东 南 大 学 考 试 卷（A 卷）

课程名称 工程矩阵理论 考试学期 2021 秋 得分

适用专业 工科研究生 考试形式 闭卷 考试时间长度 150 分钟

自觉遵守考场纪律 如考试作弊 此答卷无效

姓名

学号

线 封 密

一.（20%）已知矩阵 $M=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$，$\mathbb{C}^{2\times 2}$ 是复数域上的线性空间，定义其上的变换为：

$f(X)=MX-XM$，$X\in\mathbb{C}^{2\times 2}$.

1. 证明：f 是 $\mathbb{C}^{2\times 2}$ 上的线性变换；

2. 求 f 在基 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 下的矩阵；

3. 分别求核空间 $\mathrm{K}(f)$ 及值域 $\mathrm{R}(f)$ 的一组基及维数；

4. 问：$\mathbb{C}^{2\times 2}=\mathrm{K}(f)\oplus\mathrm{R}(f)$？并说明理由.

二.（16%）设$\mathbb{R}[x]_3=\{ax^2+bx+c\mid a,b,c\in\mathbb{R}\}$ 关于多项式的加法和数乘构成实数域$\mathbb{R}$上的线性空间. 设$r\in\mathbb{R}$，记$V_r=\{f(x)\in\mathbb{R}[x]_3\mid f(r)=0\}$.

1. 证明：V_r是$\mathbb{R}[x]_3$的子空间；

2. 分别求V_0，V_1，$V_0\cap V_1$，V_0+V_1的一组基.

3. 设$\mathbb{R}[x]_3$上内积$\left\langle f(x),g(x)\right\rangle=\int_0^1 f(x)g(x)dx,\ f(x),g(x)\in\mathbb{R}[x]_3$，求$V_0^{\perp}$的一组基.

三.（12%）已知矩阵$A=\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&1&1\end{pmatrix}$，求$M=\begin{pmatrix}O&A\\B&O\end{pmatrix}$的广义逆矩阵$M^+$.

四.（12%）设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$，求 e^A 及 $\det(e^A)$.

五.（20%）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & a & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ 6 & c & b \end{pmatrix}$.

1. 讨论 A 的 Jordan 标准形的可能形式；

2. 问：a, b, c 为何值时，A 相似于 B？

六.（20%）证明题：

1. 设 V 是 n 维欧氏空间且 ω 是 V 中非零向量，定义 V 上的线性变换 f 为：$f(\alpha)=\alpha-\langle\alpha,\omega\rangle\alpha$ 证明：若 f 是 V 上的正交变换，则 $\|\omega\|=\sqrt{2}$.

2. 设 A, B 为同阶 Hermite 阵，且 A 为正定阵. 证明：存在可逆阵 P，使得 $P^H AP$ 与 $P^H BP$ 均为对角阵.

3. 设 $\alpha,\ \beta$ 是 n 维非零列向量，记 $A=\alpha\beta^{\mathrm{H}}$，证明：$\|A\|_F=\|A\|_2$.

4. 设 A 为 Hermite 阵，证明：存在唯一的 Hermite 阵 B，使得 $A=B^3$.