东 南 大 学 考 试 卷（A 卷）

课程名称	工程矩阵理论	考试学期	2021 秋	得分	
适用专业	工科研究生	考试形式	闭卷	考试时间长度	150 分钟

自觉遵守考场纪律 如考试作弊 此答卷无效

姓名 学号

线 封 密

一.（20%）已知矩阵 $M=\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}$，$\mathbb{C}^{2\times2}$ 是复数域上的线性空间，定义其上的变换为：

$f(X)=MX-XM,\ X\in\mathbb{C}^{2\times2}$.

1. 证明：f 是 $\mathbb{C}^{2\times2}$ 上的线性变换；

$\forall X,Y\in\mathbb{C}^{2\times2},k,l\in\mathbb{C}$，则

$f(kX+lY)=M(kX+lY)-(kX+lY)M=\cdots=kf(X)+lf(Y).$

2. 求 f 在基 E_{11}，E_{12}，E_{21}，E_{22} 下的矩阵；

$$f(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})=(f(E_{11}),f(E_{12}),f(E_{21}),f(E_{22}))$$
$$=(E_{21},-E_{11}-E_{12}+E_{22},E_{21},-E_{21})$$
$$=(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\0&-1&0&0\\1&0&1&-1\\0&1&0&0\end{pmatrix}.$$

3. 分别求核空间 $\mathrm{K}(f)$ 及值域 $\mathrm{R}(f)$ 的一组基及维数；

设 $X=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\mathrm{K}(f)$，则 $f(X)=\begin{pmatrix}-b&-b\\a+c-d&b\end{pmatrix}=O$，即 $X=\begin{pmatrix}a&0\\c&a+c\end{pmatrix}$，

故 $E_{11}+E_{22},E_{21}+E_{22}$是$\mathrm{K}(f)$的一组基, 且 $\dim\mathrm{K}(f)=2$.

$\mathrm{R}(f)=span\{f(E_{11}),\ldots,f(E_{22})\}=span\{E_{21},-E_{11}-E_{12}+E_{22}\}$，

故$E_{21},-E_{11}-E_{12}+E_{22}$是$\mathrm{R}(f)$的一组基, 且 $\dim\mathrm{R}(f)=2$.

4. 问：$\mathbb{C}^{2\times2}=\mathrm{K}(f)\oplus\mathrm{R}(f)$？并说明理由.

正确，因为可证$E_{11}+E_{22},E_{21}+E_{22},E_{21},-E_{11}-E_{12}+E_{22}$线性无关，
即为$\mathbb{C}^{2\times2}$的一组基.

二.（16%）设 $\mathbb{R}[x]_3=\{ax^2+bx+c\mid a,b,c\in\mathbb{R}\}$ 关于多项式的加法和数乘构成实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间．设 $r\in\mathbb{R}$，记 $V_r=\{f(x)\in\mathbb{R}[x]_3\mid f(r)=0\}$．

1. 证明：V_r 是 $\mathbb{R}[x]_3$ 的子空间；

设 $f(x),g(x)\in V_r,\ k,l\in\mathbb{R}$，即 $f(r)=g(r)=0$，则
$kf(r)+lg(r)=0$．所以 $kf(x)+lg(x)\in V_r$．

2. 分别求 V_0，V_1，$V_0\cap V_1$，V_0+V_1 的一组基．

$V_0=span\{x^2,x\}$，基：x^2,x
$V_1=span\{x^2-1,x-1\}$，基：$x^2-1,x-1$
$V_0\cap V_1=span\{x^2-x\}$，基：$x^2-x$
$V_0+V_1=span\{x^2,x,1\}$，基：$1,x,x^2$

3. 设 $\mathbb{R}[x]_3$ 上内积 $\langle f(x),g(x)\rangle=\int_0^1 f(x)g(x)dx,\ f(x),g(x)\in\mathbb{R}[x]_3$，求 $V_0^{\perp}$ 的一组基．

设 $f(x)=ax^2+bx+c\in V_0^{\perp}$，则

$$\begin{cases}\int_0^1(ax^2+bx+c)x^2dx=0\\ \int_0^1(ax^2+bx+c)xdx=0\end{cases}，\ 即\begin{cases}\frac{1}{5}a+\frac{1}{4}b+\frac{1}{3}c=0\\ \frac{1}{4}a+\frac{1}{3}b+\frac{1}{2}c=0\end{cases}，V_0^{\perp}的基:\frac{10}{3}x^2-4x+1.$$

三．（12%）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&1&1\end{pmatrix}$，求 $M=\begin{pmatrix}O&A\\B&O\end{pmatrix}$ 的广义逆矩阵 M^+．

$$A^+=A^{-1}=\begin{pmatrix}1/2&0\\0&1/3\end{pmatrix},\quad B^+=B^{\mathrm{H}}(BB^{\mathrm{H}})^{-1}=\begin{pmatrix}0&1/3\\-1/2&5/6\\1/2&-1/6\end{pmatrix}$$

$$M^+=\begin{pmatrix}O&B^+\\A^+&O\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&1/3\\0&0&-1/2&5/6\\0&0&1/2&-1/6\\1/2&0&0&0\\0&1/3&0&0\end{pmatrix}$$

四. (12%) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&-1&0\\-1&0&-2\end{pmatrix}$，求 e^A 及 $\det(e^A)$.

$|\lambda I-A|=\lambda(\lambda+1)^2, \mathrm{r}(J+I)=\mathrm{r}(A+I)=1, J=\begin{pmatrix}0&&\\&-1&\\&&-1\end{pmatrix}$,

所以$m(\lambda)=\lambda(\lambda+1)$.设$f(x)=a+bx, g(x)=e^x$.

$\begin{cases}f(0)=g(0)\\f(-1)=g(-1)\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=1\\b=1-e^{-1}\end{cases}$，即$e^A=\begin{pmatrix}2-e^{-1}&0&2-2e^{-1}\\0&e^{-1}&0\\e^{-1}-1&0&2e^{-1}-1\end{pmatrix}$.

$\det(e^A)=e^{\mathrm{tr}(A)}=e^{-2}$.　　——2'

五. (20%) 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&a&4\\0&0&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&0&0\\5&2&0\\6&c&b\end{pmatrix}$.

1. 讨论 A 的 Jordan 标准形的可能形式；

当$a=1, C(\lambda)=(\lambda-1)^3, \mathrm{r}(J_A-I)=\mathrm{r}(A-I)=2, J_A=\begin{pmatrix}1&1&\\&1&1\\&&1\end{pmatrix}$,

当$a\neq 1, C(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda-a), \mathrm{r}(J_A-I)=\mathrm{r}(A-I)=\begin{cases}1, a=11/3\\2, a\neq 11/3\end{cases}$.

所以若$a=11/3, J_A=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&11/3\end{pmatrix}$;若$a\neq 1$且$a\neq 11/3, J_A=\begin{pmatrix}1&1&\\&1&\\&&a\end{pmatrix}$

2. 问：a, b, c 为何值时，A 相似于 B？

因为$A\sim B$,所以A, B有相同特征值,则$a=2, b=1$.

此时,$J_A=\begin{pmatrix}1&1&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}=J_B$.

则$\mathrm{r}(B-I)=\mathrm{r}(J_B-I)=\mathrm{r}(J_A-I)=2$,所以$c\neq 6/5$.

六.（20%）证明题：

1. 设 V 是 n 维欧氏空间且 ω 是 V 中非零向量，定义 V 上的线性变换 f 为：$f(\alpha)=\alpha-\langle\alpha,\omega\rangle\omega$. 证明：若 f 是 V 上的正交变换，则 $\|\omega\|=\sqrt{2}$.

2. 设 A,B 为同阶 Hermite 阵，且 A 为正定阵. 证明：存在可逆阵 P，使得 $P^H AP$ 与 $P^H BP$ 均为对角阵.

3. 设 $\alpha,\ \beta$ 是 n 维非零列向量，记 $A=\alpha\beta^{\mathrm{H}}$，证明：$\|A\|_F=\|A\|_2$.

4. 设 A 为 Hermite 阵，证明：存在唯一的 Hermite 阵 B，使得 $A=B^3$.