



西安交通大学 数学与统计学院
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY School of Mathematics and Statistics



两个经典的常微分方程模型

周义仓

西安交通大学数学与统计学院

zhouyc@xjtu.edu.cn

15891720950



主要内容

一、单摆模型及其推广

(单摆、多摆、变杆长、变悬点)

二、悬链线模型及其应用

1. 悬链线方程的推导
2. 在系泊系统设计中的应用

三、一次参赛，终身受益

(一些早年参赛学生的体会)



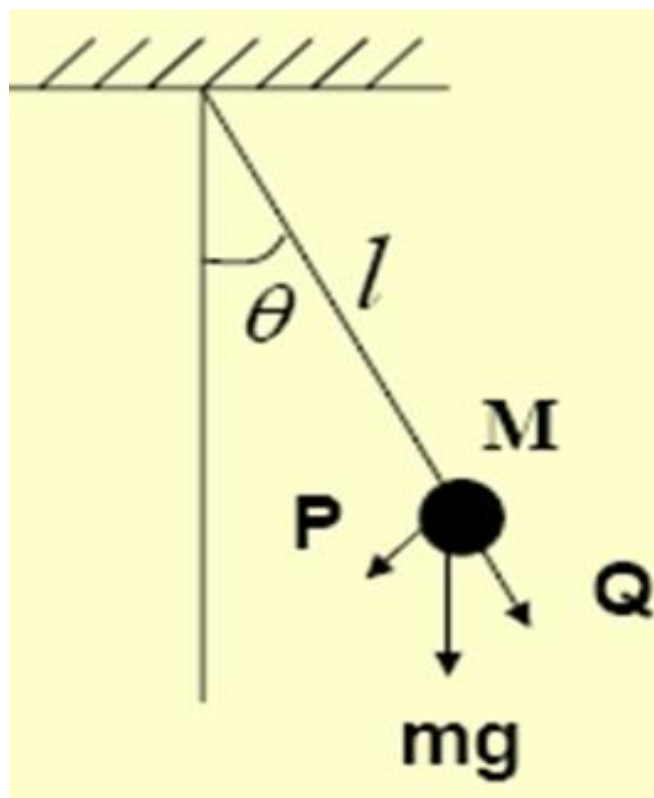
数学建模，没有最好，只有更好！

一. 单摆模型及其推广

在长为 L 的轻杆下端悬挂一质量为 m 的小球，该小球在重力作用下摆动，求单摆的运动规律。

$$ml \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -mg \sin \theta,$$

$$\theta(0) = \theta_0, \theta'(0) = 0$$





单摆模型的求解

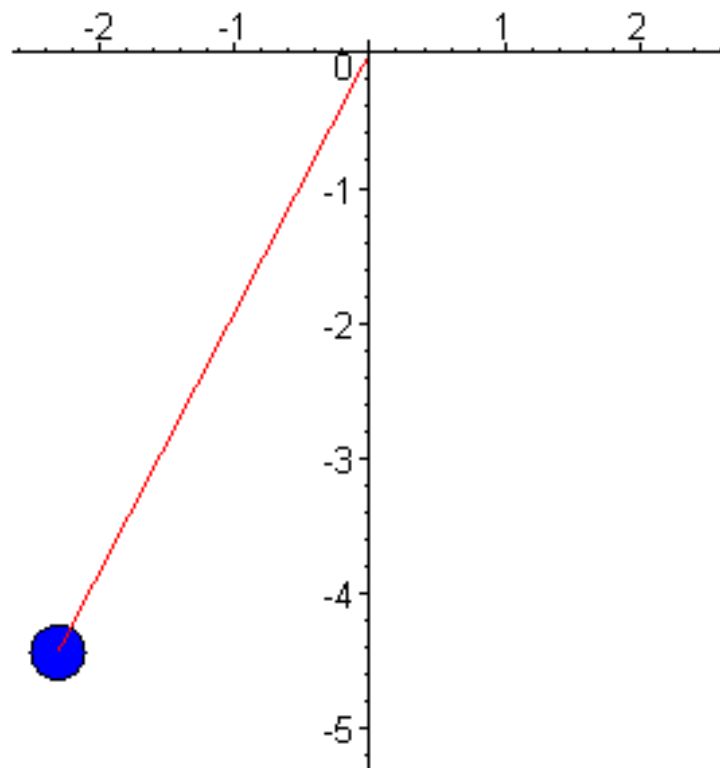
小范围内近似：线性方程

$$|\theta| \ll 1 \text{ 时}, \quad \sin \theta \sim \theta$$

$$\frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} = -\theta(t),$$

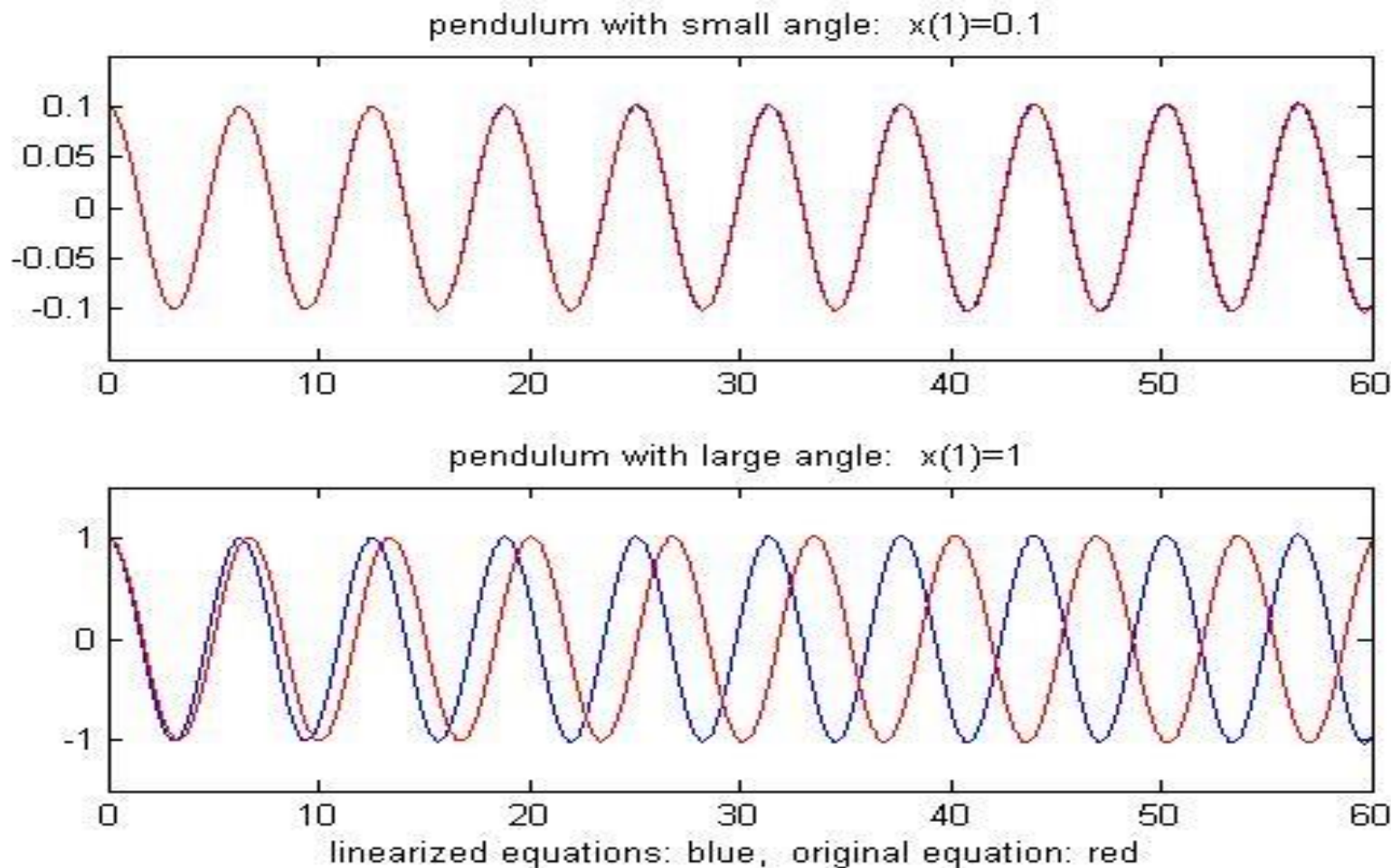
$$\theta(0) = \frac{1}{100}, \quad \theta'(0) = 0$$

$$\theta(t) = \frac{1}{100} \cos t$$





线性化模型与原模型解的比较





在直角坐标系下建立模型

$$mx'' = -T \sin \theta, \quad my'' = mg - T \cos \theta,$$

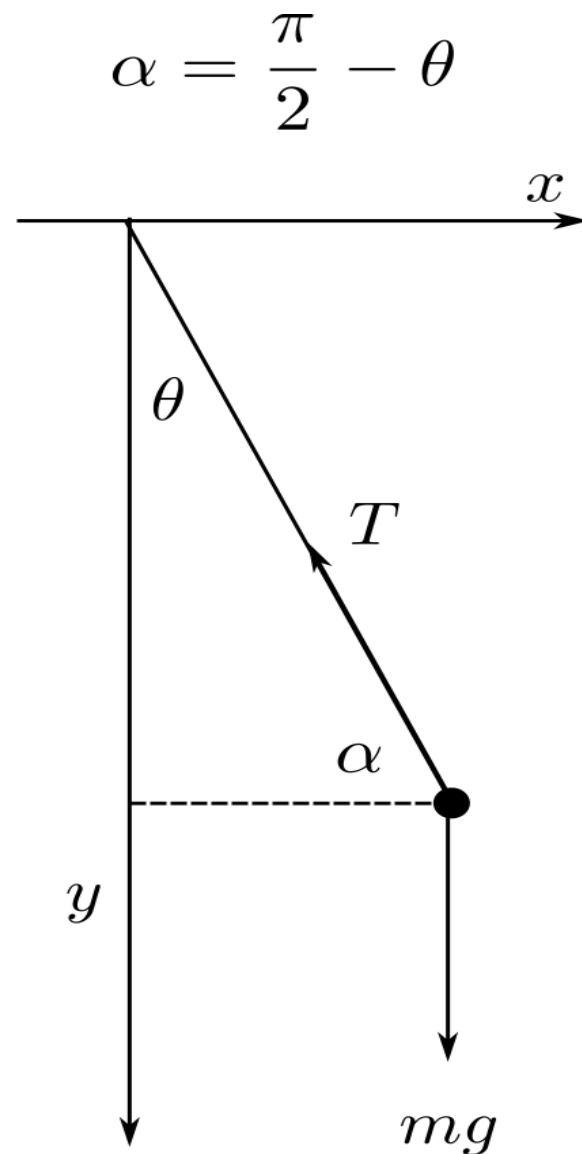
$$x = L \sin \theta, \quad y = L \cos \theta$$

$$x' = L \cos \theta \frac{d\theta}{dt}, \quad y' = -L \sin \theta \frac{d\theta}{dt},$$

$$x'' = -L \sin \theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + L \cos \theta \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

$$y'' = -L \cos \theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - L \sin \theta \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

$$mL \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -mg \sin \theta, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad \theta'(0) = 0$$





双摆

一个轻杆上端固定于一点，下端固联一个质量集中的物体，另一个轻杆上端固定于前一物体，下端固联一个质量集中的另一个物体，研究其运动规律。

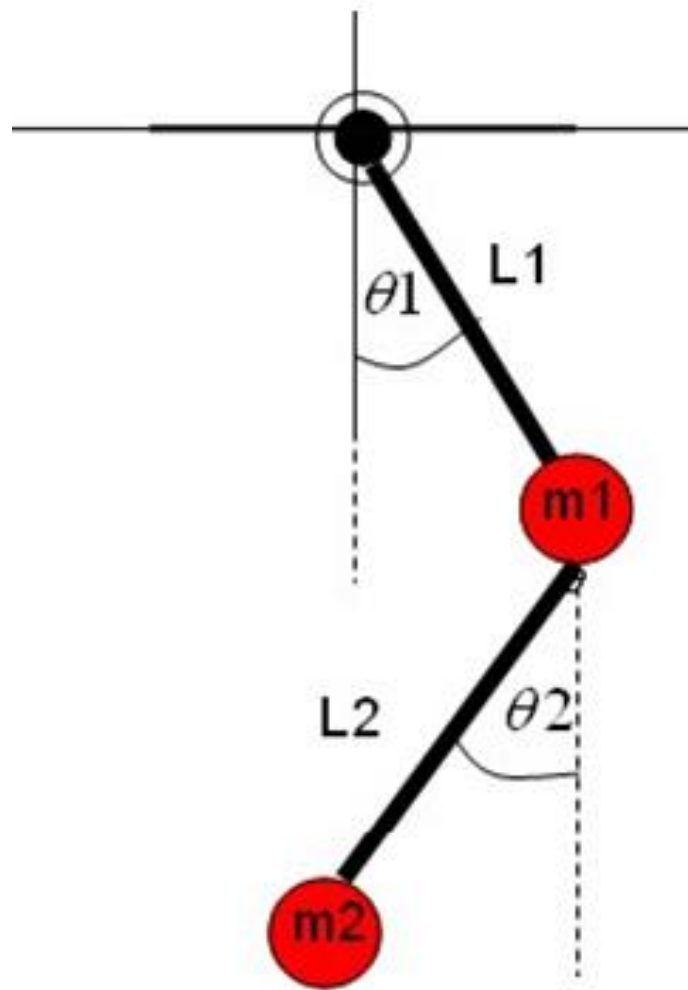
$$x_1 = L_1 \sin \theta_1,$$

$$y_1 = L_1 \cos \theta_1$$

$$x_2 = x_1 + L_2 \sin \theta_2,$$

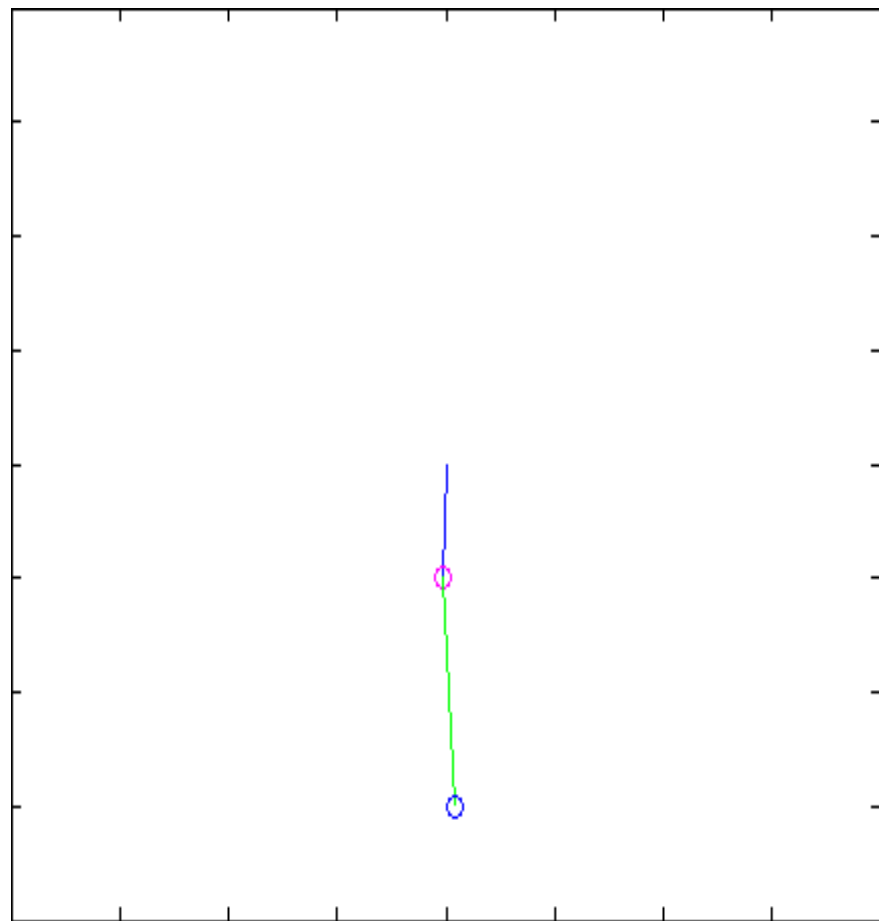
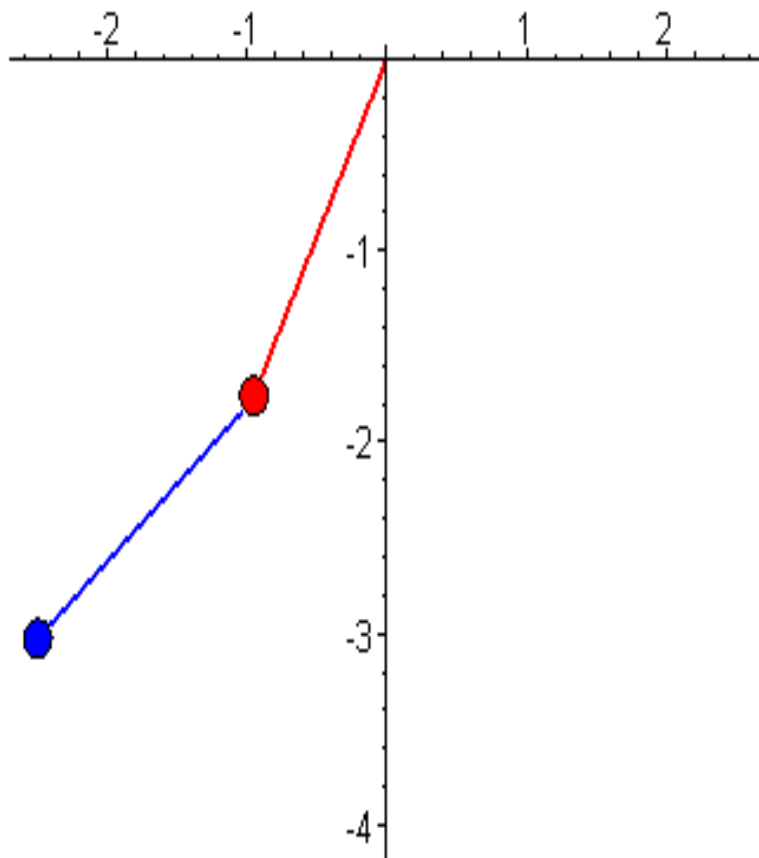
$$y_2 = y_1 + L_2 \cos \theta_2,$$

m_1 和 m_2 所受的力.....



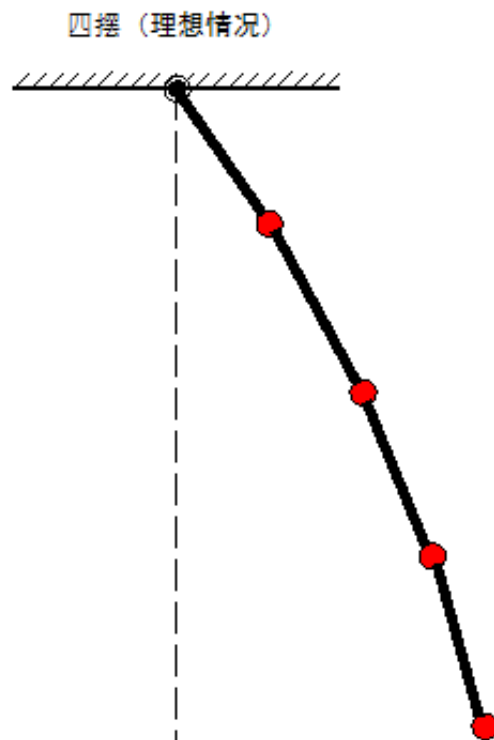
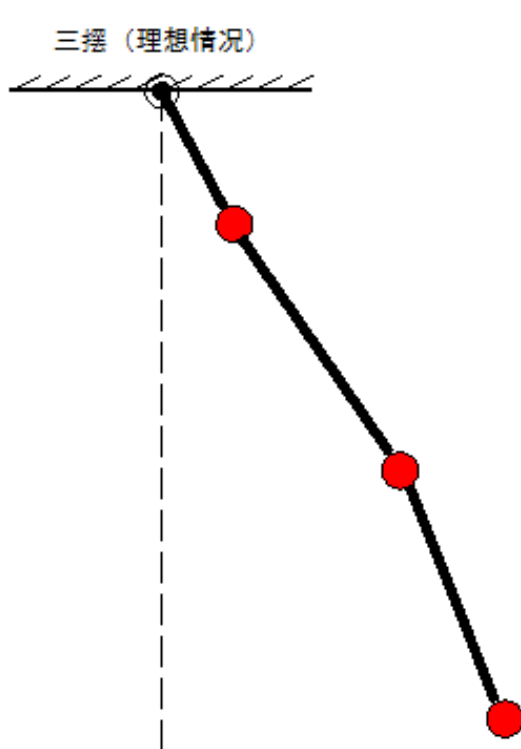


双摆的动态仿真





三摆、四摆的仿真



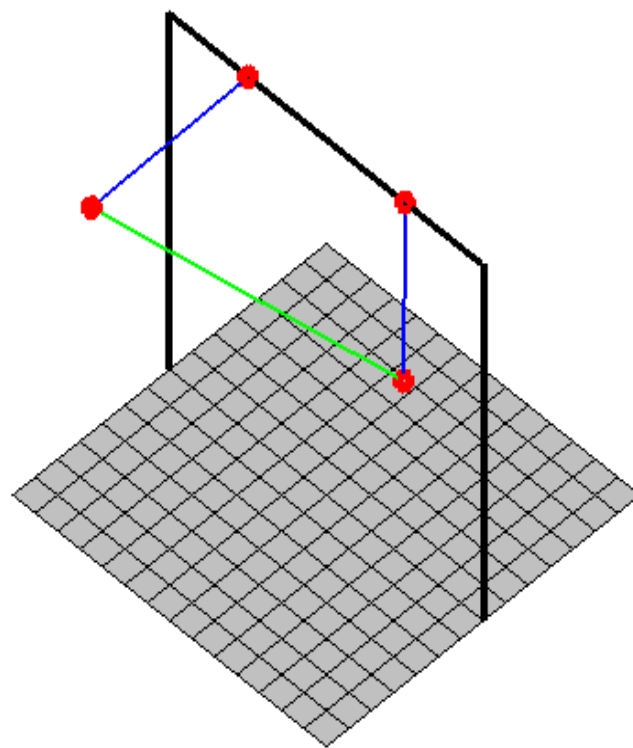
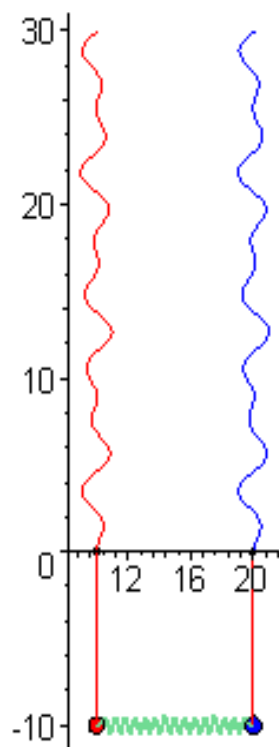


n摆仿真 ($n=7$, $n=10$)





耦合摆（两个单摆通过轻弹簧耦合）





摆长变化的单摆

$$x = L(t) \sin \theta(t),$$

$$y = L(t) \cos \theta(t),$$

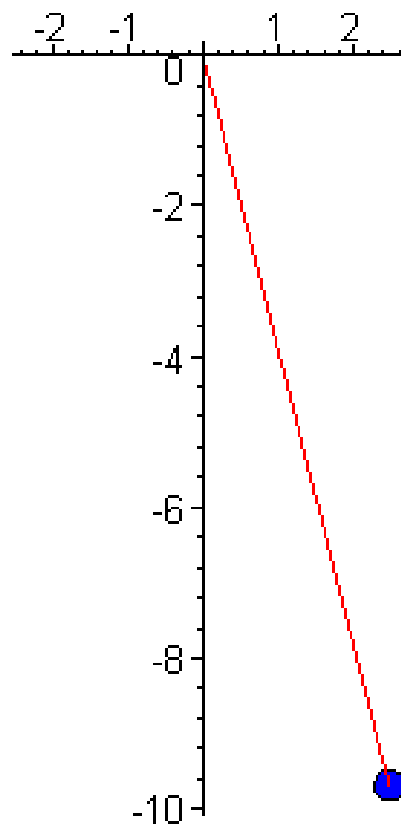
计算 x'' , y''

消去 T 得到:

$$\frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} = -\frac{g \sin \theta(t)}{L(t)}$$

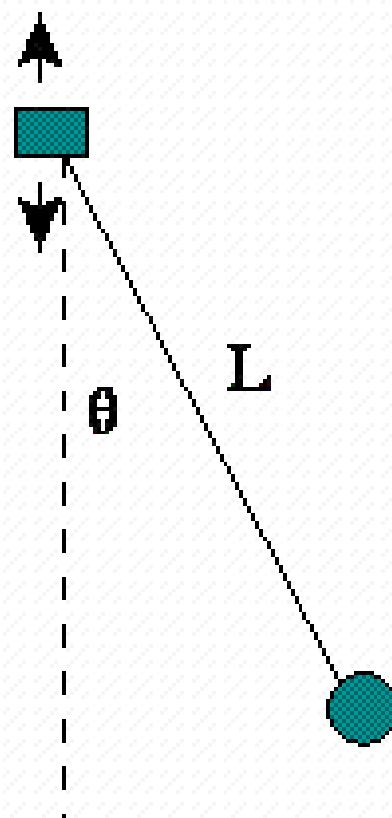
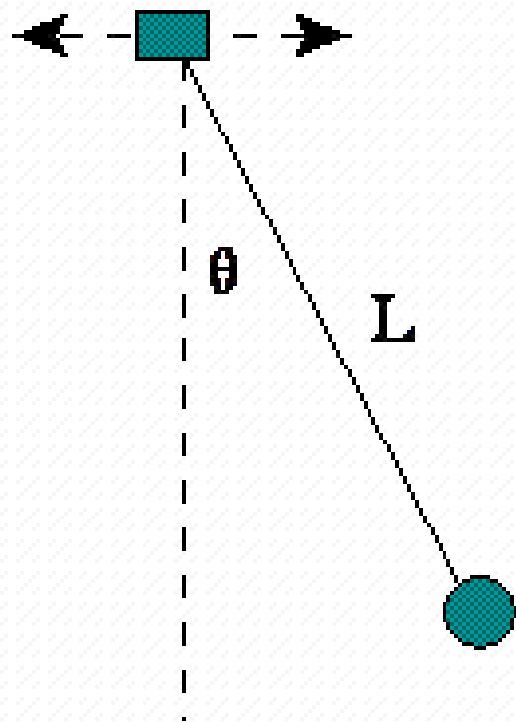
$$-\frac{2}{L(t)} \frac{dL(t)}{dt} \frac{d\theta(t)}{dt}$$

给定 $L(t)$ 和初始条件,
数值求解, 动画演示





悬点移动的单摆





西安交通大学

数学与统计学院

XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY School of Mathematics and Statistics



坐标表达式

$$x = x_0(t) + L \sin \theta(t),$$

$$y = y_0(t) + L \cos \theta(t),$$

$$mx'' = F_x, \quad my'' = F_y,$$

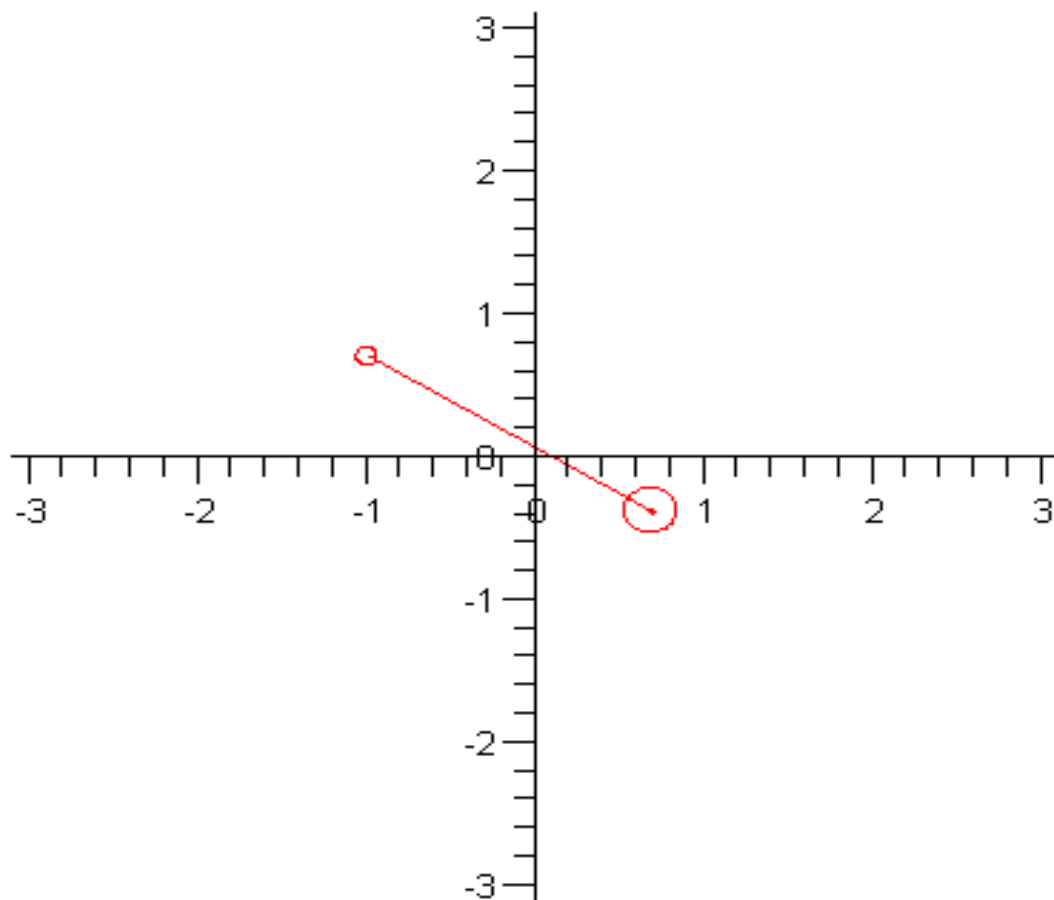
计算导数，整理

$$\frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} = \frac{-g \sin \theta(t)}{L}$$

$$-\frac{x_0''(t) \cos \theta(t) - y_0''(t) \sin \theta(t)}{L}$$

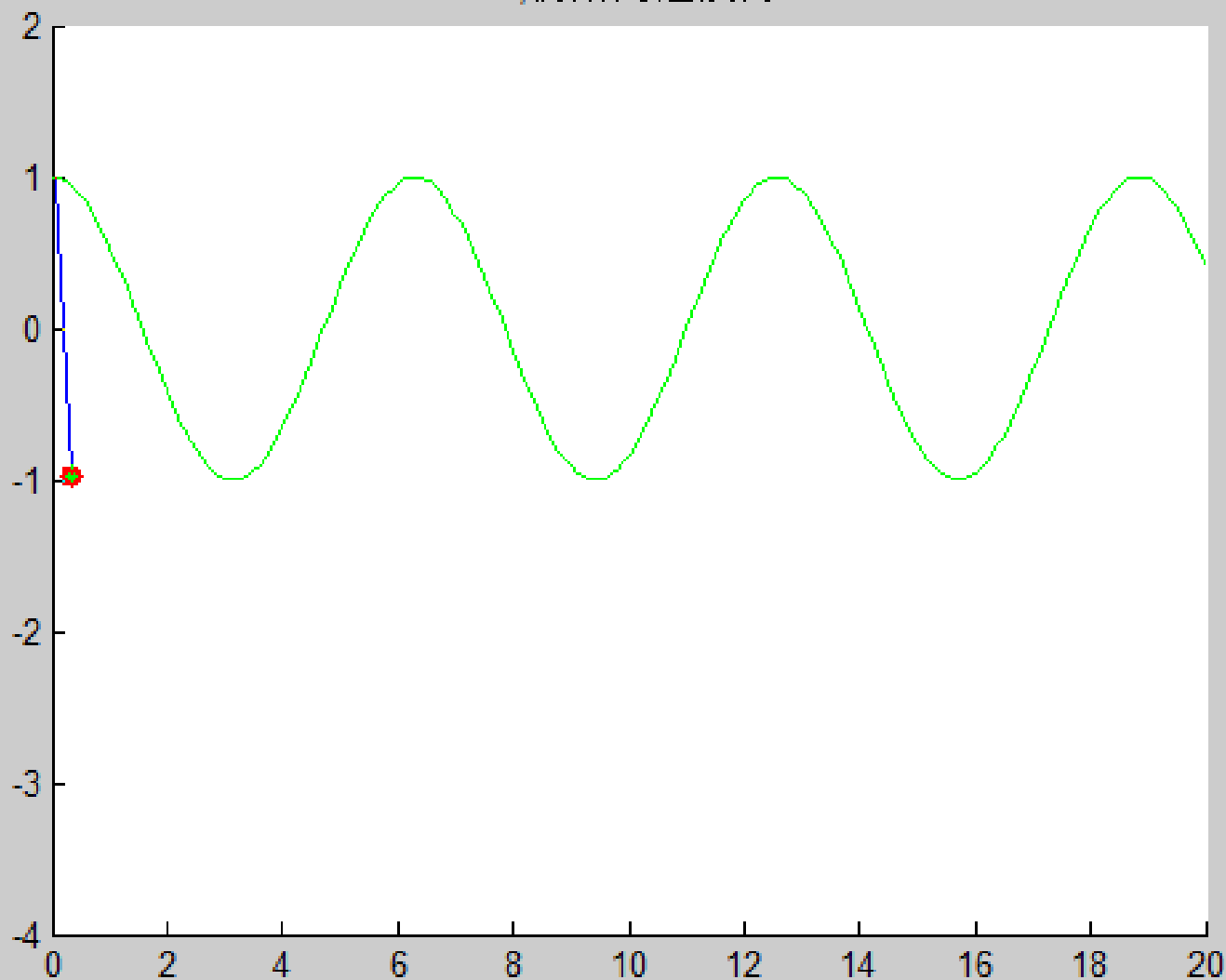
给定 $x_0(t)$ 和 $y_0(t)$ 和初始条件

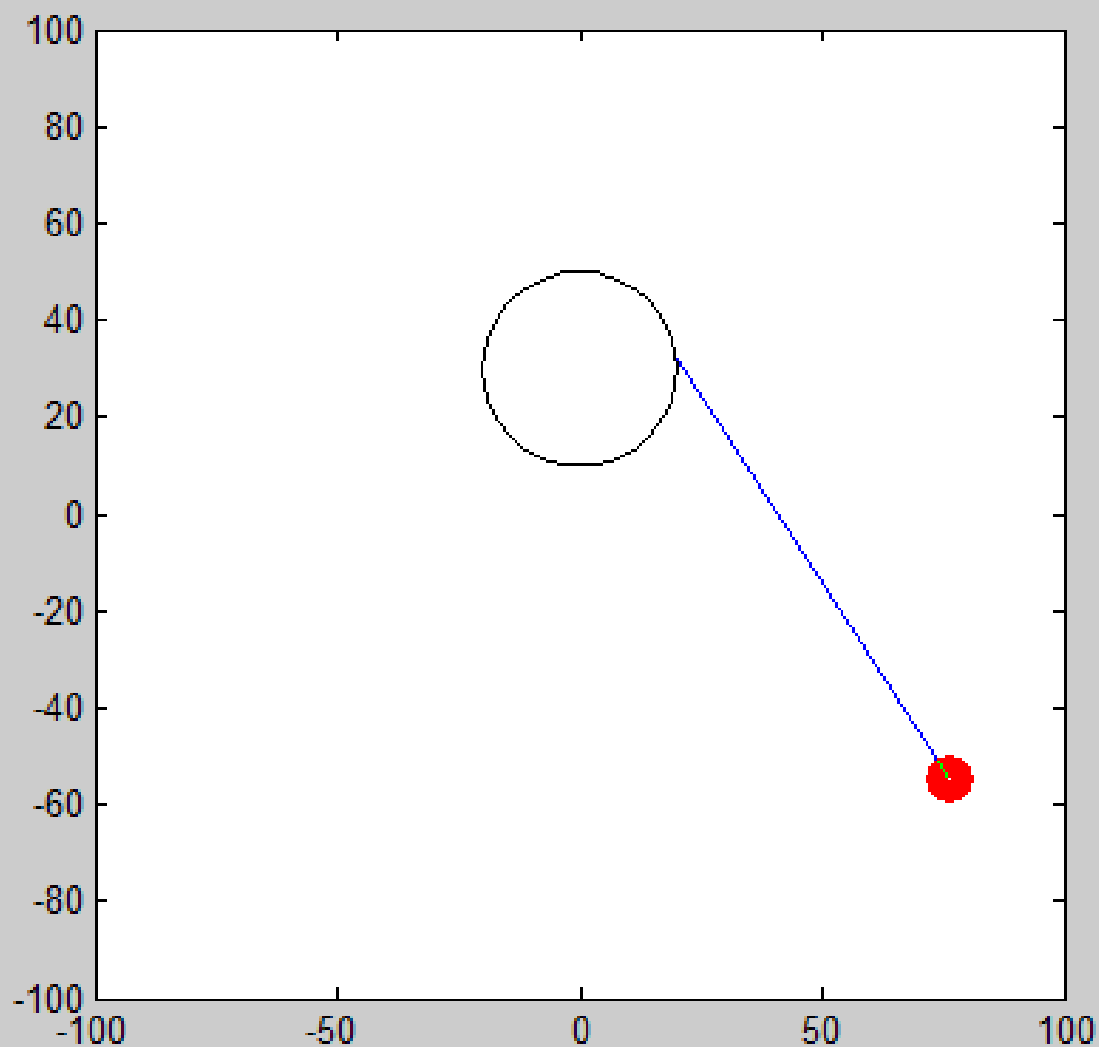
数值求解，动画演示

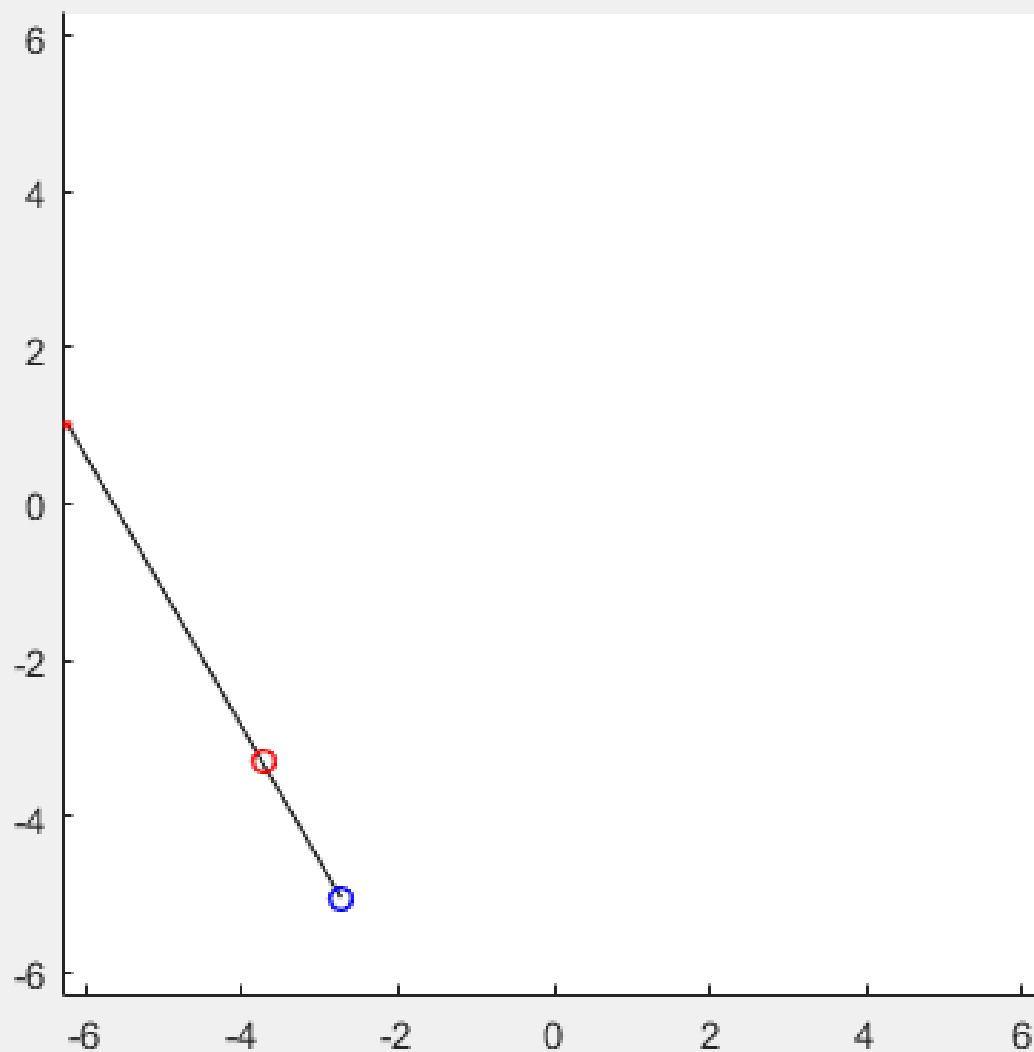




$dt=0.01$, 初始角速度为 0.15

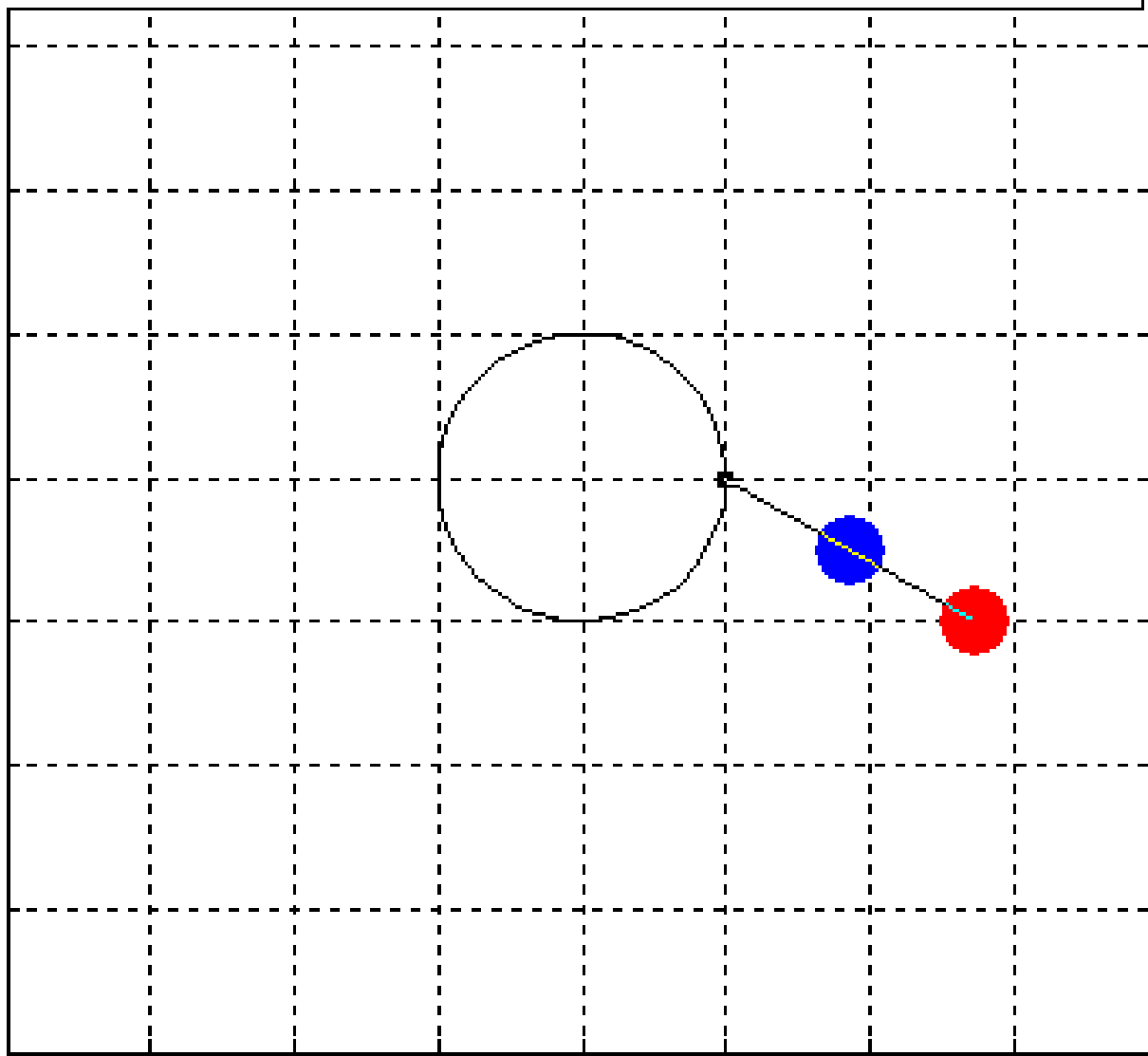






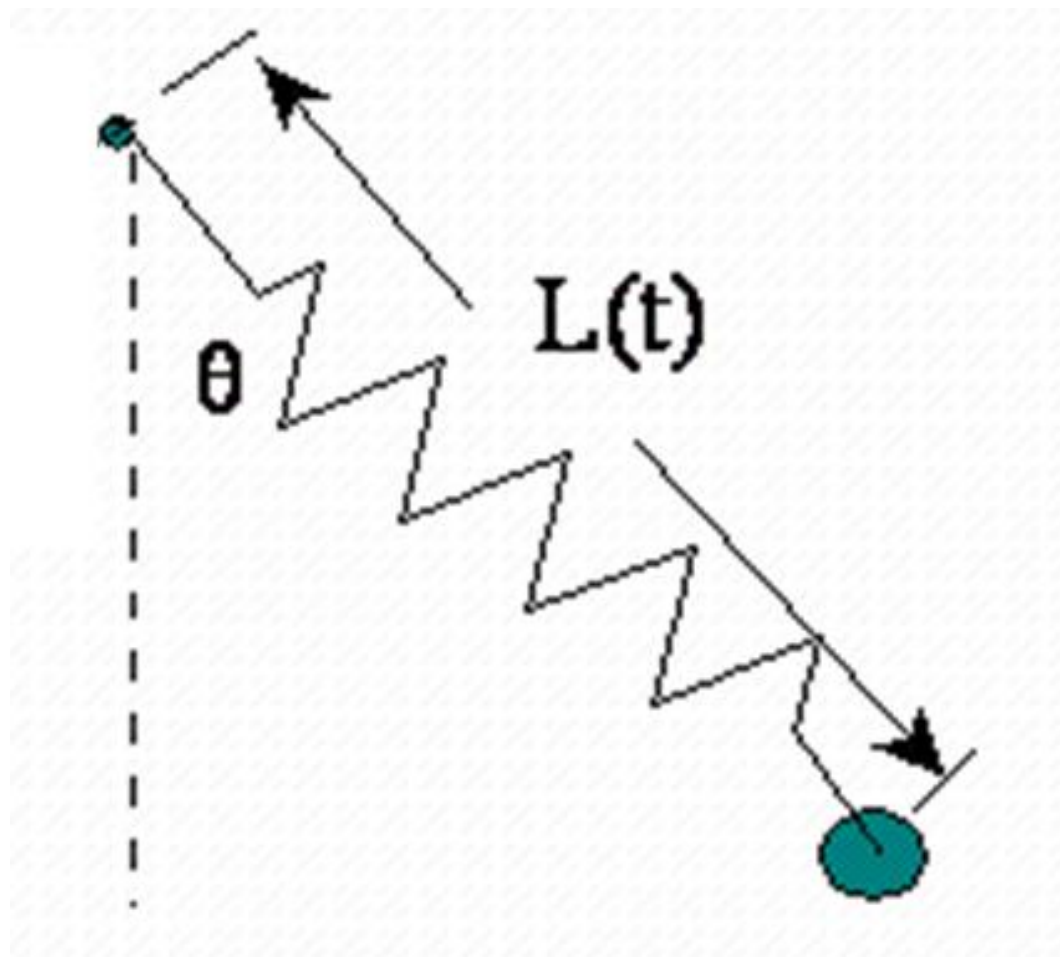


一 悬点变化的双摆运动-数学试验班41班 陈圣杰



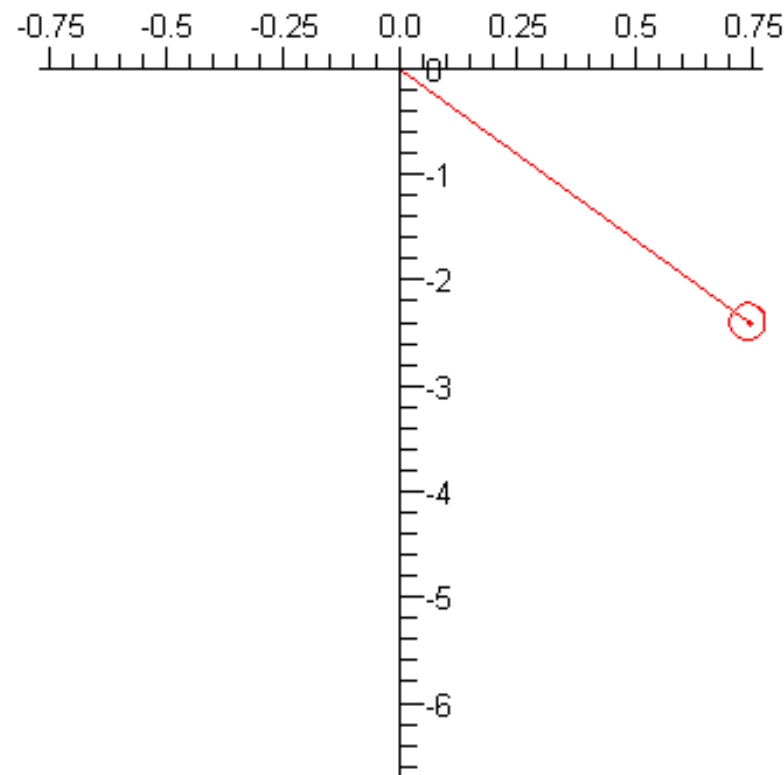
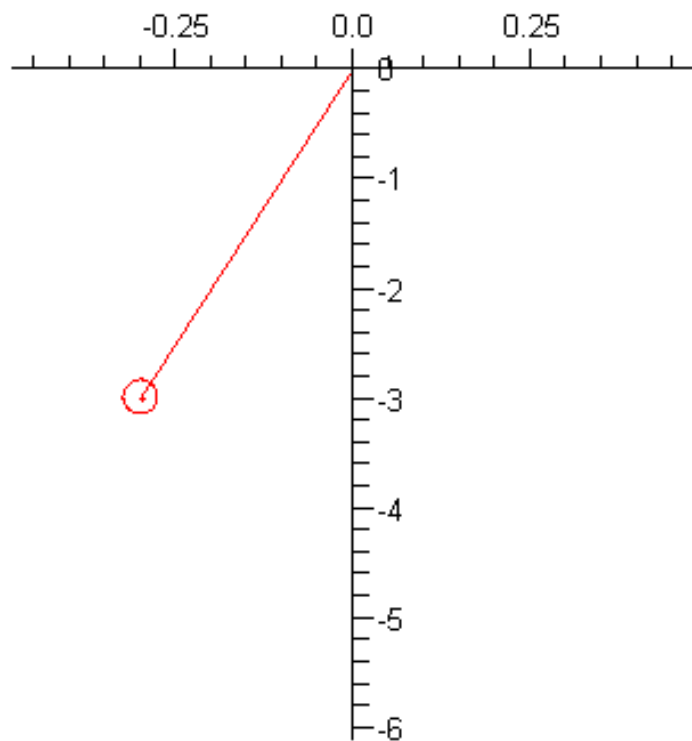


弹簧摆



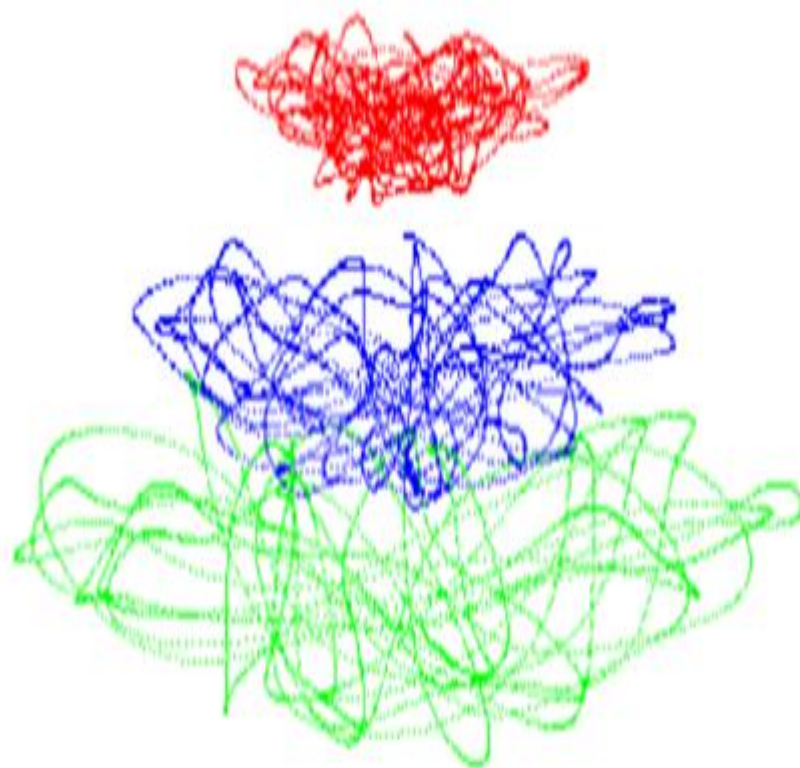
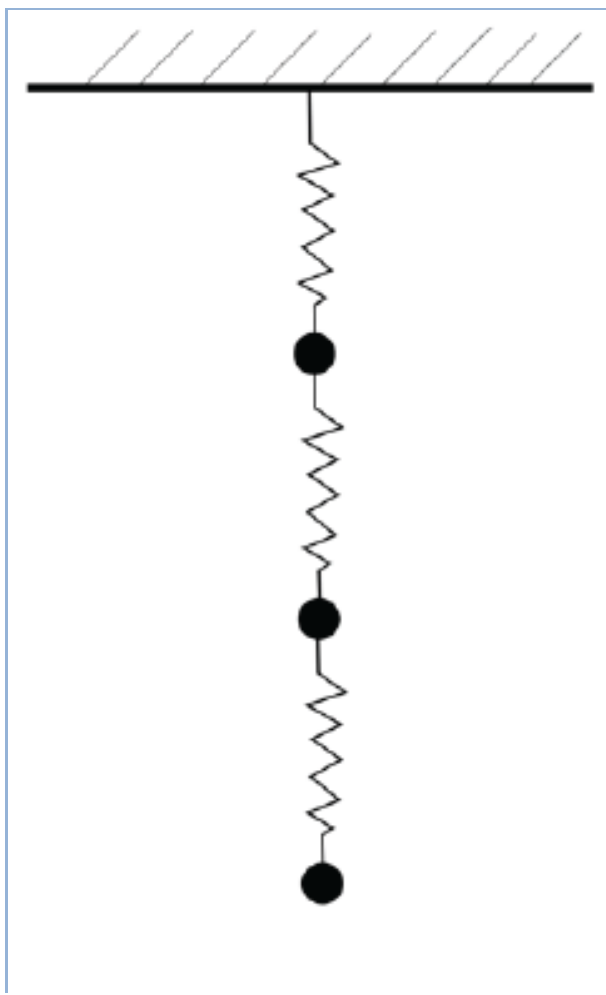


弹簧摆



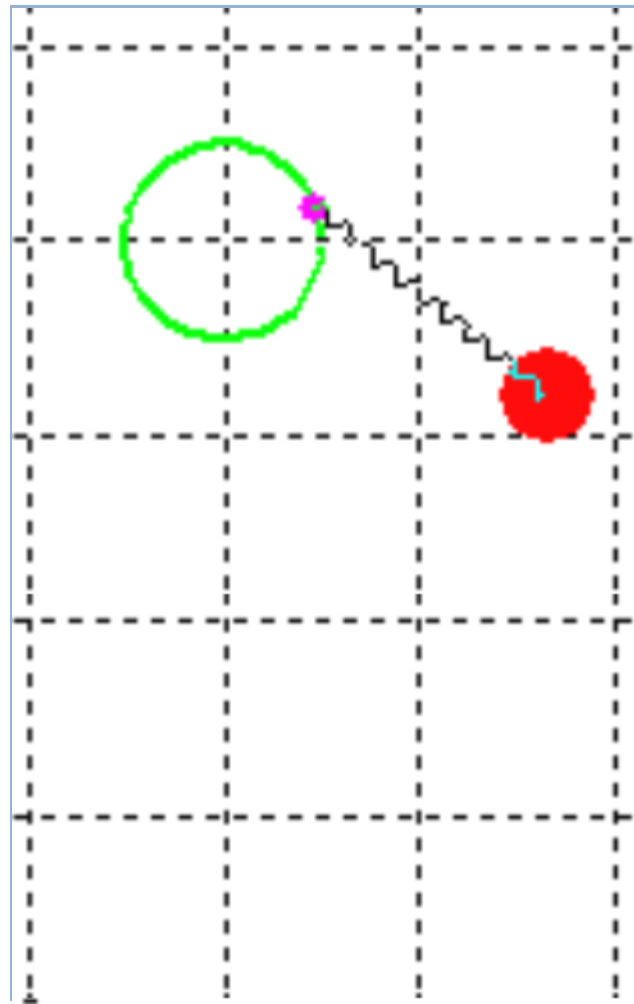
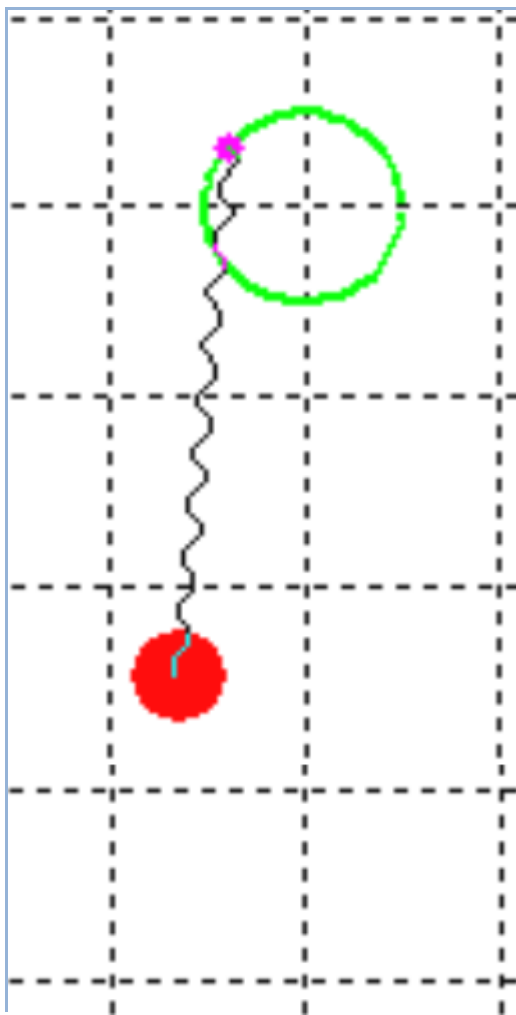
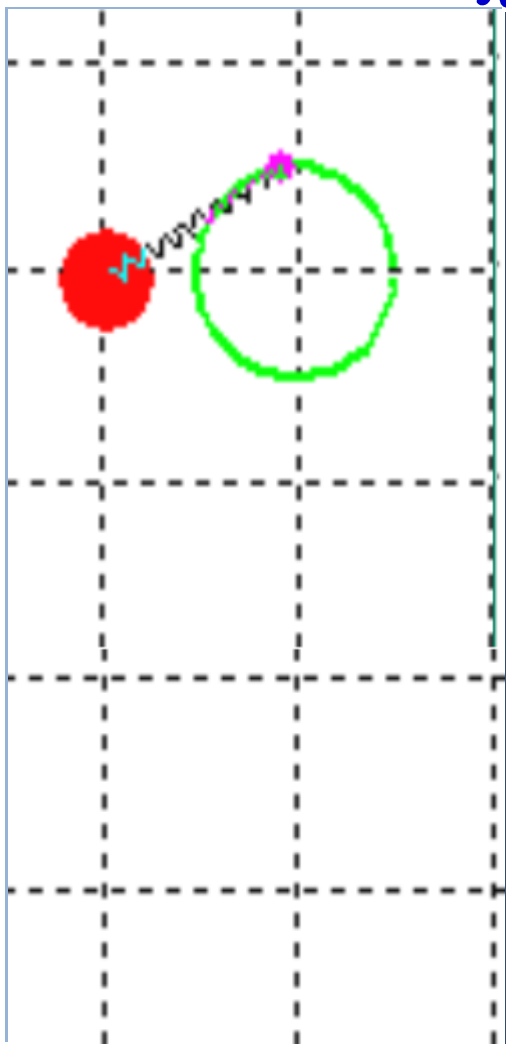


多个弹簧摆



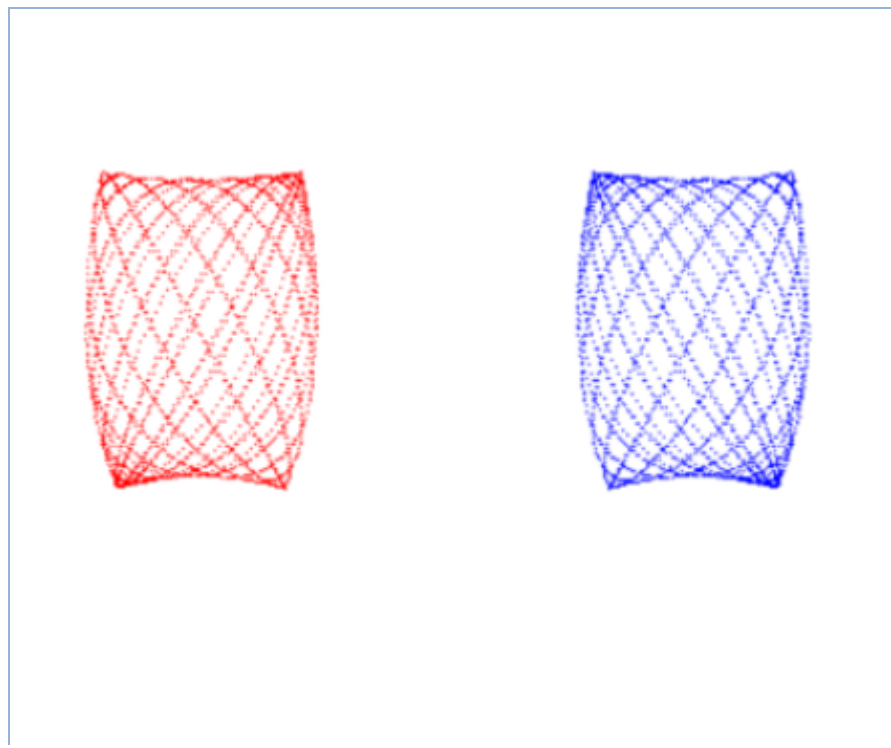
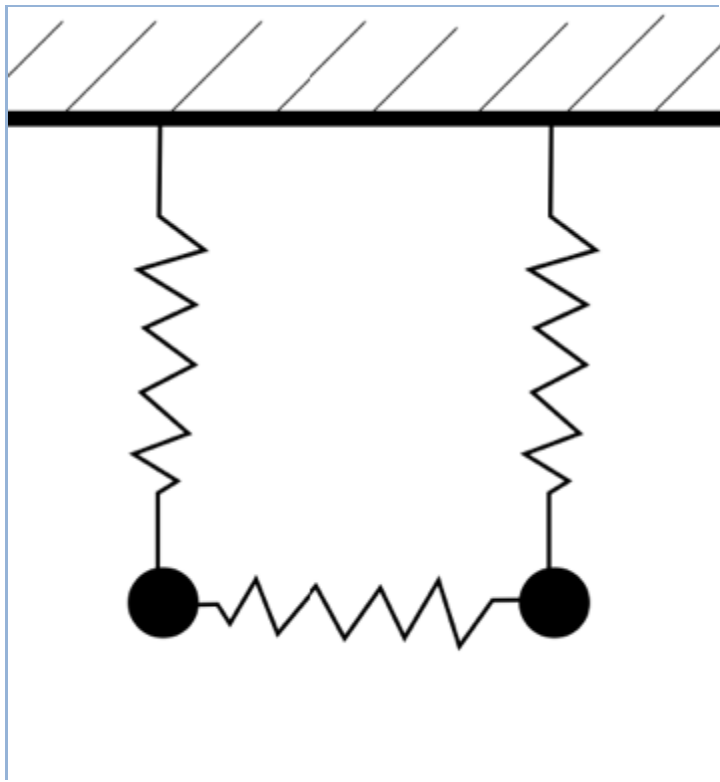


悬点变化的弹簧摆



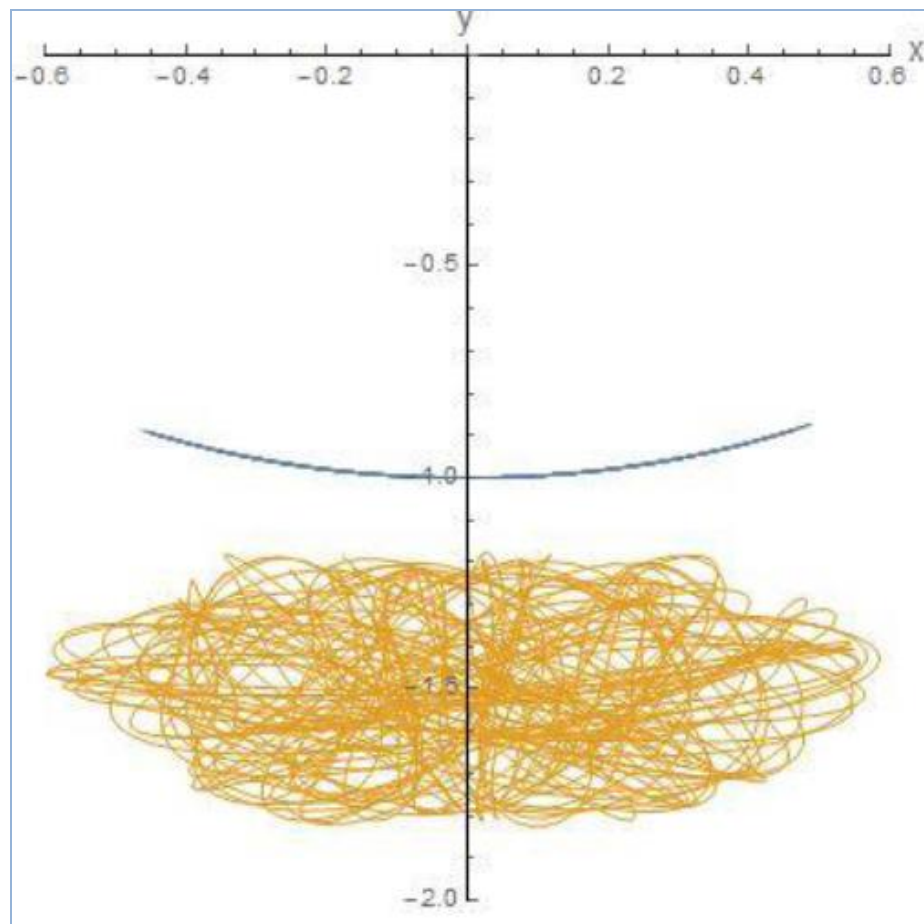
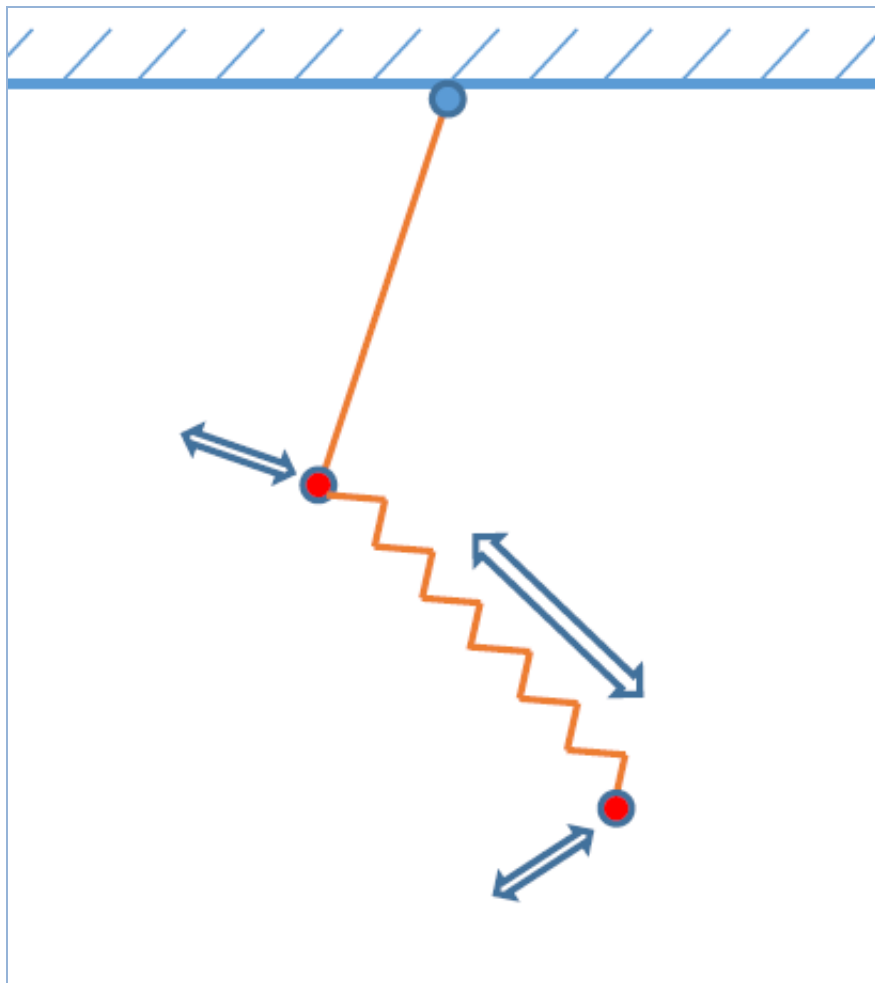


耦合的弹簧摆





单摆与弹簧摆的耦合





还有许多问题可以继续考虑

- (1) 均匀细杆连接的单摆
- (2) 有阻尼的单摆
- (3) 悬点在空间运动的单摆
- (4) 简化模型与实际情况的比较
-



二、悬链线模型及其应用

1. 悬链线方程的推导（坐标原点在最低点）

考虑 OP 段悬链线的受力情况

力平衡方程：

$$T \cos \theta = H_0, \quad T \sin \theta = W,$$

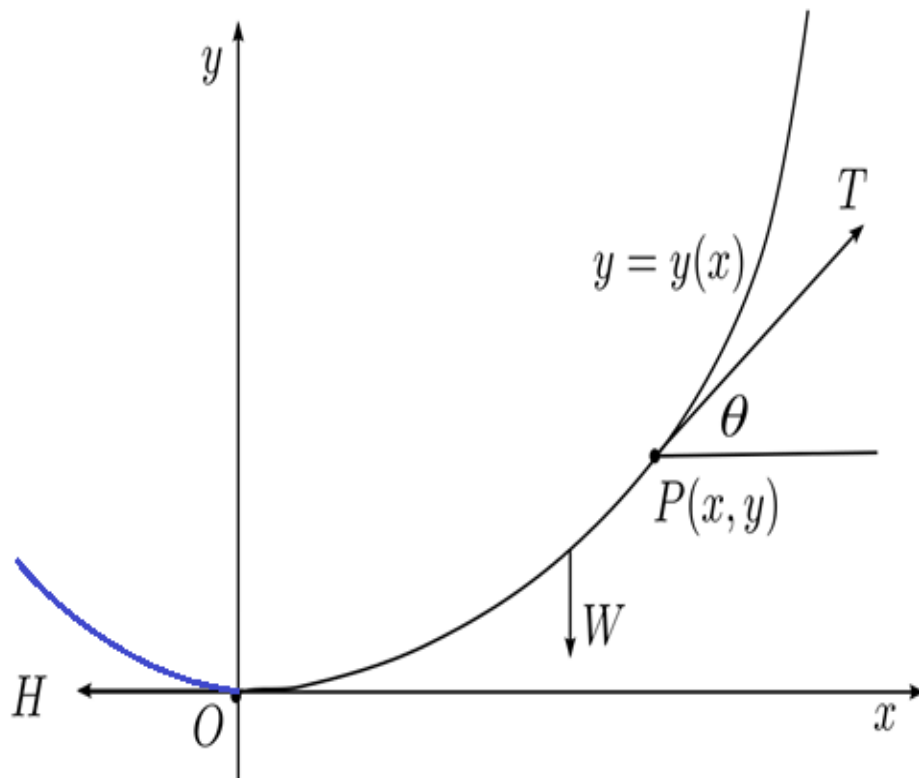
$$\tan \theta = \frac{W}{H_0}, \quad \tan \theta = \frac{dy}{dx},$$

$$W = \omega \int_0^x \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\omega}{H_0} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2},$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

$$y = a \left(\cosh \left(\frac{x}{a} \right) - 1 \right), \quad a = \frac{H_0}{\omega}$$





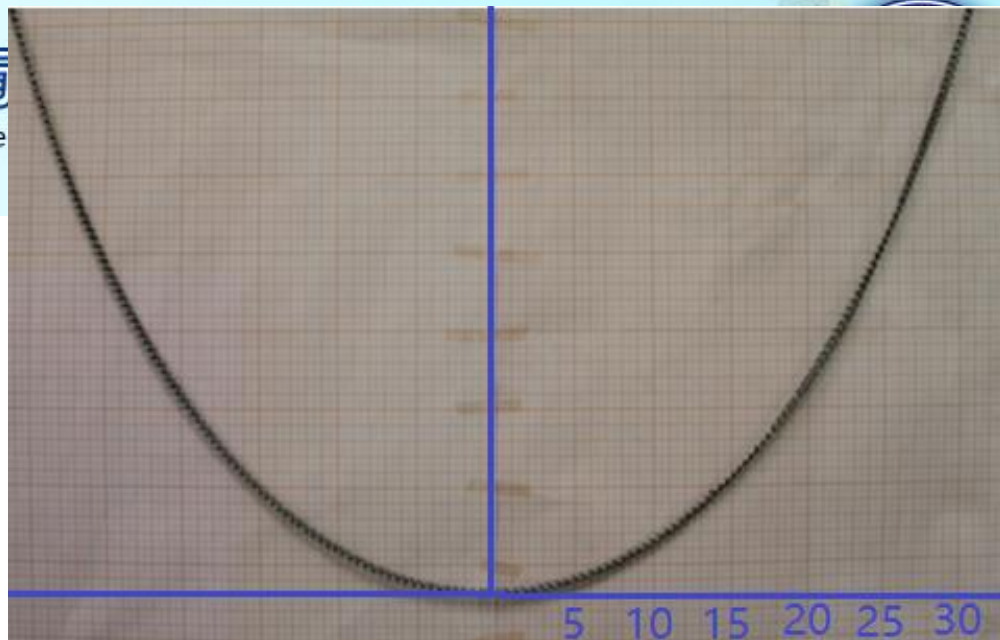
悬链线模型的验证

确定模型常数 $a = H_0 / \omega$,

$$y = a \left(\cosh \left(\frac{x}{a} \right) - 1 \right)$$

其中, H_0 为水平拉力,
 ω 为线密度, 比较测量
值和计算值的误差。

对于一种链条, 得到
 $a=20.6$ 代入后得到 6
个点的值如表所示



x坐标	y坐标	模型结果
0	0	0
5	0.6	0.61007564
10	2.5	2.47645499
15	5.8	5.70973782
20	10.5	10.50152520
25	17	17.13577359
30	26	26.00562190



悬链线方程推导 (过给定点, 有夹角)

过 (x_0, y_0) 点, 夹角为 θ_0

$$(T + dT) \cos(\theta + d\theta) = T \cos \theta,$$

$$(T + dT) \sin(\theta + d\theta) = T \sin \theta + dW,$$

$$dT \cos \theta - T \sin \theta = 0, \quad d(T \cos \theta) = 0,$$

将 $\cos(\theta + d\theta), \sin(\theta + d\theta)$ 展开,

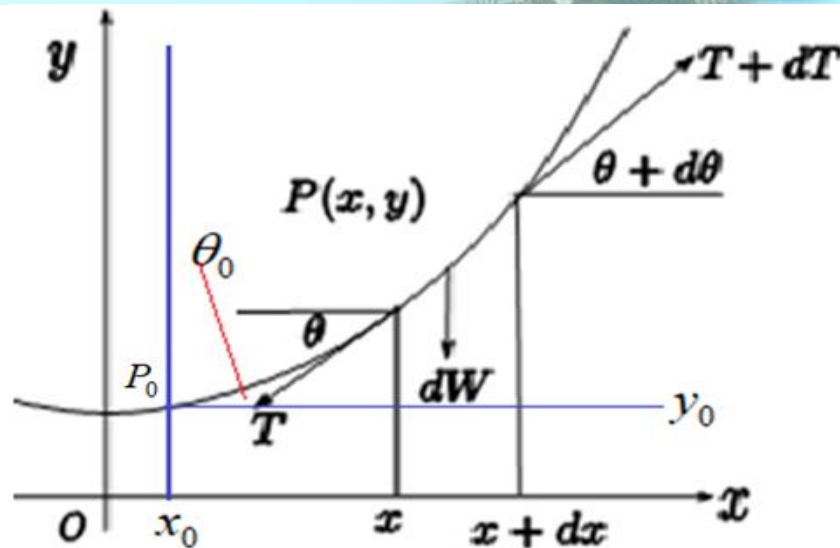
$T \cos \theta = H_0$ 为常数, x 方向所受力的大小不变

$$dW = \omega \sqrt{1 + y'(x)^2} dx, \quad y' = \tan \theta, \quad y'' = \sec^2 \theta \frac{d\theta}{dx}$$

ω 为单位长度悬链线的重量, H_0 为 x 方向所受力的大小

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\omega}{H} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}, \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = \tan \theta_0$$

$$y = a \cosh \left(\frac{x - x_0}{a} + \ln \left(\frac{1 + \sin \theta_0}{\cos \theta_0} \right) \right) + y_0 - \frac{a}{\cos \theta_0}, \quad a = \frac{H_0}{\omega}$$





悬链线方程推导 (过给定点, 有夹角)

特别, 过 $(0,0)$ 点、夹角为 θ_0 的悬链线方程为

$$y = a \cosh \left(\frac{x}{a} + \ln \left(\frac{1 + \sin \theta_0}{\cos \theta_0} \right) \right) - \frac{a}{\cos \theta_0}, \quad a = \frac{H_0}{\omega}$$

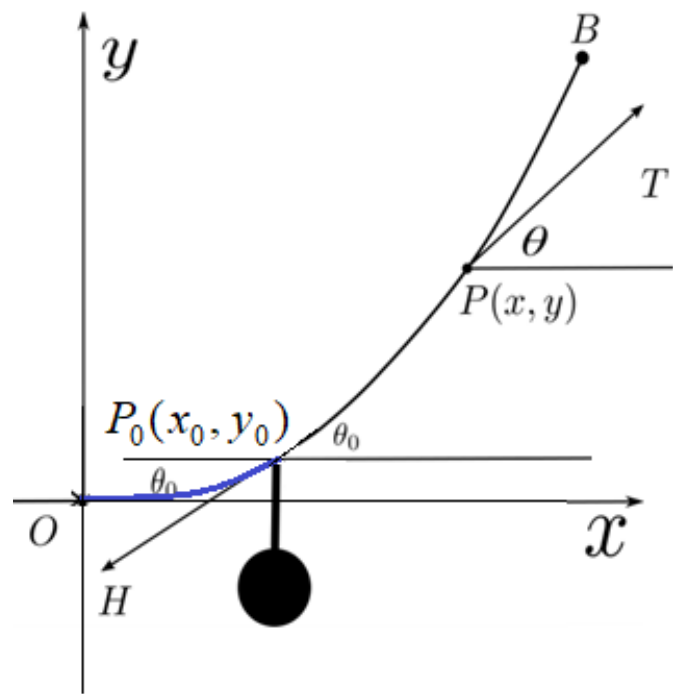
挂有重物的悬链线方程: 分段处理,

在 OP_0 和 P_0P 段的方程与前面推导的相同,

$$y = a \cosh \left(\frac{x}{a} \right) - a, \quad a = \frac{H_0}{\omega}, \quad 0 \leq x \leq x_0$$

重物仅影响 P_0P 段开始点的角度大小。

$$y = a \cosh \left(\frac{x - x_0}{a} + \ln \left(\frac{1 + \sin \theta_0}{\cos \theta_0} \right) \right) + y_0 - \frac{a}{\cos \theta_0}, \quad x \geq x_0$$





挂有重物的悬链线方程：夹角的确定

θ_0 的确定：考虑 $P(x, y)$ 点的受力情况：

在 x 和 y 方向的力为： $T_x = T \cos \theta = H \cos \theta_0$,

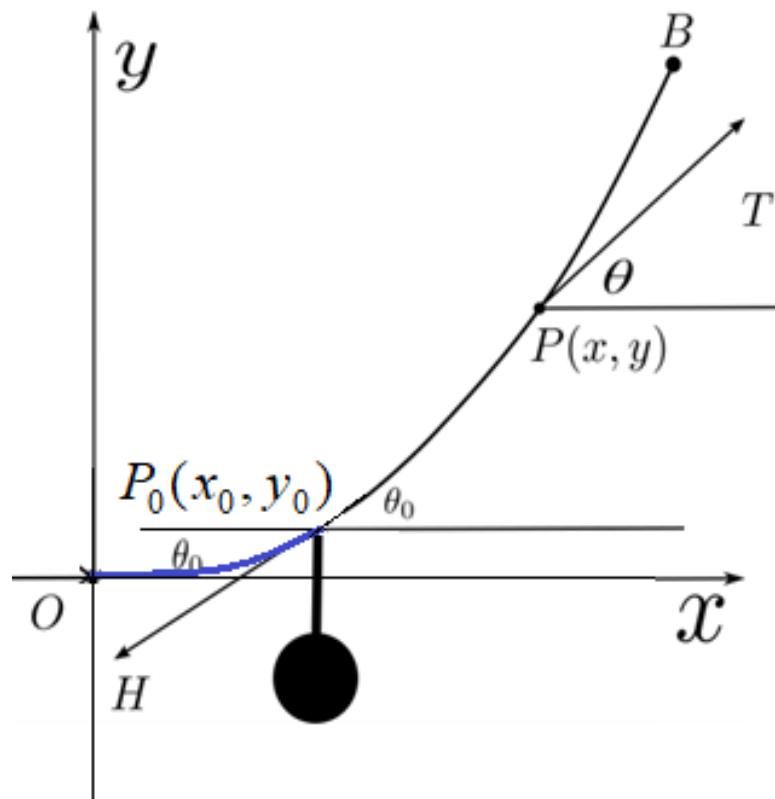
$$T_y = T \sin \theta = W_0 + \omega \int_0^x \sqrt{1 + y'(x)^2} dx,$$

$$\tan \theta = \frac{T \sin \theta}{T \cos \theta} = \frac{W_0 + \omega \int_0^x \sqrt{1 + y'(x)^2} dx}{H \cos \theta_0}$$

$T \sin \theta$ 为 P 点下悬链线的重量与重物的重量

$$\begin{aligned} \tan \theta_0 &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{W_0 + \omega \int_0^x \sqrt{1 + y'(x)^2} dx}{H \cos \theta_0} \\ &= \frac{W + \omega \int_0^{x_0} \sqrt{1 + y'(x)^2} dx}{H \cos \theta_0} \end{aligned}$$

如果知道了水平力的大小和球的重量，就可以通过反正切函数算出角度 θ_0 的值。





悬链线方程推导：有水流力的情况

有水流力时的情况：考虑 $[x, x+dx]$ 对应弧段

悬链线的受力情况，记 $ds = \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$

在 x 、 y 两个方向上的力平衡方程分别为

$$(T + dT) \cos(\theta + d\theta) = T \cos \theta - f \sin \theta ds,$$

$$(T + dT) \sin(\theta + d\theta) = T \sin \theta + \rho ds.$$

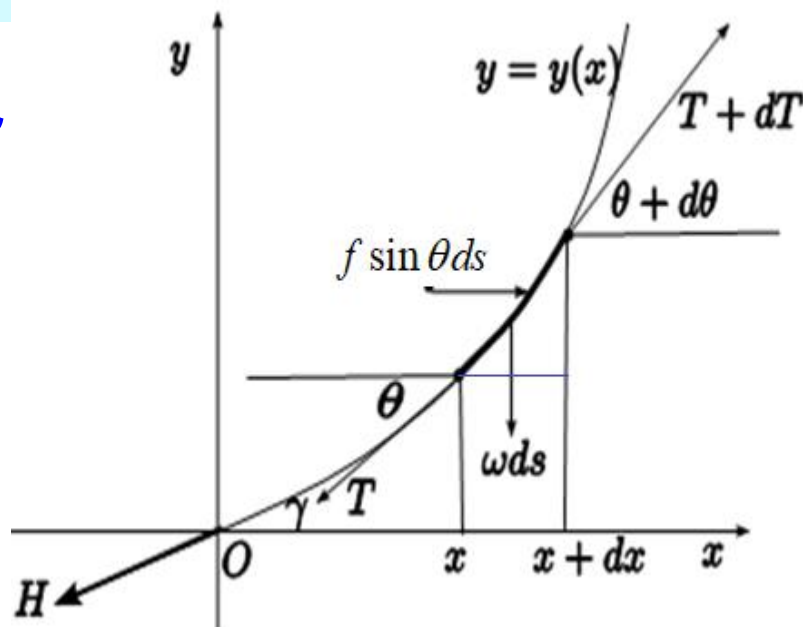
将 $\cos(\theta + d\theta)$, $\sin(\theta + d\theta)$ 展开，整理

$$\frac{dT}{ds} = -f \cos \theta \sin \theta + \rho \sin \theta, \quad T(0) = H,$$

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{f \sin^2 \theta + \rho \cos \theta}{T}, \quad \theta(0) = \gamma.$$

该方程组没有解析解，可以进行数值求解

$$x \text{ 和 } y \text{ 与 } \theta \text{ 的关系: } \frac{dx}{ds} = \cos \theta, \quad \frac{dy}{ds} = \sin \theta$$



$$T_{k+1} = T_k + (-f \cos \theta_k \sin \theta_k + \rho \sin \theta_k) \Delta s_k, \quad T_0 = H,$$

$$\theta_{k+1} = \theta_k + \frac{f \sin^2 \theta_k + \rho \cos \theta_k}{T_k} \Delta s_k, \quad \theta_0 = \gamma,$$

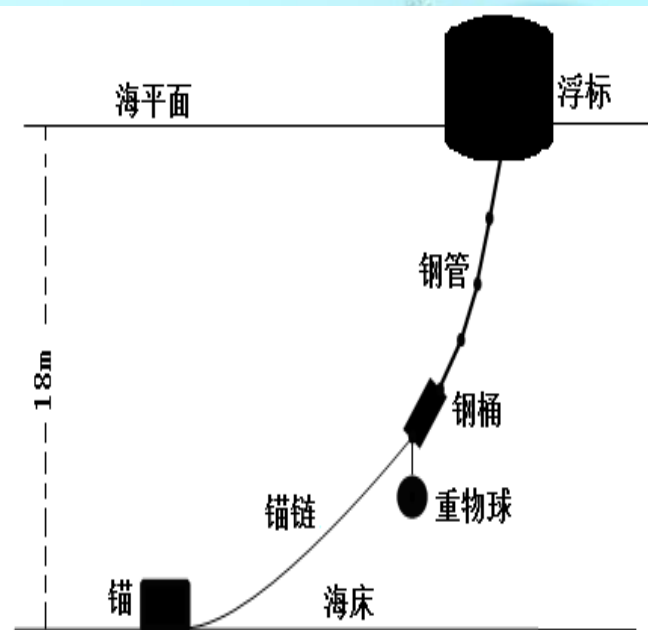
$$x_{k+1} = x_k + \cos \theta_k \Delta s_k, \quad x_0 = 0,$$

$$y_{k+1} = y_k + \sin \theta_k \Delta s_k, \quad y_0 = 0.$$



2. 在系泊系统设计中的应用（2016A）

近浅海观测网的传输节点由浮标系统、系泊系统和水声通讯系统组成（如图1所示）。可简化为底面直径2m高2m的圆柱体，浮标的质量为1000kg。系泊系统由钢管、钢桶、重物球、电焊锚链和特制的抗拖移锚组成。锚的质量为600kg，锚链选用无档普通链环，



近浅海观测网的常用型号及其参数在附表中列出。钢管共4节，每节长度1m，直径为50mm，每节钢管的质量为10kg。要求锚链末端与锚的链接处的切线方向与海床的夹角不超过16度，否则锚会被拖行，致使节点移位丢失。水声通讯系统安装在一个长1m、外径30cm的密封圆柱形钢桶内，设备和钢桶总质量为100kg。钢桶上接第4节钢管，下接电焊锚链。钢桶竖直时，水声通讯设备的工作效果最佳。若钢桶倾斜，则影响设备的工作效果。钢桶的倾斜角度（钢桶与竖直线的夹角）超过5度时，设备的工作效果较差。为了控制钢桶的倾斜角度，钢桶与电焊锚链链接处可悬挂重物球。

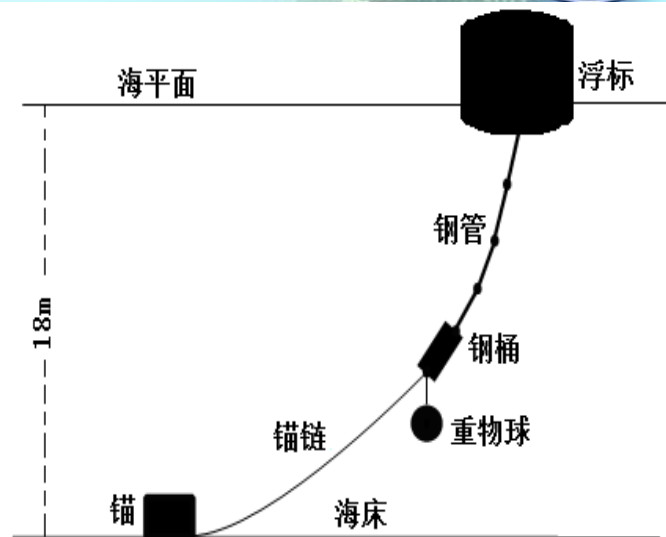


系泊系统的设计就是确定锚链的型号、长度和重物球的质量，使得浮标的吃水深度和游动区域及钢桶的倾斜角度尽可能小。

问题1 某型传输节点选用II型电焊锚链22.05m，选用的重物球的质量为1200kg。现将该型传输节点布放在水深18m、海床平坦、海水密度为 $1.025 \times 10^3 \text{kg/m}^3$ 的海域。若海水静止，分别计算海面风速为12m/s和24m/s时钢桶和各节钢管的倾斜角度、锚链形状、浮标的吃水深度和游动区域。

问题2 在问题1的假设下，计算海面风速为36m/s时钢桶和各节钢管的倾斜角度、锚链形状和浮标的游动区域。请调节重物球的质量，使得钢桶的倾斜角度不超过5度，锚链在锚点与海床的夹角不超过16度。

问题3 由于潮汐等因素的影响，布放海域的实测水深介于16m~20m之间。布放点的海水速度最大可达到1.5m/s、风速最大可达到36m/s。请给出考虑风力、水流力和水深情况下的系泊系统设计，分析不同情况下钢桶、钢管的倾斜角度、锚链形状、浮标的吃水深度和游动区域。





说明

近海风荷载可通过近似公式 $F=0.625 \times Sv^2(N)$ 计算，其中 S 为物体在风向法平面的投影面积(m^2)， v 为风速(m/s)。

近海水流力可通过近似公式 $F=374 \times Sv^2(N)$ 计算，其中 S 为物体在水流速度法平面的投影面积(m^2)， v 为水流速度(m/s)。

锚链型号和参数表

型号	长度 (mm)	质量 (kg)
I	78	3.2
II	105	7
III	120	12.5
IV	150	19.5
V	180	28.12
长度是指每节链环的长度； 质量是指每米环链的质量		



题目来源及要求

应征题目：近浅海海底观测网的组网优化问题，原题是针对某海域试验用海底观测网提出的，需要通过模型设计试验海域中系泊系统和水声通讯系统传输节点的布局；**实际部门关注的是第三问**，问题1和问题2是我们增加的，帮助学生理解问题和形成建模与求解的思路；

考察学生理解和简化实际问题的能力，主要用数学和力学知识建立模型，进行求解后给出需要的结果：确定锚链的型号、长度和重物球的质量，使得浮标的吃水深度和游动区域及钢桶的倾斜角度尽可能小。



题目解答的主要思路

通过受力分析建立模型，求解后给出需要的结果。

- 将锚链、钢桶、钢管都简化为柔软的绳索，利用悬挂重物的三段悬链线来解决；
- 将下部的锚链简化为悬链线，上面的钢桶和钢管分别作为刚体来处理，由力和力矩的平衡条件建立模型；
- 将每节环链、钢桶和钢管都看作刚体，得到力和力矩的平衡条件，给出离散的递推模型。



在海水中的重量（考虑浮力）

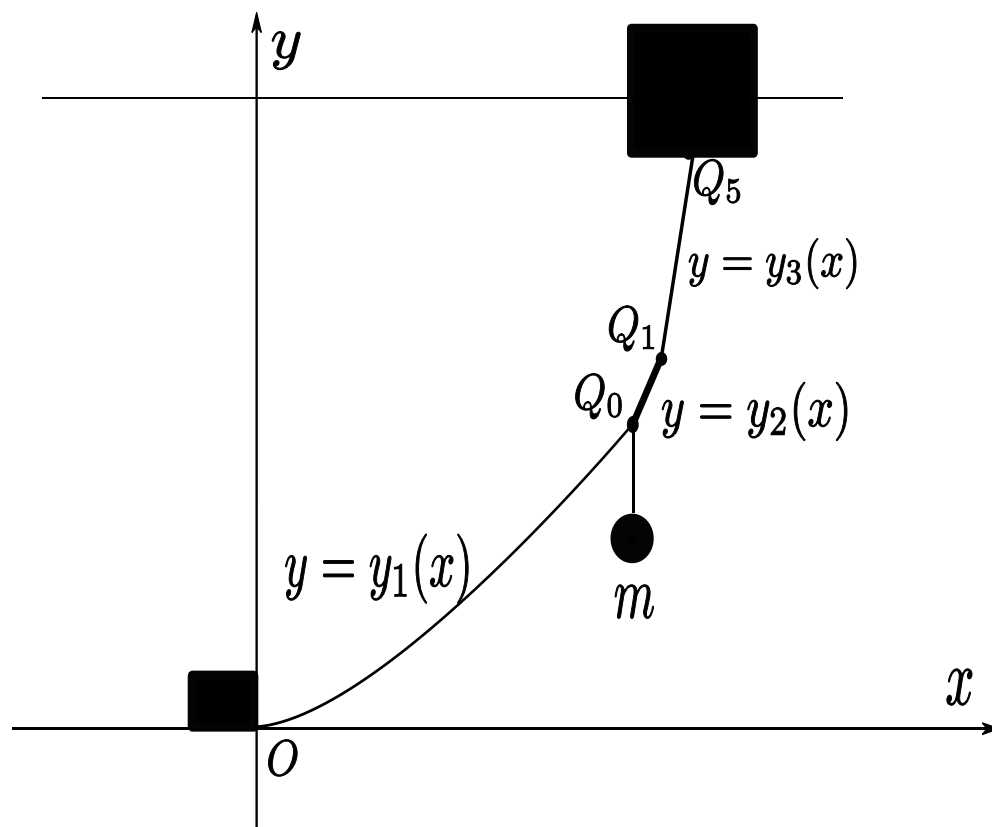
常数与浮力： $L=22.05\text{m}$, $m_0=7\text{ kg/m}$, $m=1200\text{kg}$,
 $m_1=100\text{kg}$, $m_2=10\text{kg}$, $H_{\text{water}}=18\text{m}$, $v=12\text{m/s}$,
设这些组件是钢材，比重为 7800kg/m^3 , 则它们
在海水中的重量分别为： $w_0=59.59\text{N/m}$,
 $w=10214.62\text{N}$, $w_1=269.96\text{N}$, $w_2=85.12\text{N}$

如果这些组件的材料不是钢材，其建模过程完全相同，只是计算结果有些差异。



基本思路

将锚链、钢桶和钢管分别看作是单位质量不同的柔软绳索，按照三段挂有重物的悬链线进行建模与计算。





第一段悬链线的方程

若锚链被全部拉起，
在锚点与海床恰好相切，
则浮标所承载的重量：

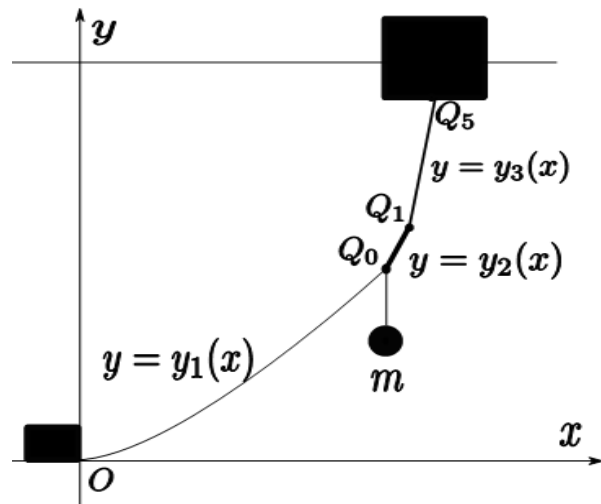
$$W_f = 1000 \times 9.8 + L_0 w_0 + w + w_1 + 4w_2$$

$$\text{浮标的吃水深度为: } H_w = \frac{W_f}{3200.13 \times 9.8}$$

$$\text{浮标上的风力大小为: } F = 0.625 \times 2(2 - H_w)v^2$$

$$\text{OQ}_0\text{-之间悬链线的方程为: } y = y_1(x) = a_1 \left(\cosh \left(\frac{x}{a_1} \right) - 1 \right)$$

$$\text{其中: } a_1 = \frac{F}{w_0} = 3.94, \quad y_1(x) = 3.94 (\cosh(0.25x) - 1)$$





第二段悬链线的方程

Q_0Q_1 之间第二段悬链线的方程为

$$y = y_2(x) = a_2 \cosh \left(\frac{x - x_0}{a_2} + \ln \left(\frac{1 + \sin \theta_1}{\cos \theta_1} \right) \right) + y_1^0 - \frac{a_2}{\cos \theta_1},$$

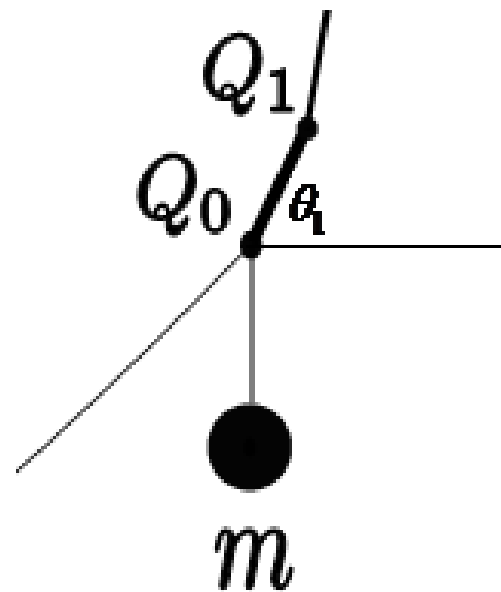
$$a_2 = \frac{F}{w_1} = 0.87, \quad y_1^0 = y_1(x_0) = a_1 \left(\cosh \left(\frac{x_0}{a_1} \right) - 1 \right)$$

$$\tan \theta_1 = \frac{W_{m_0m}}{F} = \frac{\text{锚链的重量} + \text{重物球的重量}}{\text{风力的大小}}$$

$\theta_1 \approx 88.83^\circ$, 这一段悬链线的长度为1米

$$\text{曲线弧长的计算公式: } \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \left(\frac{dy_2(x)}{dx} \right)^2} dx = 1$$

$$a_2 \sinh \left(\frac{x_1 - x_0}{a_2} + \ln \left(\frac{1 + \sin \theta_1}{\cos \theta_1} \right) \right) - a_2 \sinh \left(\ln \left(\frac{1 + \sin \theta_1}{\cos \theta_1} \right) \right) = 1$$





第三段悬链线的方程

Q_1Q_5 之间第三段悬链线的方程为

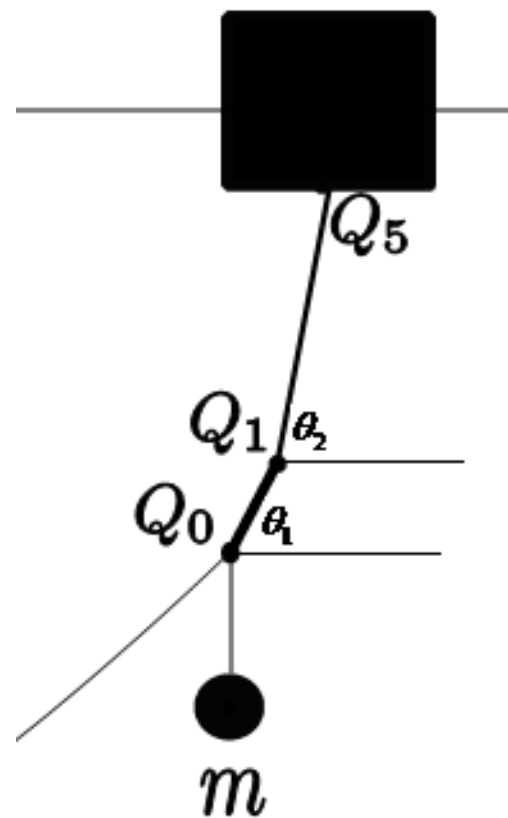
$$y = y_3(x) = a_3 \cosh \left(\frac{x - x_1}{a_3} + \ln \left(\frac{1 + \sin \theta_2}{\cos \theta_2} \right) \right) + y_2^1 - \frac{a_3}{\cos \theta_2},$$

$$a_3 = \frac{F}{w_2} = 2.76, \quad y_2^1 = y_2(x_1)$$

$$\tan \theta_2 = \frac{W_{m_0 m m_1}}{F} = \frac{\text{锚链的重量} + \text{球和钢管的重量}}{\text{风力的大小}}$$

$\theta_2 \approx 88.86^\circ$, 这一段悬链线的长度为4米

$$a_3 \sinh \left(\frac{x_5 - x_1}{a_3} + \ln \left(\frac{1 + \sin \theta_2}{\cos \theta_2} \right) \right) - a_3 \sinh \left(\ln \left(\frac{1 + \sin \theta_2}{\cos \theta_2} \right) \right) = 4$$





风速12m/s时的初步计算

求解过程

$$y_3(x_5) = 18 - H_w,$$

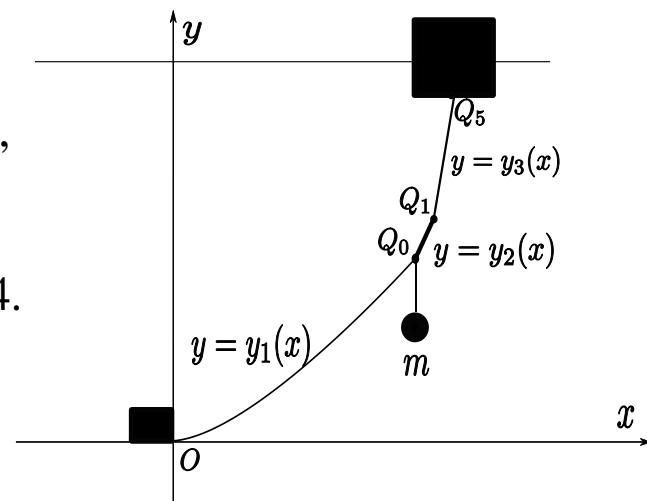
$$a_2 \sinh \left(\frac{x_1 - x_0}{a_2} + \ln \left(\frac{1 + \sin \theta_1}{\cos \theta_1} \right) \right) - a_2 \sinh \left(\ln \left(\frac{1 + \sin \theta_1}{\cos \theta_1} \right) \right) = 1,$$

$$a_3 \sinh \left(\frac{x_5 - x_1}{a_3} + \ln \left(\frac{1 + \sin \theta_2}{\cos \theta_2} \right) \right) - a_3 \sinh \left(\ln \left(\frac{1 + \sin \theta_2}{\cos \theta_2} \right) \right) = 4.$$

求解这一个方程组得到 $x_0 = 8.26$, $x_1 = 8.28$, $x_5 = 8.35$,

再由 $s = a_1 \sinh \left(\frac{x_0}{a_1} \right)$ 求出第一段的弧长 $s = 15.76\text{m}$

还有6.29米的锚链拖地





风速12m/s时最后计算的结果

锚链被拉起15.76m，拖地6.29m重量不需要浮标
改变锚链的长度后重新计算，得到新的锚链长度，
重复这个过程，使两次计算锚链长度的误差很小。
最后结果：锚链被拉起15.80m，拖地6.25m，
浮标吃水深度：0.68m，游动区域半径14.66，
钢桶、管倾角：1.188, 1.184, 1.175, 1.166, 1.158
三段悬链线的方程如下

$$0 \leq x < 8.30,$$

$$y = y_1(x) = 3.98(\cosh(0.25x) - 1),$$

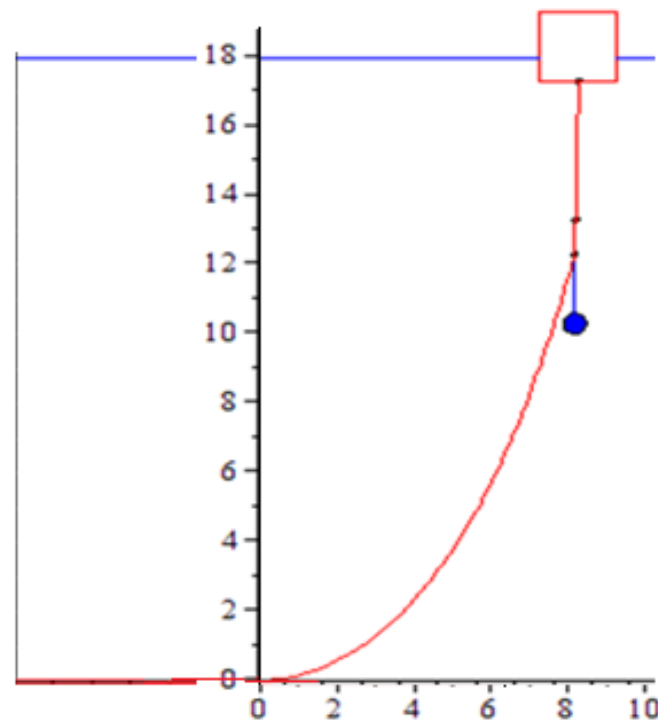
$$8.30 \leq x < 8.33,$$

$$y = y_2(x) = 0.88 \cosh(1.14x - 4.92) - 29.02,$$

$$8.33 \leq x < 8.41。$$

$$y = y_3(x) = 2.78 \cosh(0.36x + 1.58) - 120.95,$$

系泊系统示意图如右侧所示





临界风速的计算

临界风速：22.05m锚链恰好全部被拉起，在锚点与海床相切

思路：利用前面计算时三段悬链线的方程，对不同的风速进行计算

计算步骤：从12m/s开始逐渐增加风速，对确定的风速，计算浮标的吃水深度，

$$H_w = \frac{1000 \times 9.8 + L_0 w_1 + w_0 + w_1 + 4w_2}{3200.13 \times 9.8}, \text{ 风力大小 } F = 0.625 S v^2, \text{ 悬链线参数 } a_1 = \frac{F}{w_1},$$

$$a_2 = \frac{F}{w_1}, \quad a_3 = \frac{F}{w_2}, \quad \theta_1 = \arctan\left(\frac{W_{m_0 m}}{F}\right), \quad \theta_2 = \arctan\left(\frac{W_{m_0 m m_1}}{F}\right), \text{ 从第一段悬链线长度}$$

$$s_1(x) = a_1 \sinh\left(\frac{x}{a_1}\right) = L_0 \text{ 求解 } x_0, \text{ 计算 } y_1^0 = a_1 \left(\cosh\left(\frac{x_0}{a_1}\right) - 1 \right), \text{ 由第二、三段悬链线}$$

的长度确定它们末点的横坐标，得到第三段悬链线末端的纵坐标，令其等于浮标吃水后下端的纵坐标。循环计算后的结果是：临界风速为 $v_0 = 22.27 \text{ m/s}$



风速24m/s时的模型

$v = 24\text{m/s}$ 超过临界风速，22.05m锚链全部被拉起，在锚点与海床夹角为 θ_0

浮标的吃水深度与 θ_0 有关：组件的重量与锚链拉力的竖直分量

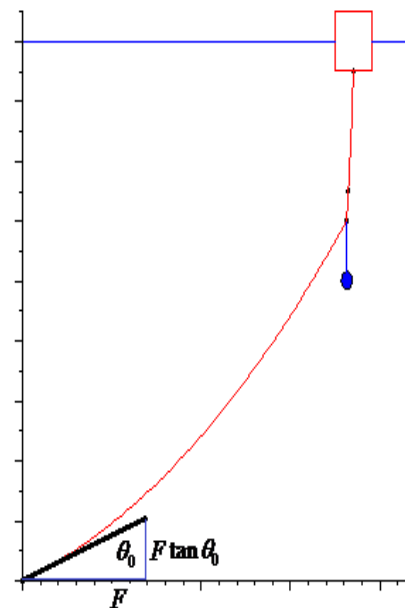
$$\text{吃水深度: } H_w = \frac{1000 \times 9.8 + L_0 w_0 + w + w_1 + 4w_2 + 0.625 \times 2(2 - H_w) \times v^2 \times \tan \theta_0}{3200.13 \times 9.8}$$

$$\text{参数: } a_1 = \frac{F}{w_0}, \quad a_2 = \frac{F}{w_1}, \quad a_3 = \frac{F}{w_2}, \quad \theta_1 = \arctan\left(\frac{W_{m_0 m}}{F}\right), \quad \theta_2 = \arctan\left(\frac{W_{m_0 m m_1}}{F}\right),$$

$$\text{方程: } y = y_1(x) = a_1 \left(\cosh\left(\frac{x}{a_1} + \ln\left(\frac{1 + \sin \theta_0}{\cos \theta_0}\right)\right) - \frac{1}{\cos \theta_0} \right), \quad a_1 = \frac{F}{w_0},$$

$$y = y_2(x) = a_2 \cosh\left(\frac{x - x_0}{a_2} + \ln\left(\frac{1 + \sin \theta_1}{\cos \theta_1}\right)\right) + y_1^0 - \frac{a_2}{\cos \theta_1}, \quad a_2 = \frac{F}{w_1},$$

$$y = y_3(x) = a_3 \cosh\left(\frac{x - x_1}{a_3} + \ln\left(\frac{1 + \sin \theta_2}{\cos \theta_2}\right)\right) + y_2^1 - \frac{a_3}{\cos \theta_2}, \quad a_3 = \frac{F}{w_2}.$$





风速24m/s时的计算结果

计算思路：锚链的夹角 θ_0 由小到大循环计算，
对给定的 θ_0 ，计算过程与风速 12m/s 的相同，
 θ_0 让第三段悬链线末端的坐标与浮标下沿坐标相等。

$v = 24\text{m/s}$ 的计算结果如下

浮标的吃水深度： $H_w = 0.70\text{m}$ ，游动半径： $R = 17.78\text{m}$

锚链与海床的夹角： $\theta_0 = 4.48^\circ$ ，钢桶的倾度： $\beta_0 = 4.57^\circ$

钢管的夹角： $\beta_0 = 4.45^\circ$ ， $\beta_0 = 4.33^\circ$ ， $\beta_0 = 4.21^\circ$ ， $\beta_0 = 4.09^\circ$

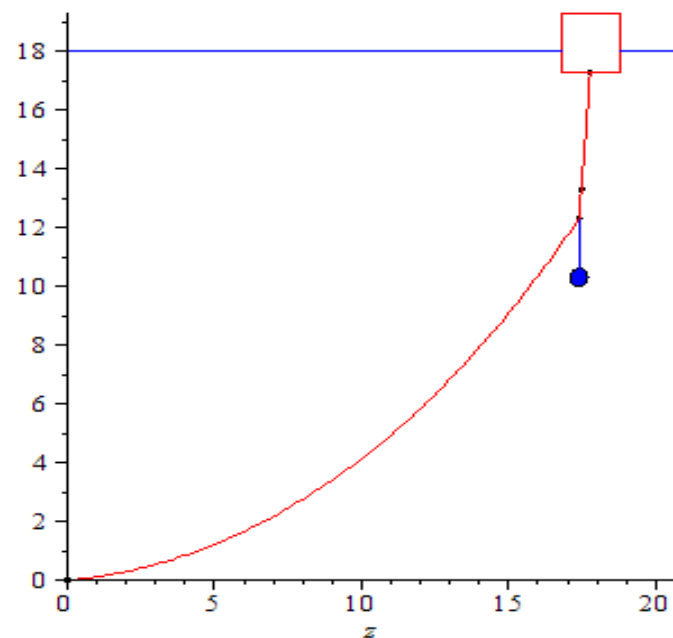
三段悬链线的方程分别为：

$$y = 15.74(\cosh(0.064x + 0.078) - 1), 0 \leq x < 17.39,$$

$$y = 3.47 \cosh(0.288x - 1.796) - 30.80, 17.39 \leq x < 17.47,$$

$$y = 11.02 \cosh(0.091x + 1.647) - 126.59, 17.47 \leq x < 17.78.$$

系泊系统示意图见右





三、一次参赛，终身受益

- 全国大学生数学建模竞赛举办举办了30年来。一批又一批的年轻学子经历了数学建模学习、培训和竞赛的历练，在知识和能力方面得到了全面的提高。他们在数学建模竞赛的准备和完成过程中养成的习惯在毕业后的工作中继续发挥着重要的作用，**“一次参赛，终身受益”**已经成为了参赛者共同的体会。
- 数学建模竞赛及其活动在扩大学生知识面、培养创新能力和拼搏精神、助力个人成长、培养优秀人才中发挥了巨大作用。许多参赛者认为参加数学建模竞赛是他们人生逐梦的起点，是培养他们创新意识的阶梯。



毕业后我加入深圳移动公司，在公司的第一项工作就是参与深圳移动大数据平台的建设，我们将全球最先进的计算机技术和数据挖掘技术结合起来，首创性地建立了通信客户行为模型，分析和预测客户通信行为，并将模型分析结果应用于企业经营生产，产生了显著的经济效益。

如果说大学的数学建模是校园版、学术版，那么在深圳移动大数据平台就是数学建模的企业版，一脉相承。将在学生时代的所学所思，将在数学建模过程中学习训练获得的知识、技能和思维方式，应用到企业的生产经营活动中，产生社会价值和经济价值，我想这也是数学建模活动的组织者和推动者所追求的目标之一吧。



数学建模期间铸就的我独立、自学、广博、合作的品质,对我独立开展科研工作更是起到了至关重要的作用。曾经记得自己做过的一个重要科学问题——如何用单颗卫星的磁场探测来确定空间磁绳的轴向。这个科学问题被提出来到现在已经有 40 年了,但是一直没有被真正解决。在经过充分调研后,我提出将中心磁绳近似简化为对称圆柱结构后,可以从空间投影角度来准确地确定磁绳的轴向。这个想法提出后,我与北大、中国科大,以及一些国际权威专家开展了合作研究,并对研究的问题给出了近乎完美的解答。我想,倘若我没有大学期间参加数学建模活动铸就起来的独立、创新、合作等品质能力,而是跟着人云亦云,我是不可能做出这样重要的原创工作的。



毕业后我相继进入多家大型技术企业从事技术开发工作。在刚进入行业时，工作中我们会遇到包括用户行为和消费习惯等大量的数据日志，深入挖掘用户数据对于产品的设计和改善都具有重要意义。**数据的庞杂对我来说是个很大的挑战。想起当年参加数学建模竞赛时的数据和问题，也同样让我觉得挑战很大时，我很自然地将心态调整到参加比赛时的状态，把日志数据分析作为一个数学建模问题来对待。**最终，我很快解决了工作中的第一个“重大任务”。后来我就常常把工作任务分解成一个个可独立解决的建模问题。这使得工作效率得到了极大的提升，让我在工作中能够很快地进入状态，并使问题得以尽快解决。



回忆在校学习期间，印象最深刻的就是数学建模，感觉似乎把主要的精力都花在数学建模上。进入研究生学习阶段，所修专业为精算专业，还是天天搞数学建模，包括生存模型、风险模型、统计模型等等。投入了大量的精力研究数学建模，收获良多。研究生毕业之后，进入保险行业，因为习惯于数学建模的思维方法，面对实际的复杂问题总能在不畏艰难，解决问题总是先行一步。从个人独立工作到带领团队建立和完善公司精算模型、资产负债管理模型等大型精算模型，为公司的核心业务做出了贡献。正是因为掌握了数学建模的思维方法和技能，才能够成为公司精通保险行业及公司各类渠道产品业务、负债精算管理、资产风险管理及偿付能力管理、资产负债管理等核心技术的人员。



对于我，数学建模不仅仅是往事，更重要的是我被其中利用数学分析和解决复杂问题的思想所影响，自己后续从事科学研究工作也一直在践行这样的理念。现在看来数学建模竞赛中的问题已经经过抽象和简化，但这种简化恰到好处地让当时的我们理解了这样的思想。在数学建模的实践中，我从懵懂到了解，从了解到喜爱，找到了优化这个自己真正喜欢的方向。目前我从事的研究工作仍然是围绕如何将问题进行建模、如何利用优化进行分析和求解进行的。

今年我在上海交通大学开出了优化方面的研究生课程，在课上我特别强调如何利用优化技术对实际问题进行建模。这些正是根源于当年参与数学建模的经历，也希望学生在以后的工作中能更好地应用优化模型解决更多的实际问题。



数学建模作为沟通数学世界和现实世界的桥梁，具有很高的可扩展性。数学模型的思想和方法，能应用于各行各业的各项工作。**三次数学建模竞赛的经历，使得自己能胜任不同类型的工作环境和工作内容。**面对中资、外资、中外合资企业不同的企业文化，中国内地和香港不同的监管环境，人身和财产保险行业不同的行业特质，精算部与非精算部不同的工作内容，能以不变应万变。**几段工作虽然内容跨度较大，但数据分析、建立模型解决问题的本质是一样的。虽然已离开数学建模竞赛多年，跨越多个城市、切换不同的工作内容，但每次搬家，那本姜启源老师的《数学模型》我都一直带在身边。可能是一种仪式，也是一种信念，工作中如果遇到开放性的问题时，我还是会去翻这本书，寻找灵感。**



2014年10月至今，我参与了《500米口径球面射电望远镜(FAST)》的建设和维护，数学建模的思想与技能，给我带来了巨大的帮助。因为 FAST 望远镜在世界上从未有过，是一个从无到有的过程。自主创新主动反射面设计、轻型索拖动结构和并联机器人等等，即使经过了无数的仿真、实验。在实际建设运行过程中还是会有数不清的新问题冒出来需要解决，包括我参与的控制系统各类观测模式规划、馈源舱运动仿真、共振原因分析等等。很荣幸加入 FAST 工程团队，在这里每天虽然很忙但很充实。因为发现问题和解决问题的过程，我数学建模的技能让我在工作中得心应手。回首往事，让我深深地感受到，数学建模的意识已深深地留在了我脑海里，也已悄然改变了我的生
人生
轨迹。



工作之后，从事金融投资行业，建模更是深入到工作相关的每一处。不论是行业产业分析、还是投资策略的制定，都是应用建模来完成。可以说大学生建模竞赛提供了一个起点，而工作中的应用便是延续。

在实际的投资策略制定中，会应用数学模型去做模拟，评估一个股票组合的风险与收益，进而优化投资结构，使得在风险可控的条件下尽量取得高的收益。

客观科学的投资方法都要依据建模去做优化，建模已经成为工作中必不可少的分析工具。能够在工作中运用数学语言更加简便地描述和解决问题，也会让工作变得更加简单。得益于学生时期的数学建模竞赛，让我们更早地重视建模的作用，所以才能在工作中更好地应用，从而让工作完成得更加出色。



参考文献

1. 全国大学生数学建模组委会, 2016年高教社杯全国大学生数学建模竞赛赛题,
http://www.mcm.edu.cn/html_cn/node/6d026d84bd785435f92e3079b4a87a2b.html
2. 周义仓, 悬链线模型在系泊系统设计中的应用, 数学建模及其应用, 5 (4) 26-33, 2016.
3. 李昌友, 陈远生, 曹叶等, 基于力学分析的系泊系统设计, 工程数学学报, 33 (sup1), 58-66, 2016.
4. 张滕翔, 夏智康, 郑安琪等, 基于极值优化的系泊系统设计, 工程数学学报, 33 (sup1), 95-109, 2016.



西安交通大学 数学与统计学院
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY School of Mathematics and Statistics



谢 谢!

祝大家在数学建模的学习中有更大的收获!