Black-Litterman

Ábris Wunderlich

November 2025

1 Introduction

Legyen a Markowitz-modell szerinti piaci portfólió normális eloszlású:
$X \sim \mathcal{N}(\mu_{piac}, \sigma^2_{piac})$

azaz

$$f(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2_{piac}}} e^{-\frac{(x-\mu_{piac})^2}{2\sigma^2_{piac}}}$$

A befeketető szerint a várható érték viszont az X lesz, és van egy elképzelése a kovarianciamátrixról is, továbbá feltételezi hoyg normális eloszlású a saját vélekedése is, azaz Y valváltozó lesz: $Y \sim \mathcal{N}(X, \sigma^2_{saját})$

$$f(Y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2_{saját}}} e^{-\frac{(y-X)^2}{2\sigma^2_{saját}}}$$

A befektetőnek azt kell kitalálnia, hogy a saját vélekedése (vélekedi a hozamot, valamint a kovariancia mátrixot) mellett hogy néz ki a normális eloszlás., vagyis azt feltételezi, hogy rossz helyre lőtt, csak nem tudja mennyire, viszont azt feltételezi, hogy ő normális eloszlással vélekedett a valódi hozam köré. Ezt a Bayes-szabály szerint teszi meg.

$$f(X|Y) = \frac{f(Y|X)f(X)}{f(Y)}$$

f(Y)-t elhagyhatjuk, mert konstans μ-re nézve,

$$f(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(Y \mid x)\, f(x)\, dx$$

mivel ez egy peremsűrűség, és Y-t már megadtuk, mint vélekedés, azaz:

$$f(X|Y) \propto f(Y|X)f(X)$$

azaz:

$$f(Y|X=x)*f(X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{piac}^2}}e^{-\frac{(x-\mu_{piac})^2}{2\sigma_{piac}^2}}*\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{saját}^2}}e^{-\frac{(y-x)^2}{2\sigma_{saját}^2}}$$

azaz

$$=\frac{1}{\sqrt{4\pi^2\sigma_{piac}^2\sigma_{saját}^2}}e^{-\frac{(x-\mu_{piac})^2}{2\sigma_{piac}^2}-\frac{(y-x)^2}{2\sigma_{saját}^2}}$$

A normális eloszlás szimmetrikus, a súlyfüggvényének a maximuma megyegyezik a várható értékével, ezért keressük meg, hogy hol van a maximuma. Az ismeretlen itt x, ezért eszerint deriváljuk a súlyfüggvényt:
1.: Vegyük a logaritmusát: Megtehetjük mert az Euler-függvény szigorúan monoton nő.
2.:Vegyük ennek a deriváltját:

$$\frac{d-\frac{(x-\mu_{piac})^2}{2\sigma_{piac}^2}-\frac{(y-x)^2}{2\sigma_{saját}^2}}{dx}=0$$

$$\to x=\frac{\frac{\mu_{piac}}{\sigma_{piac}^2}+\frac{y}{\sigma_{saját}^2}}{\frac{1}{\sigma_{piac}^2}+\frac{1}{\sigma_{saját}^2}}=(\frac{1}{\sigma_{piac}^2}+\frac{1}{\sigma_{saját}^2})^{-1}(\frac{\mu_{piac}}{\sigma_{piac}^2}+\frac{y}{\sigma_{saját}^2})$$

cseréljük le a változókat több dimenziós tagjaira:

$$\mu_{post}=\big((\tau\Sigma)^{-1}+P^\top\Omega^{-1}P\big)^{-1}\big((\tau\Sigma)^{-1}\pi+P^\top\Omega^{-1}Q\big)$$

$$p(x\mid Q)\propto\exp\left(-\frac{1}{2}(x-\pi)^\top(\tau\Sigma)^{-1}(x-\pi)-\frac{1}{2}(Q-Px)^\top\Omega^{-1}(Q-Px)\right)$$

Deriválás több dimenzióban x szerint
A ennek a log deriváltja:

$$\nabla_x\log p(x\mid Q)=-(\tau\Sigma)^{-1}(x-\pi)+P^\top\Omega^{-1}(Q-Px)$$

Átrendezve:

$$\nabla_x\log p(x\mid Q)=-(\tau\Sigma)^{-1}x+(\tau\Sigma)^{-1}\pi+P^\top\Omega^{-1}Q-P^\top\Omega^{-1}Px$$

nullára hozva:

$$\big((\tau\Sigma)^{-1}+P^\top\Omega^{-1}P\big)x=(\tau\Sigma)^{-1}\pi+P^\top\Omega^{-1}Q$$

Innen:

$$x_{post}=\big((\tau\Sigma)^{-1}+P^\top\Omega^{-1}P\big)^{-1}\big((\tau\Sigma)^{-1}\pi+P^\top\Omega^{-1}Q\big)$$

$=$