仅供参考

东南大学考试卷

课程名称	工程矩阵理论	考试学期	2020 秋	得分	
适用专业	工科硕士研究生	考试形式	闭 卷	考试时间长度	150 分钟

题号	一	二	三	四	五	六
扣分						

自觉遵守考场纪律 如考试作弊 此答卷无效

姓名 学号

线 封 密

一． （20%）设 $M\in C^{n\times n}$，$V_M=\{X\in C^{n\times n}\mid MX=XM\}$.

1. 证明：V_M 是 $C^{n\times n}$ 的子空间.

证：$\forall X,Y\in C^{n\times n}$，$\forall k,l\in C$

$M(kX+lY)=kMX+lMY=(kX+lY)M$ $\therefore kX+lY\in V_M$

2. 设 $n=2$，$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}$.分别求 $V_A,V_B,V_A\cap V_B,V_A+V_B$ 的一组基.

V_A 的一组基 $X_1=\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\end{pmatrix}$，$X_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ （计算过程略）

V_B 的一组基 $X_3=\begin{pmatrix}-1&0\\1&0\end{pmatrix}$ $X_4=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

V_A+V_B 的一组基 X_1,X_2,X_3.

$\because \dim V_A\cap V_B=\dim V_A+\dim V_B-\dim(V_A+V_B)=2+2-3=1$

$\therefore V_A\cap V_B$ 的基为 $X_5=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

二． （10%）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&-1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0&0\\0&3\end{pmatrix}$，求 $M=\begin{pmatrix}O&A\\B&O\end{pmatrix}$ 的广义逆矩阵 M^+.

解. $M^+=\begin{pmatrix}&B^+\\A^+&\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&0&0\\\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&0&0\\\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&0&0\end{pmatrix}$ （计算过程略）

仅供参考

三． （20%）已知$C^{2\times 2}$上的线性变换f定义如下：

$$\text{对任意 } X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in C^{2\times 2},\quad f(X)=\begin{pmatrix} a+b & 2a+2b \\ c+2d & c+2d \end{pmatrix}.$$

1. 求f在$C^{2\times 2}$的基$E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$下的矩阵$A$；

$$f(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})=(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. 求f的特征值及相应的特征子空间的基；

$|\lambda I-A|=\lambda^2(\lambda-3)^2$ ∴ f的特征值为 $\lambda_1=0$（二重），$\lambda_2=3$（二重）

对于 $\lambda_1=0$ $AX=0$ 有基础解系 $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

所以相应的特征子空间的基 $X_1=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$X_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

对于 $\lambda_2=3$，$(A-3I)X=0$ 有基础解系 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

所以相应的特征子空间的基 $X_3=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$X_4=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

3. 问：是否存在$C^{2\times 2}$的基，使得f的矩阵是对角阵？如存在，请给出这样的一组基及相应的对角阵；如不存在，请给出理由.

存在．因为特征值的代数重数＝几何重数

$$f(X_1,X_2,X_3,X_4)=(X_1,X_2,X_3,X_4)\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 3 & \\ & & & 3 \end{pmatrix}$$

仅供参考

四．（12%）设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&2&0&2\\-2&0&2&1\end{pmatrix}$，向量$\eta=(1,0,0,0)^T$，$R^4$的子空间

$V=\{x\in R^4\mid Ax=0\}$.

1. 求V在R^4中的正交补空间$V^\perp$的一组基.

解 $V=K(A)$，则 $V^\perp=R(A^H)$ $\therefore \alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\2\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}-2\\0\\2\\1\end{pmatrix}$ 为$V^\perp$的一组基

2. 求η在$V^\perp$中的正投影.

解：设η在$V^\perp$中的正投影 $\beta=a\alpha_1+b\alpha_2$

则 $\langle\beta-\eta,\alpha_i\rangle=0$，$i=1,2$. 解得 $a=\frac{1}{9}$，$b=-\frac{2}{9}$

$\therefore x=\begin{pmatrix}5/9\\2/9\\-4/9\\0\end{pmatrix}$ （建立关于a, b的方程组略）

五．（20%）已知矩阵$A=\begin{pmatrix}3&0&8\\3&a&6\\-2&0&-5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&1&c\\0&0&b\end{pmatrix}$相似.

1. 确定参数a,b,c的取值；

解 $\because A\sim B$ $\therefore tr(A)=tr(B)$，$|A|=|B|$ 得 $a=1$，$b=-1$

可得 $J_A=\begin{pmatrix}1&&\\&-1&1\\&&-1\end{pmatrix}$ 过程略） $\therefore r(B+I)=r(J_A+I)=2$

$\therefore c\neq 2$

2. 求一个多项式$p(x)$，使得$e^A=p(A)$.

解：$\because$ $C_A(\lambda)=|\lambda I-A|=(\lambda+1)^2(\lambda-1)$

可设 $p(x)=a+bx+cx^2$ 且有 $e^A=p(A)$，令 $f(x)=e^x$

则 $f(-1)=p(-1)$，$f'(-1)=p'(-1)$，$f(1)=p(1)$

得 $\begin{cases}e^{-1}=a-b+c\\e^{-1}=b-2c\\e^{1}=a+b+c\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\frac{1}{4}(e+5e^{-1})\\b=\frac{e-e^{-1}}{2}\\c=\frac{e-3e^{-1}}{4}\end{cases}$

$\therefore p(x)=\frac{1}{4}(e+5e^{-1})+\frac{1}{2}(e-e^{-1})x+\frac{1}{4}(e-3e^{-1})x^2$

仅供参考

六．（18%）证明题：

1. 已知$\|\cdot\|_{m_\infty}$是$C^{n\times n}$上矩阵∞范数，实数$a\ge n$.证明：由$\|A\|_a = a\|A\|_{m_\infty}$

（$\forall A\in C^{n\times n}$）定义的$C^{n\times n}$上的范数是相容的.

证：(1) $\forall A\neq 0$, $\|A\|_a = a\|A\|_{m_\infty}>0$

(2) $\forall k\in\mathbb{C}, A\in\mathbb{C}^{n\times n}$, $\|kA\|_a = a\|kA\|_{m_\infty} = |k|a\|A\|_{m_\infty} = |k|\|A\|_a$

(3) $\forall A,B\in\mathbb{C}^{n\times n}$, $\|A+B\|_a = a\|A+B\|_{m_\infty}\le a(\|A\|_{m_\infty}+\|B\|_{m_\infty}) = \|A\|_a+\|B\|_a$

(4) $\forall A,B\in\mathbb{C}^{n\times n}$, $\|AB\|_a = a\|AB\|_{m_\infty} = a\max\limits_{i,j}\{|\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}|\} \le a\max\limits_{i,j}\{|a_{ij}|\}\times\max\limits_{j}\{\sum_{k=1}^n |b_{kj}|\}$

$\le a\cdot\|A\|_{m_\infty}\cdot n\cdot\|B\|_{m_\infty}$

$\le a\cdot\|A\|_{m_\infty}\cdot a\cdot\|B\|_{m_\infty}$

$=\|A\|_a\cdot\|B\|_a$

2. 已知α,β是n维非零列向量，矩阵$A=\alpha\beta^H$.证明：$A^+ = [tr(A^HA)]^{-1}A^H$.

证：由条件得 $A=\alpha\beta^H$为A的满秩分解

∴ $A^+ = (\beta^H)^H(\beta^H\beta)^{-1}(\alpha^H\alpha)^{-1}\alpha^H = (\beta^H\beta)^{-1}(\alpha^H\alpha)^{-1}\beta\alpha^H$

又∵ $tr(A^HA) = tr(\beta\alpha^H\alpha\beta^H) = \alpha^H\alpha\, tr(\beta\beta^H) = (\alpha^H\alpha)\cdot(\beta^H\beta)$

∴ $A^+ = [tr(A^HA)]^{-1}A^H$

3. 设A是n阶Hermite矩阵，α是n维列向量，且$\alpha^H\alpha<1$.证明$I-\alpha\alpha^H$是正定阵，

且$A-A\alpha\alpha^H$相似于实对角阵.

证：∵ $\alpha\alpha^H \sim \begin{pmatrix}\alpha^H\alpha & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0\end{pmatrix}$ ∴ $I-\alpha\alpha^H\sim \begin{pmatrix}1-\alpha^H\alpha & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{pmatrix}$

∵ $I-\alpha\alpha^H$为H阵，$1-\alpha^H\alpha>0$ ∴ $I-\alpha\alpha^H$为正定阵

∴ 存在可逆阵P，使得 $I-\alpha\alpha^H = P^HP$

∴ $A-A\alpha\alpha^H = A(I-\alpha\alpha^H) = AP^HP \sim PAP^H = B$

∵A为H阵 ∴B为H阵 ∴ B相似于实对角阵

4. 设A是$n\times n$矩阵.证明：矩阵方程$A^2X=A$有解当且仅当$C^n = R(A)+K(A)$.

证："⇐" ∵ $\mathbb{C}^n = R(A)+K(A)$ ∴ ∀基本单位向量e_i，存在α_i,β_i使得 $e_i = A\alpha_i+\beta_i$

其中$\alpha_i\in\mathbb{C}^n$，$\beta_i\in K(A)$.

∴ $I_n = (e_1,\cdots,e_n) = (A\alpha_1+\beta_1,\cdots,A\alpha_n+\beta_n)$

∴ $A = AI_n = A(A\alpha_1+\beta_1,\cdots,A\alpha_n+\beta_n) = (A^2\alpha_1+A\beta_1,\cdots,A^2\alpha_n+A\beta_n) = (A^2\alpha_1,\cdots,A^2\alpha_n)$

$=A^2(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ ∴ $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$为$A^2X=A$的解

"⇒" 设$A^2B=A$ 则 $\forall\alpha\in\mathbb{C}^n$,

$\alpha = AB\alpha+\alpha-AB\alpha$， $AB\alpha\in R(A)$， $A(\alpha-AB\alpha) = (A-A^2B)\alpha = 0\alpha = 0$

∴ $\alpha-AB\alpha\in K(A)$

∴ $\mathbb{C}^n\subseteq R(A)+K(A)$ 又∵ $R(A)+K(A)\subseteq\mathbb{C}^n$ ∴ $\mathbb{C}^n = R(A)+K(A)$