Linear Algebra-A

Assignments - Week 5

Assignments from the Textbook (*Hardcover*)

Section 2.3: 1,2,5,7,10,13,17,20,33,37,43.

Note: 20(c): If $\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v} = 0$, then $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ are called **perpendicular** (垂直).

Section 2.4: 5.

Supplementary Problem Set

【注：为熟悉中文表达，采用中文出题。】

1. 设向量$\boldsymbol{\beta}$可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$线性表出，但不能由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{m-1}$线性表出.
   (1) 求证$\boldsymbol{\alpha}_m$不能由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{m-1}$线性表出.
   (2) 求证$\boldsymbol{\alpha}_m$必能由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{m-1}, \boldsymbol{\beta}$线性表出.

2. 设四元齐次线性方程组(I)为
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$
已知另一四元齐次线性方程组(II)的一个基础解系（即解空间的一组基）为
$$\boldsymbol{\alpha}_1 = (2, -1, a+2, 1)^T, \boldsymbol{\alpha}_2 = (-1, 2, 4, a+8)^T$$
   (1) 求方程组(I)的一个基础解系.
   (2) 当a为何值时，方程组(I)和(II)有非零公共解？在有非零公共解时，求出全部非零公共解.

3. 设$\boldsymbol{A}$为5×4矩阵且$\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) = 2$，$\boldsymbol{x}_1 = [1 \quad 2 \quad 0 \quad 1]^T$，$\boldsymbol{x}_2 = [2 \quad 1 \quad 1 \quad 3]^T$是方程组$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$的两个解，$\boldsymbol{x}_3 = [1 \quad 0 \quad 1 \quad 0]^T$是对应的齐次方程组$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$的一个解，试求$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$的一般解.

4. 设$\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{n1}\end{bmatrix},\boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{n2}\end{bmatrix},\cdots,\boldsymbol{v}_k=\begin{bmatrix}a_{1k}\\a_{2k}\\\vdots\\a_{nk}\end{bmatrix}$ 是线性无关的，证明

$$\boldsymbol{v}_1^*=\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{n1}\\a_{n+1,1}\\\vdots\\a_{m1}\end{bmatrix},\boldsymbol{v}_2^*=\begin{bmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{n2}\\a_{n+1,2}\\\vdots\\a_{m2}\end{bmatrix},\cdots,\boldsymbol{v}_k^*=\begin{bmatrix}a_{1k}\\a_{2k}\\\vdots\\a_{nk}\\a_{n+1,k}\\\vdots\\a_{mk}\end{bmatrix}$$也线性无关.

即如果一组n维向量线性无关, 那么把这些向量任意添加相同个数的若干个分量所得到的新向量组也是线性无关的。反过来，如果一组向量线性相关，那么它们各去掉相同个数的若干分量所得到的新向量组也是线性相关的。

5. 在$\mathbb{R}^4$中，求子空间

$$V_1=Span\{(1,-5,3,2)^T,(4,1,-2,9)^T\}$$

和

$$V_2=Span\{(2,0,-1,4)^T,(0,3,4,-5)^T\}$$

的交空间$V_1\cap V_2$的一组基.