# 东南大学考试卷

课程名称 工程矩阵理论 考试学期 2020秋 得分

适用专业 工科硕士研究生 考试形式 闭卷 考试时间长度 150分钟

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 扣分 | | | | | | |

自觉遵守考场纪律 如考试作弊 此答卷无效

姓名

学号

线 封 密

一. (20%) 设$M\in C^{n\times n}$，$V_M=\{X\in C^{n\times n}\mid MX=XM\}$.

1. 证明：$V_M$是$C^{n\times n}$的子空间.

2. 设$n=2$，$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}$.分别求$V_A,V_B,V_A\cap V_B,V_A+V_B$的一组基.

二. (10%) 设矩阵$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&-1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0&0\\0&3\end{pmatrix}$，求$M=\begin{pmatrix}O&A\\B&O\end{pmatrix}$的广义逆矩阵$M^+$.

三．（20%）已知$C^{2\times2}$上的线性变换$f$定义如下：

$$对任意 X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in C^{2\times2},\qquad f(X)=\begin{pmatrix} a+b & 2a+2b \\ c+2d & c+2d \end{pmatrix}.$$

1．求$f$在$C^{2\times2}$的基$E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$下的矩阵$A$；

2．求$f$的特征值及相应的特征子空间的基；

3．问：是否存在$C^{2\times2}$的基，使得$f$的矩阵是对角阵？如存在，请给出这样的一组基及相应的对角阵；如不存在，请给出理由.

四. （12%）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&0&2\\-2&0&2&1\end{pmatrix}$，向量 $\eta=(1,0,0,0)^T$，$R^4$ 的子空间

$V=\left\{x\in R^4 \mid Ax=0\right\}$.

1. 求 $V$ 在 $R^4$ 中的正交补空间 $V^{\perp}$ 的一组基.

2. 求 $\eta$ 在 $V^{\perp}$ 中的正投影.

五. （20%）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&0&8\\3&a&6\\-2&0&-5\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&1&c\\0&0&b\end{pmatrix}$ 相似.

1. 确定参数 $a$、$b,c$ 的取值;

2. 求一个多项式 $p(x)$，使得 $e^A=p(A)$.

六. （18%）证明题：

1. 已知$\|\bullet\|_{m_\infty}$ 是$C^{n\times n}$上矩阵$\infty$范数，实数$a\geq n$.证明：由$\|A\|_a = a\|A\|_{m_\infty}$

（$\forall A\in C^{n\times n}$）定义的$C^{n\times n}$上的范数是相容的.

2. 已知$\alpha,\beta$是$n$维非零列向量，矩阵$A=\alpha\beta^H$ .证明：$A^+ = [tr(A^H A)]^{-1}A^H$ .

3. 设$A$是$n$阶 Hermite 矩阵，$\alpha$是$n$维列向量，且$\alpha^H\alpha<1$.证明$I-\alpha\alpha^H$是正定阵，

且$A-A\alpha\alpha^H$相似于实对角阵.

4. 设$A$是$n\times n$矩阵.证明：矩阵方程$A^2X=A$有解当且仅当$C^n = R(A)+K(A)$.