Grundlange der Linearen Algebra in der Informatik

Aufgabenkatalog mit Lösungen zur Vorlesung

gehalten an der Dualen Hochschule
Baden-Württemberg, Stuttgart

Kurs: TINF24A

Dozent: Dipl.-Ing. Tim Lindemann

4. Dezember 2024

Kapitel I

Grundlagen und Wiederholung

Aufgabe 1 (Vollständige Induktion)
Beweisen Sie die Aussage

$$A(n): \text{ Die Summe der ersten } n \text{ Quadratzahlen beträgt } \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1), \ \forall n \in \mathbb{N}$$

mit Hilfe von vollständiger Induktion.

Aufgabe 2 ($\prod, \Sigma$-Schreibweise)
Beweisen Sie, dass die folgenden Aussagen im allgemeinen falsch sind. Verwenden Sie ein Zahlenbeispiel.

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{n}(a_k \cdot b_k) &= \left(\sum_{k=m}^{n} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=m}^{n} b_k\right) \\ \prod_{k=m}^{n}(a_k + b_k) &= \left(\prod_{k=m}^{n} a_k\right) + \left(\prod_{k=m}^{n} b_k\right)\end{aligned}$$

Kapitel II

Mengen, Relationen & Abbildungen

Aufgabe 3 (Mengenlehre)

(a) Sind die beiden folgenden Mengen gleich? $A = \{1, 2, 3, 7\}$, $B = \{2, 7, 1, 3, 2\}$

(b) Welche Mengen sind endlich? Wenn die Menge endlich ist, geben sie alle Elemente an, ansonsten drei.

(i) $A_1 := \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ gerade } \wedge x \text{ eine Primzahl}\}$

(ii) $A_2 := \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ gerade } \vee x \text{ eine Primzahl}\}$

(iii) $A_3 := \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ eine Primzahl } \wedge x - 2 \text{ eine Primzahl}\}$

Hinweis: Bei A_3 ist nicht bekannt ob die Menge endlich ist!

(c) Gegeben seien die Mengen

$$\begin{aligned} A &:= \{\pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6, 7\}, \\ B &:= \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}, \\ C &:= \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Geben sie $A \cap B$, $A \cup B$, $A \cap C$, $A \setminus B$ und die Komplemente von C, $(A \cap B)$, $(A \cup B)$ in $\mathbb{Z}$ an.

Aufgabe 4 (Intervalle)
Gegeben seien die beiden Gleichungen

$$2x - 5 \geq 0, \quad 2x - 12 \leq 0,$$

in $\mathbb{R}$. Ermitteln Sie die Lösungsmenge $\mathbb{L}_1$ und $\mathbb{L}_2$ dieser Ungleichungen und berechnen Sie

(i)	$\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2$	(ii)	$\mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2$
(iii)	$\mathbb{L}_1 \setminus \mathbb{L}_2$	(iv)	$(\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2)^c$
(v)	$(\mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2)^c$		

Aufgabe 5 (Mengenoperationen)
Seien A, B und X Mengen, so dass $A \subseteq X$ und $B \subseteq X$. Veranschaulichen Sie sich die De Morgan'schen Regeln aus der Vorlesung mittels Venn-Diagrammen bestehend aus A, B und X.

Aufgabe 6 (Potenzmenge)
Bestimmen sie die Potenzmenge von $\{2^k \mid k = 1, 2, \pm 3\}$.

Aufgabe 7 (kartesisches Produkt)
Gegeben seien die Mengen

$$A_1 := [0,2], \;\; A_2 := [1,3], \;\; A_3 := [1,2].$$

(i) Veranschaulichen Sie die Mengen $A := A_1 \times A_1$, $B := A_2 \times A_1$ und $C := A_3 \times A_2$ in der Ebene (also in $\mathbb{R}^2$).

(ii) Veranschaulichen Sie sich die Distributivgesetze aus der Vorlesung anhand der Mengen A, B und C.

Aufgabe 8
Seien X und Y Mengen, für die gilt

$$\forall x \in X \Longrightarrow x \notin Y.$$

Folgt daraus $X \neq Y$?

Aufgabe 9 (Menge aller Mengen)
Auf der schwäbischen Alb gibt es ein Dorf namens Münsingen. In Münsingen gibt es einen Dorfbarbier. Dieser Barbier rasiert genau die Männer im Dorf, die sich nicht selbst rasieren. Wir stellen die Frage, ob sich der Barbier selbst rasiert oder nicht. Betrachte dazu die Mengen

$$\begin{aligned} X &:= \{\text{Alle Männer in Münsingen}\}, \\ A &:= \{x \in X \mid x \text{ rasiert sich nicht selbst}\} \\ A^c &:= \{x \in X \mid x \text{ rasiert sich selbst}\} \end{aligned}$$

und bezeichne den Barbier von Münsingen mit b. Unsere Frage ist also:

$$\text{Gilt } b \in A \text{ oder } b \in A^c?$$

Aufgabe 10 (Äquivalenzrelationen)

(a) Zeigen Sie, dass durch

$$x \sim y \Longleftrightarrow \text{Man kann von Stadt } x \text{ nach Stadt } y \text{ mit dem Zug fahren}$$

eine Äquivalenzrelation auf den deutschen Städten gegeben ist.

(b) Welche der folgenden Vorschriften definieren eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$?

(i) $x \sim y \Longleftrightarrow x \wedge y$ gerade

(ii) $x \sim y \Longleftrightarrow x - y$ gerade

(iii) $x \sim y \Longleftrightarrow x + y$ ungerade

(c) Finden sie auf einer Menge X Relationen, die

(i) reflexiv, symmetrisch aber nicht transitiv sind,

(ii) reflexiv, transitiv aber nicht symmetrisch sind,

(iii) weder reflexiv, noch transitiv noch symmetrisch sind.

Aufgabe 11 (Relationen und Funktionen)

(a) Es sei $M := \{0, 1, 2\}$ und die Relation $R := \{(a, b) \in M \times M \mid a < b\}$ gegeben. Veranschaulichen Sie die Elemente in einem zwei-dimensionalen Gitter.

(b) Gegeben seien die beiden Relationen

$$R_1 := \{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid a < b\},$$
$$R_2 := \{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid b = a^2\}.$$

Ist es möglich Funktionen $f_1, f_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zu definieren, so dass

$$R_i = \{(a, f_i(a)) \mid a \in \mathbb{R}\}, \ \ i = 1, 2?$$

Aufgabe 12 (Abbildungen)

(a) Welche der folgenden Aussagen ist falsch: Die Abbildung

$$Id : M \to M, \ \ x \mapsto x \ \text{ ist stets}$$

☐ surjektiv ☐ bijektiv ☐ konstant

(b) Sei $f \colon X \to Y$ eine Abbildung. Welche der folgenden Aussagen bedeutet, dass f surjektiv und welche, dass f injektiv ist:

(i) $\forall\ x \in X\ \exists$ genau ein $y \in Y$: $f(x) = y$

(ii) $\exists\ y \in Y$ so dass $\forall x \in X$: $f(x) = y$

(iii) $\forall\ y \in Bild(f)\ \exists$ genau ein $x \in X$: $f(x) = y$

(iv) $\forall\ y \in Y\ \exists\ x \in X$: $f(x) = y$

(c) Welche der folgenden Zuordnungen ist eine Funktion? Wenn ja, ist sie injektiv bzw. surjektiv?

(i) Mensch $\rightarrow$ Freundin

(ii) Mensch $\rightarrow$ Vater

(iii) Mensch $\rightarrow$ Handynummer

(iv) Mensch $\rightarrow$ Lieblingsessen

Machen sie sich jeweils genau klar, welche Mengen Sie als Definitions- und Bildbereich wählen.

(d) Welche der folgenden Abbildungen $f\colon \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist injektiv bzw. surjektiv.

(i) $f(x) := x^3$,

(ii) $f(x) := x^2 + 2x + 1$,

(iii) $f(x) := |\log(x)|$,

(iv) $f(x) := |e^x - 1|$.

Aufgabe 13 (Abbildungen)
Sei $|X| < \infty$ und $f\colon X \rightarrow X$ eine Abbildung. Widerlegen bzw. begründen sie folgende Aussage:

$$f \text{ surjektiv} \Longleftrightarrow f \text{ injektiv} \Longleftrightarrow f \text{ bijektiv}.$$

Aufgabe 14 (Abbildungen)

(a) Gegeben seien die beiden Funktionen

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, &\qquad x \mapsto f(x) := x + 1 \\ g\colon \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+, &\qquad x \mapsto f(x) := x^2 \end{aligned}$$

Geben Sie $f \circ g$ und $g \circ f$ an und zeichnen sie die Funktionen in ein Koordinatensystem.

(b) Geben sie die Funktion

$$h\colon \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},\ \ x \mapsto f(x) := \tfrac{1}{x^2+1}$$

als Komposition zweier Abbildungen an.

Kapitel III

Komplexe Zahlen

Aufgabe 15 (Komplexe Antworten)
Richtig oder falsch? Falls Sie der Ansicht sind, die Aussage stimme so begründen Sie ihre Antwort. Geben Sie ansonsten ein Gegenbeispiel an.

(i) i ist die einzige komplexe Zahl deren Quadrat gleich -1 ist

(ii) 1 ist die einzige komplexe Zahl, die zu sich selbst (multiplikativ) invers ist.

(iii) die multiplikative Inverse einer Zahl aus $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ ist nicht reell.

(iv) Das Produkt zweier Zahlen aus $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ ist in $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$.

(v) $\mathrm{Re}(z) < |z|$.

(vi) $|z| \geq \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Re}(z)$.

(vii) $|z+w| \geq |z| + |w|$.

Aufgabe 16 (Darstellung komplexer Zahlen)

(a) Stellen sie die folgenden Zahlen in der Gaußschen Ebene dar und geben sie Betrag und komplex konjugierte Zahl an.

$$z_1 = 3 - i4 \quad z_2 = -2 + 3i \quad z_3 = -5 - 4i \quad z_4 = 6 \quad z_5 = 3 + i5 \quad z_6 = -3i$$

(b) Wandeln sie die in Normalform gegebenen Zahlen

$$\begin{array}{llll} z_1 = -3 + i5 & z_2 = -6 & z_3 = -4i & z_4 = -1 - i \\ z_5 = -1 + i & z_6 = 1 - i & z_7 = 1 + i & \end{array}$$

in Exponentialform um.

(c) Wandeln sie die in Exponentialform gegebenen Zahlen

$$z_1 = 3e^{i30^\circ} \quad z_2 = 5e^{i(-60^\circ)} \quad z_3 = 3e^{i90^\circ} \quad z_4 = 2e^{i180^\circ} \quad z_5 = \sqrt{2}e^{i135^\circ}$$

in Normalform um.

Aufgabe 17 (Komplexe Rechnung)
Berechnen Sie mit den folgenden komplexen Zahlen

$$z_1 = -4i, \quad z_2 = 3 - 2i, \quad z_3 = -1 + i$$

die Normalform der folgenden Terme:

$$\text{(a) } z_1 - 2z_2 + 3z_3 \quad \text{(b) } 2z_1 \cdot \overline{z}_2 \quad \text{(c) } \frac{\overline{z}_1}{z_3} \quad \text{(d) } \frac{\overline{z}_3 + z_1}{\overline{z}_2 \cdot z_3}.$$

Aufgabe 18 (Einheitskreis und Einheitswurzeln)

(a) Betrachte $\Gamma := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Zeige, dass

(i) $z_1, z_2 \in \Gamma \Rightarrow z_1 \cdot z_2 \in \Gamma$.

(ii) $z \in \Gamma \Rightarrow \dfrac{1}{z} \in \Gamma$

Da Γ auch noch das Neutralelement 1 (bzgl. der Multiplikation) enthält ist es also abgeschlossen bezüglich Multiplikation und Inversion. Man spricht von einer *Untergruppe* von $\mathbb{C}$.

(b) Wie viele Nullstellen hat das Polynom $x^3 - 1$? Man gebe sie alle in Exponentialform an. Können sie auch alle Nullstellen von $x^n - 1$ in $\mathbb{C}$ für $n \geq 5$ angeben?

Aufgabe 19 (Lösung von Polynomgleichungen)
Finden Sie stets alle Lösungen der folgenden Gleichungen:

(i) $x^2 + 2x + 1 = 0$

(ii) $(x - 3)^2 - 2 = 0$

(iii) $x^2 + 16 = 0$

(iv) $x^5 - 5 = 0$

Aufgabe 20 (Gaußsche Zahlenebene)
Gegeben seien die Zahlen $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -1 + i$.

(i) Veranschaulichen Sie z_1, z_2, $z_1 + z_2$, $z_1 \cdot 3$, $z_2 \cdot \frac{1}{2}$, $z_1 \cdot i$ und $z_1 \cdot z_2$ in der Gaußschen Zahlenebene.

(ii) Mit welcher Zahl muss man z_1 multiplizieren um die am Ursprung gespiegelte Zahl zu erhalten?

(iii) Mit welcher Zahl muss man z_1 multiplizieren um die an der imaginären/reellen Achse gespiegelte Zahl zu erhalten?

Kapitel IV

Vektorräume

Aufgabe 21 (Vektorräume)
Richtig oder falsch? Falls Sie der Ansicht sind, die Aussage stimme, so begründen Sie ihre Antwort. Geben Sie ansonsten ein Gegenbeispiel an.

(i) Man kann je zwei Vektoren eines Vektorraums addieren.

(ii) Man kann einen Vektor v durch einen Vektor w dividieren, falls $w \neq 0$ ist.

(iii) Jeder Vektorraum hat ein eindeutiges Einselement.

(iv) Wenn V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist, dann ist $\{v + w \mid v \in V,\ w \in V\} = V$.

(v) Für alle u, v, w eines Vektorraums V gilt $u \cdot (v \cdot w) = (u \cdot v) \cdot w$.

(vi) $\mathbb{R}^n$ besteht aus allen n-Tupeln von Vektoren.

(vii) In einem reellen Vektorraum gilt $\{\lambda \cdot v \mid \lambda \in \mathbb{R},\ v \in V\} = \mathbb{R} \times V$.

(viii) $\mathbb{R}^n$ besteht aus allen n-Tupeln von reellen Zahlen.

(ix) Die skalare Multiplikation ist in einem Vektorraum V über $\mathbb{R}$ durch Abbildungen (a), (b), (c) gegeben:

(a) $V \times V \to \mathbb{R}$ (b) $\mathbb{R} \times V \to V$ (c) $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

(x) Sei U ein Unterraum des Vektorraums V. Dann gilt stets:

(a) $\forall u, u' \in V\colon u + u' \in U$, (b) $\forall u, u' \in U\colon u - u' \in U$, (c) $\forall u, u' \in U\colon u + u' \in U$.

Aufgabe 22 (Vektorräume)
Die Menge der reellen Folgen ist definiert durch

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} := \{(x_1, x_2, x_3, \ldots) \mid x_i \in \mathbb{R},\ \ i \in \mathbb{N}\}\,.$$

Wie üblich verwenden wir die Kurzschreibweise $(x_i)_{i=1}^{\infty} := (x_1, x_2, x_3, \ldots)$. Wir definieren auf dieser Menge die Verknüpfungen

$$\begin{array}{lll} + : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, & ((x_i)_{i=1}^{\infty}, (y_i)_{i=1}^{\infty}) & \mapsto \quad (x_i + y_i)_{i=1}^{\infty}, \\ \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, & (\lambda, (x_i)_{i=1}^{\infty}) & \mapsto \quad (\lambda \cdot x_i)_{i=1}^{\infty}. \end{array}$$

(i) Gibt es ein Neutralelement in dieser Menge? Wenn ja welches? Gibt es zu jeder Folge $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ ein bezüglich der Addition inverses Element? Wenn ja welches?

(ii) Prüfen Sie, ob $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ mit diesen Verknüpfungen zu einem $\mathbb{R}$-Vektorraum wird (genau wie in Bsp. IV, 2.6). Begründen Sie jedes Gleichheitszeichen mit einem Wort.

Aufgabe 23 (Rechnen in Vektorräumen)

(a) Führen Sie mit den Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} i \\ 2+i \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 3-i \\ -5+i \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad d = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

die folgenden Rechenoperationen in $\mathbb{C}^4$ durch:

$$\text{(i) } s_1 = ia - 5b + c - 2d, \quad \text{(ii) } s_2 = 4b - (3+i)a + 2d, \quad \text{(iii) } s_3 = -3a + 8c + 3b - 2d.$$

(b) Berechnen Sie mit den Vektoren

$$\begin{array}{llll} f : [0,1] \to \mathbb{R}, & s \mapsto & f(s) := 3 \cdot s, & s \in [0,1], \\ g : [0,1] \to \mathbb{R}, & s \mapsto & g(s) := \dfrac{1}{2s+1}, & s \in [0,1], \\ h : [0,1] \to \mathbb{R}, & s \mapsto & h(s) := \sqrt{s}, & s \in [0,1], \end{array}$$

die folgenden Funktionen im Raum der reellen Funktionen auf $[0,1]$:

$$f_1 = 2f - 5g + h, \quad f_2 = 4f - 3g + 2h, \quad f_3 = f + g.$$

Verwenden Sie die punktweise Definition der Verknüpfungen wie in Bsp. IV, 2.6 eingeführt. Vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

Aufgabe 24 (Lösungsmenge linearer Gleichungen)
Für a_1, a_2, ..., $a_n \in \mathbb{R}$ betrachte die *homogene lineare Gleichung*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots a_nx_n = 0. \tag{IV.0.1}$$

Die Lösungsmenge von (IV.0.1) ist

$$\mathbb{L} := \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots a_nx_n = 0\}.$$

Begründen Sie, dass diese Menge einen Vektorraum bildet.

Aufgabe 25 (Der Raum $\mathbb{R}^n$)
Beweisen Sie Satz IV, 2.4 (7) und (8), indem Sie die Gleichungen auf die Distributivgesetze in $\mathbb{R}$ zurückführen.

Aufgabe 26 (Skalarprodukt & Norm)
Berechnen Sie euklidische Norm und das Skalarprodukt $\langle a, c\rangle$ für

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 27 (Elementares in Vektorräumen)
Richtig oder falsch? Falls Sie der Ansicht sind, die Aussage stimme, so begründen Sie ihre Antwort. Geben Sie ansonsten ein Gegenbeispiel an.

(i) Die Vektoren v_1, v_2 und v_3 sind linear unabhängig, wenn eine Linearkombination von v_1, v_2 und v_3 den Nullvektor ergibt.

(ii) Die Vektoren v_1, v_2, ... v_n sind linear unabhängig, wenn ihre Summe $\mathbb{0}$ ist.

(iii) Bei einer Linearkombination sind zwangsläufig alle Koeffizienten 0, wenn der Nullvektor erzeugt werden soll.

(iv) Sei v aus dem Aufspann der Vektoren v_1, ..., v_n. Dann ist v als Linearkombination von v_1, v_2, ... v_n darstellbar. Falls ja, ist diese Linearkombination eindeutig?

(v) Jede Teilmenge einer linear abhängigen Menge von Vektoren ist selbst linear abhängig.

(vi) Es gibt eine Basis des $\mathbb{R}^2$, die aus Vektoren der Form (x, x) besteht.

(vii) Kann man den Vektor $(1, 1)$ zu einer Basis des $\mathbb{R}^2$ ergänzen? Wenn ja, wie?

(viii) Es gelte $\operatorname{span}\{x_1, x_2, x_3\} = \mathbb{R}^3$, wobei x_1, x_2, $x_3 \in \mathbb{R}^3$. Ist $\{x_1, x_2, x_3\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

Aufgabe 28 (Lineare Unabhängigkeit)

(a) Sind die Vektoren $a = (1, 0, 0)$, $b = (1, 1, 0)$, $c = (1, 1, 1)$ linear unabhängig in $\mathbb{R}^3$?

(b) Zeigen Sie, dass $\{(1, 1), (1, 2)\}$ linear unabhängig in $\mathbb{R}^2$ ist.

(c) Betrachte die Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad d = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Begründen Sie warum die folgenden Mengen linear abhängig sind:

$$U_1 := \{a, c, d\}, \quad U_2 := \{a, b, d\}, \quad U_3 := \{a, d, e\}.$$

(d) Ist die Menge $\{-1, i\}$ linear unabhängig im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{C}$?

(e) Betrachte die Funktionen f_1 und f_2 im Raum der reellwertigen Funktionen.

$$\begin{aligned} f_1 &: [0, 1] \to \mathbb{R}, \; s \mapsto f_1(s) := e^s, \\ f_2 &: [0, 1] \to \mathbb{R}, \; s \mapsto f_2(s) := e^{2s} \end{aligned}$$

Zeige, dass $\{f_1, f_2\}$ linear unabhängig ist.

Aufgabe 29 (Basen von Vektorräumen)

(a) Ergänzen Sie die Menge $\{(0, 4, 5, 9), (3, 3, 3, 3)\}$ zu einer Basis des $\mathbb{R}^4$.

(b) Zeigen Sie, dass die Menge $\{(1, 2, 3), (3, 2, 1), (1, 3, 2)\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist.

(c) Können Sie zum $\mathbb{R}$-Vektorraum (!) der abbrechenden Folgen Φ eine Basis angeben?

$$\Phi := \left\{(x_1, x_2, \ldots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid x_i \neq 0 \text{ für endlich viele i}\right\}$$

Kapitel V

Lineare Abbildungen

Aufgabe 30 (Lineare Abbildungen)
Im folgenden sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung. Richtig oder falsch? Falls Sie der Ansicht sind, die Aussage stimme, begründen Sie ihre Antwort. Geben Sie sonst ein Gegenbeispiel an.

(i) Es gilt (a) $n \leq m$, (b) $n \geq m$, (c) $n = m$.

(ii) Wenn f ein Isomorphismus ist, so gilt $n = m$.

(iii) $f(\mathbb{0}) = \mathbb{0}$. Gibt es noch andere Vektoren, die auf die $\mathbb{0}$ abgebildet werden?

(iv) Es gibt unendlich viele lineare Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$.

(v) Es ist (a) $\ker f = \{x \in \mathbb{R}^m \mid f(x) = \mathbb{0}\}$, (b) $\ker f = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = \mathbb{0}\}$ (c) $\ker f = \{f(x) \mid x = \mathbb{0}\}$

(vi) Ist f ein Isomorphismus, dann gilt (a) $\ker f = \mathbb{R}^m$, (b) $\mathrm{Bild} f = \mathbb{R}^m$, (c) $f^{-1}(\{\mathbb{0}\}) = \{\mathbb{0}\}$.

(vii) Es gilt $f(\lambda \cdot x) = f(\lambda \cdot (1, \ldots, 1)) \cdot f(x)$ für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}^n$.

(viii) Ist $g\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ eine weitere lineare Abbildung so gilt $(f \circ g)(s) = f(s) \cdot g(s)$.

(ix) Die konstante Abbildung $f(x) = c$ für $c \in \mathbb{R}^m$ ist linear.

(x) Ist $\{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$ so ist f durch Vorgabe der Funktionswerte in allen b_i eindeutig bestimmt.

(xi) f ist surjektiv genau dann wenn f injektiv. Falls nein, wann gilt diese Aussage?

Aufgabe 31 (Lineare Abbildungen)

(a) Prüfen Sie, ob die folgenden Abbildungen linear sind:

$$\begin{aligned} f_1 &: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x_1,x_2,x_3) \mapsto (x_1 \cdot x_2, x_1 + x_2) \\ f_2 &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x_1,x_2) \mapsto (3x_1 + 1, 4x_2 + x_1 + 1) \\ f_3 &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x_1,x_2) \mapsto (x_1 + 3x_2, x_2 - 3x_1, 0) \end{aligned}$$

(b) Ist die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \begin{cases} (1,0,0) \mapsto (-1,1,3) \\ (0,1,0) \mapsto (0,6,3) \\ (0,0,1) \mapsto (2,4,-3) \end{cases}$$

vollständig bestimmt? Falls ja, geben Sie den Funktionswert der Abbildung in einem allgemeinen Punkt (x_1,x_2,x_3) an. Ist die Abbildung injektiv bzw. surjektiv?

(c) Für $a \in \mathbb{R}$ betrachte die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ (x_1,\ldots,x_n) \mapsto x_1 + a$$

Wann ist diese Abbildung linear? Bestimmen sie in diesen Fällen den Kern der Abbildung.

Aufgabe 32 (Matrizen)

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie mit diesen Matrizen (soweit möglich):

(a) $A^\top$, $B^\top$ und $C^\top$

(b) $A \cdot B - C \cdot C^\top$. Ist das Ergebnis eine symmetrische Matrix?

(c) $A^\top - B - 3C^\top$

(d) $A - 2C + B$

Aufgabe 33 (Quadratische Matrizen)

Welche der folgenden Matrizen ist symmetrisch, schiefsymmetrisch, in Dreicksform bzw. eine Diagonalmatrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 5 \\ -4 & 3 & 0 & -8 \\ 0 & -5 & 8 & 0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 34 (Matrizen und Lineare Abbildungen)
Betrachten Sie die lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \;\; (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_2, x_1 - x_3)$$

und geben Sie die Darstellungsmatrix A (bzgl. der Standardeinheitsbasis) an. Berechnen Sie außerdem den Kern der Abbildung. Ist sie surjektiv?

Kapitel VI

Determinante & Inverse einer Matrix

Aufgabe 35 (Matrizen und lineare Abbildungen)
Richtig oder falsch? Falls Sie der Ansicht sind, die Aussage stimme, so begründen Sie ihre Antwort. Geben Sie ansonsten ein Gegenbeispiel an.

(i) Die Determinante einer reellen $n \times n$-Matrix A ist
  (a) ein quadratisch angeordnetes Zahlenschema,
  (b) invertierbar, falls A invertierbar ist,
  (c) eine reelle Zahl,
  (d) ein Vektor aus $\mathbb{R}^n$.

(ii) Ist A nicht invertierbar, so ist $\det A$ auch nicht Null.

(iii) Falls $\det(A \cdot B) = 0$ folgt auch $\det A = 0$ und $\det B = 0$.

(iv) Es gibt zwei nicht-invertierbare Matrizen A und B, so dass $\det(A \cdot B) = 0$.

(v) Ist A invertierbar so gilt $\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = \det \mathrm{Id}$

(vi) Ist $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung, so ist die zugehörige Darstellungsmatrix invertierbar. Falls nicht, wann ist dies der Fall?

(vii) Falls A invertierbar ist, so ist die A zugeordnete lineare Abbildung injektiv.

(viii) Mit der Regel von Sarrus berechnet man die Determinante einer 2×2-Matrix.

(ix) Ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ in zwei Unbekannten und mit zwei Gleichungen hat genau dann eine eindeutige Lösung, wenn
  (a) $\det A = 0$
  (b) $\det A = 0$ und A invertierbar
  (c) $\det A \neq 0$
  (d) A invertierbar

(x) Es gilt $\det(\lambda A) = \lambda \det(A)$ für eine 3×3-Matrix A und ein $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

(xi) Quadrieren einer Zeile ist eine elementare Zeilenoperation. Was sind elementare Zeilenoperationen?

(xii) Es gilt $\det(A + B) = \det A + \det B$.

(xiii) Welcher der folgenden Übergänge kann nicht durch eine elementare Zeilenoperation geschehen sein:

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & -2.5 \end{pmatrix}$.

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$

Aufgabe 36 (Determinanten)

(a) Begründen Sie (ohne Verwendung der Formeln, nur mit Satz VI.3.3) ob die folgenden Matrizen von Null verschiedene Determinante haben oder nicht.

$$3, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen

$$\begin{pmatrix} 3 & 11 \\ x & 2x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 & 10 \\ -7 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Verwenden Sie die Sarrus'sche Regel falls anwendbar oder das Verfahren aus Satz VI.3.5.

Aufgabe 37 (Inverse Matrix)
Berechnen Sie (falls möglich) die Inverse der Matrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0.5 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sin\varphi & \cos\varphi \\ -\cos\varphi & \sin\varphi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 38 (Orthogonale Matrizen)
Eine Matrix $n \times n$-Matrix A heißt orthogonal, falls $A \cdot A^\top = \mathrm{Id}$.

(i) Bestimmen Sie mittels des Determinanten-Multiplikationssatzes die Determinante einer orthogonalen Matrix explizit.

(ii) Warum ist das Produkt orthogonaler Matrizen orthogonal?

(iii) Sind die folgenden Matrizen orthogonal?

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Was passiert mit dem Vektor $(1, 0)$ bei Anwendung der zu den ersten beiden Matrizen gehörigen linearen Abbildungen?

Hinweis: Es gilt $(\sin\varphi)^2 + (\cos\varphi)^2 = 1$.

Aufgabe 39 (Determinanten)
Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrix durch Entwicklung nach der ersten Spalte

$$\begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix}.$$

Kapitel VII

Lineare Gleichungssysteme

Aufgabe 40 (Lineare Gleichungssysteme)
Richtig oder falsch? Falls Sie der Ansicht sind, die Aussage stimme, so begründen Sie ihre Antwort. Geben Sie ansonsten ein Gegenbeispiel an.

(i) Sei A eine $m \times n$-Matrix und $x \in \mathbb{R}^n$. Jedes LGS $Ax = \mathbb{0}$ hat eine Lösung.

(ii) Sei A eine $m \times n$-Matrix und $b \in \mathbb{R}^m$. Jedes LGS $Ax = b$ hat eine Lösung.

(iii) Gibt es ein lineares Gleichungssystem mit genau *vier* Lösungen?

(iv) Gibt es ein LGS $Ax = b$ mit unendlich vielen Lösungen? Falls ja, geben Sie eines an.

(v) Für eine $m \times n$-Matrix A gilt $\mathrm{Rg}(A) \geq \min(m, n)$.

(vi) Der Rang einer Matrix ist invariant unter Spaltenvertauschungen.

(vii) Die Anzahl linear unabhängiger Zeilen einer 2×4 Matrix A ist echt kleiner als $\mathrm{Rg}(A)$.

(viii) Schreibt man ein lineares Gleichungssystem in n Unbekannten und mit m Gleichungen kurz $Ax = b$ so meint man

(a) A eine $m \times n$-Matrix, $b \in \mathbb{R}^n$,	(c) A eine $m \times n$-Matrix, $b \in \mathbb{R}^m$,
(b) A eine $n \times m$-Matrix, $b \in \mathbb{R}^m$,	(d) A eine $m \times n$-Matrix, $b \in \mathbb{R}^m$ oder $b \in \mathbb{R}^n$.

(ix) Ein Gleichungssystem $Ax = b$ heißt lösbar, wenn

(a) $Ax = b$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$,	(c) $Ax = b$ für mindestens ein $x \in \mathbb{R}^n$,
(b) $Ax = b$ für genau ein $x \in \mathbb{R}^n$,	(d) $Ax = b$ für genau ein $x \in \mathbb{R}^m$.

(x) Ist b eine der Spalten von A, so ist $Ax = b$ auf jeden Fall lösbar.

(xi) Sei A quadratisch mit $\det(A) \neq 0$ und es existiere eine Lösung x von $Ax = b$. Ist diese Lösung eindeutig?

(xii) Ist ein quadratisches LGS lösbar, so ist diese Lösung auch eindeutig.

(xiii) Sei A quadratisch und $\det(A) = 0$. Dann ist $Ax = b$

(a) nur lösbar für $b = \mathbb{0}$

(b) lösbar für alle $b \in \mathbb{R}^n$, aber nicht unbedingt eindeutig.

(c) nur dann lösbar, wenn $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(A|b)$.

(d) lösbar für manche b, aber für keines der b eindeutig.

(xiv) Für eine quadratische Matrix A gilt $\det(A) = 0$ genau dann, wenn $\mathrm{Rg}(A) = 0$. Falls nicht, was gilt?

(xv) $Ax = b$ ist lösbar genau dann, wenn $b \in \mathrm{Bild}(f_A)$. Die Lösung ist eindeutig, wenn $\ker(f_A) = \{\mathbb{0}\}$.

Aufgabe 41 (Rang)

(a) Man bestimme den Rang der folgenden Matrizen (wenn nötig durch Transformation in Zeilen-Stufen-Form).

$$-3, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 8 & 9 & 3 & 9 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Für eine quadratische 3×3-Matrix A gelte $A \cdot A^\top = \mathrm{Id}_3$. Bestimme ihren Rang. Was gilt für $n \times n$- Matrizen mit $A \cdot A^\top = \mathrm{Id}_n$?

(c) Berechne die Inverse der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

und löse das System

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

durch *Vorwärtsmultiplikation.*
Hinweis: Die Matrix A ist orthogonal!

Aufgabe 42 (Lineare Gleichungssysteme)

(a) Zeigen Sie, dass das LGS

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ -2x_1 & & & + & x_3 & = & -2 \\ 5x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & - & 3x_3 & = & 5 \end{array}$$

keine Lösung besitzt.

(b) Es seien

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sind die zugehörigen Abbildungen surjektiv/injektiv?

(c) Geben Sie für die beiden Matrizen A_1 und A_2 alle Vektoren $b \in \mathbb{R}^2$ an, für die $A_1 x = b$ bzw. $A_2 x = b$ lösbar ist. Verwenden Sie eine Basis zur Darstellung.

Aufgabe 43 (Gauss'scher Algorithmus)

(a) Man untersuche die folgenden LGS in Koeffizientenmatrix-Form auf Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen. Im Falle der Existenz gebe man alle Lösungen an.

$$(i) \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 5 & 7 & 9 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right), \quad (ii) \left(\begin{array}{rrr|r} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right), \quad (iii) \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 7 & 4 & 18 \\ 3 & 13 & 4 & 30 \end{array}\right)$$

(b) Geben Sie drei verschiedene 4×3-LGS an, eines mit keiner Lösung, eines mit unendlich vielen Lösungen mit einem/ zwei Freiheitsgraden und eines mit genau einer Lösung.

Kapitel VIII

Die Eigenwertaufgabe

Aufgabe 44 (Eigenwerte)
Richtig oder falsch? Falls Sie der Ansicht sind, die Aussage stimme, so begründen Sie ihre Antwort. Geben Sie ansonsten ein Gegenbeispiel an.

(i) Bei einer $n \times n$-Matrix kann nur der Nullvektor ein Eigenvektor zum EW $\lambda = 0$ sein.

(ii) $\lambda \in \mathbb{C}$ ist ein EW der $n \times n$-Matrix A genau dann, wenn ein $v \in \mathbb{C}^n$ existiert mit $Av = \lambda v$.

(iii) Es gelte $A(-v) = \lambda v$ für einen Vektor $v \neq 0$. Was gilt dann:
- (a) $-v$ ist Eigenvektor zum EW λ,
- (b) v ist Eigenvektor zum EW $-\lambda$,
- (c) $-v$ ist Eigenvektor zum EW $-\lambda$
- (d) $\lambda = 0$

(iv) Eine $n \times n$-Matrix
- (a) kann höchstens einen EW haben,
- (b) hat wenigstens einen EW,
- (c) kann nie Null als EW haben,
- (d) hat höchstens n EW,
- (e) kann auch keinen EW haben.
- (f) , die 0 als EW hat ist die 0-Matrix.

(v) Eine Diagonalmatrix hat nur von Null verschiedene Eigenwerte. Wenn nicht, welche dann?

(vi) Eine $n \times n$-Diagonalmatrix hat immer n verschiedene Eigenwerte.

(vii) Seien λ_1, λ_2 die Eigenwerte einer 2×2-Matrix A. Das charakteristische Polynom erfüllt
- (a) $p_{char}(\lambda) = \det(A - \lambda^2 \mathrm{Id}_2)$,
- (b) $p_{char}(\lambda) = \lambda^2 - \lambda_1 \cdot \lambda_2$,
- (c) $p_{char}(\lambda) = -\det(\lambda \mathrm{Id}_2 - A)$,
- (d) $p_{char}(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$

(viii) Die Spur einer Matrix ist die Summe der Diagonaleinträger von $A - \lambda \mathrm{Id}_2$.

(ix) Falls die zu A gehörige lineare Abbildung surjektiv ist, so ist 0 kein Eigenwert von A.

(x) Der Eigenraum zum EW λ besteht aus den linear unabhängigen Eigenvektoren zum EW λ.

(xi) Wenn die invertierbare Matrix A den Eigenwert λ besitzt, so hat A^{-1} den Eigenwert $\frac{1}{\lambda}$.

(xii) Wenn A den Eigenwert λ besitzt, so hat A^k den Eigenwert λ^k.

(xiii) Wenn A^2 den Eigenwert λ besitzt, so hat A den Eigenwert $\sqrt{\lambda}$.

(xiv) Eine reelle Matrix hat nur reelle EW. Geben Sie eine 3×3-Matrix mit komplexen EW an.

(xv) Eine 2×2-Diagonalmatrix habe die Eigenwerte $\lambda_1 = -3$ und $\lambda_2 = 3$. Man gebe die Eigenvektoren an und veranschauliche sich die Wirkung der Matrix auf diese graphisch.

(xvi) Es sei A eine $n \times n$-Matrix. Können die zu $(A - \lambda \mathrm{Id}_n)$ gehörigen Abbildungen $f_{A-\lambda \mathrm{Id}_n}$ injektiv für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ sein?

(xvii) Die Eigenvektoren einer Matrix bilden eine linear unabhängige Menge.

Aufgabe 45 (Berechnung von Eigenwerten)

(a) Man bestimme die Eigenwerte und Eigenräume der Matrizen

$$-3, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 4 & -3 \\ 2 & 7 & -4 \\ 3 & 9 & -5 \end{pmatrix}$$

und von

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Man berechne die Determinanten und Spuren der Matrizen aus (a).

(c) Man zeige: Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b & a \\ b & a & a \\ a & a & b \end{pmatrix}$$

besitzt u.A. den Eigenwert $\lambda_1 = 2a + b$. Wie lauten die übrigen Eigenwerte?

Aufgabe 46 (Charakteristisches Polynom)

(a) Man gebe das charakteristische Polynom der folgenden Matrizen an.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1+i & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1+i & \sqrt{2} \\ 1 & 0 & 1-i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+i \end{pmatrix},$$

(b) Man gebe jeweils eine Matrix mit charakteristischem Polynom

$$p_{char}(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1$$

an, wobei

(i) es eine Basis aus Eigenvektoren von A geben soll,

(ii) jeder Eigenraum von einem Vektor aufgespannt wird.

Aufgabe 47 (Eigenwerte spezieller Matrizen)

(a) Man zeige, dass eine symmetrische (reelle) Matrix nur reelle Eigenwerte hat.
Hinweis: Man berechne das charakteristische Polynom und die Diskriminante!

(b) Wo liegen die Eigenwerte einer schief-symmetrischen 2×2-Matrix?

(c) Eine komplexe 2×2-Matrix heißt hermitesch, wenn $A = \overline{A}^\top$, d.h. A ist von der Form

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & c \end{pmatrix}, \quad a, c \in \mathbb{R}.$$

Man zeige, dass die Eigenwerte solcher Matrizen reell sind.
Hinweis: Man berechne das charakteristische Polynom und die Diskriminante!

Zusatzaufgabe: 47.1 (Diagonalisierbarkeit von Matrizen)

Die **algebraische Vielfachheit**$\#_a(\lambda)$ eines Eigenwertes λ entspricht der Vielfachheit der zugehörigen Nullstelle des charakteristischen Polynoms.
Die **geometrische Vielfachheit** $\#_g(\lambda)$ eines Eigenwertes λ entspricht der Dimension des zugehörigen Eigenraums.
Eine Matrix $A \in M^{n\times n}(\mathbb{C})$ heißt **diagonalisierbar**, wenn für alle Eigenwerte λ von A gilt, dass die algebraische Vielfachheit gleich der geometrischen Vielfachheit ist.
Eine diagonalisierbare Matrix A kann wie folgt zerlegt werden:

$$A = T \cdot D \cdot T^{-1},$$

wobei D eine Diagonalmatrix mit den Eigenwerten auf der Hauptdiagonalen ist und T eine invertierbare Matrix ist. Dabei sind die Eigenvektoren von A die Spaltenvektoren von D, notiert in der zu D passenden Reihenfolge ihrer Eigenwerte.

Prüfen Sie, ob die folgenden Matrizen diagonalisierbar sind und zerlegen Sie diese Matrizen wie oben beschrieben. Begründen Sie zudem warum T invertierbar ist!

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \in M^{3\times 3}(\mathbb{C})$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & -4 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M^{3\times 3}(\mathbb{C})$$

$$C = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 15 & -9 & 6 \\ 10 & -6 & 4 \end{pmatrix} \in M^{3\times 3}(\mathbb{C})$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in M^{3\times 3}(\mathbb{C})$$

Kapitel IX

Numerische Methoden

Aufgabe 48 (LR- und QR-Zerlegung)
Richtig oder falsch? Falls Sie der Ansicht sind, die Aussage stimme, so begründen Sie ihre Antwort. Geben Sie ansonsten ein Gegenbeispiel an bzw. korrigieren Sie die Aussage.

(i) Mit der LR-Zerlegung teilt man eine symmetrische Matrix A in eine obere Dreiecksmatrix R und untere Dreiecksmatrix L auf, so dass $A = L \cdot R$ gilt.

(ii) Die Lösung des LGS $Ax = b$ findet man nach LR-Zerlegung durch Invertierung von L und Multiplikation von L^{-1} mit b.

(iii) Multipliziert man eine Matrix A von links mit der Matrix

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

dann bewirkt L

(a) für $a = 0$ eine Vertauschung von erster und zweiter Zeile,

(b) für $a = 1$ eine Vertauschung von erster und zweiter Zeile,

(c) für $a = 0$ eine Verdopplung der dritten Zeile,

(d) für $a = 1$ eine Addition des Zweifachen der ersten Zeile mit der dritten Zeile,

(e) für $a = -1$ in der dritten Zeile eine Vertauschung des ersten und dritten Eintrags.

(iv) Mit Elementarmatrizen kann man elementare Spaltenoperationen durchführen. Wenn ja, wie? Wenn nein, warum nicht?

(v) Ist $i > j$, so sind $L_{ij}(\alpha)$ und $L_{ij}^{-1}(\alpha)$ untere Dreiecksmatrizen.

(vi) Die Inverse von $L_{ij}(\alpha)$ ist $L_{ij}\left(\frac{1}{\alpha}\right)$.

(vii) Für Isomorphismen gibt es keine LR-Zerlegung.

(viii) Ziel der QR-Zerlegung einer Matrix A ist es eine orthogonale untere Dreiecksmatrix Q zu finden, so dass $Ax = Q \cdot Rx = b$ mittels $x = Q^\top b$ gelöst werden kann.

(ix) Sei $v \in \mathbb{R}^n$ ein beliebiger Spaltenvektor. Dann ist die zugehörige Householder-Matrix $H_v \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$

(a) $H_v := Id_n - \frac{2}{\|v\|_2^2} \cdot v \cdot v^\top$,

(b) $H_v := Id_n - \frac{2}{\|v\|_2^2} \cdot v^\top \cdot v$,

(c) $H_v := Id_n - \frac{2}{v^\top \cdot v} \cdot v \cdot v^\top$,

(d) $H_v := Id_n - \frac{2}{v \cdot v^\top} \cdot v \cdot v^\top$.

Aufgabe 49 (LR-Zerlegung)

(a) Berechnen Sie (falls möglich) die LR-Zerlegung der folgenden Matrizen.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1-i & 1+i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 7 \end{pmatrix}.$$

(b) Lösen Sie für jede der jeweiligen Matrizen in (a) mittels der gewonnen LR-Zerlegung ein lineares Gleichungssystem mit erstem Einheitsvektor als rechter Seite.

Aufgabe 50 (QR-Zerlegung)

(a) Berechnen Sie die QR-Zerlegung der folgenden Matrizen.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 6 & -3 & -2 \\ 8 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) Führen Sie mit der ersten in (a) gegebenen Matrix zwei Schritte im QR-Algorithmus aus.

Kapitel X

Zahlentheorie

Aufgabe 51 (Restklassen & mehr)

(i) Gibt es in $\mathbb{Z}_{14}$ Restklassen, die kein multiplikatives Inverses haben? Wenn ja, welche?

(ii) Gibt es in $\mathbb{Z}_{11}$ Restklassen, die kein multiplikatives Inverses haben? Wenn ja, welche?

(iii) Ein Informatiker argumentiert:

$$3 \cdot x \equiv 12 \mod 97 \implies x \equiv 4 \mod 97$$

Hat er Recht? Beweisen Sie Ihre Aussage.

(iv) Ein Informatiker argumentiert:

$$3 \cdot x \equiv 12 \mod 87 \implies x \equiv 4 \mod 87$$

Hat er Recht? Beweisen Sie Ihre Aussage.

(v) Geben Sie das additive Inverse der folgenden Restklassen in $\mathbb{Z}_m$ an. Verwenden Sie die Repräsentanten $\{1,\ 2, \dots,\ m\}$.
  (a) $[1]$ in $\mathbb{Z}_{20}$
  (b) $[4]$ in $\mathbb{Z}_{12}$
  (c) $[199]$ in $\mathbb{Z}_{200}$
  (d) $[2]$ in $\mathbb{Z}_4$

(vi) Berechnen Sie $217 \mod 23$, $11111 \mod 37$, $123456789 \mod 218$.

(vii) Zeigen Sie, dass je zwei aufeinanderfolgende ungerade Zahlen teilerfremd sind.

Aufgabe 52 (Euklidischer Algorithmus)

(a) Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler und eine Vielfachsummendarstellung des ggT für folgende Zahlenpaare $a_1 = 149$, $b_1 = 93$ und $a_2 = 297$, $b_2 = 63$.

(b) 457 ist eine Primzahl. Bestimmen Sie die multiplikativen Inversen von [12] und [200].

(c) Zeigen Sie, dass die Zahlen 1234 und 567 teilerfremd sind und bestimmen Sie s, $t \in \mathbb{Z}$, so dass gilt
$$1 = 1234s + 567t.$$

Aufgabe 53 (RSA Algorithmus)

(a) Berechnen Sie für $p = 23$ und $q = 37$ einen privaten und einen öffentlichen RSA Schlüssel und verschlüsseln Sie damit die Nachricht $m = 537$.

(b) Die Buchstaben A, B, C,..., Z seien durch die Zahlen 1, 2, 3,..., 26 codiert. Verwenden Sie den RSA- Algorithmus mit den Werten $p = 3$, $q = 11$ und $e = 3$ und

   (i) verschlüsseln Sie die Nachricht “MATHEMATIK”,

   (ii) entschlüsseln Sie den Geheimtext 13 21 14.

==

Kapitel XI

Lösungen

Aufgabe 1 (Vollständige Induktion)
Lösung:

<u>1. Induktionsstart:</u> Startwert $n_0 = 1$

$$\begin{aligned} 1^2 &= \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1 + 1) \\ 1 &= 1 \end{aligned}$$

<u>2. Induktionsschritt:</u> wenn $A(n)$ für k gilt, dann auch für $k+1$:

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 &= \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) \\ \Rightarrow 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 &= \frac{k}{6}(k+1)(2k+1) + (k+1)^2 \\ &= \frac{1}{6}(k+1)((2k^2+k) + 6 \cdot (k+1)) \\ &= \frac{1}{6}(k+1)(2k^2+7k+6) \\ &= \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3) \qquad \text{QED} \end{aligned}$$

<u>3. Induktionsschluss:</u> gilt $A(n)$ für k, dann auch für $k+1$ und somit $\forall n \in \mathbb{N}$

Aufgabe 2 ($\prod, \Sigma$-Schreibweise)
Lösung: Man wählt beispielsweise

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2}(k \cdot 2^k) &= \left(\sum_{k=1}^{2} k\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{2} 2^k\right) \\
1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 &= (1+2) \cdot \left(2 + 2^2\right) \\
2 + 8 &= 2 \cdot 6 \\
10 &\neq 12
\end{aligned}$$

und ebenso

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{2}(k + 2^k) &= \left(\prod_{k=1}^{2} k\right) + \left(\prod_{k=1}^{2} 2^k\right) \\
(1 + 2^1) \cdot (2 + 2^2) &= 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 \\
3 \cdot 6 &= 2 + 8 \\
18 &\neq 10
\end{aligned}$$

und erzeugt somit einen Widerspruch.

Aufgabe 3 (Mengenlehre)
Lösung:

(a) Die beiden Mengen $A = \{1, 2, 3, 7\}$ und $B = \{2, 7, 1, 3, 2\}$ sind gleich, da $B = \{2, 7, 1, 3, 2\} = \{1, 2, 3, 7\}$ und damit gilt, dass jedes Element, das in A ist, auch in B ist und umgekehrt, d.h.

$$B \subseteq A \ \wedge A \subseteq B \Rightarrow A = B.$$

(b) $A_1 = \{2, 4, 6, 8, \ldots\} \cap \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots\} = \{2\}$,
endliche Menge;

$A_2 = \{2, 4, 6, 8, \ldots\} \cup \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots\} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, \ldots\}$,
unendliche Menge;

$A_3 = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots\} \cap \{4, 5, 7, 9, 13, 15, \ldots\} = \{5, 7, 13, 19, \ldots\}$,
Mächtigkeit unbekannt.

(c) $A \cap B = \{\pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6, 7\} \cap \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{\pm 3, \pm 5, 7\}$
$A \cup B = \{\pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6, 7\} \cup \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{\pm 2, \pm 4, \pm 6, 2k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$
$A \cap C = \{\pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6, 7\} \cap \{1, 2, 3, 4, \ldots\} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
$A \setminus B = \{\pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6, 7\} \setminus \{0, \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots\} = \{\pm 2, \pm 4, \pm 6\}$
$C^c = \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \notin \mathbb{N}\} = \mathbb{Z}_{<0}$
$(A \cap B)^c = \mathbb{Z} \setminus \{\pm 3, \pm 5, 7\}$
$(A \cup B)^c = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\} \setminus \{\pm 2, \pm 4, \pm 6\} = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}, \ \ k \neq \pm 1, \pm 2, \pm 3\}$

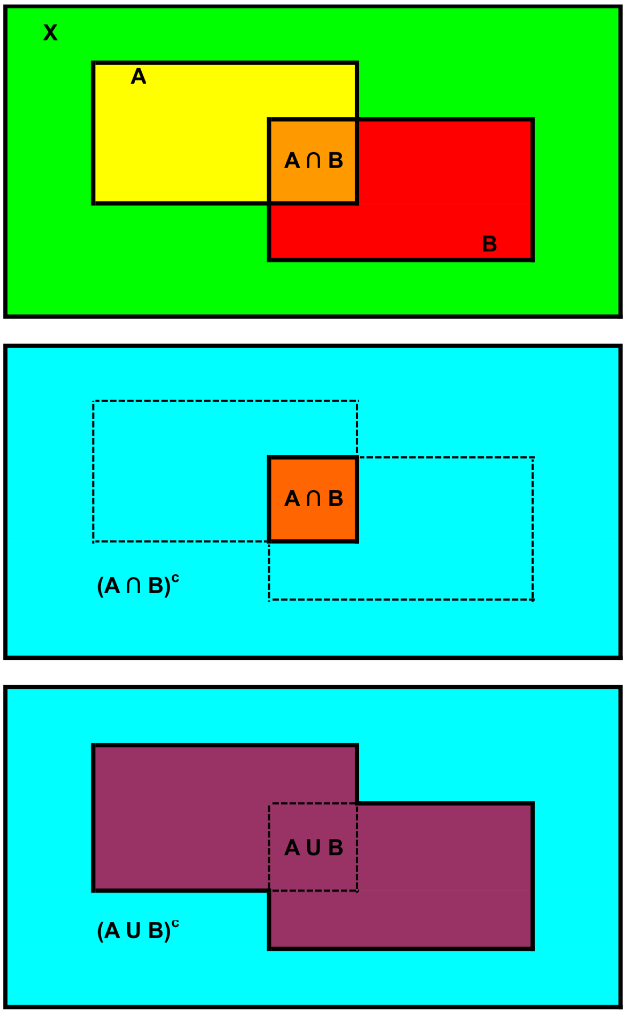
Aufgabe 4 (Intervalle)
Lösung:
Bestimmung der Lösungsmengen:

$$\begin{aligned} 2x-5 &\geq 0 \\ 2x &\geq 5 \\ x &\geq 2.5 \\ \mathbb{L}_1 &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \ 2.5\} = [2.5\ ,\ \infty) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x-12 &\leq 0 \\ 2x &\leq 12 \\ x &\leq 6 \\ \mathbb{L}_2 &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \ 6\} = (-\infty\ ,\ 6]\,. \end{aligned}$$

Mit Hilfe des Zahlenstrahls ermittelt man nun die Intervalle der Verknüpfungen.

$$
\begin{array}{lll}
\text{(i)} & \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 & = [2.5,\ 6] \\
\text{(ii)} & \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 & = \mathbb{R} \\
\text{(iii)} & \mathbb{L}_1 \setminus \mathbb{L}_2 & = (6,\ \infty) \\
\text{(iv)} & (\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2)^c & = (-\infty\ ,\ 2.5) \cup (6\ ,\ \infty) = \mathbb{R} \setminus [2.5,\ 6] \\
\text{(v)} & (\mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2)^c & = \{\}
\end{array}
$$

Aufgabe 5 (Mengenoperationen)
Lösung:

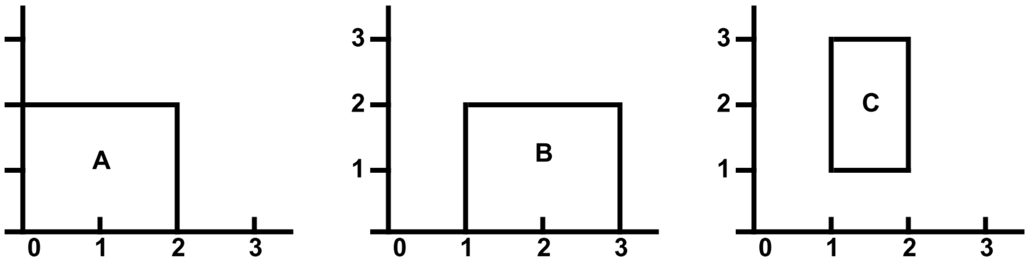


Aufgabe 6 (Potenzmenge)
Lösung:

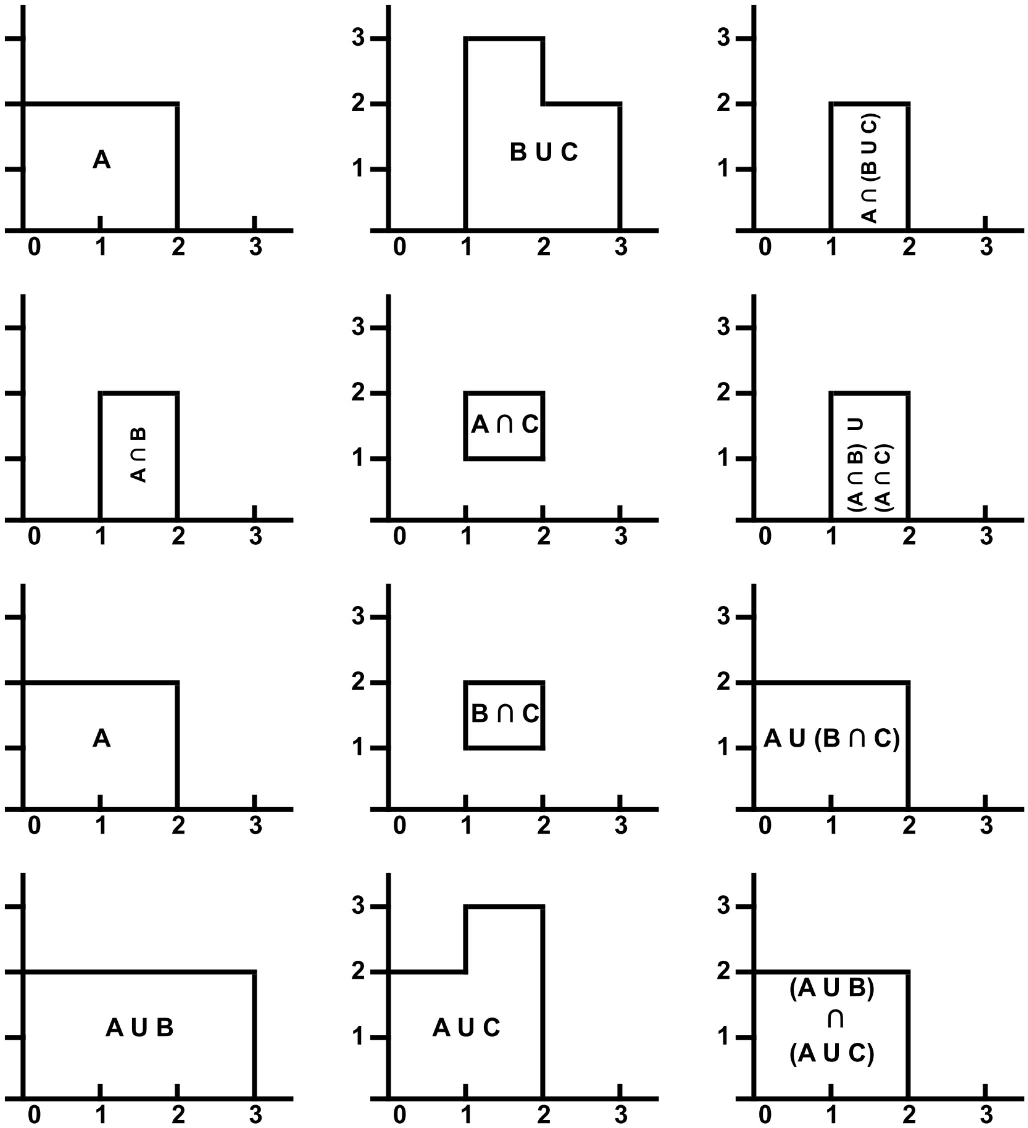
$$\begin{aligned}\mathcal{P}(X) =& \{\{\}, \{2\}, \{4\}, \{8\}, \{\tfrac{1}{8}\}, \{2,4\}, \{2,8\}, \{2,\tfrac{1}{8}\}, \{4,8\}, \{4,\tfrac{1}{8}\}, \{\tfrac{1}{8},8\},\\ & \{2,4,8\}, \{2,4,\tfrac{1}{8}\}, \{2,8,\tfrac{1}{8}\}, \{4,8,\tfrac{1}{8}\}, \{2,4,8,\tfrac{1}{8}\}\}\end{aligned}$$

Aufgabe 7 (kartesisches Produkt)
Lösung:

(i)



(ii)



Aufgabe 8
Lösung:
Nein. Sind $X = \{\}$ und $Y = \{\}$ leere Mengen gilt

$$\forall x \in X \Longrightarrow x \notin Y \quad \text{UND} \quad X = Y.$$

Aufgabe 9
Lösung:
Wir führen einen Widerspruchsbeweis durch.

Voraussetzung:	$A \cap A^c = \{\}$
Annahme 1:	$b \in A$
Folgerungen:	Wäre $b \in A$ dann hieße das, dass der Barbier sich nicht selbst rasiert. Dann wird er aber von dem Dorfbarbier rasiert, also von sich selbst und daher $b \in A^c$, d.h. $b \in A \Rightarrow b \in A^c \Rightarrow A \cap A^c = \{b\} \neq \{\}$.
Annahme 2:	$b \in A^c$
Folgerungen:	Wäre nun $b \in A^c$, so würde sich der Barbier selber rasieren. Aber der Barbier rasiert genau die Männer die sich nicht selber rasieren. Dies ist ein Widerspruch, d.h. $b \in A^c \Rightarrow b \in A \Rightarrow A^c \cap A = \{b\} \neq \{\}$.
Ergebnis:	Insgesamt gilt also weder $b \in A$ noch $b \in A^c$.

Aufgabe 10 (Äquivalenzrelationen)
Lösung:

(a) Man geht davon aus, dass alle Städte mit dem Zug erreichbar sind. Um nun zu zeigen, dass eine Äquivalenzrelation vorliegt, muss die Relation reflexiv, symmetrisch und transitiv sein:

(i) Eine Relation ist reflexiv falls für **ALLE** Elemente $x \in X$ gilt, dass sie mit sich selbst in Relation stehen: $x \sim x$. Im Fall der Zugfahrt bedeutet dies, dass man eine Stadt, in der man sich gerade befindet, von dort mit dem Zug erreichen kann, was offensichtlich für jede Stadt der Fall ist. Also ist die reflexive Eigenschaft erfüllt.

(ii) Eine Relation ist symmetrisch, falls aus $x \sim y$ auch $y \sim x$ folgt. Die gegebene Relation ist also symmetrisch, wenn aus der Tatsache, dass man von Stadt x mit dem Zug in Stadt y fahren kann folgt, dass man auch den Rückweg mit dem Zug zurücklegen kann. Auch wenn der Deutschen Bahn viel zuzutrauen ist, sollten wir davon ausgehen, dass dies der Fall ist. Die Relation ist damit symmetrisch: $x \sim y \Rightarrow y \sim x$.

(iii) Eine Relation ist transitiv, falls aus $x \sim y$ und $y \sim z$ folgt, dass $x \sim z$. Die gegebene Relation ist also transitiv, wenn man von Stadt x in Stadt y sowie von Stadt y in Stadt z fahren kann und daraus folgt, dass man von x nach z fahren kann. Dies sollte trotz des Risikos einer Umsteigeverbindung möglich sein, also ist die Relation transitiv.

Fazit:
Da die gegebene Relation

$$x \sim y \iff \text{Man kann von Stadt } x \text{ nach Stadt } y \text{ mit dem Zug fahren}$$

reflexiv, symmetrisch und transitiv ist, muss sie eine Äquivalenzrelation auf den deutschen Städten sein.

(b) (i) Die Relation

$$x \sim y \iff x \wedge y \text{ gerade}$$

ist **nicht reflexiv**, da sie nicht für alle $x \in \mathbb{Z}$ gilt: $x = 3$ steht nicht in Relation mit sich selbst, da es eine ungerade Zahl ist. Da die Relation nicht reflexiv ist, kann sie **keine Äquivalenzrelation** sein.

(ii) Die Relation

$$x \sim y \iff x - y \text{ gerade}$$

ist **reflexiv**, da die Differenz $x - x = 0$ für jedes $x \in \mathbb{Z}$ definitionsgemäß gerade ist, denn bei der Division durch zwei ergibt sich Rest null.
Weiterhin ist die Relation **symmetrisch**, denn wenn $x - y = 2k$ gerade ist, dann muss auch $y - x = -(x - y) = -2k$ gerade sein.
Wenn $x - y = 2k$, also gerade ist, und $y - z = 2n$ ebenfalls gerade ist folgt

$$x - z = (2k + y) - (y - 2n) = 2k + 2n = 2(k + n)$$

und damit ist auch $x - z$ gerade, die Relation damit **transitiv**.

Da alle drei Eigenschaften erfüllt sind, ist liegt eine **Äquivalenzrelation** vor.

(iii) Die Relation

$$x \sim y \iff x + y \text{ ungerade}$$

ist sicher **nicht reflexiv**, da die Summe aus einer Zahl mit sich selbst immer dem Zweifachen der Zahl entspricht und damit gerade ist.
Damit ist die Relation **keine Äquivalenzrelation**.

(c) (i) Die Relation

$$x \sim y \iff \text{Person } x \text{ ging zu Schulzeit mit Person } y \text{ in einer Schulklasse}$$

ist offensichtlich reflexiv und außerdem symmetrisch, denn wenn Schüler x mit Schüler y in einer Klasse war gilt dies auch umgekehrt. Die Relation ist aber nicht transitiv, da aus 'x war mit y in einer Klasse' und 'y war mit z in einer Klasse' muss ja nicht zwangsweise folgen, dass während der Schulzeit x auch mit z in eine Klasse gegangen ist.

(ii) Die Relation

$$x \sim y \iff x \text{ ist durch } y \text{ teilbar}$$

ist reflexiv, denn jede Zahl ist durch sich selbst teilbar. Sie ist transitiv, denn wenn eine Zahl x durch eine Zahl y teilbar ist und y durch z teilbar ist gilt:

$$x = a \cdot y, \quad y = b \cdot z \Rightarrow x = a \cdot b \cdot z, \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{Z}$$

und damit ist auch x durch z teilbar. Die Relation ist allerdings nicht symmetrisch, denn z.B. ist 8 zwar durch 2, aber 2 nicht durch 8.

(iii) Die Relation

$$x \sim y \iff \text{die Zahl } x \text{ ist um 1 größer als die Zahl } y$$

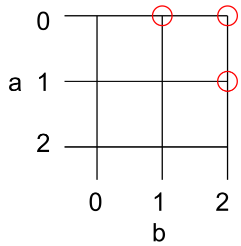
ist weder reflexiv, noch transitiv noch symmetrisch sind.

Beweis:

- Die Relation ist **nicht reflexiv**, da für alle $x \in X$ $x \neq x + 1$ gilt.
- Die Realtion ist **nicht symmetrisch**, da falls $x = y + 1$ gilt nicht folgt, dass $y = x + 1$ gilt (Bsp.: $x = 5$, $y = 4 \Rightarrow 5 = 4 + 1$, aber $4 \neq 5 + 1$).
- Die Relation ist **nicht transitiv**, da falls $x = y + 1$ und $y = z + 1$ nicht folgt, dass $x = z + 1$ sondern $x = z + 2$.

Aufgabe 11 (Relationen und Funktionen)
Lösung:

(a) Das Gitter könnte wie folgt aussehen:



(b) Für die Relation R_1 kann man keine Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ finden, da jedem Wert aus der Definitionsmenge unendlich viele Werte aus der Zielmenge zugeordnet werden müssten.

Für Relation R_2 können wir

$$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \;\; a \mapsto f_2(a) := a^2$$

definieren, deren Graph der Normalparabel entspricht.

Aufgabe 12 (Abbildungen)
Lösung:

(a) Die Abbildung

$$Id : M \to M, \;\; x \mapsto x$$

- ist stets surjektiv, da für jedes $b \in M$ ein $a \in M$ mit f(a) = b, d.h. das Bild $Bild(f)$ der Funktion entspricht dem Zielbereich;
- ist stets bijektiv, da sie stets surjektiv (s.o.) und stets injektiv ist, d.h. es folgt für $x_1 \neq x_2$ stets $f(x_1) \neq f(x_2)$;
- ist **nicht konstant**, da sie injektiv ist. Für konstante Funktionen gilt $f(x) = c, \;\; \forall x, c \in \mathbb{R}$

(b) (i) Die beschriebene Eigenschaft bedeutet:
Für alle Elemente x der Definitionsmenge X existiert genau ein Element y in der Zielmenge Y so dass y der Funktionswert von x ist.
Dies ist lediglich die Bedingung, dass überhaupt eine Funktion vorliegt. Es wird aber nicht näher spezifiziert ob diese injektiv ist, da hierzu zusätzlich gelten muss, dass jedem y-Wert höchstens ein x-Wert zugeordnet wird, verschiedene x-Werte also nicht den gleichen y-Wert haben dürfen. Weiter beschreibt der Ausdruck auch keine surjektive Eigenschaft, denn hierzu müsste allen y-Werten mindestens ein x-Wert zugewiesen werden, was aus dem Ausdruck nicht hervorgeht.

(ii) Die beschriebene Eigenschaft bedeutet:
Es existiert mindestens ein Element y in der Zielmenge Y so dass für alle Elemente x der Definitionsmenge X dieses y der Funktionswert von x ist.
Da wir wissen, dass es sich bei f um eine Funktion handelt, kann man das *mindestens* durch ein *genau* ersetzen, da definitionsgemäß bei Funktionen jedem x-Wert maximal ein y-Wert zugeordnet werden kann.
Dies beschreibt eine konstante Funktion. Diese Funktion ist nur injektiv, wenn $|X| = 1$, und nur surjektiv, wenn $|Y| = 1$. Andernsfalls ist die Funktion weder injektiv noch surjektiv.

(iii) Die beschriebene Eigenschaft bedeutet:
Für alle Elemente y des Bildes von f existiert genau ein Element x in der Definitionsmenge X so dass y ein Funktionswert von x ist.
Dies entspricht der Definition von Injektivität. Die Funktion ist nur surjektiv, wenn das Bild von f dem Zielbereich entspricht, worüber hier allerdings keine Aussage über den Zielbereich gemacht, d.h. dieser könnte auch Elemente enthalten, die nicht als Funktionswerte der Funktion $f(x)$ angenommen werden.

(iv) Die beschriebene Eigenschaft bedeutet:
Für alle Elemente y der Zielmenge Y existiert mindestens ein Element x der Definitionsmenge X so dass y der Funktionswert von x ist.
Dies entspricht der Definition von Surjektivität.

(c) (i) Geht man davon aus, dass eine Person mehrere Freundinnen haben kann, ist die Vorschrift $Mensch \rightarrow Freundin$ keine Funktion.

Definiert man den Begriff *Freundin* als Partnerin in einer monogamen Beziehung beschreibt die Vorschrift eine Funktion. Polygamie wird hier nicht betrachtet; dies ist bekanntlich eher ein organisatorisches als ein mathematisches Problem...

Die Eigenschaften dieser Funktion hängen von der Wahl der Definitions- und Zielbereiche ab:
Der Definitionsbereich könnte die Menge aller Menschen, aber auch eine Einschränkung auf eine Teilmenge, z.B. die der Studierenden in Stuttgart, oder die der Facebook-Freunde mit Status 'in einer Beziehung' etc. sein.
Der Zielbereich könnte dann die Menge aller Frauen bzw. die Menge der Studentinnen in Stuttgart sein.

Gehen wir vom Beispiel der Studierenden als Definitionsbereich und der Menge der Studentinnen als Zielbereich aus, dann ist die Funktion injektiv, wenn unterschiedliche Studierende unterschiedliche Freundinnen haben. Sie wäre darüber hinaus surjektiv (und damit bijektiv), wenn alle Studentinnen an unterschiedliche Studierenden vergeben wären.

(ii) Die Vorschrift $Mensch \rightarrow Vater$ ist eine Funktion, da jedem Menschen nur ein Vater zugeordnet werden kann.
Die Funktion ist nicht injektiv, da verschieden Personen der Definitionsmenge den gleichen Vater haben können. Die Funktion ist surjektiv, da jeder Vater mindestens ein Kind haben muss.

(iii) Geht man davon aus, dass jede Person nur ein Handy besitzt, ihr also nur eine eindeutige Nummer zugeordnet werden kann, so ist die Vorschrift $Mensch \rightarrow Handynummer$ eine Funktion.

Ist die Definitionsmenge die Menge aller Handybesitzer und der Zielbereich die Menge an möglichen Handynummern, so ist der Bildbereich die Menge aller vergebenen Handynummern. Das bedeutet also, dass nicht alle Nummern vergeben sein müssen und die Funktion damit nicht surjektiv ist. Wird jede vergebene Handynummer nur von einer Person genutzt, dann ist die Funktion injektiv; andere Person - andere Nummer! Wenn Personen gemeinsam ein Handy nutzen, ist die Funktion nicht injektiv.

Wählt man als Zielbereich allerdings die Menge der vergebenen Nummern, so ist die Funktion surjektiv, da jede Handynummer (mind.) einen Handybesitzer hat. Ist festgelegt, dass Handys nicht gemeinsam genutzt werden, so ist die Funktion auch injektiv und damit bijektiv.

(iv) Fragt man Menschen nach ihrem Lieblingsessen werden häufig mehrere Gerichte genannt. In diesem Fall wäre die Zuordnung nicht eindeutig und es läge

keine Funktion vor.
Bei genauer Definition von 'Lieblings-' im Sinne einer Exklusivwahl wird jeder Person nur ein Gericht eindeutig zugeordnet und es handelt sich um eine Funktion.

Da verschiedene Menschen das gleiche Lieblingsgericht haben können, ist die Funktion nicht injektiv. Da nicht jedes Gericht unbedingt ein Lieblingsessen einer Person sein muss, ist die Funktion nicht surjektiv.

(d) (i) injektiv und surjektiv

(ii) weder injektiv noch surjektiv

(iii) weder injektiv noch surjektiv

(iv) weder injektiv noch surjektiv

Aufgabe 13 (Abbildungen)
Lösung:
Die Aussage bedeutet Äquivalenz zwischen den Eigenschaften bijektiv, injektiv und surjektiv. Allgemein gelten bei der Äquivalenz

$$A \Longleftrightarrow B$$

die Schlussfolgerungen *'aus A folgt B'* und *'aus B folgt A'*.

Im Allgemeinen gilt: Ist f bijektiv, dann ist f sowohl injektiv als auch surjektiv.
In dieser Aufgabe liegt eine Funktion vor, d.h. jedem x in der Definitionsmenge wird genau ein y im Zielbereich zugeordnet. Zudem bestehen Definitions- und Zielbereich aus der gleichen, *endlichen* Menge.

Unter diesen Vorraussetzung prüfen wir einzeln die Aussagen:

$$\begin{array}{lllll}
(1) & f \text{ ist surjektiv} & \Longleftrightarrow & f \text{ ist injektiv,} \\
(2) & f \text{ ist injektiv} & \Longleftrightarrow & f \text{ ist bijektiv,} \\
(3) & f \text{ ist bijektiv} & \Longleftrightarrow & f \text{ ist surjektiv.}
\end{array}$$

Ist f **surjektiv**, dann muss jedem Element des Bildes ein Element aus der Definitionsmenge zugeordnet sein. Da jeder Zahl aus dem Definitionsbereich genau eine Zahl im Zielbereich zugeordnet wird und die Mengen endlich sind, muss f dementsprechend auch injektiv und damit bijektiv sein. Das heißt aus Surjektivität folgt hier Injektivität und Bijektivität: (1) „$\Rightarrow$“ ist damit ebenso gültig wie (3) „$\Leftarrow$“.

Ist f **injektiv**, wird jeder Zahl aus dem Definitionsbereich eine andere Zahl des Zielbereichs zugeordnet. Da beide Mengen endlich und gleich groß sind, muss jeder Zahl im Zielbereich auch genau eine Zahl im Definitionsbereich zugeordnet sein. Die Funktion muss damit auch surjektiv und bijektiv sein. Das heißt aus Injektivität folgt hier Surjektivität und Bijektivität: (2) „$\Rightarrow$“ ist damit ebenso gültig wie (1) „$\Leftarrow$“.

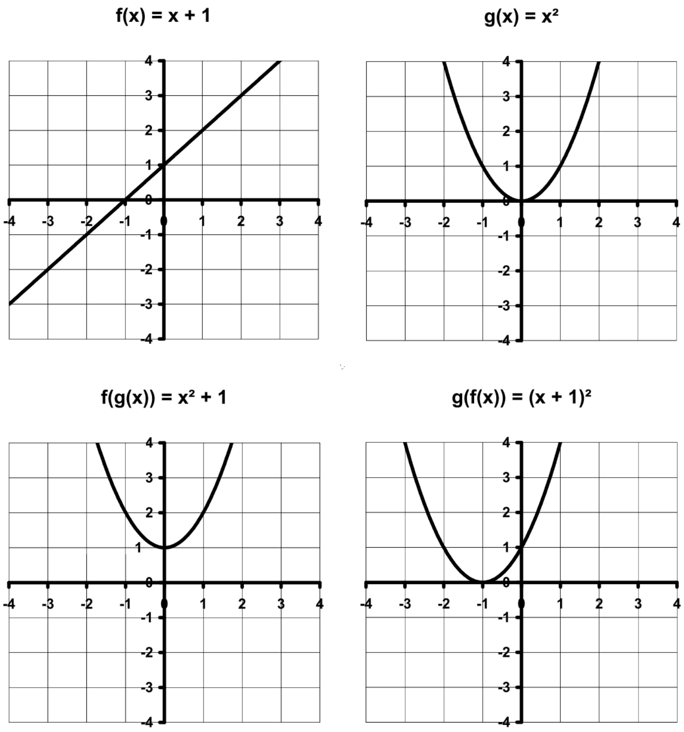
Ist f **bijektiv** folgt immer Surjektivität *und* Injektivität:
(3) „$\Rightarrow$“ ist damit ebenso gültig wie (2) „$\Leftarrow$“.

Damit sind unter den gegebenen Voraussetzungen alle Äquivalenzpfeile gültig.

Aufgabe 14 (Abbildungen)
Lösung:

(a) Die Verkettungen der Funktionen ergeben

$$\begin{aligned} f \circ g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad & x \mapsto f(g(x)) = x^2 + 1 \\ g \circ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \qquad & x \mapsto g(f(x)) = (x+1)^2. \end{aligned}$$



(b) Die Funktion h ist eine Verknüpfung der Funktionen f und g:

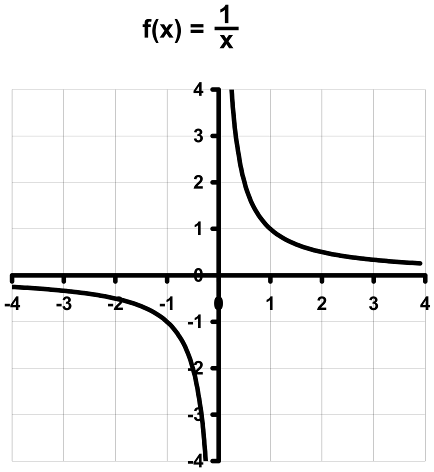
$$h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \;\; x \mapsto h(x) := g(f(x)) = (g \circ f)(x) = \tfrac{1}{x^2+1}$$

mit

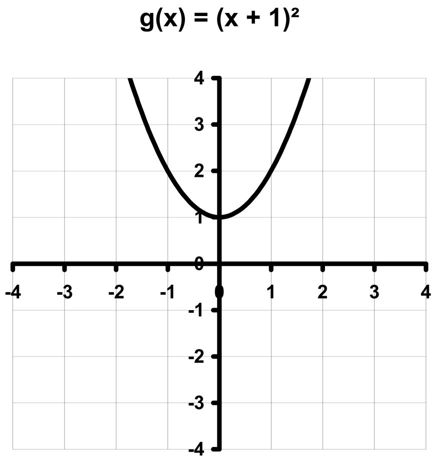
$$\begin{aligned} g\colon \quad & \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \qquad & x \mapsto f(x) := \tfrac{1}{x} \\ f\colon \quad & \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad & x \mapsto g(x) := x^2 + 1. \end{aligned}$$

Hier gilt, dass f in die Definitionsmenge D_g abbildet, d.h. das Bild $Bild(f)$ von f ist Teilmenge von D_g:

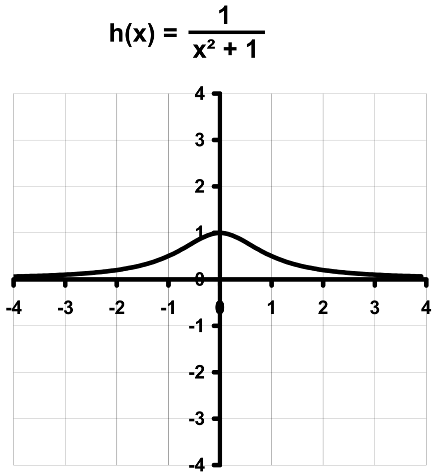
$$Bild(f) = [1, \infty) \subset D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$



f(x) = 1/x
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4



g(x) = (x + 1)²
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4



h(x) = 1/(x² + 1)
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4

Blatt 03 - Lösungen

Aufgabe 15

(i) mit $i^2 = -1$:

$$i^0 = 1$$
$$i^1 = i$$
$$i^2 = -1$$
$$i^3 = i^2 \cdot i = -i$$
$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)\cdot(-1) = 1 = i^0$$
$$i^5 = i^4 \cdot i = i = i^1$$

usw

$$\Rightarrow (i^5)^2 = (i^1)^2 = i^2 = -1$$

außerdem: $(-i)^2 = ((-1)\cdot i)^2 = i^2 = -1$

$\Rightarrow$ Aussage (i) ist <u>falsch</u>!

(ii) multiplikatives Inverses: z^{-1}, $z \cdot z^{-1} = 1$

Behauptung: 1 ist die einzige komplexe Zahl, die zu sich selbst multipl. Inverse ist.

$$\Leftrightarrow \quad z = z^{-1}$$

$$z = z^{-1} \quad | \cdot z$$
$$z^2 = z^{-1} z$$
$$z^2 = 1$$

Diese Gleichung erfüllen mehr als eine komplexe Zahl: $z = 1$, $z = -1$, d.h. Aussage (ii) ist <u>falsch</u>!

(2)

(iii) $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \iff \mathrm{Re}(z) \in \mathbb{R}, \iff y \neq 0$

$z = x + iy \qquad \mathrm{Im}(z) \neq 0$

multipl. Inverse von z: z^{-1}

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{z} \cdot \frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} =$$

$$= \frac{x}{x^2+y^2} - i \frac{y}{x^2+y^2}$$

Da laut Voraussetzung $y \neq 0$, ist z^{-1} immer eine eine komplexe Zahl und nie rein reell, d.h. $z^{-1} \in \mathbb{C} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Damit ist Aussage (iii) richtig

(iv) $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ mit $y_1 \neq 0$ und $y_2 \neq 0$

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) =$$

$$= x_1 x_2 + i x_1 y_2 + i y_1 x_2 + i^2 y_1 y_2 =$$

$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i \cdot (x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

für $x_1 = x_2 = 0$ ist $z_1 \cdot z_2 = -y_1 y_2$ eine rein reelle Zahl, d.h. $z_1 \cdot z_2 \in \mathbb{R}$ und damit ist Aussage (iv) falsch! Bsp: $\underbrace{i \cdot i}_{\in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}} = \underbrace{-1}_{\in \mathbb{R}}$

(v) $\mathrm{Re}(z) < |z|$; $z = x + iy$

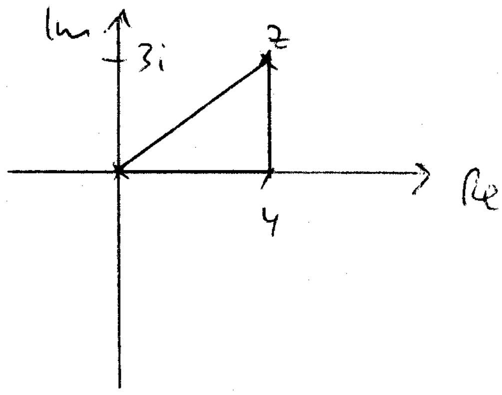
$x < |z|$

$x < \sqrt{x^2 + y^2}$

gilt nur, wenn $y \neq 0$

Bsp: $z = 1$; $\mathrm{Re}(z) = 1$; $|z| = 1 \Rightarrow$ Aussage (v) falsch!

(vi) $|z| \geq \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Re}(z)$



$z = 4 + 3i$

$|z| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

$\mathrm{Re}(z) = 4$

$\mathrm{Im}(z) = 3$

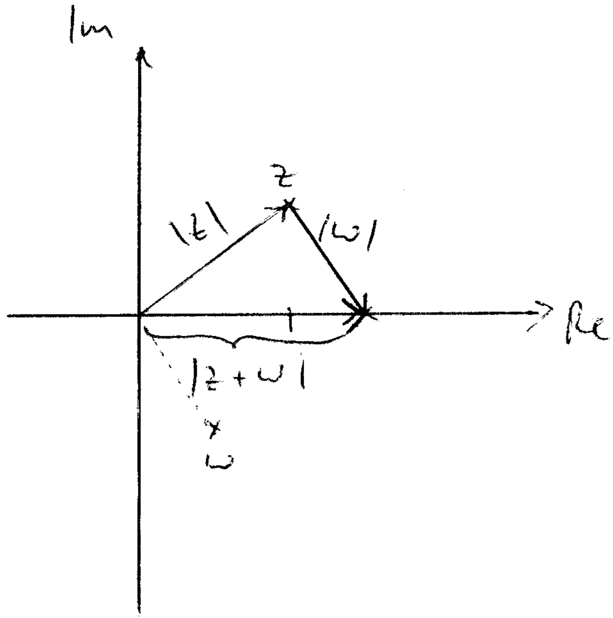
$|z| \geq \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Re}(z)$

$5 \geq 3 + 4$

$5 \geq 7$ ist falsch!

$\Rightarrow$ Aussage (vi) ist falsch!

(vii) $|z + w| \geq |z| + |w|$



Aussage (vii) ist im Allg. falsch!
Widerspruch zur Dreiecksungleichung
$|z + w| \leq |z| + |w|$

$\boxed{\text{Aufgabe 16}}$

a)
$z_1 = 3 - i4 \; ; \quad |z_1| = \sqrt{3^2+(-4)^2} = 5 \; ; \quad \bar{z}_1 = 3 + i4$

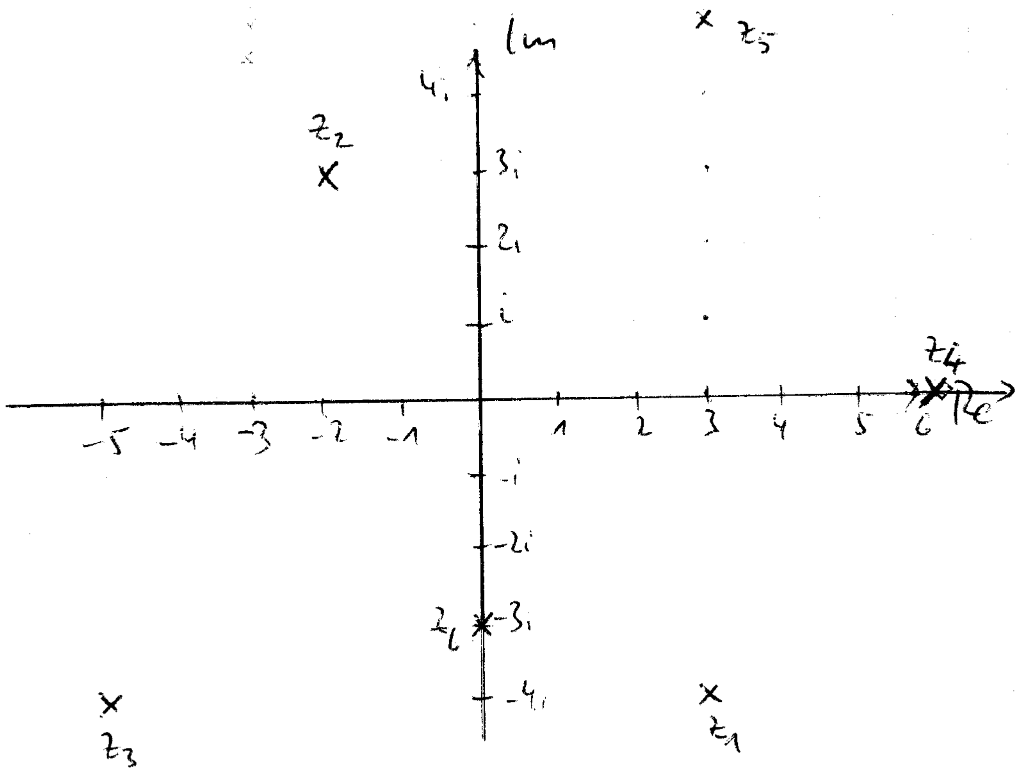
$z_2 = -2 + 3i \; ; \quad |z_2| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13} \; ; \quad \bar{z}_2 = -2 - 3i$

$z_3 = -5 - 4i \; ; \quad |z_3| = \sqrt{(-5)^2 + (-4)^2} = \sqrt{41} \; ; \quad \bar{z}_3 = -5 + 4i$

$z_4 = 6 \; ; \quad |z_4| = 6 \; ; \quad \bar{z}_4 = 6$

$z_5 = 3 + i5 \; ; \quad |z_5| = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34} \; ; \quad \bar{z}_5 = 3 - i5$

$z_6 = -3i \; ; \quad |z_6| = \sqrt{0^2 + (-3)^2} = 3 \; ; \quad \bar{z}_6 = 3i$



b) $z_1 = -3 + i5 \approx \sqrt{(-3)^2 + 5^2} \cdot e^{i(-59° + 180°)} = \sqrt{34} \cdot e^{i(-59° + 180°)} = \underline{\sqrt{34} \cdot e^{i\,120{,}96°}}$

(II. Quad)

$\varphi = -\arcsin\left(\frac{5}{\sqrt{34}}\right) + 180° \approx \underline{\underline{-59{,}04°}} + 180° = 120{,}96°$

$z_2 = -6 = 6 \cdot e^{i\pi} = 6 \cdot e^{i\,180°}$

$z_3 = -4i = 4 \cdot e^{i\frac{3\pi}{2}} = 4\, e^{i\,270°}$

$z_4 = -1 - i = \sqrt{2} \cdot e^{i\,225°} = \sqrt{2}\, e^{i\frac{5}{4}\pi}$

(III. Quad)

$$z_5 = -1+i = \sqrt{2}\cdot e^{i\cdot\frac{3}{4}\pi} = \sqrt{2}\, e^{i\,135^\circ} \quad (\text{II. Quad})$$ ⑤

$$z_6 = 1-i = \sqrt{2}\cdot e^{i\,\frac{7}{4}\pi} = \sqrt{2}\cdot e^{i\cdot 315^\circ} \quad (\text{IV Quad})$$

$$z_7 = 1+i = \sqrt{2}\cdot e^{i\,\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\, e^{i\,45^\circ} \quad (\text{I. Quad})$$

c)

$$z_1 = 3e^{i30^\circ} = 3\cos(30^\circ) + i\cdot 3\sin(30^\circ)$$
$$= 3\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3} + i\cdot 3\cdot 0{,}5$$
$$= \frac{3}{2}\sqrt{3} + i\cdot\frac{3}{2}$$

$$z_2 = 5e^{i(-60^\circ)} = 5\cos(-60^\circ) + i\cdot 5\sin(-60^\circ)$$
$$= 5\cdot\frac{1}{2} + i\cdot 5\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$$
$$= \frac{5}{2} - i\,\frac{5}{2}\sqrt{3}$$

$$z_3 = 3e^{i90^\circ} = 3i$$

$$z_4 = 2e^{i\,180^\circ} = 2\cos(180^\circ) + i\,2\cdot\sin(180^\circ)$$
$$= -2 + i\cdot 0$$
$$= -2$$

$$z_5 = \sqrt{2}\, e^{i\,135^\circ} = \sqrt{2}\cdot\cos(135^\circ) + i\sqrt{2}\cdot\sin(135^\circ)$$
$$= \sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) + i\sqrt{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$$
$$= -1 + i \quad (\text{vgl. b) } z_5)$$

Aufgabe 17

$$z_1 = -4i \ , \ z_2 = 3-2i \ , \ z_3 = -1+i$$

a) $$z_1 - 2z_2 + 3z_3 = -4i - 2\cdot(3-2i) + 3(1+i)$$
$$= -4i - 6 + 4i - 3 + 3i$$
$$= \underline{\underline{-9+3i}}$$

b) $$2 z_1 \cdot \bar{z}_2 = 2 \cdot (-4i) \cdot (3+2i) = -8i \cdot (3+2i)$$
$$= -24i - 16i^2 = \underline{\underline{16 - 24i}}$$

c) $$\frac{\bar{z}_1}{z_3} = \frac{\bar{z}_1}{z_3} \cdot \frac{\bar{z}_3}{\bar{z}_3} = \frac{4i(-1-i)}{|z_3|^2} =$$
$$= \frac{-4i-4i^2}{1^2+1^2} = \frac{-4i+4}{2} = \underline{\underline{2-2i}}$$

d) $$\frac{\bar{z}_3 + z_1}{\bar{z}_2 \cdot z_3} = \frac{(-1-i)+(-4i)}{(3+2i)(-1+i)} = \frac{-1-5i}{-3+3i-2i+2i^2}$$
$$= \frac{(-1)(1+5i)}{-5+i} = \frac{1+5i}{5-i} \cdot \frac{5+i}{5+i}$$
$$= \frac{(1+5i)(5+i)}{25+1} =$$
$$= \frac{5+i+25i+5i^2}{26} =$$
$$= \frac{5+26i-5}{26} = \underline{\underline{i}}$$

Aufgabe 18

a) $\Gamma := \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$

(i) $z_1, z_2 \in \Gamma \iff |z_1| = |z_2| = 1$

$$z_1 = |z_1| \cdot e^{i\varphi_1} = e^{i\varphi_1}$$

$$z_2 = |z_2| \, e^{i\varphi_2} = e^{i\varphi_2}$$

$$z_1 \cdot z_2 = e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} =$$

$$= 1 \, e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$

$\Rightarrow \quad |z_1 \, z_2| = 1 \quad \Rightarrow \quad z_1 z_2 \in \Gamma$ wzbw.

(ii) $z \in \Gamma \Rightarrow |z| = 1$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z} \cdot \frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \bar{z}$$

und da $|z| = |\bar{z}| = 1 \Rightarrow \bar{z} = \frac{1}{z} \in \Gamma$ wzbw.

b) $x^3 - 1 = 0$ hat 3 Nullstellen (Fundamentalsatz !)

$x_1 = 1$ ist eine Nullstelle $\Rightarrow$ Polynomdivision

$$(x^3 - 1) : (x - 1) = x^2 + x + 1$$

$$\begin{array}{l} -(x^3 - x^2) \\ \hline \quad x^2 - 1 \\ \quad -(x^2 - x) \\ \hline \qquad x - 1 \\ \qquad x - 1 \\ \hline \qquad - \; - \end{array}$$

$x^2 + x + 1 = 0$

$$\Rightarrow \quad x_{2/3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2}$$

$$= -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot i \cdot \sqrt{3}$$

Nullstellen: $x_1 = e^{i \cdot 0^\circ}$, $x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$

$x_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$

$x_1 = e^{i0°}$

$x_2 = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \cdot e^{i\varphi_2} = 1 \cdot e^{i120°}$

(II. Quad): $\varphi_2 = -\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}/2}{1}\right) + 180° =$

$= -60° + 180° = 120°$

$x_3 = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \cdot e^{i\varphi_3} = 1 \cdot e^{i240°}$

(III. Quad) $\varphi_3 = -\arcsin\left(\frac{-\sqrt{3}/2}{1}\right) + 180° =$

$= -(-60°) + 180° = 240°$

Ergebnis.

$x_1 = 1 \cdot e^{i0°} = 1 \cdot e^{i360°}$

$x_2 = 1 \cdot e^{i120°}$

$x_3 = 1 \cdot e^{i240°}$

D.h. alle Nullstellen liegen auf dem Einheitskreis um den Ursprung, wobei die Phase zwischen den Nullstellen jeweils 120° beträgt, der EHK also gedrittelt wird.

Verallgemeinerung auf $x^n - 1$; $n \geq 5$:

$x^n - 1 = 0$ hat ebenfalls bei $x_1 = 1$ eine Nullstelle

D.h. auch hier ist $|x_1| = 1$ und x_1 liegt auf dem EHK.

Eine Teilung des EHK in n Abschnitte führt dann auf Nullstellen der Form $x_k = 1 e^{i\frac{360°}{n}\cdot(k-1)}$ mit $k = 1, \dots, n$

Aufgabe 19

(i) $x^2 + 2x + 1 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 0}{2} = -1$$

(Doppelte Nullstelle bei $x = -1$) $\underline{\underline{x_1 = -1}}$

(ii) $(x-3)^2 - 2 = 0 \quad | +2$

$(x-3)^2 = 2 \quad | \sqrt{\ }$

$x - 3 = \pm \sqrt{2}$

$x = \pm\sqrt{2} + 3$ $\quad x_1 = \sqrt{2} + 3$

$x_2 = -\sqrt{2} + 3$

(iii) $x^2 + 16 = 0$

$x^2 = -16 \quad | \sqrt{\ }$

$x = \pm\sqrt{(-1) \cdot 16}$

$x = \pm 4i$ $\quad \underline{\underline{x_1 = 4i \ , \ x_2 = -4i}}$

(iv) $x^5 - 5 = 0 \quad | +5$

$x^5 = 5 \quad | \sqrt[5]{\ }$

$\underline{\underline{x_1 = \sqrt[5]{5} = \sqrt[5]{5}\, e^{i\,0^\circ}}}$

Die erste Lösung ist rein reell, die anderen vier Lösungen müssen auf dem Kreis um $(0/0)$ mit Radius $r = \sqrt[5]{5}$ liegen; $360^\circ : 5 = 72^\circ$

$x_2 = \sqrt[5]{5}\, e^{i\,72^\circ}$; $x_4 = \sqrt[5]{5} \cdot e^{i\,216^\circ}$

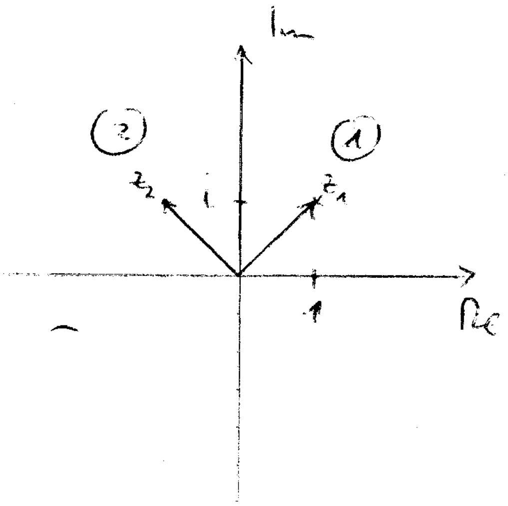
$x_3 = \sqrt[5]{5}\, e^{i\,144^\circ}$; $x_5 = \sqrt[5]{5}\, e^{i\,288^\circ}$

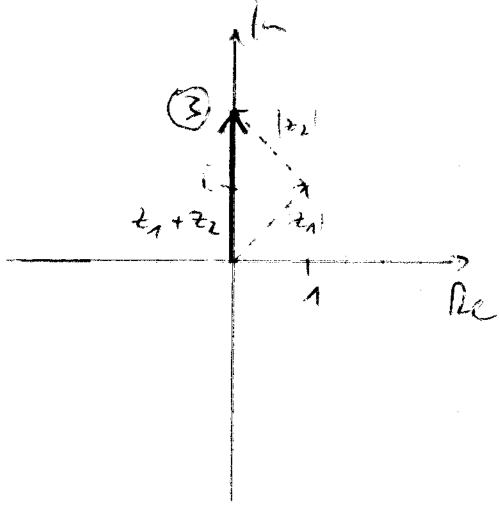
Aufgabe 20

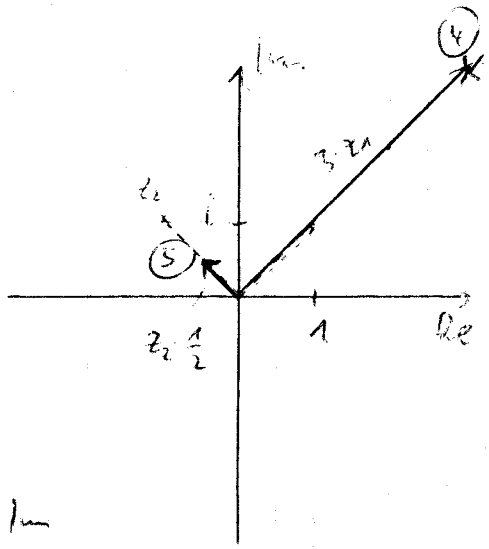
(i)

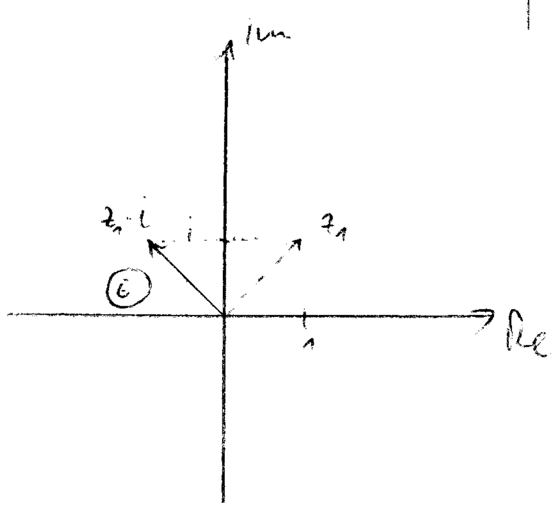
1. $z_1 = 1 + i$
2. $z_2 = -1 + i$
3. $z_1 + z_2 = (1+i) + (-1+i) = +2i$ (Vektoraddition)
4. $z_1 \cdot 3 = 3 \cdot (1+i) = 3 + 3i$ (Streckung)
5. $z_2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot (-1+i) = -\frac{1}{2} + i \cdot \frac{1}{2}$ (Stauchung)
6. $z_1 \cdot i = (1+i) \cdot i = i + i^2 = -1 + i$ (Spiegelung an y-Achse)
7. $z_1 z_2 = (1+i)(-1+i) = -1 + i - i + i^2 = -2$ (Drehstreckung)

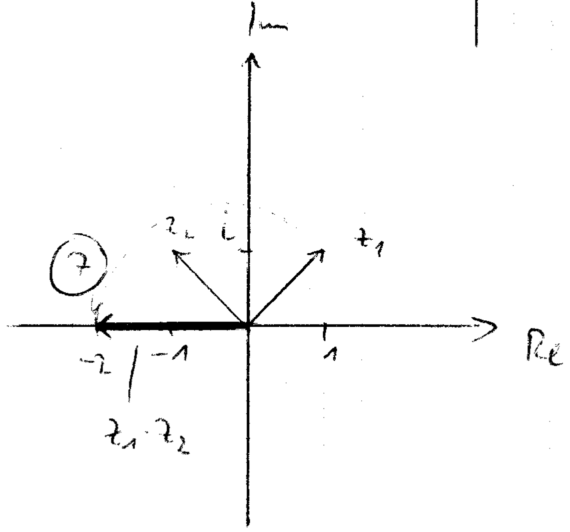
oder $z_1 z_2 = \sqrt{2} \cdot e^{i \cdot 45°} \cdot \sqrt{2} \cdot e^{i \cdot 135°} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot e^{i(45° + 135°)} = 2 \cdot e^{i \cdot 180°} = -2$











11

(ii) Spiegelt man z_1 am Ursprung erhält man

$$z_1^* = -1 - i \qquad (\hat{=} \text{ Drehung um } 180°)$$

$$z_1 \cdot z = z_1^*$$

$$(1+i) \cdot z = -1 - i$$

$$(1+i) \cdot z = (-1) \cdot (1+i)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{z = -1}}$$

(iii) Spiegelt man z_1 an der imaginären Achse erhält man

$$z_1^* = -1 + i \qquad (\hat{=} \text{ Drehung um } 90°)$$

$$(1+i) z = \cancel{*}{-1} + i \qquad | \cdot (1-i)$$

$$(1+i)(1-i) \cdot z = (-1+i)(1-i)$$

$$(1 - i + i - i^2) \cdot z = -1 + i + i + 1$$

$$2z = 2i$$

$$\underline{\underline{z = i}}$$

Spiegelt man z_1 an der reellen Achse erhält man

$$\bar{z}_1 = 1 - i \qquad (\hat{=} \text{ Drehung um } 270°)$$

$$z_1 \cdot z = \bar{z}_1$$

$$(1+i) z = (1-i) \qquad | \cdot (1-i)$$

$$(1+i)(1-i) z = (1-i)(1-i)$$

$$(1 - i + i - i^2) z = 1 - i - i + i^2$$

$$2z = -2i$$

$$\underline{\underline{z = -i}}$$

Aufgabe 21 (Vektorräume)
Lösung:

(i) Richtig, nach Definition gibt es in einem Vektorraum eine Additionsabbildung.

(ii) Falsch, Division bedeutet Multiplikation mit dem Inversen bzgl. der Multiplikation (gilt auch in $\mathbb{R}$: $a,b \in \mathbb{R}$: $\frac{a}{b} := a \cdot b^{-1}$). In Vektorräumen gibt es aber im Allgemeinen keine Multiplikation bzw. ein multiplikatives Inverses!

(iii) Ein Einselement ist ein Neutralelement bzgl. der Multiplikation. In einem Vektorraum bezieht sich das Einselement auf die skalare Multiplikation. Für einen K-Vektorraum (z.B. $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$) muss dieses Einselement e also in K liegen und die Bedingung $e \cdot x = x$ für alle x des Vektorraums erfüllen. Wenn e aber in K vorhanden ist, muss dieses Einselement das einzige sein. Beweis durch Widerspruch: Wir nehmen an, dass e ein Einselement eines Vektorraums V ist. Weiter nehmen wir an, dass es ein anderes Einselement ε des Vektorraums V gibt, d.h. es gilt

$$\varepsilon \cdot x = x, \ \forall x \in V, \quad \varepsilon \neq e.$$

Dann gilt mit den Vektorraum-Axiomen aber

$$\varepsilon \cdot x = x \Leftrightarrow \varepsilon \cdot x - x = 0.$$

Da aber auch e ein Einselement ist, gilt $e \cdot x = x$ und damit

$$\varepsilon \cdot x - e \cdot x = 0 \Leftrightarrow (\varepsilon - e) \cdot x = 0.$$

Da die letzte Gleichung für alle $x \in V$ gelten muss, ist die einzige Lösung

$$\varepsilon - e = 0 \Rightarrow \varepsilon = e.$$

Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, dass ε und e verschieden sind. Damit gibt es nur genau ein Einselement.

(iv) Richtig. Hier gilt es eine Mengengleichheit zu zeigen:

$\subseteq$ Nach Definition ist die Summe zweier Vektoren aus V wieder in V.

$\supseteq$ Jedes Element aus V kann man als Summe schreiben: $v \in V \Rightarrow V = V + \mathbb{0}$.

(v) Falsch, siehe (ii).

(vi) Falsch, der $\mathbb{R}^n$ besteht aus n-Tupeln von reellen Zahlen. Diese n-Tupel heißen Vektoren.

(vii) Falsch, die Menge der linken Seite ist in der Tat gleich V, also eine Menge von Vektoren. Die Menge auf der rechten Seite besteht aus 2-Tupeln. In der ersten Koordinate steht ein Element aus $\mathbb{R}$, in der zweiten ein Vektor aus V. Ist V beispielsweise der Vektorraum der reellwertigen Funktionen auf $[0, 1]$, dann ist $\mathbb{R} \times V = \{(\lambda, f) | \lambda \in \mathbb{R}, f \in V\}$.

(viii) Richtig nach Definition.

(ix) (a) ist falsch, es gibt keine im allgemeinen keine Multiplikationsabbildung.
(b) und (c) sind ist nach Definition richtig, wobei man bei (c) die reellen Zahlen auf der rechten Seite des kartesischen Produkts sowie im Zielbereich als Vektoren der Dimension 1×1 interpretiert.

(x) (a) ist falsch, da u und $u' \in U$ sein müssen.
(b) ist richtig, da $u - u' = u + (-1)u'$ mit $u, u' \in U$ und eine Vektoraddition in U definitionsgemäß zu Vektoren führt, die auch $\in U$ sind.
(c) ist richtig, nach Definition.

Aufgabe 22 (Vektorräume)
Lösung:
Beispiele für Elemente aus $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:

$$x = (1, 0, 0, 0, \ldots), \quad y = (1, 2, 3, 4, 5, \ldots), \quad z = (1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}, \ldots).$$

Damit ergibt sich für die Addition gemäß Definition:

$$x + y = (1, 0, 0, 0, \ldots) + (1, 2, 3, 4, 5, \ldots) = (2, 2, 3, 4, 5, \ldots).$$

Für die skalare Multiplikation gilt dementsprechend:

$$2 \cdot y = (2 \cdot 1, 2 \cdot 2, 2 \cdot 3, 2 \cdot 4, 2 \cdot 5, \ldots).$$

(i) Wir suchen nach einem Neutralelement bzgl. der Addition, d.h. wir suchen eine Folge $\mathbb{0} = (\mathbb{0}_1, \mathbb{0}_2, \mathbb{0}_3, \mathbb{0}_4, \ldots)$ so dass für alle $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ gilt

$$x + \mathbb{0} = (x_1 + \mathbb{0}_1, x_2 + \mathbb{0}_2, x_3 + \mathbb{0}_3, \ldots) = (x_1, x_2, x_3, \ldots).$$

Es kommt also nur die Nullfolge in Frage, also

$$\mathbb{0} = (0, 0, 0, 0, \ldots).$$

Das Neutralelement bzgl. der Multiplikation ist die reelle Zahl 1.

Das inverse Element $(-x)$ von x bzgl. einer Addition erfüllt $x + (-x) = \mathbb{0}$. Sei also $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ und für ein Inverses $y = (y_1, y_2, \ldots)$ muss gelten

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \ldots) = (0, 0, 0, 0, \ldots).$$

Da die beiden Folgen koordinatenweise gleich sind muss gelten

$$x_1 + y_1 = 0 \Leftrightarrow y_1 = -x_1, \quad x_2 + y_2 = 0 \Leftrightarrow y_2 = -x_2, \quad \text{etc.}$$

Folglich ist das Inverse $(-x_1, -x_2, -x_3, \ldots)$.

(ii) Wir müssen für die Axiome (1) bis (8) aus Definition IV.2.5 nachweisen. Hier werden exemplarisch das Assoziativgesetz (1) und ein Distributivgesetz gezeigt:

$$\begin{aligned}
(1)\quad (x + y) + z &= ((x_1, x_2, x_3, \ldots) + (y_1, y_2, y_3, \ldots)) + (z_1, z_2, z_3, \ldots) \\
\text{Definition}\quad &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \ldots) + (z_1, z_2, z_3, \ldots) \\
\text{Definition}\quad &= ((x_1 + y_1) + z_1, (x_2 + y_2) + z_2, (x_3 + y_3) + z_3, \ldots) \\
\text{Assoz. in } \mathbb{R}\quad &= (x_1 + (y_1 + z_1), x_2 + (y_2 + z_2), x_3 + (y_3 + z_3), \ldots) \\
\text{Definition}\quad &= (x_1, x_2, x_3, \ldots) + (y_1 + z_1, y_2 + z_2, y_3 + z_3, \ldots) \\
\text{Definition}\quad &= (x_1, x_2, x_3, \ldots) + ((y_1, y_2, y_3, \ldots) + (z_1, z_2, z_3, \ldots)) \\
&= x + (y + z)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(7) \quad \lambda \cdot (x+y) &= \lambda \cdot ((x_1, x_2, x_3, \ldots) + (y_1, y_2, y_3, \ldots)) \\
\text{Def. Add.} \quad &= \lambda \cdot (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \ldots) \\
\text{Def. skal. Mult.} \quad &= (\lambda\,(x_1 + y_1)\,, \lambda\,(x_2 + y_2)\,, \lambda\,(x_3 + y_3)\,, \ldots) \\
\text{Distr. in } \mathbb{R} \quad &= (\lambda x_1 + \lambda y_1, \lambda x_2 + \lambda y_2, \lambda x_3 + \lambda y_3, \ldots) \\
\text{Def. Add.} \quad &= (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \ldots) + (\lambda y_1, \lambda y_2, \lambda y_3, \ldots) \\
\text{skal. Mult.} \quad &= \lambda(x_1, x_2, x_3, \ldots) + \lambda(y_1, y_2, y_3, \ldots) \\
&= \lambda x + \lambda y, \quad \lambda \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 23 (Rechnen in Vektorräumen)
Lösung:
(a)

$$s_1 = \begin{pmatrix} -29 \\ 28 \\ 21 \\ -31 \end{pmatrix} + i \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad s_2 = \begin{pmatrix} 27 \\ -29 \\ -11 \\ 11 \end{pmatrix} + i \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad s_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -17 \\ 43 \\ 9 \end{pmatrix} + i \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{aligned} f_1(s) &= [2f - 5g + h]\,(s) = 2 \cdot f(s) - 5 \cdot g(s) + h(s) \\ &= 6s - \frac{5}{2s+1} + \sqrt{s} \\ &= \frac{12s^2 + 2s\sqrt{s} + 6s + \sqrt{s} - 5}{2s+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2(s) &= [4f - 3g + 2h]\,(s) = 4 \cdot f(s) - 3 \cdot g(s) + 2 \cdot h(s) \\ &= 12s - \frac{3}{2s+1} + 2\sqrt{s} \\ &= \frac{24s^2 + 4s\sqrt{s} + 12s + 2\sqrt{s} - 3}{2s+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_3(s) &= [f + g]\,(s) = f(s) + g(s) \\ &= \frac{6s^2 + 3s + 1}{2s+1} \end{aligned}$$

Aufgabe 24 (Lösungsmenge linearer Gleichungen)
Lösung:
Am einfachsten zeigt man dies, indem man das Unterraumkriterium nachweist, also dass $\mathbb{L}$ eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist. Dazu muss man zeigen, dass die triviale Lösung existiert, d.h. dass der Nullvektor Element der Lösungsmenge ist:

Es ist $\mathbb{0} \in \mathbb{L}$, denn $a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + \ldots + a_n \cdot 0 = 0$.

Außerdem muss das Vielfache einer Lösung ebenfalls eine Lösung der Gleichung sein, d.h. es muss für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{L}$ folgendes gelten:

$$a_1(\lambda x_1) + a_2(\lambda x_2) + \ldots + a_n(\lambda x_n) = \lambda \cdot \underbrace{(a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots a_nx_n)}_{=0} = 0.$$

Dies ist der Fall und damit ist $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) \in \mathbb{L} \ \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{L}$.

Darüber hinaus muss die Summe zweier Lösungen wieder Lösung der Gleichung sein. Für $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{L}$ gilt:

$$\begin{aligned} &a_1(x_1 + y_1) + a_2(x_2 + y_2) + \ldots + a_n(x_n + y_n) = \\ &\underbrace{(a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n)}_{=0} + \underbrace{(a_1y_1 + a_2y_2 + \ldots + a_ny_n)}_{=0} = 0. \end{aligned}$$

Also ist $x + y \in \mathbb{L}$.

Damit ist $\mathbb{L}$ ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$, also ein Vektorraum.

Aufgabe 25 (Der Raum $\mathbb{R}^n$)
Lösung:
Satz IV.2.4(7) und (8) besagen folgendes:

(7) $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}$ und $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$,

(8) $\forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$.

Man führt jede der beiden vektorwertigen Gleichungen aus dem $\mathbb{R}^n$ in ein Gleichungssystem aus n Gleichungen in $\mathbb{R}$ über, und die Distributivgesetze für die Vektoren $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ und $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ koordinatenweise nachweist.

Für (7) betrachten wir die Vektorgleichung $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$ komponentenweise:

$$\begin{aligned} \lambda \cdot (x_1 + y_1) &= \lambda \cdot x_1 + \lambda \cdot y_1 \\ \lambda \cdot (x_2 + y_2) &= \lambda \cdot x_2 + \lambda \cdot y_2 \\ \vdots \quad &= \quad \vdots \\ \lambda \cdot (x_n + y_n) &= \lambda \cdot x_n + \lambda \cdot y_n. \end{aligned}$$

Auf der linken Seite der Gleichungen werden zunächst die Koordinaten addiert und dann multipliziert, auf der rechten Seite erfolgt zunächst die Multiplikation und dann die Addition. Dies entspricht dem Distributivgesetz in $\mathbb{R}$.

Für (8) betrachten wir die Vektorgleichung $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda x + \mu x$ komponentenweise:

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \cdot x_1 &= \lambda x + \mu x_1 \\ (\lambda + \mu) \cdot x_2 &= \lambda x + \mu x_2 \\ \vdots \quad &= \quad \vdots \\ (\lambda + \mu) \cdot x_n &= \lambda x + \mu x_n. \end{aligned}$$

Auf der linken Seite wird zunächst addiert und dann multipliziert, auf der rechten Seite umgekehrt. Dies entspricht ebenfalls dem Distributivgesetz in $\mathbb{R}$.

Aufgabe 26 (Skalarprodukt & Norm)
Lösung:
Berechnung der Norm:

$$\begin{aligned} \|a\|_2 &= \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = 1 \\ \|b\|_2 &= \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2} \\ \|c\|_2 &= \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3} \end{aligned}$$

Berechnung des Skalarprodukts:

$$\langle a, c \rangle = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 1.$$

Aufgabe 27 (Elementares in Vektorräumen)
Lösung:

(i) Falsch, z.B. ergibt $1 \cdot (1,1) - \frac{1}{3}(3,3) = (0,0)$, obwohl die Vektoren $(1,1)$ und $(3,3)$ linear abhängig sind. Für lineare Abhängigkeit müssten die Linearkombination der Vektoren den Nullvektor nur dann ergeben können, wenn alle Koeffizienten null sind.

(ii) Falsch, z.B. ergibt $(1,1)+(-1,-1) = (0,0)$, obwohl die Vektoren $(1,1)$ und $(-1,-1)$ linear abhängig sind.

(iii) Falsch, siehe (ii).

(iv) Richtig, so ist der Aufspann definiert. Die Linearkombination muss nicht eindeutig sein, z.B.

$$\begin{aligned}
&(1,0) \in \operatorname{span}\{(1,1),(1,2),(1,3)\} \\
&\text{ und} \\
&(1,0) = 1 \cdot (1,1) + 1 \cdot (1,2) - 1 \cdot (1,3) \\
&(1,0) = 2 \cdot (1,1) - 1 \cdot (1,2) + 0 \cdot (1,3)
\end{aligned}$$

Für Eindeutigkeit müssten die Vektoren linear unabhängig sein.

(v) Falsch, z.B. ist $\{(1,0),(0,1),(1,1)\}$ linear abhängig, aber $\{(1,0),(0,1)\}$ linear unabhängig.

(vi) Falsch, denn $\operatorname{span}\{(1,1)\} = \{(x,x) | \in \mathbb{R}\}$, aber $(1,0)$ ist nicht Element von $\operatorname{span}\{(1,1)\}$.

(vii) Ja, durch Basisergänzungssatz, z.B. ergibt $(1,1)$ mit $(0,1)$ eine Basis. Man hat also einen Unterraum $\{(1,1)\}$ und nutzt z.B. die kanonische Einheitsbasis $B = \{(1,0),(0,1)\}$. Nun versucht man wie in Beispiel IV.5.10 den Vektor $(1,1)$ als Linearkombination der Basis B darzustellen:

$$(1,1) = 1 \cdot (1,0) + 1 \cdot (0,1).$$

Da der Koeffizient von $(1,0)$ nicht null ist, kann dieser Vektor in der Basis durch $(1,1)$ ersetzt werden und man erhält $B^* = \{(1,1),(0,1)\}$.

(viii) Richtig, denn $\operatorname{span}\{x_1,x_2,x_3\} = \mathbb{R}^3$, d.h. jedes Element kann als Linearkombination dargestellt werden. Es muss noch gelten, dass $\{x_1,x_2,x_3\}$ linear unabhängig ist. Wäre dies nicht so, dann wäre $x_3 = a_1x_1 + a_2x_2$ mit (a_1 oder $a_2 \neq 0$). Dann wäre $\operatorname{span}\{x_1,x_2\} = \mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^3$ hätte eine Basis aus weniger als drei Elementen, was nicht möglich ist. Alle Basen des $\mathbb{R}^3$ haben drei Elemente!

Aufgabe 28 (Lineare Unabhängigkeit)
Lösung:

(a) Zu zeigen ist, dass $M = \{a, b, c\}$ linear unabhängig in $\mathbb{R}^3$ ist. Um dies zu zeigen, betrachtet man eine Linearkombination die Linearkombination des Nullvektors aus den Vektoren a, b, c

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ und muss zeigen, dass die triviale Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ die einzige Lösung ist. Hierzu wird die vektorwertige Gleichung in ein Gleichunssystem aus drei Gleichungen und drei Unbekannten zeilenweise gelöst:

$$\begin{aligned} 1 \cdot \lambda_1 + 1 \cdot \lambda_2 + 1 \cdot \lambda_3 &= 0 \\ 1 \cdot \lambda_2 + 1 \cdot \lambda_3 &= 0 \\ 1 \cdot \lambda_3 &= 0. \end{aligned}$$

Man sieht, dass mit $\lambda_3 = 0$ aus der dritten Zeile folgt, dass $\lambda_2 = 0$ und damit in der ersten Zeile $\lambda_1 = 0$ folgen muss. Damit gilt $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ und die Vektoren a, b, c müssen linear unabhängig sein.

(b) Wir gehen vor wie in Aufgabe (a):

$$\begin{aligned} (I) \quad & 1 \cdot \lambda_1 + 1 \cdot \lambda_2 = 0 \\ (II) \quad & 1 \cdot \lambda_1 + 2 \cdot \lambda_2 = 0. \end{aligned}$$

Man sieht aus Zeile (I), dass $\lambda_2 = -\lambda_1$ ist. Damit erhält man in Zeile (II)

$$\lambda_1 - 2\lambda_1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 = 0$$

und sieht, dass $M = \{(1, 1), (1, 2)\}$ linear unabhängig in $\mathbb{R}^2$ ist.

(c)
- U_1 ist linear abhängig, weil mit $c = (0,0,0)$ der Nullvektor enthalten ist (vgl. Beispiel IV.5.4(i)).
- U_2 ist linear abhängig, weil b das -3-fache von a ist.
- U_3 ist linear abhängig, weil $1 \cdot a + 1 \cdot d - 1 \cdot e = \mathbb{0}$.

(d) Zu zeigen ist, dass $M = \{-1, i\}$ linear unabhängig im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{C}$ ist. Wir betrachten wieder die Linearkombination

$$\lambda_1 \cdot (-1) + \lambda_2 \cdot i = 0 + i0$$

mit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ und zeigen, dass $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Wir nutzen, dass die Gleichheit zweier komplexer Zahlen Gleichheit von Real- und Imaginärteil bedeutet:

$$\text{Re:} \quad \lambda_1(-1) = 0 \quad \text{und} \quad \text{Im:} \quad \lambda_2 = 0.$$

Man sieht, dass $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ sein muss und damit ist $M = -1, i$ linear unabhängig im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{C}$.

(e) Zu zeigen ist, dass $M = \{f_1, f_2\}$ linear unabhängig in $V = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid \text{f ist Funktion}\}$ ist. Auch hier stellt man die Linearkombination aus f_1 und f_2 auf und muss zeigen, dass diese die Null-Funktion nur erzeugen kann, wenn $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

$$\begin{aligned}
\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 &= \mathbb{0} - \text{Fkt.} \\
(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(s) &= 0 \qquad && \forall s \in [0,1] \\
\Leftrightarrow \lambda_1 f_1(s) + \lambda_2 f_2(s) &= 0 && \forall s \in [0,1] \\
\Leftrightarrow \lambda_1 e^s + \lambda_2 e^{2s} &= 0 && \forall s \in [0,1] \\
\Leftrightarrow \lambda_1 &= -\lambda_2 e^s && \forall s \in [0,1]
\end{aligned}$$

Da diese Gleichung für alle s gelten muss, folgt $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ und somit die lineare Unabhängigkeit der Funktionen f_1 und f_2 in V.

Aufgabe 29 (Basen von Vektorräumen)
Lösung:

(a) Wir ergänzen $U = \{\underbrace{(0,4,5,9)}_{u_1}, \underbrace{(3,3,3,3)}_{u_2}\}$ mit Hilfe der Basis $B = \{\underbrace{(1,0,0,0)}_{e_1}, \underbrace{(0,1,0,0)}_{e_2}, \underbrace{(0,0,1,0)}_{e_3}, \underbrace{(0,0,0,1)}_{e_4}\}$. Hierzu stellen wir u_1 aus den Einheitsvektoren der Basis B dar

$$u_1 = 0 \cdot e_1 + 4 \cdot e_2 + 5 \cdot e_3 + 9 \cdot e_4$$

und ersetzen e_2 (alternativ e_3 oder e_4 da hier die Koeffizient auch nicht null sind):

$$U_1 = \{(1,0,0,0), (0,4,5,9), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}.$$

In einem zweiten Schritt stellen wir u_2 mit Hilfe von U_1 dar:

$$u_2 = 3 \cdot e_1 + \frac{3}{4} e_2 - \frac{3}{4} e_3 - \frac{15}{4} e_4.$$

Wir ersetzen z.B. e_1 und erhalten damit

$$U_2 = \{(3,3,3,3), (0,4,5,9), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\},$$

eine Basis des $\mathbb{R}^4$, die $U = \{(0,4,5,9), (3,3,3,3)\}$ enthält.

(b) Um zu zeigen, dass $M = \{(1,2,3), (3,2,1), (1,3,2)\}$ Basis des $\mathbb{R}^3$ ist, muss M drei Elemente enthalten (was der Fall ist) und die Vektoren müssen linear unabhängig sein. Man stellt also wieder die Linearkombination des Nullvektors auf

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und zeigt, dass $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Zeilenweise lautet das Gleichungssystem dann

$$\begin{aligned} 1 \cdot \lambda_1 + 3 \cdot \lambda_2 + 1 \cdot \lambda_3 &= 0 \quad (I) \\ 2 \cdot \lambda_1 + 2 \cdot \lambda_2 + 3 \cdot \lambda_3 &= 0 \quad (II) \\ 3 \cdot \lambda_1 + 1 \cdot \lambda_2 + 2 \cdot \lambda_3 &= 0 \quad (III). \end{aligned}$$

Aus (I) folgt $\lambda_1 = -3\lambda_2 - \lambda_3$. Eingesetzt in (II) und (III) ergibt dies

$$\begin{aligned} 2 \cdot (-3\lambda_2 - \lambda_3) + 2 \cdot \lambda_2 + 3 \cdot \lambda_3 &= 0 \quad (II)' \\ 3 \cdot (-3\lambda_2 - \lambda_3) + 1 \cdot \lambda_2 + 2 \cdot \lambda_3 &= 0 \quad (III)' \\ \text{und damit} & \\ -4\lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \quad (II)'' \\ -8\lambda_2 - \lambda_3 &= 0 \quad (III)'' \end{aligned}$$

Mit $\lambda_3 = -8\lambda_2$ folgt in $(II)''$ $\lambda_2 = 0$ und damit auch $\lambda_3 = 0$ und $\lambda_1 = 0$. Es gilt also $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, die Vektoren von M sind also linear unabhängig und M ist damit eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

(c) Eine abbrechende Folge ist z.B. $(1,3,7,5,0,7,\underbrace{0,0,\ldots}_{\text{nur noch } 0})$ oder $(3,5,0,0,0,1,0,1,\underbrace{0,0,\ldots}_{\text{nur noch } 0})$.

Betrachte die Einheitsvektoren e_i mit

$$e_i = (0,\ldots,0,\underbrace{1}_{i-te},0,\ldots) \quad \text{und} \qquad B = \{e_i \mid i = 1,2,3,\ldots\}.$$

Sei $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$ ein typisches Element von Φ, bei dem ab einer gewissen Stelle $n+1$ nur noch Null-Elemente auftreten. Dann gilt

$$\sum_{i=1}^{n} x_i e_i,$$

d.h. jedes Element aus Φ ist als endliche Linearkombination von Elementen aus B darstellbar.
Nun ist nur noch zu zeigen, dass B linear unabhängig ist, also alle endlichen Teilmengen von B linear unabhängig sind. Betrachte etwa $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Dann folgt aus

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = \mathbb{0} \Leftrightarrow (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, 0, 0, \ldots) = (0, 0, \ldots)$$

durch Koordinatenvergleich $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, …, $\lambda_n = 0$. Dieses Verfahren ist für alle Teilmengen von B möglich und damit ist B linear unabhängig und eine Basis von Φ.

Aufgabe 30 (Lineare Abbildungen)
Lösung:
Gegeben ist eine lineare Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

(i) (a) Falsch, betrachte $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \mapsto x_1$.
Diese Abbildung ist linear mit $2 = n > m = 1$.
(b) Falsch, betrachte $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto (x, 0)$.
Diese Abbildung ist linear mit $1 = n < m = 2$.
(c) Falsch, siehe (a) und (b).
Nur falls f ein Isomorphismus ist, gilt $n = m$ und die Aussage ist wahr.

(ii) Richtig, laut Definition Isomorphismus.

(iii) Richtig, denn

$$\begin{aligned} & f(\mathbb{0}) = f(\mathbb{0} + \mathbb{0}) = f(\mathbb{0}) + f(\mathbb{0}) \qquad | - f(\mathbb{0}) \\ & \Leftrightarrow \mathbb{0} = f(\mathbb{0}) \end{aligned}$$

Ja, es gibt im Allgemeinen noch weitere Vektoren, die auf den Nullvektor abgebildet werden, nämlich alle Vektoren in $\ker f$.

(iv) Richtig, betrachte z.B.

$$f_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_j \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} jx_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, 3 \dots$$

(v) (a) Im Allgmeienen Falsch. Nur richtig, wenn $n = m$.
(b) Richtig per Definition.
(c) Im Allgmeienen Falsch. Nur richtig, wenn $n = m$ und f injektiv ist.

(vi) (a) Falsch, dann wäre $f \equiv \mathbb{0}$ und damit nicht injektiv.
(b) Richtig, denn f ist bijektiv und damit surjektiv.
(c) Richtig, alle Elemente die auf $\mathbb{0}$ abgebildet werden bestehen nur aus $\mathbb{0}$.

(vii) Falsch, es gibt keine Multiplikation von Vektoren der Art $f(\lambda x) = f(\lambda(1, \dots, 1)) \cdot f(x)$.

(viii) Falsch, die Komposition ist definiert durch $(f \circ g) = f(g(s))$. Außerdem gibt es keine Multiplikation von Vektoren (siehe (vii)) und die Dimensionen von $f(s)$ und $g(s)$ sind auch im Allgemeinen verschieden.

(ix) Die konstante Abbildung ist nur linear, falls $c = \mathbb{0}$. Andernfalls wäre $f(\mathbb{0}) \neq \mathbb{0}$ (s.(iii)).

(x) Richtig, denn sei $x \in \mathbb{R}^n$ und $B = \{b_1, \dots, b_n\}$, dann folgt, dass

$$x = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \ldots + \lambda_n b_n$$

für geeignete $\lambda_i \in \mathbb{R}$ gültig ist. Mit gegebenen Werten $f(b_i)$ folgt damit

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(b_i)$$

und damit, dass $f(x)$ bestimmt ist durch die Werte $f(b_i)$ mit $i = 1, \ldots, n$.

(xi) Nur richtig, falls f ein Isomorphismus ist, also $n = m$ gilt. Im Allgemeinen ist die Aussage falsch (vgl. Beispiel in der VL).

Aufgabe 31 (Lineare Abbildungen)
Lösung:

(a)
- f_1 ist nicht linear, da in der ersten Koordinate des Bildes keine Linearkombination sondern ein Produkt der x_i steht.
- f_2 ist nicht linear, da in beiden Koordinaten des Bildes Konstanten stehen. Es handelt sich also ebenfalls um keine Linearkombination!
- f_3 ist linear und hat die allgemeine Form

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

(b) Sei $x = (x_1, x_2, x_3)$ beliebig gegeben. Zu zeigen ist, dass $f(x)$ bestimmt durch die vorgegebenen Werte:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) \\ &= x_1 \cdot f(e_1) + x_2 \cdot f(e_2) + x_3 \cdot f(e_3) \\ &= x_1 \cdot (-1, 1, 3) + x_2 \cdot (0, 6, 3) + x_3 \cdot (2, 4, -3) \\ &= (-x_1 + 2x_3, x_1 + 6x_2 + 4x_3, 3x_1 + 3x_2 - 3x_3). \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass f vollständig bestimmt ist.
Um die Frage ob f injektiv ist zu beantworten, berechnet man $\ker f$. Man löst also das Gleichungssystem $f(x) = \mathbb{0}$:

$$\begin{array}{rcrcrcrl} -x_1 & + & 0x_2 & + & 2x_3 & = & 0 & (I) \\ x_1 & + & 6x_2 & + & 4x_3 & = & 0 & (II) \\ 3x_1 & + & 3x_2 & - & 3x_3 & = & 0 & (III). \end{array}$$

Aus (I) folgt $x_1 = 2x_3$ und damit

$$\begin{array}{rcrcrl} 6x_2 & + & 6x_3 & = & 0 & (II)' \\ 3x_2 & + & 3x_3 & = & 0 & (III)' \end{array}$$

Aus $(II)'$ folgt $x_2 = -x_3$. Setzt man dies in $(III)'$ erhält man $0 \cdot x_3 = 0$ und sieht, dass dies für beliebige x_3 gültig ist. Man setzt $x_3 = \lambda$ und stellt den Zusammenhang zu den anderen Koordinaten her: $x_2 = -\lambda$, $x_1 = 2\lambda$. Damit ist der Kern bestimmt:

$$\ker f = \left\{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Da $\ker f \neq \mathbb{0}$ gilt, ist f nicht injektiv und damit kein Isomorphismus.

Wir prüfen die Eigenschaft der Surjektivität, indem wir Satz(V.2.8) anwenden. Es handelt sich um eine Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to R^3$. Nehmen wir an, f wäre surjektiv, dann wäre f auch injektiv. Dies steht aber im Widerspruch zur vorherigen Untersuchung und dem Ergebnis, dass f nicht injektiv ist. Also ist f auch nicht surjektiv.

Alternativ kann man auch die Dimension des Bildes von f betrachten. Zu zeigen ist, wenn f surjektiv ist muss $\text{Bild} f = \mathbb{R}^3$ gelten, d.h. das Bild muss mit dem Zielbereich übereinstimmen.

Dies kann mit Hilfe des sogenannten *Kern-Bild-Satzes*, der Aussagen über den Zusammenhang der Dimensionen von Kern und Bild macht, geprüft werden. Dieser lautet für lineare Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ allgemein:

$$dim(\ker f) + dim(\text{Bild} f) = dim(\mathbb{R}^n) = n.$$

In diesem Fall gilt damit für $n = 3$ und die gegebene Funktion f

$$\begin{aligned} dim(\ker f) + dim(\text{Bild} f) &= dim(\mathbb{R}^n) = 3 \\ dim(\text{Bild} f) &= dim(\mathbb{R}^n) - dim(\ker f) = 3 - 1 = 2. \end{aligned}$$

Da $2 = dim(\text{Bild} f) \neq dim(\mathbb{R}^3) = 3$, ist f nicht surjektiv.

(c) Die Abbildung ist linear, wenn $a = 0$, denn es muss gelten, dass $f(\mathbb{0}) = 0$. Um den Kern zu berechen müssen wir alle Vektoren bestimmen, die durch f auf den Nullvektor abgebildet werden. Dies sind hier alle Vektoren, deren erste Komponente null ist, denn die Abbildung bildet einen Vektor nur auf seine erste Komponente ab. Der Kern ist also

$$\ker f = \{(0, x_2, x_3, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, \; i = 2, \ldots, n\}.$$

Aufgabe 32 (Matrizen)
Lösung:

(a)

$$A^\top = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B^\top = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C^\top = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(b) Wir berechnen zunächst die Produkte der Matrizen:

$$\begin{array}{c|c||c|c}
A \cdot B & \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} & C \cdot C^\top & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\
\hline
\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 8 & -2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}
\end{array}$$

$$A \cdot B - C \cdot C^\top = \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 8 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -22 & -1 \\ 2 & -16 \end{pmatrix}$$

(c)

$$A^\top - B - 3C^\top = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -10 \\ -9 & 3 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$$

(d) Eine Addition der Matrizen ist nicht möglich, da diese nicht in Zeilen- und Spaltenzahl übereinstimmen.

Aufgabe 33 (Quadratische Matrizen)
Lösung:

(1) linke obere Dreiecksmatrix,

(2) schiefsymmetrisch,

(3) (linke/rechte) obere Dreiecks-Matrix,

(4) keine der genannten Eigenschaften

(5) (symmetrische) Diagonalmatrix

Aufgabe 34 (Matrizen und Lineare Abbildungen)
Lösung:
Durch Einsetzen der Einheitsbasisvektoren in die Abbildungsvorschrift f erhält man die Bilder der Basis

$$f(e_1) = f((1,0,0)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f(e_2) = f((0,1,0)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f(e_3) = f((0,0,1)) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Die Darstellungsmatrix A erhält man, indem man die Bilder der Basisvektoren in die Spalten der Matrix zusammenfasst:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Der Kern der Abbildung ist die Menge an Vektoren, die durch f auf den Nullvektor abgebildet werden, also gilt $f(x) = \mathbb{0}$ und man erhält

$$(x_2, x_1 - x_3) = (0,0) \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = 0, \ \ x_1 = x_3$$

$$\Rightarrow \quad \ker f = \left\{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Die Abbildung ist surjektiv, denn zu vorgegebenen (y_1, y_2) gibt es das Element $x^* = (y_2, y_1, 0)$ mit $f(x^*) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, d.h. das Bild von f stimmt mit dem $\mathbb{R}^2$ überein.

Aufgabe 35 (Elementares in Vektorräumen)
Lösung:

(i) (a) Falsch, die Determinante ist definitionsgemäß eine reelle Zahl.
(b) Richtig, denn die Inverse der Determinante ist $\det^{-1}(A) = \frac{1}{\det(A)}$ existiert nur, wenn $\det(A) \neq 0$. Dies ist gegeben, da A laut Vorgabe invertierbar ist.
(c) Richtig per Definition, siehe (a).
(d) Falsch, siehe (a) und (c).

(ii) Falsch, nicht inverierbar heißt $\det(A) = 0$.

(iii) Falsch, $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$, d.h. es reicht, wenn $\det(A) = 0$ *oder* $\det(B) = 0$. Es muss nicht $\det(A) = \det(B) = 0$ gelten.

(iv) Richtig. Laut Vorgabe sind die Matrizen A und B nicht invertierbar, d.h.

$$\det(A) = \det(B) = 0.$$

Mit dem Determinanten-Multiplikationssatz ergibt sich

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) = 0 \cdot 0 = 0,$$

d.h. dies gilt für alle nicht-invertierbaren Matrizen A und B.

(v) Richtig. Zu zeigen ist

$$\det(A) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \det(A) \cdot \det(A^{-1}) = \det \mathrm{Id}_n.$$

Mit dem Determinanten-Multiplikationssatz erhalten wir

$$\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = \det(A \cdot A^{-1}) = \det(Id_n).$$

(vi) Dies ist im Allgemeinen falsch. Die Darstellungsmatrix ist genau dann invertierbar, wenn f_A bijektiv, also ein Isomorphismus ist.

(vii) Wenn A invertierbar ist gilt

$$\det(A) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists A^{-1}.$$

Damit f_A injektiv ist muss $\ker f = \mathbb{0}$ gelten, d.h.

$$f_A(x) = A \cdot x = \mathbb{0} \quad \Rightarrow \quad x = \mathbb{0}.$$

$$\begin{aligned} A^{-1} \cdot | \qquad\qquad A \cdot x &= \mathbb{0} \\ A^{-1} \cdot A \cdot x &= A^{-1} \cdot \mathbb{0} \\ \mathrm{Id}_n \cdot x &= \mathbb{0} \\ x &= \mathbb{0} \quad \Rightarrow \quad f_A \text{ ist injektiv.} \end{aligned}$$

Die Aussage ist also richtig.

(viii) Falsch. Die Regel von Sarrus gilt nur für 3×3-Matrizen.

(ix) (a) Falsch. Die Lösung $x = A^{-1}b$ erfordert die Existenz der Inversen von A und damit $\det(A) \neq 0$.
(b) Falsch. Hier liegt ein Widerspruch zwischen 'A ist invertierbar' und '$\det(A) = 0$' vor.
(c) Richtig, $\det(A) \neq 0$ bedeutet, dass eine Inverse von A existiert, mit deren Hilfe man die Lösung $x = A^{-1}b$ ermitteln kann. Da die Inverse eindeutig ist, ist die Lösung es auch.
(d) Richig, wenn A invertierbar ist kann die Lösung mit $x = A^{-1}b$ ermitteln werden. Da die Inverse eindeutig ist, ist die Lösung es auch.

(x) Falsch. Die Formel lautet $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$ für $n \times n$-Matrizen A.

(xi) Falsch. Quadrieren ist keine elementare Zeilenumformung. Hierzu gehören:

(1) Zeilenvertrauschung bzw. Spaltenvertauschung,

(2) Multiplikation einer Zeile bzw. Spalte mit einem Skalar λ und

(3) Addition einer mit einem Vielfachen λ multiplizierten Zeile/Spalte zu einer anderen Zeile/Spalte.

(xii) Falsch. Die Determinante ist nicht additiv. Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A + B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) + \det(B) = 1 + 2 \neq 6 = \det(A + B)$$

(xiii) Bezeichnet man die erste Zeile der Ausgangsmatrix mit (I) und die zweite Zeile mit (II), so ergibt sich die zweite Zeile der umgeformten Matrix $(II)'$ wie folgt:
(a) $(II)' = (II) + (I)$ ist eine korrekte Zeilenumformung.
(b) $(II)' = -\frac{1}{2} \cdot (I) + 1 \cdot (II)$ ist eine korrekte Zeilenumformung. (c) $(II)' = 4 \cdot (I) + 0 \cdot (II)$ ist keine korrekte Zeilenumformung, da ein $\lambda = 0$ ist und man so aus linear unabhängigen Zeilen linear abhängige gemacht hat.

Aufgabe 36 (Determinanten)
Lösung:

(a) (1) $|3| = 3$
(2) $\det \neq 0$, denn die Spalten sind linear unabhängig.
(3) $\det \neq 0$, denn die Spalten sind linear unabhängig.
(4) $\det = 0$, denn die Zeilen sind linear abhängig: $A_{1\cdot} = A_{3\cdot}$.
(5) $\det = 0$, denn der 3. Spaltenvektor ist der Nullvektor.
(6) $\det = 0$, denn die Spaltenvektoren sind linear abhängig: $A_{\cdot 3} = A_{\cdot 4}$.

(b) (1) $\det \begin{pmatrix} 3 & 11 \\ x & 2x \end{pmatrix} = 3 \cdot 2x - x \cdot 11 = -5x$

(2) $\det \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} = 0$

(3) $\det \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 9 + 4 \cdot 8 \cdot 3 + 2 \cdot 6 \cdot 7 - 3 \cdot 5 \cdot 7 - 6 \cdot 8 \cdot 1 - 9 \cdot 2 \cdot 4 = 0$

(4) $\det \begin{pmatrix} 3 & 4 & 10 \\ -7 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix} = 3{\cdot}4{\cdot}8+4{\cdot}1{\cdot}0+10{\cdot}(-7){\cdot}2-0{\cdot}4{\cdot}10-2{\cdot}1{\cdot}3-8{\cdot}(-7){\cdot}3 = 174$

(5) $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} =$

$$= (-0) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (0 + 9 - 8 - 0 - 3 + 30) - 2 \cdot (5 + 0 - 32 - 4 - 12 - 0) = 142$$

Aufgabe 37 (Inverse Matrix)
Lösung:

(1) Es existiert keine Inverse, da die ersten beiden Spalten linear abhängig sind und damit $\det(A) = 0$ gilt.

(2) Wir nutzen das Schema für Inverse von 2×2-Matrizen:

$$B^{-1} = \frac{1}{1 \cdot 3 - 0.5 \cdot 2} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -0.5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 & -1.0 \\ -0.25 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

(3) Wir nutzen das Schema für 2×2-Inverse und den Hinweise $\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi) = 1$:

$$C^{-1} = \frac{1}{\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)} \cdot \begin{pmatrix} \sin(\varphi) & -\cos(\varphi) \\ \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\varphi) & -\cos(\varphi) \\ \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \end{pmatrix}.$$

(4) Wir nutzen das Berechnungsverfahren nach VI.4.5:

	$D =$			$Id_3 =$			Rechenanweisung
(I)	3	1	4	1	0	0	
(II)	0	1	-2	0	1	0	
(III)	1	2	0	0	0	1	$(III)' = 3 \cdot (III) - (I)$
$(I)'$	3	1	4	1	0	0	
$(II)'$	0	1	-2	0	1	0	
$(III)'$	0	5	-4	-1	0	3	$(III)'' = -(III)' + 5 \cdot (II)'$
$(I)''$	3	1	4	1	0	0	
$(II)''$	0	1	-2	0	1	0	
$(III)''$	0	0	-6	1	5	-3	$\vert : (-6)$
$(I)'''$	3	1	4	1	0	0	$(I)^{IV} = (I)''' - 4 \cdot (III)'''$
$(II)'''$	0	1	-2	0	1	0	$(II)^{IV} = (II)''' + 2 \cdot (III)'''$
$(III)'''$	0	0	1	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{5}{6}$	$\frac{1}{2}$	
$(I)^{IV}$	3	1	4	1	0	0	$(I)^{V} = (I)^{IV} - (II)^{IV}$
$(II)^{IV}$	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	
$(III)^{IV}$	0	0	1	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{5}{6}$	$\frac{1}{2}$	
$(I)^{V}$	3	1	0	$\frac{5}{3}$	$\frac{10}{3}$	-2	$(I)^{VI} = (I)^{V} - (II)^{V}$
$(II)^{V}$	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	
$(III)^{V}$	0	0	1	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{5}{6}$	$\frac{1}{2}$	
$(I)^{VI}$	3	0	0	2	4	-3	$\vert : 3$
$(II)^{VI}$	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	
$(III)^{VI}$	0	0	1	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{5}{6}$	$\frac{1}{2}$	
$(I)^{VI}$	1	0	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	-1	
$(II)^{VI}$	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	
$(III)^{VI}$	0	0	1	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{5}{6}$	$\frac{1}{2}$	
	$= Id_3$			$= D^{-1}$			Rechenanweisung

Aufgabe 38 (Orthogonale Matrizen)
Lösung:

(i) Geg: A ist $n \times n$-Matrix mit $A \cdot A^\top = Id_n$, d.h. A ist orthogonal.
Ges: $\det(A)$

$$\begin{aligned}
\det(A \cdot A^\top) &= \det(A) \cdot \det(A^\top) = \det(A) \cdot \det(A) = (\det(A))^2 \\
\det(A \cdot A^\top) &= \det(Id_n) = 1 \\
(\det(A))^2 &= 1 \quad \Leftrightarrow \quad \det(A) = \pm 1
\end{aligned}$$

Anmerkung: Ist $\det(A) = 1$ handelt es sich um eine Drehmatrix, bei $\det(A) = -1$ um eine Spiegelmatrix.

(ii) A,B sind $n \times n$-Matrix mit $A \cdot A^\top = B \cdot B^\top = Id_n$, d.h. A, B sind orthogonal.
zu zeigen: $A \cdot B$ ist orthogonal, d.h. $(A \cdot B) \cdot (A \cdot B)^\top = ID_n$.

$$(A \cdot B) \cdot (A \cdot B)^\top = A \cdot \underbrace{B \cdot B^\top}_{=Id_n} \cdot A^\top = A \cdot Id_n \cdot A^\top = A \cdot A^\top = Id_n \quad \text{QED}$$

(iii) Matrix (1) ist orthogonal, denn wir erhalten die Einheitsmatrix Id_2.

$$\begin{array}{c|c}
A \cdot A^\top & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
\hline
\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Matrix (2) ist orthogonal, denn wir erhalten die Einheitsmatrix Id_2.

$$\begin{array}{c|c}
B \cdot B^\top & \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \\
\hline
\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Matrix (3) ist orthogonal, denn wir erhalten die Einheitsmatrix Id_3.

$$\begin{array}{c|c}
C \cdot C^\top & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
\hline
\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Die zu A gehörige Abbildung ist

$$f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

Wendet man die Abbildung auf den Vektor $(1, 0)$ an, so erhält man

$$f_A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

d.h. es handelt sich um eine Spiegelung an der ersten Winkelhalbierenden (vgl. Anmerkung bei (i): $\det(A) = -1$!).

Die zu B gehörige Abbildung ist

$$f_B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \cos(\varphi) + x_2 \sin(\varphi) \\ -x_1 \sin(\varphi) + x_2 \cos(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Wendet man die Abbildung auf den Vektor $(1, 0)$ an, so erhält man

$$f_B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ -\sin(\varphi) \end{pmatrix},$$

d.h. es handelt sich um eine Drehung um den Winkel φ im Uhrzeigersinn (vgl. Anmerkung bei (i): $\det(A) = 1$!).

Aufgabe 39 (Determinanten)
Lösung:

$$\det \begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix} - b \cdot \begin{vmatrix} b & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix} + b \cdot \begin{vmatrix} b & b & b \\ a & b & b \\ b & b & a \end{vmatrix} - b \cdot \begin{vmatrix} b & b & b \\ a & b & b \\ b & a & b \end{vmatrix}$$

$$= a \cdot (a^3 + b^3 + b^3 - ab^2 - ab^2 - ab^2) \quad - b \cdot (a^2b + b^3 + b^3 - ab^2 - b^3 - ab^2)$$

$$+ b \cdot (ab^2 + b^3 + ab^2 - b^3 - b^3 - a^2b) \quad - b \cdot (b^3 + b^3 + a^2b - b^3 - ab^2 - ab^2)$$

$$= a^4 - 6a^2b^2 + 8ab^3 - 3b^4$$

Aufgabe 40 (Lineare Gleichungssysteme)
Lösung:

(i) Richtig: $x = \mathbb{0}$ ist für homogene Gleichungssysteme immer eine Lösung.

(ii) Falsch, z.B. hat folgendes LGS keine Lösung:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(iii) Nein. Es gibt entweder keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen (vgl. Satz VII.3.4)

(iv) Ja, z.B. hat folgendes LGS unendlich viele Lösungen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(v) Falsch, es gilt $\mathrm{Rg}(A) \leq \min(n, m)$.

(vi) Ja, definitionsgemäß geht es nur um die maximale Anzahl linear unabhängiger Spalten.

(vii) Falsch. Es gilt Spaltenrang = Zeilenrang. Daher entspricht der Rang auch der maximalen Anzahl linear unabhängiger Zeilen. Die Aussage ist also falsch.

(viii) (a) i.A. falsch, richtig nur im Fall $n = m$, (c) richtig, (b) i.A. falsch, richtig nur im Fall $n = m$, (d) i.A. falsch, richtig nur im Fall $n = m$.

(ix) Ein Gleichungssystem $Ax = b$ heißt lösbar, wenn (mindestens) eine Lösung existiert. Daher ist nur (c) richtig.
Ergänzung: Ein Gleichungssystem $Ax = b$ heißt eindeutig lösbar, wenn genau eine Lösung existiert. Hier wäre (b) die einzige korrekte Antwort. Antwort (d) wäre hier falsch, da $x \in R^n$ sein muss.

(x) Richtig, denn dann gilt $\mathrm{Rg}(A|b) = \mathrm{Rg}(A)$.

(xi) Ja, die eindeutige Lösung ist $x = A^{-1}b$.

(xii) Falsch, siehe (iii).

(xiii) (a) falsch, z.B. ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(b) falsch, z.B. ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(c) richtig
(d) richtig, nach Satz VII.4.1.

(xiv) Falsch, z.B. gilt $\det(A) = 0$ und $\mathrm{Rg}(A) = 1$, wenn

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $\det(A) = 0 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{Rg}(A) < n$.

(xv) Es gilt $b \in \mathrm{Bild} f_A \;\Leftrightarrow\; \exists x^* \in \mathbb{R}^n : f_A(x^*) = b$ und $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\; x \mapsto Ax$.
Nach Definiton von f_A gilt $f_A(x^*) = Ax^* = b \Rightarrow$ LGS lösbar mit Lösung x^*.

Falls $\ker f_A = \{\mathbb{0}\} \;\Leftrightarrow\; f_A$ injektiv. Ist also $Ax = b$ und $Ay = b$ folgt $f_A(x) = Ax = Ay = f_A(y)$. Da f_A injektiv ist, folgt $x = y$ und die Lösung ist eindeutig. Die Aussage ist also richtig.

Aufgabe 41 (Rang)
Lösung:

(a) Wir bezeichnen die Matrizen der Reihe nach mit A,B,C,D,E,F.

$A = -3 \ \Rightarrow \mathrm{Rg}(A) = 1$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \mathrm{Rg}(B) = 2$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \mathrm{Rg}(C) = 2$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 13 & -1 & 5 \\ 0 & 13 & -1 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 13 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \mathrm{Rg}(D) = 2$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \mathrm{Rg}(E) = 3$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \mathrm{Rg}(F) = 3$$

(b) Aus $A \cdot A^\top = \mathrm{Id}_3$ folgt, dass $A^\top = A^{-1}$, d.h. die inverse ist die transponierte Matrix. Daher muss $\det(A) \neq 0$ und damit $\mathrm{Rg}(A) = 3$ bzw. im Allgemeinen $\mathrm{Rg}(A) = n$ gelten.

(c) Wir nutzen den Hinweis, dass A orthogonal ist. Damit gilt $A^{-1} = A^\top$ also:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad x = A^{-1}b = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi - 2\sin\varphi \\ \sin\varphi + 2\cos\varphi \end{pmatrix}$$

Aufgabe 42 (Lineare Gleichungssysteme)
Lösung:

(a) Wir formen das LGS in Matrixschreibweise $Ax = b$ um:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 2 & 6 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Anschließend formen wir die erweiterte Koeffizientenmatrix um und vergleichen deren Rang mit dem von A.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & -2 \\ 5 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & -3 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -6 & 7 & -6 \\ 0 & 4 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Wir stellen fest, dass $\mathrm{Rg}(A) = 3 < 4 = \mathrm{Rg}(A|b)$. Damit hat das LGS keine Lösung. Dies sieht man auch, da nun in der letzten Zeile $0 \cdot x_3 = 1$ steht, was offensichtlich nicht lösbar ist.

(b) Die Abbildung zu A_1 ist

$$f_{A_1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto A_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_1 + 2x_2 \end{pmatrix},$$

f_{A_1} bildet von $\mathbb{R}^2$ in sich ab, also gilt der Zusammenhang:

$$f_{A_1} \text{ injektiv} \quad \Leftrightarrow \quad f_{A_1} \text{ surjektiv} \quad \Leftrightarrow \quad f_{A_1} \text{ bijektiv.}$$

Außerdem gilt

$$f_{A_1} \text{ bijektiv} \quad \Leftrightarrow \quad f_{A_1} \text{ ist Isomorphismus}$$

und nach VI.4.2(iv)

$$f_{A_1} \text{ ist Isomorphismus} \quad \Leftrightarrow \quad A_1 \text{ ist invertierbar.}$$

Da allerdings $\det(A_1) = 0$ ist, ist A_1 nicht invertierbar, f_{A_1} also kein Isomorphismus und damit weder injektiv noch surjektiv.

Nun prüfen wir Abbildung A_2 auf Surjektivität und Injektivität. Die zu A_2 gehörige Abbildung ist

$$f_{A_2} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto A_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ 2x_1 + x_3 \end{pmatrix}.$$

Man erkennt sofort, dass f_{A_2} nicht injektiv ist, denn $x^* = (0,1,0)$ wird auf Null abgebildet: $f_{A_2}(x^*) = (0,0)$. Folglich gilt

$$f_{A_2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = f_{A_2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und f_{A_2} ist nicht injektiv.

Surjektivität für f_{A_2} würde bedeuten, dass

$$\forall \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \; \exists \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ mit } f_{A_2}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A_2 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Das bedeutet, dass $A_2x = b$ für jede Seite $b = (b_1, b_2)$ eine Lösung haben muss. Nach Satz VII.2.4 bedeutet dies, dass

$$\mathrm{Rg}(A_2|b) = \mathrm{Rg}(A_2) \quad \forall b \in \mathbb{R}^2.$$

Wir formen die erweiterte Koeffizienten Matrix um

$$(A_2|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & b_1 \\ 2 & 0 & 1 & b_2 \end{array}\right) \quad \to \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 2b_1 - b_2 \end{array}\right)$$

und lesen den Rang ab: $\mathrm{Rg}(A_2|b) = \mathrm{Rg}(A_2) = 2$, also ist f_{A_2} surjektiv.

(c) Die Gleichung $A_1x = b$ hat eine Lösung genau dann, wenn $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(A|b)$. Wir bringen $(A_1|b)$ in Zeilenstufenform:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & b_1 \\ 2 & 2 & b_2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & b_1 \\ 0 & 0 & b_2 - 2b_1 \end{array}\right),$$

d.h. der Rang von A_1 ist $\mathrm{Rg}(A_1) = 1$. Für den Rang von $(A|b)$ schauen wir uns die zweite Zeile an. Hier gilt

$$0 \cdot x_2 = b_2 - 2b_1$$

und es gibt nur die Möglichkeiten von unendlich vielen Lösungen für x_2, wenn $2b_1 = b_2$ ist bzw. keiner Lösung, wenn $2b_1 \neq b_2$ ist. Im ersten Fall ergibt sich also $\mathrm{Rg}(A|b) = 1$, im zweiten Fall $\mathrm{Rg}(A|b) = 2$. Folglich gibt es für die Gleichung $A_1x = b$ eine Lösung, wenn $b = (b_1, 2b_1)$ mit $b_1 \in \mathbb{R}$. Nutzt man die kanonische Einheitsbasis, lautet die Darstellung von b, die die Lösbarkeit des LGS garantieren, wie folgt:

$$b = (b_1, b_2) = (b_1, 0) + (0, b_2) = (b_1, 0) + (0, 2b_1) = b_1e_1 + 2b_1e_2.$$

Die erweiterte Koeffizientenmatrix für A_2 lautet

$$(A_2|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 2b_1 - b_2 \end{array}\right)$$

und die Gleichung $A_2x = b$ hat immer eine Lösung, da $\mathrm{Rg}(A_2) = \mathrm{Rg}(A_2|b) = 2 \;\; \forall b \in \mathbb{R}^2$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -b_1 - b_2 \\ 0 & 0 & 1 & 2b_1 - b_2 \end{array}\right)$$

Die Darstellung der b, die die Lösbarkeit des LGS garentieren, bezüglich der kanonischen Einheitsbasis lautet:

$$b = (b_1, b_2) = (b_1, 0) + (0, b_2) = b_1 e1 + b_2 e_2.$$

Aufgabe 43 (Gauss'scher Algorithmus)
Lösung:

(a) (i) Wir bringen $(A|b)$ auf Zeilenstufenform:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 5 & 7 & 9 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 5 & 7 & 9 & 0 \\ 0 & 10 & 14 & 20 & -1 \\ 0 & 5 & 8 & 10 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 5 & 7 & 9 & 0 \\ 0 & 10 & 14 & 20 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 7 \end{array}\right).$$

Man sieht, dass $3 = \text{Rg}(A) = \text{Rg}(A|b) = 3$ gilt. Es existiert eine Lösung. Da $\text{Rg}(A) < n = 4$, gibt es unendlich viele Lösungen. Wir setzen $x_4 = r$ und erhalten mit $x_3 = 3.5$ (aus der letzten Zeile) aus der zweiten Zeile $10x_2 + 14 \cdot 3.5 + 20r = -1$. Daraus folgt $x_2 = -5 - 2r$. Alle Ergenisse in die erste Zeile eingesetzt gibt

$$x_1 = -5x_2 - 7x_3 - 9x_3 = 25 + 10r - 7 \cdot 3.5 - 9r = 0.5 + r$$

und damit ist die Lösung des LGS

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 + r \\ -5 - 2r \\ 3.5 + 0r \\ 0 + r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -5 \\ 3.5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} +1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}.$$

(ii) Wir bringen $(B|b)$ auf Zeilenstufenform:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Man sieht, dass $\text{Rg}(B) = \text{Rg}(B|b) = 2 < n$ gilt und damit unendlich viele Lösungen existieren. Aus der zweiten Zeile folgt $x_2 = x_3$. Setzt man dies in die erste Zeile ein, ergibt sich der Zusammenhang $-2x_1 + x_2 + x_2 = 0$, also $x_1 = x_2$. Wir wählen x_2 als Parameter r und erhalten als Lösung alle Vektoren

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}.$$

(iii) Wir bringen $(C|b)$ auf Zeilenstufenform:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 7 & 4 & 18 \\ 3 & 13 & 4 & 30 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 4 & 15 \\ 0 & 7 & 4 & 21 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 4 & 15 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \end{array}\right).$$

Aus der letzen Zeile $2x_2 = 6$ erhält man $x_2 = 3$. Damit geht man in die zweite Zeile

$$5x_2 + 4x_3 = 18 \;\Leftrightarrow\; 15 + 4x_3 = 15 \;\Leftrightarrow\; x_3 = 0.$$

Setzt man die Ergebnisse für x_2 und x_3 in die erste Zeile ein und löst auf, so erhält man x_1.

$$x_1 + 2x_2 = 3 \quad\Leftrightarrow\quad x_1 = 3 - 2 \cdot 3 = -3.$$

Damit ist die eindeutige Lösung $x = (-3, 3, 0)$.
Anmerkung:
Alternativ kann man die erweiterte Koeffizientenmatrix auch so weit umformen, dass auf der linken Seite die Einheitsmatrix steht. Dann kann man den Lösungsvektor auf der rechten Seite ablesen.

(b) Wir schreiben die 4×3-LGS mit vier Gleichungen und drei Unbekannten in Koeffizientenmatrix-Form hat.

(i) Folgendes LGS hat keine Lösung:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

(ii) Folgendes LGS hat unendliche viele Lösungen mit einem Freiheitsgrad:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right),$$

nämlich $x = r \cdot (1, 1, 1), \ \ r \in \mathbb{R}$.

(iii) Folgendes LGS hat genau eine Lösung:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right),$$

nämlich $x = (1, 1, 1)$.

Aufgabe 44 (Eigenwerte)
Lösung:

(i) Die Aussage bedeutet, dass der Nullvektor höchstens dann Eigenvektor sein kann, wenn ein Eigenwert $\lambda = 0$ ist. Nach Definition ist der Nullvektor jedoch nie ein Eigenvektor, denn sonst gilt immer

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Die Aussage ist also falsch.

(ii) Die Aussage ist im Allgemeinen falsch, denn es zusätzlich $v \neq 0$ gelten.

(iii) (a) Im Allgemeinen falsch, denn dann müsste $A(-v) = \lambda(-v)$ gelten, also $\lambda(-v) = \lambda v$. Dies gilt nur, wenn $\lambda = 0$ ist. Dann ist $(-v)$ EV zum EW $\lambda = 0$. Für $\lambda \neq 0$ müsste $-v = v$ gelten, d.h. $v = 0$, was definitionsgemäß ausgeschlossen ist.

(b) Richtig, denn $A(-v) = \lambda v \;\Leftrightarrow\; Av = (-\lambda)v$ für $v \neq 0$, d.h. $(-\lambda)$ ist EW mit EV $v \neq 0$.

(c) Falls $\lambda = 0 \;\Rightarrow A(-v) = 0 \cdot v = 0 \cdot (-v) = (-0) \cdot (-v) \Rightarrow -\lambda = 0$ ist EW zum EV $(-v)$. Falls $\lambda \neq 0 \Rightarrow A(-v) = \lambda v = (-\lambda)(-v) \Rightarrow (-v)$ ist EV zu EW $(-\lambda)$

(d) Im Allgemeinen falsch, denn für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda = -1$$

gilt $A(-v) = \lambda v$, aber $\lambda \neq 0$.

(iv) (a) Falsch, z.B. hat die Diagonalmatrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ die EW $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 2$.

(b) Richtig, denn EW sind Nullstellen eines Polynoms vom Grad $n \geq 1$ und nach dem Fundamentalsatz der Algebra gibt es immer Nullstellen in $\mathbb{C}$.

(c) Falsch, z.B. hat $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ den EW $\lambda = 0$, denn

$$p_{char}(\lambda) = \det(A - \lambda Id_n) = \det \begin{pmatrix} -x & 0 \\ 0 & 1-x \end{pmatrix} = x(x-1)$$

hat die Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$ und damit hat A den EW $\lambda = 0$

(d) Richtig, denn EW sind Nullstellen des charakteristischen Polynoms. Bei einer $n \times n$-Matrix ist dieses vom Grad n. Laut Fundamentalsatz gibt es n Nullstellen und damit höchstens n EW.

(e) Falsch, dann hätte p_{char} keine Nullstellen.

(f) Falsch, z.B. hat $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ den EW $\lambda = 0$.

(v) Falsch, z.B. hat $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ die EW $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 0$. Diagonalmatrizen haben als EW die Diagonalelemente, denn

$$\begin{aligned}
p_{char}(x) = &\left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} - x\mathrm{Id}_n\right] = \det\begin{pmatrix} \lambda_1 - x & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n - x \end{pmatrix} \\
&= (\lambda_1 - x) \cdot (\lambda_2 - x) \cdot \ldots \cdot (\lambda_n - x) \\
&\Rightarrow p_{char}(\lambda_i) = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n \\
&\Rightarrow \lambda_1, \ldots, \lambda_n \text{ sind EW von A}
\end{aligned}$$

(vi) Falsch, z.B. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ hat nur EW $\lambda = 1$.

(vii) (a) Falsch. Nach Definition gilt $p_{char}(\lambda) = \det(A - \lambda \mathrm{Id}_2)$

(b) Im Allgemeinen falsch. Nur richtig, wenn $\lambda_1 = -\lambda_2$.

(c) Falsch, da für das charakteristische Polynom

$$p_{char} = \lambda^2 - \lambda\,\mathrm{sp}(A) + \det(A)$$

gilt und die Aussage hier

$$p_{char} = -\det(\lambda \mathrm{Id}_n - A) = -\lambda^2 + \lambda\,\mathrm{sp}(A) - \det(A)$$

ergibt.

(d) Richtig, denn p_{char} hat als Koeffizienten von λ^2 gerade die 1 und die EW sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms. Oder alternativ:

$$\begin{aligned}
(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) &= \lambda^2 + \lambda(\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_1\lambda_2 \\
p_{char} &= \lambda^2 - \lambda\,\mathrm{sp}(A) + \det(A)
\end{aligned}$$

Laut Satz VIII.2.5 gilt $\lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{sp}(A)$ und $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det(A)$ und damit ist die Behauptung bewiesen.

(viii) Falsch. Die Spur einer Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & & * \\ \vdots & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ * & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ist die Summe der Diagonaleinträge der Matrix selbst: $\mathrm{sp}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

(ix) Richtig, falls f_A surjektiv ist ($\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$), dann auch bijektiv und damit invertierbar, d.h. $\det(A) \neq 0$. Wäre $\lambda = 0$ ein EW von A, dann gelte $\det(A - 0\mathrm{Id}_n) = \det(A) = 0$ (Widerspruch!).

(x) Falsch, der Eigenraum zum Eigenvektor ist der Aufspann des oder der linear unabhängigen Eigenvektor(en) zum Eigenwert λ.

(xi) Es sei $Av = \lambda v$ mit $v \neq 0$ und $\det(A) \neq 0$. Man multipliziert zunächst mit A^{-1} von links und dann mit $\frac{1}{\lambda}$:

$$\begin{aligned} Av &= \lambda v \\ A^{-1}Av &= A^{-1}\lambda v \\ \frac{1}{\lambda} \cdot v &= A^{-1}v \end{aligned}$$

Damit ist $\frac{1}{\lambda}$ EW von A^{-1}. Man beachte hier, dass $\det(A) \neq 0 \;\Rightarrow\; \lambda \neq 0$ gilt und somit die Multiplikation mit dem Kehrwert von λ zulässig ist.

(xii) Richtig, denn sei $Av = \lambda v$ mit $v \neq 0$, dann folgt

$$A^k v = A^{k-1} \underbrace{Av}_{=\lambda v} = \lambda A^{k-1} v = \lambda A^{k-2} \underbrace{Av}_{=\lambda v} = \lambda^2 A^{k-2} v = \ldots = \lambda^k \underbrace{A^0}_{=\mathrm{Id}_n} v = \lambda^k v$$

und λ^k ist EW von A^k zu EV v.

(xiii) Wenn A^2 den Eigenwert λ hat gilt $A^2 v = \lambda v$ und mit Satz VIII.3.2

$$\det(A^2 - \lambda \mathrm{Id}_n) = 0.$$

Mit dem Distributivgesetz für Matrizen gilt

$$A^2 - \lambda \mathrm{Id}_n = (A - \sqrt{\lambda}\mathrm{Id}_n) \cdot (A + \sqrt{\lambda}\mathrm{Id}_n).$$

Mit dem Determinanten-Multiplikationssatz folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \det(A^2 - \lambda \mathrm{Id}_n) \\ &= \det[(A - \sqrt{\lambda}\mathrm{Id}_n) \cdot (A + \sqrt{\lambda}\mathrm{Id}_n)] \\ &= \det(A - \sqrt{\lambda}\mathrm{Id}_n) \cdot \det(A + \sqrt{\lambda}\mathrm{Id}_n). \end{aligned}$$

Mit dem Satz vom Nullprodukt in $\mathbb{R}$ gilt

$$\det(A - \sqrt{\lambda}\mathrm{Id}_n) = 0 \quad \text{oder} \quad \det(A + \sqrt{\lambda}\mathrm{Id}_n) = 0.$$

Nun kann man wieder mit Satz VIII.3.2 sagen, dass $\sqrt{\lambda}$ oder $-\sqrt{\lambda}$ (oder beide) Eigenwert von A sein muss. Mindestens eine der drei Möglichkeiten muss also zutreffen. Setzt man für A die Einheitsmatrix Id_n, gilt

$$A^2 v = \lambda v \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Id}_n^2 v = \lambda v$$

und $\lambda = 1$ ist (der einzige) Eigenwert von Id_n^2. In diesem Fall ist $\sqrt{\lambda} = \sqrt{1} =$ ein Eigenwert von Id_n. Aber $-\sqrt{\lambda} = -\sqrt{1} = -1$ ist kein Eigenwert von Id_n. Damit ist ein Gegenbeispiel gefunden, das zeigt, dass $-\sqrt{\lambda}$ im Allgemeinen nicht Eigenwert von A sein muss, wenn λ ein Eigenwert von A^2 ist. Also bleibt als einzige Möglichkeit, dass $\sqrt{\lambda}$ ein Eigenwert von A sein muss.

Die Aussage ist also wahr!

(xiv) Falsch, z.B. hat

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

die EW $\lambda_1 = i$ und $\lambda_2 = -i$. Eine 3×3-Matrix mit nur komplexen EW ist z.B.

$$A = \begin{pmatrix} 1+i & i & 1-i \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix}.$$

(xv) Die Matrix muss lauten:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \mathit{bzw.} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt für $\lambda_1 = -3$:

$$[A - (-3)\mathrm{Id}_2]\, x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aus Zeile (II) folgt $x_2 = 0$, aus Zeile (I), dass x_1 beliebig ist. Der Eigenraum zu $\lambda_1 = -3$ ist daher

$$\ker(A - (-3)\mathrm{Id}_2) = \left\{ r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} | r \in \mathbb{C} \right\} = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Wendet man die Matrix A auf den Eigenvektor $v_1 = (1, 0)$ an, dann erhält man $Av_1 = (-r, 0)$, d.h. der Vektor v_1 wird um den Faktor 3 gestreckt und um 180° gedreht.

Für den Eigenraum zu EW $\lambda_2 = 3$ gilt:

$$[A - 3\mathrm{Id}_2]\, x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aus Zeile (I) folgt $x_1 = 0$, aus Zeile (II), dass x_2 beliebig ist. Der Eigenraum zu $\lambda_2 = 3$ ist daher

$$\ker(A - 3\mathrm{Id}_2) = \left\{ r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} | r \in \mathbb{C} \right\} = \mathrm{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Wendet man die Matrix A auf den Eigenvektor $v_2 = (0,1)$ an, dann erhält man $Av_2 = (0,r)$, d.h. der Vektor v_2 wird um den Faktor 3 gestreckt.

Damit bewirkt die zur Matrix A gehörende lineare Abbildung eine Spiegelung an der x_2-Achse und eine Streckung um den Faktor 3 in beide Achsenrichtungen.

(xvi) Wir nehmen an, dass die zu A gehörigen Abbildungen $f_{A-\lambda\mathrm{Id}}$ injektiv $\forall\lambda \in \mathbb{C}$ sind. Wegen der Zuordnung von $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ müssten die Abbildungen also auch surjektiv und damit bijektiv, also Isomorphismen, sein.
Da Isomorphismen umkehrbar sind, müsste gelten, dass $(A - \lambda\mathrm{Id})$ invertierbar $\forall\lambda \in \mathbb{C}$ ist. Hieraus folgt allerdings, dass $\det(A - \lambda\mathrm{Id}) \neq 0 \ \forall\lambda \in \mathbb{C}$ gelten muss und damit das charakteristische Polynom keine Nullstellen hätte, was ein Widerspruch zum Fundamentalsatz der Algebra ist.
Die zu A gehörenden Abbildungen $f_{A-\lambda\mathrm{Id}}$ können also nicht injektiv sein.
Anmerkung: daraus kann man schließen, dass der Kern der Abbildung $f_{A-\lambda\mathrm{Id}}$ - dies entspricht dem Eigenraum - nicht nur den Nullvektor enthalten kann. Damit muss ist also auch die Existenz eines Eigenvektors nachgewiesen, denn das LGS $(A - \lambda\mathrm{Id})v = 0$ hat nicht nur die triviale Lösung.

(xvii) Falsch, z.B. ist

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

nicht linear unabhängig, obwohl beide EV von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sind. Anmerkung: Nicht zu verwechseln ist dies mit der Tatsache, dass ein Eigenraum auch von mehr als einem Vektor aufgespannt werden kann. Die Vektoren, die diesen Eigenraum aufspannen, sind selbstverständlich linear unabhängig!

Aufgabe 45 (Berechnung von Eigenwerten)
Lösung:

(a) (i) $A = (-3)$, $p_{char}(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot \mathrm{Id}_1) = (-3) - \lambda = 0 \;\Rightarrow\;$ EW $\lambda = -3$

Für den EV zum EW $\lambda = -3$ löst man

$$Ax = \lambda x \;\Leftrightarrow\; (-3)x = -3x \;\Leftrightarrow\; [-3 - (-3)]\, x = 0.$$

Es gilt also für den Eigenraum:

$$\ker(A - (-3)) = \{r | r \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\} = \operatorname{span}\{1\}.$$

(ii) Für die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

berechnet man die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$p_{char}(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2-\lambda & -2 \end{pmatrix} = (1-\lambda)(-2-\lambda) - 4 = \lambda^2 + x - 6 = 0,$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2} \;\Leftrightarrow\; \lambda_1 = 2,\;\; \lambda_2 = -3.$$

Für den Eigenraum zu $\lambda_1 = 2$ löst man

$$(B - 2 \cdot \mathrm{Id}_2) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{rr|r} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rr|r} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

und mit $r = x_2$ als Freiheitsgrad gilt

$$-x_1 + 2r = 0 \;\Leftrightarrow\; x_1 = 2r.$$

Der Eigenraum von $\lambda_1 = 2$ ist also

$$\ker(B - 2 \cdot \mathrm{Id}_2) = \left\{ \begin{pmatrix} 2r \\ r \end{pmatrix} | r \in \mathbb{C} \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Für den Eigenraum zu $\lambda_2 = -3$ löst man

$$(B - (-3) \cdot \mathrm{Id}_2) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{rr|r} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rr|r} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

und mit $x_1 = r$ als Freiheitsgrad gilt

$$4r + 2x_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = -2r.$$

Der Eigenraum von $\lambda_2 = -3$ ist also

$$\ker(B - (-3) \cdot \mathrm{Id}_2) = \left\{ \begin{pmatrix} 1r \\ -2r \end{pmatrix} | r \in \mathbb{C} \right\} = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$$

(iii) Für die Matrix

$$C = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

berechnet man die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\begin{aligned} p_{char}(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & i \\ -i & 1-\lambda \end{pmatrix} &= (1-\lambda)(1-\lambda) - (-i) \cdot i \\ &= \lambda^2 - 2\lambda + 1 - 1 = \lambda(\lambda - 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \lambda_1 = 0, \ \ \lambda_2 = 2. \end{aligned}$$

Für den Eigenraum zu $\lambda_1 = 0$ löst man

$$(C - 0 \cdot \mathrm{Id}_2) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 0 \\ -i & 1 & 0 \end{array} \right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

und mit $r = x_2$ als Freiheitsgrad gilt

$$x_1 + ir = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -ir.$$

Der Eigenraum zu $\lambda_1 = 0$ ist also

$$\ker(C - 0 \cdot \mathrm{Id}_2) = \left\{ \begin{pmatrix} -ir \\ r \end{pmatrix} | r \in \mathbb{C} \right\} = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Für den Eigenraum zu $\lambda_2 = 2$ löst man

$$(C - 2 \cdot \mathrm{Id}_2) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & i & 0 \\ -i & -1 & 0 \end{array} \right) \to \left(\begin{array}{cc|c} -1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

und mit $r = x_2$ als Freiheitsgrad gilt

$$-x_1 + ir = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = ir.$$

Der Eigenraum zu $\lambda_2 = 2$ ist also

$$\ker(C - 2 \cdot \mathrm{Id}_2) = \left\{ \begin{pmatrix} ir \\ r \end{pmatrix} | r \in \mathbb{C} \right\} = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(iv) Für die Matrix

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -3 \\ 2 & 7 & -4 \\ 3 & 9 & -5 \end{pmatrix}$$

berechnet man die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\begin{aligned} p_{char}(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 4 & -3 \\ 2 & 7-\lambda & -4 \\ 3 & 9 & -5-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (3-\lambda)(7-\lambda)(-5-\lambda) + 4 \cdot (-4) \cdot 3 + (-3) \cdot 2 \cdot 9 \\ &\quad - 3 \cdot (7-\lambda) \cdot 3 - (3-\lambda) \cdot (-4) \cdot 9 - 4 \cdot 2 \cdot (-5-\lambda) \\ &= -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 = 0 \end{aligned}$$

Man kann eine Nullstelle raten: $\lambda_1 = 1$. Durch Polynomdivision

$$\begin{array}{l} (-\lambda^3 + 5\lambda^2 \ - 8\lambda + 4) : (\lambda - 1) = -\lambda^2 + 4\lambda - 4 \\ \underline{-(-\lambda^3 + 1\lambda^2)} \\ \qquad\quad 4\lambda^2 \ - 8\lambda \\ \qquad \underline{-(4\lambda^2 - \ 4\lambda)} \\ \qquad\qquad\quad - 4\lambda + 4 \\ \qquad\qquad \underline{-(4\lambda + 4)} \\ \qquad\qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

erhält man eine quadratischen Gleichung

$$-\lambda^2 + 4\lambda - 4 = 0$$

und damit $\lambda_{2,3} = 2$. Die Eigenwerte von A sind also $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_{2,3} = 2$.

Für den Eigenraum zu $\lambda_1 = 1$ löst man

$$(D - 1 \cdot \mathrm{Id}_3) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 6 & -4 & 0 \\ 3 & 9 & -6 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

und mit $x_2 = r$ als Freiheitsgrad gilt

$$2r - x_3 = 0 \ \Leftrightarrow \ x_3 = 2r$$

und damit

$$2x_1 + 4r - 6r = 0 \ \Leftrightarrow \ x_1 = r$$

Der Eigenraum zu $\lambda_1 = 1$ ist also

$$\ker(D - 1 \cdot \mathrm{Id}_3) = \left\{ \begin{pmatrix} 1r \\ 1r \\ 2r \end{pmatrix} | r \in \mathbb{C} \right\} = \mathrm{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Für den Eigenraum zu $\lambda_{2,3} = 2$ löst man

$$(D - 2 \cdot \mathrm{Id}_3) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 5 & -4 & 0 \\ 3 & 9 & -7 & 0 \end{array} \right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

und mit $x_2 = r$ als Freiheitsgrad gilt

$$3r - 2x_3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_3 = 1.5r$$

und damit

$$x_1 = 3 \cdot 1.5r - 4r = 0.5r$$

Der Eigenraum von $\lambda_{2,3} = 2$ ist also

$$\ker(D - 2 \cdot \mathrm{Id}_3) = \left\{ \begin{pmatrix} 1r \\ 2r \\ 3r \end{pmatrix} | r \in \mathbb{C} \right\} = \mathrm{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

(v) Für die Matrix

$$E = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

berechnet man die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\begin{aligned} p_{char}(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ b & a - \lambda \end{pmatrix} = (a - \lambda)(a - \lambda) - b^2 \\ &= \lambda^2 - 2a\lambda + a^2 - b^2 = 0 \\ \Rightarrow \lambda_{1,2} &= \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 - 4 \cdot 1 \cdot (a^2 - b^2)}}{2} = \frac{2a \pm 2b}{2} = a \pm b \\ \Rightarrow \quad & \lambda_1 = a + b, \;\; \lambda_2 = a - b. \end{aligned}$$

Für den Eigenraum zu $\lambda_1 = a + b$ löst man

$$(E - (a + b) \cdot \mathrm{Id}_2) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -b & b & 0 \\ b & -b & 0 \end{array} \right) \to \left(\begin{array}{cc|c} -b & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

und mit $r = x_2$ als Freiheitsgrad gilt

$$bx_1 - br = 0 \;\Leftrightarrow\; x_1 = r.$$

Der Eigenraum zu $\lambda_1 = a + b$ ist also

$$\ker(E - (a+b) \cdot \mathrm{Id}_2) = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ r \end{pmatrix} \;|r \in \mathbb{C} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Für den Eigenraum zu $\lambda_2 = a - b$ löst man

$$(E - (a-b) \cdot \mathrm{Id}_2) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} b & b & 0 \\ b & b & 0 \end{array} \right) \to \left(\begin{array}{cc|c} b & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

und mit $r = x_2$ als Freiheitsgrad gilt

$$bx_1 + br = 0 \;\Leftrightarrow\; x_1 = -r.$$

Der Eigenraum zu $\lambda_2 = a - b$ ist also

$$\ker(E - (a-b) \cdot \mathrm{Id}_2) = \left\{ \begin{pmatrix} -r \\ r \end{pmatrix} |r \in \mathbb{C} \right\} = \mathrm{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(vi) Für die Matrix

$$F = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

berechnet man die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\begin{aligned} p_{char}(\lambda) = \det &\begin{pmatrix} -2-\lambda & 2 & -3 \\ 2 & 1-\lambda & -6 \\ -1 & -2 & 0-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (-2-\lambda)(1-\lambda)(0-\lambda) + 2 \cdot (-6) \cdot (-1) + (-3) \cdot 2 \cdot (-2) \\ &\quad - (-1) \cdot (1-\lambda) \cdot (-3) - (-2) \cdot (-6) \cdot (-2-\lambda) - (-\lambda) \cdot 2 \cdot 2 \\ &= -\lambda^3 - \lambda^2 + 21\lambda + 45 = 0 \end{aligned}$$

Man kann eine Nullstelle raten: $\lambda_1 = 5$. Durch Polynomdivision

$$\begin{array}{l} (-\lambda^3 - 1\lambda^2 \;+ 21\lambda + 45) : (\lambda - 5) = -\lambda^2 - 6\lambda - 9 \\ \underline{-(-\lambda^3 + 5\lambda^2)} \\ \qquad -6\lambda^2 \;+ 21\lambda \\ \qquad \underline{-(-6\lambda^2 + \;30\lambda)} \\ \qquad\qquad\quad -9\lambda + 45 \\ \qquad\qquad\quad \underline{-(-9\lambda + 45)} \end{array}$$

$$0$$

erhält man eine quadratischen Gleichung

$$-\lambda^2 - 6\lambda - 9 = 0$$

und damit $\lambda_{2,3} = -3$. Die Eigenwerte von A sind also $\lambda_1 = 5$ und $\lambda_{2,3} = -3$. Für den Eigenraum zu $\lambda_1 = 5$ löst man

$$(F - 5 \cdot \mathrm{Id}_3) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -7 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -4 & -6 & 0 \\ -1 & -2 & -5 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} -7 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

und mit $x_3 = r$ als Freiheitsgrad gilt

$$x_2 + 2r = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = -2r$$

und damit

$$-7x_1 - 2 \cdot 2r - 3r = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -1r$$

Der Eigenraum zu $\lambda_1 = 5$ ist also

$$\ker(F - 5 \cdot \mathrm{Id}_3) = \left\{ \begin{pmatrix} -1r \\ -2r \\ 1r \end{pmatrix} | r \in \mathbb{C} \right\} = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Für den Eigenraum zu $\lambda_{2,3} = -3$ löst man

$$(F - (-3) \cdot \mathrm{Id}_3) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -6 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

und mit $x_2 = r$ und $x_3 = s$ als Freiheitsgrade gilt

$$x_1 = 3s - 2r$$

Der Eigenraum von $\lambda_{2,3} = 2$ ist also

$$\ker(F - (-3) \cdot \mathrm{Id}_3) = \left\{ \begin{pmatrix} -2r \\ 1r \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3s \\ 0 \\ 1s \end{pmatrix} | r, s \in \mathbb{C} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(vii) Für die Matrix

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

berechnet man die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$p_{char}(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 0-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda \cdot (1-\lambda) - 1 = \lambda^2 - \lambda - 1 = 0,$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2} \Leftrightarrow \lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \ \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Für den Eigenraum zu $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ löst man

$$\left(G - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \mathrm{Id}_2\right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -\frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

und mit $x_2 = 1$ als Freiheitsgrad gilt

$$-\frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot x_1 + r = 0 \Leftrightarrow x_1 = -\frac{1-\sqrt{5}}{2} \cdot r.$$

Der Eigenraum von $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ist also

$$\ker\left(G - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \mathrm{Id}_2\right) = \left\{\begin{pmatrix} -\frac{1-\sqrt{5}}{2} \cdot r \\ r \end{pmatrix} | r \in \mathbb{C}\right\} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} -\frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Für den Eigenraum zu $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ löst man

$$\left(G - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \mathrm{Id}_2\right) \cdot + \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -\frac{1-\sqrt{5}}{2} & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} -\frac{1-\sqrt{5}}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

und mit $x_2 = r$ als Freiheitsgrad gilt

$$-\frac{1-\sqrt{5}}{2} \cdot x_1 + r = 0 \Leftrightarrow x_1 = -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot r.$$

Der Eigenraum von $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ist also

$$\ker\left(A - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \mathrm{Id}_2\right) = \left\{\begin{pmatrix} -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot r \\ r \end{pmatrix} | r \in \mathbb{C}\right\} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

(b) (i) $\det(A) = \det(-3) = -3$
$\mathrm{sp}(A) = -3$

(ii) $\det(B) = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = -6$
$\mathrm{sp}(B) = -1$

(iii) $\det(C) = \det\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} = 0$
$\mathrm{sp}(C) = 2$

(iv)
$$\begin{aligned}\det(D) &= \det\begin{pmatrix} 3 & 4 & -3 \\ 2 & 7 & -4 \\ 3 & 9 & -5 \end{pmatrix} \\ &= 3\cdot7\cdot(-5)+4\cdot(-4)\cdot3+(-3)\cdot2\cdot9-(-3)\cdot7\cdot3-4\cdot2\cdot(-5)-3\cdot(-4)\cdot9 \\ &= -105-48-54+63+40+108 = 4\end{aligned}$$
$\mathrm{sp}(D) = 3+7-5 = 5$

(v) $\det(E) = \det\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = a^2 - b^2$
$\mathrm{sp}(E) = 2a$

(vi)
$$\begin{aligned}\det(F) &= \det\begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= (-2)\cdot1\cdot0+2\cdot(-6)\cdot(-1)+(-3)\cdot2\cdot(-2) \\ &\quad -(-1)\cdot1\cdot(-3)-(-2)\cdot(-6)\cdot(-2)-0\cdot2\cdot2 \\ &= 0+12+12-3+24+0 = 45\end{aligned}$$
$\mathrm{sp}(F) = -2+1+0 = -1$

(vii) $\det(G) = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -1$
$\mathrm{sp}(G) = 1$

(c) Wir nutzen das Determinantenkriterium und zeigen, dass $\det(A - \lambda_1 \mathrm{Id}_3) = 0$ $\lambda_1 = 2a + b$

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda_1\mathrm{Id}_3) &= \det\begin{pmatrix} a-(2a+b) & b & a \\ b & a-(2a+b) & a \\ a & a & b-(2a+b) \end{pmatrix} \\ &= \det\begin{pmatrix} -a-b & b & a \\ b & -a-b & a \\ a & a & -2a \end{pmatrix} \\ &= (-a-b)(-a-b)(-2a)+a^2b+a^2b-a^2(-a-b)-a^2(-a-b)-b^2(-2a) \\ &= (a+b)^2(-2a)+2a^2b+2a^2(a+b)+2ab^2 \\ &= (a+b)^2(-2a)+2a(ab+a(a+b)+b^2) \\ &= (a+b)^2(-2a)+2a(ab+a^2+ab+b^2) \\ &= (-2a)(a+b)^2+2a(a^2+2ab+b^2) \\ &= (-2a)(a+b)^2+2a(a+b)^2 = 0 \qquad \text{QED}\end{aligned}$$

Zur Berechnung der anderen Eigenwerte nutzen wir

$$(I) \ \ \mathrm{sp}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \quad \text{und} \quad (II) \ \ \det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3$$

$$\begin{aligned}(I) \ \ \mathrm{sp}(A) &= a + a + b = 2a + b = 2a + b + \lambda_2 + \lambda_3 \\ &\Leftrightarrow \ \ 0 = \lambda_2 + \lambda_3 \ \ \Leftrightarrow \ \ \lambda_2 = -\lambda_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(II) \ \ \det(A) &= a^2b + a^2b + a^2b - a^3 - a^3 - b^3 = -2a^3 + 3a^2b - b^3 = (2a+b) \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \\ &\Leftrightarrow (-2a^3 + 3a^2b - b^3) : (2a + b) = \lambda_2 \cdot \lambda_3\end{aligned}$$

Durch Polynomdivision

$$\begin{array}{l}
\ \ (-2a^3 + 3a^2b \ - b^3) : (2a+b) = -a^2 + 2ab - b^2 = -(a-b)^2 \\
\underline{-(-2a^3 - 1a^2b)} \\
\qquad\qquad 4a^2b \ - b^3 \\
\qquad\quad \underline{-(4a^2b \ +2ab^2)} \\
\qquad\qquad\qquad - b^3 - 2ab^2 \\
\qquad\qquad\quad \underline{-(-b^3 - 2ab^2)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

erhält man

$$\begin{aligned}-(a-b)^2 = \lambda_2 \cdot \lambda_3 &= -\lambda_3^2 \\ \Leftrightarrow \quad & (a-b) = \lambda_3 \\ \Rightarrow \quad & \lambda_2 = -(a-b) = b - a.\end{aligned}$$

Damit haben wir alle Eigenwerte gefunden:

$$\lambda_1 = 2a + b, \quad \lambda_2 = b - a, \quad \lambda_3 = a - b.$$

Aufgabe 46 (Charakteristisches Polynom)
Lösung:

(a) (i) $\det(A - \lambda \mathrm{Id}_2) = \det \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ b & a-\lambda \end{pmatrix} = (a-\lambda)^2 - b^2 = \lambda^2 - 2a\lambda + a^2 - b^2$

(ii)

$$\begin{aligned} \det(B - \lambda \mathrm{Id}_3) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1+i-\lambda & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1-i-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)((1+i)-\lambda)((1-i)-\lambda) \\ &= (1-\lambda)((1+i)(1-i) - (1+i)\lambda - (1-i)\lambda + \lambda^2) \\ &= (1-\lambda)(2 - 2\lambda + \lambda^2) \\ &= -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4\lambda + 2 \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} \det(C - \lambda \mathrm{Id}_3) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1+i-\lambda & \sqrt{2} \\ 1 & 0 & 1-i-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)((1+i)-\lambda)((1-i)-\lambda) + \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot 1 - (1+i-\lambda) \\ &= -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4\lambda + 2 + 2 - 1 - i + \lambda \\ &= -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 3 - i \end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned} \det(D - \lambda \mathrm{Id}_3) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1+i-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)(1-\lambda)(1+i-\lambda) \\ &= (1 - 2\lambda + \lambda^2)(1+i-\lambda) \\ &= 1 - 2\lambda + \lambda^2 + i(1 - 2\lambda + \lambda^2) - (\lambda - 2\lambda^2 + \lambda^3) \\ &= -\lambda^3 + (3+i)\lambda^2 - (3+2i)\lambda + 1 + i \end{aligned}$$

(b) Hier muss man etwas Vorarbeit leisten. In der VL haben wir das charakteristische Polynom definiert als

$$\det(A - \lambda \mathrm{Id}_n).$$

Man sieht, dass der Leitkoeffizient stets $(-1)^n\lambda$ ist. Hier ist $n = 3$, aber der Leitkoeffizient ist positiv. Also formen wir um:

$$\det(A - \lambda \mathrm{Id}_n) = \det((-1)\cdot(\lambda \mathrm{Id}_n - A)) = (-1)^n \det(\lambda \mathrm{Id}_n - A).$$

Die Umformung hat also auf die Nullstellen keinen Einfluss. Man sieht sofort, dass $\lambda_1 = 1$ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist:

$$p_{char}(1) = 1^3 + 1^2 - 1 - 1 = 0.$$

Durch Polynomdivision

$$
\begin{array}{l}
(\lambda^3 + \lambda^2 \; - \lambda - 1) : (\lambda - 1) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2 \\
\underline{-(\lambda^3 - \lambda^2)} \\
\quad 2\lambda^2 \; - \lambda \\
\quad \underline{-(2\lambda^2 \; -2\lambda)} \\
\qquad \lambda - 1 \\
\qquad \underline{-(\lambda - 1)} \\
\qquad \quad 0
\end{array}
$$

erhält man $\lambda_{2,3} = -1$. Wir müssen also eine Matrix konstruieren, mit diesen Eigenwerten konstruieren. Die folgende Matrix erfüllt dies:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$ sind

$$\ker(1 \cdot \mathrm{Id}_3 - A) = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} |r \in \mathbb{C} \right\} = \mathrm{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Für die Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_{2,3} = -1$ löst man

$$((-1) \cdot \mathrm{Id}_3 - A) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Wir setzen $x_2 = r$ und $x_3 = s$ als Freiheitsgrade ein und erhalten mit $x_1 = 0$

$$\ker((-1) \cdot \mathrm{Id}_3 - A) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ s \end{pmatrix} |r, s \in \mathbb{C} \right\} = \mathrm{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Hier ergibt sich also eine Basis aus Eigenvektoren:

$$B = \mathrm{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Jeder Eigenraum wird also von genau einem Eigenvektor aufgespannt.

Hätten wir

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

gewählt, hätten wir zwar die gleichen Eigenwerte, aber wir erhielten nur die Eigenvektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Anmerkung: Hier nutzt man die Eigenschaft ähnlicher Matrizen, für die gilt, dass die Eigenwerte gleich sind (vgl. Kapitel QR-Algorithmus).

Aufgabe 47 (Eigenwerte spezieller Matrizen)
Lösung:

(a) Wir betrachten eine symmetrische 2×2-Matrix, d.h. es gilt

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = A^\top$$

und damit $a_{12} = a_{21}$. Wir schreiben

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

und berechnen das charakteristische Polynom mit Hilfe der Spur $\mathrm{sp}(A) = a + c$ und der Determinante $\det(A) = ac - b^2$ von A:

$$p_{char}(\lambda) = \lambda^2 - (a + c)\lambda + (ac - b^2).$$

Die Nullstellen des Polynoms sind die Eigenwerte der Matrix:

$$\lambda_{1,2} = \frac{(a + c) \pm \sqrt{(a + c)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (ac - b^2)}}{2 \cdot 1}.$$

Die Eigenwerte sind reell, wenn die Diskriminante D nicht negativ ist. Dies ist der Fall, denn die Summe zweier Quadrate ist nie negativ:

$$\begin{aligned} D &= (a + c)^2 - 4(ac - b^2) \\ &= a^2 + 2ac + c^2 - 4ac + 4b^2 \\ &= a^2 - 2ac + c^2 + 4b^2 \\ &= (a - c)^2 + 4b^2 \geq 0. \\ &\Rightarrow \lambda_{1,2} \in \mathbb{R} \qquad\qquad \text{QED} \end{aligned}$$

Anmerkung (nicht klausurrelevant):
Betrachtet man $n \times n$-Matrizen, muss man die Eigenschaft der komplexen Selbstadjungiertheit heranziehen. Ist demnach $\lambda \in \mathbb{C}$ ein komplexer Eigenwert von A mit zugehörigem Eigenvektor $x \in \mathbb{C}^n, \ x \neq 0$, dann gilt:

$$\lambda\langle x, x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \langle Ax, x\rangle = \langle x, Ax\rangle = \langle x, \lambda x\rangle = \bar{\lambda}\langle x, x\rangle.$$

Nachdem $\langle x, x\rangle \neq 0$ für $x \neq 0$ ist, muss $\lambda = \bar{\lambda}$ gelten und der Eigenwert λ damit reell sein. Daraus folgt dann auch, dass der zugehörige Eigenvektor x reell gewählt werden kann.

(b) Wir betrachten eine schief-symmetrische 2×2-Matrix, d.h. es gilt

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{21} \\ -a_{12} & -a_{22} \end{pmatrix} = -A^\top$$

und damit

$$\begin{aligned} a_{11} &= -a_{11} \quad \Rightarrow \quad a_{11} = 0 \\ a_{22} &= -a_{22} \quad \Rightarrow \quad a_{22} = 0. \end{aligned}$$

Wir schreiben

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$$

und erhalten das charakteristische Poylnom lautet

$$p_{char}(\lambda) = \lambda^2 + a^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm ia,$$

das heißt die Eigenwerte liegen auf der imaginären Achse.

(c) Wir betrachten die hermitesche Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & c \end{pmatrix}, \quad a, c \in \mathbb{R}, \quad b \in \mathbb{C}$$

und berechnen das charakteristische Polynom

$$p_{char}(\lambda) = \lambda^2 - (a+c)\lambda + (ac - b\bar{b}).$$

Wir zeigen, dass die Eigenwerte reell sind, da die Diskriminante nicht negativ wird:

$$\begin{aligned} D &= (a+c)^2 - 4(ac - b\bar{b}) \\ &= a^2 + 2ac + c^2 - 4ac + 4|b|^2 \\ &= a^2 - 2ac + c^2 + 4b^2 \\ &= (a-c)^2 + 4b^2 \geq 0. \\ &\Rightarrow \lambda_{1,2} \in \mathbb{R} \qquad\qquad \text{QED.} \end{aligned}$$

Aufgabe 47.1 (Diagonalisierbarkeit)

<u>Matrix A:</u>

Eigenwerte und algebraische Vielfachheiten:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} = 2 \quad &\Rightarrow \quad \#_a(\lambda_{1,2}) = 2 \\ \lambda_3 = 1 \quad &\Rightarrow \quad \#_a(\lambda_3) = 1 \end{aligned}$$

Eigenräume und geometrische Vielfachheiten:

$$ER(\lambda_{1,2}) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \qquad \#_g(\lambda_{1,2}) = 2$$

$$ER(\lambda_3) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \qquad \#_g(\lambda_3) = 1$$

Diagonalisierbarkeit:

$$\#_a(\lambda_{1,2}) = 2 = \#_g(\lambda_{1,2}), \quad \#_a(\lambda_3) = 1 = \#_g(\lambda_3),$$

d.h. A ist diagonalisierbar:

$$A = T \cdot D \cdot T^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

<u>Matrix B:</u>

Eigenwerte und algebraische Vielfachheiten:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} = 1 \quad &\Rightarrow \quad \#_a(\lambda_{1,2}) = 2 \\ \lambda_3 = 0 \quad &\Rightarrow \quad \#_a(\lambda_3) = 1 \end{aligned}$$

Eigenräume und geometrische Vielfachheiten:

$$ER(\lambda_{1,2}) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \qquad \#_g(\lambda_{1,2}) = 2$$

$$ER(\lambda_3) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \qquad \#_g(\lambda_3) = 1$$

Diagonalisierbarkeit:

$$\#_a(\lambda_{1,2}) = 2 = \#_g(\lambda_{1,2}), \quad \#_a(\lambda_3) = 1 = \#_g(\lambda_3),$$

d.h. B ist diagonalisierbar:

$$B = T \cdot D \cdot T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$

<u>Matrix C:</u>

Eigenwerte und algebraische Vielfachheiten:

$$\lambda_{1,2,3} = 0 \quad \Rightarrow \quad \#_a(\lambda_{1,2}) = 3$$

Eigenräume und geometrische Vielfachheiten:

$$ER(\lambda_{1,2,3}) = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \qquad \#_g(\lambda_{1,2,3}) = 2$$

Diagonalisierbarkeit:

$$\#_a(\lambda_{1,2,3}) = 3 \neq 2 = \#_g(\lambda_{1,2,3}),$$

d.h. C ist nicht diagonalisierbar.

<u>Matrix D:</u>
Eigenwerte und algebraische Vielfachheiten:

$$\lambda_{1,2} = -1 \quad \Rightarrow \quad \#_a(\lambda_{1,2}) = 2$$
$$\lambda_3 = 5 \quad \Rightarrow \quad \#_a(\lambda_3) = 1$$

Eigenräume und geometrische Vielfachheiten:

$$ER(\lambda_{1,2}) = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \qquad \#_g(\lambda_{1,2}) = 2$$
$$ER(\lambda_3) = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \qquad \#_g(\lambda_3) = 1$$

Diagonalisierbarkeit:

$$\#_a(\lambda_{1,2}) = 2 = \#_g(\lambda_{1,2}), \quad \#_a(\lambda_3) = 1 = \#_g(\lambda_3),$$

d.h. D ist diagonalisierbar:

$$D = T \cdot M \cdot T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Aufgabe 48 (LR- und QR-Zerlegung)
Lösung:

(i) Falsch, die Matrix muss nicht symmetrisch sein.

(ii) Falsch. Die LR-Zerlegung einer Matrix A erzeugt eine obere Dreiecksmatrix R und eine untere Dreiecksmatrix L, sodass $A = L \cdot R$ gilt. Anschließend löst man das LGS $Ax = LRx = b$, indem man $y := Rx$, $y \in \mathbb{C}^n$ und löst $Ly = b$ durch Vorwärtssubstitution. Mit den resultierenden Werten für y löst man durch Rückwärtssubstitution das LGS $Rx = y$ nach den gesuchten Werten für x auf.

(iii) L sorgt für eine Tauschen der ersten mit der Zweiten Zeile von A. Weiter sorgt der Eintrag l_{33} für eine Verdopplung der dritten Zeile von A. Streng genommen sind damit alle Aussagen falsch:
(a) Es findet zwar eine Vertauschung der ersten und zweiten Zeile statt, die Verdopplung bleibt aber unerwähnt.
(b) Es findet zwar eine Vertauschung der ersten und zweiten Zeile statt, die Verdopplung bleibt aber ebenso unerwähnt wie die Addition der ersten Zeile von A zur dritten Zeile von A.
(c) Das Tauschen bleibt unerwähnt.
(d) Falsch. Hier erzeugt man eine neue dritte Zeile mit $(III)' = 1 \cdot (I) + 2 \cdot (III)$.
(e) Falsch. Hier erzeugt man eine neue dritte Zeile mit $(III)' = -1 \cdot (I) + 2 \cdot (III)$.

(iv) Ja. Allerdings muss man die transponierten Elementarmatrizen nutzen und diese nicht von links sondern von rechts multiplizieren. Hier ein paar Beispiele:

$$A \cdot T_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ 8 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot S_2(3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 4 & 15 & 6 \\ 7 & 24 & 9 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot L_{13}(-2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & -2 \\ 7 & 8 & -5 \end{pmatrix}$$

Hier sorgt die Matrix T_{12} für eine Vertauschung der ersten beiden Spalten von A, während $S_2(3)$ eine Verdreifachung der zweiten Spalte verursacht. Die Matrix $L_{13}(-2)$ erzeugt eine neue dritte Spalte durch Addition der ersten mit dem (-2)-fachen der ursprünglichen dritten Spalte.
All diese Operationen können auch nacheinander auf die Matrix A angewendet werden. Über die Matrix $B = T_{12}L_{13}(-2)S_2(3)$ kann man die Gesamttransformations-

Matrix, die alle drei Schritte auf einmal durchführt, erhalten:

$$\begin{aligned}
A \cdot T_{12} \cdot L_{13}(-2) \cdot S_2(3) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 5 & 8 & -4 \\ 8 & 14 & -7 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Wichtig ist hierbei die Einhaltung der Multiplikationsrichtung!

(v) Richtig, siehe Skript IX.2.4(iv).

(vi) Falsch. Die Inverse zu $L_{ij}(\alpha)$ ist $(L_{ij}(\alpha))^{-1} = L_{ij}^{-1}(\alpha) = L_{ij}(-\alpha)$.

(vii) Laut Bemerkung IX.2.7(i) gilt, wenn A invertierbar ist, so existiert für die zeilenvertauschte Matrix immer eine LR-Zerlegung. Für Isomorphismen gilt $\det(A) \neq 0$. Also ist A Invertierbarkeit von A gegeben und es existiert immer eine LR-Zerlegung für jeden Isomorphismus. Die Aussage ist also falsch.

(viii) Falsch. Man löst das LGS $Ax = b$ mit Hilfe der Zerlegung von A in eine obere Dreiecksmatrix R und eine orthogonale Matrix Q, d.h. $Q^\top = Q^{-1}$. Nun setzt man wie bei der LR-Zerlegung $y = Rx$ und löst zunächst $Qy = b$ mit $y = Q^\top b$. Mit diesem Ergebnis kann man dann $Rx = y$ durch Rückwärtssubstitution lösen.

(ix) (a) ist die korrekte Definition der Householder-Matrix.
(b) ist falsch, da v ein Spaltenvektor sein soll, also $v^\top v$ ein Skalar und keine Matrix ist.
(c) ist korrekt, da $v^\top v = \|v\|_2^2$ gilt.
(d) ist falsch, da $v \cdot v^\top$ ein Matrix ist und man nicht durch Matrizen dividieren darf.

Aufgabe 49 (LR-Zerlegung)
Lösung:

(a) (i) Man sieht, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

durch Addieren der zweiten Zeile mit dem (-1)-fachen der ersten Zeile zu einer oberen Dreiecksmatrix umgeformt werden kann. Hierzu stellt man die Matrix

$$L_{21}(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

auf und multipliziert diese anschließend mit der Matrix A von links, um R zu erhalten:

$$L_{21}(-1) \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = R.$$

Somit hat man nicht nur die Matrix R sondern gleichzeitig auch die Matrix L über deren Inverse erhalten. Die LR-Zerlegung lautet also:

$$A = L \cdot R = (L_{21}(-1))^{-1} \cdot R = L_{21}(1) \cdot R = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{R}.$$

(ii) Um die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1-i & 1+i \end{pmatrix}$$

in eine obere Dreiecksmatrix umformen zu können, multipliziert man B mit

$$L_{21}(i-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i-1 & 1 \end{pmatrix}$$

von links und erhält auf diese Weise die Matrix R:

$$L_{21}(i-1) \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i-1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1-i & 1+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = R.$$

Die LR-Zerlegung lautet also:

$$B = L \cdot R = (L_{21}(i-1))^{-1} \cdot R = L_{21}(1-i) \cdot R = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-i & 1 \end{pmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{R}.$$

(iii) Da die Matrix

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

an der c_{11}-Position eine Null enthält, ist diese in dieser Form nicht LR-zerlegbar. Wir müssen also zunächst eine Zeilenvertauschung vornehmen. Hierzu nutzen wir die Matrix T_{12} um die erste mit der zweiten Zeile zu vertauschen:

$$T_{12} \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Achtung: Bei der Lösung eines LGS $Cx = b$ muss diese Vertauschung auch auf den Vektor b der rechten Seite angewendet werden!

Nun können wir mit der LR-Zerlegung von $T_{12} \cdot C = P \cdot C$ beginnen. Wir ziehen mit Hilfe von $L_{31}(-1)$ Zeile (I) von Zeile (III) ab und erhalten:

$$L_{31}(-1) \cdot P \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Im nächsten Schritt eliminieren wir c_{32} durch Multiplikation von $L_{32}(1)$, um R zu erhalten:

$$L_{32}(1) \cdot L_{31}(-1) \cdot P \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = R.$$

Die LR-Zerlegung von $P \cdot C$ lautet also:

$$P \cdot C = L \cdot R = (L_{31}(-1))^{-1} \cdot (L_{32}(1))^{-1} \cdot R = L_{31}(1) \cdot L_{32}(-1) \cdot R$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{=L} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{R}$$

(iv) Wir zerlegen die Matrix

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 7 \end{pmatrix},$$

in dem wir zunächst von links die Matrix $L_{31}(1)$ multiplizieren:

$$L_{31}(1) \cdot D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Anschließend subtrahieren mittels $L_{21}(-2)$ wir das doppelte der ersten von der zweiten Zeile:

$$L_{21}(-2) \cdot L_{31}(1) \cdot D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Mit $L_{32}(-1)$ erzeugen wir die obere Dreiecksmatrix R:

$$L_{32}(-1) \cdot L_{21}(-2) \cdot L_{31}(1) \cdot D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = R.$$

Damit lautet die LR-Zerlegung:

$$D = L_{31}(-1) \cdot L_{21}(2) \cdot L_{32}(1) \cdot R = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}_{R}.$$

(b) (i) Wir nutzen die Zerlegung $A = L \cdot R$ und Anschließend lösen das LGS $Ax = LRx = b = e_1$, indem wir $y := Rx$, $y \in \mathbb{C}^n$ setzen und zunächt $Ly = B$ durch Vorwärtssubstitution lösen:

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ LRx &= b \\ Ly &= b \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow\ y_1 = 1,\ \ y_1 + y_2 = 0 \\ &\Rightarrow\ y_2 = -1. \end{aligned}$$

Mit den resultierenden Werten für y löst man nun durch Rückwärtssubstitution das LGS $Rx = b$ nach den gesuchten Werten für x auf:

$$\begin{aligned}
Rx &= y \\
\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&\Rightarrow\ x_2 = -1,\ \ x_1 - x_2 = 0 \\
&\Rightarrow\ x_1 = 0 \\
&\Rightarrow\ x = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(ii) Wir nutzen die Zerlegung $B = L \cdot R$ und Anschließend lösen das LGS $Bx = LRx = b = e_1$, indem wir $y := Rx$, $y \in \mathbb{C}^n$ setzen und zunächt $Ly = B$ durch Vorwärtssubstitution lösen:

$$\begin{aligned}
Bx &= b \\
LRx &= b \\
Ly &= b \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Rightarrow\ y_1 = 1,\ \ (1-i)y_1 + y_2 = 0 \\
&\Rightarrow\ y_2 = i - 1.
\end{aligned}$$

Mit den resultierenden Werten für y löst man nun durch Rückwärtssubstitution das LGS $Rx = b$ nach den gesuchten Werten für x auf:

$$\begin{aligned}
Rx &= y \\
\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ i-1 \end{pmatrix} \\
&\Rightarrow\ x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i,\ \ x_1 - x_2 = 1 \\
&\Rightarrow\ x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \\
&\Rightarrow\ x = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(iii) Wir nutzen die Zerlegung $P \cdot C = L \cdot R$, wobei P das Tauschen der ersten mit der zweiten Zeile bewirkt. Anschließend lösen das LGS $PCx = LRx = Pb = Pe_1 = e_2$, indem wir $y := Rx$, $y \in \mathbb{C}^n$ setzen und zunächt $Ly = B$ durch Vorwärtssubstitution lösen:

$$\begin{aligned}
PCx &= Pb \\
LRx &= Pb
\end{aligned}$$

$$Ly = Pb$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \quad y_2 = 1, \quad y_1 = 0$$
$$\Rightarrow \quad y_3 = y_2 - y_1 = 1.$$

Mit den resultierenden Werten für y löst man nun durch Rückwärtssubstitution das LGS $Rx = b$ nach den gesuchten Werten für x auf:

$$Rx = y$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \quad x_3 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x_2 = 1 - x_3 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x_1 = -x_2 = -\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow \quad x = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(iv) Wir nutzen die Zerlegung $D = L \cdot R$ und Anschließend lösen das LGS $Dx = LRx = b = e_1$, indem wir $y := Rx$, $y \in \mathbb{C}^n$ setzen und zunächt $Ly = B$ durch Vorwärtssubstitution lösen:

$$Dx = b$$
$$LRx = b$$
$$Ly = b$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \quad y_1 = 1$$
$$\Rightarrow \quad y_2 = -2$$
$$\Rightarrow \quad y_3 = y_1 - y_2 = 3.$$

Mit den resultierenden Werten für y löst man nun durch Rückwärtssubstitution das LGS $Rx = b$ nach den gesuchten Werten für x auf:

$$Rx = y$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \quad x_3 = 0.75$$
$$\Rightarrow \quad x_2 = -2 - x_3 = -2.75$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & 2x_1 = 1 + 2x_3 - 4x_2 = 1.5 + 4 \cdot 2.75 = 13.5, \\
& x_1 = 6.75 \\
\Rightarrow \quad & x = \begin{pmatrix} 6.75 \\ -2.75 \\ 0.75 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 50 (QR-Zerlegung)
Lösung:

(a) (i) Wie in Beispiel IX.3.6 bestimmen zunächst eine orthogonale Matrix Q_1, so dass das Produkt $Q_1 \cdot A$ nur Nullen unter dem Eintrag in der ersten Spalte hat. Da es sich bei der Matrix A um eine 2×2-Matrix handelt, wird das Produkt $Q_1 \cdot A$ eine obere Dreiecksmatrix sein:

$$Q_1 \cdot A = R \quad \Longleftrightarrow \quad A = Q \cdot R \text{ mit } Q = Q_1^\top.$$

Um die Matrix Q_1 zu finden, berechnet man den Vektor

$$v_1 = A_{\cdot 1} - \|A_{\cdot 1}\|_2 \cdot e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \sqrt{1^2 + 1^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Mit der Definition der Householder-Matrix erhalten wir Q_1:

$$\begin{aligned} Q_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{(1-\sqrt{2})^2 + 1^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{2}, 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nun berechnen wir das Produkt und erhalten damit R:

$$Q_1 \cdot A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} = R.$$

Die QR-Zerlegung von A lautet also

$$A = Q \cdot R = Q_1^\top \cdot R = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

(ii) Wir gehen wieder wie in Beispiel IX.3.6 vor und bestimmen die orthogonale Matrix Q_1, so dass das Produkt $Q_1 \cdot B$ nur Nullen unter dem Eintrag in der ersten Spalte hat. Dazu berechnen wir den Vektor

$$v_1 = B_{\cdot 1} - \|B_{\cdot 1}\|_2 \cdot e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe der Householder-Matrix bestimmen wir

$$\begin{aligned} Q_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{(-\sqrt{2})^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (-\sqrt{2}, 1, 1) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wir multiplizieren die Matrix Q_1 von links mit B und erhalten

$$Q_1 \cdot B = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Anschließend berechnet man den Vektor

$$v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2} \end{pmatrix} - \sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\right)^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und die Matrix

$$\tilde{Q}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{\|v_2\|_2^2} \cdot v_2 \cdot v_2^\top = \begin{pmatrix} \frac{(\sqrt{2}+2)\sqrt{3}}{6} & -\frac{(\sqrt{2}-2)\sqrt{3}}{6} \\ \frac{(\sqrt{2}-2)\sqrt{3}}{6} & \frac{(\sqrt{2}+2)\sqrt{3}}{6} \end{pmatrix}.$$

Aus $\tilde{Q}_2$ erstellt man Q_2. Durch die Multiplikation von Q_2 mit $Q_1 \cdot A$ erhält man R:

$$Q_2 \cdot Q_1 \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(\sqrt{2}+2)\sqrt{3}}{6} & -\frac{(\sqrt{2}-2)\sqrt{3}}{6} \\ 0 & \frac{(\sqrt{2}-2)\sqrt{3}}{6} & \frac{(\sqrt{2}+2)\sqrt{3}}{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{6} & \frac{1}{6}\sqrt{6} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}\sqrt{3} \end{pmatrix} = R.$$

Nun benötigen wir noch die Matrix Q, die sich aus den Transponierten der Matrizen Q_1 und Q_2 berechnen lässt:

$$Q_1^\top \cdot Q_2^\top = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(\sqrt{2}+2)\sqrt{3}}{6} & \frac{(\sqrt{2}-2)\sqrt{3}}{6} \\ 0 & -\frac{(\sqrt{2}-2)\sqrt{3}}{6} & \frac{(\sqrt{2}+2)\sqrt{3}}{6} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3}\sqrt{6} & \frac{1}{3}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{6}\sqrt{6} & -\frac{1}{3}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{6}\sqrt{6} & \frac{1}{3}\sqrt{3} \end{pmatrix} = Q.$$

Die QR-Zerlegung von B lautet also

$$B = Q \cdot R = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3}\sqrt{6} & \frac{1}{3}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{6}\sqrt{6} & -\frac{1}{3}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{6}\sqrt{6} & \frac{1}{3}\sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{6} & \frac{1}{6}\sqrt{6} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

(iii) Zunächst bestimmen wir wieder eine orthogonale Matrix Q_1, so dass das Produkt $Q_1 \cdot C$ nur Nullen unter dem Eintrag in der ersten Spalte hat. Dazu bestimmen wir den Vektor

$$v_1 = C_{\cdot 1} - \|C_{\cdot 1}\|_2 \cdot e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} - \sqrt{0^2 + 6^2 + 8^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Mit der Definition der Householder-Matrix erhalten wir Q_1:

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{(-10)^2 + 6^2 + 8^2} \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot (-10, 6, 8)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{100} \cdot \begin{pmatrix} 100 & -60 & -80 \\ -60 & 36 & 48 \\ -80 & 48 & 64 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0.60 & 0.80 \\ 0.60 & 0.64 & -0.48 \\ 0.80 & -0.48 & 0.36 \end{pmatrix}$$

Wir multiplizieren Q_1 mit C und erhalten

$$Q_1 \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & 0.60 & 0.80 \\ 0.60 & 0.64 & -0.48 \\ 0.80 & -0.48 & 0.36 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 6 & -3 & -2 \\ 8 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0 & -1.0 & -2.0 \\ 0 & -4.8 & 0.4 \\ 0 & -1.4 & 2.2 \end{pmatrix}.$$

Anschließend berechnen wir den Vektor

$$v_2 = \begin{pmatrix} -4.8 \\ -1.4 \end{pmatrix} - \sqrt{(-4.8)^2 + (-1.4)^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9.8 \\ -1.4 \end{pmatrix}$$

und damit die Matrizen $\tilde{Q}_2$ und Q_2:

$$\tilde{Q}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{(-9.8)^2 + (-1.4)^2} \cdot \begin{pmatrix} -9.8 \\ -1.4 \end{pmatrix} \cdot (-9.8, -1.4)$$
$$= \begin{pmatrix} -0.96 & -0.28 \\ -0.28 & 0.96 \end{pmatrix}$$

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.96 & -0.28 \\ 0 & -0.28 & 0.96 \end{pmatrix}.$$

Nun berechnet man die obere Dreiecksmatrix R und die orthogonale Matrix Q der QR-Zerlegung:

$$Q_2 Q_1 C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.96 & -0.28 \\ 0 & -0.28 & 0.96 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.0 & -1.0 & -2.0 \\ 0 & -4.8 & 0.4 \\ 0 & -1.4 & 2.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = R$$

$$Q_1^\top \cdot Q_2^\top = \begin{pmatrix} 0 & 0.60 & 0.80 \\ 0.60 & 0.64 & -0.48 \\ 0.80 & -0.48 & 0.36 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.96 & -0.28 \\ 0 & -0.28 & 0.96 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -0.80 & 0.60 \\ 0.60 & -0.48 & -0.64 \\ 0.80 & 0.36 & 0.48 \end{pmatrix} = Q.$$

Die QR-Zerlegung von A lautet also

$$A = Q \cdot R = \begin{pmatrix} 0 & -0.80 & 0.60 \\ 0.60 & -0.48 & -0.64 \\ 0.80 & 0.36 & 0.48 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Aus Aufgabenteil (a) erhalten wir die Matrizen $A_{(0)}$, $Q_{(0)}$ und $R_{(0)}$ für die erste Iteration:

$$A_{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q_{(0)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad R_{(0)} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen die Matrix $A_{(I)}$:

$$A_{(I)} = R_{(0)} \cdot Q_{(0)} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für diese Matrix $A_{(I)}$ berechnen wir die nächste QR-Zerlegung:

$$v_1 = A_{(I)\cdot 1} - \|A_{(I)\cdot 1}\|_2 \cdot e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \sqrt{1^2 + (-1)^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Mit der Definition der Householder-Matrix erhalten wir Q_1:

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{(1-\sqrt{2})^2 + (-1)^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \left(1 - \sqrt{2}, -1\right)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Nun berechnen wir das Produkt und erhalten damit R:

$$Q_1 \cdot A_{(I)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} = R_{(I)}.$$

Der zweite Iterationsschritt erfolgt dann mit

$$A_{(I)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q_{(I)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad R_{(I)} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

wobei hier für die transponierte Matrix $Q_1^\top = Q_1 = Q_{(I)}$ gilt. Wir berechnen $A_{(II)}$:

$$A_{(II)} = R_{(I)} \cdot Q_{(I)} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Man sieht, dass $R_{(I)} = R_{(0)}$ und $A_{(II)} = A_{(0)}$. Weitere Iterationen sind also nicht notwendig, da wir immer wieder auf die Ausgangsmatrix stoßen würden. Das heißt die Matrix $A_{(0)}$ wird auch durch weiteres Iterieren keine obere Dreiecksmatrix und wir erhalten im Wechsel

$$A_{(2k)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_{(2k+1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir haben demnach einen 2×2-Block

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

(vgl. Bemerkung IX.4.3(ii)) mit den komplexen Eigenwerten $\lambda_{1,2} = a \pm ib$ und somit lauten die Eigenwerte der Matrix A

$$\lambda_1 = 1 + i \quad \text{und} \quad \lambda_2 = 1 - i.$$

Aufgabe 51 (Restklassen & mehr)
Lösung:

(i) Das Repräsentatensystem $\mathbb{Z}_{14}$ besteht aus den Restklassen von $[0], [1], \ldots, [13]$,. Laut Satz X.3.10 hat die Restklasse $[a]$ ein multiplikatives Inverses in $\mathbb{Z}_n$ genau dann, wenn $\mathrm{ggT}(a, n) = 1$. Wir stellen die größten gemeinsamen Teiler zusammen:

$$\begin{aligned}
\mathrm{ggT}(0,14) &= 14, & \mathrm{ggT}(1,14) &= 1,\\
\mathrm{ggT}(2,14) &= 2, & \mathrm{ggT}(3,14) &= 1,\\
\mathrm{ggT}(4,14) &= 2, & \mathrm{ggT}(5,14) &= 1,\\
\mathrm{ggT}(6,14) &= 2, & \mathrm{ggT}(7,14) &= 7,\\
\mathrm{ggT}(8,14) &= 2, & \mathrm{ggT}(9,14) &= 1,\\
\mathrm{ggT}(10,14) &= 2, & \mathrm{ggT}(11,14) &= 1,\\
\mathrm{ggT}(12,14) &= 2, & \mathrm{ggT}(13,14) &= 1.
\end{aligned}$$

Das heißt die Restklassen $[0], [2], [4], [6], [7], [8], [10], [12]$ haben kein multiplikatives Inverses.

(ii) Da laut Bemerkung X.2.6(iii) jede Primzahl teilerfremd zu allen positiven Vorgängern ist, gilt hier $\mathrm{ggT}(a, 11) = 1$ für alle $1 \leq a \leq 10$. Nach Satz X.3.10 haben also alle Restklassen $[1], \ldots, [10]$ ein multiplikatives Inverses.

(iii) Die Aussage

$$3 \cdot x \equiv 12 \mod 97 \implies x \equiv 4 \mod 97$$

meint, wenn das Dreifache einer Zahl bei der Division durch 97 den Rest 12 hat, dann folgt, dass diese Zahl bei der Division durch 97 den Rest 4 hat.
Wir rechnen mit Restklassen:

$$[3] \cdot [x] = [12]\,.$$

Diese Gleichung hat eine Lösung, wenn $[3]$ in $\mathbb{Z}_{97}$ ein multiplikatives Inverses hat, also $\mathrm{ggT}(3, 97) = 1$ ist. Wir prüfen dies mit dem euklidischen Algorithmus und berechnen die Vielfachsummendarstellung von 3 und 97:

$$\begin{aligned}
a &= q \cdot b + r\\
97 &= 32 \cdot 3 + 1\\
3 &= 3 \cdot 1 + 0\\
&\Rightarrow \mathrm{ggT}(3, 97) = 1\\
&\Rightarrow 1 = 1 \cdot 97 - 32 \cdot 3.
\end{aligned}$$

Mit der Linearkombination und der Definition der modularen Addition und Multiplikation formulieren wir eine Restklassen-Gleichung:

$$\begin{aligned}
[1] &= [1] \cdot [97] + [-32] \cdot [3]\\
[1] &= [1] \cdot [0] + [-32] \cdot [3]\\
[1] &= [-32] \cdot [3]\\
[1] &= [-32 + 97] \cdot [3]
\end{aligned}$$

$$[1] = [65] \cdot [3]\,.$$

Es muss also [65] das multiplikative Inverse zu [3] sein. Damit können wir die obige Restklassen-Gleichung

$$[3] \cdot [x] = [12]$$

lösen, indem wir beidseitig mit der Inversen von [3] multiplizieren:

$$\begin{aligned}
[3]^{-1} \cdot [3] \cdot [x] &= [3]^{-1} \cdot [12] \\
[x] &= [65] \cdot [3] \cdot [4] \\
[x] &= [195] \cdot [4] \\
[x] &= [1] \cdot [4] \\
[x] &= [4]\,.
\end{aligned}$$

Also ist die Aussage des Informatikers richtig.

(iv) Auf gleiche Weise wie in (iii) testen wir die Aussage

$$3 \cdot x \equiv 12 \mod 87 \implies x \equiv 4 \mod 87.$$

Wir suchen also wieder die Inverse von [3]. Diesmal allerdings in $\mathbb{Z}_{87}$. Mit dem euklidischen Algorithmus erhalten wir den größten gemeinsamen Teiler:

$$\begin{aligned}
a &= q \cdot b + r \\
87 &= 29 \cdot 3 + 0 \\
&\Rightarrow \mathrm{ggT}(3, 87) = 3.
\end{aligned}$$

Da hier $\mathrm{ggT}(3, 87) = 3 \neq 1$ gilt, gibt es in $\mathbb{Z}_{87}$ kein Inverses Element zu [3] und die Gleichung ist nicht lösbar, d.h. die Aussage ist falsch.

(v) (a) In $\mathbb{Z}_{20}$ ist das zu [1] additive Inverse [19], denn

$$[1] + [b] = [0] \quad \Leftrightarrow \quad [1] + [-1] = [1] + [-1 + 20] = [1] + [19] = [20] = [0].$$

(b) In $\mathbb{Z}_{12}$ ist das zu [4] additive Inverse [8], denn

$$[4] + [b] = [0] \quad \Leftrightarrow \quad [4] + [-4] = [4] + [-4 + 12] = [4] + [8] = [12] = [0].$$

(c) In $\mathbb{Z}_{200}$ ist das zu [199] additive Inverse [1], denn

$$[199] + [b] = [0] \quad \Leftrightarrow \quad [199] + [1] = [200] = [0].$$

(d) In $\mathbb{Z}_4$ ist das zu [2] additive Inverse [2], denn

$$[2] + [b] = [0] \quad \Leftrightarrow \quad [2] + [-2] = [2] + [-2 + 4] = [2] + [2] = [4] = [0].$$

(vi)

$$\begin{array}{lrclclcrcrl}
(a) & 217 & = & 9 & \cdot & 23 & + & 10 & \Rightarrow & 217 & \bmod\ 23 = 10 \\
(b) & 11111 & = & 300 & \cdot & 37 & + & 11 & \Rightarrow & 11111 & \bmod\ 37 = 11 \\
(c) & 123456789 & = & 566315 & \cdot & 218 & + & 119 & \Rightarrow & 123456789 & \bmod\ 218 = 119
\end{array}$$

(vii) Zwei aufeinanderfolgende ungerade Zahlen sind teilerfremd, wenn ihr größter gemeinsamer Teiler eins ist, d.h.

$$\mathrm{ggT}(2k+1, 2k+3) = 1.$$

Wir wenden den euklidischen Algorithmus an

$$\begin{aligned} a &= q \cdot b + r \\ 2k+3 &= 1 \cdot (2k+1) + 2 \\ 2k+1 &= k \cdot 2 + 1 \\ 2 &= 2 \cdot 1 + 0 \end{aligned}$$

bestätigen damit, dass die Zahlen $2k+1$ und $2k+3$ teilerfremd sind.

Aufgabe 52 (Euklidischer Algorithmus)
Lösung:

(a) Wir berechnen eine Vielfachsummendarstellung von $\mathrm{ggT}(149, 93)$:

a	b	$a = q \cdot b + r$	$\mathrm{ggT} = s \cdot a + t \cdot b$
149	93	$149 = 1 \cdot 93 + 56$	$1 = 5 \cdot 149 + (-8) \cdot 93$
93	56	$93 = 1 \cdot 56 + 37$	$1 = -3 \cdot 93 + 5 \cdot 56$
56	37	$56 = 1 \cdot 37 + 19$	$1 = 2 \cdot 56 + (-3) \cdot 37$
37	19	$37 = 1 \cdot 19 + 18$	$1 = (-1) \cdot 37 + 2 \cdot 19$
19	18	$19 = 1 \cdot 18 + 1$	$1 = 1 \cdot 19 + (-1) \cdot 18$
18	1	$18 = 18 \cdot 1 + 0$	$s_{neu} = t_{alt},\, t_{neu} = s_{alt} - q \cdot t_{alt}$

Wir berechnen eine Vielfachsummendarstellung von $\mathrm{ggT}(297, 63)$:

a	b	$a = q \cdot b + r$	$\mathrm{ggT} = s \cdot a + t \cdot b$
297	63	$297 = 4 \cdot 63 + 45$	$9 = 3 \cdot 297 - 14 \cdot 63$
63	45	$63 = 1 \cdot 45 + 18$	$9 = 3 \cdot 45 - 2 \cdot 63$
45	18	$45 = 2 \cdot 18 + 9$	$9 = 1 \cdot 45 - 2 \cdot 18$
18	9	$18 = 2 \cdot 9 + 0$	$s_{neu} = t_{alt},\, t_{neu} = s_{alt} - q \cdot t_{alt}$

(b) Da $457 \in \mathbb{P}$ gilt $\mathrm{ggT}(a, 457) = 1$ für alle $1 \leq a \leq 456$ und damit haben [12] und [200] multiplikative Inverse in $\mathbb{Z}_{457}$. Wir nutzen wieder den erweiterten euklidischen Algorithmus.

a	b	$a = q \cdot b + r$	$\mathrm{ggT} = s \cdot a + t \cdot b$
457	12	$457 = 38 \cdot 12 + 1$	$1 = 1 \cdot 457 - 38 \cdot 12$
12	1	$12 = 12 \cdot 1 + 0$	
457	200	$457 = 2 \cdot 200 + 57$	$1 = 2 \cdot 200 - 7 \cdot (457 - 2 \cdot 200) = 16 \cdot 200 - 7 \cdot 457$
200	57	$200 = 3 \cdot 57 + 29$	$1 = 2 \cdot (200 - 3 \cdot 57) - 57 = 2 \cdot 200 - 7 \cdot 57$
57	29	$57 = 1 \cdot 29 + 28$	$1 = 29 - (57 - 29) = 2 \cdot 29 - 57$
29	28	$29 = 1 \cdot 28 + 1$	$1 = 29 - 28$
28	1	$28 = 28 \cdot 1 + 0$	

Damit haben wir

$$\begin{aligned} \mathrm{ggT}(12, 457) = 1 &= 1 \cdot 457 - 38 \cdot 12 \\ [1] &= [1] \cdot [457] + [-38] \cdot [12] \\ [1] &= [1] \cdot [0] + [-38 + 457] \cdot [12] \\ [1] &= [419] \cdot [12] \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathrm{ggT}(200, 457) = 1 &= 16 \cdot 200 - 7 \cdot 457 \\ [1] &= [16] \cdot [200] + [-7] \cdot [457] \\ [1] &= [16] \cdot [200] + [-7] \cdot [0] \\ [1] &= [16] \cdot [200]. \end{aligned}$$

In $\mathbb{Z}_{457}$ ist die multiplikative Inverse von [12] also [419], die Inverse von [200] ist [16].

(c) Wir berechnen die Vielfachsummendarstellung von $\mathrm{ggT}(1234, 567)$ erneut mit Hilfe des ertweiterten euklidischen Algoritmus:

a	b	$a = q \cdot b + r$	$\mathrm{ggT} = s \cdot a + t \cdot b$
1234	567	$1234 = 2 \cdot 567 + 100$	$1 = 3 \cdot 567 - 17 \cdot (1234 - 2 \cdot 567) = 37 \cdot 567 - 17 \cdot 1234$
567	100	$567 = 5 \cdot 100 + 67$	$1 = 3 \cdot (567 - 5 \cdot 100) - 2 \cdot 100 = 3 \cdot 567 - 17 \cdot 100$
100	67	$100 = 1 \cdot 67 + 33$	$1 = 67 - 2 \cdot (100 - 67) = 3 \cdot 67 - 2 \cdot 100$
67	33	$67 = 2 \cdot 33 + 1$	$1 = 67 - 2 \cdot 33$
33	1	$33 = 33 \cdot 1 + 0$	

Da $\mathrm{ggT}(1234, 567) = 1$ gilt, sind die Zahlen 1234 und 567 teilerfremd. Für die beiden Parameter erhalten wir $s = -17$ und $t = 37$.

Aufgabe 53 (RSA Algorithmus)
Lösung:

(a) Öffentlicher Schlüssel:

Wir berechnen $n = p \cdot q = 851$ und $\varphi(n) = \varphi(p \cdot q) = (p-1)(q-1) = 22 \cdot 36 = 792$. Nun wählt man eine Zahl e mit $1 < e < \varphi(n)$, so dass $\mathrm{ggT}(e, \varphi(n)) = 1$, also müssen e und 792 teilerfremd sein. Man könnte z.B. $e = 5$ wählen oder eine Primzahl, die größer ist als $\frac{\varphi(n)}{2}$. Nutzen wir die Info aus Aufgabe 52 (a), dass 457 eine Primzahl ist, die größer als $\frac{792}{2} = 396$ ist, dann ist der öffentliche Schlüssel $(457, 851)$.

Privater Schlüssel:

Für den privaten Schlüssel benötigen wir das multiplikative Inverse von $e = 457$ in $\mathbb{Z}_{\varphi(n)=\mathbb{Z}_{792}}$, d.h

$$e \cdot d \equiv 1 \mod \varphi(n) \iff 457 \cdot d \equiv 1 \mod 792.$$

Da nach Konstruktion $\mathrm{ggT}(457, 792) = 1$ gilt, muss d existieren. Mit dem euklidischen Algorithmus erhält man die Vielfachsummendarstellung

$$1 = 221 \cdot 792 - 383 \cdot 457.$$

Wir schreiben diese Gleichung in Restklassen bezüglich $\mathbb{Z}_{792}$ um

$$[1] = [221] \cdot [792] + [-383] \cdot [457] = [-383 + 792] \cdot [457] = [409] \cdot [457]$$

und erhalten [409] als Inverse. Damit ist der private Schlüssel

$$d = 409 \mod 851.$$

Codierung:

Die Verschlüsselung der Nachricht $m = 537$ erfolgt durch

$$c = m^e \mod 851 = 537^{457} \mod 851 = 13 \mod 851.$$

Hier sucht man also den Rest, der bei der Division des Produkts aus 457 Faktoren durch 851 entsteht. Man spaltet nun Faktoren aus der Potenz ab, die größer sind als 851, und berechnet den Rest bei Division durch 851. Hier beginnen wir mit $537^2 : 851$ bestimmen. Den entstehenden Rest multipliziert man wieder mit 537, dividiert erneut durch 851 und erhält wieder einen Rest, den man ein weiteres Mal mit 537 multipliziert. Diese Schritte wiederholt man, so dass immer kleinere Zahlen mit gleichem Rest entstehen, ohne dass 537^{457} expliziert ausgerechnet werden muss. Die letzte Division wäre hier $864 : 851$, was als Rest 13 ergibt. Die Verschlüsselung von $m = 537$ liefert also $c = 13 \mod 851$.

Decodierung:

Die Entschlüsselung funktioniert entsprechend mit

$$13^{409} \equiv m \pmod{851}.$$

Möchte der Empfänger die ursprüngliche Nachricht, muss er demnach den Rest Zahl 13^{409} bei Division durch 851 bestimmen. Man spaltet die Potenz also wieder so auf, dass eine Zahlen größer als 851 entsteht. Hier startet man bei $13^3 = 2197$ und berechnet den Rest

$$r = 2197 \mod 851 = 495.$$

Diesen Rest multipliziert man so lange bis das Ergebnis wieder größer als 851 ist. Anschließend berechnet man erneut den Rest und fährt so lange fort, bis man alle Faktoren verrechnet hat. Die letzte Berechnung ergibt

$$m = 565 \cdot 13 \pmod{851} = 537$$

und man hat die Nachricht entschlüsselt.

(b) Öffentlicher Schlüssel:

Mit $n = p \cdot q = 33$, $\varphi(n) = 20$, $e = 3$ erhält man den öffentlichen Schlüssel $(3, 33)$, für den $\text{ggT}(3, 20) = 1$ gilt, so dass die Inverse von e in $\mathbb{Z}_{20}$ existiert.

Privater Schlüssel:

Wir berechnen die Inverse von $e = 3$ in $\mathbb{Z}_{20}$ mit dem erweiterten euklidischen Algorithmus:

a	b	$a = q \cdot b + r$	$\text{ggT} = s \cdot a + t \cdot b$
20	3	$20 = 3 \cdot 6 + 2$	$1 = (-1) \cdot 20 + 7 \cdot 3$
3	2	$3 = 1 \cdot 2 + 1$	$1 = 3 - (20 - 6 \cdot 3)$
2	1	$2 = 2 \cdot 1 + 0$	$1 = 3 - 2$

Die Inverse zu $[e] = [3]$ in $\mathbb{Z}_{20}$ ist $[7]$. Der private Schlüssel ist also $d = 7 \bmod 20$.

(i) Codierung:

Nachricht	M	A	T	H	E	M	A	T	I	K
m	13	1	20	8	5	13	1	20	9	11
m^e	2197	1	8000	512	125	2197	1	8000	729	1331
$m^e \bmod n$	19	1	14	17	26	19	1	14	3	11

(ii) Decodierung:

$$\begin{aligned}
13^7 \mod 33 &\equiv 13 \cdot (13^2)^3 \pmod{33} \\
&\equiv 13 \cdot 4^3 \pmod{33} \\
&\equiv 13 \cdot (-2) \pmod{33} \\
&\equiv -26 \pmod{33} \\
&\equiv 7 \pmod{33} \quad \Rightarrow \quad 7 = G
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
21^7 \mod 33 &\equiv (-12) \cdot ((-12)^2)^3 \pmod{33} \\
&\equiv (-12) \cdot 144^3 \pmod{33} \\
&\equiv (-12) \cdot 12^3 \pmod{33} \\
&\equiv (-12) \cdot 12 \cdot 144 \pmod{33} \\
&\equiv (-12) \cdot 12 \cdot 12 \pmod{33} \\
&\equiv (-12) \cdot 144 \pmod{33} \\
&\equiv (-12) \cdot 12 \pmod{33} \\
&\equiv -144 \pmod{33} \\
&\equiv 21 \pmod{33} \quad \Rightarrow \quad 21 = U
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
14^7 \mod 33 &\equiv 14 \cdot (14^2)^3 \pmod{33} \\
&\equiv 14 \cdot 196^3 \pmod{33} \\
&\equiv 14 \cdot (-2)^3 \pmod{33} \\
&\equiv -28 \cdot 4 \pmod{33} \\
&\equiv 5 \cdot 4 \pmod{33} \\
&\equiv 20 \pmod{33} \quad \Rightarrow \quad 20 = T
\end{aligned}$$