 Namn, pers.nr: ....

LABORATION 2 - Differentialekvationer, ekvationssystem och kombinationer

Målet med laboration två är att ge er vana vid de numeriska metoderna för differentialekvationer, både begynnelsevärdes- och randvärdesproblem, samt icke-linjära ekvationssystem. Vi övar också att kombinera numeriska metoder för att lösa mer komplexa problem. Vi jämför olika metoder för att kunna göra ett motiverat val av en lämplig, effektiv metod. Ni ska efter laborationen kunna lösa andra liknande uppgifter helt på egen hand.

Koden ska helt vara skriven av er själva helt utan bidrag från andra personer eller genererad kod.

Vid redovisningen ska båda i laborationsgruppen kunna redogöra för teori, algoritmer och resultat på samtliga uppgifter! Var väl förberedda så att varje delredovisning går snabbt och smidigt (kurvor utskrivna, numeriska resultat noterade – gärna handskrivna i marginalen på detta papper och uppladdade som PDF i Canvas). Sista dag för bonuspoäng: se hemsidan.

1. **Numerisk integration: Eulers metod**

Givet differentialekvationen

$$y'(x) = -\left(\frac{1}{6} + \frac{\pi \sin(\pi x)}{1.6 - \cos(\pi x)}\right) y(x) \qquad \text{med} \qquad y(0) = 2.5$$

a) Beräkna värdet av $y(4)$ med Eulers metod med steglängden 0.5. Plotta resultatet för $y(x)$ för $0 \leq x \leq 4$. Prova även några andra steglängder.

b) Hur många gånger måste steglängden 0.5 halveras i Eulers metod för att man ska säga att Euler-värdet på $y(4)$ har 1 säker decimal? Vilken steglängd är det då? Vad blir $y(4)$ (med felgräns)?

c) Frivillig: Gör om deluppgift a och b med Runge-Kuttas metod i stället.

Lämna in i Canvas: Svar på 1a (dvs $y(4)$ med steget 0.5) och 1b. Ingen kod behöver lämnas in.

---

2. **Numerisk integration: rotationssymmetrisk lur**

Konturen $y(x)$ för en rotationssymmetrisk lur (eller blomvas) definieras av differentialekvationen i uppgift 1. Luren uppstår genom att kurvan $y(x)$ roteras kring x-axeln och rotationsvolymen är
$V = \pi \int_0^L y^2 \, dx$.

a) Vi önskar beräkna volymen för en lur med axel-längden $L = 4.00$ (dvs $0 \leq x \leq L$) Börja med att numeriskt lösa differentialekvationen och använd sedan de erhållna $y(x)$-värdena för att beräkna volymen med minst 4 säkra siffror. (*Använd en egen Euler eller Runge-Kutta följt av en egenskriven trapetsregel. Gärna uppföljd av Richardson-extrapolation!*) Använd några olika steglängder. Hur många siffror verkar tillförlitliga? Vilka kontroller har du gjort för att våga tro på dem? Ange din beräknade volym med felgräns.

b) Gör nu en funktion av ditt program i deluppgift a som tar axel-längden L och antalet delintervall N som inparametrar och beräknad volym som utparameter.

c) Vi vill nu beräkna vilken axel-längd L som behövs för en lur vars volym bara är 72% av den volym man får med $L = 4.00$ Beräkna detta nya L med minst 4 decimaler. *Använd sekantmetoden (eller fzero) på din funktion i deluppgift b. Tänk igenom hur du ska bygga upp ditt program och hur du gör din felskattning! Effektiva metoder krävs!*

d) En fin tredimensionell bild av luren gör man så här: Låt `x` och `f` vara kolumnvektorer för konturkurvan $y(x)$. (Ta inte med för många värden, ca 40 värden i vektorerna är lämpligt). Skapa en radvektor `fi` för rotationsvinkeln $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ med lagom steg, t ex $2\pi/30$. Bilda matriser X, Y och Z:

```
X=x*ones(size(fi)); Y=f*cos(fi); Z=f*sin(fi);
```

Skriv `mesh(X,Y,Z)` som ger en nätfigur eller `surf(X,Y,Z)` som ger en fylld 3D-figur.

Lämna in i Canvas: Kod på 2bc. Svar på 2a (volymen med felgräns) och 2c (värdet på L, med felgräns).

Laborant: ....

Uppgift 1+2 (Lab2) godkänd (datum, lärarsign): ....

3. **Differentialekvationer – Begynnelsevärdesproblem**

Följande andra ordningens differentialekvation beskriver en pendels rörelse.

$$\phi'' + \frac{g}{L}\sin(\phi) = 0, \quad \phi(0) = \frac{6\pi}{7}, \quad \phi'(0) = 0.8, \quad 0 \leq t \leq T \tag{1}$$

Här är ϕ vinkeln mot lodlinjen och ϕ' vinkelhastigheten. Längden på snöret är $L = 2.5\ m$ och tyngdkraften $g = 9.81\ m/s^2$.

a) Skriv om differentialekvationen som ett system av första ordningens differentialekvationer. Systemet skall redovisas matematisk på "papper" (dvs inte som Matlab-kod).

b) Lös systemet med MATLABs inbyggda ode-lösare `ode45`. Välj ett tidsintervall, $[0, T]$, som gör att pendeln hinner svänga drygt två hela perioder. Plotta vinkel och vinkelhastighet som funktion av tiden.

c) Animera pendelns gång.

Animeringen kan göras med tex ett anrop av följande MATLAB-funktion:

```
function anim(tut,fiut,L);
  for i=1:length(tut)-1
    x0=L*sin(fiut(i));y0=-L*cos(fiut(i));
    plot([0,x0],[0,y0],'-o')
    axis('equal')
    axis([-1 1 -1 0]*1.2*L)
    drawnow
    pause(tut(i+1)-tut(i))
  end;
end
```

där `tut` är tidpunkterna vid vilka `ode45` har räknat ut lösningen, `fiut` är den uträknade vinkeln vid motsvarande tidpunkt och `L` är pendelns längd.

d) Bestäm pendelns svängningstid (dvs period) med minst 3 decimaler genom att göra lämplig interpolation i den beräknade pendelrörelsen.

Välj interpolationspolynom med omsorg!!! Ledning: över vilket eller vilka intervall bör interpolationen gå? Är långt eller kort intervall bäst? Vilken grad väljer ni? Hur många polynom? En effektiv interpolation söks! (Jämför gärna era beslut här med era slutsatser från Lab1!)

e) Bestäm svängningstiden med minst 3 decimaler då snöret förlängs till $L = 2.7m$
Tips: Ska svängningstiden ändras?

(Många av deluppgifterna är snarlika! Skriv er Matlab-kod klokt och återanvänd moduler!
Matlabfunktionerna FIND, ABS och MIN kan vara användbara.)

4. **Differentialekvationer – Randvärdesproblem**

Följande differentialekvationsproblem beskriver temperaturfördelningen $T(x)$ i en cylindrisk stav av längden L.

$$-\frac{d}{dx}(k\frac{dT}{dx}) = Q(x), \quad T(0) = T_0, \quad T(L) = T_L \tag{2}$$

Vänster och höger ändpunkt på staven har den konstanta temperaturen T_0 resp T_L. $k(x)$ är stavens värmeledningsförmåga och $Q(x)$ är den värmemängd som per tidsenhet och volymnsenhet genereras i staven, t ex genom radioaktivitet.

Antag att $L = 3.60$ $[m]$, $T_0 = 310$ $[K]$, $T_L = 450$ $[K]$ samt att $k(x)$ $[J/(K \cdot m \cdot s]$, och $Q(x)$ $[J/(s \cdot m^3)]$ är funktionerna

$$k(x) = 3 + x/7 \qquad Q(x) = 280\, e^{-(x-\frac{L}{2})^2}, \qquad 0 \leq x \leq L \tag{3}$$

Differentialekvation och randvillkor (2) kan lösas numeriskt med hjälp av finita differensmetoden. Om vi diskretiserar intervallet $[0, L]$ enligt $x_i = ih, i = 0, 1, 2, \ldots, n-1, n$, där $h \cdot n = L$, sätter $y(x_i) \approx y_i$ och approximerar andraderivatan med centraldifferens erhålles ett linjärt ekvationssystem

$$AT = b \tag{4}$$

där A är en matris, T är en vektor med temperaturvärden i och b är en vektor som beror av $Q(x_i)$-värdena samt temperaturen i stavens ändpunkter.

a) Härled och skriv ner matrisen A och vektorerna T och b för $n = 4$ med **papper och penna**. Vilken struktur har matrisen A ?

Ledning: $\frac{d}{dx}(f(x) \cdot g(x)) = \frac{df(x)}{dx} \cdot g(x) + f(x) \cdot \frac{dg(x)}{dx}$

b) Skriv ett MATLAB-program som löser randvärdesproblemet och räknar ut temperaturen T i punkten $x = 1.65$ med 4 säkra decimaler. (Glöm inte att visa vad du gjort som gör att du vågar lita på dina 4 decimaler.) *Tips:* $n = 4$ *räcker nu inte längre.*

Plotta också temperaturen som funktion av x på hela intervallet $0 \leq x \leq L$.

c) Om man vill undersöka temperaturen i $x = 2.96$ vilket är det allra minsta antalet delar du kan/bör använda/starta med då?

d) Varför är det lite svårare att med en viss noggrannhet skatta maximala temperaturen i staven än att skatta temperaturen i $x = 1.65$?

e) Föreslå ett effektivt sätt att skatta maximala temperaturen i staven.

f) Frivilligt: implementera din algoritm för maxtemperaturen i ditt program. (Detta är en vanlig deluppgift i projekten!)

Tar ert program lång tid att köra? Här är två tips för att få snabbare program (och/eller hitta buggar):

• Hur mycket skall felet minska då steglängden halveras? Kontrollera att det verkligen gör det i ditt program!

• Minska trunkeringsfelet med Richardson-extrapolation.

• Matrisen A kommer endast att ha ett fåtal nollskilda element. Kommandot `sparse` är ett kommando för att skapa glesa matriser eller för att tala om för Matlab att matrisen kan lagras glest. MATLAB-satsen `A=sparse(A)` ändrar till gles lagring i Matlab. *(Men det ska inte behövas! Om det behövs brukar något vara fel.)*

Laborant: ....

Lab2 uppgift 4 godkänd (datum, lärarsign): ....

5. **Inskjutningsmetoden på samma problem**

Just det här differentialekvationsproblemet i uppgift 4 är väldigt enkelt att lösa med inskjutningsmetoden. Skriv ett Matlab-program som skattar temperaturen i $x = 1.65$ med inskjutningsmetoden och Matlabs `ode45` och `fzero`. (Minst 4 säkra decimaler önskas).

Laborant: ....

Deluppgift 5 godkänd (datum, lärarsign): ....

6. **Ickelinjärt cirkel-problem**.

a) Bestäm med minst fem siffror och egenskriven Newtons metod för icke-linjära system medelpunkten (X, Y) och radien R för den cirkel som går genom de tre punkterna $(x_1, y_1) = (10, 10)$, $(x_2, y_2) = (12, 2)$ och $(x_3, y_3) = (3, 8)$ genom att lösa det ickelinjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} (x_1 - X)^2 + (y_1 - Y)^2 = R^2 \\ (x_2 - X)^2 + (y_2 - Y)^2 = R^2 \\ (x_3 - X)^2 + (y_3 - Y)^2 = R^2 \end{cases} \tag{5}$$

b) Plotta cirkeln med de tre givna punkterna och cirkelns mittpunkt markerade.

c) Multiplicera tredje ekvationen med 3, dvs tredje ekvationen blir
$3\,(x_3 - X)^2 + 3\,(y_3 - Y)^2 = 3\,R^2$.
Lös detta nya icke-linjära system, blir det samma lösning som i a?

d) (Återställ systemet, dvs tag bort multiplikationen med 3). Bestäm med minsta-kvadratmetoden den cirkel som bäst passar till de fem punkter man får om man till de tre punkterna i föregående uppgift dessutom har med punkterna $(11, 11)$ och $(2, 9)$. Beräkna cirkelns radie och mittpunkt med minst fyra decimaler genom att lösa det ickelinjära systemet med en egenskriven Gauss-Newtons metod. Rita cirkeln, dess mittpunkt och alla de fem givna punkterna.

e) Multiplicera nu igen tredje ekvationen, dvs den från punkt $(3, 8)$, med 3. Lös det nu erhållna ekvationssystemet med ditt Gauss-Newton-program. Vad blir nu mittpunkt och radie? Rita upp punkterna och cirkeln och dess mittpunkt. Ändras cirkeln? Försök förklara varför den ändras eller inte ändras.
Tips: Plotta alla cirklarna från ovanstående uppgifter i samma bild och se hur de förändras.

f) Cirkelns vanliga ickelinjära ekvationssystem för X,Y och R kan skrivas om till ett linjärt ekvationssystem för variablerna c_1, c_2 och c_3, där cirkelns medelpunkt är $(c_2/2, c_3/2)$, (dvs $X = c_2/2$ och $Y = c_3/2$). Radien kan därmed uttryckas i c_1, c_2 och c_3. Visa detta (dvs visa omskrivningen av ekvationssystemet steg för steg och härled formeln för R).

$$\begin{cases} (x_1 - X)^2 + (y_1 - Y)^2 = R^2 \\ (x_2 - X)^2 + (y_2 - Y)^2 = R^2 \\ (x_3 - X)^2 + (y_3 - Y)^2 = R^2 \end{cases} \implies \begin{cases} c_1 + c_2\,x_1 + c_3\,y_1 = x_1^2 + y_1^2 \\ c_1 + c_2\,x_2 + c_3\,y_2 = x_2^2 + y_2^2 \\ c_1 + c_2\,x_3 + c_3\,y_3 = x_3^2 + y_3^2 \end{cases}$$

g) Lös det linjära ekvationssystemet och beräkna cirkelns radie och medelpunkt. Blir det samma värden som i det ickelinjära systemet i 6a? Ska det bli samma värden?

h) Multiplicera den **linjära ekvationen** som hör till tredje punkten, dvs $(3, 8)$ med 3. Beräkna nu cirkelns parametrar genom att lösa detta nya linjära system. {Tredje ekvationen, den från punkt (x_3, y_3), blir alltså $3c_1 + 3c_2\,x_3 + 3c_3\,y_3 = 3x_3^2 + 3y_3^2$. Blir det samma värden som i någon tidigare uppgift? Ska det bli samma värden som i någon tidigare uppgift?

Laborant: ....

Deluppgift 6 godkänd (datum, lärarsign): ....

Att lämna in i Canvas inför redovisningen:

Lämna in er **Matlab-kod** på uppgifterna 2b, 3d, 4b, 5, 6c, 6h.

Lämna in **era svar** på uppgifterna:
- 1ab: Värdet på $y(4)$ med steget 0.5 och antalet halveringar.
- 2ab: Volymen för $L = 4$ och längden L för 72%.
- 3d: Beräknad svängningstid och vilket gradtal ni använt i interpolationen.
- 3e: Svängningstiden för det längre snöret.
- 4b: Temperatur i x=1.65 med skattad felgräns.
- 4c: Ert svar på antalet delar.
- 5: Temperatur i x=1.65 med skattad felgräns.
- 6acgh: Värdena på X,Y och R i de fyra fallen, med 4 decimaler.

Hela laboration 2 i numo25 redovisad (6 uppgifter av 6)!

Datum: ....

Laborant ....

Godkänd av ....