东 南 大 学 考 试 卷（A卷）

课程名称	工程矩阵理论	考试学期	14-15-2	得分	
适用专业	工科研究生	考试形式	闭　卷	考试时间长度	150分钟

自觉遵守考场纪律　如考试作弊　此答卷无效

姓名________ 学号________

线　封　密

一.　（20%）设 $M=\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}$。在线性空间 $C^{2\times2}$ 上定义变换 f 如下：对任意 $X\in C^{2\times2}$，

$f(X)=XM$。

1. 证明：　f 是 $C^{2\times2}$ 上的线性变换。
2. 求 f 在 $C^{2\times2}$ 的基 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$ 下的矩阵 A。
3. 求 f 的特征值及各个特征子空间的基。
4. 问：是否存在 $C^{2\times2}$ 的基，使得 f 的矩阵为对角阵？如存在，请给出这样的一组基及相应的对角阵；如不存在，请给出理由。

二.　（10%）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&1&1\\1&1&0&0\end{pmatrix}$，$R^4$ 的子空间 $W=\left\{x\in R^4\mid Ax=0\right\}$。

1. 求 W 在 R^4 中的正交补空间 $W^{\perp}$ 的一组基；

求向量 $\eta=(1,0,0,0)^T$ 在 $W^{\perp}$ 中的正投影。

三.　（12%）设 V 是 n 维欧氏空间，$\eta\in V$ 且 $\|\eta\|=\sqrt{2}$，a,b 是实数。V 上的线性变换 f 定义如下：对任意 $x\in V$，$f(x)=ax-b<x,\eta>\eta$。问：当 a,b 取何值时 f 是 V 上的正交变换？

四.　（21%）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\-1&0&-1&0\\1&1&2&0\\2&2&2&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}a&b&2&6\\0&0&1&3\\0&0&c&d\\0&0&0&1\end{pmatrix}$。

1. 求 A 的若当标准形，并给出 A 的最小多项式。
2. 将 Ae^{At} 表示成关于 A 的次数不超过 2 的多项式。
3. 问：若 A,B 相似，参数 a,b,c,d 该取什么值？

五. （12%）求矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\0&1&0&2\\0&1&0&1\end{pmatrix}$ 的广义逆矩阵 A^+。

六. （25%）证明题

1. 设 f 是数域 F 上 n 维线性空间 V 上的线性变换，$R(f),K(f)$ 分别表示 f 的值域和核子空间。证明：$R(f)=V$ 的充分必要条件是 $K(f)=\{\theta\}$。

2. 已知矩阵 A,B，分块矩阵 $M=\begin{pmatrix}A&O\\O&B\end{pmatrix}$。若矩阵 2 范数 $\|M\|_F=\|A\|_F$，证明：$B=O$。

3. 设 n 维列向量 η_1,η_2 相互正交，且都是单位向量，矩阵 $A=\eta_1\eta_1^H+2\eta_2\eta_2^H$。证明：$A$ 的广义逆矩阵 $A^+=\eta_1\eta_1^H+\dfrac{1}{2}\eta_2\eta_2^H$。

4. 设 A,B 是同阶 $Hermite$ 矩阵，并且，$A+B,A-B$ 都是正定的，证明：分块矩阵 $\begin{pmatrix}A&B\\B&A\end{pmatrix}$ 也是正定的。

5. 设 A,B 都是 $n\times n$ 矩阵，并且 A 是半正定的。若 $A^2B=BA^2$。证明：$AB=BA$。