

系泊系统的设计

摘要

本文针对一个具体的近浅海观测网的传输节点，通过其各部件间的力学关系建立了力学模型对其进行分析求解。首先分析了题目的要求，考虑到实际海况、实际系统的复杂性和不确定性，进行了适当的简化，从而减弱了建模过程的复杂性和不可行性。

问题 1，对于各种因素与条件均已给出的传输节点，以理论力学为基础，首先进行了整体与部分的受力分析，基本得出了各物体间力的大小与方向的表达式；然后对单个物体进行力矩分析，得出锚链形态方程以及各钢管、钢桶的倾斜角度的表达式。然后，我们就锚链是否会卧底进行了讨论，联立各方程，用软件 lingo 求解，给出了锚链卧底的临界条件，并分情况计算了风速为 12m/s 和 24m/s 时浮标吃水深度和剩余未知量。

问题 2，在问题 1 基础上，我们设重物质量为未知，考虑钢桶的倾斜角度小于 5° ，锚链在锚点与海床夹角不超过 16° 两个约束条件，通过非线性规划解出了重物球质量。

问题 3，对于系泊系统的设计，首先确定了风力、水流力、水深的极限情况，然后通过分析锚链型号、锚链长度、重物球质量三个因素的变化与浮标吃水深度、游动区域半径和钢桶倾斜角度变化情况的关系，建立了综合评价三者的指标——不稳定性指标。基于此指标，设计了一个钢管倾斜角度和锚链在锚点与海床夹角均在临界值下的系泊系统；接着放宽角度条件：令其中一个角度为临界角度值，求出在另一个角度变化的情况下，锚链型号、锚链长度和重物球质量三个因素组成的函数的变化范围，得到两组非线性规划条件，然后将五种型号分别代入非线性规划条件中，利用已经建立的不稳定性指标，得出五种型号对应的五组解，最后将五组解回代入不稳定性指标，即可得到锚链型号、锚链长度、重物球质量的最优解。

关键词：理论力学 lingo 求解 系泊系统 控制变量 非线性规划

一 问题重述

近浅海观测网的传输节点由浮标系统、系泊系统和水声通讯系统组成(如图1所示)。某型传输节点的浮标系统可简化为底面直径 2m、高 2m 的圆柱体,浮标的质量为 1000kg。系泊系统由钢管、钢桶、重物球、电焊锚链和特制的抗拖移锚组成。锚的质量为 600kg,锚链选用无档普通链环,近浅海观测网的常用型号及其参数在附表中列出。钢管共 4 节,每节长度 1m,直径为 50mm,每节钢管的质量为 10kg。要求锚链末端与锚的链接处的切线方向与海床的夹角不超过 16 度,否则锚会被拖行,致使节点移位丢失。水声通讯系统安装在一个长 1m、外径 30cm 的密封圆柱形钢桶内,设备和钢桶总质量为 100kg。钢桶上接第 4 节钢管,下接电焊锚链。钢桶竖直时,水声通讯设备的工作效果最佳。若钢桶倾斜,则影响设备的工作效果。钢桶的倾斜角度(钢桶与竖直线的夹角)超过 5 度时,设备的工作效果较差。为了控制钢桶的倾斜角度,钢桶与电焊锚链链接处可悬挂重物球。

系泊系统的设计问题就是确定锚链的型号、长度和重物球的质量,使得浮标的吃水深度和游动区域及钢桶的倾斜角度尽可能小。

(1) 某型传输节点选用 II 型电焊锚链 22.05m,选用的重物球的质量为 1200kg。现将该型传输节点布放在水深 18m、海床平坦、海水密度为 $1.025 \times 10^3 \text{kg/m}^3$ 的海域。若海水静止,分别计算海面风速为 12m/s 和 24m/s 时钢桶和各节钢管的倾斜角度、锚链形状、浮标的吃水深度和游动区域。

(2) 在问题 1 的假设下,计算海面风速为 36m/s 时钢桶和各节钢管的倾斜角度、锚链形状和浮标的游动区域。请调节重物球的质量,使得钢桶的倾斜角度不超过 5 度,锚链在锚点与海床的夹角不超过 16 度。

(3) 由于潮汐等因素的影响,布放海域的实测水深介于 16m~20m 之间。布放点的海水速度最大可达到 1.5m/s、风速最大可达到 36m/s。请给出考虑风力、水流力和水深情况下的系泊系统设计,分析不同情况下钢桶、钢管的倾斜角度、锚链形状、浮标的吃水深度和游动区域。

二 问题分析

对于问题一,要分别对整体和个体进行受力分析,明确各物体之间的受力情况,建立几何模型。根据不同的分析对象,灵活得考虑受力平衡和力矩平衡,理清受力方向和倾斜角度的关系;可以把水的深度为突破口,将长度和角度关系转化到竖直方向上,列

出若干方程并求解。不可忽略的是，由于风载荷大小不同，需要对锚链是否卧底进行讨论，给出卧底的临界条件，并根据风速大小的不同分类讨论，从而计算出不同风速时钢管倾斜程度、浮标吃水深度以及游动区域。

对于问题二，与问题一比较，多出了重物球的质量这一未知量。为了调节重物球的质量，我们同时考虑钢桶的倾斜角不超过 5° ，锚链在锚点的夹角不超过 16° ，这样可以列出一个非线性规划的方程，用 Lingo 软件可求得解。

对于问题三，题中给出了水深，最大风速、布放点海水速度，要求设计一套系泊系统，并分析不同情况下系泊系统性能。从工程实际出发，必须把系统的安全性能放在首位，也就是说，系泊系统必须要在最极端的情况下能正常工作使用，因而，这就需要首先确定极端条件，并在极端条件的情况下进行分析。然后，需要明确锚链型号、锚链长度、重物球质量三个因素的变化与浮标吃水深度、游动区域半径和钢桶倾斜角度变化情况的关系，为了选择出一套方案，则必须建立一套评判标准，使得不同的方案之间有比较的依据，优选的，我们可以得到一套最佳方案。与问题一相比较，本题中锚链型号、长度、重物球的质量均为未知，那么不妨先选定锚链型号，再依照第一、二问的分析方法，先假定钢桶、锚链与地面的临界倾角已知，随后逐步加上约束条件，并在可行方案中选择一套。最后，不同情况下各参数的值也就不难得到了。

三 符号约定

| | | | |
|----------|------------|----------|------------|
| h' | 浮标露出水面的高度 | h | 浮标的高度 |
| H | 海平面到海底的高度 | d_1 | 浮标的直径 |
| d_2 | 每个钢管的直径 | d_3 | 钢桶的直径 |
| l | 钢桶和钢管长度 | F_{b1} | 浮标的浮力 |
| F_{b2} | 每个钢管的浮力 | F_{b3} | 钢桶的浮力 |
| F_{b4} | 重物球的浮力 | F_w | 海风对浮标的合力 |
| F_s | 海水对浮标的合力 | F_5 | 锚链对锚的力 |
| F_1 | 浮标对第一根钢管的力 | F_1' | 第一根钢管对浮标的力 |

| | | | |
|---------------|------------------|---------------|------------------|
| F_{21} | 第一根钢管对第二根钢管的力 | F_{21}' | 第二根钢管对第一根钢管的力 |
| F_{22} | 第二根钢管对第三根钢管的力 | F_{22}' | 第三根钢管对第二根钢管的力 |
| F_{23} | 第三根钢管对第四根钢管的力 | F_{23}' | 第四根钢管对第三根钢管的力 |
| F_{24} | 第四根钢管对钢桶的力 | F_{24}' | 钢桶对第四根钢管的力 |
| F_3 | 钢桶对锚链的力 | F_4 | 重物球对钢桶的力 |
| m_1 | 浮标的质量 | m_2 | 每个钢管的质量 |
| m_3 | 钢桶的质量 | m_4 | 重物球的质量 |
| m_5 | 锚链总质量 | m_6 | 锚的质量 |
| ρ_w | 海水的密度 | ρ_4 | 重物球的密度为 |
| θ_{21} | 第一根钢管偏移角度 | θ_{22} | 第二根钢管偏移角度 |
| θ_{23} | 第三根钢管偏移角度 | θ_{24} | 第四根钢管偏移角度 |
| θ_3 | 钢桶偏移角度 | θ_{51} | 锚链上端与水平方向夹角 |
| θ_{52} | 锚链下端与水平方向夹角 | β | F_1 与竖直方向夹角 |
| δ | F_{21} 与竖直方向夹角 | ε | F_{22} 与竖直方向夹角 |
| γ | F_{23} 与竖直方向夹角 | β_4 | F_{24} 与竖直方向夹角 |
| S_1 | 锚链在海底卧底长度 | S_2 | 锚链在海中的悬垂长度 |

四 模型假设

- 1、不考虑钢管、钢桶的不均匀性，即形心为质心。
- 2、锚链近似为悬链线，为一种连续曲线。
- 3、这片海域的海浪很小，对此传输节点系统的力可以忽略。
- 4、高度对重力加速度 g 的影响可忽略，且 $g=9.81 \text{ m/s}^2$ 。
- 5、锚链和重物球的材料为较廉价的普通碳素钢。

6、此海域中的各种生物对此传输节点无影响。

五 模型的建立与求解

5.1 模型准备

5.1.1 整个系统在二维平面内

海风对浮标露出水面的部分有持续力的作用，如果海风的方向与锚链钢管组成的平面不平行，则浮标会绕锚做缓慢地圆周运动，直至海风的方向与锚链钢管组成的平面平行。即我们所建立的模型是海风方向持续不变且系统处于对应的一种静止状态，系统的各部件均在一个二维平面内，且海风与此平面平行。

5.1.2 浮标不倾斜

由于浮标沉在水中部分不受海风力的作用，因此海风会对浮标质心有一个力矩作用导致浮标倾斜。浮标受力状况如图 5.1 所示，

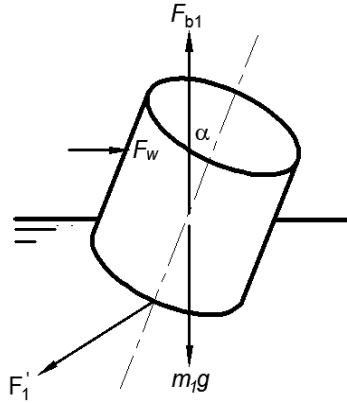


图 5.1 浮标倾斜受力图

浮标在竖直方向受力为：

$$F_{b1} - m_1 g = \frac{d_1^2}{4} \pi \rho_w g (h - h') - m_1 g \approx 31557.3(2 - h') - 9800 ;$$

海风 ($V_w = 36m/s$) 对浮标的力：

$$F_w = 0.625 \times S V_w^2 = 1.25 \times d h' \times V_w^2 = 1620 h' ;$$

设偏移角度为 α ，则

$$\tan \alpha = \frac{F_w}{F_{b1} - m_1 g} = \frac{1620 h'}{31557.3(2 - h') - 9800} ;$$

赋 $h' = 1.2$ 得 $\alpha = 7.13$, $\cos 7.13^\circ \approx 0.99223 \approx 1$ 。

可认为当海风的风力达到最大 $V_w = 36m/s$ 以及浮标浸入水中仅有 $0.8m$ 时, 浮标的倾斜角度很小, 对投影面积影响极小, 可以认为此时倾斜可以忽略。

所以可以合理地假设, 此浮标不倾斜, 得出结果后可带回验证。

5.1.3 悬链线

对于一些均匀柔软的绳索, 两端点位置固定, 仅仅受到自身重力作用时, 此时在平衡状态时的形状称为悬链线^[1]。则在浅水中, 锚链在均匀自重情况下, 依靠自身重力提供拉力, 可以运用悬链线理论简化为一条悬链线曲线^[2]。在本题中, 由于锚链是否存在卧底长度未知, 还需将锚链分为卧底部分和悬垂部分。

5.1.4 浮标的游动区域

如果在风速大小、方向不变的情况下, 浮标将最终在某一极限位置受力平衡, 保持静止; 假如此时的风向发生变化, 浮标就会在某一区域内游动。不难发现, 游动区域与极限位置密切相关, 若以系锚点为原点建立坐标系, 浮标的游动区域就是的横坐标 R (为系锚点到浮标中心的水平距离) 为径的圆形, 浮标只能在该区域内活动。

5.1.5 海水中单位长度锚链的质量估算

在海水中, 锚链会受到海水的浮力, 因此单位长度锚链的质量还有所变化, 因此在计算时需要乘以一个重力系数 K , 则海水中单位长度锚链的质量估算公式^[3]为:

$$W = Kw ;$$

式中: K —重力系数;

w —空气中单位长度的锚链质量;

W —海水中单位长度的锚链质量;

由假设锚链材料为普通碳素钢, 可得:

$$K = \frac{W}{w} = \frac{(\rho_4 - \rho_w)gV}{\rho_4 gV} \approx \frac{7.85 - 1.025}{7.85} = 0.86943$$

则针对题中给出的五种型号锚链在海水中的单位长度在表 1 中为:

表 1 锚链型号和参数图

| 型号 | 长度 (mm) | 空气中单位长度质量 (kg/m) | 海水中单位长度质量 (kg/m) |
|-----|---------|------------------|------------------|
| I | 78 | 3.2 | 2.782 |
| II | 105 | 7 | 6.086 |
| III | 120 | 12.5 | 10.868 |
| IV | 150 | 19.5 | 16.954 |
| V | 180 | 28.12 | 24.448 |

5.2 问题一的模型建立


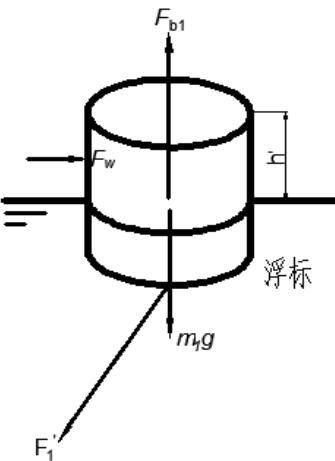
从分离与整体法角度建立力学模型：

5.2.1.分别建立

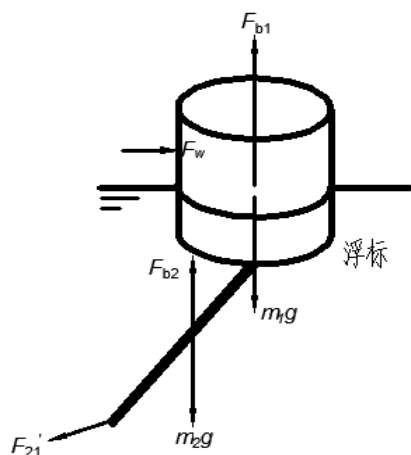
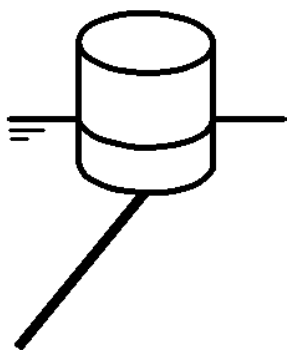
- (1) 浮标的受力分析模型
- (2) 第一节钢管与浮标视为一个整体的受力分析模型
- (3) 钢桶、四节钢管和浮标视为一个整体的受力分析模型
- (4) 传输节点除去锚与锚链的部分视为一个整体的受力分析模型
- (5) 传输节点去除锚的剩余部分视为一个整体的受力分析模型

为使我们所建立各模型清晰易懂、对比明显，我们使用表格承载各模型。

表 2 整体法受力分析表

| 对象 | 受力分析图 | 力的平衡方程 |
|---|---|----------------------------|
|  <p>浮标</p> |  <p>浮标</p> | $F'_{1l} = F_w$ |
| | | $F'_{1V} + m_1 g = F_{b1}$ |

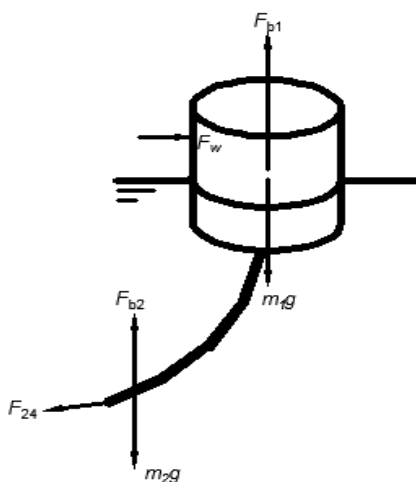
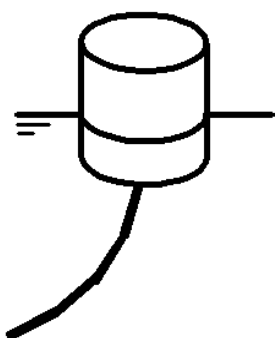
钢杆和浮标



$$F'_{21l} = F_w$$

$$F'_{21V} + m_1g + m_2g = F_{b1} + F_{b2}$$

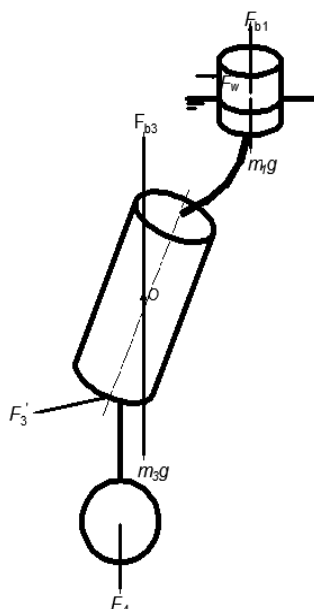
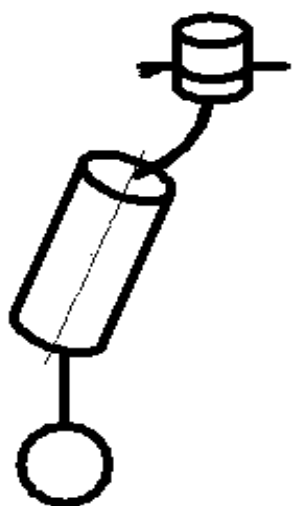
浮标和四段钢管



$$F'_{24l} = F_w$$

$$F'_{24V} + m_1g + 4m_2g = F_{b1} + 4F_{b2}$$

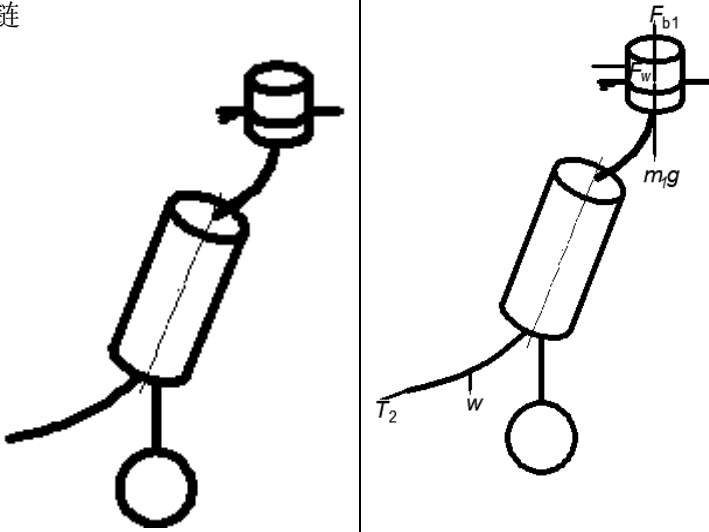
浮标、四段钢管、钢桶



$$F'_{3l} = F_w$$

$$F'_{3V} + m_1g + 4m_2g + m_3g + m_4g = F_{b1} + 4F_{b2} + F_{b3} + F_{b4}$$

浮标、四段钢管、钢桶、锚链



$$F'_{5l} = F_w$$

$$F'_{5V} + m_1g + 4m_2g + m_3g + m_4g + m_5g$$

$$= F_{b1} + 4F_{b2} + F_{b3} + F_{b4} + F_{b5}$$

(6) 由阿基米德定理可求得浮标、钢管、钢桶、重物球的浮力分别为:

$$F_{b1} = \frac{d_1^2}{4} \pi \rho_w g (h - h'); \quad F_{b2} = \frac{d_2^2}{4} \pi \rho_w g l;$$

$$F_{b3} = \frac{d_3^2}{4} \pi \rho_w g l; \quad F_{b4} = \frac{m_4}{\rho_b} \rho_w g;$$

5.2.2. 钢管受力方向与倾斜角度的关系

根据实际情况, 钢管之间的连接需要灵活, 以满足更广泛的适用情况, 可知, 两根钢管之间由球铰连接, 且钢管在在竖直方向上受到浮力和重力合力的作用, 故钢杆不能简单的视为二力杆, 即杆与杆之间作用力的方向不沿杆。在任意力系作用下平衡的物体不仅要满足平面力系内各力矢量和为零, 还要满足对与力作用平面垂直的任意轴的力矩代数和为零。对与浮标相连的第一根钢杆分析受力, 如图 5.2 所示:

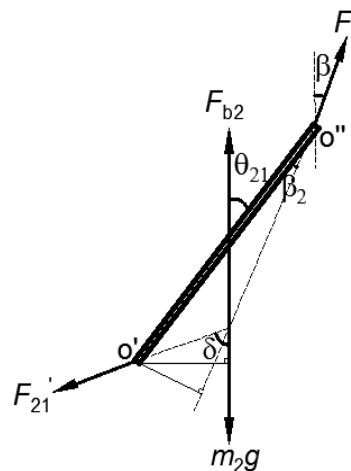


图 5.2 第一根钢管的受力分析图

其中， F_1 、 F_{21}' 的大小与方向（角度 β, δ ）通过以上整体分解法均已得出与 h' 的关系，可为已知条件。设 O' 到 F_1 的力臂为 s ，到 F_{b2} 的力臂为 $\frac{1}{2}l \sin \theta_{21}$ ， β 为 F_1 与竖直方向夹角。

对 O' 点取力矩可得：

$$F_1 s = (m_2 g - F_{b2}) \times \frac{1}{2} l \sin \theta_{21}$$

则根据角的关系： F_1 与钢管的夹角 β_2 有：

$$\sin \beta_2 = \frac{s}{l}$$

又根据角度关系：

$$\beta_2 + \beta = \theta_{21}$$

联立 1、2、3 方程可得方程：

$$\theta_{21} = \arcsin\left(\frac{m_2 g - F_{b2}}{2F_1} \sin \theta_{21}\right) + \beta ;$$

可根据此隐函数解出第一根钢管偏移角度 θ_{21}

对 O'' 点取力矩可得：

$$F_{21}' l \sin \beta_3 = (m_2 g - F_{b2}) \frac{1}{2} l \sin \theta_{21}$$

有角度的关系有：

$$\begin{aligned} \delta &= \beta + \beta_2 + \beta_3 \\ &= \arcsin\left(\frac{m_2 g - F_{b2}}{2F_1} \sin \theta_{21}\right) + \beta + \arcsin\left(\frac{m_2 g - F_{b2}}{2F_{21}'} \sin \theta_{21}\right) \text{ 可解} \end{aligned}$$

出 F_{24} 与竖直方向夹角， F_{21} 与竖直方向夹角 δ

则同上两式，对于第二根管：

$$\theta_{22} = \arcsin\left(\frac{m_2 g - F_{b2}}{2F_{21}} \sin \theta_{22}\right) + \delta$$

$$\varepsilon = \arcsin\left(\frac{m_2 g - F_{b2}}{2F_{21}} \sin \theta_{22}\right) + \delta + \arcsin\left(\frac{m_2 g - F_{b2}}{2F_{22}'} \sin \theta_{22}\right)$$

可解出第二根钢管偏移角度 θ_{22} ， F_{22} 与竖直方向夹角 ε

对于第三根管：

$$\theta_{23} = \arcsin\left(\frac{m_2 g - F_{b2}}{2F_{22}} \sin \theta_{23}\right) + \varepsilon$$

$$\gamma = \arcsin\left(\frac{m_2 g - F_{b2}}{2F_{22}} \sin \theta_{23}\right) + \varepsilon + \arcsin\left(\frac{m_2 g - F_{b2}}{2F_{23}'} \sin \theta_{23}\right)$$

可解出第三根钢管偏移角度 θ_{23} ， F_{23} 与竖直方向夹角 γ

对于第四根管：

$$\theta_{24} = \arcsin\left(\frac{m_2 g - F_{b2}}{2F_{23}} \sin \theta_{24}\right) + \gamma$$

$$\beta_4 = \arcsin\left(\frac{m_2 g - F_{b2}}{2F_{23}} \sin \theta_{24}\right) + \gamma + \arcsin\left(\frac{m_2 g - F_{b2}}{2F_{24}'} \sin \theta_{24}\right)$$

可解出第四根钢管偏移角度 θ_{24} ， F_{24} 与竖直方向夹角 β_4

5.2.3、对于钢桶的受力分析模型

与钢管类似，其受力图如图 5.3 所示：

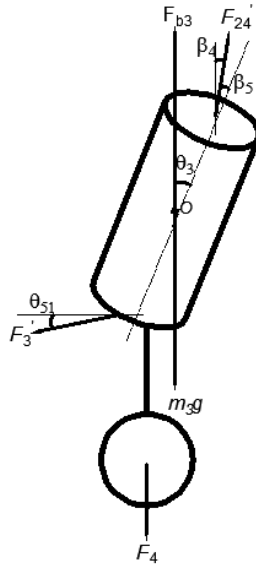


图 5.3 钢桶的受力分析图

对钢桶底面中心取力矩，依然可以得到：

$$\theta_3 = \arcsin\left(\frac{m_2 g - F_{b3}}{2F_{24}} \sin \theta_3\right) + \beta_4$$

对钢桶质心取力矩得：

$$\frac{1}{2} F'_{24} l \sin \beta_5 + F_4 \frac{1}{2} l \sin \theta_3 = F'_3 \frac{1}{2} l \sin(\theta_3 + \theta_{51})$$

角度关系有： $\beta_5 = \theta_3 - \beta_4$

其中 $F_4 = W m_4 g$

可解出钢桶偏移角度 θ_3 ， F'_3 与水平方向夹角 θ_{51}

5.2.4、锚链受力的模型建立

在浅水中，锚链在均匀自重情况下，依靠自身重力提供拉力，可以运用悬链线理论简化为一条悬链线曲线进行计算^[1]。

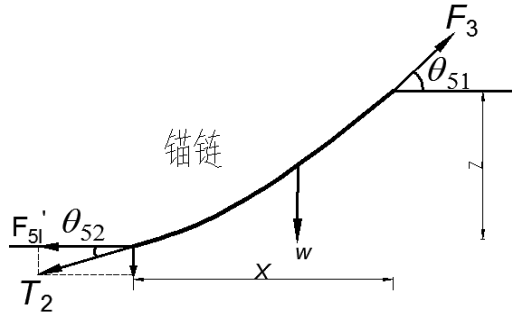


图 5.4 系统中锚链受力图

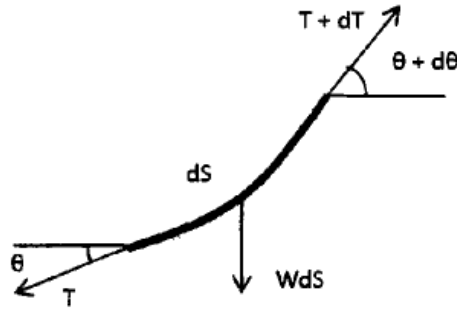


图 5.5 锚点中小单元体受力图

如上图 5.5，微段的切向与法向受力平衡方程可写为：

$$dT = W \sin \theta ds$$

$$T d\theta = W \cos \theta ds$$

由上两式则可得：

$$\frac{dT}{T} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} d\theta$$

积分可得：

$$\frac{F'_{5l}}{T} = \frac{1}{\cos \theta}$$

由 2 和 4 可以得出：

$$S_0 = \frac{1}{W} \int_0^\theta \frac{F'_{5l}}{\cos^2 \theta} d\theta = \frac{F'_{5l}}{W} \tan \theta ;$$

$$x_0 = \int_0^\theta \cos \theta ds = \frac{F'_{5l}}{W} \ln\left(\frac{1}{\cos \theta} + \tan \theta\right) ;$$

$$z_0 = \int_0^\theta \sin \theta ds = \frac{F'_{5l}}{W} \ln\left(\frac{1}{\cos \theta} - 1\right) ;$$

利用关系式：

$$\sinh\left(\frac{x_0 W}{F'_{5l}}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta} - \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} \right) = \tan \theta$$

$$\cosh\left(\frac{x_0 W}{F'_{5l}}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} \right) = \frac{1}{\cos \theta}$$

将 8、9 式带入 6、7 变换可得：

$$x_0 = \frac{F'_{5l}}{W} \sinh^{-1}(\tan \theta)$$

$$z_0 = \frac{F'_{5l}}{W} (\cosh[\sinh^{-1}(\tan \theta)] - 1)$$

利用式 5、10、11，可以得出同一条悬链线上两个点之间的力与位置关系。得出公式：

$$S_2 = \frac{F'_{5l}}{W} (\tan \theta_{51} - \tan \theta_{52})$$

$$x = \frac{F'_{5l}}{W} [\sinh^{-1}(\tan \theta_{51}) - \sinh^{-1}(\tan \theta_{52})]$$

$$z = \frac{F'_{5l}}{W} (\cosh[\sinh^{-1}(\tan \theta_{51})] - \cosh[\sinh^{-1}(\tan \theta_{52})])$$

则通过式 10、11、12 可得，锚链形状的参数方程为：

$$S_2 = \frac{F'_{5l}}{W} (\tan \theta - \tan \theta_{52})$$

$$x_0 = \frac{F'_{5l}}{W} [\sinh^{-1}(\tan \theta) - \sinh^{-1}(\tan \theta_{52})]$$

$$z_0 = \frac{F'_{51}}{W} (\cosh[\sinh^{-1}(\tan \theta_{51})] - \cosh[\sinh^{-1}(\tan \theta_{52})])$$

5.2.5 问题一的求解

综合以上受力模型，可得一个最基础的高度恒等式

$$(2-h') + l \cos \theta_{21} + l \cos \theta_{22} + l \cos \theta_{23} + l \cos \theta_{24} + l \sin \theta_3 + z = H$$

其中 $\theta_{21}, \theta_{22}, \theta_{23}, \theta_{24}, \theta_3, z$ 均为以 h' 为自变量的函数，H 为 18 米

此时对于锚链的形状，有两种情况需要讨论：

- (1) 锚链由卧底部分
- (2) 锚链没有卧底部分.

经过分析可以得到：随着海面风速的增加，锚链所受水平方向拉力会逐渐增大，会使锚链在锚点与海底的夹角有逐渐变大的趋势，所以会存在一个临界的风力，使锚链刚好全部拉起，且锚链在锚点与海底的夹角为 0 度。所以得到一个约束条件： $\theta_{52}=0$

联立距离方程并将数值代入方程，用软件 lingo 处理后得到临界风速：

$$V_{w0} = 22.28m/s$$

5.2.5.1 $V_w = 12m/s$ 时的结果

锚链有卧底部分存在，可联立方程解出 $h'=1.317m$.

则浮标的吃水深度为 $h_0 = h - h' = 2 - 1.327 = 0.673m$

接着可以求出浮标游动区域的半径

$$R = x + l \sin \theta_3 + l \sin \theta_{21} + l \sin \theta_{22} + l \sin \theta_{23} + l \sin \theta_{24} = 14.7660m$$

表 3 钢管以及钢桶的倾斜角度表（单位：度）

| 风速\角度 | 一号钢管 | 二号钢管 | 三号钢管 | 四号钢管 | 钢桶 |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 12m/s | 1.1585 | 1.1663 | 1.1742 | 1.1821 | 1.2004 |

锚链的形状为：卧底部分长度为 $S_1 = 6.246m$

悬垂部分的参数方程为：

$$x_0 = 3.9664 \sinh^{-1}(\tan \theta)$$

$$z_0 = 3.9664 \cosh[\sinh^{-1}(\tan \theta)]$$

在 MATLAB 中将此参数方程表示如图 5.6:

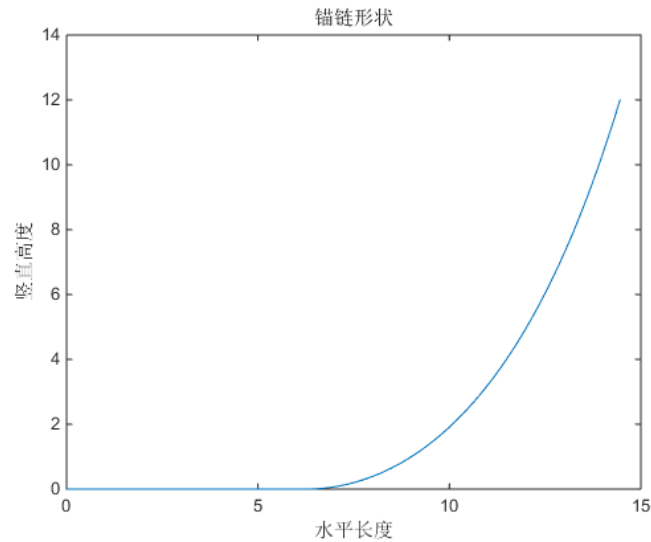


图 5.6 锚链的形状图

5.2.5.2 $V_w = 24m/s$ 时的结果

锚链没有卧底部分存在，可联立方程解出 $h' = 1.303m$.

则浮标的吃水深度为 $h_0 = h - h' = 2 - 1.303 = 0.697m$

接着可以求出浮标游动区域的半径为

$$R = x + l \sin \theta_3 + l \sin \theta_{21} + l \sin \theta_{22} + l \sin \theta_{23} + l \sin \theta_{24} = 17.8035m$$

表 4 钢管以及钢桶的倾斜角度表（单位：度）

| 风速\角度 | 一号钢管 | 二号钢管 | 三号钢管 | 四号钢管 | 钢桶 |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 24m/s | 4.4078 | 4.4363 | 4.4652 | 4.4943 | 4.5607 |

锚链的参数的参数方程为:

$$x_0 = 15.6954[\sinh^{-1}(\tan \theta) - \sinh^{-1}(\tan 0.0783)]$$

$$z_0 = 15.6954(\cosh[\sinh^{-1}(\tan \theta)] - \cosh[\sinh^{-1}(\tan 0.0783)])$$

在 MATLAB 中将此参数方程表示如图 5.7:

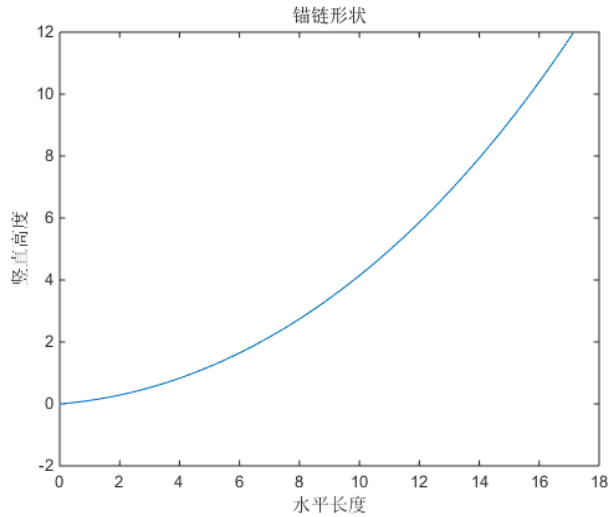


图 5.7 锚链的形状图

5.3 问题二的求解

5.3.1 重物球下限的确定

在问题一的假设下，调节重物球的质量，使其满足以下关系式：

$$0 < \arctan \frac{F'_{5v}}{F'_{51}} < 16^\circ$$

$$0 < \theta_3 < 5^\circ$$

将此关系式回代入 lingo 程序中，得到最小的一个解： $m_4 = 2872.315kg$

同时也得到了吃水深度 $h_0 = 1.255m$ ，游动区域半径为 $R = 18.4287m$

表 5 钢管以及钢桶的倾斜角度表（单位：度）

| 风速\角度 | 一号钢管 | 二号钢管 | 三号钢管 | 四号钢管 | 钢桶 |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 36m/s | 2.9403 | 2.9490 | 2.9577 | 2.9664 | 2.9861 |

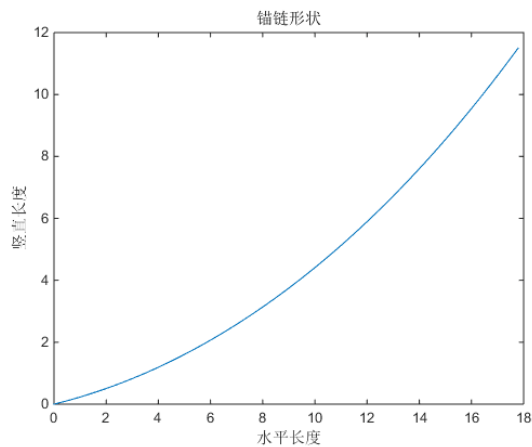


图 5.8 锚链的形状图

5.3.2 重物球上限的确定

因为浮标要漂浮在水面上，所以重物球的质量不能无限大，会存在一个质量的上限，使浮标刚好露出一个顶面。此时，风力不再作用于浮标侧面，浮标在水平方向上无力的作用，则运用整体法可知锚链对钢桶只有竖直向下力的作用，可知钢桶呈竖直状态，系统的状态图如图 5.6 所示：

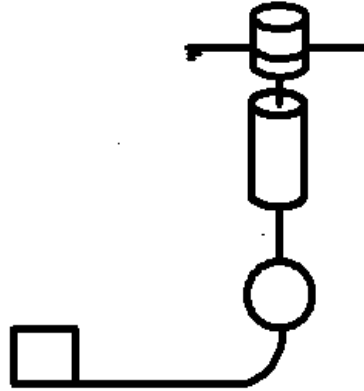


图 5.9 系统状态图

在竖直方向受力分析可知：

$$F'_{5V} + m_1g + 4m_2g + m_3g + m_4g + m_5g = F_{b1} + 4F_{b2} + F_{b3} + F_{b4} + F_{b5}$$

将数值代入上式，其中锚链，一部分竖直，一部分在海底

最终可计算得出：重物球的质量上限为：5220kg。

综上所述，重物球质量的范围为 2872—5220kg。

5.4 问题三模型的建立

对于系泊系统的设计，题中给出六个变化因素，即风力、水流力、水深、锚链的型号、长度和重物球质量。只有这六个因素都确定的情况下，才对应唯一的浮标吃水深度 h_0 、游动区域半径 R 和钢桶倾斜角度 θ_3 。

同时，设计的系泊系统需要满足条件

- ① 钢桶的倾斜角度 $\theta_3 \leq 5^\circ$
- ② 锚链在锚点与海床的夹角 $\theta_{s2} \leq 16^\circ$

只有设计的系泊系统在最极端情况下依然可以满足这两个约束条件，这个系统才是合格的。因此，我们只要考虑与设计出三个外部因素：风力、水流力、水深，均达到最极端情况时的系泊系统，则此系泊系统才可以适用于所有的情况。

所以首先，我们要确定什么情况是风力、水流力、水深的极端情况。

5.4.1 极端情况的确定

由前两个问题的解，我们可以得到结论：风力越大，钢桶的倾斜角度越大，游动区域的半径越大，锚点与海床的夹角越大。

同理，通过流体力学的学习，风和海水同为流体，性质相似，我们也可以定性得出：海水流速越大，水流力越大，钢桶的倾斜角度越大，游动区域的半径越大，锚点与海床的夹角越大。

对于水深，通过查阅文献^[4]，得出：在 10~30m 的水深内，随着水深的增加，锚链和钢管、桶的阻水面积也在不断增加，故而受到的水流力也不断增大，从而间接导致：水深越大，水流力越大，钢桶的倾斜角度越大，游动区域的半径越大，锚点与海床的夹角越大。

综上所述，当风速达到最大、水流速达到最大、水的深度最高时，可以达到系泊系统的极端情况。此时，需风速与水流速的方向相同，夹角为0度，才可达到最极端的情况。如图5.7所示：

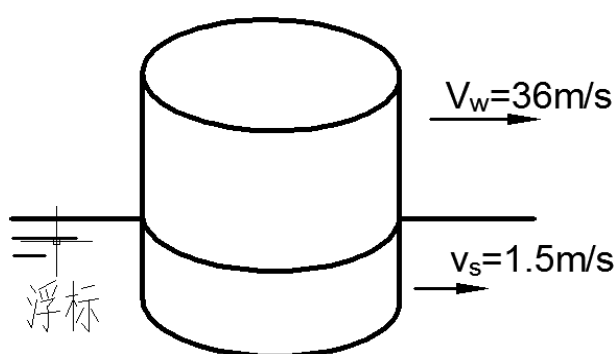


图 5.10 风速与水速的极限情况

5.4.2 不同因素对 h_0 ， R ， θ_3 的影响情况

在极限情况已经确定的情况下，就需要比较三种内部因素：锚链的型号、长度和重物球质量，对浮标吃水深度 h_0 、游动区域半径 R 和钢桶倾斜角度 θ_3 。当考虑其中某个因素时，默认控制其余两个变量不变。

5.4.2.1 锚链型号的不同对 h_0 ， R ， θ_3 的影响情况

当锚链单位长度的质量 W 增加时，浮标的浮力势必增大来平衡质量的增大，则浮标吃水深度 h_0 也会变大；同时，质量增大导致锚链和钢管的倾斜角变小，使游动区域半径 R 变小；导致锚链与钢桶间的拉力 F_3' 对钢桶质心的力矩变大，导致钢桶顺时针转动，从而钢桶倾斜角度 θ_3 变大。

即 W 变大, 则 h_0 变大, R 变小, θ_3 变大

5.4.2.2 锚链长度的不同对 h_0 , R , θ_3 的影响情况

长度增加, 使锚链总体质量变大, 浮标的浮力变大, 浮标吃水深度 h_0 也会增大; 长度增加势必导致游动区域半径 R 变大; 锚链与钢桶间的拉力 F_3' 对钢桶质心的力矩变大, 导致钢桶顺时针转动, 从而钢桶倾斜角度 θ_3 变大。

即 S 变大, 则 h_0 变大, R 变大, θ_3 变大。

5.4.2.3 重物球质量的不同对 h_0 , R , θ_3 的影响情况

重物球质量增大, 也会使浮标的浮力变大, 浮标吃水深度 h_0 也会增大; 锚链和钢管的倾斜角变小, 使游动区域半径 R 变小; 导致拉力 F_4 对钢桶质心的力矩变大, 导致钢桶顺时针转动, 从而钢桶倾斜角度 θ_3 变大。

即 m_4 变大, 则 h_0 变大, R 变小, θ_3 变小。

5.4.3 锚链型号以及结果的确定

由 3.2 分析可知 W 变大, 则 h_0 变大, R 变小, θ_3 变大。为了满足设计的需要: 浮标吃水深度 h_0 、游动区域半径 R 和钢桶倾斜角度 θ_3 都尽可能的小, 显然不能一味的将 W 变为最大或最小, 会有一个合适的型号可以满足 h_0 比较小, R 不太大, θ_3 比较小。因此, 我们建立了一个锚泊系统的不稳定性指标来寻找一个最合适的型号可以满足要求。

5.4.3.1 不稳定性模型指标的建立

锚泊系统不稳定性的度量对于锚泊系统的设计来说, 其不稳定性与浮标的吃水深度, 游动区域以及钢桶的倾斜角度有关。当其他条件都一定时, 锚链的型号、长度、重物球的质量变化都会影响系统的稳定性。比如, 增加重物球的质量可以减小钢桶的倾斜角度, 但是浮标的吃水深度也会增大; 换言之, 重物球的质量和不确定性的相关因素间存在耦合的关系。因而, 准确的衡量不稳定性是十分困难的, 对于具体工程问题来说, 各指标间的重要性也不尽相同。为了综合考虑锚泊系统的不稳定性, 选取一种不稳定性最小的设计方案。

我们设可选择方案 i ($i=1, 2, \dots$) 的吃水深度为 h_i , 游动区域半径为 R_i , 钢桶倾斜角度为 θ_{3i} , 构造“不稳定性指标” E_i 如下:

$$E_i = \kappa_1 \frac{h_i}{\sum h_i} + \kappa_2 \frac{R_i}{\sum R_i} + \kappa_3 \frac{\theta_{3i}}{\sum \theta_{3i}}$$

其中 κ_1 、 κ_2 和 κ_3 分别为的吃水深度，游动区域半径，钢桶倾斜角度所占比例的权重，且有：

$$\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 = 1, \text{ 其中 } \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3 < 1$$

事实上，为了保障水声设备的工作精度，在设计系统时应该优先将钢桶的倾斜角度优先考虑在内，故取权重 $(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) = (0.25, 0.25, 0.5)$ 。

5.4.3.2 水流力大小估算

海水中的流速梯度变化规律十分复杂，受到多种因素的影响，研究表明，浅海地区可近似认为符合均匀层流的规律，其流速分布如下图所示：

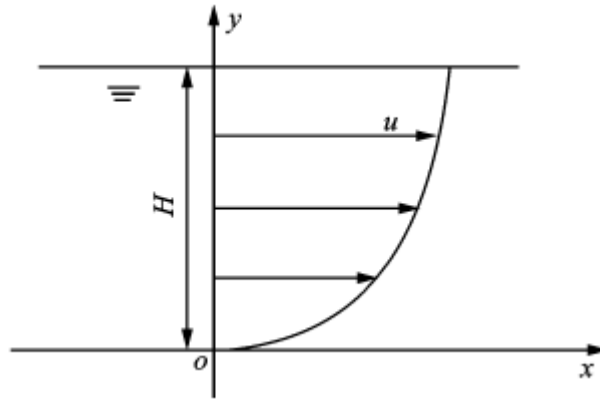


图 5.11 海水流速分布图

根据文献^[4]，流速在水中可视为抛物线分布

$$u = y^2$$

水流力的计算公式：

$$F = 374 \times S \times u^2$$

在此模型中，为了尽量简化计算，我们认为，对于浮标来说，水流力作用于 $\frac{h}{2}$ 处，

对于钢管和锚链来说，由于它们的相对面积较小，水平方向的水流力远小于竖直方向上的力，故水流力的影响忽略不计；对于钢桶来说，水流力作用于重心且速度取重心处的值。这样以来，我们得出平衡方程只是在第一问的基础上稍加改变，以浮标为例：

$$F'_{II} = F_w + F_{s1}$$

根据问题一中的推导可以相应写出钢桶、钢管、浮标的平衡方程。

情况一：基于成本考虑的系泊系统设计

对于系泊系统的动态设计，在水速、风速、海水高度都确定的的情况下，会存在一个函数关系：

$$f(m_4, S, W, \theta_{s2}, \theta_3) = 0$$

对于此函数关系如果确定其中任意三个的值，那么剩余两个的值也会随之确定。

我们可以将 α, β 设为定临界值，分别将五种型号锚链的单位长度质量代入各公式，可以得到一组确定的临界锚链的长度 S ，和重物球的质量 m_4 。

在这种情况下，锚链末端与锚连接处的切线方向与海床的夹角恰好为 16° ，钢桶的倾斜角恰好为 5° 。这时，约束条件最为宽松，那么所需的锚链长度最短，重物球的质量最轻，必然的，所需要的成本也最少。由于钢桶的倾斜角度固定，故为定值。如果选定了锚链的型号（ $1 \leq i \leq 5$ ），问题一中的公式可相应得到锚链的长度 S 和重物球的质量 m_4 ，并且得到 i 型锚链的吃水深度 h_i ，游动区域半径 R_i 和钢桶倾斜角度 θ_{3i} ，可以计算出五种型号锚链的不稳定度指标 E_i 。

表 6 五种型号锚链的不确定度指标

| 型号 | 一型锚链 | 二型锚链 | 三型锚链 | 四型锚链 | 五型锚链 |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|
| E_i | 0.0992 | 0.0927 | 0.0904 | 0.0847 | 0.0815 |

结果通过比较我们可以发现，选择五型锚链时可以时系统的不稳定指标最小。但是，需要注意的是，在锚链末端与锚连接处的切线方向与海床的夹角恰好为 16° ，钢桶的倾斜角恰好为 5° 的情况下，此时计算求得的是锚链允许的最小长度，重物球的最轻质量，一方面，这样可以尽量节约成本；但是另一方面，由于钢桶的倾斜角处于临界值，故水声设备的工作精度和稳定性则难以保证。

情况二：基于水声设备工作效果考虑的系泊系统设计

在第二种情况我们依然利用此种函数关系：

$$f(m_4, S, W, \theta_{s2}, \theta_3) = 0$$

首先，我们依然使用控制变量法：

(1) 保持 θ_{s2} 不变, θ_3 在 $(0^\circ, 5^\circ)$ 范围内变化，可以得到一个范围式：

$$a \leq g(S, W, m_4) \leq b$$

(2) 保持 θ_3 不变, θ_{s2} 在 $(0^\circ, 16^\circ)$ 范围内变化，可以得到第二个范围式 “

$$c \leq q(S, W, m_4) \leq d$$

接着，我们分别将五种型号的锚链单位长度质量代入上两式，可以得到五个组合的非线性规划范围。

最后，利用我们之前建立的“不稳定性指标” E_i ，可以得到一个最优解关系式：

$$Y = rS^p + tm_4^q$$

其中 r 与 t 为化简后的常数， p 、 q 为整数。于是可转化成非线性规划模型：

$$\begin{aligned} &\min Y \\ &\begin{cases} a \leq g(S, W, m_4) \leq b \\ c \leq q(S, W, m_4) \leq d \end{cases} \end{aligned}$$

用这个最优解关系式可以得到五种型号锚链对应的五种最优结果，然后将五种最优结果依据“不稳定性指标” E_i 进行评判，用这个最优解关系式可以得到五种型号锚链对应的五种最优结果，然后将五种最优结果回代入“不稳定性指标” E_i 中进行评判，得到不稳定性指标 E_i 值最小的最优结果即为最终系泊系统的最优设计值。

得到优秀方案如下表。

表 7 方案结果

| 型号 | 锚链长度/m | 重物球质量/kg |
|----|--------|----------|
| 三号 | 17.2 | 3487 |

表 8 方案的测试结果

| 风速\角度 | 一号钢管 | 二号钢管 | 三号钢管 | 四号钢管 | 钢桶 |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 24m/s | 2.145 | 2.383 | 2.532 | 2.765 | 3.011 |
| 36m/s | 3.802 | 4.059 | 4.287 | 4.428 | 4.562 |

由此可见，钢桶的倾斜角度小于 5° ，且相对较小，可见这一组解是较好的。

5.4.4 不同风力、水流力、水深情况下各因素的变化

海水深度，风速，海水速度对于钢桶、钢管的倾角，锚链形状，浮标的吃水深度和游动区域的关系是十分复杂的，本文试就风速，海水流速一定的情况下，考察海水深度和钢管、钢桶倾斜角度的关系。

六 模型的评价与推广

6.1 模型的优点

1. 针对本题中复杂的受力关系, 本文使用“先整体, 后隔离”的办法得到了各个物体的受力情况, 简化了计算过程, 降低了求解难度。

2. 在模型中, 合理设定了重物球的质量, 引入了锚链在水中重力的计算公式, 考虑了系泊系统中各个物体的浮力, 使得整个受力分析过程更加精确。

3. 在模型二调节重物球质量和模型三设计系泊系统稳定性时, 从临界值、极限情况入手进行分析, 简化了分析过程, 抓住了主要矛盾, 为随后的分析奠定了基础。

4. 在模型三的建立中, 引入了“不稳定性”评价指标, 将钢桶的倾斜角度、浮标的吃水深度和游动区域同时纳入考虑范围之内, 根据实际工程需要确定了权重系数, 科学合理得设计锚泊系统, 并可以根据其进行优化。

6.2 模型的缺点

1. 考虑到模型的复杂度和时间的关系, 在模型三中并没有对水流力对不同物体的力矩作用考虑在内, 只是简单的认为水流力作用于质心。这会使得在受力分析的过程中产生一些误差。

2. 在锚泊系统的设计中, 我们只考虑了使用单一锚链型号的设计方案, 事实上, 可以把多种型号锚链组合在一起进行使用, 我们并未对此深入讨论。

6.3 模型的推广

本文建立了系泊系统的分析和设计模型, 详细给出了系统中个物体的受力与平衡情况。根据工程实际建立了系泊系统不稳定度的评价指标, 运用非线性规划模型, 给出了一套较好的系泊系统的设计方案。海洋是当今世界关注的焦点, 海洋的国家战略地位空前提高。一套系泊系统的设计方案和思路将有助于我国开发、利用海洋。与此同时, 在整个题目的求解过程中, 从临界、极端条件入手的分析方法也有较好的推广意义。

参考文献

- [1] 杨鑫. 锚泊系统的快速计算及其应用[D]. 大连: 大连理工大学, 2015.
- [2] 交通部第二航务工程勘察设计院. JTJ294—98 斜坡码头及浮码头设计与施工规范[M]. 北京: 中华人民共和国交通部, 1999.
- [3] 潘甜. 组合锚泊系统的分析与研究[D]. 武汉: 武汉理工大学, 2010.
- [4] 陈云鹤, 赵晶. 考虑水流力作用的锚链力计算方法[D]. 南京: 解放军理工大学, 2016.