仅供参考

东南大学考试卷（A卷）

课程名称 工程矩阵理论 考试学期 19-20 秋 得分

适用专业 工科研究生 考试形式 闭卷 考试时间长度 150 分钟

自觉遵守考场纪律 如考试作弊 此答卷无效

姓名 学号

线 封 密

一.（20%）设 $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$，定义变换 $f: C^{2\times2} \to C^{2\times2}$，$f(X) = XM$.

1. 证明：f 是 $C^{2\times2}$ 上的线性变换；

证：$\forall X, Y \in \mathbb{C}^{2\times2}$，$\forall k, l \in \mathbb{C}$

$f(kX+lY) = (kX+lY)M = kf(X) + lf(Y)$

2. 求 f 在基 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 下的矩阵；

解 $\because f(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}) = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

$\therefore f$ 在基 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 下的矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

3. 分别求 $K(f)$ 及 $R(f)$ 的一组基；

设 $\alpha = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in K(f)$ 则 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in K(A)$.

解 $Ax = \theta$ 得基础解系 $\eta_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\eta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\therefore K(f)$ 的一组基为 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

设 $\beta = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix} \in R(f)$ 则 $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \in R(A)$

取 $R(A)$ 的一组基 $\eta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\eta_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\therefore \beta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\beta_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 为 $R(f)$ 的一组基

4. 问：$C^{2\times2} = K(f) \oplus R(f)$？并说明理由.

答：正确. $\because \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 线性无关

$\therefore \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ 也线性无关 $\therefore K(f) \cap R(f) = \{0\}$

又 $\because \dim \mathbb{C}^{2\times2} = 4$

$\therefore \mathbb{C}^{2\times2} = K(f) \oplus R(f)$

二. (16%) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1 & 0\\ 2 & -1 & -2 & 1\end{pmatrix}$，$W=\{x\in \mathrm{R}^4 \mid Ax=\theta\}$.

1. 求 $W^{\perp}$ 的一组基；

解 $W^{\perp}=K(A)^{\perp}=R(A^H)=\mathrm{span}\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$，其中 $A^H=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$

计算得 α_1,α_2 为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的一个极大无关组

$\therefore$ α_1,α_2 为 $W^{\perp}$ 的一组基

2. 已知 $\eta=(1,0,0,1)^{\mathrm{T}}\in \mathrm{R}^4$，求 $\eta_0\in W$ 使 $\|\eta-\eta_0\|=\min\limits_{\alpha\in W}\|\eta-\alpha\|$.

解 $AX=\theta$ 得 W 的一组基为 $\eta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\eta_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$

设 $\eta_0=k_1\eta_1+k_2\eta_2$. 则 $(\eta-\eta_0)\perp\eta_1$，$(\eta-\eta_0)\perp\eta_2$.

计算得 $k_1=k_2=\frac{1}{2}$，故 $\eta_0=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$.

三. (12%) 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 3 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，求 A 的广义逆矩阵 A^{+}.

解 $A=\begin{pmatrix}0 & A_1\\ A_2 & 0\end{pmatrix}$，其中 $A_1=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$，$A_2=3$.

则 $A^{+}=\begin{pmatrix} & A_2^{+}\\ A_1^{+} & \end{pmatrix}$. $A_2^{+}=\frac{1}{3}$

$\because$ A_1 为行满秩矩阵 $\therefore$ $A_1^{+}=A_1^H(A_1A_1^H)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{3} & 0\\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

$\therefore$ $A^{+}=\begin{pmatrix}0 & 0 & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{3} & 0 & 0\\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}$.

四. (12%) 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&0\\-1&1&-2\end{pmatrix}$，求矩阵 e^A 及行列式 $\det(e^A)$.

解 $C(\lambda)=|\lambda I-A|=\lambda(\lambda+1)^2$ 设J为A的Jordan标准形.

$\because r(A-(-1)I)=2$ $\therefore J=\begin{pmatrix}0&&\\&-1&1\\&&-1\end{pmatrix}$，$|e^A|=e^{\lambda_1}\cdot e^{\lambda_2}\cdot e^{\lambda_3}=e^{-2}$

$\therefore$ A的最小多项式为 $m(\lambda)=\lambda(\lambda+1)^2$

可设 $f(x)=a+bx+cx^2$，$g(x)=e^x$ 使得 $e^A=g(A)=f(A)$.

且 $\begin{cases}f(0)=g(0)\\f(-1)=g(-1)\\f'(-1)=g'(-1)\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1\\b=2-3e^{-1}\\c=1-2e^{-1}\end{cases}$ $\therefore e^A=\begin{pmatrix}2e^{-1}&3-5e^{-1}&e^{-1}\\0&1&0\\-e^{-1}&3e^{-1}-1&0\end{pmatrix}$

五. (14%) 设 α,β 为 n 维列向量，记 $A=\alpha\beta^H$，$a=\beta^H\alpha$.

1. 求 A 的特征多项式;

解 $\because r(A)\le r(\alpha)\le 1$ $\therefore J_A=\begin{pmatrix}\lambda_1&\\&0\end{pmatrix}$ $\therefore \lambda_1=trA=tr\beta^H\alpha=a$.

$\therefore C(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)\lambda^{n-1}=(\lambda-a)\lambda^{n-1}$.

2. 讨论 A 的 Jordan 标准形.

(1). $\alpha\cdot\beta^H=0$ 则 $J=0$

(2). $\alpha\cdot\beta^H\neq 0$ 即 $r(A)=1$.

(i). $a\neq 0$ $J=\begin{pmatrix}a&&&\\&0&&\\&&\ddots&\\&&&0\end{pmatrix}$

(ii) $a=0$

则 $J=\begin{pmatrix}0&1&&\\&0&&\\&&\ddots&\\&&&0\end{pmatrix}$

六.（26%）证明题：

1. 设 V 是欧氏空间且 $\omega\ (\neq\theta)\in V$，定义 V 上的线性变换 f 为：$f(\alpha)=\alpha-2\langle\alpha,\omega\rangle\omega$. 证明：若 f 是 V 上的正交变换，则 $\|\omega\|=1$.

证：∵ f 是 V 上的正交变换 ∴ $\|\alpha\|^2=\|f(\alpha)\|^2$，$\forall\alpha\in V$

∴ $\langle\alpha,\alpha\rangle=\langle f(\alpha),f(\alpha)\rangle=\langle\alpha,\alpha\rangle-4\langle\alpha,\omega\rangle^2+4\langle\alpha,\omega\rangle^2\|\omega\|^2$

∴ $\langle\alpha,\omega\rangle^2=\langle\alpha,\omega\rangle^2\|\omega\|^2$，$\forall\alpha\in V$

令 $\alpha=\omega$ ∵ $\omega\neq\theta$ ∴ $1=\|\omega\|$.

2. 设 $\mathrm{r}(A)=r$ 且 A^+ 是矩阵 A 的广义逆，证明：$\mathrm{r}(AA^+)=\mathrm{r}(A)$，且矩阵 AA^+ 相似于 $\begin{pmatrix}I_r & \\ & O\end{pmatrix}$.

证：$r(AA^+)\leq r(A)$

又∵ $A=AA^+A$ ∴ $r(A)\leq r(AA^+)$

∴ $r(AA^+)=r(A)$

∵ $(AA^+)^2=AA^+AA^+=AA^+$ ∴ $\varphi(x)=x^2-x$ 为 ~~A~~ 的一个化零多项式

∴ AA^+ 的特征值为 0 或 1

又∵ $(AA^+)^H=AA^+$，$r(AA^+)=r(A)=r$ ∴ $AA^+\sim\begin{pmatrix}I_r & \\ & 0\end{pmatrix}$

3. 设 A 是 n 阶非零方阵，证明：$\|A\|_F=\|A\|_2$ 的充分必要条件是 $\mathrm{r}(A)=1$.

证：$\|A\|_F=\|A\|_2 \Leftrightarrow \sqrt{tr(A^HA)}=\sqrt{\rho(A^HA)}$

又∵ $\forall\theta\neq x\in\mathbb{C}^n$ $x^H(A^HA)x=\langle Ax,Ax\rangle\geqslant0$ 且 A^HA 为 H 阵

∴ A^HA 为半正定阵 ∴ $A^HA\sim\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$，$\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n\geqslant0$

∴ $\sqrt{tr(A^HA)}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i}$，$\sqrt{\rho(A^HA)}=\sqrt{\lambda_1}$

∴ $\|A\|_F=\|A\|_2 \Leftrightarrow \lambda_2=\cdots=\lambda_n=0 \Leftrightarrow r(A^HA)=1 \Leftrightarrow r(A)=1$

4. 设 f 是 V 上的线性变换，证明：$V = \mathrm{K}(f) \oplus \mathrm{K}(I-f) \Leftrightarrow f^2 = f$.

证："$\Rightarrow$" $\forall \alpha \in V$ $\exists \alpha_1 \in K(f)$, $\alpha_2 \in K(I-f)$ 即 $f(\alpha_1)=\theta$, $\alpha_2 = f(\alpha_2)$

s.t. $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$

$\therefore$ $f(\alpha) = f(\alpha_1) + f(\alpha_2) = \theta + \alpha_2$

$f^2(\alpha) = f(\theta + \alpha_2) = f(\alpha_2) = \alpha_2$

$\therefore$ $f^2(\alpha) = f(\alpha)$, $\forall \alpha \in V$.

"$\Leftarrow$" (1) $K(f) \cap K(I-f) = \{\theta\}$.

设 $\alpha \in K(f) \cap K(I-f)$.

则 $f(\alpha) = \theta$, $(I-f)(\alpha) = \theta$ 即 $\alpha = f(\alpha)$

$\therefore$ $\alpha = f(\alpha) = \theta$.

(2). $V = K(f) \dotplus K(I-f)$

$\because f^2 = f$ $\therefore \forall \alpha \in V$

$f(\alpha - f(\alpha)) = \theta$

$\therefore \alpha - f(\alpha) \in K(f)$

又 $(I-f)(f(\alpha)) = f(\alpha) - f^2(\alpha)$

$= \theta$

$\therefore f(\alpha) \in K(I-f)$

$\therefore \alpha = \alpha - f(\alpha) + f(\alpha)$

$\in K(f) + K(I-f)$

5. 设 A 是 n 阶正定阵，α 为 n 维列向量，证明：$\left|A + \alpha\alpha^{\mathrm{H}}\right| = |A| \Leftrightarrow \alpha = \theta$.

证："$\Rightarrow$" $\because$ A正定，$\alpha\alpha^H$ 半正定

$\therefore$ 存在可逆阵 P

使 $P^H A P = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}$ $d_i > 0$.

$P^H(\alpha\alpha^H)P = \begin{pmatrix} k_1 & & \\ & \ddots & \\ & & k_n \end{pmatrix}$ $k_i \geq 0$

$\because |A + \alpha\alpha^H| = |A|$

$\therefore |P^H(A + \alpha\alpha^H)P| = |P^H A P|$

即 $\prod d_i = \prod (d_i + k_i)$

$\therefore k_i = 0$ $\therefore \alpha = \theta$

"$\Leftarrow$" $\because \alpha = \theta$

$\therefore \alpha\alpha^H = 0$

$\therefore |A + \alpha\alpha^H| = |A|$