PGCD (a,b,c) = ??

on sait que le pgcd de deux nombres est le plus grand commun diviseur de ces deux nombres a et b.

on peut noter $pgcd(a,b) = d$.

- Si on liste les diviseurs de a et les diviseurs de b, on trouve que d divise a et divise b :

$$d/a \text{ et } d/b \iff d \mid pgcd(a,b)$$

alors pour le $pgcd(a,b,c) = d$.

on trouve $d \mid a$ et d/b et d/c

donc $d \mid pgcd(a,b)$ et d/c.

alors $\boxed{pgcd(a,b,c) = pgcd(pgcd(a,b), c) = d}$ (1)

en remplaçant $pgcd(a,b)$ par d, on trouve

$pgcd(d,c) = d$. ce qui est vrai

Exemple : $a = 2$ et $b = 12$ et $c = 6$

$D_2 = \{2, 1\}$. et $D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$.

$D_6 = \{1, 2, 3, 6\}$. on a $pgcd(a,b) = 2$ car $2/2$ et $2/12$

et $pgcd(2,6) = 2$ car $2/2$ et $2/6$.

donc $pgcd(2, 6, 12) = 2$

Pgcd (a,b,c) et ppcm (a,b,c) ?

C'est vrai que $\operatorname{pgcd}(a,b) \times \operatorname{ppcm}(a,b) = |ab|$

mais $\operatorname{pgcd}(a,b,c) \times \operatorname{ppcm}(a,b,c) \neq |a \times b \times c|$

→ par exemple : (contre-exemple)

$a = 2$, $b = 4$ et $c = 8$

- $\operatorname{pgcd}(2,4,8) = \operatorname{pgcd}(\operatorname{pgcd}(2,4), 8) = \operatorname{pgcd}(2,8) = 2$
- $\operatorname{ppcm}(2,4,8) = \operatorname{ppcm}(\operatorname{ppcm}(2,4), 8) = \operatorname{ppcm}(4,8) = 8$

mais $2 \times 8 = 16 \Rightarrow \operatorname{pgcd}(2,4,8) \times \operatorname{ppcm}(a,b,c) = 16$

et $a \times b \times c = 2 \times 4 \times 8 = 64$.

$64 \neq 16$ d'où le resultat

La vraie relation générale :

$$\operatorname{pgcd}(a,b,c) \times \operatorname{ppcm}(a,b,c) = \frac{a \times b \times c \times [\operatorname{pgcd}(a,b,c)]^2}{\operatorname{pgcd}(a,b) \times \operatorname{pgcd}(b,c) \times \operatorname{pgcd}(c,a)}$$

pour la démonstration on utilise la règle de décomposition en facteurs premiers et la règle générale $\operatorname{pgcd}(a,b) \times \operatorname{ppcm}(a,b) = |ab|$

① on sait que $ppcm(a,b,c) = ppcm(a, ppcm(b,c))$

$$ppcm(a, ppcm(b,c)) = \frac{a \times ppcm(b,c)}{pgcd(a, ppcm(b,c))}$$

et on a $ppcm(b,c) = \dfrac{b \times c}{pgcd(b,c)}$

alors $$ppcm(a,b,c) = \frac{a \times \left(\frac{b \times c}{pgcd(b,c)}\right)}{pgcd(a, ppcm(b,c))}$$

par suite $$ppcm(a,b,c) = \frac{a \times b \times c}{pgcd(b,c) \times pgcd(a, ppcm(b,c))}$$

et on a $$pgcd(a, ppcm(b,c)) = \frac{pgcd(a,b) \times pgcd(a,c)}{pgcd(a,b,c)} \quad ⊛$$

La demonstration de ⊛ est comme suit :

- Soit p un facteur premier quelconque commun aux nombres a, b et c, on démontre que les exposants de p sont égaux de chaque côté de l'équation
- Soit α, β, γ les exposants de p dans les décompositions de a, b et c respectivement

alors $a = p^{\alpha}$ et $b = p^{\beta}$ et $c = p^{\gamma}$

→ pour la partie gauche : pgcd $(a, ppcm(b,c))$:

on a PGCD est le minimum des exposants

alors que ppcm est le maximum des exposants

donc $ppcm(b,c) = \max(\beta, \gamma)$

donc $\boxed{\text{Expo. gauche} = \min(\alpha, \max(\beta, \gamma))}$

→ pour la partie droite : $\dfrac{pgcd(a,b) \times pgcd(a,c)}{pgcd(a,b,c)}$

on a $pgcd(a,b) = p^{\min(\alpha,\beta)}$

l'exposant de $pgcd(a,c)$: $\min(\alpha, \gamma)$

l'exposant de $pgcd(a,\beta,c)$: $\min(\alpha, \beta, \gamma)$

on a $\dfrac{pgcd(a,b) \times pgcd(a,b)}{pgcd(a,b,c)} = \dfrac{p^{\min(\alpha,\beta)} \times p^{\min(\alpha,\gamma)}}{p^{\min(\alpha,\beta,\gamma)}}$

$$= p^{\min(\alpha,\beta) + \min(\alpha,\gamma) - \min(\alpha,\beta,\gamma)}$$

L'exposant de la partie droite est :

$\boxed{\text{Expo. droite} = \min(\alpha,\beta) + \min(\alpha,\gamma) - \min(\alpha,\beta,\gamma)}$

- par suit on vérifie l'égalité des exposants à gauche et à droite.

Pour prouver l'égalité, nous allons examiner les cas possibles pour la position de α par rapport à β et γ

<u>Cas 1 :</u> α est le plus petit exposant ($\alpha \leq \beta$ et $\alpha \leq \gamma$)

- Expo. gauche $= \min(\alpha, \max(\beta,\gamma)) = \boxed{\alpha}$
- Expo. droite $= \min(\alpha,\beta) + \min(\alpha,\gamma) - \min(\alpha,\beta,\gamma)$

$$= \alpha + \cancel{\alpha - \alpha} = \boxed{\alpha}$$

<u>Cas 2 :</u> α est le plus grand exposant ($\alpha \geq \beta$ et $\alpha \geq \gamma$)

- Expo. gauche $= \min(\alpha, \max(\beta,\gamma)) = \boxed{\max(\beta,\gamma)}$

(Car α est plus grand que $\max(\beta,\gamma)$)

- Exp. droite $= \min(\alpha,\beta) + \min(\alpha,\gamma) - \min(\alpha,\beta,\gamma)$

$$= \beta + \gamma - \min(\alpha,\beta,\gamma)$$

et on sait que $\max(\beta,\gamma) = \beta + \gamma - \min(\beta,\gamma)$

car $p^{\max(\beta,\gamma)} = ppcm(b,c) = \dfrac{a \times c}{pgcd(b,c)} = p^{\beta+\gamma-\min(\beta,\gamma)}$

donc Exp. droite $= \boxed{\max(\beta,\gamma)}$ d'où l'égalité

Cas 3 : $\beta \leq \alpha \leq \gamma$ (même pour $\gamma \leq \alpha \leq \beta$)

- Expo. gauche $= \min(\max(\beta,\gamma),\alpha) = \boxed{\alpha}$

car $\max(\beta,\gamma) = \gamma$ et $\alpha \leq \gamma$.

- Expo. droite $= \min(\alpha,\beta) + \min(\alpha,\gamma) - \min(\alpha,\beta,\gamma)$

$= \beta + \alpha - \beta = \boxed{\alpha}$

d'où l'égalité.

Si $\gamma \leq \alpha \leq \beta$:

alors Expo. gauche $= \boxed{\alpha}$

Expo. droite $= \gamma - \alpha - \gamma = \boxed{\alpha}$

d'où l'égalité.

Conclusion

La relation (+) est vraie.

Finalement on remplace (+) dans la relation générale et on trouve : $\text{ppcm}(a,b,c) = \dfrac{a \times b \times c \times \text{pgcd}(a,b,c)}{\text{pgcd}(a,b) \times \text{pgcd}(b,c)\,\text{pgcd}(c,a)}$

$$\text{pgcd}(a,b,c) = \frac{\text{ppcm}(a,b,c) \times \text{pgcd}(a,b)\,\text{pgcd}(b,c) \times \text{pgcd}(c,a)}{a \times b \times c}$$