2021 黑龙江省数学建模竞赛培训

数值逼近与数值代数

哈尔滨工程大学数学科学学院 沈继红

2021.08.27

数值逼近

已知一个函数 $y = f(x)$ 在 $n+1$ 个点上的值：

x	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
y	y_0	y_1	$\cdots$	y_n

求 $f(x)$

思路：找一个函数类，在此函数类中找一个函数 $P(x)$ 逼近 $f(x)$

函数类：简单，选取多项式

令 $P_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \to f(x)$

逼近标准，插值条件: $P_n(x_i) = y_i, i = 0, 1, 2, \cdots, n$

方程组有唯一解

$$i=0: a_0+a_1x_0+\cdots+a_nx_0^n=y_0$$

$$i=1: a_0+a_1x_1+\cdots+a_nx_1^n=y_1$$

……

$$i=n: a_0+a_1x_n+\cdots+a_nx_n^n=y_n$$

求 a_i，是一个线代数方程组

系数阵：

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0\cdots x_0^n \\ 1 & x_1\cdots x_1^n \\ \cdots & \\ 1 & x_n\cdots x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{i\neq j}(x_i-x_j)\neq 0,$$ 解 a_i 存在唯一。

构造：拉格朗日插值多项式

$$L_n(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + \cdots + y_n l_n(x)$$

$l_i(x)$：阶数不超过n的多项式，且

$$l_0(x) = \begin{cases} 1, x = x_0 \\ 0, x = x_1, x_2, \cdots, x_n \end{cases} \qquad l_i(x) = \begin{cases} 1, x = x_i \\ 0, x = x_j, j \neq i \end{cases}$$

这样

$$L_n(x_0) = y_0 l_0(x_0) + y_1 l_1(x_0) + \cdots + y_n l_n(x_0) = y_0$$

$$L_n(x_i) = y_0 l_0(x_i) + \cdots + y_{i-1} l_{i-1}(x_i) + y_i l_i(x_i) + y_{i+1} l_{i+1}(x_i) + \cdots + y_n l_n(x_i) = y_i$$

$l_i(x)$的构造

令

$$l_0(x) = A(x - x_1)(x - x_2) \cdot \cdots \cdot (x - x_n)$$

且

$$1 = l_0(x_0) = A(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \cdot \cdots \cdot (x_0 - x_n)$$

$$A = \frac{1}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \cdot \cdots \cdot (x_0 - x_n)}$$

故

$$l_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \cdot \cdots \cdot (x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \cdot \cdots \cdot (x_0 - x_n)}$$

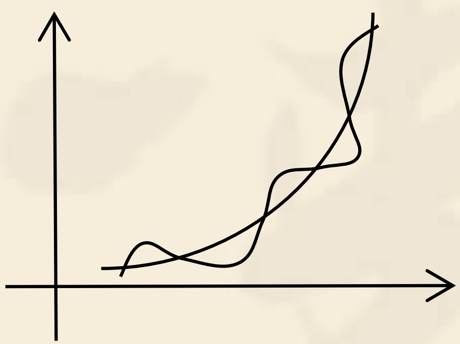
每个 $l_i(x)$ 同理可求出。

插值多项式的误差

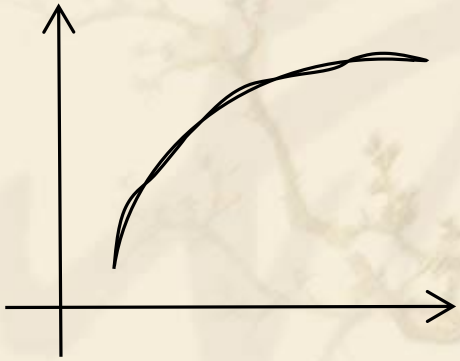
$$|P_n(x) - f(x)| = |\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1) \cdot \cdots \cdot (x-x_n)|$$

ξ 在 $x_0, x_1, \cdots, x_n$之间。

一般来讲n越大，逼近程度越好，但n太大，多项式曲线会出现振荡，可能会出现龙格现象。



解决办法：分段低次多项式

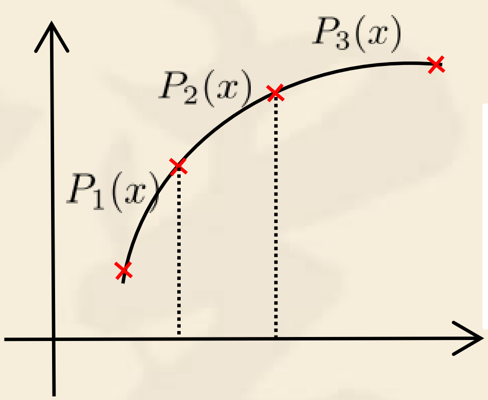


但会出现尖点，不光滑（不可导）！

解决办法：三次样条逼近

$$S_n(x) = \begin{cases} P_1(x), x \in [x_0, x_1) \\ P_2(x), x \in [x_1, x_2) \\ \dots \\ P_n(x), x \in [x_{n-1}, x_n) \end{cases}$$

其中$P_i(x)$为不超过 3 阶的多项式。保证$S_n(x)$在端点处有连续的二阶导数。

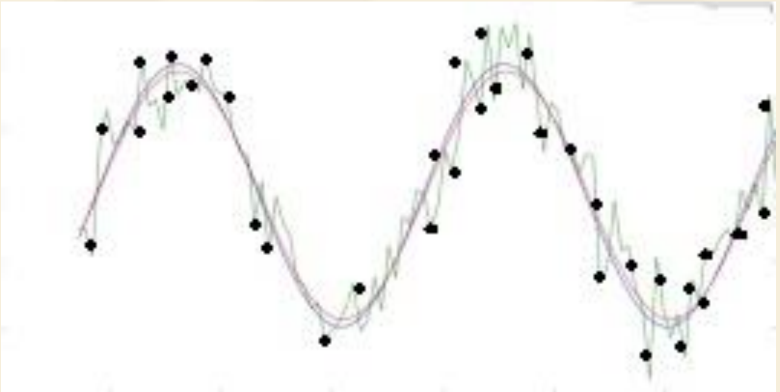


光滑连接

最小二乘法

- 逼近思路

  曲线不过给定的点



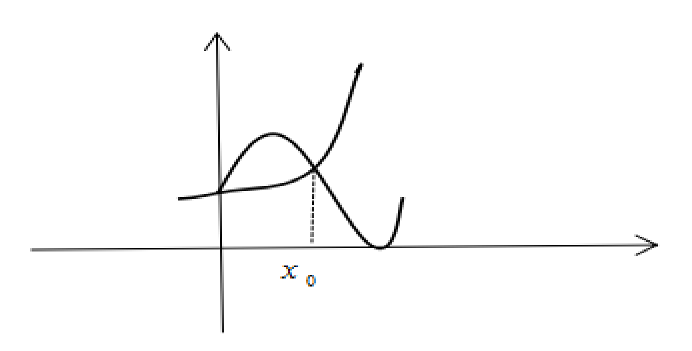
- 好处

  规避给定数据带来的误差

数值代数

如何求解方程和方程组

$$e^x = 1 + \sin x$$



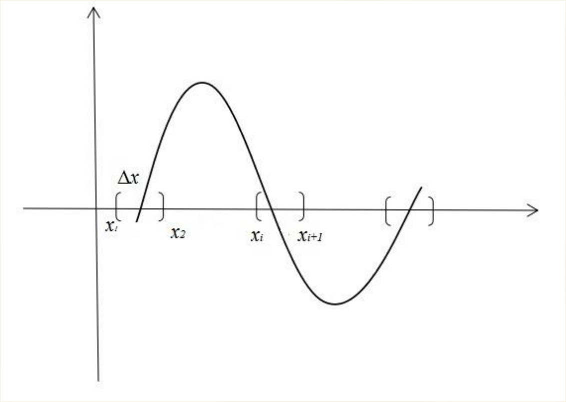
$$x_0 = ?$$

方程求解

$$f(x)=0$$

数值搜索

以小步长 Δx 从初始点向前走，并判断根的存在区间。

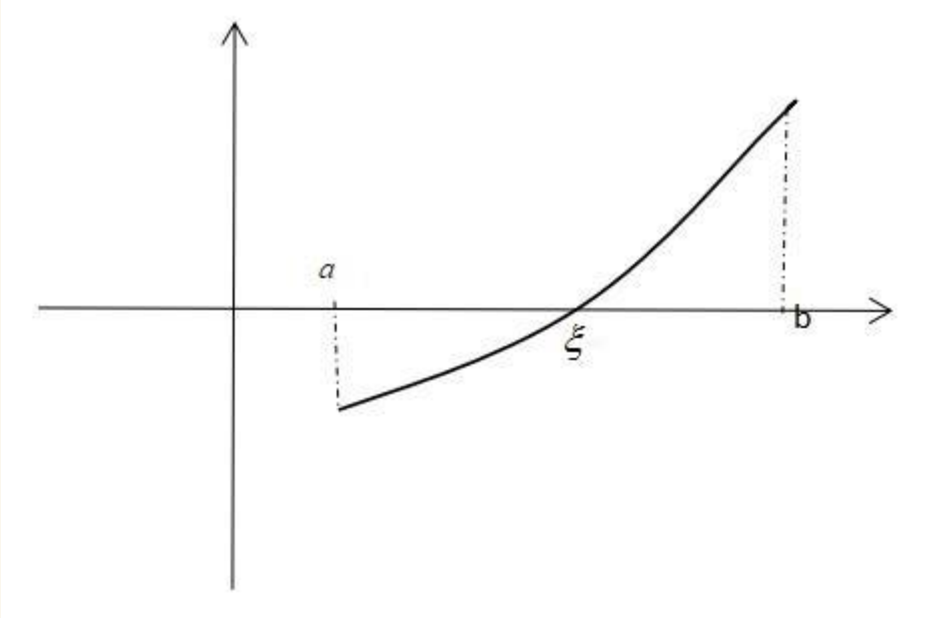


$$f(x_i)f(x_{i+1})<0?$$

$(x_{i,}x_{i+1})$ 内只有一个根

问题：在 (a,b) 区间内， $f(a)f(b)<0$ ，求 $f(x)=0$ 的根。

二分法



1、取中点 $x_1=\dfrac{a+b}{2}$，判断

$$f(a)f(x_1)<0?\begin{cases}<0, & a_1=a, b_1=x_1.\\ >0, & a_1=x_1, b_1=b.\end{cases}$$

2、令 $x_2=\dfrac{a_1+b_1}{2}$，判断

$$f(a_1)f(x_2)<0?\begin{cases}<0, & a_2=a_1, b_2=x_2.\\ >0, & a_2=x_2, b_2=b.\end{cases}$$

$f(x)=0$ 的根 ξ 总在 $(a_{n,}b_n)$ 中，且 $x_n\to\xi$.

证明：$|x_n-\xi|<\dfrac{|b_{n-1}-a_{n-1}|}{2}=\dfrac{\frac{|b_{n-2}-a_{n-2}|}{2}}{2}=\cdots=\dfrac{|b-a|}{2^n}\xrightarrow{n\to\infty}0,$

即 $x_n\to\xi$

迭代法

$$f(x)=0 \Leftrightarrow x=g(x)$$

构造迭代格式：

$$\begin{cases} x_{n+1}=g(x_n) \\ \text{初值}x_0 \end{cases}$$

$$x_0 \Rightarrow x_1=g(x_0) \Rightarrow \quad =g(x_1) \Rightarrow \cdots x_{n+1}=g(x_n)$$

可能有许多迭代格式，如

$$e^x=1+\sin x$$

$$\Rightarrow x=\ln(1+\sin x)$$

$$\Rightarrow x=\arcsin(e^x-1)$$

结论 1：当$\{x_n\}$收敛，$g(x)$连续，则$x_n \to \xi.$

$x_{n+1}=g(x_n)$，令$n\to\infty, \xi=g(\xi)$，ξ即为根。

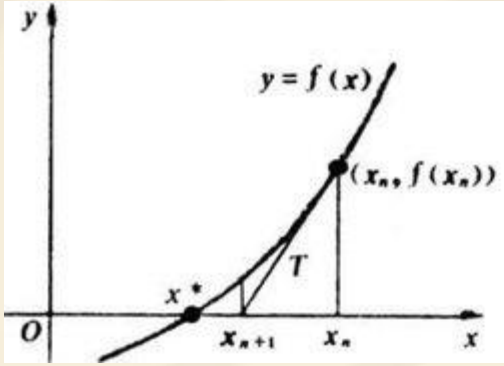
结论 2：当$|g'(x)| \le L<1$,迭代必收敛

$$|x_{n+1}-\xi|=|g(x_n)-g(\xi)|=|g'(x)(x_n-\xi)|\le L|x_n-\xi|\le L^{n+1}|x_0-\xi|$$

当$n\to\infty, x_{n+1}\to\xi$

牛顿迭代法

$$\begin{cases} x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ \text{初值：} \quad x_0 \end{cases}$$



优点：收敛速度快，平方收敛

方程组求解

$$AX = b$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

高斯消去法

方程组的增广矩阵：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等变换}} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^* & \cdots & a_{2n}^* & b_2^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^* & b_n^* \end{pmatrix}$$

$$a_{nn}^* x_n = b_n^* \Rightarrow x_n = \frac{b_n^*}{a_{nn}^*}$$

$$a_{n-1n-1}^* x_{n-1} + a_{n-1n}^* x_n = b_{n-1}^* \Rightarrow x_{n-1} = \frac{b_{n-1}^* - a_{n-1n}^* x_n}{a_{n-1n-1}^*}$$

$$\cdots$$

主元消去法

$a_{kk}^{*}=0$ ：这时消去法将无法进行下去

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2n}^{*} & b_2^{*} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

选取系数矩阵中绝对值最大的元素 $\max|a_{ij}|$

调换到对角线上

$\boxed{\text{保证稳定性}}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}$$

$$a_{22}^{*}=a_{22}+(-\frac{a_{21}}{a_{11}})(a_{12}+\varepsilon)$$

$$=a_{22}+(-\frac{a_{21}}{a_{11}})a_{12}+(-\frac{a_{21}}{a_{11}})\varepsilon$$

若 a_{11} 很小，则误差项就会大

列主元消去法

在列下方选 $\max\left|a_{ij}\right|$, 只交换行

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}$$

迭代法

$$AX=b \Leftrightarrow X=HX+g$$

迭代格式构造

$$\begin{cases} X^{(k+1)}=HX^{(k)}+g \\ \text{初始向量}X^{(0)} \end{cases}$$

$$X^{(0)} \to X^{(1)}=HX^{(0)}+g \to X^{(2)}=HX^{(1)}+g \to \cdots$$

结论：当$\{X^{(k)}\}$收敛，则$X^{(k)} \to X^*$为方程的解。

$$\lim_{k\to\infty} X^{(k)}=X^*=HX^*+g$$

即 X^*为方程$AX=b$的解。

H的构造

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$=D-L-U$

$$AX=b \Rightarrow \left[D-(L+U)\right]X=b$$

$$DX=(L+U)X+b \Rightarrow X=D^{-1}(L+U)X+D^{-1}b$$

Jacobi迭代法

$$\begin{cases} X^{(k+1)}=D^{-1}(L+U)X^{k}+D^{-1}b \\ \text{初始向量 } X^{(0)} \end{cases}$$

Gauss-Seidel迭代法

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 0 & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & & -a_{n2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$X^{(k+1)} = D^{-1}(L+U)X^{k} + D^{-1}b, \quad X^{(k)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix} \Longrightarrow DX^{(k+1)} = (L+U)X^{k} + b$$

$$a_{11}x_1^{(k+1)} = -(a_{12}x_2^{(k)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(k)}) + b_1$$

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}\left[-(a_{12}x_2^{(k)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(k)}) + b_1\right] = \frac{1}{a_{11}}\left[-\sum_{j\neq 1} a_{1j}x_j^{(k)} + b_1\right] \quad \boxed{x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j\neq i} a_{ij}x_j^{(k)}\right]}$$

计算$x_i^{(k+1)}$时， $x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \cdots x_{i-1}^{(k+1)}$已经算出来，可以用这些数据代替第$k$层数据

$$\boxed{x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right]}$$

比Jacobi格式误差小

祝数模竞赛成功！