1_Grundlegende Notationen

Definitionszeichen:
:= oder =:
z.B. n! **!=** 1 * 2 * 3 * ... * (n - 1) * n

Allquantor: ∀ ("für alle")
z.B. ∀n ∈ ℕ
-> "Für alle natürlichen Zahlen" oder verbose: "Für alle n, die in den natürlichen Zahlen sind"

Existenzquantor: ∃ ("es gibt ein")
z.B. ∃n ∈ ℕ
-> "Für (mindestens) eine natürliche Zahl"

Existenzquantor: ∃! ("es gibt **genau** ein")
z.B. ∃! ∈ ℕ
-> "Für genau eine natürliche Zahl"

Diese Quantoren machen wir in den Vorlesungen oft genug, dass wir es nicht wie Vokabeln auswendig lernen müssen :)

Aussagenverknüpfungen:

Mathematische Aussagen sind immer entweder **wahr** oder **falsch**

z.B. A ⋀ B (A **und** B) bzw. A ⋁ B (A **oder** B)

Negation:
¬A (**Nicht** A)

Implikation:
A -> B

Äquivalenz:
A <-> B

Alternative Formulierungen:
A ist äquivalent zu B
A gilt genau dann, wenn B gilt

Eindeutigkeitsprobleme:

Mathematische Ausdrücke sollten **eindeutig** sein z.B. 0.9999... = 1 ist blöd

Warum aber eigentlich? (fun fact)

1/9 = 0,11111...

6/9 = 0,66666...

9/9 = 0,99999...

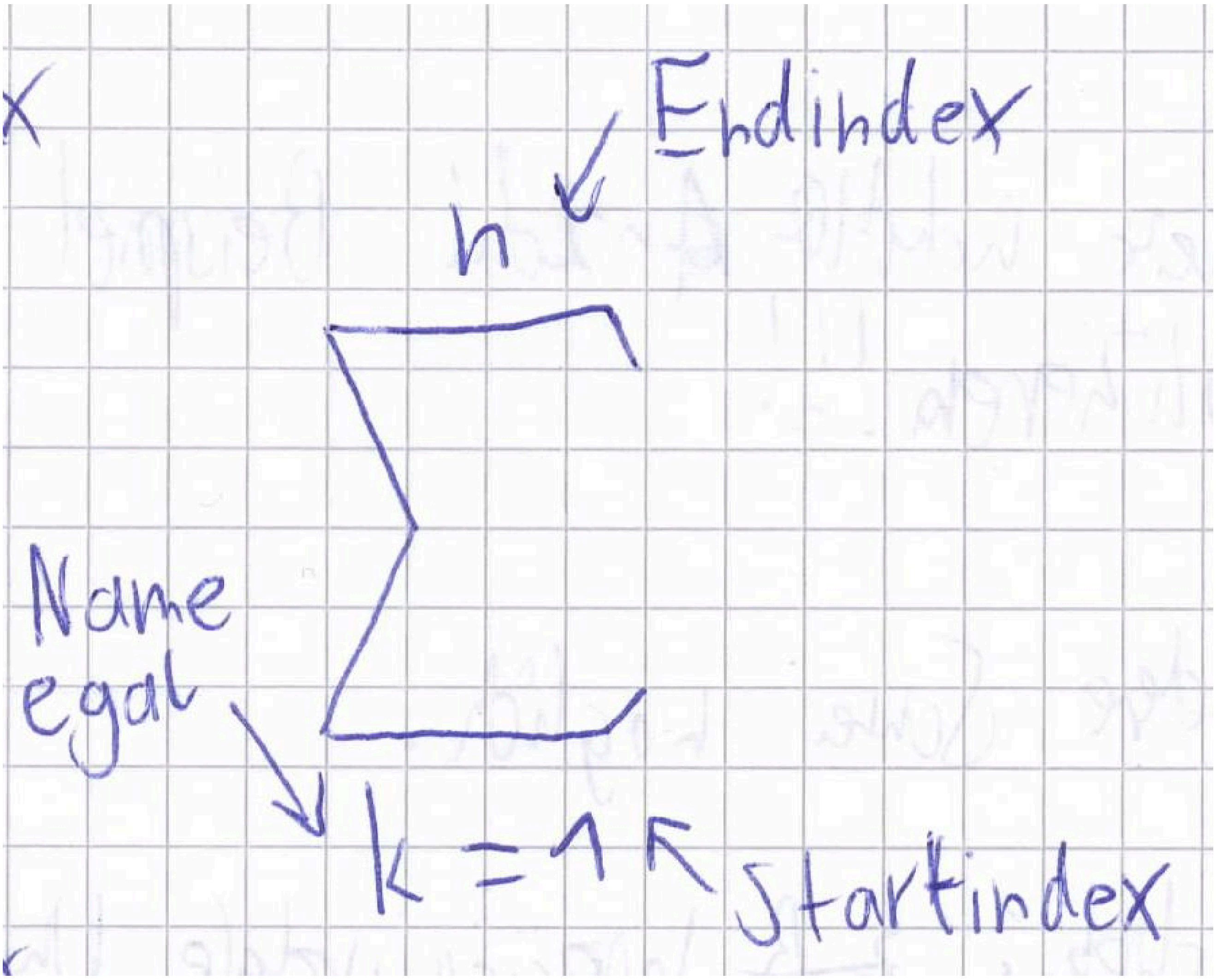
Bei Termen kann es zu Missverständnissen kommen, was auch schlecht ist.

z.B. bei **1 + 2 + ... + 2³**, was ist gemeint?

1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 *oder* 1 + 2 + 4 + 8

-> Summennotation, um Missverständnisse zu vermeiden!

Summennotation



Immer in aufsteigender Reihe zählen!

z.B. 1, 2, 3, ...

NICHT 7, 6, 5, ...

-> Wenn m (Startindex) > n (Endindex) gilt, also es versucht wird, absteigend zu zählen, wird die **leere Summe** definiert:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := 0$$

Rechenregeln Summennotation

Wenn die Laufindexe der beiden Summen gleich sind, können sie so addiert und subtrahiert werden:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} (a_k \pm b_k)$$
$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_n + b_n)$$

(Technisch gesehen ist es auch mit verschiedenen Laufindexen zu machen, nur bleiben dann einige Indexe übrig... oder sowas)

Ausmultiplizieren und Ausklammern

$$c \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (c * a_k)$$
$$c * (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = c * a_1 + c * a_2 + \cdots + c * a_n$$

Mehr oder weniger analog zur Integralregel :)

Summentrennung

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{l} a_k + \sum_{k=l+1}^{n} a_k$$

Hier ist l ein **Index** zwischen k und n. z.B.
1 2 3 4 5 6 7 8 9
k l n
Also wird von 1 bis 5 (k zu l) und dann von 6 zu 9 (l + 1 zu n) gezählt. Logisch, oder?

Indexverschiebung

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m-l}^{n-l} a_{k+l}$$

Man kann erkennen, dass der Start- und Index um l subtrahiert werden, während bei der Funktion der Index um l addiert wird. Dies wird später noch präziser veranschaulicht.

Summe von Produkten ≠ Produkte von Summen!!!

$$\sum_{k=m}^{n} (a_k * b_k) \neq \left(\sum_{k=m}^{n} (a_k) \right) * \left(\sum_{k=m}^{n} (b_k) \right)$$

Beispiele

$$\sum_{k=3}^{27} = 3 + 4 + 5 + \cdots + 27$$

$$\left(\frac{4}{7}\right)^2 + \left(\frac{5}{7}\right)^2 + \left(\frac{6}{7}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{n}{7}\right)^2 = \sum_{j=4}^{n} \left(\frac{j}{7}\right)^2 = \left(\frac{1}{7}\right)^2 \sum_{j=4}^{n} j^2$$

Am Ende wird ausmultipliziert :)

Sei x eine reelle Zahl. Die sogenannte **geometrische Summe** ist

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^n = \sum_{k=0}^{n} x^k$$

Indexverschiebung

$$(4 + 5 + 6 + \cdots + n) + (5^4 + 6^5 + 7^6 + \cdots + (n+1)^n)$$
$$= \sum_{k=4}^{n} k + \sum_{k=5}^{n+1} k^{k-1}$$

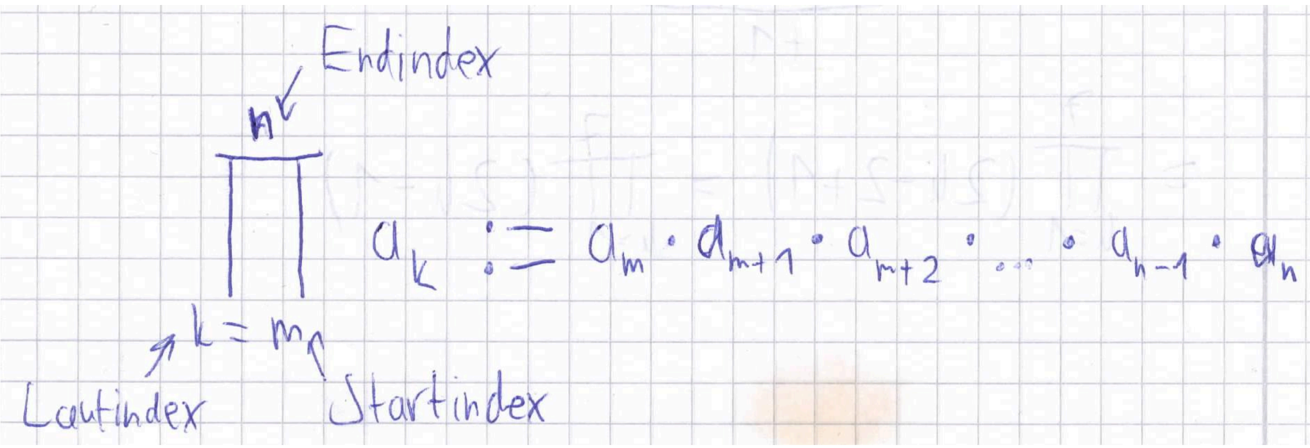
Indexverschiebung an der rechten Summe, um beide auf k=4 zu bringen:

$$= \sum_{k=4}^{n} k + \sum_{k=5-1}^{(n+1)-1} (k+1)^{(k+1)-1}$$
$$= \sum_{k=4}^{n} k + \sum_{k=4}^{n} (k+1)^k$$

Zusammenfassen mit Rechenregeln:

$$= \sum_{k=4}^{n} (k + (k+1)^k)$$

Produktnotation



Ebenfalls darf hier nur aufgezählt, nicht heruntergezählt werden.
Falls m > n ist, wird das **leere Produkt** so definiert:

$$\prod_{k=m}^{n} a_k := 1$$

Rechenregeln Summennotation

Produkt von Produkten

$$\prod_{k=m}^{n} a_k * \prod_{k=m}^{n} b_k = \prod_{k=m}^{n} (a_k * b_k)$$

Ausklammern

$$\prod_{k=1}^{n} c * a_k = c^n \prod_{k=1}^{n} a_k$$

"c wird n mal nach vorne geschoben" (?)

Quotient von Produkten

$$\frac{\prod_{k=m}^{n} a_k}{\prod_{k=m}^{n} b_k} = \prod_{k=m}^{n} \frac{a_k}{b_k}$$

Indexverschiebung

$$\prod_{k=m}^{n} a_k = \prod_{k=m-l}^{n-l} a_{k+l}$$

Beispiele von der Folie weil ich faul bin:

1. Grundlegende Notationen

Beispiele: Sei n eine natürliche Zahl.

- $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 27 = \prod_{k=3}^{27} k.$
- Das Produkt der natürlichen Zahlen 1 bis n ist als **Fakultät** definiert und wird mit $n!$ abgekürzt.

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = \prod_{k=1}^{n} k =: n!$$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 10 = \prod_{k=1}^{10} k = 10!$$

- $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 13 = \prod_{k=0}^{6} (2k+1)$

Grundlagen der Linearen Algebra in der Informatik Dozent: Dipl.-Ing. Tim Lindemann DHBW Stuttgart 24