_n + t)}{Z(\tau_n)}\, dP = \int_{A \cap \{\tau \leq n\}} \frac{Z(\tau \wedge n + t)}{Z(\tau \wedge n)}\, dP = P(A_n) = P(A \cap \{\tau \leq n\}).$$

Átrendezve

$$\int_{A \cap \{\tau \leq n\}} \frac{\exp(iu(X(\tau \wedge n + t) - X(\tau \wedge n)))}{\varphi(\tau \wedge n + t)\varphi(\tau \wedge n)^{-1}}\, dP = P(A \cap \{\tau \leq n\}),$$

$$\int_{A \cap \{\tau \leq n\}} \frac{\exp(iu(X(\tau \wedge n + t) - X(\tau \wedge n)))}{\varphi(t)}\, dP = P(A \cap \{\tau \leq n\}),$$

$$\int_{A\cap\{\tau\le n\}} \exp(iu(X(\tau\wedge n+t)-X(\tau\wedge n)))\,dP = \varphi(t)\cdot P(A\cap\{\tau\le n\}).$$

Most már alkalmazhatjuk a domináns konvergencia tételt:

$$\int_A \exp(iu(X(\tau+t)-X(\tau)))\,dP = \varphi(t)\cdot P(A).$$

Ezt ismét átrendezve:

$$\int_A \frac{Z_{\tau+t}}{Z_\tau}\,dP = P(A), \quad A\in\mathcal{F}_\tau,$$

vagyis:

$$E\left(\frac{Z_{\tau+t}}{Z_\tau}\middle|\,\mathcal{F}_\tau\right)=1.$$

Ugyanakkor a Fourier-transzformáció exponenciális" tulajdonsága miatt:

$$\frac{\varphi_{\tau(\omega)}(u)}{\varphi_{\tau(\omega)+t}(u)} = \frac{1}{\varphi_t(u)}.$$

Ezek alapján, ha $A\in\mathcal{F}_\tau$, akkor a feltételes várható érték definíciója szerint:

$$\int_A \exp(iuX^*(t))\,dP = \varphi_t(u)\int_A \frac{Z_{\tau+t}}{Z_\tau}\,dP = P(A)\cdot\varphi_t(u).$$

Ha $A=\Omega$, akkor ebből következik, hogy $X^*(t)$ és $X(t)$ **Fourier-transzformáltja azonos, így eloszlásuk is azonos**.

Legyen $\mathcal{L}$ az olyan korlátos függvények halmaza, melyekre:

$$\int_A f(X^*(t))\,dP = P(A)\int_\Omega f(X(t))\,dP = P(A)\int_\Omega f(X^*(t))\,dP,$$

ahol $A\in\mathcal{F}_\tau$.

Nyilvánvaló, hogy $\mathcal{L}$ egy λ-rendszer, és tartalmazza a trigonometrikus polinomokat, például az $x\mapsto\exp(iux)$ alakú függvényeket ($u\in\mathbb{R}$), melyek egy π-rendszert alkotnak. (Nagyon nem szeretem ezt a megfogalmazást)

A monoton osztály tétel alapján $\mathcal{L}$ tartalmazza a χ_B függvényeket is, ahol $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Tehát:

$$P(A\cap\{X^*(t)\in B\}) = P(A)\cdot P(\{X^*(t)\in B\}),$$

vagyis $X^*(t)$ **független** A**-tól**, **tehát** $\mathcal{F}_\tau$**-tól is.**

Stacionárius és független növekmény Meg kell mutatnunk, hogy X^* stacionáriusan és független növekményű.

Vegyük:

$$X^*(t+h) - X^*(t) = X(\tau + t + h) - X(\tau + t).$$

Mivel $\tau + t$ is megállási idő, a tétel alapján:

$$X(h) \cong X(\tau + t + h) - X(\tau + t),$$

tehát X^* stacionárius növekményű, és független az $\mathcal{F}_{\tau+t}$ σ-algebrától, azaz az $\mathcal{F}_t^*$-tól. Ezért X^* független növekményű.

Tétel: Egy Lévy folyamatnak, aminek korlátosak az ugrásai, annak minedn momentuma véges. Ha az X Lévy-folyamat ugrásai kisebbek, mint egy $c > 0$, vagyis $|\Delta X| \leq c$, akkor tetszőleges $[0, t]$ szakaszon az X momentumai egyenletesen korlátosak, vagyis tetszőleges m esetén létezik $K(m, t)$ konstans, hogy

$$E(|X^m(s)|) \leq K(m, t), \quad s \in [0, t].$$

Bizonyítás: Rögzítsük a $[0, T]$ szakaszt, amin a folyamatot vizsgáljuk. Legyen

$$\tau_1 = \inf\{t : |X(t)| > c\} \wedge T.$$

(vagyis kell, hogy τ_1 véges legyen A τ_1 biztosan véges. Ezt követően definiáljuk a

$$\begin{aligned}\tau_2 &= \inf\{t : |X^*(t)| > c\} \wedge T + \tau_1 \\ &= \inf\{t : |X(t + \tau_1) - X(\tau_1)| > c\} + \tau_1,\end{aligned}$$

megállási időket, stb.

Az erős Markov-tulajdonság alapján $\{X^*(t) : t \geq 0\}$ független az $\mathcal{F}_{\tau_1}$ σ-algebrától.

A

$$\tau_2 - \tau_1 = \inf\{t \geq 0 : |X^*(t)| > c\} \wedge T$$

mérhető az $\{X^*(t) : T \geq t \geq 0\}$ által generált σ-algebrára nézve, ezért $\tau_2 - \tau_1$ független az $\mathcal{F}_{\tau_1}$ σ-algebrától. Általában a $\tau_n - \tau_{n-1}$ független az $\mathcal{F}_{\tau_{n-1}}$-től.

Ugyancsak az erős Markov-tulajdonság miatt a $\tau_n - \tau_{n-1}$ eloszlása megegyezik a τ_1 eloszlásával. Ha $\tau_0 = 0$, a $(\tau_k - \tau_{k-1})$ változók függetlenségét kihasználva

$$E(\exp(-\tau_n)) = E\left(\exp\left(-\sum_{k=1}^{n}(\tau_k - \tau_{k-1})\right)\right) = (E(\exp(-\tau_1)))^n = q^n,$$

ahol $0 < q \leq 1$. Ha $q = 1$, akkor egy valószínűséggel $\tau_1 = 0$, ami alapján a jobbról való folytonosság miatt $|X(0)| \geq c > 0$, ami ellentmond a Lévy-tulajdonságnak, mivel X(0) = 0. Így $q < 1$.

Mivel az ugrások kisebbek mint c

$$|X(\tau_1)| \leq |X(\tau_1-)| + |\Delta X(\tau_1)| \leq |X(\tau_1-)| + c \leq 2c.$$

Illetve általában

$$\sup_t |X^{\tau_n}(t)| = \sup \{|X(t)| : t \in [0, \tau_n]\} \leq 2nc.$$

A Markov-egyenlőtlenség szerint

$$P(|X(t)| > 2nc) \leq P(\tau_n < t) = P(\exp(-\tau_n) > \exp(-t)) \leq \frac{E(\exp(-\tau_n))}{\exp(-t)} \leq \exp(t) \cdot q^n.$$

Mivel $q < 1$

$$L(m) = \sum_{n=0}^{\infty} [2(n+1)c]^m \cdot q^n < \infty,$$

így

$$\begin{aligned} E(|X(t)|^m) &\leq \sum_{n=0}^{\infty} [2(n+1)c]^m \cdot P(|X(t)| > 2nc) \\ &\leq \exp(t) \sum_{n=0}^{\infty} [2(n+1)c]^m q^n = \exp(t) \cdot L(m) \overset{legyen}{=} K(t, m) \end{aligned}$$

Következtmény: Minden X folytonos Lévy-folyamat összes momentuma véges. Speciálisan létezik M várható értéke, így az

$$Y(t) = X(t) - t \cdot M$$

folyamat martingál.

2.4 Sztochasztikus analízis

Legyen X sztochasztikus folyamat, és minden

$$a = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \cdots < t_{m_n}^{(n)} = b$$

felosztáshoz rendeljük hozzá az

$$I_n = \sum_k X\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\left(Y\left(t_k^{(n)}\right) - Y\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\right)$$

Itô–Stieltjes közelítő összeget.

Ha létezik olyan ζ valószínűségi változó, hogy minden olyan felosztásra, amelyre

$$\lim_{n\to\infty} \max_k \left(t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}\right) = 0,$$

a közelítő összegek sorozata sztochasztikus konvergenciában

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \zeta,$$

akkor ezt a közös ζ határértéket az X folyamat Y szerinti Itô–Stieltjes-integráljának mondjuk, és

$$\int_a^b X\,dY$$

módon jelöljük.

Lemma (Martingáltranszformáció):

Legyen M az $\mathcal{F}$ filtrációra nézve diszkrét idejű martingál, X pedig az $\mathcal{F}$-re nézve adaptált folyamat. Ha az

$$X_{k-1} \cdot (M_k - M_{k-1})$$

kifejezések integrálhatók, akkor a

$$Z_0 = 0, \qquad Z_n = \sum_{k=1}^{n} X_{k-1} \cdot (M_k - M_{k-1})$$

sorozat nulla várható értékkel rendelkező martingál.

Speciálisan, ha X egyenletesen korlátos és M tetszőleges martingál, akkor a Z is martingál.

Bizonyítás: Kihasználva, hogy a feltétel szerint az $X_{k-1} \cdot (M_k - M_{k-1})$ integrálható, a kiemelési szabály és a teljes várható érték tétele szerint, ha $k-1 \geq m$ tetszőleges n-re:

$$\begin{aligned} E\left(X_{k-1} \cdot \chi_{\{|X_{k-1}|\leq n\}} \cdot (M_k - M_{k-1}) \mid \mathcal{F}_m\right) &\overset{Torony}{=} E\left(E\left(X_{k-1} \cdot \chi_{\{|X_{k-1}|\leq n\}} \cdot (M_k - M_{k-1}) \mid \mathcal{F}_{k-1}\right) \mid \mathcal{F}_m\right) \\ &\overset{Kiemelés}{=} E\left(X_{k-1} \cdot \chi_{\{|X_{k-1}|\leq n\}} \cdot E\left((M_k - M_{k-1}) \mid \mathcal{F}_{k-1}\right) \mid \mathcal{F}_m\right) \\ &= E\left(X_{k-1} \cdot \chi_{\{|X_{k-1}|\leq n\}} \cdot 0 \mid \mathcal{F}_m\right) = 0. \end{aligned}$$

Mivel a feltétel szerint használhatjuk a majorált konvergencia tételét, így:

$$E\left(X_{k-1} \cdot (M_k - M_{k-1}) \mid \mathcal{F}_m\right) = 0,$$

amiből a lemma igazolása már evidens.

Definíció: Ha az $M \in \mathcal{H}^2$ azt jelenti, hogy az M olyan martingál, amelyre az $\|M(t)\|_2$, azaz az $L^2(\Omega)$-norma a t időparaméter szerint korlátos. Vagyis a szórásai korlátosak.

Példa: Ha w Wiener-folyamat, akkor minden véges szakaszon w eleme a $\mathcal{H}^2$-térnek, de a teljes időtengelyen $w \notin \mathcal{H}^2$.

Ha $p > 1$, akkor az $L^p(\Omega)$ térben korlátos halmazok egyenletesen integrálhatók. Ebből következően a $\mathcal{H}^2$-martingálok az egyenletesen integrálható martingálok egy speciális részhalmazát alkotják.

Tétel: Itô–Stieltjes-integrálhatóság: Ha az X adaptált sztochasztikus folyamat az $[a, b]$ véges szakaszon majdnem minden ω-ra folytonos és $M \in \mathcal{H}^2$, akkor az X az $[a, b]$-én M szerint Itô–Stieltjes-integrálható.

Bizonyítás: Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy az X minden kimenetelre folytonos.

Feltesszük, hogy X korlátos A bizonyítása ugyanaz mint a Lebesgue-mérhető függvények egyenletes integrálhatósága. Ugye tudjuk, hogy az integrál az energiaazonosság által korlátos. Vagyis egyenletesen integrálható.

Adott omegára, a korlát is megegyezik, mivel akkor már a trajektória megvan, viszont ugye az omegákból kontinuum számosságú van. Sztochasztikusan is konvergens a sorozat, az egyes I_n és I_m integrálok által felírt martingáltranszformáció miatt. Ezáltal ezen integrálok különbségének a mértéke tetszólegesen pici lehet, vagyis így I_n sztochasztikusan Cauchy-sorozat. Ez a második rész gyakorlatilag a Vitali-tétel.

Definíció: Lokális martingál

Valamely L **folyamatot lokális martingálnak** mondunk, ha megadható olyan megállási időkből álló (τ_n) úgynevezett lokalizációs sorozat, amelyre

$$\tau_n \nearrow \infty \quad \text{és} \quad L^{\tau_n} \text{ megállított folyamat mindegyike martingál.}$$

Egy L **folyamat lokálisan négyzetesen integrálható martingál**, ha **megadható** olyan $\tau_n \nearrow \infty$ **lokalizációs sorozat**, amelyre az L^{τ_n} négyzetesen integrálható martingál, vagyis amelyre

$$L^{\tau_n} \in \mathcal{H}^2 \quad \text{minden } n\text{-re.}$$

A lokális martingálokat $\mathcal{M}_{\text{loc}}$, a lokálisan négyzetesen integrálható martingálokat $\mathcal{H}^2_{\text{loc}}$ módon szokás jelölni.

Példa Ha w egy Wiener-folyamat, akkor a teljes időtengelyen $w \notin \mathcal{H}^2$, de

$$w \in \mathcal{H}^2_{\text{loc}}.$$

Tétel Ha az X adaptált sztochasztikus folyamat az $[a, b]$ véges szakaszon majdnem minden ω-ra folytonos, és az M lokálisan négyzetesen integrálható martingál, akkor az X az $[a, b]$-én az M szerint Itô–Stieltjes-integrálható.

Bizonyítás Elég az előző állítás bizonyítását úgy módosítani, hogy az M helyett M^{τ_n}-et írunk, és felhasználjuk, hogy a lokalizáció definíciója alapján tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz ha n elég nagy, akkor $\tau_n \geq b$ egy ε valószínűségű halmaztól eltekintve.

Másképpen: ha n elég nagy, akkor egy tetszőlegesen kicsi valószínűségű halmaztól eltekintve az $[a, b]$ szakaszon az M és az M^{τ_n} egybeesik.

Tétel Ha M folyamatos lokális martingál, X folyamatos adaptált folyamat, akkor az

$$\int_a^b X \, dM$$

sztochasztikus integrál létezik.

Bizonyítás Legyen

$$\tau_n = \inf\{t : |M(t)| \geq n\}.$$

Mivel M folyamatos, ezért $|M^{\tau_n}| \leq n$, vagyis az M lokálisan korlátos. Így nyilván lokálisan négyzetesen integrálható, következésképpen alkalmazható az előző állítás.

Tétel Tegyük fel, hogy teljesülnek a szokásos feltételek. Ha az X folytonos valamint adaptált folyamat és az M lokálisan négyzetesen integrálható martingál, akkor létezik olyan lokális martingál, amelyet $X \bullet M$-mel fogunk jelölni, amelyre tetszőleges t esetén

$$(X \bullet M)(t) \stackrel{m.m.}{=} \int_0^t X\, dM.$$

Megjegyzés Ha az X egyenletesen korlátos és az M négyzetesen integrálható, akkor az $X \bullet M$ nemcsak lokális martingál lesz, hanem martingál is.

Definíció: Szemimartingál Ha az S folyamat felbontható

$$S = S(0) + L + V$$

módon, ahol az L lokálisan négyzetesen integrálható martingál és a V véges változású adaptált folyamat, akkor az S folyamatot *szemimartingálnak* mondjuk.

Tétel:

Ha az X adaptált sztochasztikus folyamat az $[a, b]$ véges szakaszon majdnem minden ω-ra folytonos és az S szemimartingál, akkor az X az $[a, b]$-én az S szerint Itô–Stieltjes-integrálható.

Tétel: (Parciális integrálás)

Ha X és Y folytonos szemimartingálok, akkor tetszőleges t időpont esetén

$$X(t)Y(t) - X(0)Y(0) = \int_0^t X\, dY + \int_0^t Y\, dX + [X, Y]_t,$$

ahol $[X, Y]$ a két szemimartingál kvadratikus keresztvariációja. A keresztvariáció a t időpontban az

$$\sum_i \left(X\left(t_{i+1}^{(n)} \wedge t\right) - X\left(t_i^{(n)} \wedge t\right)\right)\left(Y\left(t_{i+1}^{(n)} \wedge t\right) - Y\left(t_i^{(n)} \wedge t\right)\right)$$

szorzatösszeg sztochasztikus konvergenciában vett határértéke.

Bizonyítás: Ekkor:

$$X_t Y_t - X_0 Y_0 = \sum_{i=0}^{n-1} (X_{i+1} Y_{i+1} - X_i Y_i)$$

Fejtsük ki a szorzatokat:

$$X_{i+1} Y_{i+1} - X_i Y_i \overset{RH}{=} (X_i + (X_{i+1} - X_i))(Y_i + (Y_{i+1} - Y_i)) - X_i Y_i$$

$$X_i(Y_{i+1} - Y_i) + Y_i(X_{i+1} - X_i) + (X_{i+1} - X_i)(Y_{i+1} - Y_i)$$

Összegezve:

$$X_t Y_t - X_0 Y_0 = \sum_{i=0}^{n-1} X_i(Y_{i+1} - Y_i) + \sum_{i=0}^{n-1} Y_i(X_{i+1} - X_i) + \sum_{i=0}^{n-1} (X_{i+1} - X_i)(Y_{i+1} - Y_i)$$

Ez a három tag diszkrét közelítése:

- $\sum X_i(Y_{i+1} - Y_i) \to \int_0^t X_s \, dY_s$
- $\sum Y_i(X_{i+1} - X_i) \to \int_0^t Y_s \, dX_s$
- $\sum (X_{i+1} - X_i)(Y_{i+1} - Y_i) \to [X, Y]_t$

Tehát végül:

$$X_t Y_t - X_0 Y_0 = \int_0^t X_s \, dY_s + \int_0^t Y_s \, dX_s + [X, Y]_t$$

Tétel: (Polaritási formula)
Ha L tetszőleges lokális martingál, akkor

$$[X \bullet L, X \bullet L] = X^2 \bullet [L].$$

Hasonlóan, ha M és N két lokális martingál, akkor

$$[X \bullet M,\ Y \bullet N] = XY \bullet [M, N].$$

Bizonyítás: Itt egy heurisztikus indoklást mutatunk be: A kvadratikus variáció definíciója alapján

$$[X \bullet L] \approx \sum_k ((X \bullet L)(t_k) - (X \bullet L)(t_{k-1}))^2 .$$

A sztochasztikus integrál a közelítő összegek határértéke, így egy igen kicsi intervallumon az integrál megváltozása éppen egy darab közelítő téglalap", vagyis éppen $X(t_{k-1})\ L(t_k) - L(t_{k-1})$. Tehát

$$\begin{aligned}[X \bullet L] &\approx \sum_k \left(X(t_{k-1})\left(L(t_k) - L(t_{k-1})\right)\right)^2 \\ &= \sum_k X(t_{k-1})^2 \left(L(t_k) - L(t_{k-1})\right)^2 .\end{aligned}$$

Következmény: Keresztvariációnál ugyanígy

Tétel:

Tegyük fel, hogy a $Z = X \bullet M$ sztochasztikus integrál létezik. Az $Y \bullet Z$ sztochasztikus integrál pontosan akkor létezik, ha létezik az $XY \bullet M$ integrál és érvényes a következő asszociativitási formula:

$$Y \bullet (X \bullet M) = (YX) \bullet M.$$

Másképpen fogalmazva: integrálfüggvény szerinti integrálás esetén az integrálok elvégzésének sorrendje átrendezhető".

Magyarázat: Tegyük fel, hogy

$$S(u) = \int_0^u X(s)\, dM(s),$$

és tekintsük az

$$\int_0^t Y(u)\, dS(u)$$

integrált. Az integrál a közelítő összegek határértéke, így

$$\int_0^t Y(u)\, dS(u) \approx \sum_k Y(u_{k-1})\, \Delta S(u_k).$$

Az $S(u)$ integrálfüggvény $\Delta S(u_k)$ növekményei az S alakja miatt közelíthetőek az $X(u_k)\Delta M(u_k)$ téglalapokkal", így

$$\int_0^t Y(u)\,dS(u) \approx \sum_k Y(u_k)X(u_k)\Delta M(u_k) \approx \int_0^t Y(u)X(u)\,dM(u).$$

Megjegyzés: Itt is igaz a szokásos mértékelméleti "trükk" miszerint dS = XdM. Ugye ha ezt integráljuk akkor a Radon-Nykodim-szerű formulát kapjuk, a tétel kimondása szerint **ez az S, az XdM-ből egyértelmű**.

Vizsgáljuk a sztochasztikus integrál martingál szerinti természetét

Tétel: Ha az $X \bullet M$ sztochasztikus integrál létezik és τ tetszőleges megállási idő, akkor

$$(X \bullet M)^\tau = X \bullet M^\tau = X \cdot \chi_{(0,\tau]} \bullet M.$$

A formula tartalma ismét nyilvánvaló. Ha az M integrátort megállítjuk a τ időpontban, akkor a τ után az M növekményei már nullák, ugyanis az M a τ időpont után konstans. Így az $X \bullet M$ a τ után már nem nő, vagyis az így kapott integrál éppen az $(X \bullet M)^\tau$.

Legyen X és M folytonos. Legyen

$$\tau_n = \inf\{t : |X(t)| \geq n\} \wedge \inf\{t : |M(t)| \geq n\}.$$

A folytonosság miatt világos, hogy $|X^{\tau_n}| \leq n$ és $|M^{\tau_n}| \leq n$, így $X_{\chi_{(0,\tau_n]}}$ korlátos, M^{τ_n} négyzetesen integrálható martingál. Így $X_{\chi_{(0,\tau_n]}} \bullet M^{\tau_n}$ martingál.

De a megállítási szabály miatt

$$(X \bullet M)^{\tau_n} = X \cdot \chi_{(0,\tau_n]} \bullet M^{\tau_n},$$

Ez a sztochasztikus folyamat létezik, $\mathcal{H}^2$-nak az eleme, azaz martingál vagyis az $X \bullet M$ lokális martingál.

Ugye az a nagy kérdés, hogy a lokális martingál mikor martingál.

Ez ugye akkor martingál, ha pontonkénti konvergencia esetén L^1-beli konvergencia is van

Erre számos általános tétel ismert, a legegyszerűbb talán, ha az $L(t)$-nek t-szerint van integrálható majoránsa, mivel ekkor egyenletesen integrálható lesz z L(t). Az integrálható majoráns létezésének szükséges és elégséges feltétele, hogy a

$$\sup_t |L(t)|$$

változó integrálható legyen. Erre vonatkozóan hasznos az úgynevezett Davis-féle egyenlőtlenség, amely a $\sup_t |L(t)|$ integrálhatóságának szükséges és elégséges feltételét adja meg a folyamat kvadratikus variációjának segítségével:

A Davis-egyenlőtlenség szerint olyan c és C univerzális konstansok, hogy tetszőleges L lokális martingál, amelyre $L(0) = 0$, és τ megállási idő esetén

$$c \left\| \sqrt{[L](\tau)} \right\|_{L^1} \leq \left\| \sup_{t \leq \tau} |L(t)| \right\|_{L^1} \leq C \left\| \sqrt{[L](\tau)} \right\|_{L^1},$$

ahol a norma a megfelelő változók $L^1(\Omega)$ térben vett normáját jelöli.

Definíció szerint $X \in \mathcal{L}^2(M)$, ha

$$E\left(\int_0^\infty X^2 \, d[M] \right) < \infty.$$

Doleans-mérték:

$$\mu(B) = E\left(\int_0^\infty \chi_B \, d[M] \right)$$

mértéket az M Doléans-mértékének mondjuk. $\mathcal{L}^2(M)$ ekkor éppen a Doléans-mérték szerint négyzetesen integrálható folyamatok halmaza.

A belső integrál az $[M]$ monoton növekedő folyamat trajektóriánkénti integrálja egy nem negatív folyamatnak: minden ω kimenetelre ki kell számolni egy-egy integrált, és az így kapott valószínűségi változónak kell venni a várható értékét. Természetesen az $\mathbb{R}_+$ időtengely helyett tetszőleges más intervallum is írható. Ilyenkor az integrálokat az adott időszakaszra kell kiszámolni.

Doleans-tétel: Ha M tetszőleges lokális martingál és X $\in \mathcal{L}^2(M)$, akkor az $X \bullet M$ sztochasztikus integrál martingál.

Ez azért újdonság, mert eddig feltettük, hogy az X korlátos, és M négyzetesen integrálható. Most X nem feltétlenül korlátos, M pedig tetszőleges lokális martingál lehet. CSak annak kell teljesülnie, hogy az X a Doleans-mérték szerint véges.

Példa: a w Wiener-folyamat, akkor az $\exp(w) \bullet w$ sztochasztikus integrál martingál.

Elegendő megmutatni, hogy tetszőleges $[0, t]$ szakaszon $\exp(w) \in \mathcal{L}^2(w)$. Emlékeztetünk, hogy a w kvadratikus variációja éppen $[w](s) = s$, így

$$E\left(\int_0^t (\exp(w(s)))^2\, ds\right) = E\left(\int_0^t \exp(2w(s))ds\right) = \int_0^t E(\exp(2w(s)))\, ds = \int_0^t \exp\left(\frac{(2\sqrt{s})^2}{2}\right) ds < \infty,$$

ahol természetesen az utolsó sorban felhasználtuk a lognormális eloszlás várható értékére vonatkozó formulát $e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2}$ illetve azt, hogy a $w(s)$ eloszlása $N\left(0, \sqrt{t}\right)$.

2.5 Itô–formula

Tétel: Itô–formula: Ha F kétszer folyamatosan deriválható n-változós függvény, és $(X_k)_{k=1}^n$ folytonos szemimartingálok, akkor tetszőleges t időpontra:

$$F\big(X(t)\big) - F\big(X(0)\big) = \sum_{k=1}^n \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x_k}\big(X(s)\big)\, dX_k(s) + \frac{1}{2}\sum_{i,j}\int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\big(X(s)\big)\, d[X_i, X_j](s).$$

Látható, hogy a Jobboldalon az első tag egy sztochasztikus integrál, a $dX_k(s)$ miatt, a második, pedig egy sima Stieltjes, a kvadratikus variáció miatt.

Ez azt jelenti az Itô–formula szerint, hogy egy lokális martingál szerinti kétszer folytonosan differenciálható függvény egy sztochasztikus integrál (vagyis lokális martingál), és egy korlátos függvény összegeként áll elő, vagyis egy szemimartingál.

Bizonyítás nagyon vázlatosan:

Ugye amennyiben az elsőrendű közelítéssel próbánánk megadni a különbsséget, akkor

$$F\left(X(t_{k+1})\right) - F\left(X(t_k)\right) \approx F'\left(X(\tau_k)\right)\left(X(t_{k+1}) - X(t_k)\right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}\left(X(\tau_k)\right)\left(X_i(t_{k+1}) - X_i(t_k)\right).$$

módon kellene megadni.

Viszont a τ_k nem biztos, hogy $[t_k, t_{k+1}]$-k kezdőpontjára esik, így az eszerint megadott összeg nem konvergál általában a sztochasztikus integrálhoz. Viszont amennyiben a másodrendű tagot is hozzáadjuk, akkor az mivel a keresztvariáció egy korlátos változású függvény, ezért a másodrendű tag korlátos függvény. Így tetszőlegesen megválaszthatjuk a τ_k-t, vagyis a tesztpontot. Így

$$F\left(X(t_{k+1})\right) - F\left(X(t_k)\right) = F'\left(X(t_{k-1})\right)\left(X(t_k) - X(t_{k-1})\right) + \frac{1}{2}F''\left(X(\tau_k)\right)\left(X(t_k) - X(t_{k-1})\right)^2$$

Definíció: Időtől függő Itô–formula: Ez gyakorlatilag akkor van, amikor kétváltozós a a függvény, vagyis

többdimenziós Itô-formula speciális esete, amikor $Y(s) = F(s, X(s))$, ahol F egy kétváltozós, kétszer folyamatosan deriválható függvény. Az Itô-formula szerint:

$$Y(b) - Y(a) = F(b, X(b)) - F(a, X(a)) =$$

$$= \int_a^b \frac{\partial F}{\partial s}(s, X(s))\, ds + \int_a^b \frac{\partial F}{\partial x}(s, X(s))\, dX(s) + \frac{1}{2}\int_a^b \frac{\partial^2 F}{\partial s^2}(s, X(s))\, d[s]$$

$$+ \frac{1}{2}\int_a^b \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(s, X(s))\, d[X](s) + \int_a^b \frac{\partial^2 F}{\partial s \partial x}(s, X(s))\, d[s, X](s).$$

Itt viszont az 3. tag, és az 5. tag 0-k, mivel tetszőleges véges $[a, b]$ szakaszon $[s] = 0$. Valóban, triviális módon

$$\sum_k \left(s_k^{(n)} - s_{k-1}^{(n)}\right)^2 \leq \max_k \left|s_k^{(n)} - s_{k-1}^{(n)}\right| \sum_k \left|s_k^{(n)} - s_{k-1}^{(n)}\right|.$$

Az összeg éppen $b - a$. Mivel az első tag, ami a felbontás finomsága, definíció szerint nullához tart, a növekmények négyzetes összege nullához tart.

A keresztvariáció szintén nulla, ugyanis az X trajektóriáinak folytonossága miatt.

$$|[s, X](t)| \approx \left|\sum_k (s_k - s_{k-1})(X(s_k) - X(s_{k-1}))\right| \leq t \cdot \max_k |X(s_k) - X(s_{k-1})| \to 0.$$

Azaz: Visszatérve:

$$Y(b) - Y(a) = F(b, X(b)) - F(a, X(a)) =$$

$$= \int_a^b \frac{\partial F}{\partial s}(s, X(s))\, ds + \int_a^b \frac{\partial F}{\partial x}(s, X(s))\, dX(s)$$

$$+\frac{1}{2}\int_a^b \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(s, X(s))\, d[X](s)$$

Ugye itt az első tag normális integrál, a második sztochasztikus, a harmadik, pedig szintén Stieljes.

A formula jobb megértése céljából érdemes megvizsgálni a parciális integrálás formulája és az Itô-formula kapcsolatát. Egyrészt az Itô-formulából következik a parciális integrálás formulája: Ha $F(x, y) = xy$, akkor alkalmazható az Itô-formula. Mivel $\partial F/\partial y = x$, $\partial F/\partial x = y$, a két másodrendű parciális derivált nulla, valamint a vegyes parciális derivált éppen 1, ezért

$$F(X(b), Y(b)) - F(X(a), Y(a)) = X(b)Y(b) - X(a)Y(a)$$

$$= \int_a^b X\, dY + \int_a^b Y\, dX + \frac{1}{2}\int_a^b 1 \cdot d[X, Y],$$

amiből a parciális integrálás formulája evidens.

Tétel: Ito másik bizonyítása, ami megmutatja a kapcsolatot a parciális integrálás, és az Ito között.: A parciális integrálás formulájával belátjuk az Itô-formulát polinomokra, majd az F függvényt és deriváltjait egyenletesen megközelítjük polinomokkal, illetve a polinóm, megfelelő deriváltjaival. Könnyen látható, hogy az Itô-formula lineáris, vagyis ha igaz egy F és egy G függvényre, akkor igaz az $F+G$ függvényre is. Elegendő tehát a formulát csak az $F(x) = x^n$ alakú polinómokra igazolni. Ezt indukcióval végezhetjük el. Ha $n = 0$, akkor $x^n \equiv 1$, és a formula triviálisan igazolható. Ugyancsak triviális az $n = 1$ eset. Ilyenkor a formula az

$$X(b) - X(a) = \int_a^b 1\, dX + \frac{1}{2}\int_a^b 0\, d[X]$$

azonosságra egyszerűsödik.

Tegyük fel, hogy az állítást már egy n-re igazoltuk, vagyis tegyük fel, hogy az

$$X^n - X^n(0) = nX^{n-1} \bullet X + \frac{n(n-1)}{2} X^{n-2} \bullet [X]$$

egyenlőséget már beláttuk. Az $X^{n+1} = X^n \cdot X$ szereposztással alkalmazva a parciális integrálás formuláját

$$X^{n+1} - X^{n+1}(0) = X^n \bullet X + X \bullet X^n + [X^n, X].$$

Az X^n képletét beírva az $X \bullet X^n$ integrálba az asszociativitási szabály alapján

$$X \bullet X^n = nXX^{n-1} \bullet X + \frac{n(n-1)}{2} XX^{n-2} \bullet [X].$$

A polaritási formula szerint

$$[X^n, X] = nX^{n-1} \bullet [X] + \frac{n(n-1)}{2} X^{n-2} \bullet [[X], X].$$

Vegyük észre, hogy az $[X]$ korlátos változású, az X folytonos, ezért a második integrál integrátora nulla, így csak az első tag marad, vagyis

$$[X^n, X] = nX^{n-1} \bullet [X].$$

A két képletet a parciális integrálás formulájába visszaírva a jobb oldal

$$(n+1)X^n \bullet X + \frac{n(n-1)}{2} X^{n-1} \bullet [X] + nX^{n-1} \bullet [X]$$

amely éppen

$$(n+1)X^n \bullet X + \frac{n(n-1) + 2n}{2} X^{n-1} \bullet [X]$$

ami pedig

$$(n+1)X^n \bullet X + \frac{n((n-1) + 2)}{2} X^{n-1} \bullet [X]$$

vagyis éppen a formula $n+1$ kitevőre.

Következmény, példa:

Számoljuk ki a $w^4(t)$ várható értékét!

A formula szerint

$$w^4(t) = w^4(t) - w^4(0) = 4 \int_0^t w^3(s)\, dw(s) + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \int_0^t w^2(s)\, d[w](s).$$

Várható értéket véve

$$E\left(w^4(t)\right) = 6 \cdot E\left(\int_0^t w^2(s)\,ds\right).$$

Ugye itt az történt, hogy az első tag martingál, azaz 0 a várható értéke. Mivel az belső integrál determinisztikus, fel lehet cserélni, ugyanis az integrandus nem negatív.

$$E\left(w^4(t)\right) = 6 \cdot \int_0^t E\left(w^2(s)\right) ds = 6 \int_0^t s\,ds = 3t^2.$$

Számoljuk ki $w \bullet w$ szórását!

$$(w \bullet w)^2(t) = 2 \int_0^t (w \bullet w)(s)\,d(w \bullet w)(s) + \frac{1}{2} \cdot 2 \int_0^t d\,[w \bullet w](s).$$

Várható értéket véve

$$D^2(w \bullet w)(t) \overset{w \bullet w \text{ mart.}}{=} E\left(\int_0^t d\,[w \bullet w](s)\right) = E\left(\int_0^t d\left(w^2 \bullet [w]\right)\right) = E\left(\int_0^t w^2\,d[w]\right)$$

$$= E\left(\int_0^t w^2(s)\,ds\right) = \int_0^t E(w^2(s))\,ds = \int_0^t s\,ds = \frac{t^2}{2}.$$

Ugye itt is meg kell néznünk, hogy a $w \bullet w$ martingál-e. De az lesz.

Normális eloszlás karakterisztikus függvénye Itô-formulával

Elegendő kiszámolni az $N(0,1)$ karakterisztikus függvényét. A $z \mapsto \exp(itz)$ kifejezés mint komplexből komplexbe ható leképezés tekinthető $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ kétszer deriválható függvénynek. Külön alkalmazva a formulát a valós és a komplex részre az Itô-formula alapján

$$\exp(itw(s)) - \exp(itw(0)) = it \int_0^s \exp(itw(u))\,dw(u) + \frac{1}{2}(it)^2 \int_0^t \exp(itw(u))\,d[w(u)].$$

Bizonyítás: A két oldalon várható értéket véve:

$$E(\exp(itw(s))) - 1 = -\frac{1}{2} t^2 E\left(\int_0^s \exp(itw(u))\,du\right).$$

A két integrált felcserélve

$$E(\exp(itw(s))) - 1 = -\frac{1}{2}t^2 \int_0^s E(\exp(itw(u)))\,du.$$

Deriválva az

$$\frac{d}{ds}E(\exp(itw(s))) = -\frac{1}{2}t^2 E(\exp(itw(s))).$$

Az egyenletet megoldva

$$E(\exp(itw(s))) = \exp\left(-\frac{t^2}{2}s\right).$$

Ha $s = 1$, akkor $w(s)$ eloszlása $N(0,1)$, így

$$\varphi(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right).$$

2.6 Folytonos Lévy-folyamatok karakterizációja:

Legyen X egy folytonos Lévy-folyamat. Mivel az X folytonos, ezért az X összes momentuma véges (Ez ugye az Erős Markov tulajdonságból jött, ami pedig a megállási opciókról szóló tételnek egy következménye). Ebből következően az $X(t)$ változónak minden t időpontban van várható értéke. Következésképpen ha m jelöli az $X(t)$ várható értékét, akkor az $X(t) - t \cdot m$ martingál. Érdemes hangsúlyozni, hogy **annak igazolásához**, hogy az $X(t)$ várható értéke éppen $t \cdot m$, **vagy** fel kell használni, hogy a filtráció teljesíti a szokásos feltételeket, így az $X(t) - E(X(t))$ logikai martingálnak van várható értéke, **vagy** fel kell használni, hogy véges időszakon a második momentumok halmaza korlátos, így az $(X(t))_t$ család minden véges időtartományon egyenletesen integrálható, azaz E(X(t)) folytonos, így az X(t)-E(X(t))

Az $X(t) - t \cdot m$ martingál voltából következik, hogy az X folytonos szemimartingál.

A jelölés egyszerűsítése céljából tegyük fel, hogy $m = 0$. Ekkor **A kvadratikus variáció definíciója miatt az $[X]$ szintén folytonos Lévy-folyamat.** A független és stacionárius növekedés feltétele következik abból, hogy a kvadratikus variáció a közelítő négyzetösszegek határértéke és a Lévy-tulajdonság miatt a diszjunkt szakaszokhoz tartozó közelítő négyzetösszegek függetlenek és az eloszlásuk csak az időszak hosszától függ. A kvadratikus variáció folytonossága pedig a parciális integrálás formulája miatt a sztochasztikus integrálok folytonos integrátor szerinti folytonosságának következménye. Ez másképpen azt jelenti, hogy az

$$Y(t) = [X](t) - E([X](t)) = [X](t) - 1 \cdot E([X](1))$$

kifejezés ismételten folytonos martingál. Az Y mint két monoton növekedő függvény különbsége véges variációjú.

A véges variációjú folytonos martingálok konstansak, így

$$[X](t) = E([X](t)) = a \cdot t.$$

Az Itô-formula szerint

$$\exp(iuX(t)) - 1 = iu \int_0^t \exp(iuX(s))\, dX(s) - \frac{1}{2}u^2 \int_0^t \exp(iuX(s))\, d[X](s).$$

Az $\exp(iuX)$ korlátos és az X négyzetesen integrálható, következésképpen a sztochasztikus integrál valódi martingál. A két oldalon várható értéket véve és felhasználva, hogy most a sztochasztikus integrál várható értéke a martingál tulajdonság miatt nulla.

$$\begin{aligned} E(\exp(iuX(t))) - 1 &= -\frac{1}{2}u^2 E\left(\int_0^t \exp(iuX(s))\, d[X](s)\right) \\ &= -\frac{1}{2}u^2 E\left(\int_0^t \exp(iuX(s))\, d(as)\right) \\ &= -\frac{1}{2}u^2 a \int_0^t E(\exp(iuX(s)))\, ds. \end{aligned}$$

Ha bevezetjük a $\varphi(u,t) \doteq E(\exp(iuX(t)))$ jelölést, akkor ez:

$$\varphi(u,t) - 1 = -\frac{1}{2}u^2 a \int_0^t \varphi(u,s)\, ds.$$

t szerint deriválva

$$\frac{d\varphi(u,t)}{dt} = -\frac{1}{2}u^2 a \varphi(u,t).$$

A differenciálegyenletet megoldva tetszőleges u-ra

$$\varphi(u,t) = \exp\left(-\frac{1}{2}u^2 at\right).$$

A normális eloszlás Fourier-transzformáltjának képletét felhasználva

$$X(t) \sim N\left(0, \sqrt{at}\right).$$

Lokális martingálok trajektóriái Fisk-tételére Ha L folytonos lokális martingál, és L **trajektóriái korlátos változásúak**, akkor L konstans.

Bizonyítás: Tekintsük az $M \doteq L - L(0)$ lokális martingált. Elég belátni, hogy az $M = 0$. Legyen $V \doteq \mathrm{Var}(M)$ és legyen (ρ_n) az M lokalizációs sorozata. Mivel a folytonos függvények teljes megváltozása is folytonos, a

$$\nu_n(\omega) \doteq \inf\{t : |M(t,\omega)| \geq n\}$$

és a

$$\kappa_n(\omega) \doteq \inf\{t : V(t,\omega) \geq n\}$$

megállási idők. Így a $\tau_n \doteq \nu_n \wedge \kappa_n \wedge \rho_n$ szintén megállási idő. Nyilván $\tau_n \nearrow \infty$, így ha minden n indexre $M^{\tau_n} = 0$, akkor az M nulla a $[0, \tau_n]$ szakaszon minden n-re, így az M nulla a

$$\bigcup_n [0, \tau_n] = \mathbb{R}_+ \times \Omega$$

halmazon, így $M = 0$.

A folytonosság miatt az $|M^{\tau_n}| \leq n$ és $|V^{\tau_n}| \leq n$, így a trajektóriák korlátosak. Feltehető tehát, hogy az M és a $V \doteq \mathrm{Var}(M)$ korlátosak. Legyen $\left(t_k^{(n)}\right)$ a $[0, t]$ egy infinitézimális partíciója. Az energiaazonosság miatt ha $u > v$, akkor

$$E\left((M(u) - M(v))^2\right) = E\left(M^2(u) - M^2(v)\right),$$

és mivel $M(0) = 0$, ezért

$$E\left(M^2(t)\right) = E\left(M^2(t)\right) - E\left(M^2(0)\right) = E\left(\sum_k \left(M^2\left(t_k^{(n)}\right) - M^2\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\right)\right) =$$

$$E\left(\sum_k \left(M\left(t_k^{(n)}\right) - M\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\right)^2\right).$$

$$\max_k \left|M\left(t_k^{(n)}\right) - M\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\right| \leq V(t) \leq c,$$

így a dominált konvergencia tétele miatt

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\max_k \left|M\left(t_k^{(n)}\right) - M\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\right|\right) = 0.$$

Így $M(t) \overset{m.m.}{=} 0$ minden t-re. Az M trajektóriái folytonosak, így majdnem minden ω esetén $M(t, \omega) = 0$ minden t-re.

Következmény: Csak egyféle módon áll elő a lévy folyamat, azaz nincs két különböző trend, vagy Martingál.

Amennyiben X(t) olyan folytonos martingál, amelyre X(0) = 0, és [X](t) = t, akkor X Wiener-folyamat.

2.7 Girszanov

Tulajdonképpen az alábbi rész nagyon egyszerűen felfogható, hiszen igazából csak annyi történik, a folyamatot egy másik mérték(-ek) szerint is felírhatjuk. Sajnos egyenlőre csak véges megállási időre

2.7.1

Definíció: Lokálisan abszolút folytonos mértékváltás: Amennyiben Q mérték-re igaz **Definíció: Lokálisan abszolút-folytonos mértékváltás:** Itt előhozhatjuk a Radon-Nikodym derivált fogalmát. Amennyiben Q bármely t esetén abszoulút folytonos $\mathcal{F}_t$ filtrációban P mértékre nézve, akkor azt monhatjuk, hogy lokálisan abszolút folytonos

Vezessük be az alábbi folyamatot:

Definíció: Radon-Nikodym folyamat : Amennyiben $Q \overset{loc}{<<} P$, annyiban a jobbról folytonosság feltevése esetén (amit ugye a szokásos feltételek teljesülése esetén feltehetünk) igaz, hogy

$$\Lambda(t) = \frac{dQ(t)}{dP(t)}$$

a Radon-Nikodym folyamat P, és Q szerint.

Tudjuk, hogy amennyiben $Q \overset{loc}{<<} P$, akkor minden szemimartingál P mérték szerint szemimartingál Q mérték szerint is.

Nézzük a Λ^{-1}-[L,M]