

熱交換器のスケーリング計算について

基礎知識

- 総括熱伝達率：熱交換器の2流体間の熱伝達率 $[W/(m^2 \cdot K)]$

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{h_1} + \frac{d}{k'} + \frac{1}{h_2}$$

h_1 : 高温流体の熱伝達率 $[W/(m^2 \cdot K)]$
 h_2 : 低温流体の熱伝達率 $[W/(m^2 \cdot K)]$
 k' : 熱伝導率 $[W/(m \cdot K)]$
 d : 流路間の仕切り板厚さ $[m]$

- ヌセルト数：熱伝達率の無次元数

$$Nu = \frac{hL}{k}$$

h : 流体の熱伝達率
 k : 流体の熱伝導率
 L : 代表長さ

強制対流時のヌセルト数

$$Nu \propto Re^{0.8} \cdot Pr^{\frac{1}{3}}$$

(a) 平板の場合

$$Nu = 0.037Re^{0.8}Pr^{\frac{1}{3}}$$

(b) 円管の場合

$$Nu = 0.023Re^{0.8}Pr^{\frac{1}{3}}$$

- レイノルズ数

$$Re = \frac{\rho v L}{\mu} = \frac{\dot{m}}{A} \cdot \frac{L}{\mu}$$

- プラントル数：熱伝導率の無次元数

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\mu c_p}{k}$$

μ : 粘性係数 $[Pa \cdot s]$

$\nu = \frac{\mu}{\rho}$: 動粘度

$\alpha = \frac{k}{\rho c_p}$: 温度広散係数

総括熱伝達率のスケーリング

設計点での総括熱伝達率 U_{des} は、板厚が十分に小さいものとして無視すると、

$$\frac{1}{U_{des}} = \frac{1}{h_{1des}} + \frac{1}{h_{2des}}$$

となり、高温側と低温側の熱伝達率の比 λ_{des} をとると、

$$\begin{aligned}\lambda_{des} &= \frac{h_{2des}}{h_{1des}} = \frac{Nu_{2des}}{Nu_{1des}} \\ &= \left(\frac{Re_{2des}}{Re_{1des}} \right)^{0.8} \cdot \left(\frac{Pr_{2des}}{Pr_{1des}} \right)^{\frac{1}{3}} \quad \left(\because Nu \propto Re^{0.8}, Pr^{\frac{1}{3}} \right)\end{aligned}$$

となる。

レイルズ数とプラントル数の比（有効伝熱面積 A と代表長さ L は高温側と低温側で同じものとする）は、それぞれ

$$\begin{aligned}\frac{Re_{2des}}{Re_{1des}} &= \frac{\frac{\dot{m}_{2des}}{A} \cdot \frac{L}{\mu_{2des}}}{\frac{\dot{m}_{1des}}{A} \cdot \frac{L}{\mu_{1des}}} = \frac{\dot{m}_{2des}}{\dot{m}_{1des}} \cdot \frac{\mu_{1des}}{\mu_{2des}} \\ \frac{Pr_{2des}}{Pr_{1des}} &= \frac{\frac{\mu_{2des} c_{p2des}}{k_{2des}}}{\frac{\mu_{1des} c_{p1des}}{k_{1des}}} = \frac{c_{p2des}}{c_{p1des}} \cdot \frac{\mu_{2des}}{\mu_{1des}} \cdot \frac{k_{1des}}{k_{2des}}\end{aligned}$$

であるから、高温側と低温側の熱伝達率の比 λ_{des} は

$$\lambda_{des} = \left(\frac{\dot{m}_{2des}}{\dot{m}_{1des}} \cdot \frac{\mu_{1des}}{\mu_{2des}} \right)^{0.8} \cdot \left(\frac{c_{p2des}}{c_{p1des}} \cdot \frac{\mu_{2des}}{\mu_{1des}} \cdot \frac{k_{1des}}{k_{2des}} \right)^{\frac{1}{3}}$$

となる。

さらに以下の仮定が成り立つ場合は、 λ_{des} をより簡略化することができる。

- 仮定1
 - (a) 温度や圧力による熱伝導率の変化がほぼゼロに等しい
 - (b) 温度や圧力による粘性係数の変化がほぼゼロに等しい
 - (c) 温度や圧力による比熱の変化がほぼゼロに等しい
 - (d) 高温側と低温側で流体の種類が同じ

このとき、 $\frac{Re_{2des}}{Re_{1des}} = \frac{\dot{m}_{2des}}{\dot{m}_{1des}}$, $\frac{Pr_{2des}}{Pr_{1des}} = \frac{c_{p2des}}{c_{p1des}}$ となるので

$$\lambda_{des} = \left(\frac{\dot{m}_{2des}}{\dot{m}_{1des}} \right)^{0.8}$$

となる。

ここで、 λ_{des} は熱伝達率の比なので $h_{2des} = \lambda_{des} h_{1des}$ であることから

$$\begin{aligned}\frac{1}{U_{des}} &= \frac{1}{h_{1des}} \left(1 + \frac{1}{\lambda_{des}} \right) \quad \therefore h_{1des} = U_{des} \left(1 + \frac{1}{\lambda_{des}} \right) \\ \frac{1}{U_{des}} &= \frac{1}{h_{2des}} (1 + \lambda_{des}) \quad \therefore h_{2des} = U_{des} (1 + \lambda_{des})\end{aligned}$$

となる。

このとき、高温側と低温側の入口条件が変わった場合を考えると、それぞれのレイノルズ数とプラントル数も変化する。

熱伝達率の無次元数であるヌセルト数は $Nu \propto Re^{0.8} \cdot Pr^{\frac{1}{3}}$ となるので、設計点でのパラメータを用いて高温側のヌセルト数は以下のように書ける。

$$Nu_1 = \left(\frac{Pr_1}{Pr_{1des}} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{Re_1}{Re_{1des}} \right)^{0.8} \cdot Nu_{1des}$$

したがって熱伝達率は設計点の熱伝達率を用いて以下のように表すことができる。

$$\begin{aligned}
h_1 &= \frac{k_1}{L} \cdot Nu_1 \\
&= \frac{k_1}{L} \cdot \left(\frac{Re_1}{Re_{1des}} \right)^{0.8} \cdot \left(\frac{Pr_1}{Pr_{1des}} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{L}{k_1} \cdot h_{1des} \\
&= \left(\frac{Re_1}{Re_{1des}} \right)^{0.8} \cdot \left(\frac{Pr_1}{Pr_{1des}} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{k_1}{k_{1des}} \right) \cdot h_{1des} \\
&= \left(\frac{\dot{m}_1}{\dot{m}_{1des}} \cdot \frac{\mu_{1des}}{\mu_1} \right)^{0.8} \cdot \left(\frac{c_{p1}}{c_{p1des}} \cdot \frac{\mu_1}{\mu_{1des}} \cdot \frac{k_{1des}}{k_1} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{k_1}{k_{1des}} \right) \cdot h_{1des} \\
&= \left(\frac{\dot{m}_1}{\dot{m}_{1des}} \right)^{0.8} \cdot \left(\frac{\mu_1}{\mu_{1des}} \right)^{\frac{7}{15}} \cdot \left(\frac{c_{p1}}{c_{p1des}} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{k_1}{k_{1des}} \right)^{\frac{2}{3}} \cdot h_{1des}
\end{aligned}$$

低温側の熱伝達率についても同様に以下式を得る。

$$\begin{aligned}
h_2 &= \left(\frac{Re_2}{Re_{2des}} \right)^{0.8} \cdot \left(\frac{Pr_2}{Pr_{2des}} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{k_2}{k_{2des}} \right) \cdot h_{2des} \\
&= \left(\frac{\dot{m}_2}{\dot{m}_{2des}} \right)^{0.8} \cdot \left(\frac{\mu_2}{\mu_{2des}} \right)^{\frac{7}{15}} \cdot \left(\frac{c_{p2}}{c_{p2des}} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{k_2}{k_{2des}} \right)^{\frac{2}{3}} \cdot h_{2des}
\end{aligned}$$

したがって、高温側と低温側それぞれの熱伝達率 h_1 と h_2 は設計点での総括熱伝達率 U_{des} を用いて以下のように表すことができる。

$$\begin{aligned}
h_1 &= \left(\frac{\dot{m}_1}{\dot{m}_{1des}} \right)^{0.8} \cdot \left(\frac{\mu_1}{\mu_{1des}} \right)^{\frac{7}{15}} \cdot \left(\frac{c_{p1}}{c_{p1des}} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{k_1}{k_{1des}} \right)^{\frac{2}{3}} \cdot U_{des} \left(1 + \frac{1}{\lambda_{des}} \right) \\
h_2 &= \left(\frac{\dot{m}_2}{\dot{m}_{2des}} \right)^{0.8} \cdot \left(\frac{\mu_2}{\mu_{2des}} \right)^{\frac{7}{15}} \cdot \left(\frac{c_{p2}}{c_{p2des}} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{k_2}{k_{2des}} \right)^{\frac{2}{3}} \cdot U_{des} (1 + \lambda_{des})
\end{aligned}$$

ゆえに、熱交換器の総括熱伝達率 U は設計点での総括熱伝達率 U_{des} を用いて

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} = \frac{1}{U_{des}} \cdot \left(\frac{1}{\beta_1 \cdot \left(1 + \frac{1}{\lambda_{des}} \right)} + \frac{1}{\beta_2 \cdot U_{des} (1 + \lambda_{des})} \right)$$

と表すことができる。ただし、

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \left(\frac{\dot{m}_1}{\dot{m}_{1des}} \right)^{0.8} \cdot \left(\frac{\mu_1}{\mu_{1des}} \right)^{\frac{7}{15}} \cdot \left(\frac{c_{p1}}{c_{p1des}} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{k_1}{k_{1des}} \right)^{\frac{2}{3}} \\
\beta_2 &= \left(\frac{\dot{m}_2}{\dot{m}_{2des}} \right)^{0.8} \cdot \left(\frac{\mu_2}{\mu_{2des}} \right)^{\frac{7}{15}} \cdot \left(\frac{c_{p2}}{c_{p2des}} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{k_2}{k_{2des}} \right)^{\frac{2}{3}}
\end{aligned}$$

さらに仮定1が成り立つとすると熱伝達率の比は質量流量比のみに依存するので、総括熱伝達率 U 以下のように簡略化できる。

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{U_{des}} \left(\frac{1}{\left(\frac{\dot{m}_1}{\dot{m}_{1des}} \right)^{0.8} \left(1 + \frac{1}{\lambda_{des}} \right)} + \frac{1}{\left(\frac{\dot{m}_2}{\dot{m}_{2des}} \right)^{0.8} (1 + \lambda_{des})} \right)$$

この総括熱伝達率を使用してNTU法による計算を行う場合は場合は $NTU = \frac{UA}{C_{\min}}$ なので UA でスケーリングすると扱いやすい。伝熱面積 A はスケーリング前後で変わらないので $A = A_{des}$ が成り立つ。