DZ Logika 1:

Zadatak 1: Prevedi sljedeće tvrdnje u matematički jezik:

1. Marko i Pero se tuku ako i samo ako ih Ana ne gleda.
2. Marko ne voli Anu ako Ana voli njega, a Ana voli Marka samo ako Marko voli nju.
3. Sutra pada kiša ako i samo ako je danas padala kiša, a prekosutra neće padati samo ako je padala danas a neće sutra.
4. Vilim je pametan samo ako je svatko pametan.
5. Svatko tko voli nogomet navija za neki klub.
6. Svaki navijač nekog kluba ne voli nogomet.
7. Svi vole nekoga ako i samo ako nitko ne mrzi svakoga.
8. Postoji majmun koji voli bilo koga tko mu daje hranu i ne voli nikoga tko mu ne daje hranu.
9. Svatko pijan dobro vozi samo ako su svi pijani
10. Marin voli sebe ako netko voli njega, Petra voli svakoga ako Marin voli nju, Marin ne voli nikoga osim sebe ako voli sam sebe.

Upute:

- Po volji odaberi oznake i njihove definicije, npr „Marko ne voli jabuku“ može biti prevedeno kao $\neg v(m, j)$ gdje je predikat $v(x, y)$:= „x voli y“, „m“ := marko a „j“ := jabuka, ali može i biti samo $p(m)$ gdje je predikat $p(x)$:= „x ne voli jabuku“, no pokušaj u predikate stavljati što manje imenica i što više varijabla, tj. učiniti ih što općenitijima
- Sam odluči kada ima smisla definirati nešto kao skup, a kada kao jedan element
  - Recimo Marko ne voli jabuke moglo bi se interpretirati kao i prošla rečenica gdje je „j“ := jabuke, no prikladnije je kod množine definirati skup, recimo $J := \{x : j(x)\}$
    gdje $j(x)$ predikat := „x je jabuka“ i onda bi sud glasio : „$\forall_{x \in J}[v(m, x)]$“
  - Alternativno, umjesto skupa, možemo direktno iskoristiti predikat u sudu koristeći **općeniti** univerzalni kvantifikator:
    „$\forall_x[j(x) \rightarrow \neg v(m, x)]$“
    ovo ima potpuno identično značenje kao i prethodni sud, zapiši kako ti je draže
- *Napomena: Vrlo često se predikati zapisuju riječima jer je tako čitljivije (npr „ $\forall_x$[x je jabuka $\rightarrow$ marko ne voli x“ je vrlo tipičan zapis) ali ti ćeš za vježbu pisati predikate egzaktno*
- **Dobro pazi na odnose ako i samo ako**
  - podsjetnik: Marko je ljut samo ako nema jabuku prevelo bi se kao „marko je ljut $\rightarrow$ marko nema jabuku“, a marko je ljut ako nema jabuku prevodi se u „marko nema jabuku $\rightarrow$ marko je ljut“
  - Zapravo i ima smisla kada razmisliš o tome

- **Još nešto o kvantifikatorima**:
  Kada je potrebno definirati više kvantifikatora za jedan sud UVJEK se kvantifikatori pišu na početku suda
  - npr. „Svaki majmun nekome ide na živce"
    prevedeno kao: ∀x[x je majmun → ∃y[x ide na živce y]] je <u>KRIV</u> zapis
    ispravno bi bilo: ∀x∃y[x je majmun → x ide na živce y] je <u>TOČAN</u> zapis
  - Ovo je samo stvar pravopisa, po značenju oba zapisa govore istu stvar
  - Općenito:
    - ∀x∃y se prevodi kao: „Za svaki x postoji y takav da vrijedi…"
    - ∃y∀x se prevodi kao: „Postoji y takav da za svaki x vrijedi…"
    - ∀x∀y se prevodi kao: „Za svaki x i y vrijedi…"
    - ∃x∃y se prevodi kao: „Za neki x i y vrijedi…"
  - Unatoč tome što sam rekao, moguće je da u jednom sudu bude više kvantifikatora koji **nisu** grupirani ali tada oni moraju biti međusobno nepovezani npr:
    - „Ako postoji majmun onda su svi sretni" prevodi se kao:
      ∃y[y je majmun] → ∀x[x je sretan]
    - No da je rečenica glasila: „Ako postoji majmun, onda ga svi vole"
      ∃y[y je majmun] → ∀x[x voli y] nije točno jer y nije definiran
      ∃y[y je majmun] → ∃y∀x[x voli y] nije točno jer prvi i drugi y nisu nužno isti
      - Problem u ovoj rečenici je što nije dobro definirana i ne govori što se događa ako ima više majmuna.
      - Tri moguće interpretacije su:
        - 1: „Svi vole sve majmune"
          prevedeno u: ∀y∀x[y je majmun → x voli y]
        - 2: „Za nekoga vrijedi da ako je majmun onda ga svi vole"
          prevedeno u: ∃y∀x[y je majmun → x voli y]
        - 3: „Ako postoji neki majmun, onda svi nekog majmuna vole" dakle nije bitno kojeg (nema prvog majmuna) te je prijevod:
          ∃y[y je majmun] → ∃y∀x[y je majmun ∧ x voli y]
      - Trudit ću se da jasno definiran svaki sud tako da se ne moraš brinuti o ovom

Zadatak 2: Dokaži sljedeće tvrdnje (pretpostavke uzmi iz prošlog zadatka):

1. (Uz pretpostavku 2) Dokaži da Ana ne voli Marka.
2. (Uz pretpostavku 3) Dokaži da će prekosutra padati kiša.
3. (Uz pretpostavke 5 i 6) Slijedi li kontradikcija? Ako slijedi izvedi ju, inače daj protuprimjer.
4. Je li 7 tautologija? Ako da, dokaži, inače daj protuprimjer.
5. Pojednostavi 8.
6. (Uz pretpostavku 10) Dokaži da Marin ne voli Petru.

Upute:

- Tvrdnje se dokazuju iz početnih pretpostavka korak po korak
- Potrebno je zapisati i argumentirati ukratko svaki korak (dedukciju)
  - Primjer:
    - Pretpostavljamo: $A \rightarrow B, \neg B$
    - Dokazujemo da slijedi: $\neg A \vee C$
    - Prvi korak: $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$
    - Drugi korak: $(\neg B \rightarrow \neg A) \wedge \neg B \rightarrow \neg A$
    - Treći korak: $\neg A \rightarrow \neg A \wedge C$
- Ako tvrdnja nije ispravna, potrebno je naći protuprimjer, tj. dodatne uvjete koji nisu u kontradikciji s početnim uvjetima ali jesu u kontradikciji sa zaključkom
  - Primjer:
    - Pretpostavimo: $A \rightarrow B$
    - Dokazujemo da ne slijedi: $\neg A \vee C$
    - Prvi korak: Pretpostavimo A
      - Tada vrijedi $A \wedge B$, nema kontradikcije, te je A validna pretpostavka
      - Drugi korak: Pretpostavimo $\neg A \vee C$
        - $\neg A \vee C \rightarrow \neg A$
        - $\neg A \wedge A \leftrightarrow \perp$
      - Stoga vrijedi $\neg(\neg A \vee C)$
      - Ovo je u kontradikciji sa $\neg A \vee C$ te možemo reći da ono ne slijedi iz početnih uvjeta
- Pretpostavka A tada se naziva protuprimjerom koji opovrgava tvrdnju

Zadatak 3*:

Svi ljudi su majmuni samo ako svi ljudi izruguju nekog tko nije majmun.
Postoji barem jedan čovjek.

Dokaži da ako su svi ljudi majmuni postoji netko tko nije čovjek i komu se neki čovjek izruguje.

Upute:

- Good luck!