

2021 黑龙江省数学建模竞赛培训

## A: 炉 温 曲 线

哈尔滨工程大学数学科学学院 沈继红

2021.08.27, 哈尔滨

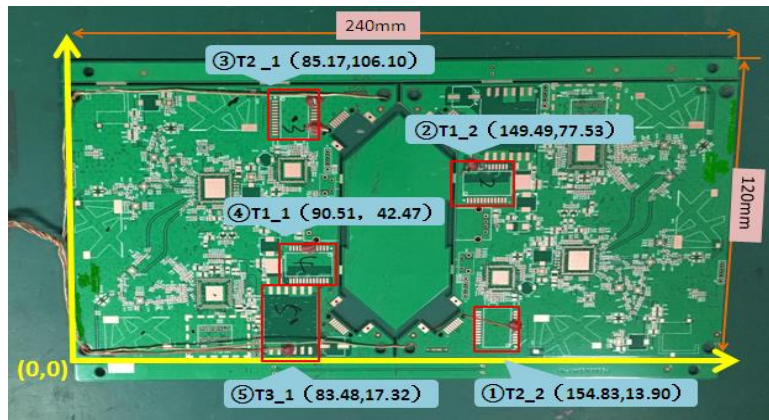


# 2020高教社杯全国大学生数学建模竞赛题目

## A 炉温曲线

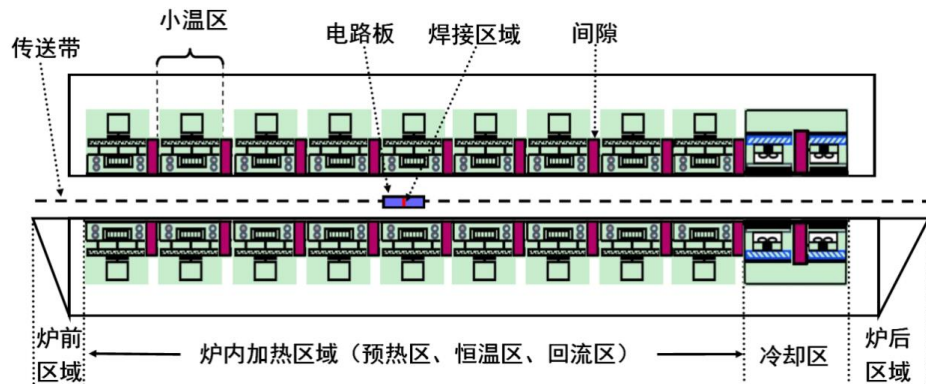
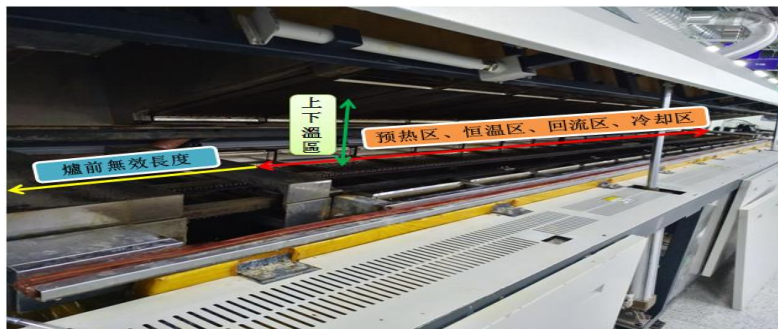
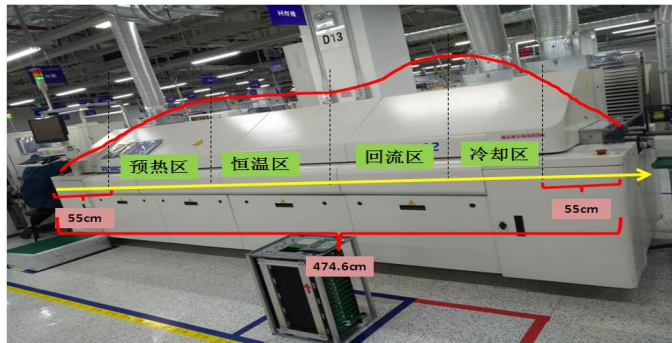
在集成电路板等电子产品生产中，需要将安装有各种电子元件的印刷电路板放置在回焊炉中，通过加热，将电子元件自动焊接到电路板上。

在这个生产过程中，让回焊炉的各部分保持工艺要求的温度，对产品质量至关重要。目前，这方面的许多工作是通过实验测试来进行控制和调整的。本题旨在通过机理模型来进行分析研究。



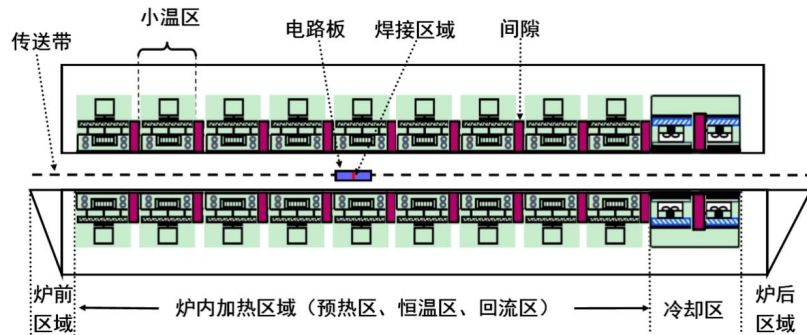
# 回焊炉结构

回焊炉内部设置若干个小温区，它们从功能上可分成4个大温区：预热区、恒温区、回流区、冷却区（如图1所示）。电路板两侧搭在传送带上匀速进入炉内进行加热焊接。



某回焊炉内有11个小温区及炉前区域和炉后区域（如图1），每个小温区长度为30.5 cm，相邻小温区之间有5 cm的间隙，炉前区域和炉后区域长度均为25 cm

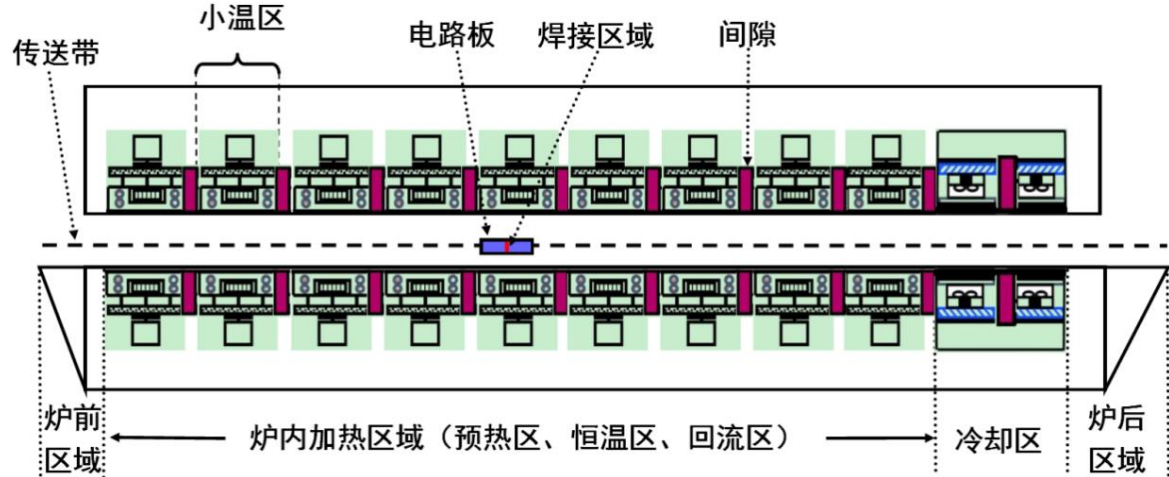
回焊炉启动后，炉内空气温度会在短时间内达到稳定，此后，回焊炉方可进行焊接工作。炉前区域、炉后区域以及小温区之间的间隙不做特殊的温度控制，其温度与相邻温区的温度有关，各温区边界附近的温度也可能受到相邻温区温度的影响。另外，生产车间的温度保持在25℃。



在设定各温区的温度和传送带的过炉速度后，可以通过温度传感器测试某些位置上焊接区域中心的温度，称之为炉温曲线（即焊接区域中心温度曲线）。附件是某次实验中炉温曲线的数据，各温区设定的温度分别为175℃（小温区1~5）、195℃（小温区6）、235℃（小温区7）、255℃（小温区8~9）及25℃（小温区10~11）；传送带的过炉速度为70 cm/min；焊接区域的厚度为0.15 mm。温度传感器在焊接区域中心的温度达到30℃时开始工作，电路板进入回焊炉开始计时。

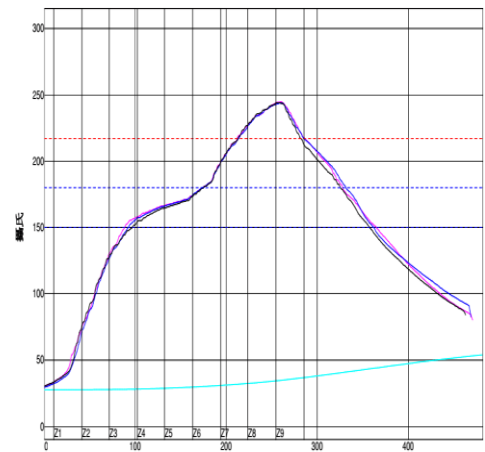
实际生产时可以通过调节各温区的设定温度和传送带的过炉速度来控制产品质量。在上述实验设定温度的基础上，各小温区设定温度可以进行 $\pm 10^{\circ}\text{C}$ 范围内的调整。

调整时要求小温区1~5中的温度保持一致，小温区8~9中的温度保持一致，小温区10~11中的温度保持 $25^{\circ}\text{C}$ 。传送带的过炉速度调节范围为 $65\sim 100\text{ cm/min}$ 。



# 制程界限

在回焊炉电路板焊接生产中，  
炉温曲线应满足一定的要求，  
称为制程界限。



界限名称	最低值	最高值	单位
温度上升斜率	0	3	°C/s
温度下降斜率	-3	0	°C/s
温度上升过程中在 150°C~190°C 的时间	60	120	s
温度大于 217°C 的时间	40	90	s
峰值温度	240	250	°C



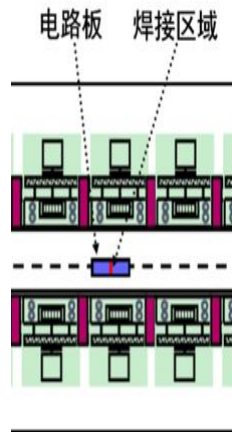
# 问题及参考评阅要点

请你们团队回答下列问题：

**问题1** 请对焊接区域的温度变化规律建立数学模型。假设传送带过炉速度为78 cm/min，各温区温度的设定值分别为173°C（小温区1~5）、198°C（小温区6）、230°C（小温区7）和257°C（小温区8~9），请给出焊接区域中心的温度变化情况，列出小温区3、6、7中点及小温区8结束处焊接区域中心的温度，画出相应的炉温曲线，并将每隔0.5 s焊接区域中心的温度存放在提供的result1.csv中。

## 1. 假设

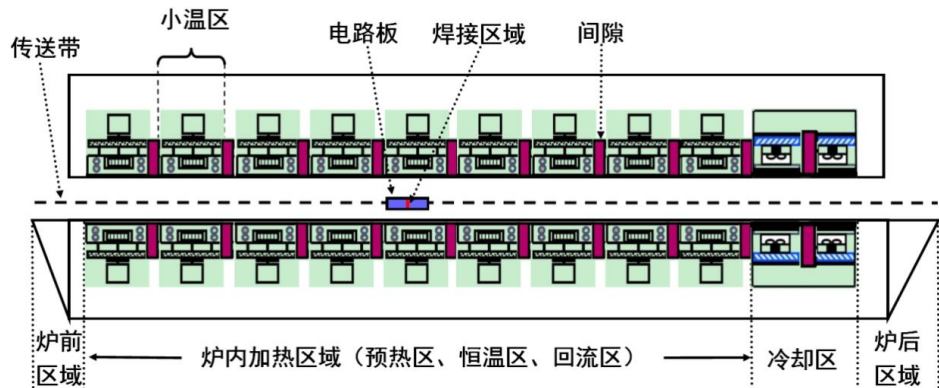
1. 焊接区域简化为垂直于传送带平面的长度为0.15mm“线段”。
2. 回焊炉稳定后炉内空气温度只考虑沿传送带前进方向变化，在垂直于前进方向的平面上温度一样。



# 问题

请你们团队回答下列问题：

**问题1** 请对焊接区域的温度变化规律建立数学模型。假设传送带过炉速度为78 cm/min，各温区温度的设定值分别为173°C（小温区1~5）、198°C（小温区6）、230°C（小温区7）和257°C（小温区8~9），请给出焊接区域中心的温度变化情况，列出小温区3、6、7中点及小温区8结束处焊接区域中心的温度，画出相应的炉温曲线，并将每隔0.5 s焊接区域中心的温度存放在提供的result1.csv中。



## 假设

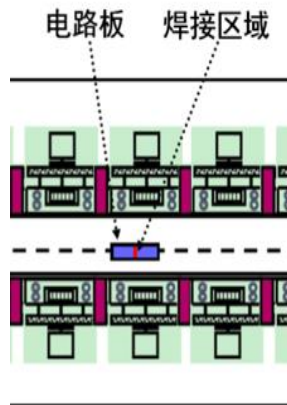
应给出回焊炉稳定后炉内空气温度场的分布假设：

- 在临近小温区边界5厘米（或者一个合理的范围）的区域及小温区之间的间隙内，受到周围温区的温度影响呈线性（或S型或其他合理的）过渡，其他区域等于小温区的设定温度；
- 从入口至第一个小温区5cm处（或者合理的范围）温度由室温线性（或某种合理的方式）过渡到第一个小温区的设定温度；
- 在冷却区右端至出口这一段为室温。



# 热传导模型

$$\begin{cases} u_t = au_{xx} & (x,t) \in [x_l, x_r] \times [0, T] \\ u(x, 0) = u_0 & x \in [x_l, x_r] \\ -\beta u_x(x_l) + u(x_l) = g(vt) & t \in [0, T] \\ \beta u_x(x_r) + u(x_r) = g(vt) & t \in [0, T] \end{cases}$$



对热传导方程进行求解，通过附件温度数据反演热扩散率 $a$ 及边界条件换热参数 $\beta$ ，其数值分布特点与空气温度场假设相同。

- $u(x, t)$  表示焊接区域中距上表面  $x - x_l$  处，在距回焊炉入口  $vt$  处（ $t$  时刻）的温度，这里  $v$  是传送带速度；
- $u_0$  表示初始时刻焊接区域的温度分布，取为室温 25；
- $g(vt)$  是温度场，表示回焊炉内部，沿传送带运动方向，距回焊炉入口  $vt$  处（ $t$  时刻）的温度；
- $a$  表示焊接区域的热扩散率；
- $\beta$  是与焊接区域与炉内气体的换热率相关的参数。

# 牛顿冷却定律模型

由于焊接区域厚度为 0.15 毫米，尺寸很小，可以将它看作一个温度分布均匀的体积来处理。记  $t$  时刻焊接区域的温度和回焊炉空气温度为分别为  $T(t)$  和  $W(t)$ ，设焊接区域的质量为  $m$ ，比热为  $c$ ，焊接区域与空气之间的热传导率为  $k$ 。考虑在  $[t, t + \Delta t]$  内焊接区域温度变化与焊接区域吸热之间的关系得到

$$cm(T(t + \Delta t) - T(t)) = S \cdot k(W(t) - T(t))\Delta t$$

其中  $S$  为表面积，从而得到常微分方程

$$\frac{dT(t)}{dt} = \alpha(W(t) - T(t)), \quad T(t_0) = T_0, \quad \alpha = \frac{S \cdot k}{cm}$$

对热传导方程进行求解，通过附件温度数据反演参数  $\alpha$ 。

## 问题1的评阅参考：

位置	小温区 3 中点	小温区 6 中点	小温区 7 中点	小温区 8 结束
温度	130.2679	167.6540	189.4755	223.5468

注：对热传导方程进行差分求解（隐式、显式格式皆可）；间隙处温度进行线性过渡。常微分方程离散后的结果与上述值有误差，且在进入冷却区后差异较大。

**问题2** 假设各温区温度的设定值分别为 $182^{\circ}\text{C}$ （小温区1~5）、 $203^{\circ}\text{C}$ （小温区6）、 $237^{\circ}\text{C}$ （小温区7）、 $254^{\circ}\text{C}$ （小温区8~9），请确定允许的最大传送带过炉速度。

### 数学模型：

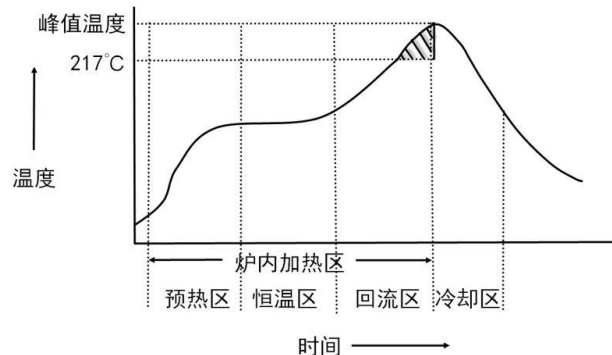
$$\begin{array}{ll} \max & v \\ \text{s.t.} & H \text{ 条件} \end{array}$$

其中  $H$  条件为炉温曲线的制程界限，即  $u(t)$  满足下面的 4 个条件：

1.  $\left| \frac{du(t)}{dt} \right| \leq 3$
2.  $t_2 - t_1 \in [60, 120]$ ，其中  $t_1$ 、 $t_2$  分别是第一次使得  $u(t_1) = 150$  和  $u(t_2) = 190$  成立的时刻
3.  $t_4 - t_3 \in [40, 90]$ ，其中  $t_3$ ， $t_4$  ( $t_3 \leq t_4$ ) 是方程  $u(t) = 217$  的两个根
4.  $\max_t u(t) \in [240, 250]$

# 制成界限

界限名称	最低值	最高值	单位
温度上升斜率	0	3	°C/s
温度下降斜率	-3	0	°C/s
温度上升过程中在 150°C~190°C 的时间	60	120	s
温度大于 217°C 的时间	40	90	s
峰值温度	240	250	°C



其中Ⅲ条件为炉温曲线的制程界限，即 $u(t)$ 满足下面的4个条件：

1.  $\left| \frac{du(t)}{dt} \right| \leq 3$
2.  $t_2 - t_1 \in [60, 120]$ ，其中 $t_1$ 、 $t_2$ 分别是第一次使得 $u(t_1) = 150$ 和 $u(t_2) = 190$ 成立的时刻
3.  $t_4 - t_3 \in [40, 90]$ ，其中 $t_3$ ， $t_4$  ( $t_3 \leq t_4$ )是方程 $u(t) = 217$ 的两个根
4.  $\max_t u(t) \in [240, 250]$

**问题2** 假设各温区温度的设定值分别为 $182^{\circ}\text{C}$ （小温区1~5）、 $203^{\circ}\text{C}$ （小温区6）、 $237^{\circ}\text{C}$ （小温区7）、 $254^{\circ}\text{C}$ （小温区8~9），请确定允许的最大传送带过炉速度。

### 数学模型：

$$\begin{array}{ll} \max & v \\ \text{s.t.} & H \text{ 条件} \end{array}$$

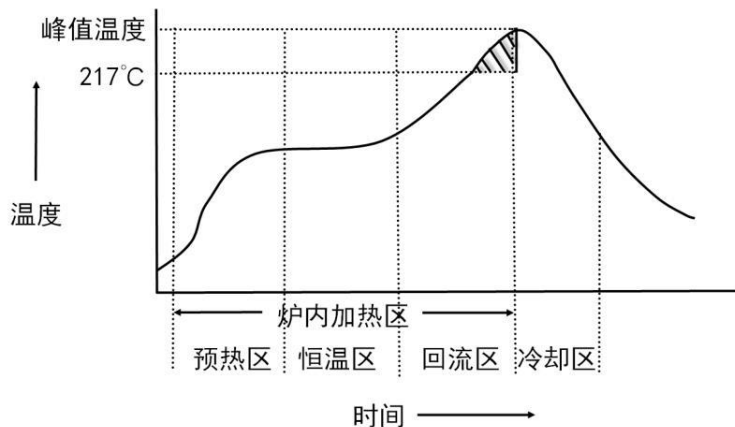
其中  $H$  条件为炉温曲线的制程界限，即  $u(t)$  满足下面的 4 个条件：

1.  $\left| \frac{du(t)}{dt} \right| \leq 3$
2.  $t_2 - t_1 \in [60, 120]$ ，其中  $t_1$ 、 $t_2$  分别是第一次使得  $u(t_1) = 150$  和  $u(t_2) = 190$  成立的时刻
3.  $t_4 - t_3 \in [40, 90]$ ，其中  $t_3$ 、 $t_4$  ( $t_3 \leq t_4$ ) 是方程  $u(t) = 217$  的两个根
4.  $\max_t u(t) \in [240, 250]$

参考答案：问题2求出的最大速度结果应在 $78.98\text{cm/min}$ 附近。



**问题3** 在焊接过程中，焊接区域中心的温度超过 $217^{\circ}\text{C}$ 的时间不宜过长，峰值温度也不宜过高。理想的炉温曲线应使超过 $217^{\circ}\text{C}$ 到峰值温度所覆盖的面积（图2中阴影部分）最小。请确定在此要求下的最优炉温曲线，以及各温区的设定温度和传送带的过炉速度，并给出相应的面积。



数学规划模型

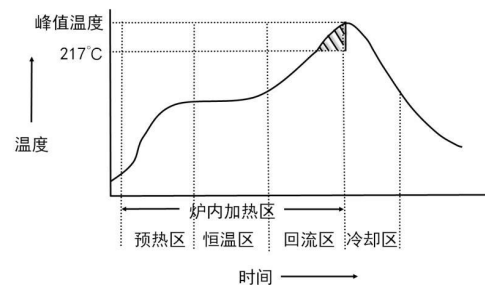
$$\begin{aligned} \min_{u(t)} \quad & \int_{t_3}^{t_q} u(t) dt \\ \text{s.t.} \quad & H \text{ 条件} \end{aligned}$$

本问主要考察学生对单目标优化问题的建模与求解策略。事实上，这个单目标优化问题混合了微分方程的求解过程。很难得到解析解，以某种方式近似“遍历”所有的温度和速度设置，是比较现实的求解方案。

遍历搜索最优解的方式要满足以下两点：

- 1) 尽可能地覆盖所有的温度和速度设置；
- 2) 总体的采样个数要有所控制，防止过高的时间成本。

**问题3** 在焊接过程中，焊接区域中心的温度超过217°C的时间不宜过长，峰值温度也不宜过高。理想的炉温曲线应使超过217°C到峰值温度所覆盖的面积（图2中阴影部分）最小。请确定在此要求下的最优炉温曲线，以及各温区的设定温度和传送带的过炉速度，并给出相应的面积。



### 两种近似“遍历搜索”方式

- 1) 以某种“随机”的方式遍历采样，如“混沌优化算法”（采用混沌迭代实现近似的遍历）等；
- 2) “粗—细网格搜索法”。所谓粗—细网格，是指先用较大步长“遍历”所有温度和速度设置，寻找到粗步长下使面积最小的炉温曲线，再在对应的温度和速度设置附近用小步长遍历搜索最优解，以此来找到最优炉温曲线。

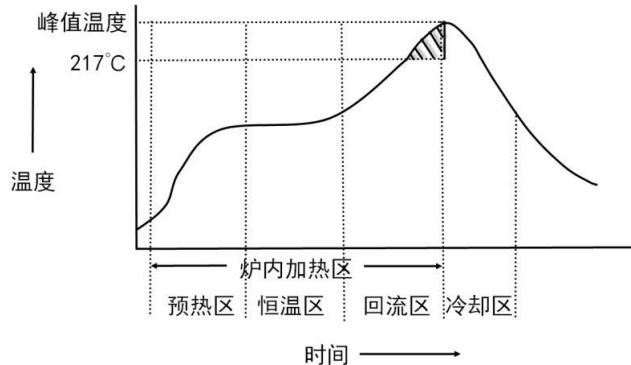
### 数学规划模型

$$\begin{aligned} \min_{u(t)} \quad & \int_{t_3}^{t_q} u(t) dt \\ \text{s.t.} \quad & H \text{ 条件} \end{aligned}$$

**问题3最优曲线的结果评判标准：**小温区8~9的温度设置在264~265摄氏度之间，过炉速度在85~95cm/min之间，“尖端区”面积在470（秒\*摄氏度）附近。

## 问题4

在焊接过程中，除满足制程界限外，还希望以峰值温度为中心线的两侧超过 $217^{\circ}\text{C}$ 的炉温曲线应尽量对称（参见图2）。请结合问题3，进一步给出最优炉温曲线，以及各温区设定的温度及传送带过炉速度，并给出相应的指标值。



建立数学规划模型：

$$\min_{u(t)} \int_{t_3}^{t_q} u(t) dt$$

$$\min_{u(t)} \|u(t) - u(2t_q - t)\|_{L_p}, \quad t \in [t_q, t_4]$$

s.t.  $H$  条件

其中  $t_q$  为峰值温度， $\|\cdot\|_{L_p}$  可选择为  $\|\cdot\|_{L_1}$ ， $\|\cdot\|_{L_2}$  和  $\|\cdot\|_{\infty}$

考察：将曲线的镜像对称程度用一个合理的目标函数来刻画；双目标优化问题建模与求解。

双目标规划的一个求解方案：将间断区面积和对称误差进行加权相加，目标：应对两个目标函数进行“归一化”处理。

问题4最优曲线的结果评判标准：答案根据求解策略的不同会很多，小温区8~9的温度设置在 $264\sim 265^{\circ}\text{C}$ 之间，过炉速度在 $85\sim 95\text{cm/min}$ 之间，“尖端区”面积在470（秒\*摄氏度）附近。

***Thank You!***