Exercice 4

(1)

1- montrons que $\Phi_X(u) = e^{\langle u,b\rangle - \frac{1}{2}\langle u, Vu\rangle}$

Soit X un vecteur gaussien, alors posons
$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d$ et de plus considérons

X une var réelle gaussienne (pour $d=1$)

alors $u \in \mathbb{R}$ et ${}^t u V u = Var(X) u^2 = \sigma^2 u^2$

${}^t u E[X] = bu$

$t \longrightarrow {}^t u . x = \langle u, x\rangle$ est une forme linéaire

la var ${}^t u X$ est donc gaussienne

son espérance est $b = E[{}^t u . X] = {}^t u E[X]$

et sa variance $\sigma^2 = Var({}^t u X) = {}^t u V u$

donc pour tout vecteur aléatoire X,

on a ${}^t u V u = Var({}^t u . X)$

Ceci est un lemme sur la var Gaussienne (2)

Donc $\forall\ v \in \mathbb{R}$, on a $\Phi_{t_{u}.X}(v) = \exp\left(ivm - \frac{1}{2}\sigma^2 v^2\right)$

$$\Phi_X(v) = E\left[e^{i\langle v,X\rangle}\right],\ \forall\ v \in \mathbb{R}^d$$

Comme $\Phi_{t_u.X}(v) = E\left[e^{iv\langle u,X\rangle}\right]$

En prenant $v = 1$, on obtient :

$$\Phi_X(u) = E\left[e^{iv\langle u,X\rangle}\right]$$

$$= \Phi_{t_u.X}(1)$$

$$= \exp\left(i\, t_u E[X] - \frac{1}{2} t_u V u\right)$$

En posant $t_u = u$ et comme $E[X] = b$ et $Var(X) = Vu$ alors $\Phi_X(u) = e^{i\langle u,b\rangle - \frac{1}{2}\langle u,Vu\rangle}$, $\forall u \in \mathbb{R}^d$

2/ <u>montrons que Φ_X est à valeurs réelles</u>

Si $P_X = P_{-X}$ alors $\Phi_X(u) = \Phi_X(-u)$

$$e^{i\langle u,b\rangle - \frac{1}{2}\langle u,Vu\rangle} = e^{i\langle -u,b\rangle - \frac{1}{2}\langle -u,-Vu\rangle}$$

$$i\langle u,b\rangle - \frac{1}{2}\langle u,Vu\rangle = i\langle -u,b\rangle - \frac{1}{2}\langle -u,-Vu\rangle$$

$$i u^T b - \cancel{\frac{1}{2} u^T V u} = -i u^T b - \cancel{\frac{1}{2} u^T V u}$$

$$2 i u^T b = 0$$

$$\Rightarrow u^T = 0$$

$$\Rightarrow u = 0$$

En remplaçant u par sa valeur dans Φ_X, on obtient $\Phi_X(0) = 1$

3/ <u>montrons que Φ_X est p fois dérivable</u>

$\forall p \geq 1$, $E[|X|^p] < \infty$ (ie l'espérance est finie)

alors : $x \mapsto (ix)^k e^{itx} f_X$ est uniformément intégrable

$\forall k \in \{1, \dots, p\}$ on a donc Φ_X qui est k fois dérivable

<u>montrons que :</u>

$$\Phi_X^{(k)}(0) = i^k E[X^k], \ \forall k = 1, \dots, p$$

$$\Phi_X^{(k)}(u) = \int_{\mathbb{R}} (ix)^k e^{iux} \, dP_X(u)$$

$$= E[(iX)^k e^{iuX}]$$

$$= (i)^k E[X^k e^0] = i^k E[X^k]$$

$$\Phi_X^{(k)}(0) = i^k E[X^k]$$ 4