

Grundlegende Notationen

Definitionszeichen:

$:=$ oder $=$:

z.B. $n! := 1 * 2 * 3 * \dots * (n - 1) * n$

Allquantor: \forall ("für alle")

z.B. $\forall n \in \mathbb{N}$

-> "Für alle natürlichen Zahlen" oder verbose: "Für alle n , die in den natürlichen Zahlen sind"

Existenzquantor: \exists ("es gibt ein")

z.B. $\exists n \in \mathbb{N}$

-> "Für (mindestens) eine natürliche Zahl"

Existenzquantor: $\exists!$ ("es gibt **genau** ein")

z.B. $\exists! \in \mathbb{N}$

-> "Für genau eine natürliche Zahl"

Diese Quantoren machen wir in den Vorlesungen oft genug, dass wir es nicht wie Vokabeln auswendig lernen müssen :)

Aussagenverknüpfungen:

Mathematische Aussagen sind immer entweder **wahr** oder **falsch**

z.B. $A \wedge B$ (A **und** B) bzw. $A \vee B$ (A **oder** B)

Negation:

$\neg A$ (**Nicht** A)

Implikation:

$A \rightarrow B$

Äquivalenz:

$A \leftrightarrow B$

Alternative Formulierungen:

A ist äquivalent zu B

A gilt genau dann, wenn B gilt

Eindeutigkeitsprobleme:

Mathematische Ausdrücke sollten **eindeutig** sein

z.B. $0.9999... = 1$ ist blöd

Warum aber eigentlich? (fun fact)

$$1/9 = 0,11111...$$

$$6/9 = 0,66666...$$

$$9/9 = 0,99999...$$

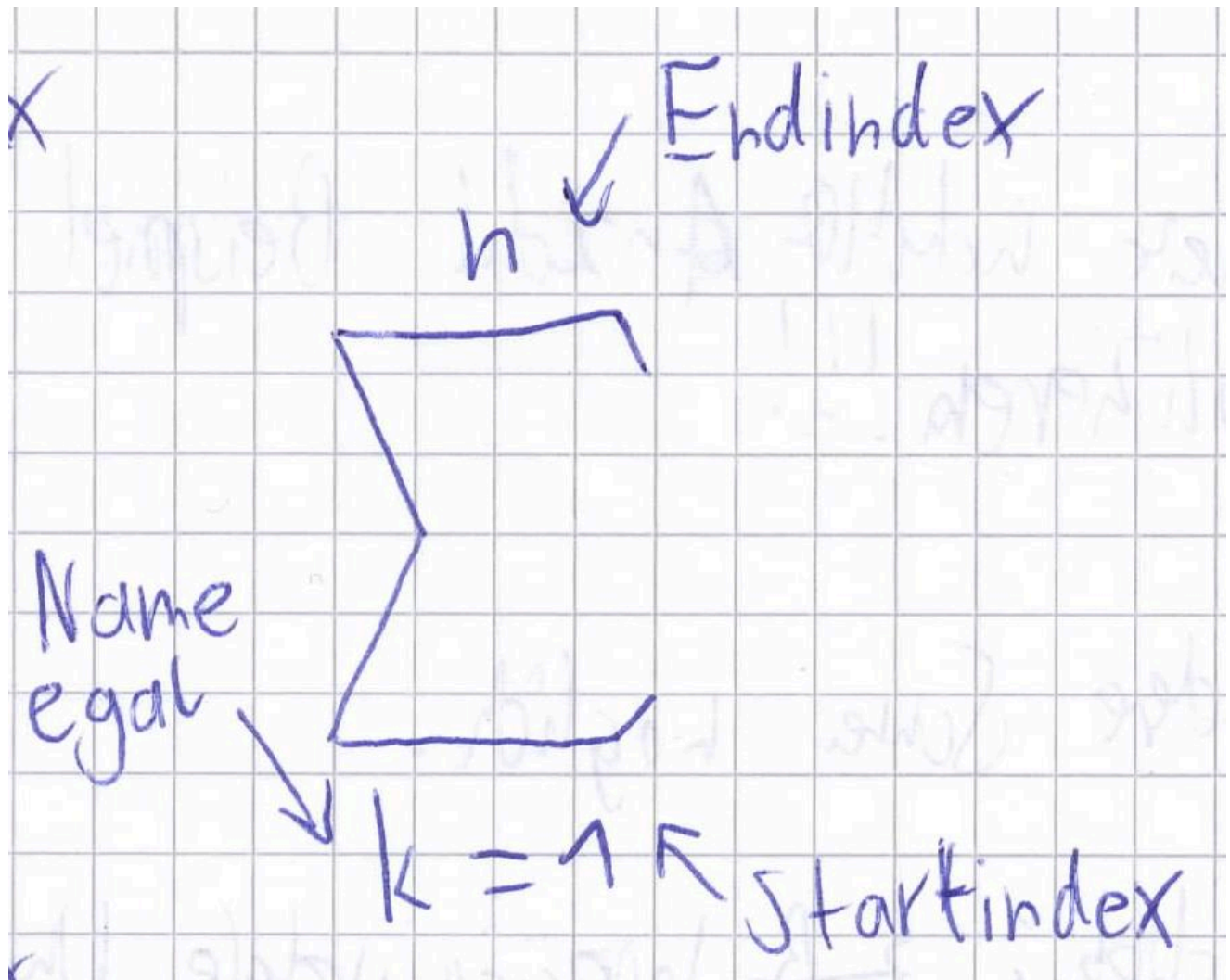
Bei Termen kann es zu Missverständnissen kommen, was auch schlecht ist.

z.B. bei $1 + 2 + ... + 2^3$, was ist gemeint?

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 \text{ oder } 1 + 2 + 4 + 8$$

-> Summennotation, um Missverständnisse zu vermeiden!

Summennotation



Immer in aufsteigender Reihe zählen!

z.B. 1, 2, 3, ...

NICHT 7, 6, 5, ...

-> Wenn m (Startindex) $>$ n (Endindex) gilt, also es versucht wird, absteigend zu zählen, wird die **leere Summe** definiert:

$$\sum_{k=m}^n a_k := 0$$

Rechenregeln Summennotation

Wenn die Laufindexe der beiden Summen gleich sind, können sie so addiert und subtrahiert werden:

$$\sum_{k=1}^n a_k \pm \sum_{k=1}^n b_k = \sum_{k=1}^n (a_k \pm b_k)$$

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) + (b_1 + b_2 + \dots + b_n) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \dots + (a_n + b_n)$$

(Technisch gesehen ist es auch mit verschiedenen Laufindexen zu machen, nur bleiben dann einige Indexe übrig... oder sowas)

Ausmultiplizieren und Ausklammern

$$c \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n (c * a_k)$$

$$c * (a_1 + a_2 + \dots + a_n) = c * a_1 + c * a_2 + \dots + c * a_n$$

Mehr oder weniger analog zur Integralregel :)

Summentrennung

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^l a_k + \sum_{k=l+1}^n a_k$$

Hier ist l ein **Index** zwischen k und n . z.B.

1 2 3 4 5 6 7 8 9

k | n

Also wird von 1 bis 5 (k zu l) und dann von 6 zu 9 ($l + 1$ zu n) gezählt. Logisch, oder?

Indexverschiebung

$$\sum_{k=m}^n a_k = \sum_{k=m-l}^{n-l} a_{k+l}$$

Man kann erkennen, dass der Start- und Index um l subtrahiert werden, während bei der Funktion der Index um l addiert wird. Dies wird später noch präziser veranschaulicht.

Summe von Produkten \neq Produkte von Summen!!!

$$\sum_{k=m}^n (a_k * b_k) \neq \left(\sum_{k=m}^n (a_k) \right) * \left(\sum_{k=m}^n (b_k) \right)$$

Beispiele

$$\sum_{k=3}^{27} = 3 + 4 + 5 + \dots + 27$$

$$\left(\frac{4}{7}\right)^2 + \left(\frac{5}{7}\right)^2 + \left(\frac{6}{7}\right)^2 + \dots + \left(\frac{n}{7}\right)^2 = \sum_{j=4}^n \left(\frac{j}{7}\right)^2 = \left(\frac{1}{7}\right)^2 \sum_{j=4}^n j^2$$

Am Ende wird ausmultipliziert :)

Sei x eine reelle Zahl. Die sogenannte **geometrische Summe** ist

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^n = \sum_{k=0}^n x^k$$

Indexverschiebung

$$(4 + 5 + 6 + \dots + n) + (5^4 + 6^5 + 7^6 + \dots + (n+1)^n)$$

$$= \sum_{k=4}^n k + \sum_{k=5}^{n+1} k^{k-1}$$

Indexverschiebung an der rechten Summe, um beide auf $k=4$ zu bringen:

$$= \sum_{k=4}^n k + \sum_{k=5-1}^{(n+1)-1} (k+1)^{(k+1)-1}$$

$$= \sum_{k=4}^n k + \sum_{k=4}^n (k+1)^k$$

$$= \sum_{k=4}^n (k + (k+1)^k)$$

Produktnotation

Ebenfalls darf hier nur aufgezählt, nicht heruntergezählt werden.

Falls $m > n$ ist, wird das **leere Produkt** so definiert:

$$\prod_{k=m}^n a_k := 1$$

Rechenregeln Summennotation

Produkt von Produkten

$$\prod_{k=m}^n a_k * \prod_{k=m}^n b_k = \prod_{k=m}^n (a_k * b_k)$$

Ausklammern

$$\prod_{k=1}^n c * a_k = c^n \prod_{k=1}^n a_k$$

"c wird n mal nach vorne geschoben" (?)

Quotient von Produkten

$$\frac{\prod_{k=m}^n a_k}{\prod_{k=m}^n b_k} = \prod_{k=m}^n \frac{a_k}{b_k}$$

Indexverschiebung

$$\prod_{k=m}^n a_k = \prod_{k=m-l}^{n-l} a_{k+l}$$

Beispiele von der Folie weil ich faul bin:



of 503

