Uvod

Bloom's taxonomy

- Model po kojem se sastavlja većina ispita i ocjenjuje sposobnost
- U školi se fokusira samo na prve tri razine učenja
  - **Know** – pamćenje informacija
  - **Comprehend** – razumijevanje informacija
  - **Apply** – primjena stečenog znanja na poznate probleme
- Ali za svladavanje naprednijih koncepata potrebno je svladati barem i sljedeće dvije
  - **Analyse** – grupiranje i organizacija informacija, apstrahiranje, prepoznavanje uzročno-posljedičnih veza itd.
  - **Sythesize** – traženje novog značenja u poznatom i rješavanje novih problema (problem solving)
- Do sad si vjerojatno do neke mjere primjenjivao svih 5 a možda i tajnu šestu razinu, no dobro je postati svjestan njihovog postojanja.
- Za najefikasnije učenje fokus treba biti na najvišoj razini – synthesize
- Za više informacija preporučam https://www.youtube.com/watch?v=1xqerXscTsE
- Ali slobodno i sam istraži

<u>Osnovni koncepti apstrakcije</u>

- Apstrakcija
    - Sposobnost izdvajanja, sažimanja i poopćivanja informacija u apstraktne **objekte**
    - Zahtjeva razmišljanje viših razina
    - Objekt
        - Objektom nazivamo bilo što što se može apstrahirati od svoje okoline i što s njom može komunicirati preko također apstrahiranog **sučelja**
    - Sučelje
        - Sučelje objekta čine sva njegova definirajuća svojstva koja vežu sve **instance** tog objekta
        - Preko sučelja vanjski svijet promatra objekt i daje mu **ulazne** informacije, dok objekt vanjski svijet preko istog sučelja promatra te šalje **izlazne** informacije
        - Kada gledamo objekt nas ukratko ne zanima ništa osim ulazno-izlaznog odnosa koji s njime uspostavljamo
        - Ovime se ne zamaramo irelevantnim detaljima pri baratanju s objektima čime oslobađamo radnu memoriju svog mozga (OGROMNA DOBIT)
    - Primjer:
        - Ljudi su u svom svakodnevnom životu primijetili pojavljivanje oblika koji je omeđen s tri strane te odlučili tom konceptu pridodati ime trokut. Trokut je stoga svaka površina omeđena s tri strane (uz dodatan uvjet da su ravne)
        - Ni jedan trokut nije identičan, no svi trokuti dijele svojstva koja ih definiraju. Ona čine *sučelje* trokuta. Preko tog sučelja možemo se zapitati kolike su duljine stranica pojedinog trokuta, kolika je mjera kuta između dvije susjedne stranice, a možemo se i pozvati na dokazanu činjenicu da je zbroj unutarnjih kutova u *svim* trokutima jednak 180° bez da znamo poziciju svake točke koja čini njegov obrub i unutrašnjost
- Crna kutija
    - Točniji naziv za objekt kakav sam prethodno definirao je **crna kutija**

- Crna kutija je model čija je unutarnja arhitektura nepoznata, te ima samo ulazne i izlazne priključke
- Objekt općenito ne podrazumijeva striktno ovu definiciju, ali kad ja govorim o objektima mislim na nju

- Veza s matematikom
  - Apstrakcija kao koncept se koristi apsolutno svugdje te bi bez nje i svakodnevni ljudski život bio nemoguć. Naš mozak nema kapacitet za praćenje pozicija i svojstava, a ni percipiranje svakog pojedinog atoma te nam dobro dođe sposobnost da veliku količinu njih naprosto zapamtimo kao *„računalo"*
  - Isto tako dakako možemo uštediti na glavobolji ako umjesto da matematiku promatramo kao kolekciju formula i zadataka u kojima se primjenjuju (takozvana matematika na nižoj razini) promatramo umjesto toga alate koje nam nudi i njihove fantastične sposobnosti (tzv. matematika na višoj razini)
  - Zato kad sljedeći put vidiš jednadžbu ili neki drugi matematički objekt, nemoj se odmah zapitati kako je se najbrže riješiti, već se zapitaj kao pravi znanstvenik, kako mi ovo može poslužiti? U početku će ti to svakako biti teže, no vremenom će ti beskrajno olakšati život. Dakako, nekad ćeš naprosto zaključiti da ti neki alat nije od ama baš nikakvog interesa i tada ga se možeš slobodno što prije riješiti.

Matematički jezik
(U skripti MATAN 1.1 u repozitoriju možeš naći više informacija i zadatke za vježbu)

- U literaturi ćeš često vidjeti tvrdnje i dokaze iskazane simbolički u takozvanom matematičkom jeziku
- Dobro je stoga moći čitati takve tvrdnje i to s relativnom lakoćom, kako ne bi morao trošiti vrijeme na prevođenje na ljudski jezik
- Evo nekih osnovnih simbola i njihovih prijevoda
    1. $A \wedge B$ - A i B (**konjunkcija**)
    2. $A \vee B$ - A ili B (**disjunkcija**)
    3. $\neg A$ – ne A (**komplement**)
    4. $A \rightarrow B$ – ako A onda B (kažemo da je A **dovoljan** uvjet za B ili A **implicira** B)
    5. $A \leftarrow B$ – B samo ako A (kažemo da je A **nužan** uvjet za B)
    6. $A \leftrightarrow B$ – A ako i samo ako B (kažemo da su A i B **ekvivalentni**)
        i. Čest je i kraći zapis $A \equiv B$
    7. $\top$ – uvijek istina (**tautologija**)
    8. $\bot$ – uvijek neistina (**kontradikcija**)
- Posebnu pažnju posvetiti na posljednja tri izraza
- Razlika između izraza ako i samo ako je u govornom jeziku neznatna ali kada se ove fraze pojavljuju u kontekstu matematike njihovo značenje nije podložno interpretaciji i razlike su bitne
- A i B u ovim izrazima nazivamo **sudovima**, a oni predstavljaju varijable proizvoljnih istinitosti (A i B mogu biti istiniti ili neistiniti neovisno jedno o drugom)
    - Iz tog razloga logički izrazi nazivaju se katkad i funkcijama/operatorima čiji izlazi ovise o vrijednostima sudova (tj. varijabla) te je i korisno promatrati ih na taj način. Zašto? Koliko god kompleksan bio izraz, njegov izlaz uvijek može poprimiti samo dvije vrijednosti: **true** ili **false**, a isto vrijedi i za svaki od njegovih sudova
        - *Primijeti: Budući da funkcije i varijable poprimaju iste vrijednosti, funkcije kao svoj ulaz mogu primati druge funkcije (tzv. zavisne varijable), te tako dobivamo složenije izraze*
    - Stoga ako radimo s funkcijama dvije varijable, možemo izračunati njihove vrijednosti za svaku kombinaciju ulaza A i B (kojih je 2^2) i rezultate zapisati u tzv. tablice istinitosti. Evo nekih primjera:

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$\neg(A \rightarrow B)$	$A \wedge \neg B$
0	0	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	1	1	0	0

- *Napomena: Ovdje sam jedinicom označio tautologije a nulom kontradikcije radi bolje preglednosti. Ovo je inače semantika digitalne, a ne matematičke logike.*
- Razmisli zašto rezultati funkcija izgledaju baš tako
- Što možemo reći o posljednje dvije funkcije? Jesu li one različite? Što to znači?

- Mogli smo iz prethodnog primjera primijetiti da se cijele funkcije mogu negirati, te da neke funkcije daju jednake izlaze za iste ulaze. Ovo nazivamo **ekvivalentnim** izrazima, te ćemo pogledati neke takve izraze:
  a. $\neg\neg A \equiv A$
  b. $\neg(A \land B) \equiv (\neg A \lor \neg B)$
  c. $\neg(A \lor B) \equiv (\neg A \land \neg B)$
  d. $\neg(A \rightarrow B) \equiv (A \land \neg B)$
  e. $\neg(A \leftarrow B) \equiv (\neg A \land B)$
  f. $\neg(A \equiv B) \equiv ((\neg A \land B) \lor (A \land \neg B))$
     i. *Ovaj operator naziva se **isključivo ili** (aka **xor**) i također zapisuje $A \veebar B$ ili $A \oplus B$*
  g. $\neg \top \equiv \bot$
     - *Napomena: Zagrade pišem jer nisam siguran u prioritete operatora*
- Neke od ovih izraza si vjerojatno već i vidio
  - *Napomena: Ako su ti poznati Demorganovi zakoni, drugi i treći izraz NISU ti zakoni, već oni govore o komplementima unija i presjeka skupova u teoriji skupova do koje ćemo doći kasnije*
- Savjetujem dobro proučiti ove izraze i pokušati ih prevesti na hrvatski
  - *Primjer: drugi izraz glasi: A i B ne vrijedi ako i samo ako ne vrijedi A ili ne vrijedi B*
  - *Zadatak: Za sve prethodne funkcije napiši tablice istinitosti i uvjeri se da su uistinu ekvivalentne (moguće je da sam negdje i pogriješio uostalom)*
    Evo ti definicije još nekih osnovnih funkcija za pomoć:

A	B	A ≡ B	⊤	⊥
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
1	0	0	1	0
1	1	1	1	0

(⊤ i ⊥ su konstante te se mogu poistovjetiti s vrijednostima 1 i 0)
(Da, ekvivalencija se također može smatrati funkcijom, i ona će upravo vratiti istinu ako se vrijednosti izraza A i B poklapaju)

- Važno je primijetiti da su svi izrazi (a. – g.) u svojoj cijelosti ekvivalentni ***tautologijama*** što znači da za svaki izbor varijabla A i B vraćaju **istinu**.

Kada to ne bi bilo tako, ne bismo mogli tvrditi da su izrazi uistinu ekvivalentni, više o tome kasnije

- Prirodno je sada postaviti pitanje o broju različitih ekvivalentnih zapisa neke funkcije i lako se dokazuje da ih svaka funkcija ima beskonačno mnogo
    - *Dokaz: Samo uzastopnom primjenom operatora negacije na neku funkciju možemo generirati proizvoljan broj ekvivalentnih zapisa:*
      $f(A) \equiv \neg\neg f(A) \equiv \neg\neg\neg\neg f(A) \ldots$
- Ako je tako, koji je najpovoljniji oblik funkcije? Možemo li ga ostvariti za svaku funkciju?
    - Jedan od posebno korisnih standardiziranih oblika logičkih izraza (funkcija) jest tako zvana **normalna** forma
    - Za više informacija pogledaj (neobavezno): https://www.youtube.com/watch?v=AEk8OfwpTNw
    - No mi se time nećemo previše zamarati
- Do sada sam sudove tretirao kao varijable s dvije moguće vrijednosti, no njihove istinitosti nisu jedino što nas o njima zanima, zanima nas naime i njihov **sadržaj**
    - Evo nekoliko konkretnih primjera sudova:
      „Vilim je zakon“, „Svi ljudi su majmuni“, „y = 2x“, „Dario je niži od Vilima“, „Netko ovdje je glup“
    - Prisjetimo se prijašnjeg poglavlja o apstrakciji. Kako možemo najefikasnije generalizirati sadržaje sudova, to jest, koja to svojstva svi dijele i koji općeniti format ih može najjednostavnije prikazati?
        - *Napomena: Naravno, ovo je najteža vrsta pitanja i ne očekujem da sam dođeš do konkretnog odgovora, ali primijeti koliko je doista težak bio posao matematičara koji su smišljali sve ovo iz nule*
    - Koncept koji su ti matematičari na kraju izvukli iz sveg ovog zovemo **predikat**
        - Budući da želimo postići što opširniji vokabular, nećemo ograničiti skupove riječi nad kojima logički predikati mogu djelovati, već će sami predikati biti zaduženi da iz njih izvuku neku logiku
        - Tako recimo skupu nasumičnih imena možemo pridružiti predikat *„[x iz skupa imena] je zelen“* čija **istinitost ovisi o izboru pojedinog imena**
        - Svojstvo koje predikat pridodaje nekom skupu je posve proizvoljno i može i ne mora imati smisla, kao i sam skup na koji se primjenjuje
        - No, to nije sve što predikati mogu, ako to želimo, možemo i određeni predikat primijeniti na **više elemenata** nekog skupa, pa čak i specifičnim **redoslijedom**
            - *Primjer: „Vilim pobjeđuje Darija u smashu“* – predikat koji uzima dva elementa iz skupa imena i u kojem je redoslijed tih imena bitan

- *Primjer: „Vilim, Lovro i Dario su u free-for-all matchu“ –* predikat koji uzima tri elemenata i čiji redoslijed pak nije bitan
    - Ovakve predikate nazivamo i **relacijama**
        - *Razmisli: Koje još primjere relacija znaš? Jesu li matematički operatori poput zbrajanja relacije? A jednakosti? Ekvivalencija?*
    - Predikatima već otvaramo mogućnosti za zapisivanje velike količine sudova, no postoje sudovi koji se ne mogu iskazati bez uvođenja još jednog važnog koncepta
        - *Vježba: Pogledaj prijašnje primjere i probaj vidjeti koji bi to sudovi mogli biti*
- Evo i zadnjeg koncepta matematičke logike koji moramo obraditi da bi mogli baš sve: **kvantifikatori**
    - Interesantno je da ih ima točno dva:
        - **Univerzalni kvantifikator ∀** (čitano: „za svaki“) koji označava da se tvrdnja odnosi na svaki član nekog skupa
        - **Egzistencijalni kvantifikator ∃** (čitano: „postoji“) koji označava da tvrdnja odnosi na barem neki član skupa
    - Dakle sada umjesto da pišemo predikat „Vilim, Dario, Lovro… i Gina igraju smash“ možemo naprosto napisati „Svi igraju smash“, gdje „svi“ definiramo nad skupom imena
        - Mogao bi pomisliti da smo ovime možda uštedili na riječima, ali nismo i proširili same mogućnosti našeg vokabulara.
          No sjeti se da skupovi često imaju *beskonačan* broj članova i tada doista ne možemo drugačije iskazati univerzalne sudove
        - Zapitaj se sada jesu li nam ova dva kvantifikatora i *dovoljna* da iskažemo svaku zamislivu tvrdnju nad nekim proizvoljnim skupom. Npr. kako bi iskazali sud „Svi ljudi osim onih ćelavih su lijepi“? *Hint: Sami biramo skupove*
- Povezujući sve ovo zajedno, evo kako tipičnih sudova, zapisanih čistom matematičkom notacijom:
    - Prvo definiramo skup
        - S := {Lovro, Vilim, Dario}
    - Zatim definiramo predikate nad tim skupom:
        - $p_1(x,y)$:= „x i y igraju smash“, $x,y \in S$
        - $p_2(x)$:= „x je zauzet“, $x \in S$
    - Sada možemo formulirati sljedeće tvrdnje:

- $\forall_{x\in S}\forall_{y\in S}[p_1(x,y) \rightarrow p_2(x) \land p_2(x)]$
  U prijevodu: „Za svake dvije osobe koje igraju smash nužno slijedi da su i jedna i druga zauzete“
- $\exists_{x\in S}\exists_{y\in S}[p_1(x,y)]$
  U prijevodu: „Postoje barem dvije osobe koje igraju smash“
- $\forall_{x\in S}\exists_{y\in S}[p_2(x) \land p_1(x,y)]$
  U prijevodu: „Svatko tko je zauzet s nekime igra smash“
- $\exists_{y\in S}\forall_{x\in S}[p_1(x,y)] \rightarrow \forall_{x\in S}[p_2(x)]$
  U prijevodu: „Ako netko sa svakime igra smash, onda su svi zauzeti“

▪ Sasvim mi je jasno da je ovo daleko od razumljivog, ali primijeti neke ključne detalje:
  - Kada koristimo dva kvantifikatora moramo navesti i različite varijable, makar bile i nad istim skupom
  - Te varijable postoje samo unutar zagrada kvantifikatora
  - Redoslijed kvantifikatora koji dijele zagrade je važan
  - Bitno je što stavimo unutar, a što izvan zagrada koje obuhvaćaju kvantifikatori, značenje posljednjeg suda bi se potpuno promjenilo da sam napisao:
    $\exists_{y\in S}\forall_{x\in S}[p_1(x,y) \rightarrow p_2(x)]$
    Ovo bi otprilike značilo: „Postoji netko tko ako s bilo kime igra smash, ta je osoba zauzeta“

▪ Možda te zbunjuje što se jedan sud može sastojati i od logičkih operatora, no kao što sam rekao, granica između sudova i logičkih funkcija/izraza je mutna i potpuno je na nama što ćemo izdvojiti kao sud, a što kao logički izraz
  tako smo i posljednji sud mogli podjeliti na sud A definiran kao: $\exists_{y\in S}\forall_{x\in S}[p_1(x,y)]$ (Netko sa svima igra smash) i sud B definiran kao: $\forall_{x\in S}[p_2(x)]$ (Svi su zauzeti) te uvesti kondicional $\rightarrow$ između njih i dobili bi izraz A $\rightarrow$ B koji sadrži iste informacije kao i originalni sud
  No ostala tri suda se ne daju podijeliti upravo zato što ih grle kvantifikatori

▪ Zadnja stvar koju moram razjasniti kod kvantifikatora jesu odnosi ekvivalencije između izraza u kojima se oni pojavljuju
  Bit ću kratak i sročiti ovo sljedećom ekvivalencijom koju navodim bez dokaza:
  $\neg(\exists_{y\in S}\forall_{x\in S}[p(x,y)]) \equiv \forall_{y\in S}\neg\forall_{x\in S}[p(x,y)]) \equiv \forall_{y\in S}\exists_{x\in S}[\neg p(x,y)])$
  - *Zadatak: Riječima objasni što ovaj izraz tvrdi*

- Ja ću se od sada koliko mogu poštedjeti matematičke notacije i koristiti rečenice jer je pisanje simbola na kompjuteru bolno. Nezgodno je pak kod toga što ne postoji jedinstven prijevod logičkih izraza na običan jezik, makar svaki točan prijevod ima isto značenje.
- Ako ćeš se ikada baviti matematikom, susretat ćeš se s ovim izrazima stalno, tako da ti savjetujem da se potrudiš razumjeti svaki na koji naiđeš i nadam se da će ti ova skripta oko toga pomoći

- Sada je glavno pitanje: Čemu sve ovo?
- Već smo vidjeli neka zanimljiva svojstva logičkih funkcija, specifično ekvivalencije, no nije sasvim jasno koja im je praktična svrha
- To je zato što još nismo došli do **dokaza**
    - Što je to dokaz?
    - Postoji cijela matematička grana koja se bavi upravo tim pitanjem
    - Za nas, dokazi su nizovi matematičko-logičkih koraka koji vode do nekog prirodnog zaključka
    - Dokazati neku tvrdnju znači poistovjetiti ju s **tautologijom** ili ekvivalentno pokazati da se obrat tvrdnje može poistovjetiti s **kontradikcijom**
        - Iz kojeg god razloga, u praksi je dokaz po kontradikciji češći
            - *Primjer: Dokaži da je skup prirodnih brojeva beskonačan*
            - *Rješenje: Kada ne bi bio beskonačan, bio bi konačan, tada bi imao i najveći element, označimo li ga sa n, možemo vidjeti da je n+1 također prirodan broj koji je i veći od n, što je u kontradikciji s pretpostavkom da je n najveći, te skup ne može biti konačan i stoga je beskonačan (da, sve se ovo može izraziti i simbolički)*
    - *Smišljanje dokaza je umijeće koje dolazi s iskustvom i puno prakse*
    - *Ne postoji neki broj pravila koji povezuje sve dokaze i svaki je produkt kreativnog genija pojedinca koji ga je smislio i na njima su izgrađeni temelji čitave matematike*
    - *Drugim riječima, dokazi su **teški**, neizmjerno teži od bilo kakvog računskog zadatka, pod uvjetom da isti ili sličan dokaz nismo već vidjeli (hint: to će biti naš glavni oslonac)*
    - *Tijekom školovanja i studija nitko od tebe neće tražiti da smisliš originalni dokaz, već najvjerojatnije da recitiraš neki poznati, ili u najgorem slučaju da povežeš nekoliko njih uz malo logike i kreativnosti da bi izveo neku lemicu*
    - *Ali želim opet naglasiti koliko je uistinu **teško** baviti se dokazima.*
Mozak se često uspoređuje s mišićem i po toj analogiji računanje je cardio, a dokazivanje je heavy lifting.

I kao i kod dizanja utega, razmišljanjem na višim razinama naprežemo se do iznemoglosti. Bol znači da mozak ojačava, ali je ipak bol.

- *Ako te sve ovo straši, imaj barem utjehu u tome da se možeš podosta oslanjati na intuiciju, to i profesionalci rade*
- *Često dokaz kreće od toga da nam padne na pamet rješenje, a zatim smislimo korake*

- Nakon što smo neku tvrdnju dokazali, ona se može prozvati **teoremom**
  - Svaki teorem ima neke početne uvjete koji moraju biti zadovoljeni da bi vrijedio njegov zaključak, a međukoraci (dokaz) nakon što su jednom iskazani, ne trebaju se pisati
  - Dakle općenit oblik nekog teorema je: „Ako vrijedi A onda slijedi B"
    - *Kako to izraziti logičkim jezikom?*
  - Važno je i zapitati se vrijedi li i **obrat** teorema, što se nikako ne uzima zdravo za gotovo. Razmisli o sljedećim primjerima.
    - *Ako pada kiša, zemlja je mokra*
    - *Ako je broj prost, ima samo dva djelitelja*
    - *Prazan skup nema ni jedan pravi podskup (skup sa strogo manje elemenata)*
    - *Ako je broj $x > y$ onda je i $x^2 > y^2$*
    - *Ako je skup A podskup od skupa B i skup B je podskup od skupa A, onda su A i B isti skup*
  - Naravno, najsretniji smo kada obrat vrijedi i kada teorem govori o ekvivalenciji dva objekta, pogotovo ako je to neka netrivijalna ekvivalencija
- Osim teorema postoje i **leme**, one su ukratko sporedne tvrdnje koje proizlaze iz teorema, navodim ih samo da te ne zbuni kad ih vidiš u literaturi

<u>Teorija Skupova:</u>

- Do sad smo već nekoliko puta spomenuli skupove, no što su oni zapravo?
- Skup je jedan od temeljnih matematičkih objekata koji opisuje vrlo jednostavan i intuitivan koncept grupiranja različitih objekata u kolekcije
- Kako bi definicija skupa bila što jednostavnija i fleksibilnija, ne postoje baš nikakva ograničenja na to kakvi ti objekti moraju biti niti koliko ih može biti
  - Ipak, postoje neka vrlo suptilna ograničenja u koja nećemo previše ulaziti, no ako te zanima možeš googlati *„Axiom of choice"*
- Skup se može definirati navođenjem svih njegovih elemenata ili pak opisivanjem **karakterističnog** svojstva elementa tog skupa
  - Recimo skup svih parnih brojeva: $S = \{x \in N_0 : x = 2n, n \in N_0\}$
    ili alternativno: $S = \{x \in N_0 : x \equiv 0 \pmod 2\}$
- Primijetimo da kako bi definirali prethodni skup, trebamo pomoć već poznatog skupa prirodnih brojeva N_0. Kako onda definirati skup N_0 ili ostale brojevne skupove?

- *Zadatak: Googlaj „Peano Axioms“ i pročitaj prvih 8, trivijalni su*
- *Napomena: od sad ću prirodne brojeve N_0 označavati s N*

- Ja ću preskočiti prvih 8 aksioma i istaknuti samo 9. poznat kao **aksiom indukcije** koji je isprva najzačudniji, ali za nas daleko najvažniji.
  Evo kako glasi:
  - Ako je p *unarni* predikat (primjenjuje se na jedan element), te je p(0) istinit sud i za svaki prirodni broj n vrijedi p(n) → p(S(n)) gdje je S(n) funkcija sljedbenika (aka. n + 1 za prirodne brojeve), tada je p(n) za svaki prirodni broj n istinit sud
- Hajdemo sada analizirati ovo dio po dio
  - Kao prvo, što je to **aksiom**?
  - Aksiomi su tvrdnje koje navodimo bez dokaza i preko kojih definiramo neka osnovna svojstva objekata koje promatramo
  - Tako je deveto osnovno svojstvo prirodnih brojeva upravo to da ako za svaki takav broj tvrdnja o tom broju povlači istu tvrdnju o njegovom sljedbeniku, možemo reći da ta tvrdnja vrijedi za čitav skup prirodnih brojeva, ukoliko znamo da vrijedi barem za prvi element, tj. 0
    - Ovo možemo lakše ilustrirati pomoću domina. Ukratko ova tvrdnja kaže da ako svaki prirodni broj svojim padom „ruši“ i sljedeći prirodni broj, onda ćemo „rušenjem“ prvog broja srušiti sve.
    - Bitno je naglasiti da je ovdje pretpostavka da svaki domino ruši sljedećeg upravo **pretpostavka**, nazvana i **korakom indukcije** kao i pretpostavka da možemo srušiti prvi domino, nazvana **bazom indukcije**. Dakako postoje predikati za koje ove dvije pretpostavke neće vrijediti i to naravno ne narušava integritet prirodnih brojeva.
    - Svojstvo indukcije bilo bi narušeno jedino kada bi korak i baza bile zadovoljene za neki predikat, a on ipak ne bi pokrio sve prirodne brojeve.
    - Upravo nam ovo omogućava da dokažemo mnoge tvrdnje nad skupom prirodnih brojeva
  - Razmislimo, zašto je ovo **definirajuće** svojstvo prirodnih brojeva?
  - Zašto ono ne proizlazi iz nekih drugih, jednostavnijih svojstava?
  - Recimo, ako već znamo da je za svaki prirodan broj n njegov sljedbenik S(n) također prirodan broj, a znamo i da je 0 prirodan broj, nije li onda trivijalno, uz domino analogiju, da ako svaki broj ruši svog sljedbenika, rušenjem prvog rušimo sve?
    - Kako bi se uvjerili da ovo doista **ne** vrijedi, nađimo protuprimjer
    - Definirat ćemo skup $N_+ := N \cup \{a, b, c\}$ te ćemo nad njime definirati funkciju sljedbenika S(n) kao:
      {
      n = a, S(n) = b;

n = b, S(n) = c;
n = c, S(n) = a;
n ∈ N, S(n) = n + 1; *(ovo je priznajem kružna definicija, vidi (*))*
}
Drugim riječima, sljedbenik od a je b, od b je c i od c je a, a za prirodne brojeve definiramo sljedbenika kao i inače.

- Uvjeri se da ovaj skup zadovoljava istih 8 aksioma kao i skup prirodnih brojeva, no što sa aksiomom indukcije?
- Lako se vidi da ukoliko svaki element ruši svog sljedbenika, rušenjem prvog elementa, koji je još uvijek 0 (jer jedini nema prethodnika) ipak ne rušimo sve, ostaju nam a, b i c.
- Stoga ovaj skup nije skup prirodnih brojeva iako zadovoljava prvih 8 aksioma

- Sada vidimo zašto nam je ipak potreban i 9. aksiom kao fundamentalno svojstvo prirodnih brojeva, no možda te zbuni to što uopće ne zahtijevamo da su prirodni brojevi u pravom smislu brojevi
- To je zato što sama definicija brojeva proizlazi iz ovih aksioma!
  Prirodan broj je po definiciji element **bilo kojeg** skupa koji zadovoljava ovih 9 svojstava, a ispostavlja se da je takav samo jedan i to N.
  Zato možemo definirati 1 := S(0), 2 := S(S(0)) … n := $S^n(0)$
  (Drugim riječima, jedan je prvi element, dva je drugi element, n je n-ti element prirodnih brojeva)
  Iz tog razloga funkcija sljedbenika S(n) više je od simboličke nego praktične važnosti, te je u stvarnosti ne definiramo egzaktno (jer je nemoguće)
- (*) Ovo možda djeluje kao dobro poopćenje funkcije S(n), no koristi operaciju zbrajanja koja je definirana pomoću same funkcije S(n), stoga nije dobra definicija

- Hajdemo sada iskoristiti svojstvo indukcije da dokažemo sljedeću jednakost:
  - Zbroj prvih n prirodnih brojeva jednak je n*(n+1)/2
    - Predikat je u ovom slučaju p(n) := $\sum_{i=0}^{n} i$ = n*(n+1)/2
    - $\sum_{i=0}^{n} i$ znači da zbrajamo sve brojeve od 0 do n pod indeksom i
  - Provjerimo prvo vrijedi li baza indukcije:
    - Za n=0 vrijedi 0*1/2 = 0 tj. vrijedi p(0) ✓
  - Sada provjerimo i korak:
    - Pretpostavimo da je zbroj prvih n brojeva jednak n*(n+1)/2 tj. vrijedi p(n)
    - Kako bi dokazali korak, moramo dokazati da vrijedi
      $\forall_{n \in N}$[p(n) → p(n+1)] što se prevodi u
      $\forall_{n \in N}$[$\sum_{i=0}^{n} i$ = n*(n+1)/2 → $\sum_{i=0}^{n+1} i$ = (n+1)(n+2)/2]
    - Vrijedi $\sum_{i=0}^{n+1} i = \sum_{i=0}^{n} i$ + n + 1

        - Radi pretpostavke to je jednako n*(n+1)/2 + n + 1
        - Vrijedi n*(n+1)/2 + n + 1 = $(n^2 + 3n + 2)/2$ = (n+1)(n+2)/2
        - Ovime je korak dokazan ✓
- Nije li to bilo jednostavno?
- Preporučam da si daš vremena da dobro upiješ ovaj postupak
- Koliko god izgledao nezgrapno, u srži je zapravo vrlo elegantan i osnovan primjer indukcije
    - *Podsjetnik: U MATAN skripti možeš naći još primjera i točnije definicije*
- Vjerujem da postoje aksiomi za svaki od osnovnih skupova brojeva, no to ne kanim istražiti. Vratimo se sada na općenite skupove
- Pretpostavio sam da su ti već poznate osnovne operacije nad skupovima poput unije i presjeka, te možda i razlike i komplementa (ovdje označen s akcentom $\overline{\square}$)
- Sve on e temelje se na intuitivnim idejama koje čovjek dobi kad promatra kolekcije objekata. Što ako spojim dva skupa? Što ako gledam samo zajedničke elemente? Što ako oduzmem zajedničke elemente? Što ako gledam samo elemente koji su izvan skupa?
- Iz ovih pitanja proizlaze formalne definicije, a iz njih zaključci i teoremi koji su nešto manje intuitivni
    - Primjerice DeMorganovi zakoni unije i presjeka:
        - $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$
        - $\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$
    - Kako ovo dokazati? Pokušaj sam koristeći matematički jezik.
        - Hint: Po definiciji:
            - $x \in \bar{A} \equiv x \notin A$
            - $x \in (A \cup B) \equiv x \in A \vee x \in B$
            - $x \in (A \cap B) \equiv x \in A \wedge x \in B$
- Ovdje ću spomenuti još operaciju **kartezijevog produkta** koji uzima dva skupa A i B, te tvori novi skup A x B čiji su elementi **uređeni parovi** oblika (a, b) gdje je a ∈ A, b ∈ B
    - Uređeni par podrazumijeva da je poredak prvog i drugog člana bitan, tj. (a, b) = (b, a) → a = b
    - Postoje naravno uređene trojke, četvorke i općenito **entorke**
    - Kartezijev produkt skupa sa samim sobom skraćeno se zapisuje kao S^2 i isto tako, uzastopnom primjenom dobivamo S x S x S … x S = S^n čiji su elementi entorke. Za takav skup kažemo da ima **dimenziju** n.
- Osim operacija nad skupovima, postoje i pojmovi **podskupa** kao i **pravog podskupa**, **praznog** skupa, **ekvivalentnih** i **disjunktnih** skupova, **particije** skupa, te **partitivnog** skupa, evo njihovih definicija:
    - S je **podskup** nekog skupa A u oznaci **S ⊆ A** ako se svaki element iz S nalazi i u skupu A

- S je **pravi podskup** od A u oznaci **S ⊂ A** ako je podskup od A, te ako postoji neki element u A koji nije u S
- **Prazni skup** u oznaci **∅** je skup bez elemenata, te postoji samo jedan
- S i A su **disjunktni** ako je njihov presjek prazan skup
- S i A su **ekvivalentni** ako je A podskup od S i S podskup od A
  - *Napomena: skupovi A := {1, 2, 3} i B := {{1, 2}, 3} nisu ekvivalentni jer se elementi skupa {1, 2} ne pridružuju skupu B iako mu sam {1, 2} pripada, a tako ni A ne sadrži {1, 2} iako sadrži 1 i 2 individualno*
  - *Drugim riječima, ako je B podskup od A, ne znači nužno da A sadrži B*
- **Particija** skupa A jest bilo koji skup čiji su elementi međusobno **disjunktni**, **neprazni** podskupovi od A i čija unija čini skup A
  - Pitanje: Je li nužno da su elementi particije i *pravi* podskupovi od A?
- **Partitivni skup** od A u oznaci P(A) jest skup svih podskupova od A, uključujući i A i prazan skup

- Sada napokon formalno možemo definirati **relacije** i **relacije ekvivalencije**
  - Spomenuo sam da se predikati od dvije ili više varijable mogu nazvati relacijama, jer opisuju odnose između više elemenata iz potencijalno **različitih** skupova.
  - Striktno govoreći, predikati su **indikatorske funkcije** koje govore o tome pripada li određena entorka određenoj relaciji
    - *Napomena: Indikatorska funkcija naprosto znači funkcija koja može poprimiti dvije vrijednosti i čiji rezultat označava uspješnost nekog „događaja“ (u ovom primjeru pripadnosti nekoj relaciji)*
  - Relacije su dakle (**neprazni**) podskupovi višedimenzionalnih skupova, a pripadnost entorke relaciji nam govori nešto o odnosu između članova te entorke
  - Općenito, relacije ne moraju zadovoljavati niti jedno drugo svojstvo, no mi ćemo se ograničiti na **binarne relacije** koje se definiraju nad dvodimenzionalnim prostorima
    - Označavat ćemo ih sa r, te ćemo (a, b) ∈ r skraćeno zapisivati kao a(r)b, a (a, b) ∉ r kao a(!r)b
      - *(Ovo je moja konvencija pogodna za pisanje u wordu)*
  - Uz to, postoje neka svojstva koja relacije mogu imati i koja će nama biti od posebnog interesa:
    - **Refleksivnost** := a(r)a
    - **Simetričnost** := a(r)b → b(r)a
    - **Antisimetričnost** := a(r)b ∧ a ≠ b → b(!r)a
    - **Tranzitivnost** := a(r)b ∧ b(r)c → a(r)c
  - Relaciju koja ima svojstva simetričnosti, refleksivnosti i tranzitivnosti nazivamo **relacijom ekvivalencije.** (Napokon smo i to definirali)

            - Primijetimo prvo neka važna svojstva ovih relacija
                - Uvjeti refleksivnosti i simetričnosti su prilično intuitivni i naprosto nam govore da ako svaki objekt mora biti ekvivalentan sam sebi te da ekvivalencija između dva objekta vrijedi u oba smjera (što smo već zaključili)
                  Ovo ujedno znači da relacija ekvivalencije ne može biti definirana između dva različita skupa, što je također jasno, ali opet napominjem da to ne vrijedi za **sve** relacije
                - Uvjet tranzitivnosti također je na prvi pogled logičan i objašnjava sam sebe.
                  No kao zanimljivu posljedicu ima to da tvori **particiju** izvornog skupa, čiji se elementi nazivaju **klasama ekvivalencije** i koje imaju svoj **reprezentativni član.**
                  Drugim riječima, svi ekvivalentni elementi pripadaju jednoj klasi ekvivalencije, a reprezentativni član može biti bilo koji element klase.
            - Ovo nam omogućava da potencijalno beskonačne prostore reduciramo na nekoliko karakterističnih elemenata koji ga dobro opisuju što je ključno za mnoge matematičke metode
            - Primjerice ako promatramo prostor svih jabuka u svemiru, možda nas zanima pozicija svake individualne jabuke, te gledamo svaku jabuku kao vlastiti objekt i tada ne postoje dvije iste jabuke (ako pretpostavimo da dvije jabuke ne mogu biti na istome mjestu), no ako nas više zanimaju svojstva jabuka (recimo boja, veličina i slatkoća) koja su neovisna o njihovim pozicijama, možemo sve jabuke istih svojstava grupirati jednom relacijom ekvivalencije i kao reprezentativni član uzeti bilo koju od njih. Ovo dakako nije više potpuna slika svih jabuka u svemiru, ali sadrži sve nama bitne informacije.
            - Vidimo sada kako su relacije ekvivalencije vrlo koristan alat za apstrakciju
    - Relacije, kao i ostali matematički objekti **nisu univerzalne istine**, nego se uvode po potrebi. Ne postoji niti jedna relacija koja će vrijediti u svakome problemu, te je na nama da znamo odabrati koje nam najbolje odgovaraju.
- OK, to bi bilo sve što se tiče skupova za sad.
- Razmislimo sad što sve možemo sa našim trenutnim znanjem
    - Apstrakcijom smo naučili **analizirati** svijet oko sebe i uočavati objekte od kojih je sastavljen
    - Logikom smo razvili jezik kojim objekte i veze između njih možemo opisati sudovima, te njih **procesirati** i izvoditi nove zaključke

    - Skupovima smo naučili grupirati objekte u logičke cjeline, te **organizirati** ih pomoću relacija
- No ipak, postoji još mnogo toga što nismo u stanju dobro opisati, kao što su uzročno posljedične ovisnosti između objekata, transformacije itd…
- Na neki način, moglo bi se reći da imamo statičan pogled na svijet u kojem nema promjena, već sve stoji mirno bez međudjelovanja
- Kako iz slika dobiti film? Kako iz točaka dobiti pravac? Kako iz jedan dobiti dva? Kako iz jaja dobiti pile? Kako iz auta dobiti sudar? Kako iz pitanja dobiti odgovor? Odgovori leži naravno u ***FUNKCIJAMA***

Funkcije:

- Naravno, do sad smo već nekoliko puta spomenuli funkcije, kao što smo i u logici već spominjali skupove, no to samo ukazuje na to koliko je teško išta postići bez njih.