

基于几何投影及逆拉登变换法的 CT 系统参数标定及成像

摘要

CT(Computed Tomography)可以在不破坏样品的情况下,利用样品对射线能量的吸收特性进行断层成像。但是 CT 系统在安装时往往存在误差,我们需要对参数进行标定来提高成像质量,标定后的 CT 系统可对未知结构的样品进行成像。

本文主要利用几何投影模型解决了 CT 系统的参数标定问题,基于标定的 CT 系统参数对未知物质进行成像,并且得到该物质的吸收率等信息。在已有的标定模板的基础上设计了使测量更具精确度和稳定性的新模板用于 CT 系统的参数标定。

针对问题一,我们首先通过小圆形状的特殊性以及给定的几何长度信息得出了探测器单元的间距,结果为 0.2892mm。然后我们假设了旋转中心 H,以点 H 为坐标原点建立直角坐标系,经严密推导后确定了投影最长时的 X 射线入射方向为椭圆的短轴方向,基于几何投影的数学模型我们计算出了小球圆心的坐标,这样就由小球在正方形托盘上的相对位置确定了坐标原点即旋转中心相对于正方形托盘的位置,结果表明旋转中心在椭圆短轴所在的直线上,距正方形托盘中心的距离为 11.9724mm。将已知的 180 个方向的矩阵信息进行翻转补齐之后的到的矩阵以及对应的灰度图,我们假设改图像是连续的,且小球的轨迹是一条正弦曲线,在严格的数学计算以及矩阵的数据处理之后我们得到了探测器 180 个方向的角度信息,并根据真实旋转过程的特征拟合了这 180 个方向的角度,拟合得到的曲线为直线,在我们建立的坐标系中初始角度为 -60.3500° ,终止角度为 118.6500° ,公差是 1.0056° 。

针对问题二,我们使用 MATLAB 内置函数 iradon() 对未知介质进行变换成像,由于该函数自身对旋转中心的限制,成像产生了偏移以及物质吸收率数值的不准确。为了解决这个问题,我们通过对附件 2 中的矩阵进行相同角度参数和大小参数的逆拉登变换,将得到的图像与附件 1 给定的模板信息进行对比,由着两个图像的相对位置关系来推测未知介质逆拉登变换之后的成像与真实位置的相对位置,由此来确定未知介质与正方形托盘的相对位置。根据模板的吸收率的信息与附件 2 生成的模板吸收率之间的关系,我们推断逆拉登变换之后得到的吸收率信息与相对于模板的真实吸收率呈线性关系,在此数学模型下,可得附件 3 中未知介质的吸收率的信息。

问题三的解决沿用了问题二的思路,但是因为问题三数据所含噪声影响相较于问题二更加明显,在去噪处理上,我们采用了比问题二更高的阈值,使得噪声较大的噪声点也可以得到有效的消除。

针对问题四,我们在解决问题一的时候发现圆的半径太小使得相邻探测器间距的测量误差较大,因为相邻探测器之间的间隔是固定的,测量的是离散的数据点,如果圆的半径太小可能会导致一些数据点的丢失,导致相邻探测器之间的距离标定产生较大误差。根据在解决问题一使用原参数标定模板时的一些误差分析以及计算方便程度,我们设计一个基于圆和椭圆两个基本形状的标定模板,其中圆的半径为 40mm,圆的中心即为正方形托盘的中心,椭圆长轴长为 80mm,椭圆中心与圆的中心重合,我们设计的标定模板可以更加精确地测量探测器单元的间距已经更加方便的求出旋转中心以及 180 个角度。

关键词: 计算机断层成像 (CT);图像重建;投影变换;Radon 变换;FBP 重建算法

1、问题重述

本题主要解决了 CT 系统的参数标定以及根据探测器的接收信息进行未知介质成像和吸收率的测定。

问题一：在给定一组由椭圆和圆形组成的模板在正方形托盘上的位置信息以及几何尺寸，附件 1 是 CT 系统在旋转 180 个角度的过程中 512 个探测器的接收信息，需要确定 CT 系统的旋转中心，相邻探测器单元之间的距离以及旋转的 180 个角度的信息。

问题二：给定一组未知介质的探测器接收信息，基于已经测定的 CT 系统参数，确定该未知介质在正方形托盘中的位置、几何形状和吸收率等，并计算 10 个特定点的吸收率。

问题三：给定另一组未知介质的探测器接收信息，基于已经测定的 CT 系统参数，给出该未知介质的相关信息，并计算 10 个特定点的吸收率。

问题四：分析问题一中参数标定的精度和稳定性，在此基础上自行设计新模板、建立对应的标定模型，以改进标定精度和稳定性，并说明理由。

2、问题分析

问题一的分析：

从附件 2 的接收信息矩阵生成的灰度图可以明显观察到两个物体即大的椭圆以及小的圆形物体的阴影轨迹，由于圆的形状的特殊性，考虑通过圆的直径在灰度图中的显示都一样的长度来求相邻探测器单元之间的间距。建立以旋转中心为坐标原点的直角坐标系，通过几何投影模型，将小圆的圆心投影在假设的探测器装置上，并且假设 CT 系统系统模型转过 180 个角度恰好转过了 180° ，将已知的 180 个方向的接收信息矩阵对称翻转合并成为新的矩阵，并画出灰度图，考虑根据这个灰度图再加上几何关系我们可以求出 CT 旋转系统的旋转中心以及 180 个方向的具体角度。

问题二的分析：

问题二是基于问题一参数标定后的 CT 系统确定未知介质的相关信息，考虑建立图像重建模型，在进行计算之前，应该对数据进行消除噪声的处理，考虑设定一个阈值来消除噪声。利用 MATLAB 内置函数 `iradon()` 对探测器的接收信息进行变换，得到的矩阵并不是最终答案，因为内置函数 `iradon()` 限制系统的旋转中心要在矩阵的中心，在我们的这个系统的旋转中心和几何中心不重合的情况下，直接使用 `iradon()` 变换后得到的结果是存在物体位置的偏移以及物质吸收率与真实值之间的差距的。考虑使用已知模板物质的接收信息图进行 `iradon()` 变换后与已知的附件 1 的信息进行对比，将对比的结果沿用到问题二的重建的图像的准确定位以及吸收率的确定上。

问题三的分析：

问题三在整体上可以沿用问题二的思路，但是考虑问题三给出数据中掺杂的噪声过大，

我们应该提高在问题二中使用的阈值，问题三的解题过程与问题二类似。

问题四的分析：

考虑探测器接收的信息是离散的，圆形标定模板的只经过小，会导致我们在计算相邻探测器间距时产生较大误差。考虑使用具有更大半径的圆形标定模板使得相邻探测器之间的距离的测定更加准确。

3、模型假设

- (1) X 射线由波长相同（即能量单一）的光子组成。
- (2) 探测器的效率为 100%。
- (3) 忽略 X 射线源和探测器单元的物理尺度，将其视为理想的几何点。
- (4) 附件 2 数据逆拉登变换后的图形偏移以及吸收率的改变情况可以推广到未知介质的测定上。
- (5) 将附件 2 中的矩阵进行翻转合并成 A_3 后画出的灰度图是连续的图像。
- (6) 未知物质不存在使得探测器的接收信息非常微弱的情况，微弱的探测信息的存在都是由于环境噪声或者系统自身误差引起的。

4、符号说明

符号	符号说明	符号	符号说明
$A、B$	探测器的两个端点	A_1	附件 2 的 512x180 矩阵
A_2	A_1 的列翻转矩阵	A_3	$\{A_1 A_2\}$
Fig1	附件 2 生成的灰度图	Fig2	A_3 画出的灰度图
P	圆与探测器的切点	φ	接收板的倾斜角
l	接收板所在直线	$H(H2)$	椭圆的中心
C	小圆的圆心	K,b	直线的斜率和截距
$d_{投影}$	物体在接收板上投影的长度	λ	切点 P 距 A 端的距离占 AB 线段长的比例
l_0	线段 AB 的长度	S_1	正弦曲线最高点到下底边的距离
S_2	正弦曲线最抵点到下底边的距离	n	正弦曲线某一列非零元素中点到下底边的行数

R_4	位置信息矩阵	N_1	A_1 的扩充矩阵
W_1	附件 3 对应的介质	W_2	附件 5 对应的介质
$\bar{\delta}$	矩阵 B_2 元素的平均值	O	新标定模板的旋转中心

表 1 符号说明

5、模型建立与求解

整体流程框图

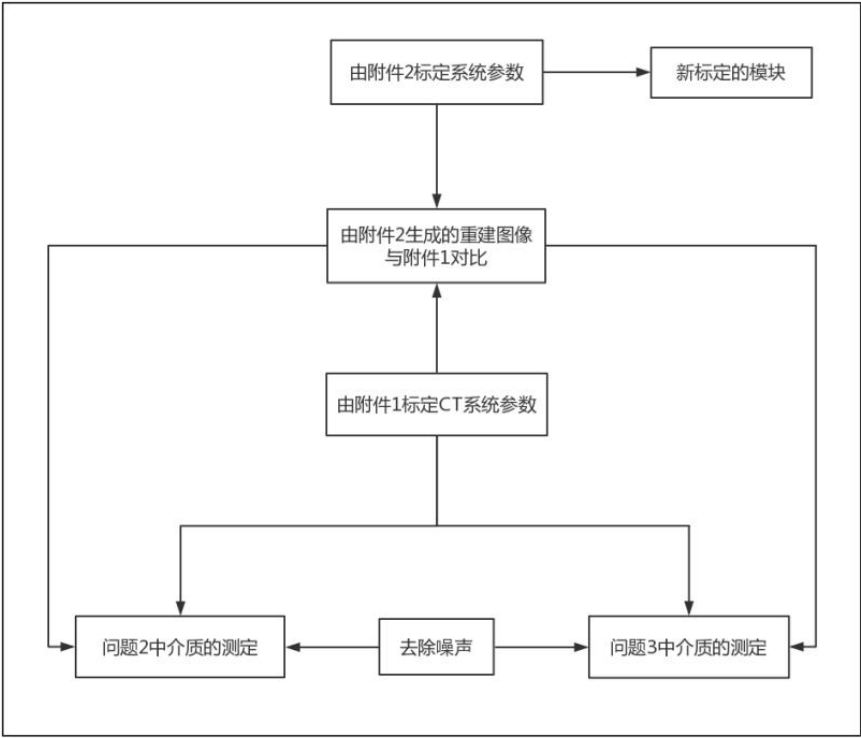


图 1 整体流程框图

5.1 问题一：CT 系统的参数标定

求解过程的流程图如下：

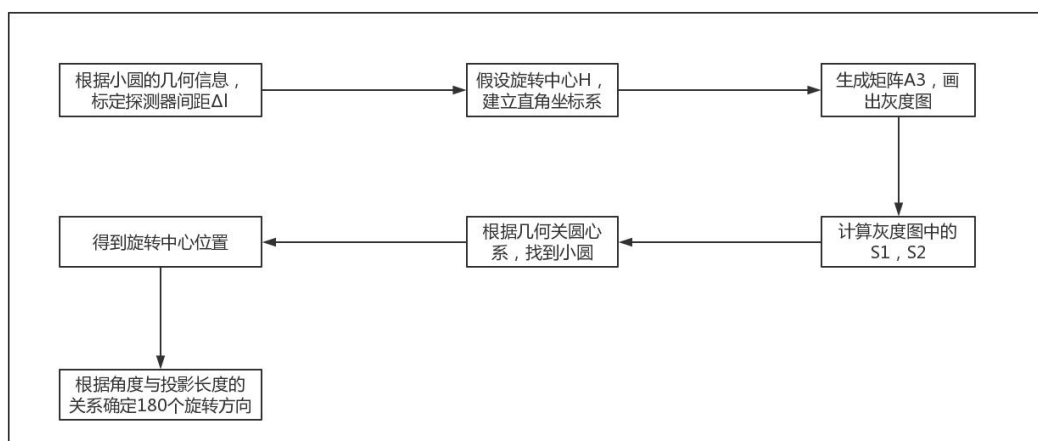


图 2 问题一求解流程图

5.1.1 对问题二的分析与求解

针对问题一，我们需要解决三个问题确定 CT 系统旋转中心在正方形托盘中的位置、探测器单元之间的距离以及该 CT 系统使用的 X 射线的 180 个方向。我们首先计算了探测单元之间的距离，我们将附件 2 中的数值转换为了吸收率分布在 180 个方向的变化情况，将附件 2 的 512 行 180 列数据看做一个矩阵，进行灰度表示。因为圆的形状的特殊性，在整个发射-接收系统绕固定的旋转中心逆时针旋转的时候，圆型物体能影响的探测器单元个数的数目是一样的，我们通过探测器单元的个数以及已知的圆形模板的几何信息，可以确定探测器单元之间的间距。

为了求得 CT 旋转系统旋转中心在正方形托盘中的位置，我们首先证明了 X 射线沿着椭圆模板短轴入射时，得到影像长度是最长的。

证明过程：

我们先证明平行直线沿椭圆短轴方向时，投影的长度最长。

以椭圆中心为坐标原点，短轴方向为 x 轴，长轴方向为 y 轴建立平面直角坐标系，则椭圆方程为：

$$\frac{x^2}{15^2} + \frac{y^2}{40^2} = 1 \quad (1)$$

设一族平行直线的方程为：

$$y = kx + b \quad (2)$$

(1) (2) 联立, 得:

$$40^2 x^2 + 15^2 (k^2 x^2 + 2kbx + b^2) = 15^2 \cdot 40^2 \quad (3)$$

即:

$$(64 + 9k^2)x^2 + 18kbx + 9(b^2 - 1600) = 0$$

$$\Delta = 18^2 k^2 b^2 - 36(64 + 9k^2)(b^2 - 1600)$$

$$= 36 \times 64(225k^2 - b^2 + 1600) \geq 0$$

$$b^2 \leq 225k^2 + 1600$$

$$\Delta = 0 \text{ 时, } b = \pm \sqrt{225k^2 + 1600}$$

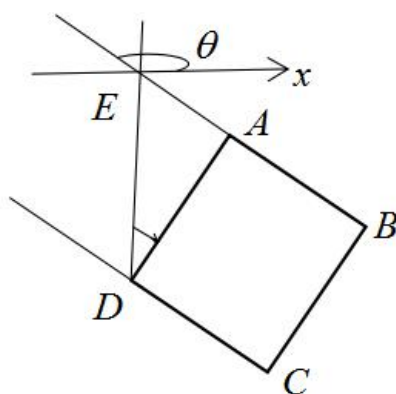


图 3

直线AB和直线CD互相平行, 设其倾斜角为 θ , 斜率为 k , 则 $\tan \theta = k$

设两直线在直角坐标系下的方程分别为 $y = kx + b_1$, $y = kx + b_2$

则线段AD的长度为 $DE \cdot \angle ADE = |b_1 - b_2| \cos(\pi - \theta) = \frac{|b_1 - b_2|}{\sqrt{k^2 - 1}}$

当斜率为 k 的一族平行直线则投影的长度 $d_{\text{投影}} = \frac{2\sqrt{225k^2 + 1600}}{\sqrt{k^2 + 1}} = 2\sqrt{225 + \frac{1375}{k^2 + 1}}$

当 $k = 0$ 时, $d_{\text{投影}}$ 最大, 为80。

表明沿着椭圆短轴方向平行照射的x射线可以得到最长的投影, 此方向即为在矩阵中椭圆对应的投影部分非零元素最多的列。

接下来我们确定CT系统旋转中心在正方形托盘中的位置。

设该旋转中心为 H_2 , 以 H_2 为坐标原点建立平面直角坐标系, 设小圆的圆心为 $C(x_0, y_0)$,

记以 H_2 为圆心 r 为半径的圆为 $\odot H_2$, 假设探测板长度为 L_0 且始终与该圆相切, 切点为定点P, 设 $PA/AB = \lambda$ 。

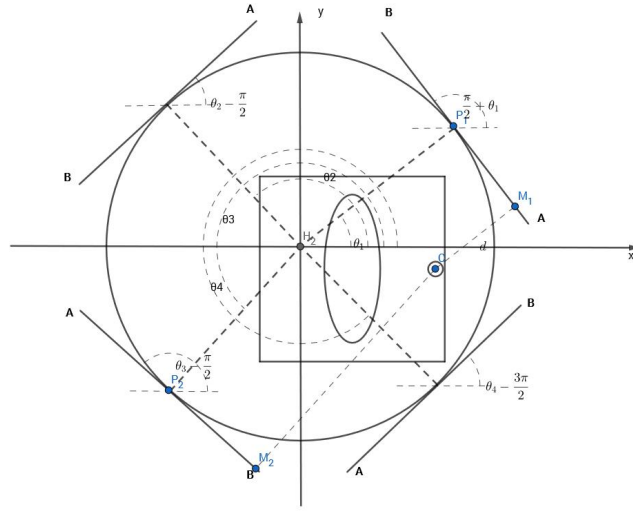


图 4

设切点 $P(r \cos \theta, r \sin \theta)$ 。

接收板倾斜角

$$\varphi = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + \theta, 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \\ \theta - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \leq \theta < \frac{3\pi}{2} \\ \theta - \frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \leq \theta < 2\pi \end{cases} \quad (4)$$

接收板 l 参数方程

$$\begin{cases} x = r \cos \theta + t \cos \varphi \\ y = r \sin \theta + t \sin \varphi \end{cases} \quad (5)$$

$0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ 时,

$$\begin{cases} x = r \cos \theta - t \sin \theta \\ y = r \sin \theta + t \cos \theta \end{cases}, \quad -\lambda l_0 \leq t \leq (1-\lambda)l_0$$

其中, 当 $t = -\lambda l_0$ 时, 代表 A 点; 当 $t = (1-\lambda)l_0$ 时, 代表 B 点

$\frac{\pi}{2} \leq \theta < \frac{3\pi}{2}$ 时,

$$\begin{cases} x = r \cos \theta + t \sin \theta \\ y = r \sin \theta - t \cos \theta \end{cases}, \quad -\lambda l_0 \leq t \leq (1-\lambda)l_0$$

其中, 当 $t = -\lambda l_0$ 时, 代表B点; 当 $t = (1-\lambda)l_0$ 时, 代表A点

$$\frac{3\pi}{2} \leq \theta < 2\pi \text{ 时,}$$

$$\begin{cases} x = r \cos \theta - t \sin \theta \\ y = r \sin \theta + t \cos \theta \end{cases} \quad -\lambda l_0 \leq t \leq (1-\lambda)l_0$$

其中, 当 $t = -\lambda l_0$ 时, 代表A点; 当 $t = (1-\lambda)l_0$ 时, 代表B点

化简得

$$P(r \cos \theta, r \sin \theta), \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta < \frac{3\pi}{2}$$

$$\varphi = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + \theta, & -\frac{\pi}{2} \leq \theta < \frac{\pi}{2} \\ \theta - \frac{\pi}{2}, & \frac{\pi}{2} \leq \theta < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta < \frac{\pi}{2} \text{ 时,}$$

$$\begin{cases} x = r \cos \theta - t \sin \theta \\ y = r \sin \theta + t \cos \theta \end{cases}, \quad -\lambda l_0 \leq t \leq (1-\lambda)l_0$$

其中, 当 $t = -\lambda l_0$ 时, 代表A点; 当 $t = (1-\lambda)l_0$ 时, 代表B点

$$\frac{\pi}{2} \leq \theta < \frac{3\pi}{2} \text{ 时,}$$

$$\begin{cases} x = r \cos \theta + t \sin \theta \\ y = r \sin \theta - t \cos \theta \end{cases}, \quad -\lambda l_0 \leq t \leq (1-\lambda)l_0$$

其中, 当 $t = -\lambda l_0$ 时, 代表B点; 当 $t = (1-\lambda)l_0$ 时, 代表A点

过小圆的圆心C作线段AB的垂线, 垂足为M

直线MC:

$$y - y_0 = \tan \theta (x - x_0) \quad (6)$$

联立(5)(6), 得:

$$t = \frac{\tan \theta x_0 - y_0}{\cos \varphi \tan \theta - \sin \varphi} = \frac{|\sin \theta x_0 - \cos \theta y_0|}{\sin(\theta - \varphi)}$$

所以，

$$MP = |t| = \frac{|\sin \theta x_0 - \cos \theta y_0|}{|\sin(\pm \frac{\pi}{2})|} = |\sin \theta x_0 - \cos \theta y_0|$$

$$MA = \begin{cases} PA - MP = -|x_0 \sin \theta - \cos \theta y_0| + \lambda l_0, 0 \leq \theta < \pi \\ PA + MP = |x_0 \sin \theta - \cos \theta y_0| + \lambda l_0, \pi \leq \theta < 2\pi \end{cases}$$

我们通过分析附件 2 的数据，得到了相应的图形距探测器 A 端的距离，记为 s_1 ，通过观察，我们假设了转过 180 个方向之后，恰好是转过了 180 度，我们做出了附件 2 对应的灰度图，经观察，我们假设小球对应的图形是一段正弦曲线，并且由假设 1，我们将附近 2 的数据进行每列翻转后形成的新的矩阵 A_2 与原 512X180 的矩阵 A_1 进行合并成为新的矩阵 $A_3=\{A_1 A_2\}$ ，将 A_3 矩阵表示成新的灰度图 Fig2，我们发现小圆的成像是连续的。

$\theta = \pi$ 时，

$$\lambda l_0 - |y_0| = \lambda l_0 + |y_0|,$$

所以，

$$y_0 = 0$$

$$MA = S = \lambda l_0 - |x_0| \sin \theta \quad (7)$$

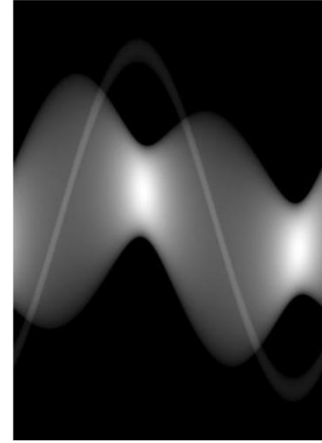


图 5

设图 5 中正弦曲线的最高点距图像底部的距离为 s_1 ，最低点距图像底部的距离为 s_2 ，由翻转操作的对称性，

$$s_1 + s_2 = L_0 \quad (8)$$

函数 $MA = S = \lambda l_0 - |x_0| \cdot \sin \theta$ 的最大值即为 s_1 ，最小值为 s_2 ，有

$$s_1 = \lambda l_0 + |x_0| \quad (9)$$

$$s_2 = \lambda l_0 - |x_0| \quad (10)$$

(9) (10) 相加，得 $s_1 + s_2 = 2\lambda l_0$ ，又因式 (8)，所以 $\lambda = \frac{1}{2}$

(9) (10) 相减，得

$$|x_0| = \frac{S_1 - S_2}{2} \quad (11)$$

在矩阵 A_3 中，找到正弦曲线的最高点所在的列数，求出该列中非零元素的中点所在的行数。矩阵 A_3 中正弦曲线最低点所在列的非零元素的中点到底边的行数 $n_2=59$ ，则

$$S_2 = n_2 \cdot \Delta l$$

$$S_1 = l_0 - S_2 = 511 \cdot \Delta l - n_2 \cdot \Delta l$$

由 (11)，

$$|x_0| = 197 \cdot \Delta l = 197 \cdot 0.2892 = 56.9724$$

又因小圆圆心 $C(x_0, y_0)$ 距正方形板中心的距离为 45mm，由几何关系易得旋转中心的位置位于正方形板中心左侧 11.9724mm 处。

由 (7) 式，得

$$\sin \theta = \frac{l_0}{2|x_0|} - \frac{S}{|x_0|} = \frac{l_0}{2|x_0|} - \frac{n \cdot \Delta l}{|x_0|} = \frac{511}{2 \times 197} - \frac{n}{197} = \frac{511 - 2n}{394}$$

其中， n 为矩阵 A_3 中正弦曲线每一列的中点到底边的行数。

经过计算， θ 的值如下：

列号	θ	列号	θ	列号	θ	列号	θ	列号	θ
1	-54.5598	37	-18.3582	73	17.8434	109	54.045	145	90.2466
2	-53.5542	38	-17.3526	74	18.849	110	55.0506	146	91.2522
3	-52.5486	39	-16.347	75	19.8546	111	56.0562	147	92.2578
4	-51.543	40	-15.3414	76	20.8602	112	57.0618	148	93.2634
5	-50.5374	41	-14.3358	77	21.8658	113	58.0674	149	94.269
6	-49.5318	42	-13.3302	78	22.8714	114	59.073	150	95.2746
7	-48.5262	43	-12.3246	79	23.877	115	60.0786	151	96.2802
8	-47.5206	44	-11.319	80	24.8826	116	61.0842	152	97.2858
9	-46.515	45	-10.3134	81	25.8882	117	62.0898	153	98.2914
10	-45.5094	46	-9.3078	82	26.8938	118	63.0954	154	99.297
11	-44.5038	47	-8.3022	83	27.8994	119	64.101	155	100.3026
12	-43.4982	48	-7.2966	84	28.905	120	65.1066	156	101.3082
13	-42.4926	49	-6.291	85	29.9106	121	66.1122	157	102.3138
14	-41.487	50	-5.2854	86	30.9162	122	67.1178	158	103.3194
15	-40.4814	51	-4.2798	87	31.9218	123	68.1234	159	104.325
16	-39.4758	52	-3.2742	88	32.9274	124	69.129	160	105.3306
17	-38.4702	53	-2.2686	89	33.933	125	70.1346	161	106.3362
18	-37.4646	54	-1.263	90	34.9386	126	71.1402	162	107.3418
19	-36.459	55	-0.2574	91	35.9442	127	72.1458	163	108.3474
20	-35.4534	56	0.7482	92	36.9498	128	73.1514	164	109.353
21	-34.4478	57	1.7538	93	37.9554	129	74.157	165	110.3586
22	-33.4422	58	2.7594	94	38.961	130	75.1626	166	111.3642
23	-32.4366	59	3.765	95	39.9666	131	76.1682	167	112.3698

24	-31.431	60	4.7706	96	40.9722	132	77.1738	168	113.3754
25	-30.4254	61	5.7762	97	41.9778	133	78.1794	169	114.381
26	-29.4198	62	6.7818	98	42.9834	134	79.185	170	115.3866
27	-28.4142	63	7.7874	99	43.989	135	80.1906	171	116.3922
28	-27.4086	64	8.793	100	44.9946	136	81.1962	172	117.3978
29	-26.403	65	9.7986	101	46.0002	137	82.2018	173	118.4034
30	-25.3974	66	10.8042	102	47.0058	138	83.2074	174	119.409
31	-24.3918	67	11.8098	103	48.0114	139	84.213	175	120.4146
32	-23.3862	68	12.8154	104	49.017	140	85.2186	176	121.4202
33	-22.3806	69	13.821	105	50.0226	141	86.2242	177	122.4258
34	-21.375	70	14.8266	106	51.0282	142	87.2298	178	123.4314
35	-20.3694	71	15.8322	107	52.0338	143	88.2354	179	124.437
36	-19.3638	72	16.8378	108	53.0394	144	89.241	180	125.4426

表 2 180 个方向

实际标定过程中，探测器旋转的角度是一个连续值，不会出现停滞点，为消除水平折线的影响，需要使用直线对折线图 6 进行拟合，拟合的结果如下：

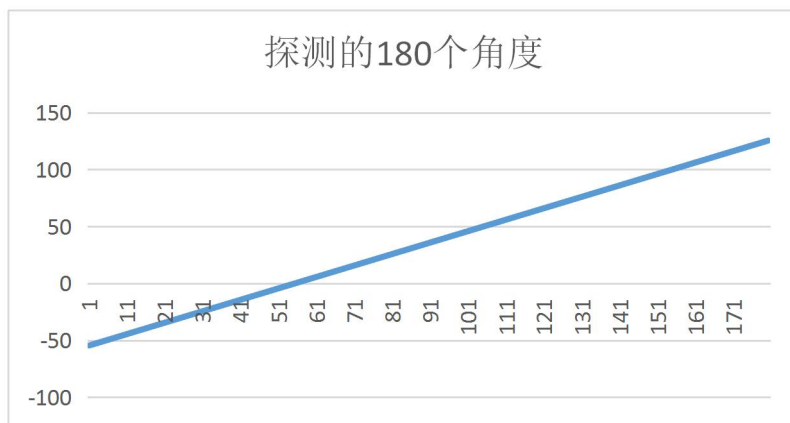


图 6

初始角度为-60.3500°，终止角度为 118.6500°，公差是 1.0056°。

5.2 第二题：测定未知介质 W1 的相关信息

5.2.1 对问题二的分析与求解

问题二利用标定后的 CT 系统的数据求未知介质的接收信息，需要确定该未知介质在正方形托盘中的位置、几何形状和吸收率等信息。我们首先利用 MATLAB 的内置函数 `iradon` 对附件二中的矩阵 A_2 做逆 `radon` 变换，得到一个 512×512 的矩阵 B_2 ，做出矩阵 B_2 的灰度图，并与根据附件一中的矩阵 A_1 所做的灰度图比较，由于 `iradon` 函数默认旋转中心与几何中心重合，但我们实际中旋转中心与几何中心有所偏移，因此我们得到的矩阵 B_2 及其对应的灰度图也有所偏移，根据与矩阵 A_0 及其灰度图的对比，以及图像的物理尺度与矩阵大小线性

对应的关系，我们计算出矩阵 B_2 中（99,101）到（458,460）这一子矩阵的灰度图可作为 A_0 的灰度图的近似，记该子矩阵为 D_0 。利用这一思想，可以重建附件三的线性衰减系数分布矩阵。

线性衰减系数

某一均匀物质对于能量为 E 的 X 射线的线性衰减系数，是指通过单位厚度的该物质后，一定数量的 X 射线的光子与物质发生相互作用（光电效应，康普顿效应，电子对效应等）的总概率，用符号 $\mu(E)$ 表示，它通常随 E 变化。

设 $I(l)$ 表示穿过厚度为 l 的物质后未发生相互作用的光子数，由 $\mu(E)$ 的定义，有：

$$\mu(E) = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \left[\frac{I(l) - I(l + \Delta l)}{I(l) \Delta l} \right] = - \frac{I'(l)}{I(l)}$$

求解得：

$$I(l) = I_0 e^{-\mu(E)l} \quad (12)$$

其中 $I_0 = I(0)$ ，（12）式即 Beer-Lambert 定律。

在理想假设(1)(2)(3)下，如果被检测物体是非均匀的，就以 $\mu(x)$ 表示被测物体在 x 点处对射线的线性衰减系数，由 Beer-Lambert 定律和积分理论，可得：

$$I(L) = I_0 e^{-\int_L \mu(x) dl} \quad (13)$$

L 表示射线穿过物体的长度， dl 为线积分微元。

上式整理后得：

$$p(x) \stackrel{def}{=} -\ln \frac{I(L)}{I_0} = \int_L \mu(x) dl$$

CT 反演问题

通过 X 射线探测器探测 I_0 ，和一系列直线上的 $I(L)$ ，进而由它们重建线性衰减系数 μ 在物体内部的分布。简单来说，就是通过一系列 $I(L)$ 重建 $\mu(x)$ 的值或近似值。

FBP 反演公式

我们采用 CT 图像重建中最为常用的滤波反投影法（filtered back projection, FBP）

$$\mu(x) = \int_0^\pi \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{p}(\omega, \varphi) |\omega| W(\omega) e^{i2\pi\omega x} d\omega \right] d\varphi,$$

其中， $\tilde{p}(\omega, \varphi)$ 是 $p(r, \varphi)$ 关于变量 r 的 Fourier 变换，即

$$\tilde{p}(\omega, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(r, \varphi) e^{-i2\pi\omega r} dr,$$

其中， $W(\omega)$ 是窗函数。

我们对附件 3 中的矩阵 A_4 做了逆拉登变换，使用的是 Matlab 中内置函数 `iradon()` 得到新矩阵 B_4 ，做出矩阵 B_4 的灰度图后发现是一块类似于多孔物质的断层成像，但是我们无法确定直接进行逆变换之后的矩阵即为我们需要的矩阵。因为我们将已知的模板的相关信息（附件 1 和附件 2）利用起来，我们对附件 2 中的矩阵 A_2 进行相同参数的逆拉登变换后，得到的矩阵 B_2 ，经过灰度图显示，我们发现与附件 1 的灰度图显示在直观上形状上是一致的，只是矩阵的元素大小以及灰度的整体分布产生了一些移位和偏差。

对于这个问题出现的原因我们也进行了初步探究，我们推测：当矩阵中心不是探测器的旋转中心的时候，直接进行拉登逆变换是会出现我们上述的问题的，为了验证我们的推测，我们将附件 1 中的矩阵 A_1 进行矩阵变换，将旋转中心固定在矩阵的中心，得到矩阵 N_1 ，发现根据 N_1 矩阵做出的灰度图像与附件 2 的矩阵 A_2 具有极高的相似度，由此验证了我们对拉登逆变换的一些推测。

因此我们推测，我们对矩阵 A_4 进行的逆拉登变换确实可以有效的还原出未知介质 W_1 的物理结构，但是我们无法直接获取准确的物质的吸收率以及物体相对于正方形托盘的位置，因此我们将无法求解问题 2 中特定的 10 个位置的吸收率。

但是通过已知模板 W 介质的接收信息矩阵 A_2 的逆变换 B_2 和给定的 W 的吸收率矩阵 A_1 进行对比，我们发现考虑噪声的影响， B_2 与 A_1 在灰度图的成像位置上呈现了一种偏移以及在矩阵元素大小上的倍数关系，因此我们猜测真实的介质吸收率及位置信息矩阵 R_4 和 B_4 之间的关系可由 A_1 和 B_2 之间的对应关系推广得。

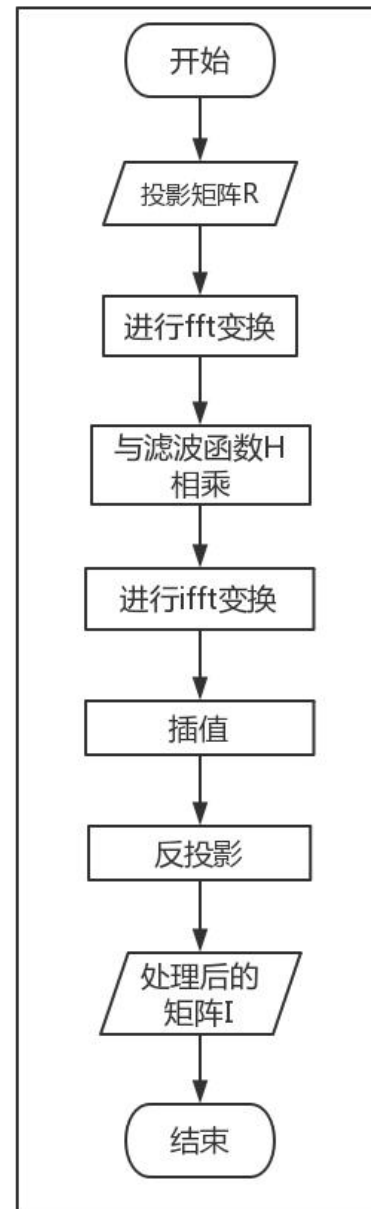


图 7

5.2.2 拉登变换以及拉登逆变换

函数 $R = \text{radon}(I, \theta, N)$

该函数的返回值 R ，是 I 在 θ 和 N 的条件下做拉登变换以后的结果矩阵， R 的大小是 $N \times \text{size}(\theta)$ 。

其中，

I 是一个二维矩阵，他存储的是物体的吸收率的强度；

θ 可以是一个向量，可以是一个标量，我们使用时是将计算得到的 180 个角度的向量传入；

N 是投影点的个数，也就是接收器的个数。

函数 $I = \text{iradon}(R, \theta, \text{interp}, \text{filter}, \text{frequency_scaling}, \text{output_size})$

该函数的返回值 I ，是 R 在后面 5 个参数的作用下做逆拉登变换的结果， R 的大小和 output_size 有关。

其中，

R 是一个二维矩阵，是一个物体做拉登变换以后的结果；

θ 的意义和 $\text{radon}()$ 变换中 θ 的意义及用法一致；

interp 是插值函数，我们使用线性插值函数；

filter 是滤波函数，我们使用的是 Ram-Lak 函数；

frequency_scaling 是一个标量值，可以通过设定这一参数来修改滤波函数；

output_size 是一个标量值，用来规定图像的大小。

5.2.3 获取矩阵 A_1 和 B_2 之间的对应关系

矩阵 B_2 是由矩阵 A_2 进行拉登逆变换得到的。

1、确定未知介质 W_1 与正方形托盘的相对位置。

我们将 B_2 (512×512) 中椭圆的长轴长 LL_1 以及椭圆中心 K_1 与 A_1 (256×256) 矩阵中的椭圆的长轴长 LL_2 以及椭圆中心 K_2 进行对比，可以确定 B_1 矩阵中对应正方形托盘的位置。

2、确定未知介质 W_1 的吸收率。

由我们的假设，知 B_2 矩阵的数值不是真实的吸收率，应和模板物质 W 进行统一，模板物质 W 的接受信息矩阵 A_2 进行逆变换之后得到的 B_2 矩阵与 A_2 矩阵之间的关系可以沿用到未知物质 W_1 的接受信息矩阵 A_4 与需求解的真实 B_4 矩阵之间。

A_1 矩阵中只有 0、1 元素， B_2 矩阵的元素除了 0 之外还有元素 $\delta \in (0.45, 0.49)$ ，由于量纲的一致性，我们认为元素 δ 与矩阵 A_1 中的吸收率是线性关系，经过噪声消除处理后我们通过计算 B_2 矩阵中非零元素的均值 $\bar{\delta}$ 来代表 δ 。然后用 $1/\bar{\delta}$ 乘以目前得到的拉登逆变换之后矩阵 B_4 中，真实矩阵代表的 $B_{4\text{真实}}$ ， $B_{4\text{真实}}$ 代表了未知物质 W_1 的吸收率信息。



图 8

由于问题二要求上传的介质吸收率是 256×256 的矩阵，因此我们还对 360×360 大小的 $B_{4\text{真实}}$ 矩阵进行了等比例缩小处理，得到了最终的矩阵 $B_{4\text{吸收率}}$ 。然后取出附件 4 中的 10 个点，求出了这 10 个点的吸收率。

序号	坐标	吸收率	序号	坐标	吸收率
1	(10.0000, 18.0000)	0.0000	6	(50.0000, 75.5000)	1.3416
2	(34.5000, 25.0000)	0.9995	7	(56.0000, 76.5000)	1.3151
3	(43.5000, 33.0000)	0.0000	8	(65.5000, 37.0000)	0.0000
4	(45.0000, 75.5000)	1.2202	9	(79.5000, 18.0000)	0.0000
5	(48.5000, 55.5000)	1.0794	10	(98.5000, 43.5000)	0.0000

表 3 附件 3 未知介质十个未知的吸收率信息

至此，我们解决了问题二的所有问题。

5.3 第三题：测定未知介质 W_2 的相关信息

5.3.1 对问题三的分析与求解

问题三是针对另一个未知物质 W_2 的类似于问题二的问题的求解。我们依旧按照问题二的求解思路求解问题三。

确定未知介质 W_2 的几何形状，只需对附件 5 的矩阵 A_5 进行逆拉登变换得到新矩阵 B_5 ，根据 B_5 画出的灰度图即为未知介质 W_2 的几何形状，具体的相对位置和吸收率信息还需按照问题二的阶梯思路进行精确定位和求解。

1、确定未知介质 W_2 与正方形托盘的相对位置。

依据问题二定位的位置信息，我们使用 512×512 矩阵中的[99:457,101:460]的子矩阵作为我们 $B_{5\text{真实}}$ ，根据 $B_{5\text{真实}}$ 矩阵画出的灰度图反映了未知介质与正方形托盘的相对位置信息。

同时，我们发现灰度图中的介质 w_2 位于正方形托盘的中央，并且覆盖了大部分的托盘，这在一定程度上说明我们根据已知模板 w 进行对应定位的假设是合理的，并且取得了好的效果。

2、确定未知介质 w_2 的吸收率。

将 $B_{5\text{真实}}$ 等比例缩小后得到 $256*256$ 的矩阵 $B_{5\text{吸收率}}$ ，代表我们要求解的吸收率。

序号	坐标	吸收率	序号	坐标	吸收率
1	(10.0000, 18.0000)	0.0000	6	(50.0000, 75.5000)	2.9079
2	(34.5000, 25.0000)	2.8781	7	(56.0000, 76.5000)	6.3730
3	(43.5000, 33.0000)	7.0228	8	(65.5000, 37.0000)	0.0000
4	(45.0000, 75.5000)	0.0000	9	(79.5000, 18.0000)	7.9436
5	(48.5000, 55.5000)	0.3474	10	(98.5000, 43.5000)	0.0000

表 4 附件 5 未知介质十个未知的吸收率信息

至此我们完成了问题三的求解。

在求解问题三的过程中，我们发现，未知介质 w_2 的灰度图成像由噪音引起的图像阴影相较于未知介质 1 更加明显，我们采用了更加有效的滤波算法以及边缘检测算法进行噪声的消除。

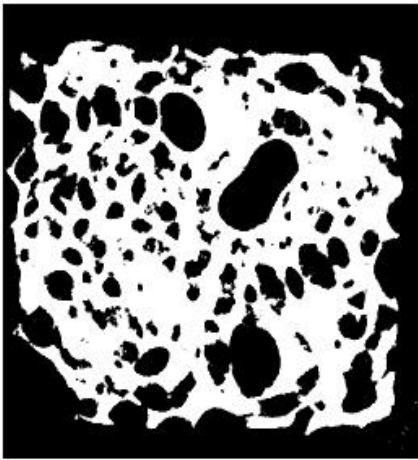


图 9

5.4 问题四：参数精度和稳定性的分析与新标定模板的确定

在第一题中我们求得了探测器单元之间的距离 Δl ,CT 系统旋转中心在正方形托盘中的位置以及 X 射线的 180 个方向。其中：

$$\Delta l = \frac{d_{\text{小圆}}}{n_{\text{小圆}}} \tag{14}$$

(15)

約 11

目次

图 1

 ΔI 的

长轴

新估

大和最小的两列，它们分别对应图中探测板转到 P_1, P_2 的位置，只需找到此时椭圆中心 Q 点到探测板的投影点 M_1, M_2 在矩阵中对应的位置，通过计算行数即可得知 M_1P_1 与 M_2P_2 的长度，即旋转中心 O 偏移几何中心 Q 的水平与竖直距离，由此即可得出旋转中心相对于正方形托盘的位置。

参考文献

- 【1】郭立倩. CT 系统标定与有限角度 CT 重建方法的研究[D]. 大连理工大学, 2016.
- 【2】胡战利, 郑海荣, 桂建保,等. Ct 系统中几何参数的标定方法、装置及标定体模:, CN 101750021 A[P]. 2010.
- 【3】王召巴. 旋转中心偏移对 CT 重建图像质量的影响[J]. 兵工学报, 2001, 22(3):323-326.
- 【4】沈操, 牛滨华, 余钦范. Radon 变换的 MATLAB 实现[J]. 物探化探计算技术, 2000, 22(4):346-350.
- 【5】寻洋洋, 范助文, 张卫东,等. 滤波逆投影法在 CT 图像重建中的研究与实现[J]. 2009.

附录

Matlab 程序源代码

1. 将附件 1, 附件 2, 附件 3 和附件 5 分别以灰度图的形式输出

```
J = mat2gray(fujian1);  
imshow(J)  
J = mat2gray(fujian2);  
imshow(J)  
J = mat2gray(fujian3);  
imshow(J)  
J = mat2gray(fujian5);  
imshow(J)
```

2. 统计附件 2 中每一列不为 0 的元素的个数, 并找出非零元素个数最少的一列

```
countNum = ones(1,180);  
for i = 1:180  
    num = 0;  
    for j = 1 : 512  
        if (fujian2(j,i)~= 0)  
            num = num + 1;  
        end  
    end  
    countNum(i) = num;  
end  
  
maxNum = countNum(1);  
for i = 1 :180  
    if(countNum < maxNum)  
        maxIndex = i;  
    end  
end
```

3. 将附件 2 上下翻转, 然后和附件 2 合并, 显示灰度图像

```
Wanzheng = zeros(512,360);  
f5 = zeros(512,180);  
for i = 1 :180  
    for j = 1 : 512  
        f5(j,i) = fujian5(513-j,i);
```

```

end
end
for i = 1 : 180
for j = 1 : 512
wanzheng(j,i) = fujian5(j,i);
end
end
for i = 181 : 360
for j = 1 : 512
wanzheng(j,i) = f5(j, i-180);
end
end
J = mat2gray(wanzheng);
imshow(J)

```

4. 找到拉登逆变换函数，将附件 2，附件 3 和附件 5 分别做拉登逆变换并显示（角度不正确）

```

j = iradon(fujian2,1:180);
imshow(j)
j = iradon(fujian3, 1: 180);
imshow(j)
j = iradon(fujian2,1:180,'linear','none');
imshow(j)
j = iradon(fujian5, 1: 180);
imshow(j)

```

5. 设定阈值，对图像进行处理

```

J = iradon(fujian2, 1 : 180);
imshow(J)
for i = 1 : 362
for j = 1 : 362
if J(i,j) < 0.1
J(i,j) = 0;
end
end
end
imshow(J)

```

6. 调整拉登逆变换的角度参数和输出大小参数，对附件 2 进行处理，设置阈值处理得到的图像

```

ifujian2 = iradon(fujian2, 13, 'linear', 'Ram-Lak', 1, 512);
imshow(ifujian2)

```

```

ifujian2to0 = zeros(512, 512);
for i = 1 : 512
for j = 1 : 512
if (ifujian2(j, i) < 0.07)
ifujian2to0(j, i) = 0;
else
ifujian2to0(j, i) = ifujian2(j, i);
end
end
end
imshow(ifujian2to0)

```

7. 调整拉登逆变换的角度参数和输出大小参数，对附件 3 进行处理，设置阈值处理得到的图像

```

ifujian3 = iradon(fujian3, 14, 'linear', 'Ram-Lak', 1, 512);
imshow(ifujian3)
for i = 1 : 512
for j = 1 : 512
if (ifujian3(j, i) < 0.07)
ifujian3to0(j, i) = 0;
else
ifujian3to0(j, i) = ifujian2(j, i);
end
end
end
End

```

8. 调整拉登逆变换的角度参数和输出大小参数，对附件 5 进行处理，设置阈值处理得到的图像

```

ifujian5 = iradon(fujian5, 14, 'linear', 'Ram-Lak', 1, 512);
imshow(ifujian5)
for i = 1 : 512
for j = 1 : 512
if (ifujian5(j, i) < 0.25)
ifujian5to0(j, i) = 0;
else
ifujian5to0(j, i) = ifujian5(j, i);
end
end
end
end

```

9. 计算附件 2 的吸收率的相对值

```
miusum = 0;
count = 0;
for i = 1 : 360
for j = 1 : 360
if(ifujian2to01(i,j) > 0)
count = count + 1;
miusum = miusum + ifujian2to01(i,j);
end
end
end
miusum/count
```