

LABORATION 1 (Hela, dvs uppgift 1-7 av 7)

Ekvationslösning, kurvanpassning och integraler.

Målet med laboration ett är att ge er vana vid de numeriska metoderna för ekvationslösning, interpolation, parameteranpassning och tillförlitlighet. Vi börjar också titta lite på integraler. Ni skall efter labben kunna lösa egna liknande uppgifter helt på egen hand.

Vid redovisningen ska du visa för din lärare att du behärskar de metoder labben tar upp. Båda i labbgruppen ska enskilt kunna redogöra för teori, algoritmer och resultat! (Målet med labben är ju att ni i fortsättningen skall kunna lösa liknande problem). Var väl förberedda så att varje delredovisning går snabbt och smidigt (kurvor redan plottade, numeriska resultat uppskrivna, etc). Alla frågor i deluppgifterna ska vara besvarade! Förbered inför redovisningen hur du ska berätta om hur du löst uppgiften. Koden skall vara prydlig och lättläst och uppladdad i Canvas. Även en lista med era resultat skall vara uppladdade. Sista dag för bonuspoäng: se hemsidan!

0. Lab0 (Behöver inte redovisas, men är nyttig Matlab-hjälp inför Lab1.)

Öva på MATLAB genom "Lab0" som finns på sidan för Lab1 i Canvas.

Om du tycker att det tar alltför lång tid nu att göra hela Lab0 nu kan du hoppa över del 3 nu, den om funktioner i Matlab. Men gå i så fall tillbaka och titta på de resterande Lab0-uppgifterna senare! Om du tycker Lab0 är svår är det ett tecken på att du behöver öva programmering. Totalt sett sparar du labbtid på att göra Lab0 ordentligt innan du gör de "riktiga" Lab1-uppgifterna.

1. Linjärt ekvationssystem

Vi ska lösa det linjära ekvationssystemet $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ i MATLAB:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

- Beräkna med Matlab vektorn \mathbf{x} .
- Beräkna med Matlab residualvektorn $\mathbf{r} = \mathbf{b} - \mathbf{Ax}$.
- Varför blir inte residualvektorn \mathbf{r} exakt lika med noll?

Lämna in i Canvas: Svar på 1c (ingen Matlab-kod behöver laddas upp).

Laborant

Uppgift 1 godkänd (datum, lärarsign):

2. Icke-linjär skalär ekvation med Newtons metod

Vi ska nu titta på alla positiva rötter till ekvationen $f(x) = 0$ där

$$f(x) = 61x - \left(\frac{x^2 + x + 0.03}{3x + 1} \right)^7 - 20xe^{-x}$$

- Hur kan du förenkla funktionen så att du med papper och penna och en enkel miniräknare (dvs icke graf-ritande) kan grovlokalisera den minsta positiva roten? Hur

gör du förenklingen för att skatta den största positiva roten? Vilka värden får du på rötterna, ange med minst en siffra och tiopotens. Besvara sedan när du om en stund har bestämt rötterna mer noggrannt: Vilken skattning var bäst? Den för största eller minsta roten? Varför?

b) Rita sedan funktionen $f(x)$ i MATLAB så att man tydligt ser var alla positiva rötterna ligger (Man skall kunna utläsa 1-2 siffror och tiopotens för samtliga rötter). *Tips: Du vill troligen göra en plot per rot! Matlab-funktionerna subplot, title, xlabel, grid on mfl är användbara.*

c) Skriv sedan till MATLAB-kod för att bestämma en rot noggrannt med Newtons metod. Kör sedan programmet flera gånger så att alla rötterna bestäms. Alla rötter ska ha ett RELATIVFEL mindre än 10^{-8} .

d) Hur definieras kvadratisk konvergens för en iterativ metod för ekvationslösning? (*Definitionen söks, inte bara tumregeln.*)

e) Bestäm konvergens-konstanten för den största roten. (*Prova gärna även minsta roten, men konstanten är lättare att se i den största.*)

OBS! Det är helt OK att ha ett program som hittar "bara" en rot i taget och som man kör upprepade gånger för att hitta alla rötter. Bifoga då bara vilka startvärden som ni använt för de olika rötterna. (Gärna som en kommentar i Matlab-koden)

Lämna in i Canvas: Svar på 2acde (endast erhållna värden på 2ace och formeln i 2d). Matlab-kod för 2bce (i ett enda program).

3. Samma icke-linjära skalära ekvation med sekantmetoden

a) Skriv ett Matlab-program som bestämmer rötterna till ekvationen i föregående uppgift med sekantmetoden och samma krav på noggrannhet. **b)** Vad blev rötterna? Blir det samma värden?

c) Hurdan konvergens har sekantmetoden enligt teorin? (*Definitionen söks, inte bara namnet.*)

d) Visa att ditt program har sådan konvergens. Vad blir konvergens-konstanten?

e) Vilken av metoderna, Newton eller sekant, föredrar du för denna ekvation? Varför?

Lämna in i Canvas: Svar på 3bcd. Matlab-kod för 3ad (i ett enda program).

Laborant

Uppgift 2 och 3 godkända (datum, lärarsign):

4. Interpolation och linjära minsta kvadratmetoden

Det är väldigt vanligt att vi får en tabell med olika värden i, men tabellen saknar just det värde vi vill ha. Här kommer vi att titta på några olika sätt att behandla tabellen för att få ut det värde vi söker. Vi vill ta reda på vilken av metoderna som är bäst i olika situationer.

I tabellen finns hur länge solen antas vara uppe i Stockholm under ett normalår. (Första kolumnen är datumet, andra kolumnen är antalet timmar och sista antalet minuter).

Datum	Tid
1 jan	6 : 15
1 feb	8 : 06
1 mrs	10 : 33
1 apr	13 : 14
1 maj	15 : 55
1 jun	18 : 04
1 jul	18 : 24
1 aug	16 : 38
1 sep	14 : 05
1 okt	11 : 24
1 nov	8 : 47
1 dec	6 : 36
31 dec	6 : 14

Vi skall nu göra 7 olika anpassningar till dessa data. För varje metod/anpassning ska du plotta hur den anpassningen ser ut för hela året (som en slät kurva), tillsammans med alla givna mätpunkter (markerade med ringar, kryss eller liknande).

Du får välja själv om du vill plotta flera av kurvorna i samma bild eller plotta kurvorna separat en och en. Tips: `plot`, `subplot`, `polyfit`, `polyval`, `splines`.

De 7 olika anpassningar som skall göras är:

- A)** Ett interpolationspolynom som går genom samtliga punkter.
- B)** Styckvis linjär interpolation genom samtliga punkter.
- C)** Splines-approximation genom samtliga punkter.
- D)** Ett andragradspolynom som bara använder data från 1 juni till 1 augusti för att bestämma koefficienterna.
- E)** Ett minstakvadratanpassat andragradspolynom som bara använder data from 1 april tom 1 september för att bestämma koefficienterna.
- F)** Ett minstakvadratanpassat andragradspolynom som använder samtliga data from 1 januari tom 31 december
- G)** Funktionen $y = c_1 + c_2 \cos(w * x) + c_3 \sin(w * x)$ minstakvadratanpassad till samtliga data från 1 januari till 31 december där $w = 2\pi/365$ (dvs periodtiden 1 år)

När du har dina resultat och kurvor ska vi titta på hur resultatet blev och hur mycket arbete som behövdes för de olika metoderna. Vi betecknar koefficienterna med c_i där för polynomen

$$y(x) = c_1 + c_2 * x + c_3 * x^2 + \dots$$

samt

$$y(x) = c_1 + c_2 * \cos(w * x) + c_3 * \sin(w * x) + \dots$$

i det trigonometriska fallet.

- a)** I vilken ansats behövdes flest koefficienter beräknas (totalt över hela intervallet)? Hur många koefficienter är det?
- b)** Fyra av ansatserna behövde bara beräkna 3 koefficienter totalt, vilka?

I följande frågor ska du ta hänsyn till både noggrannheten i din beräkning och mängden arbete som behövs för att beräkna värdet. Du ska välja en metod som är både noggrann och effektiv.

- c)** Vilken av metoderna A-G är bäst för att beräkna årets längsta dag? Varför? Vilken dag är det och vad blir soltiden?
- d)** Vilken av metoderna A-G är bäst för att beräkna värdet på julafton? Varför? Vad

blir soltiden?

e) Föreslå en bättre metod än A-G för att beräkna värdet på julafton? (Tips: En liten modifiering av en av A-G?)

f) Kan du säga vilken metod som är bäst? Varför?

g) Frivillig: Residualen i G uppvisar ett intressant utseende. Kan du förbättra modellen?

Denna uppgift har många delfrågor men alla är snarlika. Ett varmt tips är därför att återanvända din programkod effektivt.

Lämna in i Canvas: Matlab-kod samt svar på 4abcdef.

Laborant

Uppgift 4 godkänd (datum, lärarsign):

5. Tillförlitlighet

a) Antag att konstanten som ges som 20 i ekvationen i uppgift 2 ökas med 1.0%. Hur många procent påverkas den minsta positiva roten? Hur många procent påverkas den största positiva roten? Påverkas båda rötterna lika mycket? Påverkas de åt samma håll?

b) Om konstanten i stället minskas med 1.0% hur blir förändringarna i rötterna då? Blir det liknande siffror? Försök förklara varför!

c) Antag nu i stället att konstanten 61 i första termen och konstanten 3 i nämnaren i andra termen har en osäkerhet på $\pm 1.0\%$. Beräkna den felgräns som dessa två konstanter osäkerhet ger upphov till för den största positiva roten. Vilken metod valde du?

Lämna in i Canvas: Svar på 5ac. (ingen kod behöver lämnas in).

Laborant:

Uppgift 5 (Lab1) godkänd (datum, lärarsign):

6. Integral med förbehandling. Vi vill beräkna integralen

$$\int_0^\infty \frac{1 - e^{-(x/5)^3}}{5x^3} dx$$

numeriskt med ett totalt fel mindre än 10^{-8} . Du skall först genomföra en förbehandling (deluppgift a-d) så att det förenklade problemet enkelt kan lösas numeriskt med trapetsregeln och därefter beräkna hela integralen med den (deluppgift e-f).

I denna uppgift skall trapetsregeln programmeras själv.

Ni får gärna jämföra era beräknade värden med *tex quad*, *integral*, *trapz* eller analytiska värdet för er egen skull - men inte för att svara på delfrågorna i denna uppgift.

a) Plotta integranden från $x = 0$ till $x = 1 \cdot 10^{-4}$. Varför ser kurvan ut som den gör? Hur borde den se ut? (Du skall senare ta hänsyn till detta i ditt program)

- b) Gör sedan "svanskapning" för att bestämma en ändlig övre gräns B som du vill använda i trapetsregeln senare så att bidraget från "svansen" (dvs \int_B^∞) ska bli tillräckligt litet för att totala felet i integralberäkningen skall bli tillräckligt litet.
- c) Föreslå ett sätt att i din numeriska beräkning integralens värde eliminera effekten av "darrandet" du såg i första deluppgiften. *Tips: Kan du approximera integranden med en liknande funktion?*
- d) Du har nu behandlat både området nära 0 och långt ut. Behövs ytterligare förbehandling för att beräkna integralen med trapetsregeln? Om ja: varför och vad gör du? Om nej: hur visar du att det inte behövs?
- e) Beräkna nu värdet av integralen med trapetsregeln, på ett säkert sätt, tillräckligt noggrant, med dina förbehandlingar ovan och en egenskriven trapetsregel (gärna följd av din egen Richardson-extrapolation).
- f) Skatta felgränsen för ditt svar med din metod. Kom ihåg att ta hänsyn till vad du gjorde i början och slutet av intervallet. *(OBS! Att bara jämföra med analytiska värdet på integralen eller värden från tex `quad` godkänns inte här. Du skall visa hur man gör i den metod du satt ihop. Så som man gör när man inte har en analytisk eller annan methods lösning att jämföra med).*

Lämna in i Canvas: Kod på 6ef. Svar på 6b (kort beskrivning och värdet på B) samt 6ef och en kort beskrivning av tankesättet i 6cd.

Laborant:

Uppgift 6 (Lab1) godkänd (datum, lärarsign):

7. Säker integral

$$\int_0^6 153e^{-\left(\frac{11x-\pi}{0.004}\right)^2} dx$$

- a) Skatta integralen på ett säkert sätt med Matlabs `quad`. Redovisa vilken noggrannhet du har och varför du kan vara säker på ditt värde (minst 8 korrekta siffror krävs). Gör sedan samma med Matlabs `integral`. *Glöm inte visa vad och hur du gjort och visa att det du gjort inte förändrar integralvärdet.*
- b) Olika uppdelningar ger ett svar med olika mycket arbete (olika antal punkter integranden behöver beräknas i). Hur skall man göra uppdelningen för att minimera mängden arbete och ändå få ett bra svar?

Lämna in i Canvas: Kod på 7a. Svar på 7a (integralens värde, med felgräns) och 7b.

Laborant:

Uppgift 7 (Lab1) godkänd (datum, lärarsign):

Exempel på egenskriven funktion i Matlab med flera parametrar:

```
function [f,d]=funkder(x,a,b,c);
    f=a+b*x+c*x.*x;
    d=b+2*c*x;
end
```