2021 黑龙江省数学建模竞赛培训

微分方程数值解

哈尔滨工程大学数学科学学院 沈继红

2021.08.27

常微分方程数值解

针对

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

若 $y = y(x)$ 满足 Lipschitz 条件：

$$\left| f(x, y) - f(x, \overline{y}) \right| \le L \left| y - \overline{y} \right|$$

则上述初值问题的解 $y = y(x)$ 存在并且唯一。

求解方法：解析方法？

- 解存在但并非用解析方法可以求解，如

$$y' = e^{xy}$$

欧拉方法

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(a) = y_0 \end{cases} \qquad x \in (a,\ b)$$

对于上述常微分方程我们在 $x = a$ 处离散方程

$$y'\big|_{x=a} = f(a, y(x_0))$$

剖分

$$y'\big|_{x=a}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(a+\Delta x)-y(a)}{\Delta x}$$

将 x 的定义域 $[a,b]$ n 等分，得到节点

$$a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$$

其中步长 $h=\dfrac{b-a}{n}$，令 $\Delta x=h$，则有

$$\frac{y(x_0+h)-y(x_0)}{h}\approx f(x_0,y(x_0))$$

$$y(x_1)\approx y(x_0)+hf(x_0,y(x_0))$$

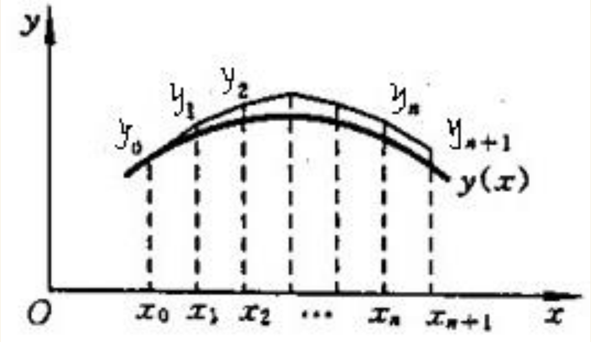
欧拉格式

故有

$$y(x_1) \approx y(x_0) + hf(x_0, y(x_0))$$

同理，对任一满足 x_n，有

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hf(x_n, y(x_n))$$



用 y_n 表示 $y(x_n)$，即有欧拉格式：

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

从而可算出所有的 $y(x_n)$ 的近似值

$$y_0 \to y_1 \to y_2 \to \cdots \to y_n \doteq y(b)$$

例 1， 求解初值问题

$$\begin{cases} y' = y - \dfrac{2x}{y} & 0 < x < 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

解： $f(x, y) = y - \dfrac{2x}{y}$，故欧拉格式为

$$y_{n+1} = y_n + h(y_n - \frac{2x_n}{y_n})$$

计算结果见下表

x_n	y_n	$y(x_n)$		x_n	y_n	$y(x_n)$
0.1	1.1000	1.0954		0.6	1.5090	1.4832
0.2	1.1918	1.1832		0.7	1.5803	1.5492
0.3	1.2774	1.2649		0.8	1.6498	1.6125
0.4	1.3582	1.3416		0.9	1.7178	1.6733
0.5	1.4351	1.4142		1.0	1.7848	1.7321

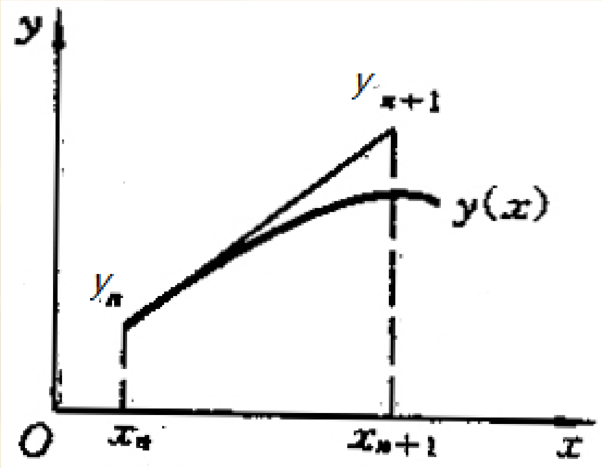
真解: $y = \sqrt{1+2x}$

几何表示

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

由于 $f(x_n, y_n) = y'(x_n) = tg\alpha_n$， 故欧拉格式可写成

$$y_{n+1} = y_n + htg\alpha_n$$



误差

$$y'\big|_{x=a} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(a+\Delta x) - y(a)}{\Delta x}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h} \\
&= \frac{y(x_n + h) - y(x_n)}{h} \\
&= \frac{y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2} y''(\xi) - y(x_n)}{h} \\
&= y'(x_n) + \frac{h}{2} y''(\xi)
\end{aligned}$$

故

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2} y''(\xi)$$

$R = \dfrac{h^2}{2} y''(\xi)$ 称为局部截断误差，称为 1 阶精度格式。

后退的欧拉格式——隐格式

看

$$y'(x_{n+1}) = f(x_{n+1}, \ y(x_{n+1}))$$

取 $\Delta x = -h$，则

$$y'(x_{n+1}) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x_{n+1} + \Delta x) - y(x_{n+1})}{\Delta x}$$

$$\approx \frac{y(x_{n+1} - h) - y(x_{n+1})}{-h}$$

故离散格式为

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1})$$

亦称为隐式格式。

每步迭代需求解方程

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1})$$

当 $n = 0$ 时，

$$y_1 = y_0 + hf(x_1, y_1)$$

需求解方程解出 y_1，可用迭代法

$$y_1^{(k+1)} = y_0 + hf(x_1, y_1^{(k)})$$

误差估计

$$\frac{y(x_{n+1}-h)-y(x_{n+1})}{-h}$$

$$=\frac{y(x_{n+1})-hy'(x_{n+1})+\frac{h^2}{2}y''(\xi_1)-y(x_{n+1})}{-h}$$

$$=y'(x_{n+1})-\frac{h}{2}y''(\xi_1)$$

局部截断误差：$R_1=-\frac{h^2}{2}y''(\xi_1)$

梯形格式

注意到显格式与隐格式的误差的符号一正一负，将其平均

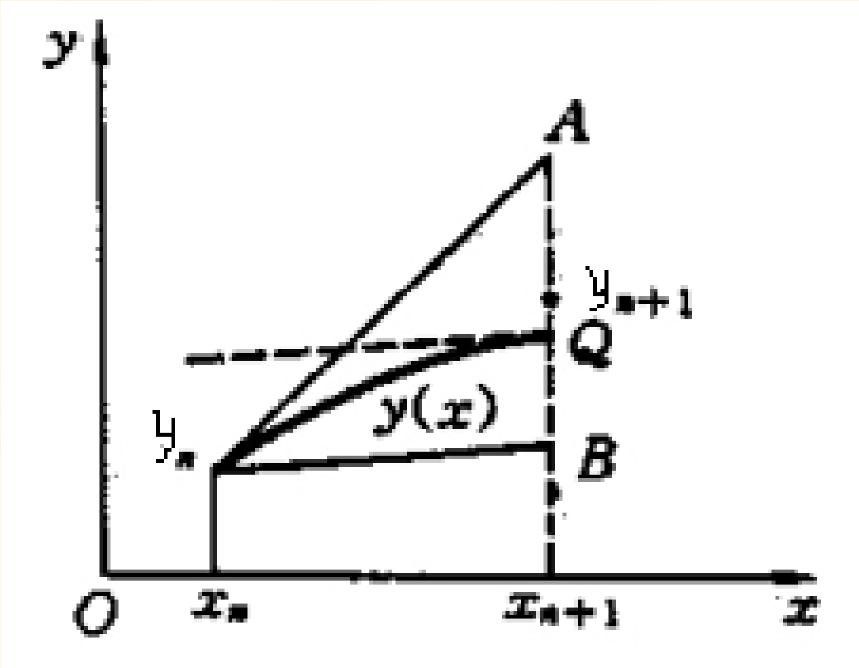
$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1})$$

两格式相加

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})]$$

误差精度为 2 阶，$O(h^2)$



改进的欧拉公式

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1})]$$

梯形格式精度高，但是隐格式。可采用近似的值代替梯形格式中的y_{n+1}，

得到新的格式

$$\bar{y}_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)$$

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},\bar{y}_{n+1})]$$

欧拉两步格式

注意到

$$y'(x_n)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(x_n+\Delta x)-y(x_n-\Delta x)}{2\Delta x}$$

令

$$y'(x_n)\approx\frac{y(x_n+h)-y(x_n-h)}{2h}$$

则得到离散格式

$$y_{n+1}=y_{n-1}+2hf(x_n,y_n)$$

稳定性不好

称为二步格式。

稳定性

定义 若一种数值方法在节点值 y_n 上产生大小为 δ 的扰动，在以后各节点值 $y_m(m>n)$ 上产生的偏差均不超过 δ，则称该方法是稳定的。

举例

针对方程

$$y' = \lambda y \qquad (\lambda < 0)$$

Euler 显格式为

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) = y_n + h \cdot \lambda y_n = (1 + h\lambda) y_n$$

若 y_n 有一个小的扰动 ε_n，则

$$\tilde{y}_{n+1} = (1 + h\lambda)(y_n + \varepsilon_n) = (1 + h\lambda) y_n + (1 + h\lambda)\varepsilon_n$$

稳定性条件

即 y_{n+1} 产生误差为

$$\varepsilon_{n+1}=(1+h\lambda)\varepsilon_n=\cdots=(1+h\lambda)^n\varepsilon_1$$

按照定义，格式稳定只要选 h 充分小，使

$$|1+h\lambda|\le 1$$

称欧拉显格式为条件稳定，稳定性条件为

$$h\le -\frac{2}{\lambda}$$

考察一下Euler隐格式

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_{n+1}) = y_n + h \cdot \lambda y_{n+1}$$

整理得

$$y_{n+1} = \frac{1}{1 - h\lambda} y_n$$

由于 $\lambda < 0$，故永远有

$$\left| \frac{1}{1 - h\lambda} \right| < 1$$

从而有

$$|y_{n+1}| \le |y_n|$$

即后退的 Euler 格式对任何的步长都稳定，称为绝对稳定（恒稳定或无条件稳定）。

2021 黑龙江省数学建模竞赛培训

偏微分方程数值解

哈尔滨工程大学数学科学学院 沈继红

抛物型方程的有限差分法

考虑一维热传导问题

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x), \qquad 0 < t \le T$$

外力

其中 a 是常数。

第一类边值问题（Cauchy 问题）：

$$u(x,0) = \varphi(x)\ , \qquad -\infty < x < \infty$$

第二类初边值问题：

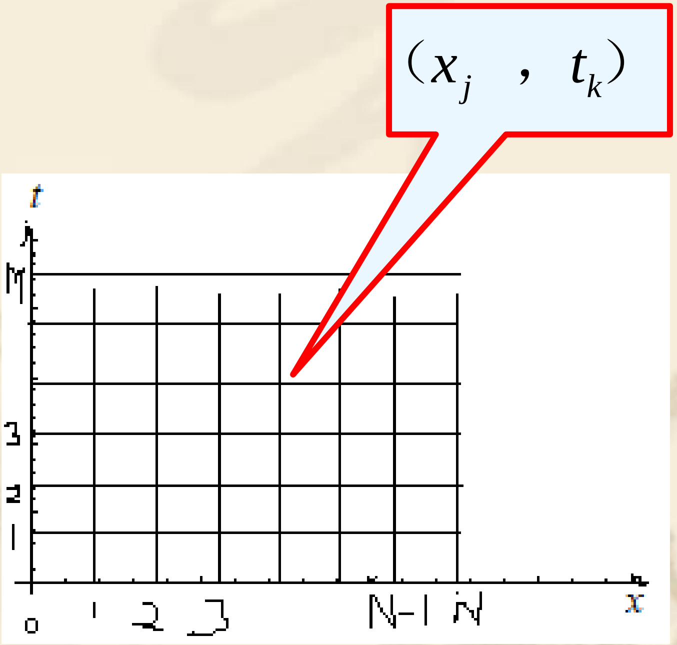
$$u(x,0) = \varphi(x) \qquad 0 < x < l$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0\ , \qquad 0 \le t \le T$$

网格剖分

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x),\qquad 0<t\le T$$

空间 N 等分，步长$h=\dfrac{l}{N}$；和时间 M 等分，步长$\tau=\dfrac{T}{M}$，得到矩形网如图：



$$\bar{G}=\{0\le x\le l;0\le t\le T\}$$

1. 向前差分格式

$$u_j^k \approx u(jh\ ,\ k\tau)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{x=x_j,\ t=t_k} = a\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=x_j,\ t=t_k} + f(x)\Big|_{x=x_j,\ t=t_k}$$

$$\frac{u_j^{k+1}-u_j^k}{\tau} = a\frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2} + f_j,$$

$$u_j^0 = \varphi_j = \varphi(x_j)\ ,\quad u_0^k = u_N^k = 0$$

$$u(x,0) = \varphi(x) \qquad 0 < x < l$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0\ , \qquad 0 \le t \le T$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=x_j} \approx \frac{\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_{j+\frac{1}{2}}} - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_{j-\frac{1}{2}}}}{h} \approx \frac{\frac{u_{j+1}-u_j}{h} - \frac{u_j - u_{j-1}}{h}}{h}$$

$$= \frac{u_{j+1}-2u_j+u_{j-1}}{h^2}$$

1. 向前差分格式

$$\frac{u_j^{k+1}-u_j^k}{\tau}=a\frac{u_{j+1}^k-2u_j^k+u_{j-1}^k}{h^2}+f_j,$$

$$u_j^0=\varphi_j=\varphi(x_j)\,,\quad u_0^k=u_N^k=0$$

令 $r=a\cdot\dfrac{\tau}{h^2}$，称为网比，将上式改写成

$$u_j^{k+1}=ru_{j+1}^k+(1-2r)u_j^k+ru_{j-1}^k+\tau f_j,\qquad j=1,2,\cdots,N-1;k=0,1,\cdots,M-1$$

此格式为显格式，其截断误差为$O(\tau+h^2)$。

2. 向后差分格式

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{x=x_j,\ t=t_{k+1}} = a\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=x_j,\ t=t_{k+1}} + \left.f(x)\right|_{x=x_j,\ t=t_{k+1}}$$

即时间采取向后差分，得到离散格式：

$$\frac{u_j^{k+1}-u_j^k}{\tau} = a\frac{u_{j+1}^{k+1}-2u_j^{k+1}+u_{j-1}^{k+1}}{h^2} + f_j,$$

$$u_j^0=\varphi_j=\varphi(x_j)\,,\quad u_0^k=u_N^k=0$$

同理，可写成

$$-ru_{j+1}^{k+1}+(1-2r)u_j^{k+1}-ru_{j-1}^{k+1}=u_j^k+\tau f_j,\qquad j=1,2,\cdots,N-1;k=0,1,\cdots,M-1$$

为隐格式，其截断误差为$O(\tau+h^2)$。

向前差分格式的稳定性

$$u_j^{k+1} = ru_{j+1}^k + (1-2r)u_j^k + ru_{j-1}^k + \tau f_j,$$

$$\Downarrow$$

$$r = \frac{1}{2}: u_j^{k+1} = \frac{1}{2}u_{j+1}^k + \frac{1}{2}u_{j-1}^k + \tau f_j,$$

$$\Downarrow$$

$$u_j^{k+1} \boxed{+e_j^{k+1}} = \frac{1}{2}(u_{j+1}^k + \boxed{e_{j+1}^k}) + \frac{1}{2}(u_{j-1}^k + \boxed{e_{j-1}^k}) + \tau f_j, \Longrightarrow e_j^{k+1} = \frac{1}{2}e_{j+1}^k + \frac{1}{2}e_{j-1}^k$$

$\backslash j$	-4	-3	-2	-1	0	$+1$	$+2$	$+3$	$+4$
2			0.25ε	0	0.5ε	0	0.25ε		
3		ε	0	0.375ε	0	0.375ε	0	0.125ε	
4	0.0625ε	0	0.25ε	0	0.375ε	0	0.25ε	0	0.0625ε

格式是稳定的

祝数模竞赛成功！