Uvod

Bloom's taxonomy

- Model po kojem se sastavlja većina ispita i ocjenjuje sposobnost
- U školi se fokusira samo na prve tri razine učenja
    - **Know** – pamćenje informacija
    - **Comprehend** – razumijevanje informacija
    - **Apply** – primjena stečenog znanja na poznate probleme
- Ali za svladavanje naprednijih koncepata potrebno je svladati barem i sljedeće dvije
    - **Analyse** – grupiranje i organizacija informacija, apstrahiranje, prepoznavanje uzročno-posljedičnih veza itd.
    - **Sythesize** – traženje novog značenja u poznatom i rješavanje novih problema (problem solving)
- Do sad si vjerojatno do neke mjere primjenjivao svih 5 a možda i tajnu šestu razinu, no dobro je postati svjestan njihovog postojanja.
- Za najefikasnije učenje fokus treba biti na najvišoj razini – synthesize
- Za više informacija preporučam https://www.youtube.com/watch?v=1xqerXscTsE
- Ali slobodno i sam istraži

Osnovni koncepti apstrakcije

- Apstrakcija
    - Sposobnost izdvajanja, sažimanja i poopćivanja informacija u apstraktne **objekte**
    - Zahtjeva razmišljanje viših razina
    - Objekt
        - Objektom nazivamo bilo što što se može apstrahirati od svoje okoline i što s njom može komunicirati preko također apstrahiranog **sučelja**
    - Sučelje
        - Sučelje objekta čine sva njegova definirajuća svojstva koja vežu sve **instance** tog objekta
        - Preko sučelja vanjski svijet promatra objekt i daje mu **ulazne** informacije, dok objekt vanjski svijet preko istog sučelja promatra te šalje **izlazne** informacije
        - Kada gledamo objekt nas ukratko ne zanima ništa osim ulazno-izlaznog odnosa koji s njime uspostavljamo
        - Ovime se ne zamaramo irelevantnim detaljima pri baratanju s objektima čime oslobađamo radnu memoriju svog mozga (OGROMNA DOBIT)
    - Primjer:
        - Ljudi su u svom svakodnevnom životu primijetili pojavljivanje oblika koji je omeđen s tri strane te odlučili tom konceptu pridodati ime trokut. Trokut je stoga svaka površina omeđena s tri strane (uz dodatan uvjet da su ravne)
        - Ni jedan trokut nije identičan, no svi trokuti dijele svojstva koja ih definiraju. Ona čine *sučelje* trokuta. Preko tog sučelja možemo se zapitati kolike su duljine stranica pojedinog trokuta, kolika je mjera kuta između dvije susjedne stranice, a možemo se i pozvati na dokazanu činjenicu da je zbroj unutarnjih kutova u *svim* trokutima jednak 180° bez da znamo poziciju svake točke koja čini njegov obrub i unutrašnjost
- Crna kutija
    - Točniji naziv za objekt kakav sam prethodno definirao je **crna kutija**

    - Crna kutija je model čija je unutarnja arhitektura nepoznata, te ima samo ulazne i izlazne priključke
    - Objekt općenito ne podrazumijeva striktno ovu definiciju, ali kad ja govorim o objektima mislim na nju
- Veza s matematikom
    - Apstrakcija kao koncept se koristi apsolutno svugdje te bi bez nje i svakodnevni ljudski život bio nemoguć. Naš mozak nema kapacitet za praćenje pozicija i svojstava, a ni percipiranje svakog pojedinog atoma te nam dobro dođe sposobnost da veliku količinu njih naprosto zapamtimo kao *„računalo“*
    - Isto tako dakako možemo uštediti na glavobolji ako umjesto da matematiku promatramo kao kolekciju formula i zadataka u kojima se primjenjuju (takozvana matematika na nižoj razini) promatramo umjesto toga alate koje nam nudi i njihove fantastične sposobnosti (tzv. matematika na višoj razini)
    - Zato kad sljedeći put vidiš jednadžbu ili neki drugi matematički objekt, nemoj se odmah zapitati kako je se najbrže riješiti, već se zapitaj kao pravi znanstvenik, kako mi ovo može poslužiti? U početku će ti to svakako biti teže, no vremenom će ti beskrajno olakšati život. Dakako, nekad ćeš naprosto zaključiti da ti neki alat nije od ama baš nikakvog interesa i tada ga se možeš slobodno što prije riješiti.

Matematički jezik

- U literaturi ćeš često vidjeti tvrdnje i dokaze iskazane simbolički u takozvanom matematičkom jeziku
- Dobro je stoga moći čitati takve tvrdnje i to s relativnom lakoćom, kako ne bi morao trošiti vrijeme na prevođenje na ljudski jezik
- Evo nekih osnovnih simbola i njihovih prijevoda
    1. $A \land B$ - A i B (**konjunkcija**)
    2. $A \lor B$ - A ili B (**disjunkcija**)
    3. $\neg A$ – ne A (**komplement**)
    4. $A \rightarrow B$ – ako A onda B (kažemo da je A **dovoljan** uvjet za B)
    5. $A \leftarrow B$ – B samo ako A (kažemo da je A **nužan** uvjet za B)
    6. $A \leftrightarrow B$ – A ako i samo ako B (kažemo da su A i B **ekvivalentni**)
        i. Čest je i kraći zapis $A \equiv B$
    7. $\top$ – uvijek istina (**tautologija**)
    8. $\bot$ – uvijek neistina (**kontradikcija**)
- Posebnu pažnju posvetiti na posljednja tri izraza
- Razlika između izraza ako i samo ako je u govornom jeziku neznatna ali kada se ove fraze pojavljuju u kontekstu matematike njihovo značenje nije podložno interpretaciji i razlike su bitne
- A i B u ovim izrazima nazivamo **sudovima**, a oni predstavljaju varijable proizvoljnih istinitosti (A i B mogu biti istiniti ili neistiniti neovisno jedno o drugom)
    - Iz tog razloga logički izrazi nazivaju se katkad i funkcijama/operatorima čiji izlazi ovise o vrijednostima sudova (tj. varijabla) te je i korisno promatrati ih na taj način. Zašto? Koliko god kompleksan bio izraz, njegov izlaz uvijek može poprimiti samo dvije vrijednosti: **true** ili **false**, a isto vrijedi i za svaki od njegovih sudova
        - *Primijeti: Budući da funkcije i varijable poprimaju iste vrijednosti, funkcije kao svoj ulaz mogu primati druge funkcije (tzv. zavisne varijable), te tako dobivamo složenije izraze*
    - Stoga ako radimo s funkcijama dvije varijable, možemo izračunati njihove vrijednosti za svaku kombinaciju ulaza A i B (kojih je 2^2) i rezultate zapisati u tzv. tablice istinitosti. Evo nekih primjera:

A	B	$A \land B$	$A \lor B$	$A \rightarrow B$	$\neg(A \rightarrow B)$	$A \land \neg B$
0	0	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	1	1	0	0

- *Napomena: Ovdje sam jedinicom označio tautologije a nulom kontradikcije radi bolje preglednosti. Ovo je inače semantika digitalne, a ne matematičke logike.*

    - Razmisli zašto rezultati funkcija izgledaju baš tako
    - Što možemo reći o posljednje dvije funkcije? Jesu li one različite? Što to znači?
- Mogli smo iz prethodnog primjera primijetiti da se cijele funkcije mogu negirati, te da neke funkcije daju jednake izlaze za iste ulaze. Ovo nazivamo **ekvivalentnim** izrazima, te ćemo pogledati neke takve izraze:
    a. $\neg\neg A \equiv A$
    b. $\neg(A \land B) \equiv (\neg A \lor \neg B)$
    c. $\neg(A \lor B) \equiv (\neg A \land \neg B)$
    d. $\neg(A \rightarrow B) \equiv (A \land \neg B)$
    e. $\neg(A \leftarrow B) \equiv (\neg A \land B)$
    f. $\neg(A \equiv B) \equiv ((\neg A \lor B) \land (A \lor \neg B))$
        i. *Ovaj operator naziva se* ***isključivo ili*** *(aka* ***xor****) i također zapisuje* $A \veebar B$ *ili* $A \oplus B$
    g. $\neg\top \equiv \bot$
        - *Napomena: Zagrade pišem jer nisam siguran u prioritete operatora*
- Neke od ovih izraza si vjerojatno već i vidio
    - *Napomena: Ako su ti poznati Demorganovi zakoni, drugi i treći izraz NISU ti zakoni, već oni govore o komplementima unija i presjeka skupova u teoriji skupova do koje ćemo doći kasnije*
- Savjetujem dobro proučiti ove izraze i pokušati ih prevesti na hrvatski
    - *Primjer: drugi izraz glasi: A i B ne vrijedi ako i samo ako ne vrijedi A ili ne vrijedi B*
    - *Zadatak: Za sve prethodne funkcije napiši tablice istinitosti i uvjeri se da su uistinu ekvivalentne (moguće je da sam negdje i pogriješio uostalom)*
    Evo ti definicije još nekih osnovnih funkcija za pomoć:

A	B	A ≡ B	⊤	⊥
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
1	0	0	1	0
1	1	1	1	0

(⊤ i ⊥ su konstante te se mogu poistovjetiti s vrijednostima 1 i 0)
(Da, ekvivalencija se također može smatrati funkcijom, i ona će upravo vratiti istinu ako se vrijednosti izraza A i B poklapaju)

- Važno je primijetiti da su svi izrazi (a. – g.) u svojoj cijelosti ekvivalentni ***tautologijama*** što znači da za svaki izbor varijabla A i B vraćaju **istinu**.
  Kada to ne bi bilo tako, ne bismo mogli tvrditi da su izrazi uistinu ekvivalentni, više o tome kasnije

- Prirodno je sada postaviti pitanje o broju različitih ekvivalentnih zapisa neke funkcije i lako se dokazuje da ih svaka funkcija ima beskonačno mnogo
  - *Dokaz: Samo uzastopnom primjenom operatora negacije na neku funkciju možemo generirati proizvoljan broj ekvivalentnih zapisa:*
    $f(A) \equiv \neg\neg f(A) \equiv \neg\neg\neg\neg f(A) \ldots$
- Ako je tako, koji je najpovoljniji oblik funkcije? Možemo li ga ostvariti za svaku funkciju?
  - Jedan od posebno korisnih standardiziranih oblika logičkih izraza (funkcija) jest tako zvana **normalna** forma
  - Za više informacija pogledaj (neobavezno): https://www.youtube.com/watch?v=AEk8OfwpTNw
  - No mi se time nećemo previše zamarati
- Do sada sam sudove tretirao kao varijable s dvije moguće vrijednosti, no njihove istinitosti nisu jedino što nas o njima zanima, zanima nas naime i njihov **sadržaj**
  - Evo nekoliko konkretnih primjera sudova:
    „Vilim je zakon“, „Svi ljudi su majmuni“, „y = 2x“, „Dario je niži od Vilima“, „Netko ovdje je glup“
  - Prisjetimo se prijašnjeg poglavlja o apstrakciji. Kako možemo najefikasnije generalizirati sadržaje sudova, to jest, koja to svojstva svi dijele i koji općeniti format ih može najjednostavnije prikazati?
    - *Napomena: Naravno, ovo je najteža vrsta pitanja i ne očekujem da sam dođeš do konkretnog odgovora, ali primijeti koliko je doista težak bio posao matematičara koji su smišljali sve ovo iz nule*
  - Koncept koji su ti matematičari na kraju izvukli iz sveg ovog zovemo **predikat**
    - Budući da želimo postići što opširniji vokabular, nećemo ograničiti skupove riječi nad kojima logički predikati mogu djelovati, već će sami predikati biti zaduženi da iz njih izvuku neku logiku
    - Tako recimo skupu nasumičnih imena možemo pridružiti predikat *„[x iz skupa imena] je zelen“* čija **istinitost ovisi o izboru pojedinog imena**
    - Svojstvo koje predikat pridodaje nekom skupu je posve proizvoljno i može i ne mora imati smisla, kao i sam skup na koji se primjenjuje
    - No, to nije sve što predikati mogu, ako to želimo, možemo i određeni predikat primijeniti na **više elemenata** nekog skupa, pa čak i specifičnim **redoslijedom**
      - *Primjer: „Vilim pobjeđuje Darija u smashu“* – predikat koji uzima dva elementa iz skupa imena i u kojem je redoslijed tih imena bitan

        - *Primjer: „Vilim, Lovro i Dario su u free-for-all matchu“ –* predikat koji uzima tri elemenata i čiji redoslijed pak nije bitan
    - Ovakve predikate nazivamo i **relacijama**
        - *Razmisli: Koje još primjere relacija znaš? Jesu li matematički operatori poput zbrajanja relacije? A jednakosti? Ekvivalencija?*
    - Predikatima već otvaramo mogućnosti za zapisivanje velike količine sudova, no postoje sudovi koji se ne mogu iskazati bez uvođenja još jednog važnog koncepta
        - *Vježba: Pogledaj prijašnje primjere i probaj vidjeti koji bi to sudovi mogli biti*
- Evo i zadnjeg koncepta matematičke logike koji moramo obraditi da bi mogli baš sve: **kvantifikatori**
    - Interesantno je da ih ima točno dva:
        - **Univerzalni kvantifikator ∀** (čitano: „za svaki“) koji označava da se tvrdnja odnosi na svaki član nekog skupa
        - **Egzistencijalni kvantifikator ∃** (čitano: „postoji“) koji označava da tvrdnja odnosi na barem neki član skupa
    - Dakle sada umjesto da pišemo predikat „Vilim, Dario, Lovro… i Gina igraju smash“ možemo naprosto napisati „Svi igraju smash“, gdje „svi“ definiramo nad skupom imena
        - Mogao bi pomisliti da smo ovime možda uštedili na riječima, ali nismo i proširili same mogućnosti našeg vokabulara.
No sjeti se da skupovi često imaju *beskonačan* broj članova i tada doista ne možemo drugačije iskazati univerzalne sudove
        - Zapitaj se sada jesu li nam ova dva kvantifikatora i *dovoljna* da iskažemo svaku zamislivu tvrdnju nad nekim proizvoljnim skupom. Npr. kako bi iskazali sud „Svi ljudi osim onih ćelavih su lijepi“? *Hint: Sami biramo skupove*
- Povezujući sve ovo zajedno, evo kako tipičnih sudova, zapisanih čistom matematičkom notacijom:
    - Prvo definiramo skup
        - S := {Lovro, Vilim, Dario}
    - Zatim definiramo predikate nad tim skupom:
        - $p_1(x,y)$:= „x i y igraju smash“, $x,y \in S$
        - $p_2(x)$:= „x je zauzet“, $x \in S$
    - Sada možemo formulirati sljedeće tvrdnje:

    - $\forall_{x\in S}\forall_{y\in S}[p_1(x,y) \rightarrow p_2(x) \land p_2(x)]$
      U prijevodu: „Za svake dvije osobe koje igraju smash nužno slijedi da su i jedna i druga zauzete“
    - $\exists_{x\in S}\exists_{y\in S}[p_1(x,y)]$
      U prijevodu: „Postoje barem dvije osobe koje igraju smash“
    - $\forall_{x\in S}\exists_{y\in S}[p_2(x) \land p_1(x,y)]$
      U prijevodu: „Svatko tko je zauzet s nekime igra smash“
    - $\exists_{y\in S}\forall_{x\in S}[p_1(x,y)] \rightarrow \forall_{x\in S}[p_2(x)]$
      U prijevodu: „Ako netko sa svakime igra smash, onda su svi zauzeti“
- Sasvim mi je jasno da je ovo daleko od razumljivog, ali primijeti neke ključne detalje:
    - Kada koristimo dva kvantifikatora moramo navesti i različite varijable, makar bile i nad istim skupom
    - Te varijable postoje samo unutar zagrada kvantifikatora
    - Redoslijed kvantifikatora koji dijele zagrade je važan
    - Bitno je što stavimo unutar, a što izvan zagrada koje obuhvaćaju kvantifikatori, značenje posljednjeg suda bi se potpuno promjenilo da sam napisao:
      $\exists_{y\in S}\forall_{x\in S}[p_1(x,y) \rightarrow p_2(x)]$
      Ovo bi otprilike značilo: „Postoji netko tko ako s bilo kime igra smash, ta je osoba zauzeta“
- Možda te zbunjuje što se jedan sud može sastojati i od logičkih operatora, no kao što sam rekao, granica između sudova i logičkih funkcija/izraza je mutna i potpuno je na nama što ćemo izdvojiti kao sud, a što kao logički izraz
  tako smo i posljednji sud mogli podjeliti na sud A definiran kao: $\exists_{y\in S}\forall_{x\in S}[p_1(x,y)]$ (Netko sa svima igra smash) i sud B definiran kao: $\forall_{x\in S}[p_2(x)]$ (Svi su zauzeti) te uvesti kondicional $\rightarrow$ između njih i dobili bi izraz A $\rightarrow$ B koji sadrži iste informacije kao i originalni sud
  No ostala tri suda se ne daju podijeliti upravo zato što ih grle kvantifikatori
- Zadnja stvar koju moram razjasniti kod kvantifikatora jesu odnosi ekvivalencije između izraza u kojima se oni pojavljuju
  Bit ću kratak i sročiti ovo sljedećom ekvivalencijom koju navodim bez dokaza:
  $\neg(\exists_{y\in S}\forall_{x\in S}[p(x,y)]) \equiv \forall_{y\in S}\neg\forall_{x\in S}[p(x,y)]) \equiv \forall_{y\in S}\exists_{x\in S}[\neg p(x,y)])$
    - *Zadatak: Riječima objasni što ovaj izraz tvrdi*

    - Ja ću se od sada koliko mogu poštedjeti matematičke notacije i koristiti rečenice jer je pisanje simbola na kompjuteru bolno. Nezgodno je pak kod toga što ne postoji jedinstven prijevod logičkih izraza na običan jezik, makar svaki točan prijevod ima isto značenje.
    - Ako ćeš se ikada baviti matematikom, susretat ćeš se s ovim izrazima stalno, tako da ti savjetujem da se potrudiš razumjeti svaki na koji naiđeš i nadam se da će ti ova skripta oko toga pomoći

- Sada je glavno pitanje: Čemu sve ovo?
- Već smo vidjeli neka zanimljiva svojstva logičkih funkcija, specifično ekvivalencije, no nije sasvim jasno koja im je praktična svrha
- To je zato što još nismo došli do **dokaza**
    - Što je to dokaz?
    - Postoji cijela matematička grana koja se bavi upravo tim pitanjem
    - Za nas, dokazi su nizovi matematičko-logičkih koraka koji vode do nekog prirodnog zaključka
    - Dokazati neku tvrdnju znači poistovjetiti ju s **tautologijom** ili ekvivalentno pokazati da se obrat tvrdnje može poistovjetiti s **kontradikcijom**
        - Iz kojeg god razloga, u praksi je dokaz po kontradikciji češći
            - *Primjer: Dokaži da je skup prirodnih brojeva beskonačan*
            - *Rješenje: Kada ne bi bio beskonačan, bio bi konačan, tada bi imao i najveći element, označimo li ga sa n, možemo vidjeti da je n+1 također prirodan broj koji je i veći od n, što je u kontradikciji s pretpostavkom da je n najveći, te skup ne može biti konačan i stoga je beskonačan (da sve se ovo može izraziti i simbolički)*
    - *Smišljanje dokaza je umijeće koje dolazi s iskustvom i puno prakse*
    - *Ne postoji neki broj pravila koji povezuje sve dokaze i svaki je produkt kreativnog genija pojedinca koji ga je smislio i na njima su izgrađeni temelji čitave matematike*
    - *Drugim riječima, dokazi su **teški**, neizmjerno teži od bilo kakvog računskog zadatka, pod uvjetom da isti ili sličan dokaz nismo već vidjeli (hint: to će biti naš glavni oslonac)*
    - *Tijekom školovanja i studija nitko od tebe neće tražiti da smisliš originalni dokaz, već najvjerojatnije da recitiraš neki poznati, ili u najgorem slučaju da povežeš nekoliko njih uz malo logike i kreativnosti da bi izveo neku lemicu*
    - *Ali želim opet naglasiti koliko je uistinu **teško** baviti se dokazima.*
Mozak se često uspoređuje s mišićem i po toj analogiji računanje je cardio, a dokazivanje je heavy lifting.

I kao i kod dizanja utega, razmišljanjem na višim razinama naprežemo se do iznemoglosti. Bol znači da mozak ojačava, ali je ipak bol.

- *Ako te sve ovo straši, imaj barem utjehu u tome da se možeš podosta oslanjati na intuiciju, to i profesionalci rade*
- *Često dokaz kreće od toga da nam padne na pamet rješenje, a zatim smislimo korake*