Theoreme_de_Bezout.C

Introduction:

Objectif :

➔ Déterminer toutes les solutions entières x, y∈Z de l'équation:ax + by = c l'implémenter dans la langage de programmation C

Question à répondre pour atteindre cet objectif:

1. Quel est l'objectif principal de l'algorithme d'Euclide ?
2. Quel est le fonctionnement de cet algorithme ?
3. Comment trouver les coefficients de Bezout, les solutions particulières et générales de l'équation: ax + by = c ?

I. Rappel théorique et méthodes à suivre:

1. Objectif principal:

PGCD:c'est le plus grand entier qui divise les deux entiers sans laisser de reste.

Et on note le pgcd de a et b : PGCD(a,b)

Et on a :

$$PGCD(a,b) = PGCD(b,r) \text{ tel que } (a,b) \in \mathbb{N}^2$$

Algorithme d'Euclide: c'est une méthode de calcul de PGCD par des divisions euclidienne successives jusqu'à l'obtention d'un rest nul

$$a = bq + r \qquad \text{et } 0 \leqslant r \leqslant b$$

Théorème de Bézout : Pour deux entiers relatifs non nuls a et b, il existe toujours au moins une paire d'entiers relatifs x et y (appelés coefficients de Bézout) tels que :

$$PGCD(a,b) = a * x + b * y$$

Les coefficients de Bézout ne sont pas uniques, ils s'obtiennent en **remontant** l'algorithme d'Euclide.

2. Méthode à suivre :

Pour résoudre une équation diophantienne linéaire ax + by = c ,il faut suivre **les étapes** suivantes :

Étape 1 — Implémentation du PGCD à l'aide de l'algorithme d'Euclide

Étape 2 — Algorithme d'Euclide étendu et détermination de (d, x_0, y_0) tels que

$$a \cdot x_0 + b \cdot y_0 = d$$

Étape 3 — Vérification d'existence d'une solution entière

Étape 4 — Calcul d'une solution particulière ($x_{\square}$, $y_{\square}$) à partir de (x_0, y_0)

Étape 5 — Forme générale : Affichage de la famille des solutions finales sous la forme :

$$(x, y) = (x_{\square} + mk, y_{\square} + nk), \quad k \in Z$$

II. Exemples manuels:

- Trouvons les solutions entières de : $161x + 368y = 115$

On a : a= 161 et b= 368

➔ D'après l'algorithme D'Euclide, on a:

$$368 = 161 \times 2 + 46$$

$$161 = 46 \times 3 + 23$$

$$46 = 23 \times 2 + 0$$

Par consequent: PGCD(161,368)=23

Et comme 115 = 5 x 23 alors pgcd(161,368)| 115

Donc,par le théorème de Bezout, cette équation admet des solutions entières dans Z

➔ On a :

$$23 = 161 - 3 \times 46$$

$$23 = 161 - 3 \times (368 - 161 \times 2)$$

$$23 = 161 - 3 \times 368 + 161 \times 6$$

$$23 = 161 \times 7 - 368 \times 3$$

Donc : $$115 = 161 \times 35 - 368 \times 15$$

Donc les solutions particulières sont : (xp, yp)=(35,-15)

➔ La solution générale s'écrit sous la forme :

$$(x, y) = (xp + nk, yp + mk), k \in Z$$

Donc la solution générale de cette équation est :

$$(x, y) = (35 - 16k, -15 + 7k), k \in Z$$

III. Implementation:

Ce programme C est une implémentation complète de l'**Algorithme d'Euclide Étendu** pour résoudre l'équation Diophantienne linéaire ax + by = c. Il calcule d'abord le **Plus Grand Commun Diviseur (PGCD)** de a et b et trouve une solution particulière (x0, y0) de l'**identité de Bézout** (ax0 + by0 = PGCD). Enfin, il détermine si l'équation ax + by = c a des solutions et, si oui, fournit à la fois la **solution particulière** et la **solution générale**.

Objectif de chaque étape:

Etape 1 : Déclarer les variables

Etape 2: Le Cœur de l'Algorithme (La Boucle)

Etape 3: Le resultat

IV. Verification:

On teste le programme sur plusieurs paires de nombres.Le programme affiche les résultat suivantes

1) Déterminons les solutions entières x, y∈Z de l'équation:600x + 124y =

```
Entrez les entiers a et b respectivement:
600
124

a= 600 et b= 124:

D'apres l'algorithme D'Euclide, on a:
600 = 124 x 4 + 104
 124 = 104 x 1 + 20
 104 = 20 x 5 + 4
 20 = 4 x 5 + 0

Par consequent:     PGCD(600,124)=4

 ===============Theoreme de Bezout===============

 600 * x0 + 124 * y0 = PGCD(600,124)

 4 = 104 - 20 x 5
  20 = 124 - 104 x 1
  104 = 600 - 124 x 4

on substitue les equation ligne par ligne jusqu'├á retrouver les valeurs initiales de a et b
 Le resultat final est

        600 x (6) + 124 x (-29) = 4
 tel que x0=6 et y0=-29


 ----------------Equation a.x + b.y = c ----------------

Entrez les entier c :
115
600 . x + 124 .y = 115
il n'existe aucune solution enti├¿re can 4 ne divise pas 115
```

V. Conclusion:

Ce programme met en œuvre le **Théorème de Bezout**, reconnu comme l'une des méthodes les plus **efficaces** pour déterminer **les solutions entières x, y∈Z de l'équation:ax + by = c**

En conclusion, ce programme est une implémentation **efficace et didactique** de ce théorème. Sa gestion des signes (via la valeur absolue) et du cas spécial où b=0 en fait un outil **fiable** pour calculer les solutions dans la majorité des situations d'entrée.