

基于迭代算法与递推方程的系泊系统优化设计模型

摘要

目前系泊系统在海洋领域发挥的作用日益显著，本文研究了与此相关的系泊系统的设计问题。我们采用数值解法，利用理论力学知识建立递推方程，采用反复迭代法与逐步逼近法以及加权评分模型成功得到了优化设计方案。并可以根据不同需要调节指标权重得到相应的优化设计方案。

针对问题一，首先运用理论力学知识，依次以浮标、钢管、钢桶以及锚链的每节链节为研究对象，列出力平衡和力矩平衡方程，得到递推方程模型。接着我们采用数值解法进行求解。先确定吃水深度 h 的初始值，接着借助计算机编程，根据递推方程模型，得到每段钢管、钢桶以及锚链链节的倾角，再以水深为 18m 作为边界条件来检验 h 值。然后将 h 值按微小步长增加，采用迭代算法，逐步逼近边界条件，即可得到吃水深度及相应参数值。例如风速为 12m/s 时，浮标吃水深度为 0.7348m，游动区域为半径 14.3129m 的圆，钢管与钢桶倾角由上至下分别为 0.9775° 、 0.9833° 、 0.9891° 、 0.9950° 、 1.0084° 。最后以锚为原点建立坐标系，计算锚链每节链节的端点坐标，进而画出锚链形状的图像。当风速为 12m/s 时，锚链第 1-67 节浮在水中，其余沉在海床；风速为 24m/s 时，锚链几乎都悬浮在水中，且锚链末端与海床夹角为 0° 。

针对问题二，风速为 36m/s 时，用模型一计算得到结果，发现钢桶倾角为 8.0719° ，锚链末端与海床夹角为 17.9726° ，均大于许可值。然后对模型一进行修正得到模型二，即增加重物球质量作为变量，使其取值按一定步长增加，进行迭代计算得到：当重物球质量大于 1790kg 时，满足钢桶倾角小于 5° 和锚链末端与海床夹角小于 16° 这两个条件。

针对问题三，为使系泊系统能在任意条件下正常工作，我们在风速与水速最大且两者同向、水深为最大值和最小值的极端条件下设计系泊系统。相对于模型二又增加了锚链型号和长度两个变量。我们选取任意型号的锚链及一系列重物球质量，以锚链末端与海床夹角不超过 16° ，钢桶倾角不超过 5° 为约束条件，使锚链长度尽可能小，然后利用模型一计算得到所有的可行方案。接着我们建立加权评分模型来选择评分最高的最优设计方案。各评价指标的权重可以根据需要进行调节进而得到所需要的设计方案。

当对浮标吃水深度、游动区域及钢桶的倾斜角度三个指标各分配 $1/3$ 的权重时，得到系泊系统的设计方案为：型号 V、长度为 19.98 米的锚链，悬挂 4100kg 的重物球。然后对该设计方案在不同水深的情况下进行了参数计算。

最后，我们对所建立模型和算法的优缺点给出客观的评价，并指出了模型的推广应用。

关键词：系泊系统 递推方程 反复迭代 逐步逼近 加权评分模型

一、问题重述

1.1 问题背景

随着科技的进步，人类对海洋的开发利用进入了快速发展的阶段。例如海洋平台、船舶、水下探测器、海底观测站，任何形式的海洋开发利用都离不开各种工程设备。然而这些设备无一例外地需要定位系统，才能保证长期在一定的区域内可靠稳定地工作。

系泊系统正是海洋观测、海洋养殖、海洋工程等领域最常用的定位方式之一，其不仅应用十分广泛，形式也多种多样。以锚定点多寡分类，可分成单点和多点系泊系统两大类；以系统的功能来分，则有中转系统、储油系统和浮式生产系统等等。

系泊系统由钢管、钢桶、重物球、电焊锚链和特制的抗拖移锚组成，这些系泊结构物在风、浪、流等环境条件的作用下可作不同运动，从而导致系泊缆链的张力发生变化。而系泊系统的设计问题就是确定锚链的型号、长度和重物球的质量，使得浮标的吃水深度和游动区域及钢桶的倾斜角度尽可能小。系泊系统的合理设计对于系统的安全、正常运行以及维护海洋的秩序具有重要意义。

1.2 要解决的问题

某近浅海观测网的传输节点由浮标系统、系泊系统和水声通讯系统组成（如图 1 所示）。某型传输节点的浮标系统可简化为底面直径 2m、高 2m 的圆柱体，浮标的质量为 1000kg。系泊系统包括钢管、钢桶、重物球、电焊锚链和特制的抗拖移锚。锚的质量为 600kg，锚链选用无档普通链环。钢管共 4 节，每节长度 1m，直径为 50mm，每节钢管的质量为 10kg。要求锚链末端与锚的链接处的切线方向与海床的夹角不超过 16 度，否则锚会被拖行，致使节点移位丢失。水声通讯系统安装在一个长 1m、外径 30cm 的密封圆柱形钢桶内，设备和钢桶总质量为 100kg。钢桶上接第 4 节钢管，下接电焊锚链。钢桶竖直时，水声通讯设备的工作效果最佳。若钢桶倾斜，则影响设备的工作效果。钢桶的倾斜角度（钢桶与竖直线的夹角）超过 5 度时，设备的工作效果较差。为了控制钢桶的倾斜角度，钢桶与电焊锚链链接处可悬挂重物球。

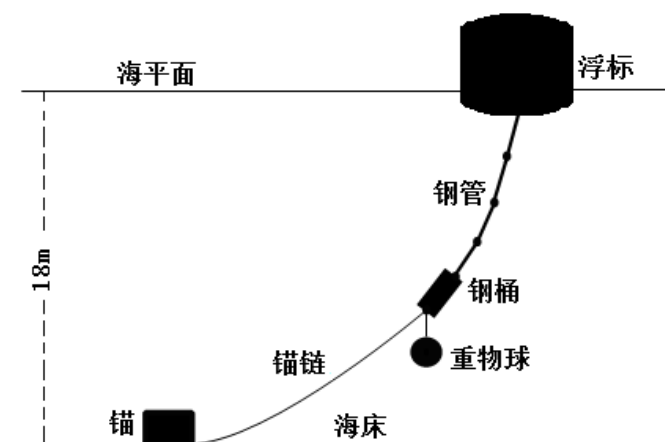


图 1 传输节点示意图（仅为结构模块示意图，未考虑尺寸比例）

为了设计更加完善的确定系泊系统各部分参数以满足实际需求的方法，本文

依次解决以下问题：

(1) 某型传输节点选用 II 型电焊锚链 22.05m，选用的重物球的质量为 1200kg。现将该型传输节点布放在水深 18m、海床平坦、海水密度为 $1.025 \times 10^3 \text{kg/m}^3$ 的海域。若海水静止，分别计算海面风速为 12m/s 和 24m/s 时钢桶和各节钢管的倾斜角度、锚链形状、浮标的吃水深度和游动区域。

(2) 在问题 1 的假设下，计算海面风速为 36m/s 时钢桶和各节钢管的倾斜角度、锚链形状和浮标的游动区域。调节重物球的质量，使得钢桶的倾斜角度不超过 5 度，锚链在锚点与海床的夹角不超过 16 度。

(3) 由于潮汐等因素的影响，布放海域的实测水深介于 16m~20m 之间。布放点的海水速度最大可达到 1.5m/s、风速最大可达到 36m/s。给出考虑风力、水流力和水深情况下的系泊系统设计，分析不同情况下钢桶、钢管的倾斜角度、锚链形状、浮标的吃水深度和游动区域。

二、问题分析

2.1 总体分析

在这个近浅海观测网的传输节点中，钢桶起着盛装水声通讯系统的作用，重物球具有使钢桶竖直倾角小以保证水声通信系统正常工作的作用。锚沉于海底，固定整个系统，锚链将锚与钢桶相连，为防止节点移位丢失，锚链不能将锚拖行。因此为了保证整个系统能够正常工作，浮标的吃水深度和游动区域及钢桶的倾斜角度应尽可能小，而锚链的型号、长度和重物球的质量影响着浮标的吃水深度和游动区域及钢桶的倾斜角度，于是对于系泊系统，确定锚链的型号、长度和重物球的重量就是关键，也是本文要解决的中心问题。

本文最终的目的就是通过建立模型找到一种系泊系统的设计方法。我们建模的思想是：通过对浮标系统和系泊系统的受力分析，得到各物体之间受力与几何位置的递推关系，然后将水深作为临界条件进行迭代计算，进而确定钢管的倾斜角度、锚链形状、浮标的吃水深度和游动区域等参量。在此基础模型上，依次加入其它变量，在多因素影响的情况下完成对系泊系统的设计。

2.2 问题一的分析

首先要解决的问题是建立浮标系统和系泊系统各部分的受力及位置关系，解决这一问题的关键是对系统进行受力分析。我们从浮标入手，根据平衡态列出其静力方程，然后依次对钢管、钢桶和锚链进行受力分析，得到相邻两段之间的受力递推关系。通过分析我们发现钢管和锚链各段可以采用相似的模型得到相似的迭代关系式，钢桶的受力也符合其相邻两段的迭代关系式，因此我们将整个系泊系统各物体所受力统一成一个迭代表达式，建立每一段倾角、受力及其夹角的关系。由于浮标在工作过程中浮力大小是未知的，我们计算出浮标自由漂浮在水面上时的吃水深度，并将其作为初始值，将水深作为临界条件，通过反复迭代计算，对初始值不断修正，直到满足临界条件并达到设定的精确度。通过迭代得到浮标的吃水深度，进而可以对浮标进行完整的受力分析，得到钢管、钢桶及锚链的倾角。为了刻画锚链形状，我们在海底建立直角坐标系，利用长度及角度信息得到各节链环的坐标，进而描绘出锚链的形状。同样在水平方向上利用长度和角度信息，可以得到浮标游动区域的半径和面积。

此模型简单易行，运算效率高，可以求解问题一中系泊系统的设计问题。其

中需要注意的是在迭代算法中要判断锚链是否在某一段已经沉于海底，然后再利用临界条件进行判断。

但是当近海风速过快时，由于浮标所受近海风荷载过大，在重物球质量固定情况下，会出现钢桶倾角及锚链与海底夹角过大，系统不能正常工作的情况。因此我们需要对该模型进行修正。

2.3 问题二的分析

为了使模型应用范围更广，我们对建立的模型进行一次修正。经分析知：出现角度不合理的原因主要是重物球质量不可调。表现在当风速过大时，重物球不足以拉动钢桶使其竖直倾角小于 5 度，也不足以调节锚链上端位置使下端与海底夹角小于 16 度。因此我们将重物球的质量设为参变量，这样在不同的风速下，在满足临界条件的情况下，通过改变重物球质量，得到对应的钢桶倾角和锚链海底夹角。由于夹角随重物球质量增加而单调递减，因此一定可以找到一个临界质量使夹角恰好满足正常工作要求，并根据质量角度关系的单调性得到重物球的质量范围。

经过修正后的模型在一定程度上解决了模型一只能适用于固定条件的局限性，可以适用于近海风力较大的场合，通过最优方案的选取使模型的应用范围更广。

但在实际近海海域内，风速会随时间变化，海床并不是完全平坦，布放海域的水深会在一定范围内变化。同时由于潮汐等自然因素的影响，海水会有沿不同方向的流动。为了能在多因素情况下完成对系泊系统的设计，我们需要对模型进行进一步修正。

2.4 问题三的分析

针对模型二的不足，我们对模型一进行二次修正，达到在考虑多因素的情况下进行系泊系统优化设计的目的。

我们考虑风力、水流力和水深情况变化情况下的系泊系统的设计，设计的目的是选用一定长度某一型号下的锚链和适当的重球质量来使吃水深度和游动区域及钢桶的倾斜角度尽可能小，并且锚不会被拖行。由于系泊系统要适应任何可能情况，所以应在最危险的极端情况下进行设计。对于每种型号，将重球质量按规定的重量系列标准进行选取，对于某一质量，取锚链长度为使得锚不会被拖行的最短链长，这样可以保证游动区域最小，进而求得这种情况下的浮标吃水深度和钢桶水平倾角。分别做出不同型号下浮标吃水深度和钢桶水平倾角相对于系列重球质量的对应表格，然后通过设计按一定权重同时评价吃水深度和钢桶水平倾角的评分系统，选择吃水深度和钢桶的倾斜角度都尽可能小的方案。

利用模型三，我们可以在不同环境下根据实际需要系泊系统各物体的规格进行标准化选取，大大提高了模型的可靠性，使模型可以应用在各种场合，同时评价体系的制定兼顾了客观工作需求和用户主观体验，使模型的实用性得到提升。

三、模型假设

- 1、由于进行静力分析，忽略波浪对系统载荷的影响
- 2、漂浮于自由表面的浮标，在漂移状态和平衡状态下均处于竖直状态，倾斜量可忽略不计。
- 3、不考虑由于此近海观测网地点变化而引起的重力加速度 g 的变化，本文中 g

取 9.8m/s^2 。

4、由于锚和重物球的密度很大，体积相比于整个系泊系统很小，因此浮力远小于其自身重力，可将锚和重物看成质点，忽略浮力的影响。

5、钢桶为完全密闭的，其排开水的体积为。

6、我们认为一段无档锚链的总长度为各个小链环长度的直接加和，忽略由于锚链环环相扣而造成的连接处长度的减少。

7、海风平行于海平面。

8、在考虑近海水流力的情况下，由于铁管倾斜角度很小，忽略由于铁管倾斜而造成的投影面积的变化，认为投影面积为铁管正投影面积。

四、符号说明

符号	含义
$m_{\text{浮标}}$	浮标的质量
$d_{\text{浮标}}$	浮标的底面直径
$h_{\text{浮标}}$	浮标的高
h	浮标在一定条件下的吃水深度
$F_{\text{浮标}}$	浮标在所受的浮力
$v_{\text{风}}$	风的速度
$F_{\text{风}}$	浮标所受的风力
$l_{\text{钢管}}$	每节钢管的长度
$m_{\text{钢管}}$	每节钢管的质量
$d_{\text{钢管}}$	每节钢管的直径
$F_{\text{浮管}}$	每节钢管所受的浮力
T_1	由海平面向下的第 1 节钢管与浮标间的相互作用力
T_i	由海平面向下的第 i ($i=2, 3, 4$) 节钢管与上一节钢管间的相互作用力
θ_i	T_i 与水平方向夹角
α_i	第 i ($i=2, 3, 4$) 节钢管与水平方向的夹角
$m_{\text{球}}$	重物球的质量
$m_{\text{钢桶}}$	钢桶的质量

$l_{\text{钢桶}}$	钢桶的长度
$d_{\text{钢桶}}$	钢桶的底面直径
T_5	钢桶与第 4 节钢管间相互作用力
θ_5	T_5 与水平方向夹角
α_5	钢桶与水平方向的夹角
T_i	由海平面向下的第 i ($i=2, 3, 4$) 节钢管与上一节钢管间的相互作用力

五、模型的建立与求解

5.1 模型一

5.1.1 模型的建立

浮标的受力分析

浮标系统可简化为一个底面直径 $d_{\text{浮标}}=2\text{m}$ ，高 $h_{\text{浮标}}=2\text{m}$ 的圆柱体，其体积为

$$V_{\text{浮标}} = \pi \left(\frac{d_{\text{浮标}}}{2} \right)^2 h_{\text{浮标}} \quad (1)$$

我们假设在漂移状态和平衡状态下浮标均处于竖直状态，其倾斜量可忽略不计。因此浮标受到一个竖直向上的浮力 $F_{\text{浮标}}$ 、向下的重力 $G_{\text{浮标}}$ 、近海风载荷 $F_{\text{风}}$ 以及钢管的拉力 T_1 ，如图 2 所示^[1]

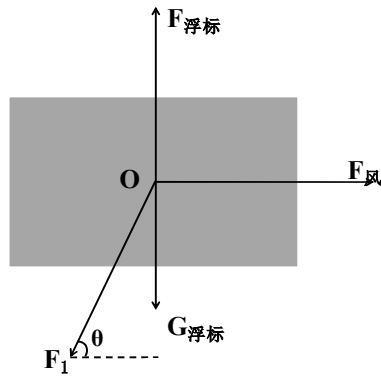


图 2 浮标受力分析图

浮标所受的浮力由其排开水的体积决定，根据公式 $F_{\text{浮}} = \rho_{\text{液}} g V_{\text{排}}$ ，浮标所受浮力为

$$F_{\text{浮标}} = \rho_{\text{水}} g V_{\text{浮标}} = \rho_{\text{水}} g \pi \left(\frac{d_{\text{浮标}}}{2} \right)^2 h_0 \quad (2)$$

其中 h_0 为浮标的吃水深度，在本问题中是一个未知量，也是要求解的量。

近海风荷载可通过近似公式 $F_{\text{风}} = 0.625 S v^2$ 计算，其中 v 为风速， S 为物体在风向法平面的投影面积，此题中 $S = (h_{\text{浮标}} - h_0) d_{\text{浮标}}$ 。

对上述力进行正交分解，列出静力学平衡方程：

$$\text{水平方向: } T_1 \cos \theta_1 = F_{\text{风}} \quad (3)$$

$$\text{竖直方向: } F_{\text{浮标}} = G_{\text{浮标}} + T_1 \sin \theta_1 \quad (4)$$

求解静力平衡方程 (3) (4)，可以得出浮标下端钢管拉力 T_1 和水平夹角 θ_1 的表达式：

$$\begin{cases} T_1 = \sqrt{F_{\text{风}}^2 + (F_{\text{浮标}} - G_{\text{浮标}})^2} \\ \theta_1 = \arctan\left(\frac{F_{\text{浮标}} - G_{\text{浮标}}}{F_{\text{风}}}\right) \end{cases} \quad (5)$$

钢管的受力分析

作为系泊系统的重要组成部分，钢管共 4 节，每节长度 $l_{\text{钢管}} = 1\text{m}$ ，直径为 $d_{\text{钢管}} = 0.05\text{m}$ ，每节钢管的质量为 $m_{\text{钢管}} = 10\text{kg}$ ，每节钢管的体积为

$$V_{\text{钢管}} = \pi \left(\frac{d_{\text{钢管}}}{2}\right)^2 l_{\text{钢管}} \quad (6)$$

对于第一段钢管，其受到竖直向上的浮力 $F_{\text{浮管}}$ ，竖直向下的重力 $G_{\text{钢管}}$ ，浮标对其拉力 T_1 ，与水平方向夹角为 θ_1 ，第二段钢管对其拉力 T_2 ，与水平方向夹角 θ_2 ，如图 3 所示。

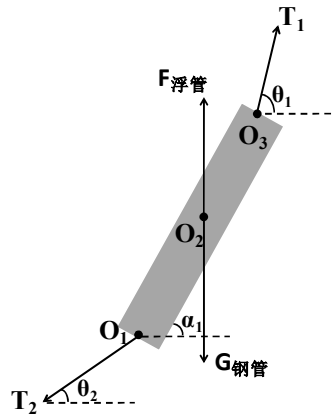


图 3 钢管受力分析图

根据公式 $F_{\text{浮}} = \rho_{\text{液}} g V_{\text{排}}$ ，钢管所受浮力为

$$F_{\text{浮管}} = \rho_{\text{水}} g V_{\text{钢管}} = \rho_{\text{水}} g \pi \left(\frac{d_{\text{钢管}}}{2} \right)^2 l_{\text{钢管}} \quad (7)$$

对上述力正交分解列出静力学平衡方程：

$$\text{水平方向： } T_1 \cos \theta_1 = T_2 \cos \theta_2 \quad (8)$$

$$\text{竖直方向： } T_1 \sin \theta_1 + F_{\text{浮管}} = T_2 \sin \theta_2 + G_{\text{钢管}} \quad (9)$$

以第一段钢管与第二段钢管的连接点 O_1 为支点，列力矩平衡方程：

$$T_1 \sin \theta_1 l_{\text{钢管}} \cos \alpha_1 = T_1 \cos \theta_1 l_{\text{钢管}} \sin \alpha_1 + \frac{1}{2} (G_{\text{钢管}} - F_{\text{浮管}}) l_{\text{钢管}} \cos \alpha_1 \quad (10)$$

对于二、三、四段钢管，按照和第一段钢管相同的分析方法，我们得到下列三个方程：

$$\text{力矩平衡： } T_i \sin \theta_i l_{\text{钢管}} \cos \alpha_i = T_i \cos \theta_i l_{\text{钢管}} \sin \alpha_i + \frac{1}{2} (G_{\text{钢管}} - F_{\text{浮管}}) l_{\text{钢管}} \cos \alpha_i \quad (11)$$

$$\text{水平方向： } T_i \cos \theta_i = T_{i+1} \cos \theta_{i+1} \quad (12)$$

$$\text{竖直方向： } T_i \sin \theta_i + F_{\text{浮管}} = T_{i+1} \sin \theta_{i+1} + G_{\text{钢管}} \quad (13)$$

其中 $i = 1, 2, 3, 4$

在已知 $G_{\text{钢管}}$ 、 $F_{\text{浮管}}$ 、 T_i 及 θ_i 的前提下，求解静力平衡方程 (12) (13)，得到

钢管下端拉力 T_{i+1} 和水平夹角 θ_{i+1} 的表达式

$$\begin{cases} T_{i+1} = \sqrt{(T_i \cos \theta_i)^2 + (T_i \sin \theta_i - G_{\text{钢管}} + F_{\text{浮管}})^2} \\ \theta_{i+1} = \arctan\left(\frac{T_i \sin \theta_i - G_{\text{钢管}} + F_{\text{浮管}}}{T_i \cos \theta_i}\right) \end{cases} \quad (14)$$

由上述公式推导可知，若给出钢管上端节点的拉力 T_i ，即可求出钢管下端节点的拉力 T_{i+1} ，中间各个接触点的相互作用力及姿态倾角依次用上述方法逐段计算。

由力矩平衡方程 (11) 可以得到 α_i 关于 T_i 和 θ_i 的表达式

$$\alpha_i = \arctan\left(\frac{T_i \sin \theta_i l_{\text{钢管}} - \frac{1}{2} (G_{\text{钢管}} - F_{\text{浮管}}) l_{\text{钢管}}}{T_i \cos \theta_i l_{\text{钢管}}}\right) \quad (15)$$

钢桶的受力分析

在本文中，我们假设钢桶是一个实心密封的圆柱形物体。其体积为

$$V_{\text{钢桶}} = \pi \left(\frac{d_{\text{钢桶}}}{2} \right)^2 l_{\text{钢桶}} \quad (16)$$

对于钢桶，其受到一个竖直向上的浮力 $F_{\text{浮桶}}$ ，竖直向下的重力 $G_{\text{钢桶}}$ ，重物球向下的拉力 $G_{\text{球}}$ （由于重物球的密度很大，体积相比于整个系泊系统很小，因此浮力远小于其自身重力，可将重物球看成质点，忽略浮力的影响，这样球对钢桶的拉力大小等于球的重力），第四段钢管对钢桶的拉力 T_5 ，与水平方向夹角为 θ_5 ，无档锚链的拉力 F_0 ，与水平方向夹角为 θ_0 ，如图 4 所示。

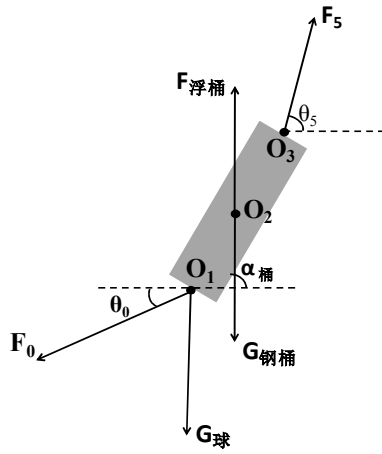


图 4 钢桶受力分析图

根据公式 $F_{\text{浮}} = \rho_{\text{液}} g V_{\text{排}}$ ，钢桶所受浮力为

$$F_{\text{浮桶}} = \rho_{\text{水}} g V_{\text{钢桶}} = \rho_{\text{水}} g \pi \left(\frac{d_{\text{钢桶}}}{2} \right)^2 l_{\text{钢桶}} \quad (17)$$

对上述力正交分解得到静力学平衡方程：

$$\text{水平方向：} F_0 \cos \theta_0 = T_5 \cos \theta_5 \quad (18)$$

$$\text{竖直方向：} T_5 \sin \theta_5 + F_{\text{浮桶}} = F_0 \sin \theta_0 + G_{\text{钢桶}} + G_{\text{球}} \quad (19)$$

以钢桶与重物球的连接点 O_1 为支点，列力矩平衡方程：

$$F_5 \sin \theta_5 l_{\text{钢桶}} \cos \alpha_{\text{桶}} = F_5 \cos \theta_5 l_{\text{钢桶}} \sin \alpha_{\text{桶}} + \frac{1}{2} (G_{\text{钢桶}} - F_{\text{浮桶}}) l_{\text{钢桶}} \cos \alpha_{\text{桶}} \quad (20)$$

在已知 T_5 、 θ_5 、 $G_{\text{钢桶}}$ 、 $G_{\text{球}}$ 、 $F_{\text{浮桶}}$ 的前提下，求解静力学方程 (18) (19)，

得到无档锚链的拉力 F_0 和水平夹角 θ_0 的表达式：

$$\begin{cases} F_0 = \sqrt{(T_5 \cos \theta_5)^2 + [T_5 \sin \theta_5 - (G_{\text{钢桶}} + G_{\text{球}} - F_{\text{浮桶}})]^2} \\ \theta_0 = \arctan\left(\frac{T_5 \sin \theta_5 - (G_{\text{钢桶}} + G_{\text{球}} - F_{\text{浮桶}})}{T_5 \cos \theta_5}\right) \end{cases} \quad (21)$$

无档锚链的受力分析

第 j 节链环受到一个竖直向下的重力 G_0 ，前一段链环的拉力 F_{j-1} 和后一段链环的拉力 F_j 。由于锚链的体积较小，密度很大，因此浮力远小于其自身重力，此处忽略浮力的影响，如图 5 所示。

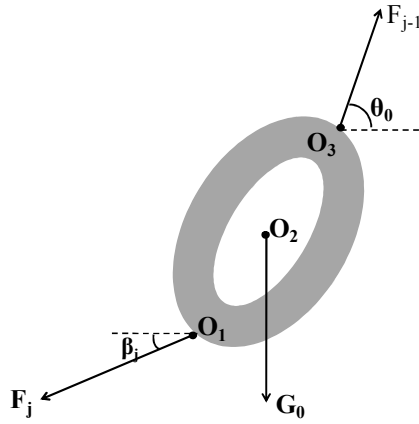


图 5 锚链受力分析图

锚链处于平衡状态时，对各力正交分解列出静力学平衡方程：

$$\text{水平方向: } F_{j-1} \cos \theta_{j-1} = F_j \cos \theta_j \quad (22)$$

$$\text{竖直方向: } F_{j-1} \sin \theta_{j-1} = F_j \sin \theta_j + G_0 \quad (23)$$

以每一微元段锚链的最下端点为支点列力矩平衡方程：

$$G_0 \left(\frac{l_0}{2}\right) \cos \beta_j + F_{j-1} \cos \theta_{j-1} l_0 \sin \beta_j = F_{j-1} \sin \theta_{j-1} l_0 \cos \beta_j \quad (24)$$

其中 $j=1,2,3,\dots,n$ ， n 为无档锚链的单位链环数。

求解静力学方程 (22) (23)，得到一个锚链下端节点拉力 F_j 和水平夹角 θ_j 的表达式：

$$\begin{cases} F_j = \sqrt{(F_{j-1} \cos \theta_{j-1})^2 + (F_{j-1} \sin \theta_{j-1})^2} \\ \tan \theta_j = \frac{F_{j-1} \sin \theta_{j-1} - G_0}{F_{j-1} \cos \theta_{j-1}} \end{cases} \quad (25)$$

通过力矩平衡方程 (24) 是我们得到 β_j 关于 F_j 和 θ_j 的表达式

$$\beta_i = \arctan\left(\frac{F_{j-1} \sin \theta_{j-1} l_0 - G_0 l_0 / 2}{F_{j-1} \cos \theta_{j-1} l_0}\right) \quad (26)$$

利用与钢管相同的求解思路，根据每节链环上端的拉力 F_{j-1} ，即可求出下端的拉力 F_j ，中间各个接触点的相互作用力和姿态倾角依次用上述方法逐步求解。

通过受力和推导，我们发现对钢管和锚链可以采用相同的迭代方式进行求解。为了使算法更加清晰，我们将上式与（15）合并，得到钢管与锚链水平倾角的表达式

$$\begin{cases} \alpha_i = \arctan\left(\frac{T_i \sin \theta_i l_{\text{钢管}} - \frac{1}{2}(G_{\text{钢管}} - F_{\text{浮管}})l_{\text{钢管}}}{T_i \cos \theta_i l_{\text{钢管}}}\right) & i = 1, 2, 3, 4, 5 \\ \alpha_i = \arctan\left(\frac{F_{j-1} \sin \theta_{j-1} l_0 - G_0 l_0 / 2}{F_{j-1} \cos \theta_{j-1} l_0}\right) & i = 6, 7, 8, \dots, 215 \end{cases} \quad (27)$$

临界条件及初始值的确定

除了要满足浮标系统和系泊系统中各组成物体的静力学平衡方程，还要使计算得到的锚的位置恰好落在海底，即在不考虑锚入土深度的情况下，满足此近浅海观测网的传输节点系统的垂直高度为 18m。即临界方程为：

$$l_{\text{钢管}} \sum_{i=1}^4 \sin \alpha_i + l_{\text{钢桶}} \cos \alpha_{\text{桶}} + l_0 \sum_{j=1}^{210} \sin \beta_j + h_0 = h_{\text{水}} = 18m \quad (28)$$

在上述计算中，浮标在工作过程中的浮力是未知的，需要给定一个初始的浮力估算值，可根据浮力计算公式（2）计算。

其中 h_0 是浮标的吃水深度。我们计算浮标自由漂浮在水面上时的吃水深度 h_0 ，并将其作为迭代的初始值，然后根据得到的递推方程进行迭代。

迭代算法

设计的算法流程图如下：

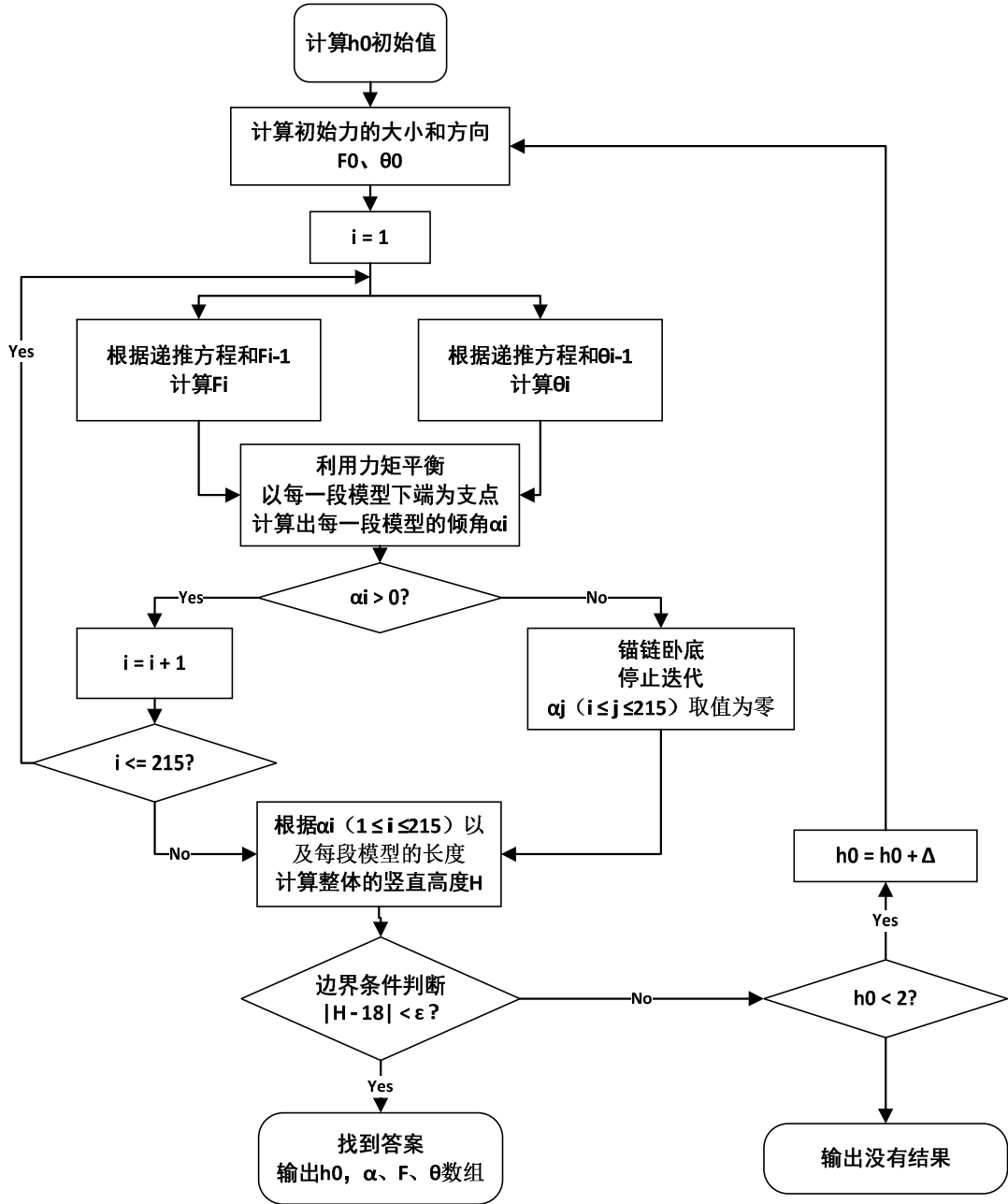


图 6 迭代算法流程图

根据图 6 所示算法，先计算出一个浮标吃水深度 h_0 的初始值，根据浮标的静力平衡方程推导出第一段钢管的拉力及倾角，然后根据系泊系统中各物体间的递推关系式，依次推导出下一段钢管所受的拉力 T_i 和力与水平方向夹角 θ_i ，进而递推求得与钢桶受到的拉力和力与水平方向的夹角，然后依次推导出每一节链环的拉力 F_j 和力与水平方向夹角 θ_j ，然后根据力矩平衡方程以每一段模型下端为支点，利用

$$\begin{cases} \alpha_i = \arctan\left(\frac{T_i \sin \theta_i l_{\text{钢管}} - \frac{1}{2}(G_{\text{钢管}} - F_{\text{浮管}})l_{\text{钢管}}}{T_i \cos \theta_i l_{\text{钢管}}}\right) & i = 1, 2, 3, 4, 5 \\ \alpha_i = \arctan\left(\frac{F_{j-1} \sin \theta_{j-1} l_0 - G_0 l_0 / 2}{F_{j-1} \cos \theta_{j-1} l_0}\right) & i = 6, 7, 8, \dots, 215 \end{cases} \quad (29)$$

计算出各节钢管水平倾角和各节链环水平倾角 α_i 。

考虑到在无风或风速很小时锚链可能出现“卧底”情况，而锚链一段卧底，后续链环的水平倾角将都变为 0 度，因此这里需要判断 α_i 是否大于 0。然后将得到的各参数代入临界方程(28)中，判断系统高度的计算值与实际水深值的差值。确立一个精确度，当二者差值不满足此精确度时，对初始的吃水深度 h_0 进行修正。通过对初始值进行修正，反复迭代计算^[2]，直至系统高度的计算值与实际水深满足精确度，此时的 h_0 值即为浮标的吃水深度。

最后通过各物体之间的受力关联，可求出各物体的参数值。

锚链形状

为求得锚链的具体形状，我们以锚链与锚的连接点为原点 O 建立如图 7 所示坐标系。

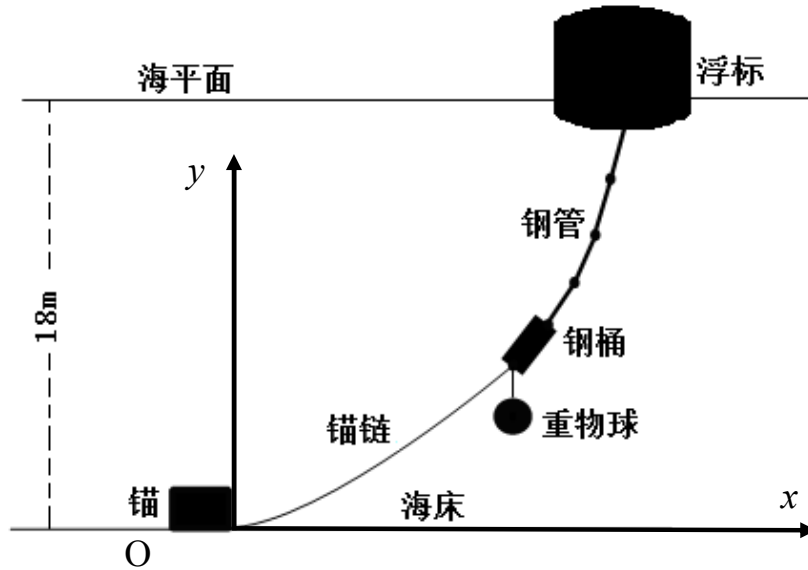


图 7 以锚链与锚的连接点为原点 O 建立直角坐标系

为确定每节链环的位置，从 O 点向右开始取每节链环的左端点坐标表示锚链链环的位置坐标值，记为 P_i ($i = 1, 2, 3, \dots, 209, 210$)

其中：

P_1 的坐标为 (0,0)

P_2 的坐标为 $(l_2 \cos(\beta_{210}), l_2 \sin(\beta_{210}))$

P_3 的坐标为 $(l_2(\cos(\beta_{210}) + \cos(\beta_{209})), l_2(\sin(\beta_{210}) + \sin(\beta_{209})))$

以此类推,

P_i 的坐标为 $(l_2 \sum_{j=2}^i \cos(\beta_{210-(j-2)}), l_2 \sum_{j=2}^i \sin(\beta_{210-(j-2)}))$ ($2 \leq i \leq 210$)

P_{210} 的坐标为 $(l_2 \sum_{j=2}^{210} \cos(\beta_{210-(j-2)}), l_2 \sum_{j=2}^{210} \sin(\beta_{210-(j-2)}))$

取锚链与钢桶的交点, 即最后一节链环的右端点为 P_{211} , 则

P_{211} 的坐标为 $(l_2 \sum_{j=2}^{211} \cos(\beta_{210-(j-2)}), l_2 \sum_{j=2}^{211} \sin(\beta_{210-(j-2)}))$

用 MATLAB 编程计算, 得到以上 211 个点的坐标值, 依次连接这 211 个点 $P_i (i = 1, 2, 3, \dots, 209, 210, 211)$, 即可得到 210 节锚链的大致形状。

浮标吃水深度

对于浮标的吃水深度, 通过对所设定的浮标吃水深度初始值进行修正, 反复迭代计算, 直至满足精确度, 此时得到的 h_0 即为求得的吃水深度。

浮标游动区域

对于浮标的游动区域, 我们假定海风平行于海平面, 在平面内其方向为 0 到 360 度, 因此浮标的游动区域是一个圆形。此圆形游动区域的半径为

$$r = \sum_{i=1}^4 l_{\text{钢管}} \cos \alpha_i + l_{\text{钢桶}} \cos \alpha_5 + \sum_{i=6}^{215} l_0 \cos \alpha_i \quad (30)$$

根据求得的 α_i 即可得到对应的半径, 进而可求出游动区域的面积。

5.1.2 模型的求解

在本文研究的近海观测网的传输节点中, 海水处于静止状态, 系统中各物体没有受到近海水流力的作用, 海水密度为 $1.025 \times 10^3 \text{kg/m}^3$, 水深 18m, 海床平坦。

浮标系统可简化为一个底面直径 $d_{\text{浮标}} = 2\text{m}$, 高 $h_{\text{浮标}} = 2\text{m}$ 的圆柱体, 其体积为

$$V_{\text{浮标}} = \pi \left(\frac{d_{\text{浮标}}}{2} \right)^2 h_{\text{浮标}} = 2\pi (\text{m}^3), \text{ 质量为 } m_{\text{浮标}} = 1000\text{kg}。 \text{ 浮标自由漂浮在水面上时}$$

吃水深度 $h_0 = 0.31050\text{m}$, 我们将此值作为迭代的初始值。

与浮标相连的钢管共 4 节, 每节长度 $l_{\text{钢管}} = 1\text{m}$, 直径为 $d_{\text{钢管}} = 0.05\text{m}$, 每节

$$\text{钢管的体积为 } V_{\text{钢管}} = \pi \left(\frac{d_{\text{钢管}}}{2} \right)^2 l_{\text{钢管}} = 1.963 \times 10^{-3} \text{m}^3, \text{ 每节钢管的质量为 } m_{\text{钢管}} = 10\text{kg},$$

所受重力 $G_{\text{钢管}} = m_{\text{钢管}} g = 98\text{N}$ 。

安装水声通讯系统的钢桶是一个长为 1m、外径为 30cm 的实心密封圆柱形

物体，体积为 $V_{\text{钢桶}} = \pi \left(\frac{d_{\text{钢桶}}}{2} \right)^2 l_{\text{钢桶}} = 0.071 \text{m}^3$ ，设备和钢桶总质量为 100kg 。

钢桶下端与电焊锚链链接处悬挂一个重物球，重物球质量 $m_{\text{球}} = 1200 \text{kg}$ 。

传输节点选用 II 型电焊锚链 22.05m ，每节链环长度为 105mm ，锚链一共有 $n = 210$ 节，单位长度的质量为 7kg 。

●海面风速 $v_{\text{风}} = 12 \text{m/s}$

浮标吃水深度

浮标的吃水深度为 $h_0 = 0.73476 \text{m}$ 。

浮标游动区域

浮标圆形游动区域的半径为 14.3129m ，面积为 643.5839m^2 。

钢管倾斜角度

各节钢管的倾斜角度如表 1 所示：

表 1 风速为 12m/s 时各节钢管的倾斜角度

钢管编号	倾斜角度(度)
1	0.97749
2	0.98325
3	0.98909
4	0.99499

其中钢管的编号的规则为由海平面向下递增。

钢桶倾斜角度

当 $i = 5$ 时，经计算钢桶的水平倾角为 $\alpha_5 = 88.99162$ 度，所以钢桶的竖直倾角为 1.00838° 。

锚链形状

我们通过各个链环的倾角刻画锚链的形状。经计算我们发现锚链从第 68 链节以后出现卧底的情况，锚链的形状为第 1 节至第 67 节链节悬在水中，且与水平线倾角逐渐减小，直到第 68 节及以后链节倾角变为 0 度，卧在海床上。由 MATLAB 仿真得到的锚链形状如图 8 所示。

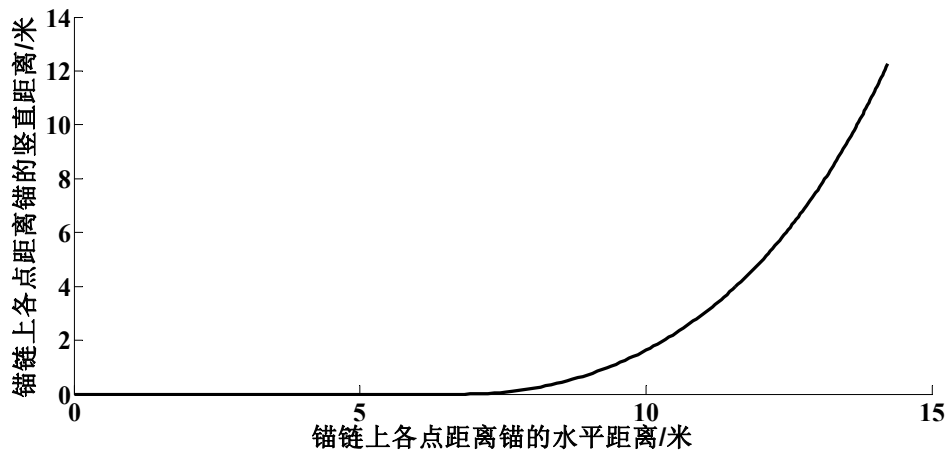


图 8 风速为 12m/s 时的锚链形状

●海面风速 $v_{\text{风}}=24\text{m/s}$

浮标吃水深度

浮标的吃水深度为 $h_0=0.74890\text{m}$ 。

浮标游动区域

浮标圆形游动区域的半径为 17.4311m ，面积为 954.5517m^2 。

钢管倾斜角度

各节钢管倾斜角度如表 2 所示。

表 2 风速为 24m/s 时各节钢管的倾斜角度

钢管编号	倾斜角度(度)
1	3.73626
2	3.75752
3	3.77902
4	3.80078

其中钢管的编号的规则为由海平面向下递增。

钢桶倾斜角度

当 $i=5$ 时，经计算钢桶的水平倾角为 $\alpha_5=86.14993$ 度，所以钢桶的竖直倾角为 3.85007° 。

锚链形状

当风速 $v_{\text{风}}=24\text{m/s}$ 时，我们发现锚链只有在最后 4 节出现轻微卧底情况，可以认为几乎没有卧底情况。由 MATLAB 仿真得到的锚链形状如图 9 所示。

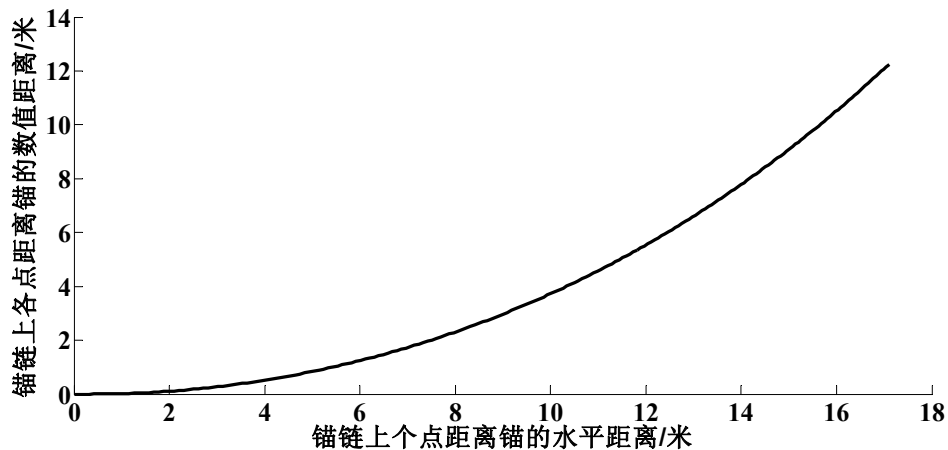


图9 风速为24m/s时的锚链形状

5.1.3 模型的分析

由风速分别为12m/s和24m/s的结果可以看出来,随着海面风速的不断增大,钢管的倾斜角度和链环的倾斜角度会随之增大,这样便会出现角度不在规定范围内的情况。我们以海面风速 $v_{\text{风}}=36\text{m/s}$ 时为例对模型一进行分析。

●海面风速 $v_{\text{风}}=36\text{m/s}$ （问题二）

浮标吃水深度

浮标的吃水深度为 $h_0=0.76998\text{m}$ 。

浮标游动区域

浮标圆形游动区域的半径为18.7217m,面积为 1101.076m^2 。

钢管倾斜角度

各节钢管的倾斜角度如表3所示

表3 风速为36m/s时各节钢管的倾斜角度

钢管编号	倾斜角度(度)
1	7.84646
2	7.88864
3	7.93126
4	7.97435

其中钢管的编号的规则为由海平面向下递增。

钢桶倾斜角度

当 $i=5$ 时,经计算钢桶的水平倾角为 $\alpha_5=81.92813$ 度,所以钢桶的竖直倾角为 8.07187° 。

锚链形状

我们通过各个链环的倾角刻画锚链的形状。经计算我们发现锚链并没有出现卧底现象,全部悬在水中。由MATLAB仿真得到的锚链形状如图10所示。最后一段链环的水平倾角即锚链在锚点与海床的夹角为 17.9726 度。

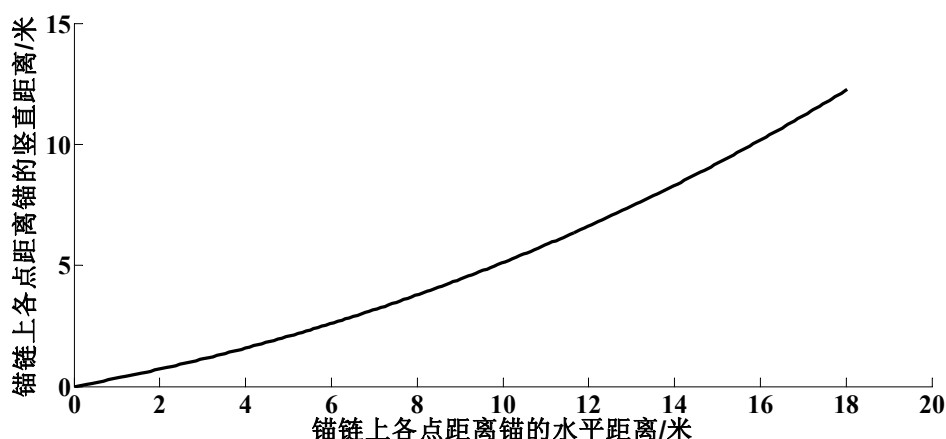


图 10 风速为 36m/s 时的锚链形状

需要指出的是，上述三种风速条件下的结果均是在系统达到稳定状态下求得的，而不是在瞬时风速下系统内各物体的物理量值。

通过计算我们发现钢桶的倾斜角度为 8.07 度，超过了 5 度的正常工作限度；锚链在锚点与海床的夹角为 17.973 度，也超过了 16 度的正常工作限度。此时模型一在应用时出现了问题，即在海风较大的情况下模型一不再适用，为此我们对模型一进行修正，得到模型二。

5.2 模型一的一次修正模型——模型二

5.2.1 模型的建立

为了解决模型一应用范围有限，应用灵活性不强的问题，我们在模型一的基础上增加重物球的质量 $m_{\text{球}}$ 这一变量。这样在不同风速的情况下，通过调节重物球的质量使近浅海观测网的传输节点能够正常工作。

通过分析系统工作原理可以发现，随着重物球质量的增加，钢桶的倾角和锚链在锚点与海床的夹角均会减小。因此当海面风速过大导致锚链节点移位丢失时，我们从初始值开始依次增大重物球质量，并利用模型一中的算法思路，通过迭代求得不同情况下的钢桶倾角以及锚点与海床夹角。当两个角度都满足要求得到重物球质量的取值范围，并可以根据实际需要在该范围内进行选取。

5.2.2 模型的求解

●重物球质量的确定

我们逐步增加重物球质量，利用（29）式求得不同情况下的角度，结果见表 4。

表 4 风速为 36m/s 时不同重物球质量对应的钢桶倾角和锚点与海床夹角值

小球质量（千克）	钢桶倾角（度）	锚点与海床夹角（度）
1200	8.071875	17.972596
1250	7.719356	17.690807
1300	7.388257	17.409686
1350	7.076906	17.120572
1400	6.783414	16.832009
1450	6.506481	16.535055

1500	6.244756	16.229357
1550	5.996869	15.923847
1600	5.761912	15.609129
1650	5.538761	15.294413
1700	5.326832	14.960209
1750	5.124908	14.635402
1800	4.932680	14.290210
1850	4.749230	13.944205
1900	4.574089	13.586948
1950	4.406707	13.217910
2000	4.246477	12.847368

通过观察表格我们发现，当重物球质量介于 1750 千克和 1800 千克时，钢桶倾角和锚点与海床夹角满足正常工作条件。为了刻画的更加精确，我们对这一范围进一步进行划分，得到表 5。

表 5 风速为 36m/s 时不同重物球质量对应的钢桶倾角和锚点与海床夹角值

小球质量（千克）	钢桶倾角（度）	锚点与海床夹角（度）
1750	5.124908	14.635402
1760	5.085798	14.561244
1770	5.046934	14.496624
1780	5.008443	14.431599
1790	4.970445	14.356091
1800	4.93268	14.290210

通过观察表 5 我们发现，当重物球质量介于 1780 千克和 1790 千克时，钢桶倾角和锚点与海床夹角满足正常工作条件。取 $m_{\text{球}0}=1790\text{kg}$ ，此时钢桶倾角和锚点与海床夹角恰好满足正常工作条件。当 $m_{\text{球}}>m_{\text{球}0}$ 时，亦可满足正常工作条件。

5.2.3 模型的分析

模型二在模型一的基础上增加了重物球质量这一变量，通过调节球的质量使模型在风速较大的情况下得以应用，扩大了应用范围，增加了灵活性。通过程序的求解我们得到质量的临界值，这样可以根据实际需求、成本、环境等因素选取球的类型，来保证水声通信系统的正常工作。

但是在很多近浅海环境中，海面风速会发生变化，海床凹凸不平致使海水深度也会不断变化，同时由于潮汐等自然因素的影响海水会具有流速。这些动态因素的不断变换将使模型的稳定性降低。为了提高模型的稳定性，使其能够适应各因素综合并不断变化的环境，我们需要对模型进行进一步修正。

5.3 模型一的二次修正模型——模型三

5.3.1 模型的准备

针对上述模型的不足，我们对模型一进行二次修正，得到模型三。在模型三

中，我们考虑到实际情况中海水也具有流速，会影响整个系统的正常工作。浸在水中的物体会受到近海水流力，近海水流力可通过近似公式 $F = 374Sv^2$ 计算，其中 S 为物体在水流速度法平面的投影面积(m^2)， v 为水流速度(m/s)。

在此模型中，由于铁管倾斜角度很小，我们忽略由于铁管倾斜而造成的投影面积的变化，认为投影面积为铁管正投影面积。因此系统受到的近海水流力为

$$F = 374Sv^2 = 374(h_0 d_{\text{浮标}} + 4l_{\text{钢管}} d_{\text{钢管}} + l_{\text{钢桶}} d_{\text{钢桶}})v^2 \quad (31)$$

系统受到的近海风载荷为

$$F = 0.625Sv^2 = 0.625(h_{\text{浮标}} - h_0)d_{\text{浮标}}v^2 \quad (32)$$

5.3.2 模型的建立

由于潮汐等因素的影响，系统布放海域的水深不是一个固定值，而是会在一定范围内变化。布放点所在区域的风速和水流速度也会存在，一般情况下会存在一个最大值。

为了使模型的应用范围更广，稳定性更强，设计的系泊系统应该满足区域内的任何环境变化，即对任何情况都成立。据此我们考虑极端情况进行系泊系统设计，从而建立模型三。由近浅海观测网传输节点的工作原理可知，当风速与水流速度同向时，系统最容易出现节点移位丢失和水声通信系统不能正常工作的情况。当水较深时，容易出现节点移位丢失；而水较浅会导致水声通信系统不能正常工作。若同时从节约成本和使用方便角度以及使浮标的游动区域尽可能小考虑，应使锚链尽可能短，但不能使锚链长度减小导致锚被拖动。

综合考虑，对任意型号的锚链及一系列重物球的质量，我们取布放海域水深的最大值作为模型的水深值，令风速与水速同向，并取尽可能短的锚链长度，但同时要满足锚链与海床夹角 $\alpha_{215} \leq 16$ 度以及最浅水深时钢桶倾角小于 5° 的验证条件，设计算法。

算法思路

算法的思路是：取一个合理的锚链长度作为初始值，在最大水深下求出锚链与海底夹角，判断是否小于等于 16 度。若不满足则增加一节链环，重复上述过程，直至满足角度要求，得到此时的临界角度值。算法流程图如图 11 所示。

这样每一个重物球质量 $m_{\text{球}}$ 均对应着一个锚链的最短长度 $l_{\text{锚链min}}$ ，确定了二者之后，我们便可以利用模型一的求解方法，得到钢桶倾斜角度、浮标吃水深度、游动区域的值。

随重物球质量逐步增加，通过分析我们发现随着重物球质量 $m_{\text{球}}$ 的增大，钢桶倾斜角度 α_5 不断减小，浮标吃水深度 h_0 不断增大，取满足角度要求的前提下吃水深度尽量小的点最为最优解即可。

这样我们就成功分析了在考虑风力、水流力和水深情况下，不同环境下钢桶、钢管的倾斜角度、锚链形状、浮标的吃水深度和游动区域。

在实际中锚链有多种型号，对于每种型号的锚链重述上述过程便可得到分析结果。

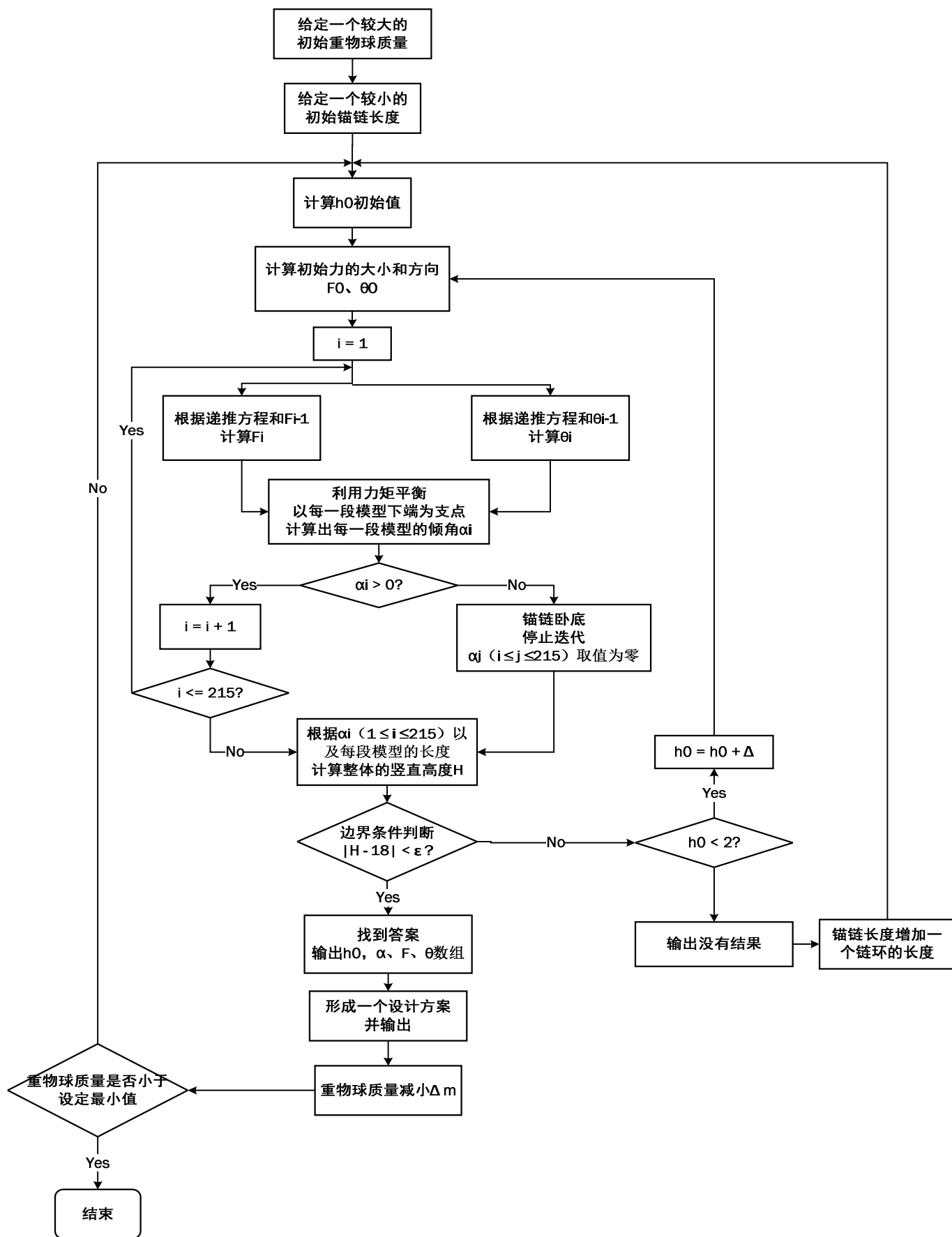


图 11 模型三算法流程图

加权评价模型

在得到不同锚链型号下浮标吃水深度、钢桶水平倾角和浮标游动区域相对于系列重球质量的对应表格后,为了更方便的根据实际情况对不同重球质量进行选取,我们借鉴**功效系数法**的思想及原理^[3],设计了一种**加权评分系统**^[4]。此评分系统按照一定权重分配同时评价吃水深度、钢桶水平倾角和浮标游动区域这三个指标。

设每个评价指标的值为 X_i , 对每一个评价指标确定一个上限值 X_i^h 和下限值 X_i^l 。上限值 X_i^h 为在目标条件下能达到的最大值, 下限值 X_i^l 为该指标能出现的最小值。

令三个指标每一项的满分为 100 分, 由于本题目要求三个指标都越小越好, 所以指标 X_i 越小, 分数越高, 下限值 X_i^l 对应于满分 100 分

定义各评价指标的功效系数为 f_i :

$$f_i = 1 - \frac{X_i - X_i^l}{X_i^h - X_i^l} \quad (33)$$

则每一项的得分为 W_i :

$$W_i = f_i \times 100 = (1 - \frac{X_i - X_i^l}{X_i^h - X_i^l}) \times 100 \quad (34)$$

设吃水深度、钢桶倾斜角度和浮标游动区域的权重分别为 μ_1 、 μ_2 和 μ_3 , 且满足 $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1$ 。

则一种设计方案的总得分为

$$\begin{aligned} W &= \mu_1 W_1 + \mu_2 W_2 + \mu_3 W_3 \\ &= \mu_1 (1 - \frac{X_1 - X_1^l}{X_1^h - X_1^l}) \times 100 + \mu_2 (1 - \frac{X_2 - X_2^l}{X_2^h - X_2^l}) \times 100 + \mu_3 (1 - \frac{X_3 - X_3^l}{X_3^h - X_3^l}) \times 100 \end{aligned} \quad (35)$$

在实际应用中, 根据需求和功能确定各项指标的重要程度, 进而确定各指标的权重 μ_1 、 μ_2 和 μ_3 的值, 然后利用 (35) 式对不同重物球质量下的设计方案进行分数评估, 把分数最高的一组值作为取用的设计方案即可。这样避免了方案选取的盲目性, 增加了模型的应用范围和可靠性, 同时也兼顾了客观工作需求和用户主观体验, 使模型的实用性得到提升。

5.3.3 模型的求解

在本文研究的近海观测网的传输节点中, 布放海域的实测水深介于 16m~20m 之间。布放点的海水速度最大可达到 1.5m/s、风速最大可达到 36m/s。锚链共有五种型号, 各种型号链环的参数值见表 6。

表 6 不同型号锚链的长度及单位长度质量

型号	长度 (mm)	单位长度的质量 (kg/m)
I	78	3.2
II	105	7
III	120	12.5
IV	150	19.5
V	180	28.12

表注：长度是指每节链环的长度。

由系统装置结构可知海水越深锚链倾角越易大于 16 度，海水越浅钢桶竖直夹角越易大于 5 度，根据模型建立时的极端化思想，我们考虑风速水速最大时的极端情况，若在其他情况下满足要求，那么模型必满足要求。因此我们取水深 $h_{\text{水}} = 20\text{m}$ ，海水速度 $v_{\text{水}} = 1.5\text{m/s}$ ，风速 $v_{\text{风}} = 36\text{m/s}$ 作为前提进行分析。取锚链长度的初始值 $l_{\text{锚链}} = h_{\text{水}} - 4l_{\text{钢管}} - l_{\text{钢桶}} = 15\text{m}$ 。

5.3.3.1 系泊系统设计

●型号 I

对于型号 I，我们在不同重物球质量下得到锚链海底夹角最接近但不超过 16 度情况下的锚链长度，即最短长度 $l_{\text{锚链min}}$ 。并利用模型一中的受力分析求出不同情况下的钢桶倾角、浮标吃水深度、游动区域半径及面积，得到表 7 所示数据。

表 7 使用型号 I 锚链时不同重球质量对应的系泊系统参数设计值

重球质量 (kg)	锚链总长 (m)	钢桶竖直倾角 (度)	浮标吃水深度 (m)	浮标游动区域半径 (m)	浮动区域面积 (m^2)
5000	34.398	4.223004	1.94846	32.09878	3236.882
4900	34.398	4.302531	1.91752	32.09269	3235.654
4800	34.398	4.385151	1.88658	32.08683	3234.474
4700	34.398	4.471152	1.85564	32.08123	3233.344
4600	34.398	4.560648	1.8247	32.07589	3232.268
4500	34.398	4.653868	1.79376	32.07084	3231.25
4400	34.398	4.751099	1.76282	32.0661	3230.295
4300	34.398	4.85257	1.73188	32.06169	3229.405
4200	34.398	4.958567	1.70094	32.05762	3228.587

根据加权评分模型的算法，我们对吃水深度、钢桶倾角和浮标游动区域分别评分，并综合三者，得到不同重物球质量下的总得分（如表 8 所示）

表 8 使用型号 I 锚链时的加权评分值

重球质量 (kg)	吃水深度评分	钢桶倾角评分	浮标游动区域评分	总得分
5000	11.89572	90.01571	6.88976E-06	33.97048
4900	22.28978	80.92837	0.047832086	34.422

4800	32.68384	71.4875	0.093802953	34.75505
4700	43.07791	61.66034	0.137802739	34.95868
4600	53.47197	51.43382	0.179699031	35.02849
4500	63.86603	40.78173	0.219335909	34.9557
4400	74.26009	29.67135	0.256557495	34.72933
4300	84.65415	18.07649	0.291200093	34.34061
4200	95.04821	5.964404	0.323068639	33.77856

通过表 8 可以看出,在使用锚链 I 的前提下,重物球质量选取 4600kg 最有利于系统正常工作。

利用与型号一相同的求解方法,我们对型号 II、III、IV、V 依次求解。

●型号 II

表 9 使用型号 II 锚链时不同重球质量对应的系泊系统参数设计值

重球质量(kg)	锚链总长(m)	钢桶竖直倾角(度)	浮标吃水深度(m)	浮标游动区域半径(m)	浮动区域面积(m ²)
5000	28.035	4.152874	1.97674	24.9806	1960.449
4900	28.035	4.229593	1.94585	24.97092	1958.93
4800	28.14	4.309693	1.91479	25.07644	1975.52
4700	28.14	4.392485	1.88389	25.06802	1974.195
4600	28.245	4.479116	1.85283	25.17409	1990.937
4500	28.245	4.568784	1.82194	25.16535	1989.555
4400	28.35	4.662749	1.79087	25.27288	2006.593
4300	28.35	4.760209	1.75998	25.26472	2005.297
4200	28.455	4.86254	1.72891	25.37295	2022.515
4100	28.455	4.968823	1.69802	25.36546	2021.321

表 10 使用型号 II 锚链时的加权评分值

重球质量(kg)	吃水深度评分	钢桶倾角评分	浮标游动区域评分	总得分
5000	2.39527	98.02932	49.71435179	50.04631
4900	12.77253	89.26279	49.77350356	50.60294
4800	23.20691	80.10999	49.12733579	50.81474
4700	33.58753	70.64947	49.17896679	51.13866
4600	44.0219	60.7503	48.52689716	51.0997
4500	54.39917	50.50413	48.58071843	51.16134
4400	64.8369	39.76693	47.91713625	50.84032
4300	75.21416	28.63037	47.9675952	50.60404
4200	85.6519	16.9373	47.29700247	49.96206
4100	96.02916	4.792478	47.34351479	49.38838

通过表 10 可以看出,在使用锚链 II 的前提下,重物球质量选取 4500kg 最有利于系统正常工作。

●型号 III

表 11 使用型号 III 锚链时不同重球质量对应的系泊系统参数设计值

重球质量(kg)	锚链总长(m)	钢桶竖直倾角(度)	浮标吃水深度(m)	浮标游动区域半径(m)	浮动区域面积(m ²)
4900	24.24	4.149207	1.97825	20.44751	1313.502
4800	24.24	4.22564	1.94742	20.43497	1311.891
4700	24.24	4.304937	1.91659	20.42265	1310.31
4600	24.36	4.388131	1.88549	20.54555	1326.128
4500	24.36	4.473902	1.85467	20.53296	1324.503
4400	24.36	4.563169	1.82384	20.52137	1323.008
4300	24.48	4.65702	1.79274	20.64516	1339.018
4200	24.48	4.754021	1.76191	20.63413	1337.587
4100	24.48	4.855206	1.73109	20.6227	1336.105
4000	24.6	4.961891	1.69999	20.74758	1352.336

表 12 使用型号 II 锚链时的加权评分值

重球质量(kg)	吃水深度评分	钢桶倾角评分	浮标游动区域评分	总得分
4900	1.887997	98.44834	74.91155053	58.41596
4800	12.2451	89.71454	74.97426951	58.97797
4700	22.60221	80.6534	75.03585052	59.43049
4600	33.05002	71.14705	74.41979241	59.53895
4500	43.40377	61.34608	74.48306344	59.7443
4400	53.76088	51.14574	74.54131408	59.81598
4300	64.20869	40.42164	73.91773018	59.51602
4200	74.56579	29.33745	73.97346648	59.29224
4100	84.91954	17.77532	74.03118663	58.90868
4000	95.36735	5.584674	73.3990191	58.11702

通过表 12 可以看出,在使用锚链 II 的前提下,重物球质量选取 4500kg 最有利于系统正常工作。

●型号 IV

表 13 使用型号 IV 锚链时不同重球质量对应的系泊系统参数设计值

重球质量(kg)	锚链总长(m)	钢桶竖直倾角(度)	浮标吃水深度(m)	浮标游动区域半径(m)	浮动区域面积(m ²)
4800	21.6	4.135628	1.98387	17.09227	917.8022
4700	21.6	4.211259	1.95312	17.0769	916.1524
4600	21.75	4.290957	1.92193	17.23355	933.0379
4500	21.75	4.372661	1.89118	17.21857	931.4163
4400	21.75	4.457573	1.86044	17.20322	929.7564
4300	21.75	4.545923	1.82969	17.18876	928.1946

4200	21.9	4.639315	1.7985	17.34662	945.3218
4100	21.9	4.735343	1.76775	17.33269	943.8038
4000	21.9	4.835496	1.737	17.31909	942.3231
3900	21.9	4.940004	1.70626	17.30521	940.8139

表 14 使用型号 II 锚链时的加权评分值

重球质量(kg)	吃水深度评分	钢桶倾角评分	浮标游动区域评分	总得分
4800	0	99.99999	90.32319995	63.44106
4700	10.33023	91.35786	90.38745591	64.02518
4600	20.80828	82.25088	89.72980446	64.26299
4500	31.13851	72.91476	89.79296112	64.61541
4400	41.46538	63.212	89.85761212	64.845
4300	51.79561	53.11641	89.91844085	64.94349
4200	62.27366	42.44469	89.25137323	64.65657
4100	72.60389	31.47179	89.31049515	64.46206
4000	82.93412	20.02751	89.36816248	64.10993
3900	93.26099	8.085655	89.4269449	63.5912

通过表 14 可以看出,在使用锚链IV的前提下,重物球质量选取 4300kg 最有利于系统正常工作。

●型号 V

表 15 使用型号 V 锚链时不同重球质量对应的系泊系统参数设计值

重球质量(kg)	锚链总长(m)	钢桶竖直倾角(度)	浮标吃水深度(m)	浮标游动区域半径(m)	浮动区域面积(m ²)
4500	19.8	4.262997	1.93275	14.59657	669.347
4400	19.98	4.345101	1.90142	14.78883	687.0961
4300	19.98	4.428639	1.87077	14.77142	685.4794
4200	19.98	4.515556	1.84012	14.75429	683.89
4100	19.98	4.606026	1.80947	14.73744	682.3295
4000	19.98	4.700278	1.77882	14.72091	680.7995
3900	20.16	4.800775	1.74751	14.9138	698.7573
3800	20.16	4.903506	1.71685	14.89835	697.3104
3700	20.16	5.010764	1.6862	14.88274	695.8501

表 16 使用型号 V 锚链时的加权评分值

重球质量(kg)	吃水深度评分	钢桶倾角评分	浮标游动区域评分	总得分
4500	17.17338	85.44585	99.99999991	67.53974
4400	27.69846	76.0639	99.30870911	67.69036
4300	37.9951	66.51827	99.37167646	67.96168
4200	48.29173	56.58636	99.43358035	68.10389

4100	58.58837	46.24853	99.4943593	68.11042
4000	68.88501	35.4786	99.55394847	67.97252
3900	79.40337	23.99504	98.85452995	67.41764
3800	89.70336	12.25614	98.91088426	66.9568
3700	100	2.18E-05	98.96775926	66.32259

通过表 16 可以看出，在使用锚链 V 的前提下，重物球质量选取 4100kg 最有利于系统正常工作。

综上所述，使用型号 V 的锚链，所挂重物球质量为 4100kg，锚链长 19.98m，共有 110 节链环时，得分最高。

5.3.3.2 不同情况下参数分析

我们对下述情况进行分析：使用型号 V 的锚链，重物球质量为 4100kg，锚链长 19.98m，共有 110 节链环。在水深分别为 16m 和 20m 的情况下分析锚链与海底倾角、锚链形状、钢桶倾角、浮标吃水深度及游动区域。

●水深为 16m

浮标吃水深度

浮标的吃水深度为 $h_0=1.76293\text{m}$ 。

浮标游动区域

浮标圆形游动区域的半径为 17.1194m，面积为 920.7187m^2 。

钢管倾斜角度

各节钢管的倾斜角度如表 17 所示。

表 17 水深为 16m 时各节钢管的倾斜角度

钢管编号	倾斜角度(度)
1	4.70851
2	4.71653
3	4.72459
4	4.73267

其中钢管的编号的规则为由海平面向下递增。

钢桶倾斜角度

当 $i=5$ 时，经计算钢桶的水平倾角为 $\alpha_5=85.24926$ 度，所以钢桶的竖直倾角为 4.75074° 。

锚链形状

我们通过各个链环的倾角刻画锚链的形状。经计算我们发现锚链从第 103 链节以后出现卧底的情况，锚链的形状为第 1 节至第 102 节链节悬在水中，且与水平线倾角逐渐减小，直到第 103 节及以后链节倾角变为 0 度，卧在海床上。由 MATLAB 仿真得到的锚链形状如图 12 所示。

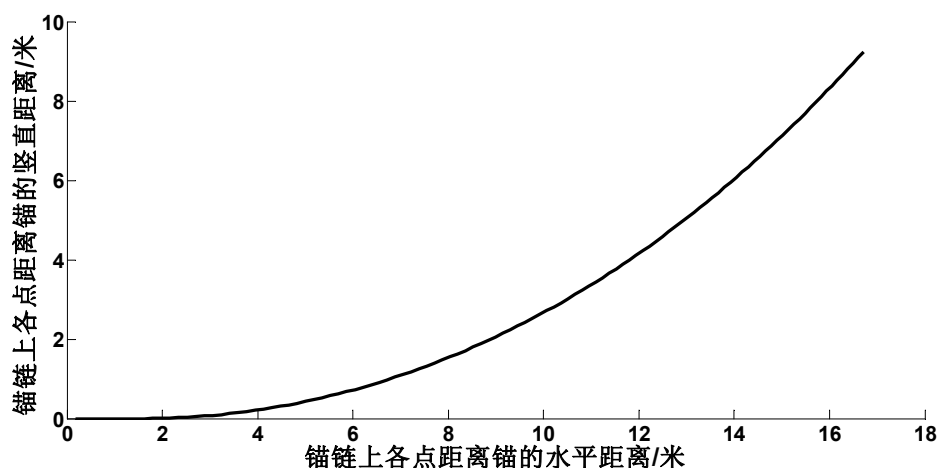


图 12 水深为 16m 时的锚链形状

●水深为 20m

浮标吃水深度

浮标的吃水深度为 $h_0=1.80947\text{m}$ 。

浮标游动区域

浮标圆形游动区域的半径为 14.7374m ，面积为 682.3255m^2 。

钢管倾斜角度

各节钢管的倾斜角度如表 18 所示。

表 18 水深为 20m 时各节钢管的倾斜角度

钢管编号	倾斜角度(度)
1	4.566354
2	4.573897
3	4.581465
4	4.589058

其中钢管的编号的规则为由海平面向下递增。

钢桶倾斜角度

当 $i=5$ 时，经计算钢桶的水平倾角为 $\alpha_5=85.39396$ 度，所以钢桶的竖直倾角为 4.60604° 。

锚链形状

我们通过各个链环的倾角刻画锚链的形状。经计算我们发现锚链并没有出现卧底现象，全部悬在水中。由 MATLAB 仿真得到的锚链形状如图 13 所示。最后一段链环的的水平倾角即锚链在锚点与海床的夹角为 15.65323 度，可以防止节点移位丢失。

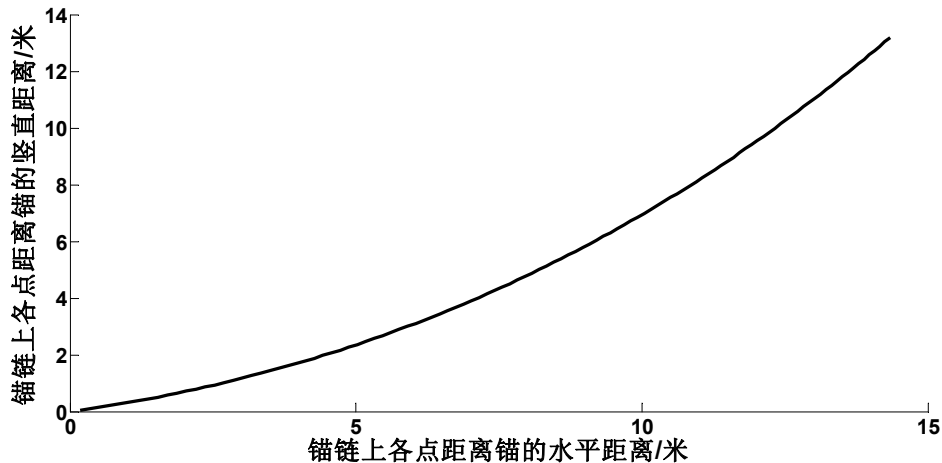


图 13 水深为 20m 时的锚链形状

六、模型的评价与推广

6.1 模型的评价

本文针对系泊系统的设计问题，建立了三个模型，分别解决了在不同风速、水深、水速情况下的钢桶、钢管的倾斜角度、锚链形状、浮标的吃水深度和游动区域的问题。经检验，各个模型均有一定的适用范围。以下对各个模型的特点进行分析。

6.1.1 模型一

对于模型一，主要是找出系统内物体间的受力及位置关系的递推表达式，为此应首先对各物体进行受力分析，列出平衡方程。我们从浮标入手，依次分析钢管、钢桶和锚链，得到迭代关系。在临界条件的约束下，通过迭代对初始值进行反复修正，得到最终的倾角和受力，然后根据角度和几何关系可以得到锚链形状及浮标游动区域。

由以上分析可知，此模型最大的优点是得到了浮标系统和系泊系统受力及倾角的递推关系式，将整个系泊系统进行了统一；同时此模型中确定各段受力和倾角的算法效率很高，用 MATLAB 可以迅速得到结果，简单易懂、易于实现。

但是由于本模型着眼于计算的简便，而在一定程度上忽略了一些参变量的影响，例如重物球质量和锚链的型号、长度均不能调节，忽略了海风风向的影响。同时本模型对海风速度要求较高，在海风不是很大的海洋或湖泊区域，具有一定的适应性，而在风浪较大的区域内并不适用。

对模型的进一步改进主要应在参变量上着手，可以通过增加参变量的个数，增大模型的适用范围，由此产生了模型二。模型二在一定程度上克服了模型一应用范围窄的不足。

6.1.2 模型二

对于模型一的不足，我们进行了修正。将重物球的质量设为可变，这样在某一风速下，可以通过调节重物球质量改变钢桶倾角及锚链和海底的夹角，使水声通信系统工作在正常状态下。利用重物球质量和夹角的单调关系，通过增加质量而得到恰好满足两夹角要求时的临界质量，进而可以根据实际需求、环境等因素确定系泊系统中重物球的质量。

对于经过优化的模型二,在不同的风速下可以根据实际工作需求调节重物球的质量,扩大了模型的应用范围,增加了模型的灵活性,算法也很清晰有序,程序的处理时间在可接受的范围内。

对模型二的进一步改进,可以考虑由于重物球质量增加带来的体积变化,会影响其所受到的浮力。同时在风速较大的情况下,浮标的倾斜程度会变大,进而影响其所受浮力。同时在实际情况下,由于潮汐的作用,海水会有流动,对浸在水中的物体有力的作用,在一片海域海水深度也会有不同。进一步考虑这些因素,模型的精确度会更高,应用性会更强。

6.1.3 模型三

针对实际情况的复杂性,我们对模型进行了进一步修正。对于海水深度水流力和风力的变化,模型三利用极限思想进行处理,当模型在最危险的极端情况下能够完成设计时,就可以保证模型在这一区域内应用的可靠性。对于不同的锚链型号,我们利用标准化的思想,将重球质量按规定的重量系列标准进行选取,并求出相应参数。为了在不同需求下更好的选取参数,我们制订了加权评价体系,提高了模型的实用性。

模型三的优点在于极端化思想的应用,巧妙的解决了环境不断变化的问题,达到了在多因素的情况下进行系泊系统优化设计的目的。同时通过重物球质量标准化和评价系统的建立,人们可以根据设备工作需求及主观要求对系泊系统各物体参数值进行查表选取,快速方便有效。

为了进一步提高模型的精确度,我们可以考虑在海风和水流力共同作用下浮标的倾斜以及海风不完全平行于海平面的情况,这样更逼近于实际情况。

6.2 模型的推广

通过模型的建立和两次修正,我们得到了系泊系统的设计方案。在此基础上,我们认为此模型具有三方面的推广功效:

(1) 在多因素的影响下,通过质量标准化和加权评价体系的建立,用户可根据实际情况查表选取系泊系统各物体参数。在此基础上我们可以开发一款软件,使用者可根据实际环境输入相应的需求指标,例如钢桶倾角限定、水域面积大小、库存的锚链类型等,然后该软件便可提供给用户系泊系统内各物体参数的最佳方案,供用户参考选择。

(2) 此模型研究的系泊系统用于观测和通信,可以通过改造水声通信系统,将此系泊系统用于原油输送、井流输送、电力传输等功能。利用相似的方法进行分析,可以完成在不同用途下系泊系统的设计问题。

(3) 将此模型所研究的系泊系统变换成多点系泊系统或者其他类型的系泊系统,利用类似的思路进行分析,可以完成其它类型系泊系统的设计工作。

七、参考文献

- [1]潘斌,高捷,陈小红,陈家鼎. 浮标系泊系统静力计算[J].重庆交通学院学报,1997,01:70-75.
- [2]王磊. 单点系泊系统的动力学研究[D].中国海洋大学,2012.
- [3]吕洪波.功效系数法在企业绩效评价中的运用[J].内蒙古科技与经济,2009,09:69-71.
- [4]姜启源.数学模型[M].北京: 高等教育出版社, 2011.

附录

1、探究在海风风速为特定值时，钢桶和各节钢管的倾斜角度、锚链形状、浮标的吃水深度和游动区域的程序（以风速 12m/s 为例，利用 Codeblocks 进行编程）

```
#include <stdio>
#include <iostream>
#include <cmath>
#define pi 3.1415926
using namespace std;

double Theta[300]; //用来存储每个力的倾角
double F[300]; //用来存储每个力的大小
double A[300]; //用来存储每一段模型的倾角
double H = 2; //浮标初始高度为 2m

//函数功能：计算风力大小
//函数参数：风速大小 v，正对面积 S
double F_wind(double v, double S)
{
    return 0.625 * S * v * v;
}

//函数功能：计算浮力大小
//函数参数：排水体积
double F_float(double V)
{
    return 1025 * 9.8 * V;
}

//函数功能：计算钢管与浮标之间力的大小
//函数参数：风力大小，浮力大小，浮标质量
double F0(double F_wind, double F_float, double m)
{
    double f, temp;
    temp = F_wind * F_wind + (F_float - m*9.8) * (F_float - m*9.8);
    f = sqrtl(temp);
    return f;
}

//函数功能：计算钢管与浮标之间力的方向
//函数参数：风力的大小，浮力的大小，浮标的质量
double Theta0(double F_wind, double F_float, double m)
{

```



```

    double theta, temp;
    temp = (F_float - m*9.8) / F_wind;
    theta = atan(temp);//弧度制
    return theta;
}

//函数功能：利用递推方程计算下一个力的大小
//函数参数：前一个力的大小和倾角，浮力大小，模型质量
double Next_F(double F_i, double Theta_i, double F_float, double m)
{
    double temp1, temp2;
    temp1 = F_i * cos(Theta_i) * F_i * cos(Theta_i);
    temp2 = (F_i*sin(Theta_i)-(m*9.8-F_float)) *
(F_i*sin(Theta_i)-(m*9.8-F_float));
    return sqrtl(temp1 + temp2);
}

//函数功能：利用递推方程计算下一个力的倾角
//函数参数：前一个力的大小和倾角，浮力大小，模型质量
double Next_Theta(double F_i, double Theta_i, double F_float, double m)
{
    double temp;
    temp = (F_i*sin(Theta_i) - (m*9.8 - F_float)) / (F_i*cos(Theta_i));
    return atan(temp);
}

//函数功能：计算每一个模型的倾角
//函数参数：前一个力的大小和倾角，浮力大小，模型质量，模型长度
double Alpha(double F_i, double Theta_i, double F_float, double m, double l)
{
    double temp;
    temp = (F_i*sin(Theta_i)*l - (m*9.8 - F_float)*l/2) / (F_i*cos(Theta_i)*l);
    return atan(temp);
}

//函数功能：利用递推方程一次计算每一个力的大小和方向
void FandTheta()
{
    for (int i = 1; i <= 4; i++)
    {
        F[i] = Next_F(F[i-1], Theta[i-1], F_float(1*pi*0.025*0.025), 10);
        Theta[i] = Next_Theta(F[i-1], Theta[i-1], F_float(1*pi*0.025*0.025), 10);
    }
    F[5] = Next_F(F[4], Theta[4], F_float(1*pi*0.15*0.15), 1300);
}

```

```

    Theta[5] = Next_Theta(F[4], Theta[4], F_float(1*pi*0.15*0.15), 1300);
    for (int i = 6; i <= 215; i++)
    {
        F[i] = Next_F(F[i-1], Theta[i-1], 0, 0.735);
        Theta[i] = Next_Theta(F[i-1], Theta[i-1], 0, 0.735);
    }
}

```

//函数功能：依次计算每一个模型的倾角

```

void Angle()
{
    for (int i = 1; i <= 4; i++)
    {
        A[i] = Alpha(F[i-1], Theta[i-1], F_float(1*pi*0.025*0.025), 10,1);
    }
    A[5] = Alpha(F[4], Theta[4], F_float(1*pi*0.15*0.15), 100,1);
    for (int i = 6; i <= 215; i++)
    {
        A[i] = Alpha(F[i-1], Theta[i-1], 0, 0.735, 0.105);
    }
}

```

//函数功能：通过计算出来的倾角 A[]数组计算出系统的竖直高度

```

double Height(double h)
{
    double H = 0;
    for (int i = 1; i <= 5; i++)
    {
        if (A[i] > 0)
        {
            H += 1 * sin(A[i]);
        }
    }
    for(int i = 6; i <= 215; i++)
    {
        if (A[i] > 0)
        {
            H += 0.105 * sin(A[i]);
        }
    }
    return H;
}

```

//函数功能：通过计算出来的倾角 A[]数组计算出系统的最大浮动区域半径

```

double Radium(double h)
{
    double R = 0;
    for (int i = 1; i <= 5; i++)
    {
        if (A[i] >= 0)
        {
            R += 1 * cos(A[i]);
        }
        else
        {
            R += 1;
        }
    }
    for(int i = 6; i <= 215; i++)
    {
        if (A[i] >= 0)
        {
            R += 0.105 * cos(A[i]);
        }
        else
        {
            R += 0.105;
        }
    }
    return R;
}

int main()
{
    double v, i;
    v = 12;
    int flag = 0;
    //freopen("out.txt","w",stdout);
    for (i = 0.31050; i <= 2; i+=0.00001)
    {
        F[0] = F0(F_wind(v, (H - i)*2), F_float(pi*1*1*i), 1000);
        Theta[0] = Theta0(F_wind(v, (H-i)*2), F_float(pi*1*1*i), 1000);
        FandTheta();
        Angle();

        //cout << Height(i) + i << endl;
        if (fabs(Height(i) + i - 18) < 0.01)
        {

```

```

        cout << Height(i)+i << endl;//输出系统竖直高度
        cout << Radium(i) << endl;//输出最大浮动区域半径
        for (int j = 1; j <= 215; j++)
        {
            //printf("%f\n", A[j]/pi*180);
            cout << A[j]/pi*180 << endl;//输出每一段模型的倾角
        }
        printf("%f\n", i);
        //cout << i << endl;
        flag = 1;
        break;
    }
}
if (flag == 0)
{
    cout << "There is no answer." << endl;
}
return 0;
}

```

2、调节重物球质量，使钢桶倾角和锚链与海床夹角满足条件的程序（仅展示主函数，利用 Codeblocks 进行编程）

```

int main()
{
    double v, i;
    v = 36;
    int flag = 0;
    freopen("out2.txt", "w", stdout);
    //循环迭代重物球的质量，直到得到满足要求的重物球质量并输出
    for (int m = 1750; m <= 1800; m+=10)
    {
        for (i = 0.31050; i <= 2; i+=0.00001)
        {
            F[0] = F0(F_wind(v, (H - i)*2), F_float(pi*1*1*i), 1000);
            Theta[0] = Theta0(F_wind(v, (H-i)*2), F_float(pi*1*1*i), 1000);
            FandTheta(m);
            Angle();

            if (fabs(Height(i) + i - 18) < 0.01)
            {
                printf("%d\t%f\t%f\n", m, A[5]/pi*180, A[215]/pi*180);//输出质量以及钢桶和锚链的倾角
                flag = 1;
                break;
            }
        }
    }
}

```

```

    }
    if (flag == 0)
    {
        cout << "There is no answer." << endl;
    }
}
return 0;
}

```

3、在多因素不同情况下设计钢桶和各节钢管的倾斜角度、锚链形状、浮标的吃水深度和游动区域的程序（仅展示主函数，利用 Codeblocks 进行编程）

```

int main()
{
    double v, i;
    v = 36;
    int flag = 0;
    int num = 140;
    double len=0.150, weh=19.5;
    freopen("out4.txt","w",stdout);
    A[num+5] = 100;
    //通过三层循环，来计算求得极端情况下的设计方案
    for (int m = 4800; m >= 3800; m-=100)//第一层循环，对重物球质量进行循环
    {

        while (A[num+5]/pi*180 > 16)//第二层循环，对锚链段数进行从小到大的
        增加，即长度进行增加
        {
            num++;//逐渐增加
            A[num+5] = 100;
            for (i = 0.31050; i <= 2; i+=0.00001)//第三层循环，对浮标入水深度
            进行循环
            {
                F[0] = F0(F_wind(v, (H - i)*2) + F_water(1.5, i*2 + 4*1*0.05 +
                1*0.3), F_float(pi*1*1*i), 1000);
                Theta[0] = Theta0(F_wind(v, (H-i)*2) + F_water(1.5, i*2 +
                4*1*0.05 + 1*0.3), F_float(pi*1*1*i), 1000);
                FandTheta(len, num, weh, m);
                Angle(len, num, weh);

                if (fabs(Height(i, len, num) + i - 20) < 0.01)
                {
                    flag = 1;
                    break;
                }
            }
        }
    }
}

```

```

    }
    if (flag == 0)
    {
        cout << "There is no answer." << endl;
    }
    else if (A[num+5]/pi*180 <=16)
    {
        printf("%d\t%d\t%f\t%f\t%f\t%f\t%f\t%f\n", m, num, num*len,
A[num+5]/pi*180, i, Radium(i, len, num), A[5]);
        num--;
        break;
    }
    A[num+5] = 100;
}
A[num+5] = 100;
}
return 0;
}

```