东 南 大 学 考 试 卷（A 卷）

课程名称	工程矩阵理论	考试学期	2022年春	得分	
适用专业	工科研究生	考试形式	闭卷	考试时间长度	150分钟

自觉遵守考场纪律 如考试作弊 此答卷无效

姓名

学号

线 封 密

一.（20%）已知矩阵 $M=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$，复数域 C 上线性空间 $C^{2\times 2}$ 上的变换 f 定义如下：

$$\forall X\in\mathbb{C}^{2\times 2}\ ,\qquad f(X)=XM\ .$$

1. 证明：f 是 $C^{2\times 2}$ 上的线性变换.

2. 求 f 在基 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 下的矩阵.

3. 求 f 的值域 $R(f)$ 及核子空间 $K(f)$ 的一组基.

4. 问 $C^{2\times 2}=R(f)+K(f)$ 是否成立？请说明你的理由.

二.（14%）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\1&2&2&3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&2&1&2\\1&3&2&3\end{pmatrix}$. C^4 的子空间

$$V_1=\{x\mid Ax=\theta\}，\quad V_2=\left\{x\mid Bx=\theta\right\}.$$

1. 求 $V_1\cap V_2$ 的一组基.

2. 求 $V_1^{\perp}$ 的一组标准正交基.

三（20%）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&0&-1\\1&2&0\\1&2&0\end{pmatrix}$，分别求 A^+ 和多项式 $f(\lambda)$ 使得 $f(A)=e^{At}$.

四. (12%). 已知V是n维欧氏空间，$\omega \in V$，且$\|\omega\| = \sqrt{2}$，a,b是实数. V上的线性变换f定义如下： $\forall x \in V$， $f(x) = ax + b < x, \omega > \omega$. 若$f$是正交变换，求参数$a,b$的值.

五. (14%) 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -8 \\ 0 & 0 & 4 & -5 \end{pmatrix}$， $B = \begin{pmatrix} b & c & 7 & 3 \\ 0 & b & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

1. 根据参数a的值，求A的 **Jordan** 标准形；

2. 问：参数a,b,c取什么值的时候， A,B相似？

六.（**20%**）证明题：

1. 设 A 是 n 阶正规阵，若 A 的特征值都是实数，证明： A 是 **Hermite** 矩阵**.**

2. 对任意 $s\times n$ 矩阵 A，证明： $r(A)=r(A^{+})$.

3. 设 α,β 都是列向量，矩阵 $A=\alpha\beta^{H}$，证明：$\|A\|_F=\|A\|_2$**.**

4. 设 A,B 为 n 阶正定矩阵， 证明：对于行列式，不等式 $|A+B|\geq|A|+|B|$ 成立**.**