

CT 系统参数标定及成像

摘要

本文主要对 CT 系统参数标定与成像问题进行了探讨。

针对问题一：建立**几何关系模型**。首先，在附件 2 中得到小圆直径投影所对应的探测器单元数量，将其与已知的小圆直径相对应，可求解出探测器单元之间距离的近似值；然后，建立直角坐标系，根据平面几何与解析几何原理，建立含有旋转中心坐标共五个未知量的方程组，然后通过对附件 2 中的数据进行**最小二乘拟合**，使原问题降维，从而求解出旋转中心的坐标。以椭圆中心为原点，以短轴指向小圆方向为 x 轴正向，长轴为 y 轴建立直角坐标系，求解出旋转中心的坐标为 $(-9.0470mm, 6.7729mm)$ ；最后，根据附件 2，利用最小二乘拟合所得到的函数反解出 X 射线转过的角度，即 X 射线的方向。

针对问题二：要求将未知介质的接收信息还原为图像，并求出指定点的处的吸收率。因此首先采用 **Radon 逆变换**重建 CT 图像，并结合问题一中求得的标定参数，通过旋转和平移将重建图像放置在正方形托盘中心，可确定该介质在正方形托盘中的位置和几何形状。接下来建立图像灰度与吸收率之间的**线性关系**，通过计算 10 个所求点处的灰度值计算各点的 X 射线吸收率。得到 10 个点的吸收率分别为 $[0, 0.6533, 0, 0.64, 0.6622, 0.8622, 0.8533, 0, 0, 0]$ 。

针对问题三：首先建立与问题二相似的模型，通过 Radon 逆变换得到图像，并根据问题一中标定的参数进行修正，可以求得 10 个点的吸收率分别为 $[0, 0.0844, 0.5556, 0, 0, 0.3644, 0.7467, 0, 0.7111, 0]$ 。

针对问题四：将标定参数分类分析其精度及稳定性。精度通过与其真实值的相对误差来确定，稳定性则通过灵敏性分析并联系实际说明。新模板的设计考虑到椭圆由于其形状的不规则造成了数据的规律性较差，故首先考虑将模板中的椭圆部分去除。考虑到圆在模型中的良好性质，可以在模板中增加圆的部分。建立了**四圆模板**如图 5-22，建立几何关系模型，经过分析发现探测器单元距离的精度以及旋转中心位置的精度和稳定性都有提高。

本文的特色在于：建立了几何关系模型，并使用最小二乘拟合实现了对问题的降维。问题二、三联系 CT 图像的本质，建立灰度值与 X 射线吸收率之间的联系，从而避免了复杂的积分计算。问题四建立了误差分析模型分析精度及稳定性，建立新型四圆模板，显著提高了标定参数的精度和稳定性，优化了问题一中的几何关系模型。最后将模型推广到扇形束情况。

关键词：几何关系模型、最小二乘法、图像重建、误差分析模型、四圆模板

一、问题重述

1.1 问题背景

CT(Computed Tomography)可以在不破坏样品的情况下，利用样品对射线能量的吸收特性对生物组织和工程材料的样品进行断层成像，由此获取样品内部的结构信息。一种典型的二维 CT 系统如图 1-1 所示，平行入射的 X 射线垂直于探测器平面，每个探测器单元看成一个接收点，且等距排列。X 射线的发射器和探测器相对位置固定不变，整个发射-接收系统绕某固定的旋转中心逆时针旋转 180 次。对每一个 X 射线方向，在具有 512 个等距单元的探测器上测量经位置固定不动的二维待检测介质吸收衰减后的射线能量，并经过增益等处理后得到 180 组接收信息。CT 系统安装时往往存在误差，从而影响成像质量，因此需要对安装好的 CT 系统进行参数标定，即借助于已知结构的样品（称为模板）标定 CT 系统的参数，并据此对未知结构的样品进行成像。

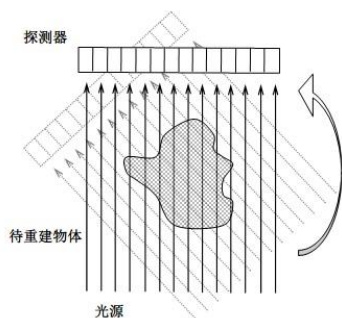


图 1-1 CT 系统示意图

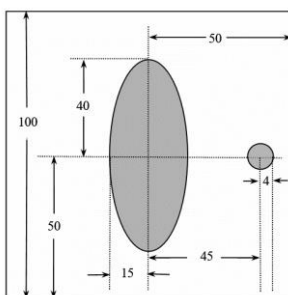


图 1-2 模板示意图（单位：mm）

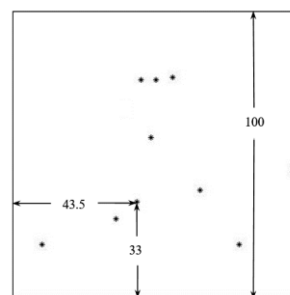


图 1-3 10 个位置示意图

1.2 要解决的问题

问题一：在正方形托盘上放置两个均匀固体介质组成的标定模板，其几何信息见图 1-2，附件提供了该模板的每点吸收强度（吸收率）数据和该模板的接收信息，根据这些信息，确定 CT 系统旋转中心在正方形托盘中的位置、探测器单元之间的距离以及该 CT 系统使用的 X 射线的 180 个方向。

问题二：附件提供了利用上述 CT 系统得到的某未知介质的接收信息。利用问题一中得到的标定参数，确定该未知介质在正方形托盘中的位置、几何形状和吸收率等信息。此外，根据附件中的数据文件，求出图 1.3 所给的 10 个位置处的吸收率。

问题三：附件提供了利用上述 CT 系统得到的另一个未知介质的接收信息。利用问题一中得到的标定参数，给出该未知介质的相关信息。此外，根据附件中的数据文件，求出图 3 所给的 10 个位置处的吸收率。

问题四：分析问题一中参数标定的精度和稳定性。在此基础上自行设计新模板、建立对应的标定模型，以改进标定精度和稳定性，并阐述理由。

二、问题分析

2.1 问题一的分析

针对问题一，应明确其中的三个子问题：确定旋转中心的位置、确定探测器单元间的距离、确定使用射线的 180 个方向。首先，为了确定旋转中心的位置，应明确绕中心旋转的模板的几何特征，拟建立几何关系模型，利用平面几何以及解析几何原理将旋转中心点的位置用已知参数和未知参数表示。在求解待求参数时，可以通过最小二乘法等方法进行参数估计。然后，通过附件 1、2 中离散数据和已知尺寸的可以近似求解出探测器单元间的距离。最后，确定射线的 180 个方向即是确定射线的 180 个角度，由附件 2 中的数据特点可以假设射线以步长为 1° 旋转，使用观测值对含射线角度的函数进行非线性拟合，由所得函数反解出 180 个射线角度。

2.2 问题二、三的分析

针对问题二首先需要使用 `radon` 逆变换将模版的接收信息重建为 CT 图像，并根据第一问求得的旋转中心位置参数，对图像进行预处理，使用 `imresize` 函数将图片缩小至 256×256 像素。由于通过线积分计算任一点吸收率计算量较大，结合到 CT 图像的本质，即 CT 图像是以不同的灰度来表示，反应被测物品对 X 光的吸收能力，推断出 CT 图像的灰度与对应点的吸收率有关，且一一对应。通过第一问得到灰度与吸收率的线性关系，消除硬件的不稳定性对函数的影响，计算出此图片各点的 X 光吸收率。

2.3 问题四的分析

问题四要求分析标定参数的精度和稳定性，并基于此设计更优良的新模板。首先分析造成参数精度误差的原因，确定标定模板投影图像的像素坐标获取精度为主要原因，故主要分析其对精度及稳定性的影响。标定参数可分为三类，分别为旋转中心在正方形托盘中的位置、探测器单元之间的距离以及该 CT 系统使用的 X 射线的 180 个方向。可分别计算其与真实值的相对误差，分析每个自变量对标定参数影响，并做单因素灵敏性分析。基于以上得到的精度和稳定性变化，设计精度和稳定性更好的模板，并建立新标定参数模型。

三、模型假设

1. 发射-接收系统的旋转步长近似为 1° ；
2. 不考虑空气等其他杂质对 X 射线能量的吸收；
3. 重建的图像不存在伪影；

取探测器两端点分别为 A 、 B ，由 A 到 B 是探测器单元序号增大的方向。以 O 点为原点，平行于探测器且沿探测单元序号增大的方向为 x 轴，光源方向为 y 轴，建立直角坐标系。设标定模板中心（即椭圆中心）初始位置为 O_1 ，圆的圆心初始位置为 O_2 ，且 O_2 与 x 轴正方向所呈角度为 θ_0 。当托盘转过角度 θ 后，圆心位置来到 O_2' 。

令 $\overline{OO_2} = \overline{OO_2'} = r$, $\overline{BP} = D$, $\overline{MN'} = l$, 由几何关系可知:

即：

$$l = D - r \cos(\theta + \theta_0) \quad (1)$$

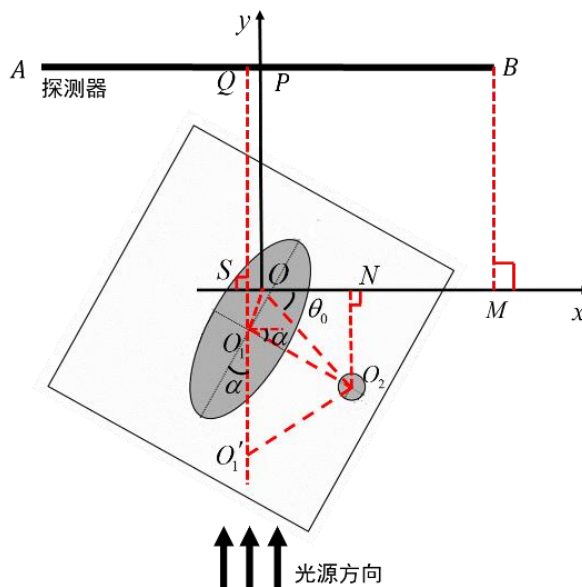


图 5-2 CT 系统照射初始位置

如图 5-2 所示, Q 点是椭圆中心 O_1 在探测器上的投影位置, S 点是 Q 点在 x 轴上的投影位置。线段 O_1O_2 与 x 轴正方向呈 α 角。以 O_2 为圆心, $\overline{O_1O_2}$ 为半径画圆, 半径与线段 QS 的延长线交于 O_1 、 O_1' 点。 O_1' 是椭圆中心可能存在的位置。下面假设椭圆中心位于 O_1 点处, 并继续进行分析。

对于图中 $Rt\triangle OSO_1$ ，由几何关系得：

$$\begin{aligned}\overline{O_1S} &= r \sin(\theta_0) - \sqrt{\overline{O_1O_2}^2 - [r \cos(\theta_0) - (\overline{BP} - \overline{BQ})]^2} \\ &= r \sin(\theta_0) - \sqrt{\overline{O_1O_2}^2 - [r \cos(\theta_0) - (D - \overline{BQ})]^2}\end{aligned}\quad (2)$$

$$\overline{OS} = \overline{BQ} - \overline{BP} = \overline{BQ} - D \quad (3)$$

根据椭圆与圆之间的相对位置关系知：

$$\overline{O_1O_2} \times \cos(\alpha) = r \cos(\theta_0) - \overline{BP} + \overline{BQ} \quad (4)$$

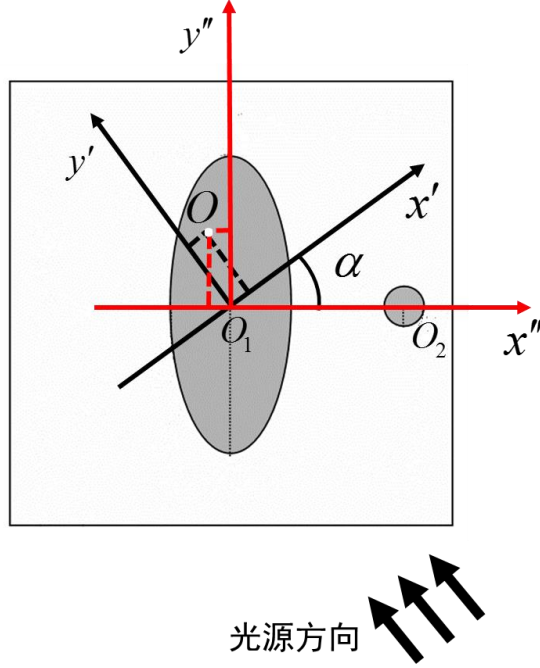


图 5-3 坐标变换示意图

然后进行坐标变换，如图所示，将坐标系 xOy 平移至 O_1 点，建立新的坐标系 $x'O_1y'$ ，在该坐标系中，设 O 点坐标为 (x'_0, y'_0) ；同时以 O_1 为原点，以 $\overline{O_1O_2}$ 方向为 x 轴，椭圆长轴方向为 y 轴，建立新的坐标系 $x''O_1y''$ ，则在该坐标系中， O 点坐标为 (x''_0, y''_0) 。两坐标系之间夹角为 α ，由坐标变换公式可得：

$$\begin{cases} x''_0 = x'_0 \cos(\alpha) - y'_0 \sin(\alpha) \\ y''_0 = y'_0 \cos(\alpha) + x'_0 \sin(\alpha) \end{cases} \quad (5)$$

又因为 O 点在 $x'O_1y'$ 系中位于第二象限，因此有：

$$\begin{cases} x'_0 = \overline{O_1S} \\ y'_0 = \overline{OS} \end{cases} \quad (6)$$

最后建立连续化模型，用于确定探测器单元之间的距离。

由于位于探测器上的单元是等距的，设间距为 δ_0 ，则有

$$d(n+1) - d(n) = \delta_0 \quad (7)$$

$d(n)$ 为第 n 个单元距探测器 A 端的距离，当 δ_0 足够小时且单元数量足够大时，可以将探测器上离散的单元连续化，即认为 $L = \Delta n \times \delta_0$ 近似成立，其中 L 为任意线段长度。由此可得：

$$\delta_0 = \frac{L}{\Delta n} \quad (8)$$

5.1.2 问题一模型的求解

5.1.2.1 探测器单元之间距离 δ_0 的求解

首先，我们使用 EXCEL 对附件 2 中的接受信息数据进行了删减处理，根据提取出矩阵中与小圆有关的数据，形成一个新的矩阵。根据该矩阵可以求得小圆在扫描过程中相对位置的变化。

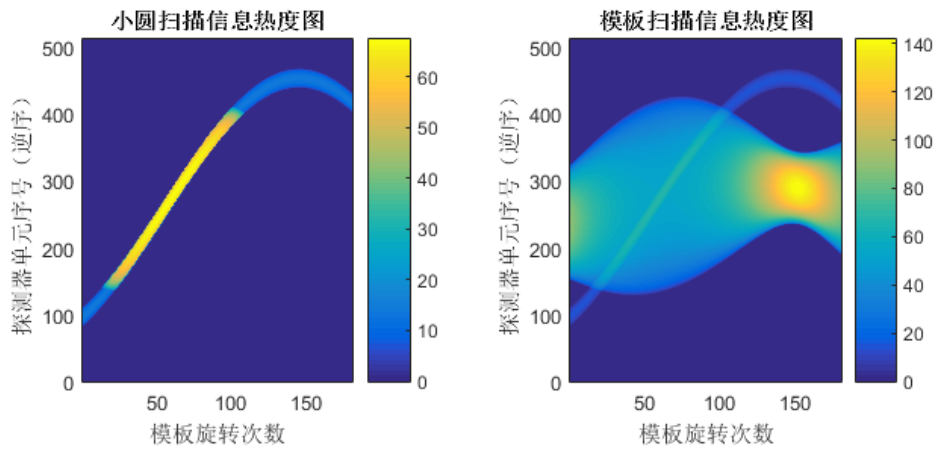


图 5-4 附件 2 接收信息热度图

由图 5-4 可以看出，在 X 射线的照射下，小圆在探测器上投影出一条明显的轨迹，即图中的“光带”。随着托盘与模板的旋转，这条光带呈余弦型波动，说明小圆在探测器上的投影做近似的简谐运动。也说明模板每次相对旋转的角度较为均匀，没有出现忽快忽慢的情况。

然后将提取出的矩阵进行分析，计算在每次旋转时小圆投影在探测器上的单元数量，并取 180 次旋转的平均值，可得：

$$\delta_0 = \frac{180 \times d_r}{\sum_{i=1}^{180} [d(n_i) - d(m_i)]} \quad (9)$$

其中 $d(n_i)$ 、 $d(m_i)$ 分别为光带上、下侧边界对应单元序号， d_r 为小圆半径。

带入数据得：

$$\delta_0 = 0.2759mm$$

5.1.2.2 旋转中心位置的确定

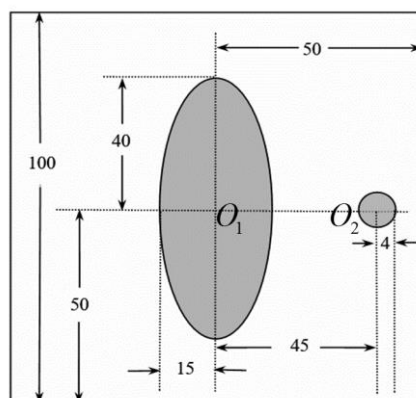


图 5-5 模板尺寸示意图（单位：mm）

如图 5-5，已知 $\overline{O_1O_2}=45\text{mm}$ ， D 、 r 、 θ_0 、 \overline{BQ} 、 $\overline{O_1S}$ 、 \overline{OS} 、 α 未知，求解目标为 (x_0'', y_0'') 。

(1) 求解 D 、 r 、 θ_0

通过 5.1.2.1 节中的数据处理，可以看出，当托盘与模板绕旋转中心旋转时，小圆在探测器上的投影运动轨迹可近似看成余弦型函数。

由图 5-7 可知，发射-接收系统绕旋转中心转 180 次后转过 180°。利用求得 δ_0 的数值，我们将探测器单元序号转换为长度探测器长度，如图 5-6，同时，假设旋转步长均匀，每次旋转 1°，180 次旋转以后，正好转过 180°。

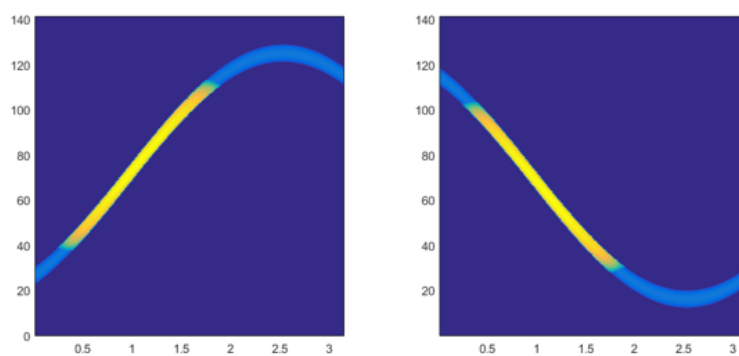


图 5-6 小圆亮带翻转图

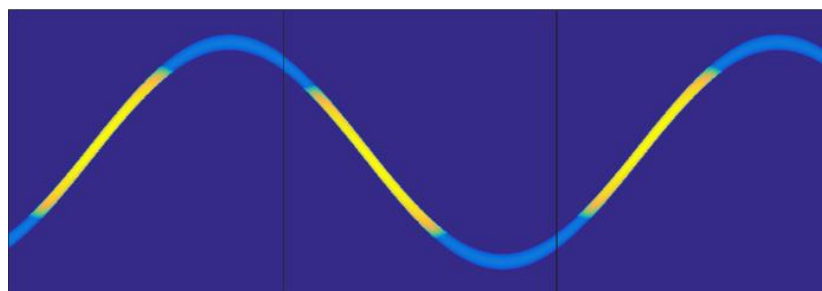


图 5-7 小圆亮带翻转拼接图

根据前文所建模型可知，在 X 射线进行扫描时，小圆圆心在探测器上的投影点与 B 点的距离（ $\overline{MN'}$ ）即为图左图亮带中心线所对应的探测器方向坐标。

通过 EXCEL 进行数据处理，我们提取了亮带中心的 180 个离散点，由它们组成一条中心线，如图 5-8 所示

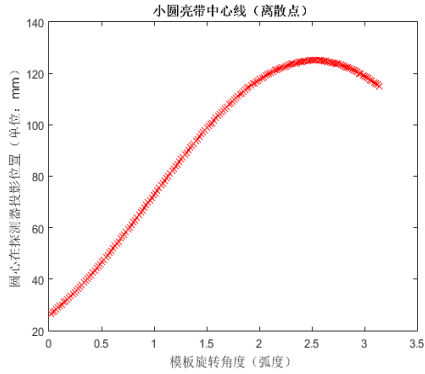


图 5-8 小圆亮带中心散点图

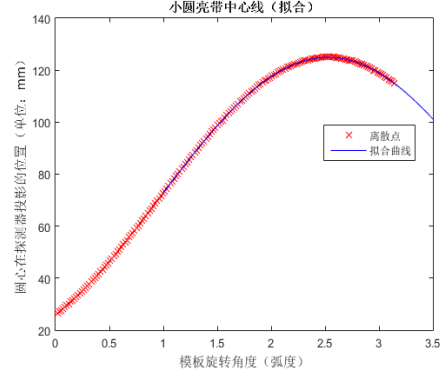


图 5-9 小圆亮带中心线拟合图

然后，为了求解方程 中的 D 、 r 、 θ_0 三个未知参数，我们使用 matlab 对方程进行非线性拟合（程序见附录），从而实现参数估计。拟合结果如图 5-9 所示。

所得参数结果为： $D=70.4665\text{mm}$ ， $\theta_0=35.1764^\circ$ ， $r=54.4695\text{mm}$ 。

将参数带入原方程得：

$$l = 70.4665 - 54.4695 \times \cos(\theta + 35.1764^\circ) \quad (10)$$

然后用 matlab 进行方差分析，求得 $R^2 \approx 1$ ， $SSE=1.5770$ ， $RMSE=0.09438$ ，说明曲线对观测值的拟合程度良好。

(2) 求解 \overline{BQ}

由于椭圆的对称性，当标定模板受到 X 射线照射时，若小圆与椭圆没有重合，那么在椭圆投影的部分，探测器上接收到射线强度衰减最大的位置即为椭圆中心所投影的位置。据此，可以分析初始角度方向探测器各单元接收值（附件 2），从而近似得到 \overline{BQ} 的值。如图 5-10 所示：

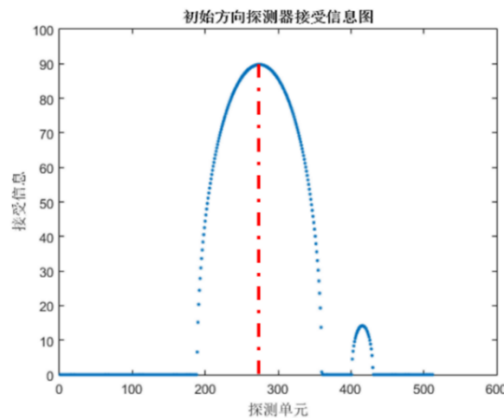


图 5-10 初始位置探测器单元接收信息图

由表格数据可知，当序号为单元 274 的探测单元接收值最大，因此可近似解出 $\overline{BQ} = (512 - 274) \times \delta_0 = 65.6642\text{mm}$ 。

(3) 求解 $\overline{O_1S}$ 、 \overline{OS} 、 α

将求解出的 D 、 r 、 θ_0 、 \overline{BQ} 带入方程(2)，(3)，(4)并联立，求解得：

$$\overline{O_1S} = 10.2299\text{mm}, \quad \overline{OS} = 4.8023\text{mm}, \quad \alpha = 28.0340^\circ$$

(4) 求解 (x_0'', y_0'')

将已知数据带入(5)求解得：

$$\begin{cases} x_0'' = -9.0470\text{mm} \\ y_0'' = 6.7729\text{mm} \end{cases}$$

5.1.2.3 X 射线 180 个方向的确定

在 5.1.2.2 节中确定了含有 l 与 θ 方程(1)的未知参数。为了确定 X 射线的 180 个方向，可将该方程其视为 l 关于 θ 的函数，通过给定小圆圆心投影对应的 180 个位置 l_i ，得到对应的 180 个自变量 θ_i 的值，即得到了 X 射线的 180 个方向。由图和图 可知，初始位置中 X 射线方向与 x'' 轴正方向所呈角度为 $\alpha + 90^\circ$ ，那么第 i 次旋转时 X 射线方向与 x'' 轴正方向所呈角度为 $\alpha + \theta_i + 90^\circ$ 。180 个方向数据见附录。

5.2 问题二的求解

5.2.1 问题二模型的建立

(1) CT 成像的数学模型——二维 Radon 变换

二维 Radon 变换的实质是沿直线积分，实际应用中，Radon 变换的定义被拓展为沿曲线簇积分，例如在 CT 技术中，沿平行 X 光射线方向上的积分，被称为广义 Radon 变换^[1]。定义函数 $f(x, y)$ 在平面上沿直线 L 的线积分为

$$P_f(L) = \int_L f(x, y) dl \quad (11)$$

对任一点 $Q(x, y)$ ，作与 Q 相距为 $q(>0)$ 的直线 L 的线积分 $P_f(L)$ ，对所有的 q 取 $P_f(L)$ 的平均值，记作 $F_Q(q)$ ，则 Q 点的函数值 f 为

$$f(Q) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{dF_Q(q)}{q} \quad (12)$$

(11), (12)分别称为 $f(x, y)$ 的 Radon 变换和逆变换。

通过 Radon 逆变换可以重建 CT 图像。固定 θ ，将 $Rf(t, \theta)$ 的一维傅立叶变换写为

$$\begin{aligned} \hat{R}f(\omega, \theta) &= \int_{-\infty}^{+\infty} Rf(t, \theta) e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t \cos \theta - s \sin \theta, t \sin \theta + s \cos \theta) ds e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-i\omega(x \cos \theta + y \sin \theta)} dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-i(x, y) \cdot (\omega \cos \theta, \omega \sin \theta)} dx dy \\ &= \hat{f}(\omega \cos \theta, \omega \sin \theta) \end{aligned} \quad (13)$$

上述公式说明对图像的投影 $Rf(t, \theta)$ 的一维傅立叶变换对于对象图 $f(x, y)$ 的二维傅立叶变换，称之为中心切片定理。图像重建即求投影 $Rf(t, \theta)$ 的反演变换，因此，做 $\hat{f}(\omega \cos \theta, \omega \sin \theta)$ 的傅立叶逆变换，得到 Radon 变换的逆变换：

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(u, v) e^{i(ux+vy)} du dv \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \hat{f}(\omega \cos \theta, \omega \sin \theta) e^{i\omega(x \cos \theta, y \sin \theta)} \omega d\omega d\theta \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \hat{R}f(\omega, \theta) e^{i\omega(x \cos \theta, y \sin \theta)} \omega d\omega d\theta \end{aligned} \quad (14)$$

(2) CT 成像的物理模型——Lambert-Beer 吸收定律^[2]

CT 图像重建是利用 X 射线对物体进行照射，穿过物体的部分射线由于能量被物体吸收，射线强度发生衰减。设 l 为物质在射线方向的厚度， μ 为物质对射线衰减系数， I_0 射线穿过物体之前的强度。当 X 射线穿过均匀材料的物质时，射线强度衰减率与强度本身成正比，即有：

$$\frac{dI}{dl} = -\mu I \Rightarrow I = I_0 e^{-\mu l} \quad (15)$$

当 X 射线穿过非均匀物体时, $\mu = \mu(x, y)$ 为关于平面坐标 x, y 的函数, 射线穿过平面内直线 L 时, 有

$$I = I_0 e^{-\int_L \mu(x, y) dl} \Rightarrow \int_L \mu(x, y) dl = \ln\left(\frac{I_0}{I}\right) \quad (16)$$

通过确定 $\mu(x, y)$, 可以得到被测物体的大小、形状、密度等的图像, 实现图像重建。

5.2.2 问题二模型的求解

首先, 我们对附件 3 中的接收信息数据进行分析。在 CT 技术中, Radon 变换的含义为沿平行 X 射线方向的积分, 而附件 3 中的接收信息数据为介质吸收衰减后的射线能量, 且该能量值经过了增益等处理, 即等效于 X 射线方向的积分值。也就是说, 对于附件 3 中的数据可以使用 Radon 逆变换, 得到重建的图像。接下来, 我们对问题进行求解。

(1) 确定该介质的几何形状和其在正方形托盘中的位置

利用 MATLAB 软件中的 `iradon()` 函数对接收信息进行图像重建, 得到的原始图像如图 5-11 所示。

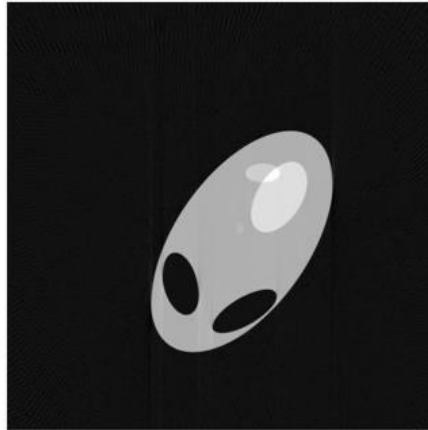


图 5-11 问题二原始图像

观察该图像容易发现, 被测介质相对于水平方向有一定的夹角, 且被测介质相对于托盘的位置不确定, 不利于问题的分析, 因此需要进行图像处理。

根据问题一中标定的参数对图像进行旋转、平移处理, 用 MATLAB 软件将图像绕旋转中心顺时针旋转 35.1764° , 并将图像水平方向向左平移 9.0470 mm , 竖直方向向上平移 6.7729 mm 。

然后将旋转、平移后的图像用 Photoshop 软件裁剪至 256×256 像素, 得到图像如图 5-12。



图 5-12 问题二处理后图像

经过处理后的图像轮廓为正方形，黑色部分与托盘对应，灰色部分与介质相对应。由附件 1 可知每 100mm 对应 256 个像素点，因此可以对图 5-12 的尺寸进行标注，得到如图 5-13 所示的尺寸图。图 5-13 显示了介质的几何形状以及介质在正方形托盘中的位置。

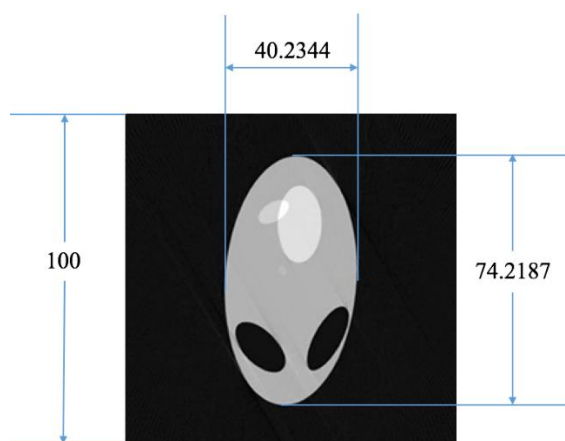


图 5-13 问题二位置尺寸图

(2) 确定介质的吸收率和给定 10 点的吸收率

为了确定介质的吸收率，我们首先研究了重建 CT 图像的灰度值计算，并建立了介质吸收率与图像灰度值的对应关系。

通过查阅资料，我们了解到可用 MATLAB 求得各像素点的灰度值，由于所有的 X 射线光子在相同的直线上传播，可以认为，一幅图像在任一点的灰度值正比于那个点的相对性衰减系数值^[3]。对附件 2 的数据进行图像重建，与附件 1 数据进行比对发现，图像的最暗灰度不是 0，而是在 30 左右波动，通过查阅文献，可以判断这种情况是由于硬件的原因而产生的^[4]，所以可以认为当图像灰度小于或等于 30 时，吸收率为 0；当灰度等于最大值 255 时，吸收率为 1。

可以将介质吸收率与图像灰度值近似认为是分段线性关系，故介质吸收率与图像灰度的对应关系为：

$$\beta = \begin{cases} 0, & grey \leq 30 \\ \frac{1}{225}(grey - 30), & grey > 30 \end{cases} \quad (17)$$

由此得到图像各像素点对 X 光的吸收率，数据记录在 `problem_2.xlsx` 文件中。

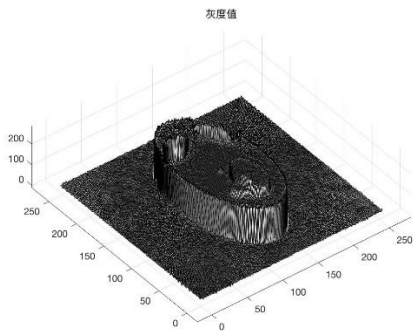


图 5-14 灰度值

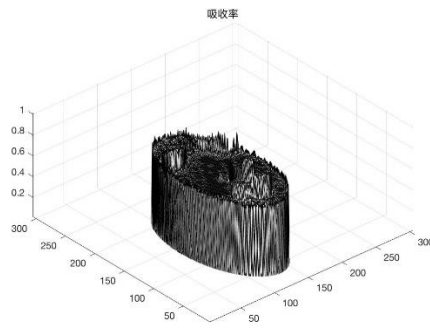


图 5-15 吸收率

图 5-14 与图 5-15 是分别由附件 3 得到的灰度值与吸收率，从图像上来看，两者有较好的相关性。

通过实际长度与像素数量之间的关系，将 10 个目标点的长度坐标转化为像素坐标，例如 (10.0000, 18.0000) 对应第 25.6 列，46.08 行的像素，经过四舍五入近似成第 26 列，第 46 行的像素，该像素点的吸收率可在 Excel 文件中查找，10 个目标点的吸收率查找如下表：

表一 10 个目标点吸收率

x 坐标	Y 坐标	像素横坐标	像素纵坐标	吸收率
10.0000	18.0000	26	46	0
34.5000	25.0000	88	64	0.6533
43.5000	33.0000	111	84	0
45.0000	75.5000	115	193	0.6400
48.5000	55.5000	124	142	0.6622
50.0000	75.5000	128	193	0.8622
56.0000	76.5000	143	196	0.8533
65.5000	37.0000	168	95	0
79.5000	18.0000	204	46	0
98.5000	43.5000	252	111	0

5.3 问题三的求解

由于问题三与问题二基于相同的数学物理模型，因此我们直接对问题三中的问题进行求解。

(1) 求解未知介质的几何形状和其在托盘中的位置

使用 `iradon()` 函数对附件 5 中的接收信息数据进行图像重建，得到的原始图像如图 5-16 所示。

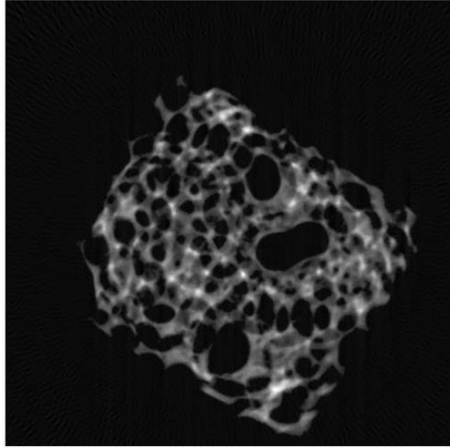


图 5-16

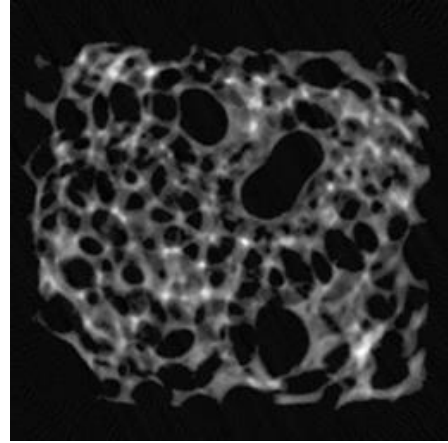


图 5-17

对原始图像进行了旋转、剪裁处理后得到图 5-17。

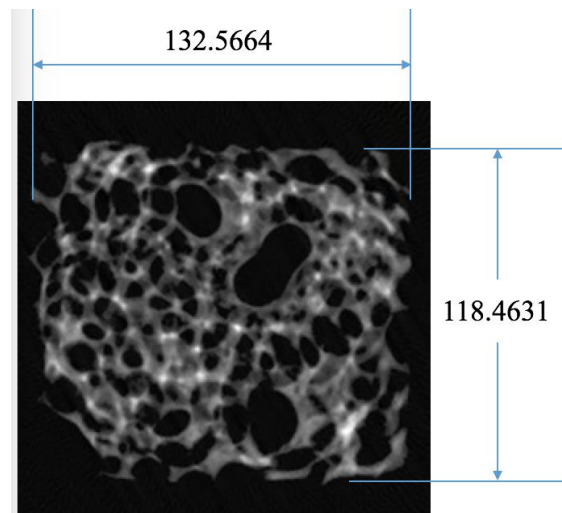


图 5-18

根据附件 1 中的尺寸对图 进行标注得到尺寸图 5-18.

(2) 确定介质平面给定 10 点的吸收率

以相同的方法使用图像灰度值与吸收率线性对应，得到 10 个目标点吸收率如下表：

表二 10 个目标点吸收率

x 坐标	Y 坐标	像素横坐标	像素纵坐标	吸收率
10.0000	18.0000	26	46	0
34.5000	25.0000	88	64	0.0844
43.5000	33.0000	111	84	0.5556
45.0000	75.5000	115	193	0
48.5000	55.5000	124	142	0
50.0000	75.5000	128	193	0.3644
56.0000	76.5000	143	196	0.7467
65.5000	37.0000	168	95	0
79.5000	18.0000	204	46	0.7111

98.5000	43.5000	252	111	0
---------	---------	-----	-----	---

5.4 问题四的求解

5.4.1 标定参数的精度及稳定性分析

在 CT 成像系统的标定参数获取过程中，误差的存在不可避免。本文误差的主要来源分有两种：1.机械误差精度；2.标定模板在探测器上投影图像的坐标获取精度（由探测器单元距离决定）。通过查阅资料可知，后者远大于前者^[1]。本节仅分析标定模板投影图像的像素坐标引起的误差。标定参数分别为旋转中心在正方形托盘中的位置 (x_0'', y_0'') 、探测器单元之间的距离 δ_0 以及该 CT 系统使用的 X 射线的 180 个方向。下面就这三个方面进行精度及稳定性分析。

5.4.1.1 旋转中心位置 (x_0'', y_0'')

(1) 精度

利用 θ_0 和位置信息，将图像旋转和平移，看旋转中心是否在中心点，若不是则计算误差距离。

(2) 稳定性

对于稳定性分析，则通过改变小圆直径 d_r 来改变像素坐标获取精度（即相邻探测器单元间隔距离 δ_0 改变），计算 D, r, θ_0 的变化。

利用问题一中拟合 D, r, θ_0 的方法进行稳定性定量分析，通过计算可得下表：

表三 相对误差表（表中数字单位为：%）

$\Delta d_r / d_r$	-2	-1	0	1	2
D 相对误差	2.0102	1.0168	0.0092	0.9842	1.9917
r 相对误差	2.0185	1.0088	0.1276	0.9923	1.9836
θ_0 相对误差	0.0140	0.0826	0.0163	0.0826	0.0050

从表中数据可以看出： D, r, θ_0 对于旋转中心的微量偏移不敏感，问题一中的计算旋转中心的几何关系模型有较强的稳定性。

5.4.1.2 探测器单元距离 δ

(1) 精度

探测器单元距离由数据得出较为粗糙，故需要对其进行修正， $l = \Delta d \times \delta$ ，因为 $\Delta d > 0$ ，所以 δ 与 l 正相关。又有 $l = D - r \cos(\theta + \theta_0)$ ，故 $\delta_i = \frac{D - r \cos(\theta + \theta_0)}{\Delta d_i}$ ，

i 表示探测器的第 i 次旋转，利用问题一所求数据，求其算术平均值 $\bar{\delta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_i$ ，

$n=180$ 。计算相对误差 $= \left| \frac{\bar{\delta} - \delta}{\bar{\delta}} \right| \times 100\%$ 。

将附件 2 的数据带入计算得：相对误差=1.3216%。

相对误差在 5% 以内，可知本文计算探测器单元距离的模型精度较高。

(2) 稳定性

探测器单元稳定性分析通过改变小圆直径变像素坐标获取精度（即探测器单元距离改变），计算其与算术平均值相对误差。

表四 相对误差表

$\Delta d_r / d_r$	-2%	-1%	0	1%	2%
相对误差	0.007602	0.002576	0	0.022327	0.031912

从表中数据可以看出：探测器单元距离 δ 对于小圆直径的微量改变不敏感，问题一中计算 δ_0 的数学模型有较强的稳定性。

5.4.1.3 X 射线的 180 个方向

(1) 精度

由 $D - l = r \cos(\theta + \theta_0)$ ，可得 $\theta = \arccos \frac{D-l}{r} - \theta_0$ ，由于 D, r, l 都存在微小的误差，所以根据误差传递公式^[5]得到各个参数误差对 θ 的影响，使用一阶泰勒级数将式中的非线性函数展开成多项式

$$\Delta \theta = \left| \frac{\partial \theta}{\partial D} \right| \Delta D + \left| \frac{\partial \theta}{\partial l} \right| \Delta l + \left| \frac{\partial \theta}{\partial r} \right| \Delta r + \left| \frac{\partial \theta}{\partial \theta_0} \right| \Delta \theta_0 + o(\theta) \quad (18)$$

忽略高阶无穷小 $o(\theta)$ ，可得

$$\Delta \theta = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{D-l}{r}\right)^2}} \frac{1}{r} \Delta D + \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{D-l}{r}\right)^2}} \frac{1}{r} \Delta l + \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{D-l}{r}\right)^2}} \Delta r + \Delta \theta_0 \quad (19)$$

由上式可得 D, r, l, θ_0 对角度的影响之比为

$$1:\frac{D-l}{r}:1:r\sqrt{1-\left(\frac{D-l}{r}\right)^2}$$

又由第一问所求 D , r , l , θ_0 可知 $\frac{D-l}{r}$ 远小于 1。故 D , l , θ_0 的误差是影响 θ 精度的主要原因, 在 5.4.1.1 中已经得到 D , l , θ_0 的误差情况, 代入

$$\Delta\theta = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{D-l}{r}\right)^2}} \frac{1}{r} \Delta D + \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{D-l}{r}\right)^2}} \frac{1}{r} \Delta l + \Delta\theta_0 \text{ 可得 } \theta \text{ 的相对误差} = \left| \frac{\Delta\theta}{\theta} \right| \times 100\% = 1.0316\%.$$

(2) 稳定性

通过 D , l , θ_0 的波动对 X 射线方向的影响进行分析。结果如下图所示:

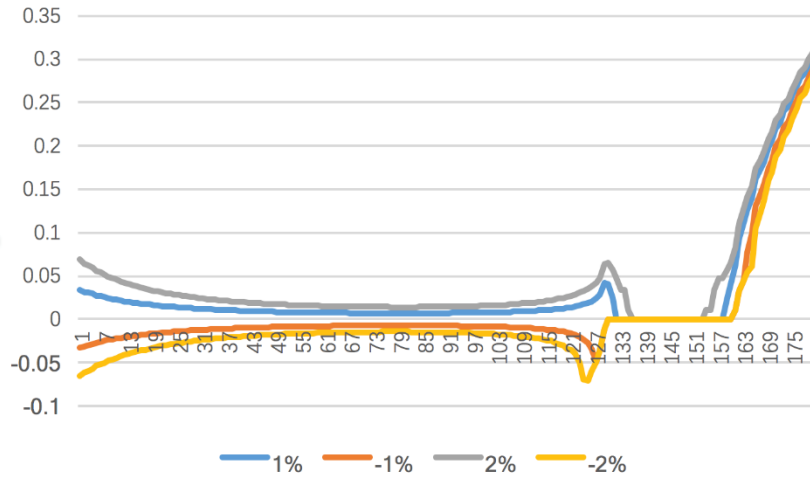


图 5-19 D 波动对射线方向的影响

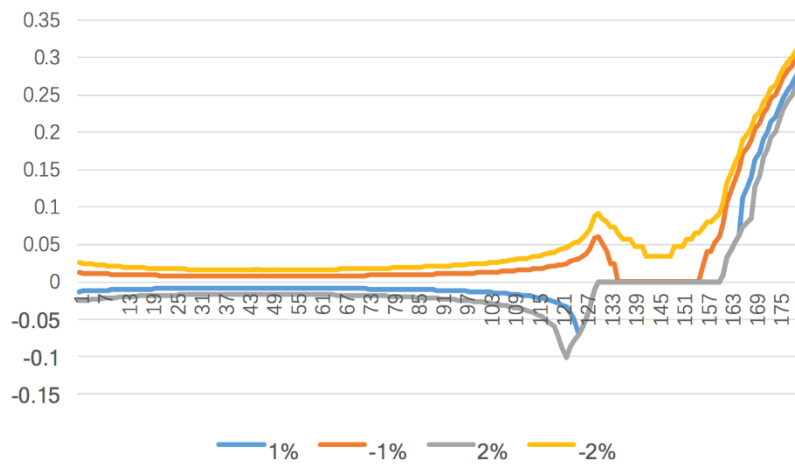


图 5-20 l 波动对射线方向的影响

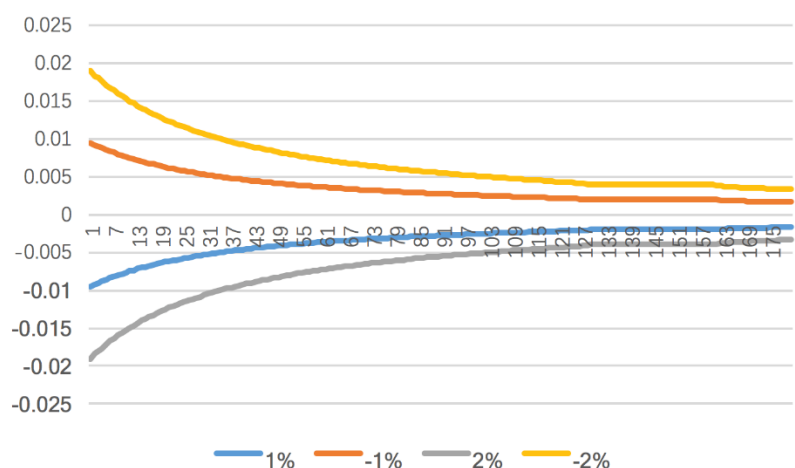


图 5-21 θ_0 波动对射线方向的影响

由图 5-19，图 5-20，图 5-21 分析得知：1.当射线转过的角度较小时， D 与 θ_0 的波动对射线方向产生较大误差；2.当射线转过的角度较大时， D 与 l 的波动对射线方向产生较大误差；3.根据附件 2 分析，射线方向对 D 、 θ_0 、 l 最小时，小圆与椭圆的投影重合，说明模板投影重合有利于提高参数的稳定性，投影重合的时刻也适合用于精确测量射线方向。

5.4.2 新模板的设计

5.4.2.1 设计思路

在建模分析解决问题的过程中，我们分析了附件 2 的数据特点。在附件 2 中，由于小圆的投影轨迹比较清晰，且数据点物理意义较为直观，我们自然而然地选择从小圆入手分析问题。

在问题一模型中，需要对未知参数进行标定，小圆圆心相对于旋转中心的半径 r ，角度 θ 在求解中较为重要。椭圆由于其形状的不规则造成了数据的规律性较差，故在我们自行设计新模板时，首先考虑将模板中的椭圆部分去除。考虑到圆在模型中的良好性质，可以在模板中增加圆的部分。

5.4.2.2 模板设计

建立如图 5-22 的新模板，由四个大小不等的圆构成，四个圆的圆心是以托盘中心点为中心的正方形的四个顶点。

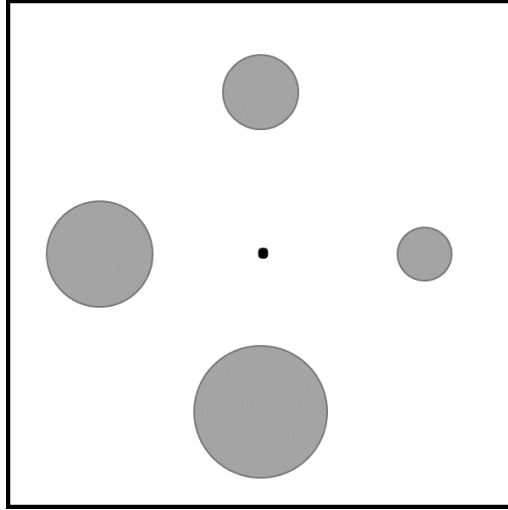


图 5-22 新模板示意图

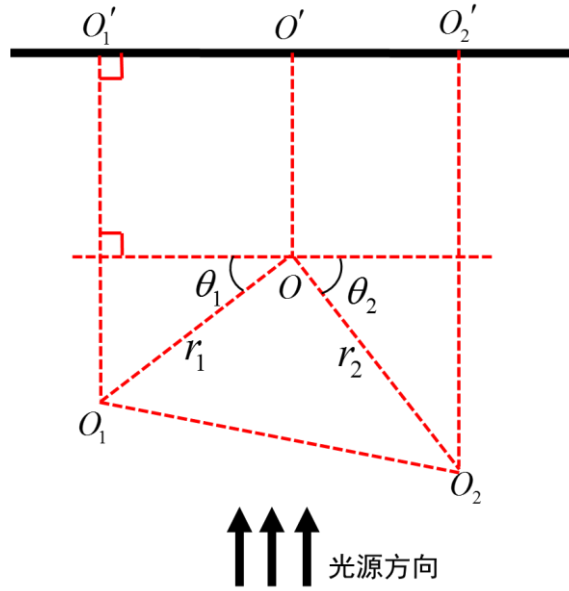


图 5-23 举例分析

设 O_1 、 O_2 为新模板上两个圆的圆心，由图中的几何关系可得

$$\overline{O'_1 O'_2} = r_1 \cos(\theta_1) + r_2 \cos(\theta_2) \quad (20)$$

$\overline{O'_1 O'_2}$ 可通过 O_1 、 O_2 在探测器投影的位置得出。而 $\overline{O_1 O_2}$ 为定值，因此可以确定二者相对位置。

问题转化为了与问题一类似的求解旋转中心的问题，且新模型具有更高的精度和稳定性，求解旋转中心更快捷也更精确。

5.4.2.3 新模板对标定精度和稳定性的改进

注意到造成标定参数精度误差的主要原因是探测器单元距离 δ 的误差，故考虑通过提高计算探测器单元距离的精度来提高模型的精度。

由于四个圆均能独立确定 δ_0 的值，取四者的均值可以提高 δ_0 的精度。计算两个圆心的 D ， r ， θ 可以确定旋转中心的一个可能的位置，一共可以确定旋转中心 $C_4^2=6$ 个可能的位置，且由于四个圆的直径各不相同，所以可以确定旋转中心在托盘上的位置。将这6个坐标的质心作为旋转中心位置的最佳估计，以此来提高旋转中心位置的精度和稳定性。相比于问题一中的旧模板，新模板能够显著提高参数的精度和稳定性。

六、模型的评价

6.1 模型的优点

- (1) 在旋转中心未确定的情况下，灵活建立合理假设简化问题，使能够求得在初始时刻旋转中心相对于小圆圆心的位置，再巧妙的选取特殊点，即椭圆圆心，确定出旋转中心与正方形托盘的相对位置，且模型适用范围广；
- (2) 利用CT图像的本质，即灰度图像，将图像灰度与X光吸收率结合，避免了繁杂的积分计算，并且在计算过程中，消除了硬件对图像灰度造成的影响；
- (3) 对各个标定参数的精度和稳定性进行充分的分析，对探测器单元间距进行修正，提高了模型的精度，对旋转方向通过误差传递矩阵建立了误差分析模型得到了 D ， L ， r ， θ_0 的误差对 θ 精度影响之比，简化了接下来对 θ 的稳定性分析；
- (4) 基于标定参数的精度和稳定性，设计出精度和稳定性更高的四圆模体，提高了探测器单元距离的精度以及旋转中心位置的精度和稳定性。

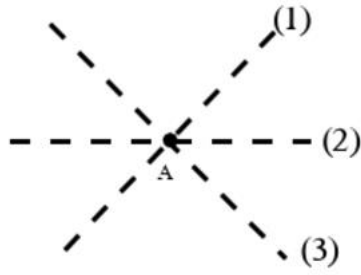
6.2 模型的不足

- (1) 未考虑伪影的情况若直接采用投影重建法，原图像中像素为零的点，反投影重建后不再为零，产生伪影，造成吸收率上的误差；
- (2) 测器单元距离较粗糙，采用小圆直径与探测器单元对应，精度较差。

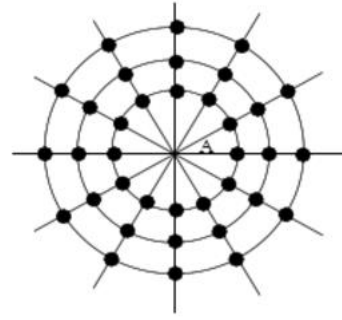
七、模型的改进与推广

7.1 模型的改进

在问题二、三的求解过程中，我们没有对附件中的数据进行处理，而是直接对数据进行反投影重建，原图像中像素不为零的点反投影重建后任比较突出，但原图像中像素为零的点，反投影重建后不再为零，即存在伪影，如下图所示，导致模型存在一定的误差。



(a) 孤立点源 A 及三条射线



(b) 相应的反投影重建图，有星状伪迹

图 5-24

为了改进模型，可以使用平行反投影算法^[6]，CT 图像重建问题本质上就是通过探测器平面上的射线投影计算被检测物体的衰减系数这就能得出相应于衰减系数分布的待重建图像。

根据傅立叶切片定理函数 $f(x, y)$ 在极坐标系下等角间隔方位的平行投影数据，可以通过傅立叶反变换得出图像 $f(x, y)$ ，如下式：

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(u, v) e^{i2\pi(xu+yv)} du dv \quad (21)$$

用极坐标系 (ω, θ) 代替直角坐标系 (u, v) ，可以将二维傅立叶逆变换写成极坐标形式：

$$f(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} F(\omega \cos \theta, \omega \sin \theta) e^{i2\pi\omega(x \cos \theta + y \sin \theta)} \omega d\omega d\theta \quad (22)$$

根据傅立叶切片定理，利用 $s(\omega, \theta) = F(\omega \cos \theta, \omega \sin \theta)$

进行替换可得：

$$f(x, y) = \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{\omega} s(\omega, \theta) e^{j2\pi\omega(x \cos \theta + y \sin \theta)} \omega d\omega + \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{\omega} s(\omega, \theta + \pi) e^{-j2\pi\omega(x \cos \theta + y \sin \theta)} \omega d\omega \quad (23)$$

根据傅立叶变换性质，频域关系如下：

$$S(\omega, \theta + \pi) = S(-\omega, \theta) \quad (24)$$

代入上式可得

$$f(x, y) = \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{+\infty} S(\omega, \theta) |\omega| e^{j2\pi\omega(x \cos \theta + y \sin \theta)} \omega d\omega \quad (25)$$

$S(\omega, \theta)|\omega|$ 称为滤波投影依据，上式表示投影数据根据傅立叶反变换得到均衡后的投影数据，再次反投影可构造出原始图像。

7.2 模型的推广

在实际生产和医疗检测中，平行束 CT 作为第一代 CT 已逐渐被检测效果更佳、冗余射线更少的扇束、锥束 CT 所替代，因此，我们将标定平行束 CT 的数学模型推广到扇束 CT 是十分有意义的。

通过查阅文献，我们了解到，在扇束扫描中，射线源到旋转中心的距离是有限的。平行束可以看作是射线源到旋转中心的距离无限长的扇束。所以我们可以把扇形束的成像问题转换成平行束的成像问题，进而将平行束图像重建的算法修正后应用于解决扇束的成像问题。

例如，通过数据重排算法可以将扇形光束重建^[7]，该算法就是把所有扇形束射线放在一起进行数据重排，将互相平行的光线分成一组，即可将扇形束问题转化为平行束的成像问题。

等角度扇形束射线与平行束射线的对应关系如下图所示。

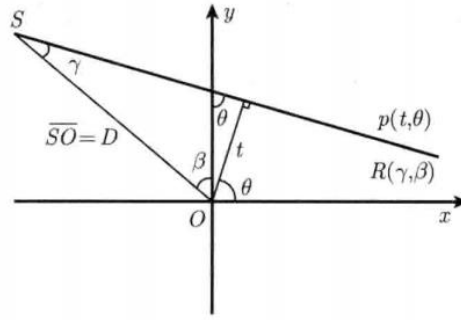


图 5-25

由图可得，坐标满足下列关系：

$$\theta = \gamma + \beta \quad (26)$$

$$t = D \sin \gamma \quad (27)$$

参考文献

- [1] 石冶郝,余玉峰,程小红. CT 扫描中的数学——拉东(Radon)变换[J]. 首都师范大学学报(自然科学版),2013,34(04):15-18. [2017-09-17].
- [2] 姜启源, 谢金星, 叶俊, 数学模型(第四版)[M], 北京: 高等教育出版社, 2011.1
- [3] 宋沛然. 感兴趣区域 FBP 图像重建算法及其分析[D].北京交通大学,2010.
- [4] 吴巍,陈旭,庄天戈. 从视频图像的灰度重建 CT 数算法的研究[J]. 中国医疗器械杂志,2004,(03):165-167+171. [2017-09-17].
- [5] 张建方. 关于误差的传递公式[J]. 数理统计与应用概率,1995,(03):57-70. [2017-09-17].
- [6] 熊军. 代数迭代 CT 图像重建算法研究[D].成都理工大学,2015
- [7] 闫镔. CT 图像重建算法[M]. 科学出版社, 2014.

附录

附录1

Iraddon重建图像

```
clc;
clear all;

R = load('5.dat');
R = [zeros(100,180); R; zeros(100,180)];
img = iradon(R,[0:179]);
img2=medfilt2(img);
imshow(img2,[])
```

附录 2

求图像灰度

```
pic=imread('3.jpg');
g=rgb2gray(pic);
```

附录 3

压缩图像像素

```
I=imread('1.jpg');
subplot(211);
imshow(I);
J=rgb2gray(I);
J=imresize(J,[256,256]);
subplot(212);
imshow(J);
```

```
function f = myfun(canshu,x)
```

```
f = canshu(1)*cos(x+canshu(2))+canshu(3);
```

```
clear;
```

```
clc;
```

```
y0 = [416    413 412 410 407 405 403 400 398 396 393 391 388 385 383 380 378
      375 372 369 366 364 361 358 355 352 349 346 343 340 336 333 330 327 324
      320 317 314 310 307 304 301 297 294 290 287 284 280 277 273 270 266 263
      259 256 253 249 246 242 239 235 232 228 225 222 218 215 212 208 205 202
      198 195 192 189 185 182 179 176 173 170 166 163 160 157 154 151 149 147
      143 140 137 135 132 129 127 124 121 119 117 114 112 109 107 105 103 100 98
      96  94  92  91  89  87  85  84  82  80  79  77  76  75  73  72  71  70  69
      68  67  66  65  64  63  63  62  61  61  61  60  60  60  59  59  59  59  59]
```

```

59 59 60 60 60 61 61 62 62 63 64 64 65 66 67 68 69 70 71
73 74 75 77 78 80 81 83 84 86 88 90 91 93 95
];
x0 = [1:180];
y = (512-y0)*0.2759;
y = y';
x = x0*pi/180;
x = x';
canshu0 = rand(3,1);
canshu = lsqcurvefit(@fiter,rand(1,3),x,y,[],[]);
plot(x,y,'rx');hold on;
p = [1:0.001:3.3];
q = canshu(1)*cos(p+canshu(2))+canshu(3);
plot(p,q,'b');xlabel('模板旋转角度（弧度）'),ylabel('圆心在探测器投影的位置（单位：mm）'),title('小圆亮带中心线（拟合）');
legend('离散点','拟合曲线',1);

```

附录 4

X 射线 180 次旋转方向角度

1-30	31-60	61-90	91-120	121-150	151-180
119.8207	150.1046	180.5424	211.4141	245.2399	262.8574
121.2696	151.0618	181.4372	212.5560	246.2431	262.8574
121.7424	152.0127	182.6336	213.3278	248.4516	262.8574
122.6737	152.9576	183.5337	214.5025	249.6906	262.8574
124.0377	153.8969	184.4364	215.6991	251.0565	262.8574
124.9267	155.1411	185.6447	216.5098	252.5999	262.8574
125.8007	156.0687	186.5547	217.7469	254.4176	262.8574
127.0855	156.9917	187.4682	219.0111	256.7498	262.8574
127.9258	158.2159	188.6923	219.8703	261.0041	262.8574
128.7540	159.1295	189.6151	220.7436	262.8574	262.8574
129.9751	160.0396	190.5425	222.0819	262.8574	264.7111
130.7758	160.9465	191.7865	222.9945	262.8574	268.9654
131.9583	162.1509	192.7256	224.3972	262.8574	271.2976
133.1201	163.0511	193.6703	225.3568	262.8574	273.1153
133.8838	164.2476	194.6210	226.3378	262.8574	274.6587
135.0143	165.1425	195.8985	227.3421	262.8574	277.2636
135.7583	166.0354	196.8646	228.8966	262.8574	278.4061
136.8609	167.2235	197.8380	229.9687	262.8574	279.4721
137.9483	168.1129	198.8191	231.0727	262.8574	281.4261
139.0215	169.2971	199.8085	232.2121	262.8574	282.3320
140.0814	170.1842	200.8067	233.3912	262.8574	284.0322

140.7810	171.3661	202.1522	233.9971	262.8574	284.8351
141.8206	172.2520	203.1730	235.2453	262.8574	286.3628
142.8489	173.4331	204.2046	236.5478	262.8574	287.0924
143.8666	174.3190	205.2477	237.9132	262.8574	288.4932
144.8744	175.2053	206.3029	238.6228	262.8574	289.8259
145.8729	176.3879	207.3711	240.1041	262.8574	291.1003
146.8626	177.2759	208.0909	241.6830	262.8574	291.7181
147.8440	178.4615	208.8171	242.5161	262.8574	292.9188
148.8177	179.3522	210.2901	244.2891	262.8574	294.0775