

Logik

Nach Skript von Jan Hladík

Monika Kochanowski



1. Einführung

- 1.1 Organisation
- 1.2 Motivation
- 1.3 Geschichte

2. Mengen

3. AussagenLogik

4. PrädikatenLogik

5. Prolog

1. Einführung

1.1 Organisation

1.2 Motivation

1.3 Geschichte

2. Mengen

3. Aussagenlogik

4. Prädikatenlogik

5. Prolog

- Präsentation, Übungsaufgaben
 - Aktuellste Version im Moodle-Kursraum
- Klausur
 - Dauer: 90 min
 - Hilfsmittel: 2 doppelseitige, handbeschriebene Blätter DIN A4
- Literatur
 - Logik
 - Dirk W. Hoffmann: [Theoretische Informatik](#)
 - Kurt-Ulrich Witt: [Mathematische Grundlagen für die Informatik](#)
 - Karl Stroetmann: [Theoretische Informatik I - Logik und Mengenlehre](#)
<http://wwwlehre.dhbw-stuttgart.de/~stroetma/Logic/>
 - Motivation
 - Apostolos Doxiadis, Christos Papadimitriou: [Logicomix – Eine epische Suche nach der Wahrheit](#)
 - Douglas R. Hofstadter: [Gödel Escher Bach](#)
 - Prolog
 - Patrick Blackburn et al.: [Learn Prolog Now!](#)
HTML-Version: <http://learnprolognow.org/>
mit Prolog-Interpreter: <http://lpn.swi-prolog.org/>
- Prolog-Interpreter
 - <http://swi-prolog.org/>

1. Einführung

- 1.1 Organisation
- 1.2 Motivation
- 1.3 Geschichte

2. Mengen

- 2.1 Grundbegriffe
- 2.2 Mengenoperationen

3. Aussagenlogik

- 3.1 Syntax
 - 3.2 Semantik
 - 3.3 Schlussfolgerungsverfahren
- ## 4. Prädikatenlogik
- 4.1 Relationen und Funktionen

4.2 Syntax

- 4.3 Semantik
- 4.4 Schlussfolgerungsverfahren

5. Prolog

- 5.1 Terme
- 5.2 Fakten, Regeln und Anfragen
- 5.3 Unifikation, Termgleichheit und Arithmetik
- 5.4 Horn-Resolution und Suchbäume
- 5.5 Rekursion
- 5.6 Listen
- 5.7 Der Cut

Inhalt

1. Einführung

1.1 Organisation

1.2 Motivation

1.3 Geschichte

2. Mengen

3. Aussagenlogik

4. Prädikatenlogik

5. Prolog

Warum Logik?



*Logic is the beginning of wisdom,
not the end.*

Mr. Spock, 2293 (Stardate 9522.6)

*Programming is a creative art form
based in logic.*

John Romero, 1993



- kein Selbstzweck im Informatik-Studium
- **Grundlage** für Programmierung, formale Sprachen, Mathematik, ...
- notwendig für ein **fundiertes** Verständnis der Informatik

Ohne Theorie

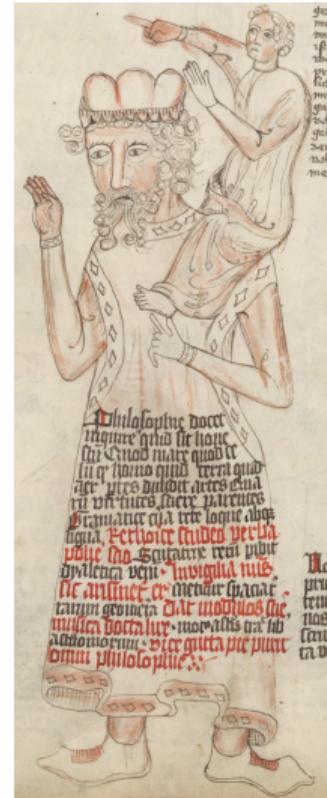
- Trial and Error
- „Neuerfindung des Rades“ (und Wiederholung alter Fehler)
- Verwendung „bekannter und bewährter“ Techniken
- „Bauchgefühl“ für Lösungsansatz

Mit Theorie

- Abschätzung des Verhaltens eines Algorithmus **im Voraus**
- Verständnis der **Gründe**, warum etwas funktioniert oder nicht
- Bewusstsein der **Grenzen** von Computern und Algorithmen

Wir sind gleichsam Zwerge, die auf den Schultern von Riesen sitzen, um mehr und Entfernteres als diese sehen zu können – freilich nicht dank eigener scharfer Sehkraft oder Körpergröße, sondern weil die Größe der Riesen uns emporhebt.

Bernhard von Chartres, ca. 1120



- Technische Grundlagen
 - Boole'sche Schaltkreise ([Digitaltechnik](#))
- Anwendung innerhalb der Informatik
 - Programmierung
 - Syntax und Semantik von Programmiersprachen
 - Datenbanken
 - Relationale Algebra
 - Spezifikation ([Software-Engineering](#))
 - Programmverifikation
 - „Erfüllt mein Programm die Spezifikation?“
 - „Ermöglicht mein Kommunikationsprotokoll Deadlocks?“
 - Berechenbarkeit ([Formale Sprachen und Automaten](#))
 - Verständnis der Fähigkeiten und Grenzen von Computern
 - „Schreiben Sie einen Test, ob zwei Programme sich gleich verhalten.“
- Werkzeug für Anwendungen der Informatik außerhalb der Informatik
 - Wissensrepräsentation ([Künstliche Intelligenz](#))
 - Automatisches Beweisen

■ Begriffe

- Syntax: Wann ist ein Ausdruck korrekt?

- Korrektheit
 - Term, Formel
 - Funktions-, Relationssymbole

- Semantik: Was bedeutet ein korrekter Ausdruck?

- Wahrheit
 - Interpretation, Modell
 - Gültigkeit, Erfüllbarkeit
 - Folgerung

■ Beweisverfahren

- Resolution
 - Tableaus

■ Praktische Anwendung von Logik

- Formalisierung in Aussagen- und Prädikatenlogik
 - Prolog

1. Einführung

- 1.1 Organisation
- 1.2 Motivation
- 1.3 Geschichte

2. Mengen

3. AussagenLogik

4. PrädikatenLogik

5. Prolog

Logos

λόγος

- verwandt mit λέγειν (sprechen)
- Wort, Satz, Rede
- Argumentation
- Beweis, Definition
- Vernunft, Rationalität

Gegenbegriff: Mythos

μῦθος

- Wort, Rede, Erzählung
- Legende
- Vermischung von Fakten und Glauben

Zentraler Begriff für Ursprung des abendländischen Denkens

- Übergang „vom Mythos zum Logos“ (Wilhelm Nestle, 1940)
- Wendung von Legenden zur Rationalität

Ἐν ἀρχῇ ἦν ὁ λόγος,
καὶ ὁ λόγος ἦν πρὸς τὸν Θεόν,
καὶ Θεός ἦν ὁ λόγος.

...
Καὶ ὁ λόγος σὰρξ ἐγένετο
καὶ ἐσκήνωσεν ἐν ἡμῖν, ...

*Im Anfang war das Wort
und das Wort war bei Gott
und Gott war das Wort.*

*...
Und das Wort ist Fleisch geworden
und hat unter uns gewohnt, ...*

Joh 1,1,14

Heutige Verwendung:

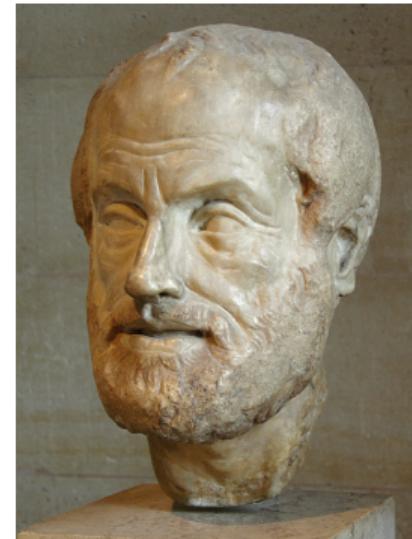
- Logik
- Wissenschaften enden auf -logie
- Logopädie (Sprecherziehung)
- Dialog („durch Wörter“)
- Trilogie („drei Werke“)
- Dekalog (Zehn Gebote)

- Aristoteles: „Metaphysik“
 - Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch

Es ist unmöglich, dass dasselbe demselben in derselben Beziehung zugleich zukomme und nicht zukomme.

- Satz vom ausgeschlossenen Dritten

Es ist unmöglich, dass es ein Mittleres zwischen den beiden Gliedern des Widerspruchs gibt, sondern man muss eben eines von beiden entweder bejahen oder verneinen.



Aristoteles
384–322 v.C.

- Gottfried Wilhelm Leibniz

- Dualsystem: 0 \rightsquigarrow Nichts; 1 \rightsquigarrow Gott

*Um alles aus dem Nichts herzuleiten,
genügt Eines.*

- Rechenmaschinen

Denn es ist ausgezeichneter Menschen unwürdig, gleich Sklaven Stunden zu verlieren mit Berechnungen.

- Idee der Formalisierung von Ausdrücken und Beweisen

*Philosophen werden nicht anders argumentieren als Rechenmeister. Sie werden die Feder in die Hand nehmen und sagen:
*Calculemus!**

10 ^e	Tabulag	ita stabit
1	1	2^0
10	2	2^1
100	4	2^2
1000	8	2^3
10000	16	2^4
100000	32	2^5
1000000	64	2^6
10000000	128	2^7
100000000	256	2^8
1000000000	512	2^9
10000000000	1024	2^{10}



G.W. Leibniz
1646–1716

- George Boole:
 - „The Mathematical Analysis of Logic“
 - Operatoren \times (und), $+$ (oder), $-$ (nicht)
 - Rechengesetze
 - disjunktive Normalform
 - Entscheidungsverfahren
 - ↝ Aussagenlogik

1st. Disjunctive Syllogism.

$$\begin{array}{l} \text{Either X is true, or Y is true (exclusive),} \\ \text{But X is true,} \\ \text{Therefore Y is not true,} \end{array} \quad \frac{x + y - 2xy = 1}{\begin{array}{l} x = 1 \\ \therefore y = 0 \end{array}}$$

$$\begin{array}{l} \text{Either X is true, or Y is true (not exclusive),} \\ \text{But X is not true,} \\ \text{Therefore Y is true,} \end{array} \quad \frac{\begin{array}{l} x + y - xy = 1 \\ x = 0 \end{array}}{\begin{array}{l} x = 0 \\ \therefore y = 1 \end{array}}$$

2nd. Constructive Conditional Syllogism.

$$\begin{array}{l} \text{If X is true, Y is true,} \\ \text{But X is true,} \\ \text{Therefore Y is true,} \end{array} \quad \frac{\begin{array}{l} x(1-y) = 0 \\ x = 1 \end{array}}{\begin{array}{l} x = 1 \\ \therefore 1-y = 0 \text{ or } y = 1. \end{array}}$$

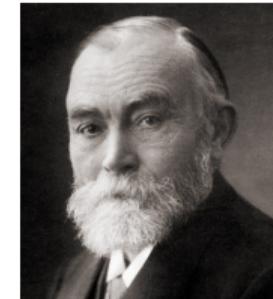
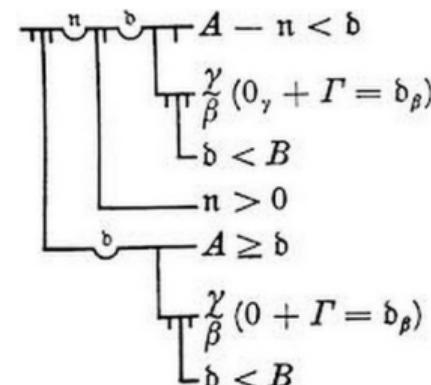
3rd. Destructive Conditional Syllogism.

$$\begin{array}{l} \text{If X is true, Y is true,} \\ \text{But Y is not true,} \\ \text{Therefore X is not true,} \end{array} \quad \frac{\begin{array}{l} x(1-y) = 0 \\ y = 0 \end{array}}{\begin{array}{l} y = 0 \\ \therefore x = 0 \end{array}}$$



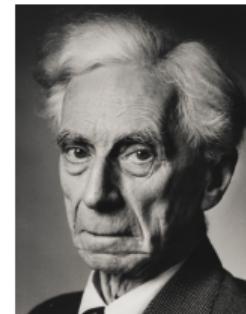
George Boole
1815–1864

- Gottlob Frege: „Begriffsschrift“
 - Formalisierung mathematischer Aussagen
 - „für alle x gilt ...“
 - „es gibt ein x , für das gilt ...“
 - ↝ Prädikatenlogik



Gottlob Frege
1848–1925

- Bertrand Russell, Alfred North Whitehead: „Principia Mathematica“
 - Ziel: Fundierung der Mathematik auf Logik
 - Formalisierung von Beweisen
 - Inferenz-Regeln



Bertrand Russell
1872–1970

*54·43. $\vdash \therefore \alpha, \beta \in 1 . \supset : \alpha \cap \beta = \Lambda . \equiv . \alpha \cup \beta \in 2$

Dem.

$$\vdash . *54\cdot26 . \supset \vdash \therefore \alpha = \iota'x . \beta = \iota'y . \supset : \alpha \cup \beta \in 2 . \equiv . x \neq y .$$

$$[*51\cdot281] \quad \equiv . \iota'x \cap \iota'y = \Lambda .$$

$$[*13\cdot12] \quad \equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda \quad (1)$$

$$\vdash . (1) . *11\cdot11\cdot35 . \supset$$

$$\vdash \therefore (\exists x, y) . \alpha = \iota'x . \beta = \iota'y . \supset : \alpha \cup \beta \in 2 . \equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda \quad (2)$$

$$\vdash . (2) . *11\cdot54 . *52\cdot1 . \supset \vdash . \text{Prop}$$

From this proposition it will follow, when arithmetical addition has been defined, that $1 + 1 = 2$.



A.N. Whitehead
1861–1947

■ David Hilbert: **Hilbert-Programm**

- Formalisierung aller Bereiche der Mathematik
- Nachweis der Widerspruchsfreiheit der Formalisierung
- Nachweis der **Vollständigkeit** der Beweisverfahren
- ↝ Mechanisches Ableiten aller wahren Sätze

Wir müssen wissen, wir werden wissen!



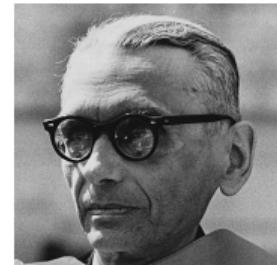
David Hilbert
1862–1943

- Kurt Gödel: „Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme“

- Vollständigkeit der Prädikatenlogik erster Stufe:
Jeder wahre Satz (in PL1) ist beweisbar.
- Unvollständigkeit der Prädikatenlogik zweiter Stufe:
Es gibt (in PL2) wahre Sätze, die nicht beweisbar sind.

Die Logik wird nie mehr dieselbe sein.

John von Neumann (1903–1957)



Kurt Gödel
1906–1978

- Alan Turing: „On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem“

- Unentscheidbarkeit des Halteproblems für Turing-Maschinen (Computer)
 - Unentscheidbarkeit des Erfüllbarkeitsproblems für PL1

→ 3. Semester

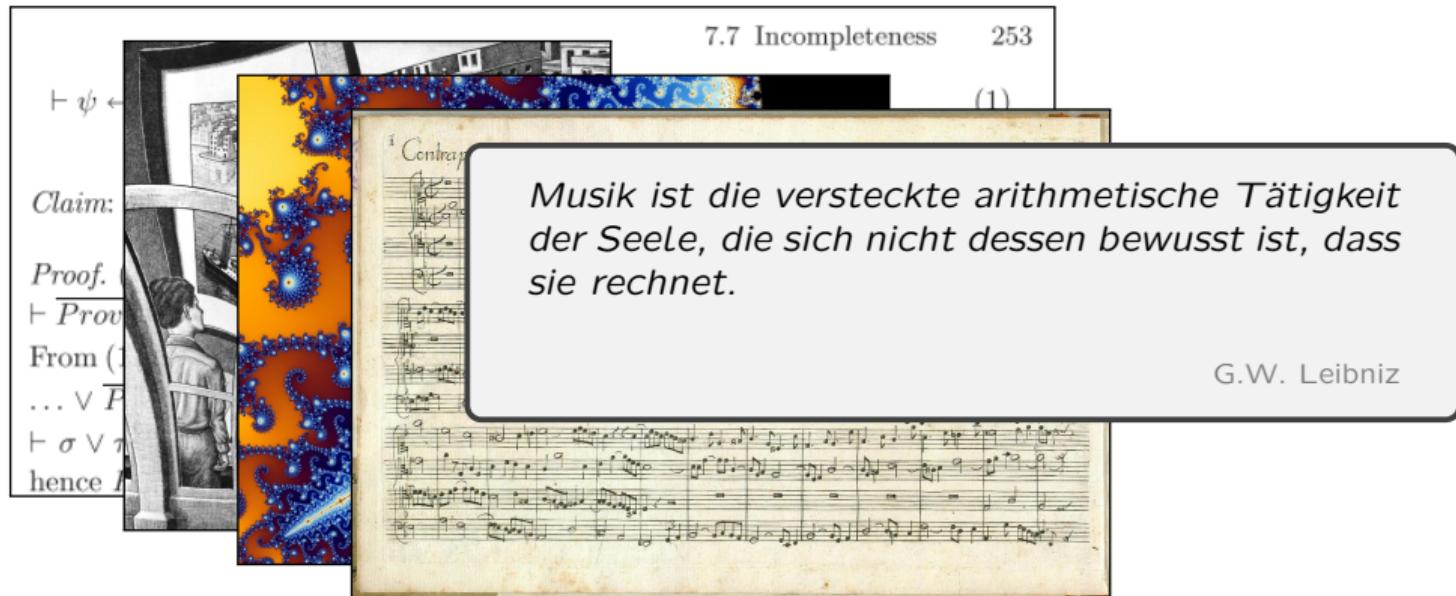


Alan Turing
1912–1954

Selbstreferenz

- „Dieser Satz ist nicht beweisbar.“
- Russell'sche Antinomie: $U = \{T \mid T \notin T\}$
- „Der Barbier rasiert genau die Männer, die sich nicht selbst rasieren.“

Douglas R. Hofstadter: Gödel Escher Bach



- Alle Wörter bestehen aus den Buchstaben M, I und U
- Eine Ableitung beginnt immer mit MI
- Es gelten die folgenden Ableitungsregeln:
 - 1 Wenn ein Wort mit I endet, darf man U anhängen
 - 2 III darf durch U ersetzt werden
 - 3 UU darf entfernt werden
 - 4 Das Teilwort nach einem M darf verdoppelt werden

Nach Douglas R. Hofstadter, *Gödel Escher Bach*

- Alle Wörter bestehen aus den Buchstaben M, I und U
- Jede Ableitung beginnt mit MI
- x und y stehen für beliebige (Teil-)wörter
- Ableitungsregeln:
 - 1 $xI \rightarrow xIU$
 - 2 $xIIIy \rightarrow xUy$
 - 3 $xUUy \rightarrow xy$
 - 4 $Mx \rightarrow Mxx$
- Man schreibt $x \vdash_i y$, wenn sich x durch Anwendung der Regel Nr. i in y überführen lässt

Beispiel 1.1 (Ableitung im MIU-System)

$MI \vdash_4 MII \vdash_4 MIII \vdash_2 MUI \vdash_4 MUIUI$

- Jede Ableitung beginnt mit MI
- Ableitungsregeln:
 - 1 $xI \rightarrow xIU$
 - 2 $xIIIy \rightarrow xUy$
 - 3 $xUUy \rightarrow xy$
 - 4 $Mx \rightarrow Mxx$
- Man schreibt $x \vdash_i y$, wenn sich x durch Anwendung der Regel Nr. i in y überführen lässt

Übung 1.2

Geben Sie, falls möglich, für die folgenden Wörter Ableitungen an:

- 1 MUIU
- 2 MIIIIII
- 3 MUUUI
- 4 MU

- 1 $xI \rightarrow xIU$
- 2 $xIIIy \rightarrow xUy$
- 3 $xUUy \rightarrow xy$
- 4 $Mx \rightarrow Mxx$

Lösung 1.2

- 1 MI \vdash_4 MII \vdash_4 MIIII \vdash_1 MIIIIU \vdash_2 MUIU
- 2 MI \vdash_4 MII \vdash_4 MIIII \vdash_4 MIIIIIIII \vdash_1 MIIIIIIIIU \vdash_2 MIIIIUUU \vdash_3 MIIIII
- 3 MI \vdash_4 MII \vdash_4 MIIII \vdash_4 MIIIIIIII \vdash_2 MUIIIII \vdash_2 MUUII \vdash_4 MUUIIUUII \vdash_3 MUUIIII \vdash_2 MUUUI

- 1 $xI \rightarrow xIU$
- 2 $xIIIy \rightarrow xUy$
- 3 $xUUy \rightarrow xy$
- 4 $Mx \rightarrow Mxx$

Lösung 1.2

- 4 MU kann nicht hergeleitet werden!

Beweis.

- Betrachte Anzahl der I in ableitbaren Wörtern
- Invariante: in allen herleitbaren Wörtern ist $|x|_I$ nicht ohne Rest durch 3 teilbar
 - $|MI|_I = 1$; Rest 1
 - Regeln 1 und 3 ändern die Anzahl der I nicht
 - Regel 4 verdoppelt die Anzahl der I
Rest 1 \rightsquigarrow Rest 2, Rest 2 \rightsquigarrow Rest 1
 - Regel 2 reduziert die Anzahl der I um 3; Rest bleibt gleich
- In keinem der Fälle wird aus einem nicht-Vielfachen von 3 ein Vielfaches von 3. Aber $|MU|_I = 0$. Also ist MU nicht herleitbar.



MIU-System	Logik
Wörter über {M, I, U}	Syntaktisch korrekte Ausdrücke
MI	Axiome
Ableitungsregeln	Beweisschritte
Ableitbare Wörter	Beweisbare Sätze

- Regelanwendung terminiert nicht
- Ableitungsregeln liefern kein Entscheidungsverfahren

Inhalt

1. Einführung

2. Mengen

2.1 Grundbegriffe

2.2 Mengenoperationen

3. Aussagenlogik

4. Prädikatenlogik

5. Prolog

1. Einführung

2. Mengen

2.1 Grundbegriffe

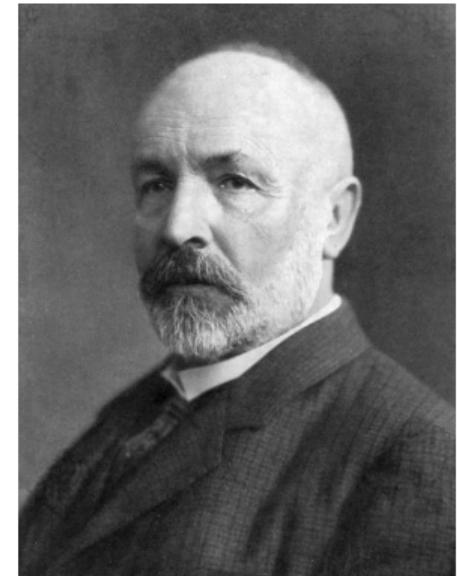
2.2 Mengenoperationen

3. Aussagenlogik

4. Prädikatenlogik

5. Prolog

Unter einer *Menge* verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die *Elemente* von M genannt werden) zu einem Ganzen.



Georg Cantor
(1845–1918)

Definition 2.1 (Menge, Element)

- Eine **Menge** ist eine Sammlung von Objekten, betrachtet als Einheit.
- Die Objekte heißen auch **Elemente** der Menge.

- Elemente können beliebige Objekte sein:
 - Zahlen
 - Wörter
 - Andere Mengen (!)
 - Listen, Paare, Funktionen, ...
 - ... aber auch Menschen, Fahrzeuge, Kurse an der DHBW, ...

Die Menge **aller** in einem bestimmten Kontext betrachteten Objekte heißt oft **Universum** oder **Trägermenge**.

- Explizite Aufzählung:
 - $A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$
 - $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- Beschreibung („Deskriptive Form“):
 - $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist Primzahl und } n \leq 13\}$
 - $B = \{3 \cdot n \mid n \in \mathbb{N}\}$
 - $C = \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
- Mengenzugehörigkeit
 - $2 \in A$ (2 ist in A , 2 ist Element von A)
 - $4 \notin A$ (4 ist nicht in A , 4 ist kein Element von A)

- Mengen sind ungeordnet
 - $\{a, b, c\} = \{b, c, a\} = \{c, a, b\}$
 - Geordnet sind z. B. [Folgen](#)
- Jedes Element kommt in einer Menge maximal einmal vor
 - $\{1, 1, 1\}$ hat ein Element
 - Mehrfaches Vorkommen des gleichen Elements erlauben z. B. [Multimengen](#) oder Folgen

Definition 2.2 (Mächtigkeit)

Die Mächtigkeit einer Menge M , $|M|$, ist die Anzahl der Elemente von M .

- Einfach für endliche Mengen: $|\{a, b, c\}| = 3$
- Schwierig für unendliche Mengen: $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| < |\mathbb{R}|$

Definition 2.3 (Teilmenge)

Eine Menge M_1 heißt **Teilmenge** von M_2 ($M_1 \subseteq M_2$), wenn für alle $x \in M_1$ auch $x \in M_2$ gilt.

Definition 2.4 (Mengengleichheit)

Zwei Mengen M_1 und M_2 sind **einander gleich** ($M_1 = M_2$), wenn für alle Elemente x gilt:
 $x \in M_1$ gdw. $x \in M_2$, d. h. wenn M_1 und M_2 die selben Elemente enthalten.

Es gilt: $M_1 = M_2$ gdw. $M_1 \subseteq M_2$ und $M_2 \subseteq M_1$.

Vokabular:

- **gdw.** steht für „genau dann, wenn“ (dann und nur dann, wenn)
- englisch: **iff**; „if and only if“

Definition 2.5 (Echte Teilmenge)

Eine Menge M_1 heißt **echte Teilmenge** von M_2 ($M_1 \subset M_2$), wenn $M_1 \subseteq M_2$ und $M_1 \neq M_2$ gilt.

- Analog definieren wir Obermengen:
 - $M_1 \supseteq M_2$ gdw. $M_2 \subseteq M_1$
 - $M_1 \supset M_2$ gdw. $M_2 \subset M_1$
- Wir schreiben $M_1 \not\subseteq M_2$, falls M_1 keine Teilmenge von M_2 ist.

Notation: Manche Autoren verwenden \subset statt \subseteq und \subsetneq statt \subset .

- $\emptyset = \{\}$, die **leere Menge**
 - enthält kein Element
 - es gilt: $\emptyset \subseteq M$ für alle Mengen M
- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, die **natürlichen Zahlen**
 - Informatiker fangen bei 0 an zu zählen!
- $\mathbb{N}^{\geq 1} = \{1, 2, 3, \dots\}$, die **positiven natürlichen Zahlen**
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$, die **ganzen Zahlen**
- $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^{\geq 1}\}$ (die **rationalen Zahlen**)
- \mathbb{R} , die **reellen Zahlen**
 - alle Zahlen auf der Zahlengerade
(keine „Löcher“ wie bei \mathbb{Q})
 - enthält auch $\pi, e, \sqrt{2}, \dots$
- $\mathbb{B} = \{0, 1\}$, die **Boole'sche Menge**

Übung 2.6

Geben Sie formale Beschreibungen für die folgenden Teilmengen der natürlichen Zahlen:

- 1 Alle geraden Zahlen
- 2 Alle Quadratzahlen
- 3 Alle Zahlen, die eine gerade Anzahl von Teilern haben

Inhalt

1. Einführung

2. Mengen

2.1 Grundbegriffe

2.2 Mengenoperationen

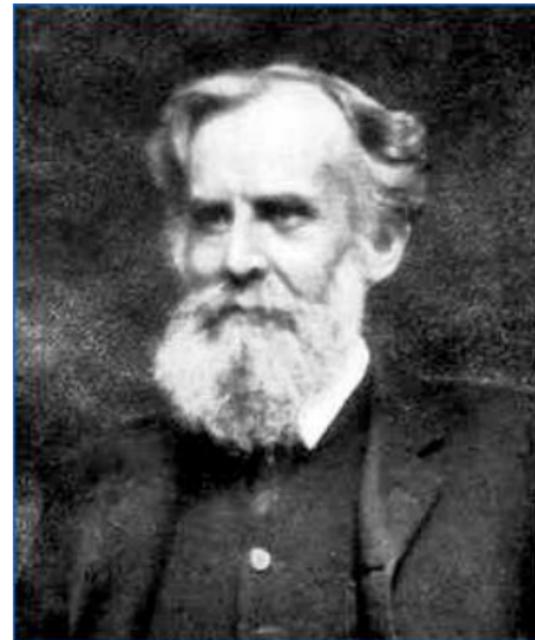
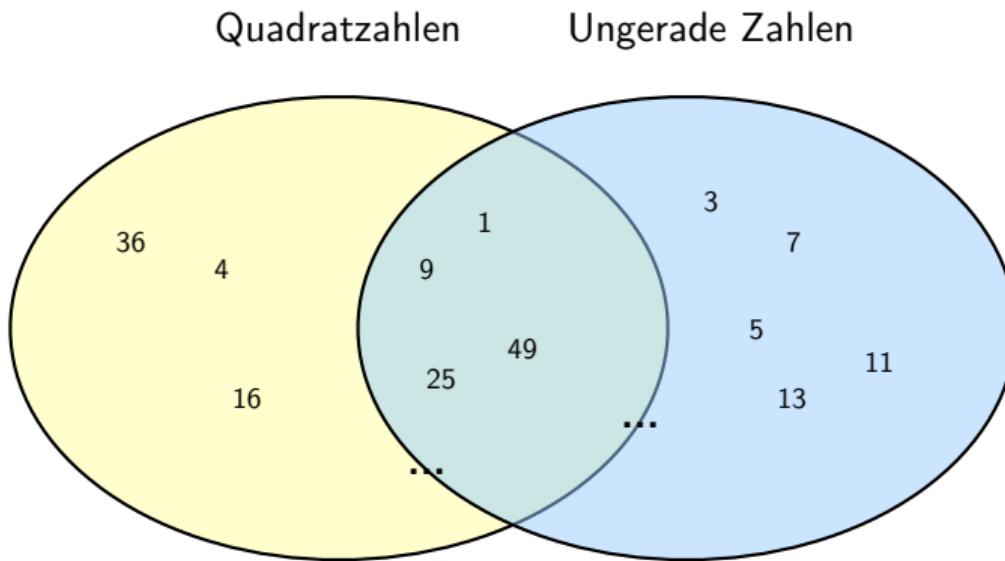
3. Aussagenlogik

4. Prädikatenlogik

5. Prolog

Venn-Diagramme

- Grafische Mengendarstellung
 - Mengen sind zusammenhängende Flächen
 - Überlappungen visualisieren gemeinsame Elemente
- Zeigen alle möglichen Beziehungen

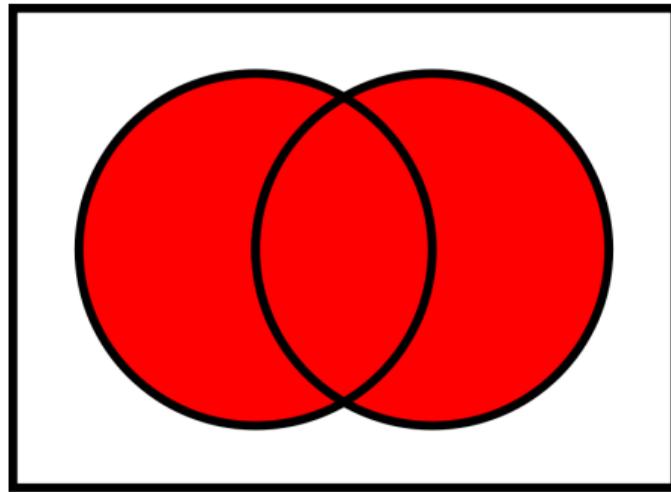


John Venn
(1834–1923)

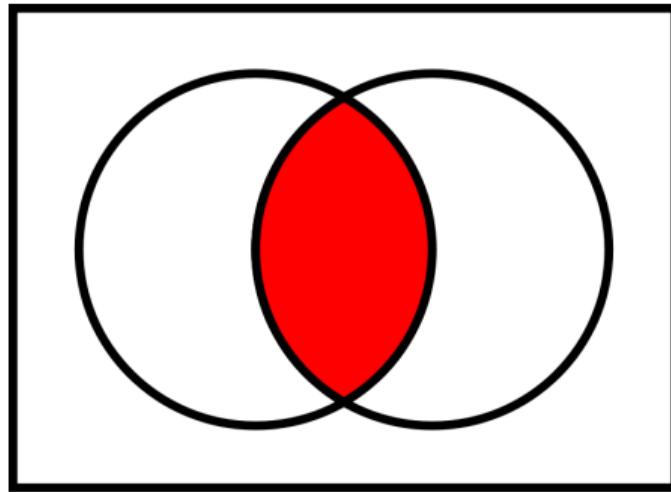
Annahme: Alle betrachteten Mengen sind Teilmengen einer gemeinsamen Trägermenge T .

Wichtige Mengenoperationen sind:

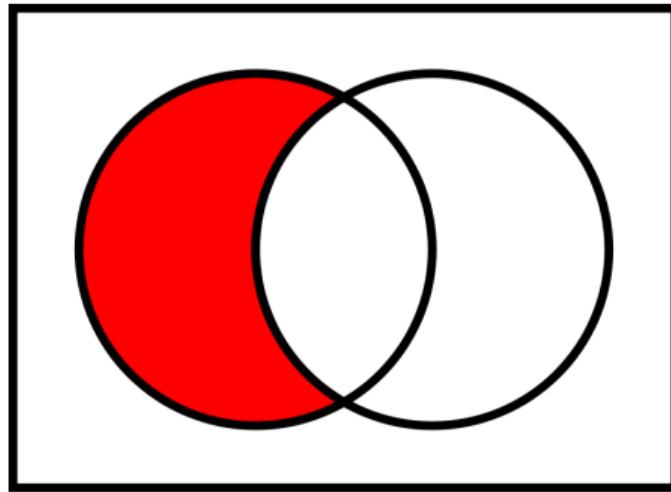
- Vereinigung
- Schnitt
- Differenz
- Komplement



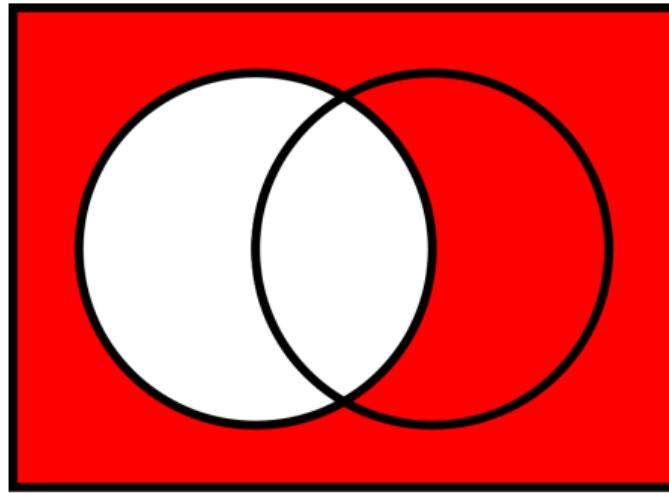
- $M_1 \cup M_2 = \{x \mid x \in M_1 \text{ oder } x \in M_2\}$
- $x \in M_1 \cup M_2$ gdw. $x \in M_1$ oder $x \in M_2$



- $M_1 \cap M_2 = \{x \mid x \in M_1 \text{ und } x \in M_2\}$
- $x \in M_1 \cap M_2$ gdw. $x \in M_1$ und $x \in M_2$



- $M_1 \setminus M_2 = \{x \mid x \in M_1 \text{ und } x \notin M_2\}$
- $x \in M_1 \setminus M_2$ gdw. $x \in M_1$ und $x \notin M_2$



- $\overline{M_1} = \{x \mid x \notin M_1\}$
- $x \in \overline{M_1}$ gdw. $x \notin M_1$

Achtung

Hier ist die implizite Annahme der Trägermenge T besonders wichtig.

Übung 2.7

1 Sei $T = \{1, 2, \dots, 12\}$,

$$M_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}, M_2 = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}.$$

Berechnen Sie die folgenden Mengen und visualisieren Sie diese in einem Venn-Diagramm.

- a $M_1 \cup M_2$
- b $M_1 \cap M_2$
- c $M_1 \setminus M_2$
- d $\overline{M_1}$
- e $\overline{M_2}$

2 Sei $T = \mathbb{N}$, $M_1 = \{3i \mid i \in \mathbb{N}\}$, $M_2 = \{2i + 1 \mid i \in \mathbb{N}\}$.

Geben Sie für die folgenden Mengen jeweils eine mathematische und eine umgangssprachliche Charakterisierung an.

- a $M_1 \cap M_2$
- b $M_1 \setminus M_2$
- c $M_1 \setminus \overline{M_2}$

Satz 2.8

Es seien M , P und S Teilmengen einer Trägermenge T . Dann gelten die folgenden Gleichungen:

- Kommutativgesetze

- $M \cup P = P \cup M$
- $M \cap P = P \cap M$

- Assoziativgesetze

- $M \cup (P \cup S) = (M \cup P) \cup S$
- $M \cap (P \cap S) = (M \cap P) \cap S$

- Distributivgesetze

- $M \cup (P \cap S) = (M \cup P) \cap (M \cup S)$
- $M \cap (P \cup S) = (M \cap P) \cup (M \cap S)$

- Gesetze von De Morgan

- $\overline{M \cup P} = \overline{M} \cap \overline{P}$
- $\overline{M \cap P} = \overline{M} \cup \overline{P}$

- Neutrale Elemente

- $M \cup \emptyset = M$
- $M \cap T = M$

- Inverse Elemente

- $M \cup \overline{M} = T$
- $M \cap \overline{M} = \emptyset$

- Absorbierende Elemente

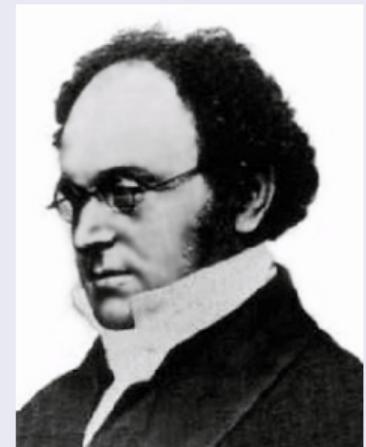
- $M \cup T = T$
- $M \cap \emptyset = \emptyset$

- Idempotenz

- $M \cup M = M$
- $M \cap M = M$

- Doppeltes Komplement

- $\overline{\overline{M}} = M$



Augustus
De Morgan
(1806-1871)

Menge Zusammenfassung von Elementen zu einem Ganzen

Operationen Vereinigung, Schnitt, Differenz, Komplement

Visualisierung Venn-Diagramme

Rechenregeln De Morgan, neutrale/inverse/absorbierende Elemente

Inhalt

1. Einführung

2. Mengen

3. Aussagenlogik

3.1 Syntax

3.2 Semantik

3.3 Schlussfolgerungsverfahren

4. Prädikatenlogik

5. Prolog

Einfachste in dieser Vorlesung betrachtete Logik

- begrenzte Ausdrucksstärke
- einfach zu verstehen und anzuwenden
- enthält verschiedene Konzepte, die auch in ausdrucksstärkeren Logiken vorkommen

Aussagenvariablen repräsentieren atomare Aussagen

Beispiel 3.1

$A \rightsquigarrow$ „Es regnet.“

Junktoren repräsentieren Zusammenhänge zwischen Aussagen

Beispiel 3.2

$A \rightarrow B \rightsquigarrow$ „Wenn es regnet, wird die Erde nass.“

- werden durch Großbuchstaben repräsentiert A, B, X, Y, \dots
- drücken Aussagen aus, die **wahr** oder **falsch** sein können
 - „Es regnet.“
 - „Paul liebt Paula.“
 - „Sokrates ist sterblich.“

Inhalt

1. Einführung

2. Mengen

3. Aussagenlogik

3.1 Syntax

3.2 Semantik

3.3 Schlussfolgerungsverfahren

4. Prädikatenlogik

5. Prolog

Lehre von wohlgeformten Ausdrücken

- Linguistik: Satzbau; Regeln zum Erzeugen von Sätzen aus Wörtern
- Logik: Regeln zum Erzeugen von Formeln aus vorgegebenen Symbolen

Beispiel 3.3

	syntaktisch falsch	syntaktisch richtig
Deutsch	geben . hat Mensch ? die	Heute ist schönes Wetter.
Mathematik	$+) 2 - \cdot (xy - 3 <$	$3 < (4 + 2) \cdot 5$

Definition 3.4 (Aussagenlogische Formel)

Sei V eine Menge von Aussagenvariablen.

- Jedes $X \in V$ ist eine aussagenlogische Formel.
- \mathbf{W} und \mathbf{F} sind aussagenlogische Formeln.
- Wenn φ und ψ aussagenlogische Formeln sind, dann auch
 - $(\neg\varphi)$ (Negation)
 - $(\varphi \wedge \psi)$ (Konjunktion)
 - $(\varphi \vee \psi)$ (Disjunktion)
 - $(\varphi \rightarrow \psi)$ (materiale Implikation)
 - $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ (materiale Äquivalenz)

Beispiel 3.5 (Formeln über der Variablenmenge $\{A, B, C, D, E\}$)

- | | | |
|-------------------------|--------------------------------|--|
| ■ $(A \wedge B)$ | ■ $(A \wedge (B \vee C))$ | ■ $(A \rightarrow ((B \wedge (C \leftrightarrow D)) \vee (D \rightarrow E)))$ |
| ■ $(\mathbf{F} \vee A)$ | ■ $(\neg(A \vee B))$ | ■ $(A \leftrightarrow (A \leftrightarrow D))$ |
| ■ $(\neg\mathbf{W})$ | ■ $(C \rightarrow (B \vee D))$ | ■ $((((A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (C \leftrightarrow D)) \rightarrow E)$ |

Übung 3.6

Seien A , B , C und D Aussagenvariablen.

Welche der folgenden Zeichenketten sind aussagenlogische Formeln?

1 $(A \rightarrow F)$

2 $(A \wedge (B \vee C))$

3 $(A \neg B)$

4 $((A \rightarrow C) \wedge (((\neg A) \rightarrow C) \rightarrow C))$

5 $((\vee B) \vee (C \wedge D))$

6 $(A \rightarrow (B \vee (\neg B))(C \vee (\neg C)))$

7 $A \wedge B \vee \neg C$

8 $(A \rightarrow A)$

9 $(A \wedge (\neg A))$

10 $(A \neg \wedge B)$

11 $((\neg A) \wedge B)$

12 $(((\neg A) \wedge) B)$

13 $(\neg(A \wedge B))$

14 $((A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((\neg A) \leftrightarrow (\neg B)))$

Um Klammern zu sparen, wird vereinbart:

- Äußerste Klammern um eine Formel können weggelassen werden.
- Gleiche Junktoren werden links-assoziativ gelesen.
- Vorrang unterschiedlicher Junktoren: $\neg \quad \gg \quad \wedge \quad \gg \quad \vee \quad \gg \quad \rightarrow \quad \gg \quad \leftrightarrow$

Beispiel 3.7

- $A \wedge B$ statt $(A \wedge B)$
- $A \rightarrow B \rightarrow C$ statt $((A \rightarrow B) \rightarrow C)$
- $A \wedge \neg B \rightarrow B \vee C$ statt $((A \wedge (\neg B)) \rightarrow (B \vee C))$

Übung 3.8

Entfernen Sie so viele Klammern wie möglich, ohne den Vorrang zu verändern.

- 1 $((A \wedge B) \vee ((C \wedge D) \rightarrow (A \vee C)))$
- 2 $((((A \wedge ((B \vee C) \wedge D)) \rightarrow A) \vee C)$
- 3 $(A \wedge (B \vee (C \wedge (D \rightarrow (A \vee C))))))$

Inhalt

1. Einführung

2. Mengen

3. Aussagenlogik

3.1 Syntax

3.2 Semantik

3.3 Schlussfolgerungsverfahren

4. Prädikatenlogik

5. Prolog

Lehre von der **Bedeutung** von Ausdrücken

- Voraussetzung: Ausdruck ist wohlgeformt (syntaktisch korrekt)
- Linguistik: Was bedeutet ein Begriff oder Satz?
- Logik: Ist ein Satz wahr oder falsch?

Beispiel 3.9

	immer wahr	immer falsch	kommt drauf an
Deutsch	Die Erde kreist um die Sonne.	Der Mensch x ist unsterblich.	Heute ist schönes Wetter.
Arithmetik	$4 + 2 = 6$	$x \cdot x < 0$	$x + 3 = 5$

- Aussagenvariablen erhalten Wert 0 oder 1
- Formel wird wahr oder falsch

Definition 3.10 (Interpretation in der AussagenLogik)

Eine **Interpretation** ist eine Funktion $\mathcal{I} : V \rightarrow \mathbb{B}$ mit

- einer Menge von Aussagenvariablen V
- der Boole'schen Menge $\mathbb{B} = \{0, 1\}$

Beispiel 3.11

$\{A \mapsto 0, B \mapsto 1\} \rightsquigarrow \text{„es regnet nicht, und die Erde wird nass“}$

Notation: Statt $\mathcal{I}(A) = 0$ schreibt man auch $A^{\mathcal{I}} = 0$.

Interpretation komplexer Formeln

$F^{\mathcal{I}}$	$W^{\mathcal{I}}$
0	1

$\varphi^{\mathcal{I}}$	0	1
$(\neg\varphi)^{\mathcal{I}}$	1	0

$(\varphi \wedge \psi)^{\mathcal{I}}$		
$\varphi^{\mathcal{I}}$	0	1
$\psi^{\mathcal{I}}$	0	0
0	0	0
1	0	1

$(\varphi \vee \psi)^{\mathcal{I}}$		
$\varphi^{\mathcal{I}}$	0	1
$\psi^{\mathcal{I}}$	0	1
0	0	1
1	1	1

$(\varphi \rightarrow \psi)^{\mathcal{I}}$		
$\varphi^{\mathcal{I}}$	0	1
$\psi^{\mathcal{I}}$	1	0
0	1	0
1	1	1

$(\varphi \leftrightarrow \psi)^{\mathcal{I}}$		
$\varphi^{\mathcal{I}}$	0	1
$\psi^{\mathcal{I}}$	1	0
0	1	0
1	0	1

Beispiel 3.12

Die Interpretation $\mathcal{I} = \{A \mapsto 1, B \mapsto 1, C \mapsto 0\}$ macht die Formel . . .

- B wahr;
- $A \wedge B$ wahr;
- $A \wedge C$ falsch;
- $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ wahr;
- $((A \wedge B) \vee (A \wedge C)) \rightarrow C$ falsch.

Übung 3.13

Finden Sie für die folgenden Formeln je zwei Interpretationen:

- eine, die die Formel wahr macht
- eine, die die Formel falsch macht

1 $A \wedge B \rightarrow C$

2 $(A \vee B) \wedge (A \vee C) \rightarrow (B \wedge C)$

3 $A \rightarrow B \leftrightarrow \neg B \rightarrow \neg A$

Definition 3.14 (Tautologie)

Eine Tautologie ist eine Formel, die in jeder Interpretation wahr ist.

Beispiel 3.15

- $\alpha \leftrightarrow \alpha$ (Identität)
- $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$ (Ausgeschlossener Widerspruch)
- $\alpha \vee \neg\alpha$ (Ausgeschlossenes Dritt)
- $\alpha \rightarrow \beta \leftrightarrow \neg\beta \rightarrow \neg\alpha$ (Kontraposition, Umkehrschluss)
- $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \neg\alpha$ (Reductio ad Absurandum, Widerspruchsbeweis)
- $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge \alpha \rightarrow \beta$ (Modus Ponens)
- $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge \neg\beta \rightarrow \neg\alpha$ (Modus Tollens)
- $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\neg\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \beta$ (Fallunterscheidung)

Definition 3.16 (Modell)

Eine Interpretation \mathcal{I} ist ein Modell für eine Formel φ ($\mathcal{I} \models \varphi$), wenn $\varphi^{\mathcal{I}} = 1$ gilt.

Beispiel 3.17

$\mathcal{I} = \{A \mapsto 1, B \mapsto 0\}$ ist Modell für $A \vee B$, aber nicht für $A \wedge B$.

Definition 3.18 (Erfüllbarkeit, Gültigkeit)

Eine Formel φ heißt erfüllbar, wenn sie ein Modell hat, sonst unerfüllbar.

Eine Formel φ heißt gültig ($\models \varphi$) wenn jede Interpretation ein Modell ist, sonst falsifizierbar.

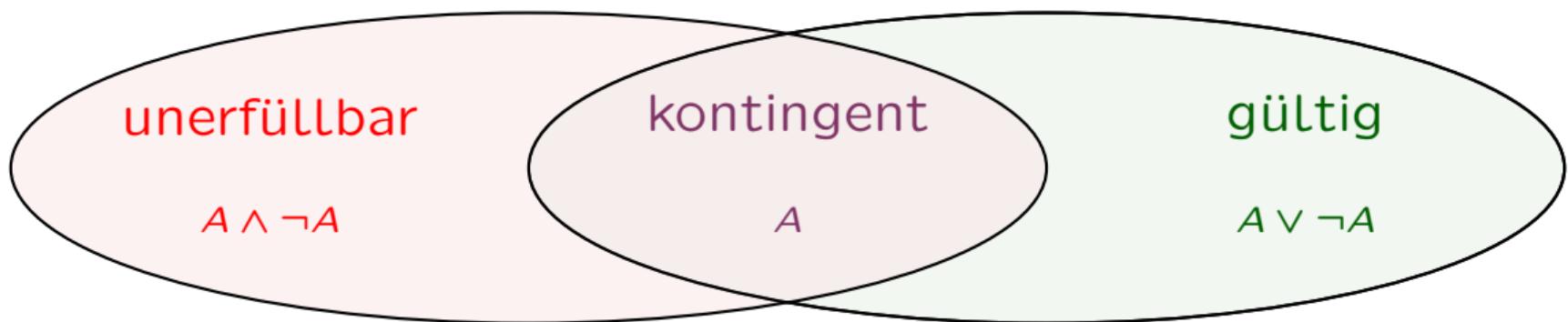
Beispiel 3.19

erfüllbar $A, A \vee B, A \wedge \neg B, A \leftrightarrow B$

gültig $A \vee \neg A, A \rightarrow A, A \leftrightarrow \neg(\neg A)$ (Tautologien)

falsifizierbar
Es gibt \mathcal{I} mit $\mathcal{I} \not\models \varphi$

erfüllbar
Es gibt \mathcal{I} mit $\mathcal{I} \models \varphi$



Definition 3.20 (Logische Implikation)

Eine aussagenlogische Formel φ impliziert (logisch) eine Formel ψ ($\varphi \models \psi$), wenn jedes Modell von φ auch ein Modell von ψ ist.

Beispiel 3.21

$$\begin{aligned}\alpha &\models \alpha \\ \alpha &\models \alpha \vee \beta \\ \alpha \wedge \beta &\models \alpha \\ \mathbf{F} &\models \alpha \quad \text{ex falso quodlibet} \\ \alpha &\models \mathbf{W}\end{aligned}$$

Definition 3.22 (Äquivalenz)

Zwei aussagenlogische Formeln φ und ψ sind (logisch) äquivalent ($\varphi \equiv \psi$), wenn jede Interpretation beiden Formeln denselben Wahrheitswert zuordnet, d. h. wenn für jedes \mathcal{I} gilt: $\varphi^{\mathcal{I}} = \psi^{\mathcal{I}}$.

Beispiel 3.23 (Ersetzung von Operatoren durch äquivalente Ausdrücke)

$$\begin{aligned}\alpha \leftrightarrow \beta &\equiv (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha) \\&\equiv \alpha \wedge \beta \vee \neg\alpha \wedge \neg\beta \\ \alpha \rightarrow \beta &\equiv \neg\alpha \vee \beta \\ \alpha \wedge \beta &\equiv \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta) \\ \alpha \vee \beta &\equiv \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)\end{aligned}$$

Satz 3.24

Es seien α , β und γ aussagenlogische Formeln. Dann gelten die folgenden Äquivalenzen:

■ Kommutativgesetze

- $\alpha \vee \beta \equiv \beta \vee \alpha$
- $\alpha \wedge \beta \equiv \beta \wedge \alpha$

■ Assoziativgesetze

- $\alpha \vee (\beta \vee \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \vee \gamma$
- $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$

■ Distributivgesetze

- $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$
- $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \equiv (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$

■ Gesetze von De Morgan

- $\neg(\alpha \vee \beta) \equiv \neg\alpha \wedge \neg\beta$
- $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta$

■ Neutrale Elemente

- $\alpha \vee \mathbf{F} \equiv \alpha$
- $\alpha \wedge \mathbf{W} \equiv \alpha$

■ Inverse Elemente

- $\alpha \vee \neg\alpha \equiv \mathbf{W}$
- $\alpha \wedge \neg\alpha \equiv \mathbf{F}$

■ Absorbierende Elemente

- $\alpha \vee \mathbf{W} \equiv \mathbf{W}$
- $\alpha \wedge \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$

■ Idempotenz

- $\alpha \vee \alpha \equiv \alpha$
- $\alpha \wedge \alpha \equiv \alpha$

■ Doppelte Negation

- $\neg\neg\alpha \equiv \alpha$

Inhalt

1. Einführung

2. Mengen

3. Aussagenlogik

3.1 Syntax

3.2 Semantik

3.3 Schlussfolgerungsverfahren

4. Prädikatenlogik

5. Prolog

- Bestimmung der Eigenschaften einer Formel φ
 - gültig (φ ist eine Tautologie; jede Interpretation ist ein Modell)
 - erfüllbar (Es gibt ein Modell für φ)
 - falsifizierbar (Es gibt eine Interpretation, die kein Modell für φ ist)
 - unerfüllbar (Es gibt keine Modelle für φ)
- Bestimmung, ob eine Formel φ eine Formel ψ (logisch) impliziert

Beispiel 3.25 (Reductio ad Absurdum)

$(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A$	Ersetzung von \rightarrow (zweimal)
$(\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B) \rightarrow \neg A$	Ersetzung von \rightarrow
$\neg((\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)) \vee \neg A$	De Morgan
$\neg(\neg A \vee B) \vee \neg(\neg A \vee \neg B) \vee \neg A$	De Morgan (zweimal)
$(A \wedge \neg B) \vee (A \wedge B) \vee \neg A$	Distributivität
$(A \wedge (\neg B \vee B)) \vee \neg A$	Ausgeschlossenes Drittes
$(A \wedge W) \vee \neg A$	W ist neutrales Element für \wedge
$A \vee \neg A$	Ausgeschlossenes Drittes
W	

Nachteile:

- Transformationen müssen geraten werden.
- Wenn φ nicht gezeigt werden kann, folgt nicht, dass φ nicht gültig ist.

Beispiel 3.26 (Reductio ad Absurdum)

A	B	$A \rightarrow B$	$A \rightarrow \neg B$	$(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B)$	$\neg A$	$(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	0	1

Nachteile:

- ineffizient, besonders bei vielen Variablen („exponentielle Komplexität“)
- redundant, da viele Varianten keinen Einfluss auf das Ergebnis haben

Übung 3.27

Zeigen Sie, dass die Formel φ eine Tautologie ist:

$$\varphi = A \wedge B \rightarrow C \leftrightarrow A \rightarrow (B \rightarrow C)$$

Verwenden Sie

- 1 Äquivalenzumformungen,
- 2 eine Wahrheitstabelle.

Inhalt

1. Einführung

2. Mengen

3. Aussagenlogik

3.1 Syntax

3.2 Semantik

3.3 Schlussfolgerungsverfahren

3.3.1 Resolution

3.3.2 Tableaus

4. Prädikatenlogik

5. Prolog

- John Alan Robinson: *A machine-oriented logic based on the resolution principle* (1965)
- Erfüllbarkeitstest für Formel φ
- Erfüllbarkeitstest entscheidet auch
 - Gültigkeit
 $\models \varphi$ gilt gdw. $\neg\varphi$ unerfüllbar ist.
 - (logische) Implikation
 $\varphi \models \psi$ gilt gdw. $\varphi \wedge \neg\psi$ unerfüllbar ist.



J. A. Robinson
(1930–2016)

Definition 3.28 (Literal)

Ein Literal ist eine (möglicherweise negierte) Aussagenvariable.

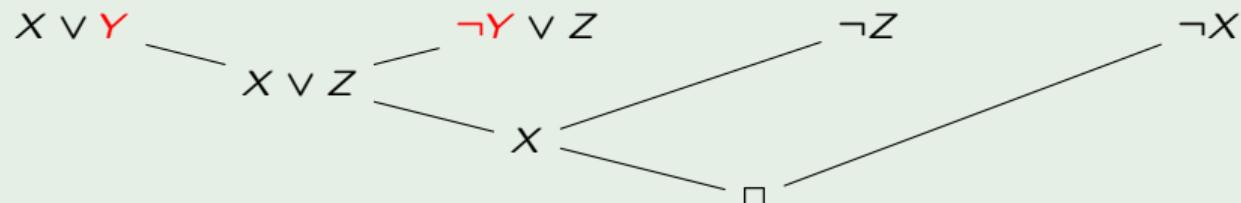
Beispiel 3.29

Über der Variablenmenge $\{A, B\}$ ist die Menge der möglichen Literale $\{A, \neg A, B, \neg B\}$.

Finde Widerspruch in φ

- betrachte φ als Konjunktion von Disjunktionen (Klauseln) von Literalen
- suche Paare von Klauseln C_1, C_2 mit gegensätzlichen Literalen $X, \neg X$
- erzeuge Resolvente C_3 durch Vereinigen der Elternklauseln C_1 und C_2 und Entfernen von X und $\neg X$
 - C_3 ist nicht äquivalent zu $C_1 \wedge C_2$!
 - $C_1 \wedge C_2$ erfüllbar $\rightsquigarrow C_3$ erfüllbar
 - C_3 unerfüllbar $\rightsquigarrow C_1 \wedge C_2$ unerfüllbar
- leere Klausel \square : Widerspruch

Beispiel 3.30 ($\varphi = (X \vee Y) \wedge (\neg Y \vee Z) \wedge \neg Z \wedge \neg X$)



Warum funktioniert das Resolutionsprinzip?

Gegeben: zwei Klauseln $C_1 = X \vee Y$ und $C_2 = \neg Y \vee Z$.

Gesucht: Modell für $C_1 \wedge C_2$.

In einer Interpretation \mathcal{I} ist $Y^{\mathcal{I}}$ entweder 0 oder 1.

- wenn $Y^{\mathcal{I}} = 1$ gilt, folgt $C_1^{\mathcal{I}} = 1$, und $C_2^{\mathcal{I}} = 1$ gilt gdw. $Z^{\mathcal{I}} = 1$;
- wenn $Y^{\mathcal{I}} = 0$ gilt, folgt $C_2^{\mathcal{I}} = 1$, und $C_1^{\mathcal{I}} = 1$ gilt gdw. $X^{\mathcal{I}} = 1$.

Es folgt:

- Jedes Modell für $C_1 \wedge C_2$ ist auch Modell für $C_3 = X \vee Z$.
- Wenn $C_1 \wedge C_2$ erfüllbar ist, dann auch $C_1 \wedge C_2 \wedge C_3$.
- Wenn $C_1 \wedge C_2 \wedge C_3$ unerfüllbar ist, dann auch $C_1 \wedge C_2$.

Definition 3.31 (Konjunktive Normalform)

Eine aussagenlogische Formel φ ist in [konjunktiver Normalform \(KNF\)](#), wenn φ eine Konjunktion von Disjunktionen von Literalen ist.

Beispiel 3.32

$(X \vee Y) \wedge (\neg Y \vee Z) \wedge \neg Z \wedge \neg X$ ist in KNF;

$(X \wedge Y) \vee \neg(\neg Y \vee Z)$ ist [nicht](#) in KNF.

Satz 3.33

Jede aussagenlogische Formel kann in eine äquivalente Formel in KNF transformiert werden.

Verfahren:

1.a) eliminiere materiale Äquivalenz

$$\varphi \leftrightarrow \psi \rightsquigarrow (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$$

b) eliminiere materiale Implikation

$$\varphi \rightarrow \psi \rightsquigarrow \neg\varphi \vee \psi$$

2. Gesetze von De Morgan

$$\neg(\varphi \vee \psi) \rightsquigarrow \neg\varphi \wedge \neg\psi$$

$$\neg(\varphi \wedge \psi) \rightsquigarrow \neg\varphi \vee \neg\psi$$

3.a) eliminiere doppelte Negation

$$\neg\neg\varphi \rightsquigarrow \varphi$$

b) eliminiere negierte Boole-Konstanten

$$\neg W \rightsquigarrow F$$

$$\neg F \rightsquigarrow W$$

4. Distributivgesetz

$$\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \rightsquigarrow (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$$

5. Assoziativgesetze

$$\varphi \vee (\psi \vee \chi) \rightsquigarrow \varphi \vee \psi \vee \chi$$

$$\varphi \wedge (\psi \wedge \chi) \rightsquigarrow \varphi \wedge \psi \wedge \chi$$

Beispiel 3.34

$$(X \wedge Y) \vee \neg(\neg Y \vee Z) \rightsquigarrow (X \vee Y) \wedge (Y \vee \neg Y) \wedge (X \vee \neg Z) \wedge (Y \vee \neg Z)$$

Übung 3.35

Transformieren Sie die folgenden Formeln in KNF:

- 1 $(X \vee Y) \wedge (A \wedge B)$
- 2 $(X \vee Y) \rightarrow (A \vee B)$
- 3 $X \vee (\neg A \wedge \neg(B \wedge \neg C))$

Definition 3.36 (Klausel)

Eine **Klausel** ist eine als Menge geschriebene Disjunktion von Literalen.

Aufgrund von Idempotenz und Kommutativität ist es möglich und sinnvoll, Disjunktionen als Mengen zu betrachten.

Beispiel 3.37

$$(X \vee \neg Y \vee Z) \rightsquigarrow \{X, \neg Y, Z\}$$

Jede aussagenlogische Formel (in KNF) kann als Menge von Klauseln betrachtet werden.

Beispiel 3.38

$$\begin{aligned}\varphi &= (X \vee Y) \wedge (\neg Y \vee Z) \wedge \neg Z \wedge \neg X \\ \mathcal{K}(\varphi) &= \{\{X, Y\}, \{\neg Y, Z\}, \{\neg Z\}, \{\neg X\}\}\end{aligned}$$

Intuitiv: \wedge zwischen Klauseln; \vee zwischen Literalen

Definition 3.39 (Resolvente)

Sei V eine Menge von Aussagenvariablen und $X \in V$.

Seien $C_1 = \{X, L_{11}, L_{12}, L_{13}, \dots\}$ und $C_2 = \{\neg X, L_{21}, L_{22}, L_{23}, \dots\}$ Klauseln, wobei alle L_i Literale über V sind.

Dann ist $C_3 = \{L_{11}, L_{12}, L_{13}, \dots, L_{21}, L_{22}, L_{23}, \dots\}$ eine **Resolvente** von C_1 und C_2
($\{C_1, C_2\} \vdash^* C_3$).

Kann eine Klausel C aus einer Klauselmenge S durch (beliebig viele, einschließlich 0) Resolutionsschritte hergeleitet werden, schreiben wir $S \vdash^* C$.

Übung 3.40

Finden Sie für die Klauselmenge S möglichst viele Resolventen.

$$S = \{\{A, C\}, \{A, \neg B\}, \{\neg A, \neg B\}, \{A, \neg C\}\}$$

Eingabe: AL-Formel φ

Ausgabe: „erfüllbar“ oder „unerfüllbar“

```
1:  $\varphi' := \text{knf}(\varphi)$ 
2: initialisiere  $S$  mit Disjunktionen von  $\varphi'$ 
3: while es existieren  $\{C_1, C_2\} \subseteq S$  mit  $\{C_1, C_2\} \vdash C_{\text{neu}}$  und  $C_{\text{neu}} \notin S$  do
4:   if  $C_{\text{neu}} = \square$  then
5:     return „unerfüllbar“
6:   else
7:      $S := S \cup \{C_{\text{neu}}\}$ 
8: return „erfüllbar“
```

Korrektheit

Satz 3.41 (Korrektheit der Resolution)

Sei S eine Klauselmenge. Aus $S \vdash^* C$ folgt $S \models C$.

Beweis.

- Gilt $S \vdash C$, ist jedes Modell für S auch Modell für C .
- Mit Induktion: $S \vdash^* C$ impliziert $S \models C$. □

Korollar 3.42

Wenn $S \vdash^* \square$ gilt, ist S unerfüllbar.

Beweis.

- Ist S erfüllbar, dann auch $S \cup \{C\}$.
- Umgekehrt: Ist $S \cup \{C\}$ unerfüllbar, dann auch S .
- Die leere Klausel \square ist unerfüllbar. □

Satz 3.43 (Widerlegungsvollständigkeit der Resolution)

Ist eine Klauselmenge S unerfüllbar, gilt $S \vdash^* \square$.

Beweis.

Induktion über Anzahl n der Aussagenvariablen in S .

$n = 0$ Dann gilt $S = \{\square\}$ und damit $S \vdash^* \square$.

- $n \rightsquigarrow n + 1$
- Sei S eine unerfüllbare Klauselmenge mit den Variablen A_1, \dots, A_n, A_{n+1} .
 - Definiere S_1 : Entferne aus S alle Klauseln, die das Literal A_{n+1} enthalten, und aus verbleibenden Klauseln alle Literale $\neg A_{n+1}$. (Intuitiv: $A_{n+1} \mapsto 1$)
Definiere S_0 : Entferne aus S alle Klauseln, die das Literal $\neg A_{n+1}$ enthalten, und aus verbleibenden Klauseln alle Literale A_{n+1} . (Intuitiv: $A_{n+1} \mapsto 0$)
 - S_1 und S_0 sind unerfüllbar (sonst wäre auch S erfüllbar) und enthalten n Variablen.
 - **Induktionsvoraussetzung:** $S_1 \vdash^* \square$ und $S_0 \vdash^* \square$.
 - Aus $S_1 \vdash^* \square$ folgt $S \vdash^* \{\neg A_{n+1}\}$; aus $S_0 \vdash^* \square$ folgt $S \vdash^* \{A_{n+1}\}$.
 - Durch Resolution von $\{A_{n+1}\}$ und $\{\neg A_{n+1}\}$ folgt $S \vdash^* \square$.



Beispiel 3.44

Sei $S = \{\{A_1, A_2\}, \{\neg A_1\}, \{\neg A_2\}\}$

- $S_1 = \{\{\neg A_1\}, \square\}$
 - Aus $\square \in S_1$ folgt $S_1 \vdash^* \square$
- $S_0 = \{\{A_1\}, \{\neg A_1\}\}$
 - $S_0 \vdash^* \square$ folgt per Induktion:
 - $S_{01} = \{\square\}$; es folgt $S_0 \vdash^* \{\neg A_1\}$
 - $S_{00} = \{\square\}$; es folgt $S_0 \vdash^* \{A_1\}$
 - Durch Resolution aus $\{A_1\}$ und $\{\neg A_1\}$ folgt $S_0 \vdash^* \square$.
- $S \vdash^* \square$ folgt per Induktion:
 - Aus $S_0 \vdash^* \square$ folgt $S \vdash^* \{A_2\}$
 - Aus $S_1 \vdash^* \square$ folgt $S \vdash^* \{\neg A_2\}$
 - Durch Resolution aus $\{A_2\}$ und $\{\neg A_2\}$ folgt $S \vdash^* \square$.

Satz 3.45 (Terminierung der Resolution)

Der Resolutions-Algorithmus terminiert für jede Eingabe.

Beweis.

- Neue Klauseln enthalten nur Literale der Eingabe. (Endliches Vokabular)
- Nur **neue** Klauseln werden hinzugefügt.
- Klauseln werden nie entfernt.



Laufzeit: worst-case exponentiell (Formel der Länge $n \rightsquigarrow 2^n$ Schritte)

Prämissen:

- 1 Wenn Hans zum Meeting eingeladen wird und nicht auf Dienstreise ist, nimmt er am Meeting teil.
 $\neg R \wedge E \rightarrow M \rightsquigarrow R \vee \neg E \vee M$
- 2 Wenn der Chef Hans beim Meeting sehen will, lädt er ihn auch ein.
 $C \rightarrow E \rightsquigarrow \neg C \vee E$
- 3 Wenn der Chef Hans nicht beim Meeting sehen will, wird Hans bald gekündigt.
 $\neg C \rightarrow K \rightsquigarrow C \vee K$
- 4 Hans hat nicht am Meeting teilgenommen.
 $\neg M$
- 5 Hans ist nicht auf einer Dienstreise.
 $\neg R$

Konklusion:

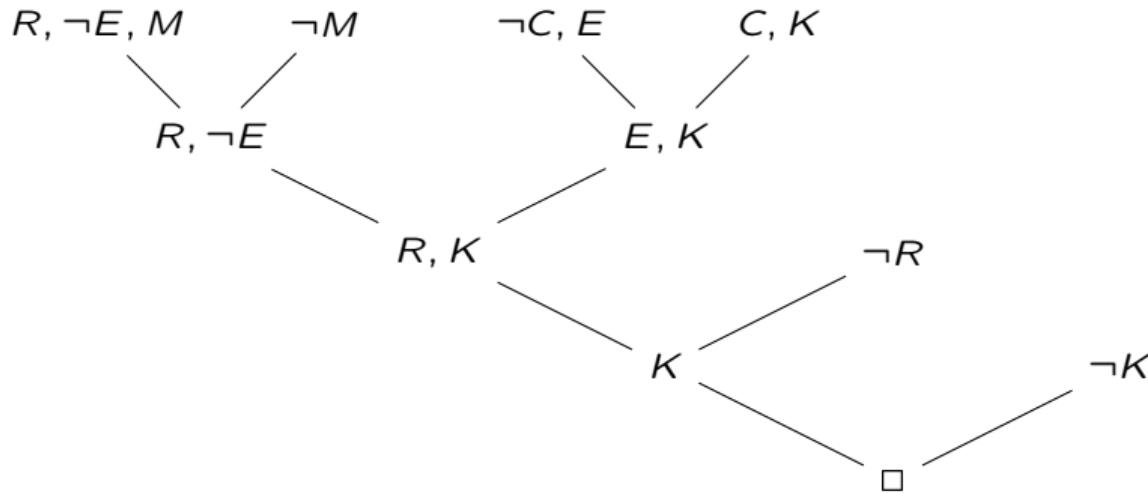
- 6 Hans wird bald gekündigt.
 K

- Implizieren die Prämissen 1–5 die Konklusion 6?
 - Logisch: Ist jedes Modell von 1–5 auch ein Modell von 6?
 $1 \wedge 2 \wedge 3 \wedge 4 \wedge 5 \models 6$
- Umgekehrt: Existiert ein Modell von 1–5, im dem 6 nicht gilt?
 - Logisch: Ist $1 \wedge 2 \wedge 3 \wedge 4 \wedge 5 \wedge \neg 6$ erfüllbar?
Wenn ja, gilt die Implikation nicht.
 - Ist $1 \wedge 2 \wedge 3 \wedge 4 \wedge 5 \wedge \neg 6$ unerfüllbar, gilt die Implikation.
- Teste mittels Resolution die Erfüllbarkeit von

$$\{\{R, \neg E, M\}, \{\neg C, E\}, \{C, K\}, \{\neg M\}, \{\neg R\}, \{\neg K\}\}$$

Bestimmung des Schicksals von Hans durch Resolution

$$\{\{R, \neg E, M\}, \{\neg C, E\}, \{C, K\}, \{\neg M\}, \{\neg R\}, \{\neg K\}\}$$



Die Folgerung gilt, d. h. Hans wird leider entlassen...

Test mit Wahrheitstabelle

R	E	M	C	K	1 ($R, \neg E, M$)	2 ($\neg C, E$)	3 (C, K)	4 ($\neg M$)	5 ($\neg R$)	6 (K)	$1 \wedge \dots \wedge 5 \wedge \neg 6$
0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0
⋮					⋮						⋮
1	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0
⋮					⋮						⋮
1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0

- Die einzige Interpretation, die die Klauseln 1–5 wahr macht (Zeile 2), macht auch Klausel 6 wahr.
- Die letzte Spalte ist immer 0.
- Die Konklusion folgt aus den Prämissen.

Wenn mehrere Resolventen möglich sind:

- Nicht jeder Weg ist gleich schnell
- ... aber alle Wege führen zum Ziel.

Definition 3.46 (Don't-care-Nichtdeterminismus)

Ein Algorithmus heißt **don't-care-nichtdeterministisch**, wenn jede von mehreren möglichen nichtdeterministischen Entscheidungen zum korrekten Ergebnis führt.

In don't-care-nichtdeterministischen Algorithmen müssen einmal getroffene Entscheidungen nie rückgängig gemacht werden (Backtracking).

Auswahl der Elternklauseln ist entscheidend für Effizienz

Optimierungen:

- Ignoriere Tautologien $\{X, \neg X, \dots\}$
- Ignoriere C_1 , wenn ein $C_2 \subset C_1$ existiert

Heuristiken:

- Priorisiere kleine Klauseln
- Priorisiere Klauseln mit hoher Ableitungstiefe \rightsquigarrow Depth-first-Suche

Einschränkung auf Spezialfälle, z. B. Horn-Formeln

- **Horn-Klausel:** Höchstens ein positives Literal
- Horn-Regel: $X \wedge Y \wedge Z \wedge \dots \rightarrow W$
- nützlich für Regel-basiertes Schließen ([Prolog](#))
- Laufzeit: quadratisch (n^2 Schritte)
 - mit optimierten Datenstrukturen: linear (n Schritte)

Übung 3.47

Für einen Juwelenraub gibt es genau drei Verdächtige: Anna, Bert und Claus. Über sie ist das Folgende bekannt (**Prämissen**):

- 1 Mindestens einer der Verdächtigen ist schuldig.
- 2 Wenn Anna schuldig ist, hatte sie genau einen der Verdächtigen als Komplizen.
- 3 Wenn Bert unschuldig ist, dann auch Claus.
- 4 Wenn genau zwei Verdächtige schuldig sind, ist Claus einer von ihnen.
- 5 Wenn Claus unschuldig ist, ist Anna schuldig.

Inspektor Craig vermutet (**Konklusion**):

- 6 Bert und Claus sind schuldig.
-
- a Formalisieren Sie die Aussagen in Aussagenlogik und bilden Sie die Konjunktion von Prämissen und Negation der Konklusion.
 - b Transformieren Sie die sich ergebende Formel in die KNF.
 - c Testen Sie durch Resolution, ob die Konklusion aus den Prämissen folgt.

Inhalt

1. Einführung

2. Mengen

3. Aussagenlogik

3.1 Syntax

3.2 Semantik

3.3 Schlussfolgerungsverfahren

3.3.1 Resolution

3.3.2 Tableaus

4. Prädikatenlogik

5. Prolog

- Erfüllbarkeitstest für aussagenlogische Formeln
- Evert Willem Beth: *Semantic entailment and formal derivability* (1955)



E. W. Beth
(1908–1964)

Anderer Ansatz für Erfüllbarkeitstest

Resolution: suche einen Widerspruch

Tableau: suche ein Modell

- erzeugt Tabellen-artige Struktur, bei der Spalten aufgeteilt werden
~~> „Tableau“
- andere Sichtweise: Baumstruktur

- Jede Spalte n steht für eine Interpretation \mathcal{I}_n
- Jede Zeile einer Spalte enthält eine Formel, die \mathcal{I}_n erfüllen muss
- Beginne mit der Ausgangsformel χ und einer Spalte
- Regeln brechen komplexe Formeln auf einfachere herunter
„Wenn $\varphi \wedge \psi$ vorhanden ist, aber nicht φ und ψ , füge φ und ψ hinzu.“
 - Bei mehreren Möglichkeiten: Teile Spalte auf
- Clash beschreibt Situation, in denen ein Widerspruch vorliegt
„ φ und $\neg\varphi$ sind vorhanden.“
 - Clashes gibt es zwischen Formeln in der aktuellen Spalte und den darüberliegenden
- Ergebnis:
 - Wenn jede Spalte einen Clash enthält, gibt es kein Modell
 $\rightsquigarrow \chi$ ist unerfüllbar
 - Wenn keine Regel mehr anwendbar ist (Tableau ist vollständig) und mindestens eine Spalte Clash-frei ist, gibt es ein Modell
 $\rightsquigarrow \chi$ ist erfüllbar

Vorbedingung „Wenn $\varphi \wedge \psi$ vorhanden ist. . .“

- Welche Formel ist zu verarbeiten?

Anwendbarkeitsbedingung „. . . aber nicht φ und ψ , . . .“

- Wann ist Regel nicht mehr anwendbar?
(\rightsquigarrow Terminierung)
- bezieht sich auf aktuelle Spalte und darüberliegende

Nachbedingung „. . . füge φ und ψ hinzu.“

- Wie ist Formel zu verarbeiten?

Regeln können nicht-deterministisch sein:

- „Wenn $\varphi \vee \psi$ enthalten ist. . . , füge φ oder ψ hinzu“
- Teile aktuelle Spalte, teste φ in einer Spalte, ψ in der anderen

Definition 3.48 (Negations-Normalform)

Eine aussagenlogische Formel ist in **Negations-Normalform (NNF)** wenn als binäre Junktoren nur \wedge und \vee enthalten sind und Negation nur direkt vor Aussagenvariablen vorkommt.

Satz 3.49

Jede AL-Formel kann in NNF transformiert werden.

Beweis.

Verfahren:

- 1 Elimination von \leftrightarrow und \rightarrow
- 2 Anwendung der Gesetze von De Morgan
- 3 Entfernung doppelter Negation

(Wie für KNF.)



\wedge -Regel Wenn es ein S_i gibt mit $\varphi \wedge \psi \in S_i$
und $\{\varphi, \psi\} \not\subseteq S_i$
dann $S_i := S_i \cup \{\varphi, \psi\}$

\vee -Regel Wenn es ein S_i gibt mit $\varphi \vee \psi \in S_i$
und $\{\varphi, \psi\} \cap S_i = \emptyset$
dann $S_i := S_i \cup \{\varphi\}$ und $S_{\text{neu}} := S_i \cup \{\psi\}$

Eingabe: AL-Formel φ

Ausgabe: „erfüllbar“ oder „unerfüllbar“

- 1: $\varphi' := \text{nnf}(\varphi)$
- 2: initialisiere S_0 mit $\{\varphi'\}$
- 3: **while** eine Regel R ist auf ein $\psi \in S_i$ anwendbar **do**
- 4: wende R auf ψ an
- 5: **if** jedes S_i enthält einen Clash **then**
- 6: **return** „unerfüllbar“
- 7: **else**
- 8: **return** „erfüllbar“

Beispiel: Bestimmung des Schicksals von Hans mit Tableau

Prämissen: $(R \vee \neg E \vee M) \wedge (\neg C \vee E) \wedge (C \vee K) \wedge \neg M \wedge \neg R$

Konklusion: K

Zeile					Regel
1	$(R \vee \neg E \vee M) \wedge (\neg C \vee E) \wedge (C \vee K) \wedge \neg M \wedge \neg R \wedge \neg K$				Eingabe
2	$R \vee \neg E \vee M$				1: \wedge
3	$\neg C \vee E$				
4	$C \vee K$				
5	$\neg M$				
6	$\neg R$				
7	$\neg K$				
8	C				$K \notin 7$
9	E				4: \vee
10	$\neg C \notin 8$	$R \notin 6$	$\neg E \notin 9$	$M \notin 5$	3: \vee 2: \vee

Jede Spalte enthält einen Clash

⇒ Formel $1 \wedge 2 \wedge 3 \wedge 4 \wedge 5 \wedge \neg 6$ ist unerfüllbar

⇒ Prämissen 1–5 implizieren die Konklusion 6

- **Vorrang** beachten: Formeln von „außen“ nach „innen“ abarbeiten
- **Clash**: nur zwischen aktueller Spalte und den darüberliegenden
 - Spalte steht logisch für Menge aller Formeln, die in ihr und den darüberliegenden Spalten enthalten sind
- **Effizienz**: Wenn mehrere Regeln anwendbar sind: **\wedge -Regel zuerst**
 - sonst: \wedge -Regel in jeder neuen Spalte anwendbar \rightsquigarrow Ineffizienz
 - Beispiel: $\{A \wedge B, \neg C \wedge \neg D, \neg A \vee \neg B \vee C \vee D\}$
- **Effizienz**: \vee -Regel so anwenden, dass möglichst wenig offene Spalten verbleiben
 - Beispiel: $\{\neg A, A \vee B, C \vee D\} \rightsquigarrow$ zuerst $A \vee B$
- Transformation von NNF in **KNF** ist **kontraproduktiv**
 - nach erstem Schritt wird nur \vee -Regel angewendet \rightsquigarrow Ineffizienz
 - Beispiel: vergleiche NNF $\neg A \vee B \wedge \neg C \vee \neg B \wedge C$ (3 Spalten) mit KNF $(\neg A \vee B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee \neg C)$ (7 Spalten)

Übung 3.50

Zeigen Sie mit einem Tableau, dass Bert und Claus schuldig sind.

$$\begin{array}{c} (A \vee B \vee C) \quad \wedge \quad (\neg A \vee (B \wedge \neg C) \vee (\neg B \wedge C)) \quad \wedge \\ (B \vee \neg C) \quad \wedge \quad (\neg A \vee \neg B \vee C) \quad \wedge \quad (C \vee A) \quad \wedge \quad (\neg B \vee \neg C) \end{array}$$

Satz 3.51 (Korrektheit)

Wenn das vollständige Tableau für φ eine Clash-freie Spalte enthält, ist φ erfüllbar.

Beweis.

Idee: Literale der Clash-freien Spalte S bilden ein Modell \mathcal{M} .

- Für alle Variablen X : Wenn $X \in S$, dann $X^{\mathcal{M}} = 1$; sonst $X^{\mathcal{M}} = 0$
~~~ Jede allein vorkommende Variable wird wahr.
- Clash-frei: für keine Variable  $X$  ist  $X$  und  $\neg X$  enthalten  
~~~ Jedes allein vorkommende negierte Literal wird wahr.
- Vollständig:
 - für jede Konjunktion $x \wedge \psi \in S$ gilt auch $\{x, \psi\} \subseteq S$
 - für jede Disjunktion $x \vee \psi \in S$ gilt auch $\{x, \psi\} \cap S \neq \emptyset$
- Induktion: Für jedes $\psi \in S$ gilt: $\mathcal{M} \models \psi$



Satz 3.52 (Vollständigkeit)

Wenn φ erfüllbar ist, enthält das vollständige Tableau für φ eine Clash-freie Spalte.

Beweis.

Idee: „Regelanwendung erhält Erfüllbarkeit.“

Wenn eine Formelmenge S vor Regelanwendung erfüllbar war, kann die Regel so angewendet werden, dass S auch nach der Anwendung noch erfüllbar ist.

\wedge -Regel Wenn $\mathcal{M} \models \psi \wedge \chi$ gilt, gilt auch $\mathcal{M} \models \psi$ und $\mathcal{M} \models \chi$.

\vee -Regel Wenn $\mathcal{M} \models \psi \vee \chi$ gilt, gilt auch $\mathcal{M} \models \psi$ oder $\mathcal{M} \models \chi$.

Erfüllbare Mengen enthalten keinen Clash.



Definition 3.53 (Teilformel)

Sei φ eine aussagenlogische Formel.

Die Formel ψ ist **Teilformel** von φ , wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- $\varphi = \psi$
- $\varphi = \neg x$ und ψ ist Teilformel von x
- $\varphi = x_1 \circ x_2$ und ψ ist Teilformel von x_1 oder x_2
(mit $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$)

Beispiel 3.54 ($\varphi = A \wedge \neg(B \vee \neg A) \vee (A \rightarrow \neg C)$)

Die Menge der Teilformeln von φ ist

$\{\varphi, A \wedge \neg(B \vee \neg A), A \rightarrow \neg C, A, \neg(B \vee \neg A), B \vee \neg A, B, \neg A, \neg C, C\}$.

Satz 3.55 (Terminierung)

Der Tableau-Algorithmus terminiert für jede Formel φ nach endlich vielen Schritten.

Beweis.

- Es gibt nur endlich viele Teilformeln von $\text{nnf}(\varphi)$, also ein endliches Vokabular.
- Jede Regelanwendung fügt nur Teilformeln zur Formelmenge hinzu.
- Auf jede Teilformel wird in jeder Spalte höchstens einmal eine Regel angewendet.
- Die Anzahl der Spalten ist beschränkt durch die Anzahl der Disjunktionen in $\text{nnf}(\varphi)$.
- Formeln werden nie entfernt.



- sind mehrere Regeln anwendbar, ist die Auswahl der nächsten Regel **don't-care-nichtdeterministisch**
 - Jede Auswahl führt zur Lösung
- die Auswahl der Alternative durch die \vee -Regel ist **don't-know-nichtdeterministisch**
 - Finden der Lösung kann von „richtiger“ Alternative abhängen
 - Jede Alternative muss getestet werden

- Anzahl der Spalten kann exponentiell in der Größe von φ sein
 - Beispiel: $\varphi = (A \vee B) \wedge (C \vee D) \wedge (E \vee F)$
- Für Zeit- und Platz-Effizienz: Erzeuge Tableau [depth-first](#)
 - Halte nur eine Spalte gleichzeitig im Speicher
 - Wende dort alle möglichen Regeln an
 - Spalte ist Clash-frei und vollständig: Ausgabe „erfüllbar“
 - Spalte enthält Clash: Versuche nächste Spalte (oder Ausgabe „unerfüllbar“)
- Overhead: Backtracking-Information for jede Anwendung der \vee -Regel
 - aus Effizienzgründen auch hier zuerst \wedge -Regel anwenden

Gemeinsamkeiten

- Erfüllbarkeitstests
- Können auch Gültigkeit und Implikation testen
- Entscheidungsverfahren
- Effizienter als Wahrheitstabelle

Vorteile von Tableaus

- Effizient für erfüllbare Eingaben
- Erzeugt Modell für erfüllbare Eingaben

Vorteile der Resolution

- Effizient für unerfüllbare Eingaben
- Gesamtes Verfahren ist don't-care-nichtdeterministisch
(kein Backtracking)

Zusammenfassung: Aussagenlogik

Aussagenvariable repräsentiert Elementaraussage
kann wahr oder falsch sein

Junktoren verbinden Aussagenvariablen zu komplexen Formeln
Auswertung über Wahrheitstabelle

Interpretation belegt Variablen mit 0 oder 1
macht Formel wahr oder falsch

Modell macht Formel wahr

Erfüllbar es gibt ein Modell

Gültig jede Interpretation ist Modell (Tautologie)

Schlussfolgerung Erfüllbarkeit, Gültigkeit, Implikation
entscheidbar (korrekt, vollständig, terminierend)

Resolution sucht Widerspruch
KNF, Klausel, Resolvente

Tableau sucht Modell
NNF, Regel, Clash

Inhalt

- 1. Einführung
- 2. Mengen
- 3. Aussagenlogik
- 4. Prädikatenlogik**
 - 4.1 Relationen und Funktionen
 - 4.2 Syntax
 - 4.3 Semantik
 - 4.4 Schlussfolgerungsverfahren
- 5. Prolog

- Aussagenlogik kann Aussagen nur als **Ganzes** beschreiben
- Aussagenvariablen können nur wahr oder falsch sein
- Innere Struktur der Aussagen kann nicht repräsentiert werden

Beispiel 4.1

■ Innere Struktur von Aussagen

- „Anna kennt Bert und Anna kennt die Mutter von Bert.“ $\rightsquigarrow X \wedge Y$
„Anna kennt Bert und Anna mag Bert.“ $\rightsquigarrow X \wedge Y$
„Anna kennt Bert und Claus kennt Bert.“ $\rightsquigarrow X \wedge Y$

■ Schlussfolgerung

- Prämissen:** „Tux ist ein Pinguin.“ $\rightsquigarrow A$
„Kein Pinguin kann fliegen.“ $\rightsquigarrow \neg B$
„Alle Pinguine sind Vögel.“ $\rightsquigarrow C$

- Konklusion:** „Manche Vögel können nicht fliegen.“ $\rightsquigarrow D$

- Formalisierung zu grob: kann inneren Aufbau der Elementaraussagen nicht abbilden
- Zusammenhänge werden nicht klar („kann fliegen“, „Pinguin“, „Vogel“)
- Konklusion folgt nicht aus Prämissen: $A \wedge \neg B \wedge C \wedge \neg D$ ist erfüllbar

Konstantensymbole einzelne Individuen

Prädikate Beziehungen zwischen Individuen

Funktionssymbole Abbildungen von Individuen auf Individuen

Beispiel 4.2

| | |
|---|--|
| „Anna kennt Bert und Anna kennt die Mutter von Bert.“ | $\rightsquigarrow K(a, b) \wedge K(a, m(b))$ |
| „Anna kennt Bert und Anna mag Bert.“ | $\rightsquigarrow K(a, b) \wedge M(a, b)$ |
| „Anna kennt Bert und Claus kennt Bert.“ | $\rightsquigarrow K(a, b) \wedge K(c, b)$ |
| „Tux ist ein Pinguin.“ | $\rightsquigarrow P(t)$ |
| „Kein Pinguin kann fliegen.“ | $\rightsquigarrow \forall x(P(x) \rightarrow \neg F(x))$ |
| „Alle Pinguine sind Vögel.“ | $\rightsquigarrow \forall x(P(x) \rightarrow V(x))$ |
| „Manche Vögel können nicht fliegen.“ | $\rightsquigarrow \exists x(V(x) \wedge \neg F(x))$ |

Inhalt

- 1. Einführung
- 2. Mengen
- 3. Aussagenlogik
- 4. Prädikatenlogik**
 - 4.1 Relationen und Funktionen
 - 4.2 Syntax
 - 4.3 Semantik
 - 4.4 Schlussfolgerungsverfahren
- 5. Prolog

Definition 4.3 (Kartesisches Produkt)

Das **kartesische Produkt** ($M_1 \times M_2$) zweier Mengen M_1 und M_2 ist die Menge $\{(x, y) \mid x \in M_1, y \in M_2\}$.

- $M_1 \times M_2$ ist eine Menge von Paaren oder 2-Tupeln
- Verallgemeinerung:

$M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in M_i\}$
ist eine Menge von n -Tupeln



René Descartes
(1596–1650)

Beispiel 4.4

$$M_1 = \{1, 2, 3\}, M_2 = \{a, b\}$$

- $M_1 \times M_2 = \{(1, a), (2, a), (3, a), (1, b), (2, b), (3, b)\}$
- $M_2 \times M_1 = ?$
- $M_1 \times M_1 = ?$

Übung 4.5

Sei $M_1 = \{1, 3, 5, 7\}$, $M_2 = \{2, 4, 6\}$.

Berechnen Sie:

- 1** $M_1 \times M_1$
- 2** $M_1 \times M_2$
- 3** $M_2 \times M_1$

Definition 4.6 (Relation)

Seien M_1, M_2, \dots, M_n Mengen. Eine (n-stellige) Relation R über M_1, M_2, \dots, M_n ist eine Teilmenge des kartesischen Produkts der Mengen, also $R \subseteq M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$.

Notation: Statt $(x, y) \in R$ schreibt man oft $R(x, y)$

Beispiel 4.7

- $M_1 = \{\text{Müller, Mayer, Schulze, Schmidt, Becker}\}$ (z. B. Menschen)
- $M_2 = \{\text{Logik, LA, BWL, Digitaltechnik, PM}\}$ (z. B. Kurse)
- Belegt = $\{(\text{Müller, Logik}), (\text{Müller, BWL}), (\text{Müller, Digitaltechnik}), (\text{Mayer, BWL}), (\text{Mayer, PM}), (\text{Schulze, LA}), (\text{Schulze, Digitaltechnik}), (\text{Schmidt, PM})\}$
- Welche Kurse hat Mayer / Schmidt belegt?

Übung 4.8

Geben Sie jeweils ein Beispiel für eine möglichst interessante Relation aus dem realen Leben und aus der Mathematik an.

- Welche Mengen sind beteiligt?
- Welche Elemente stehen in Relation?

Definition 4.9 (Homogenität)

Sei R eine Relation über M_1, M_2, \dots, M_n . R heißt **homogen**, falls $M_i = M_j$ für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$ gilt.

- Wenn R homogen ist, so nennen wir R auch eine **n -stellige Relation über M** .
- Eine **n -stellige Relation $R^{(n)}$** über einer Menge M ist
 - eine Teilmenge von $M^n = \underbrace{M \times M \times \dots \times M}_{n\text{-mal}}$
 - eine Menge von n -Tupeln von Elementen aus M

Beispiel 4.10

- Einstellige (unäre) Relationen sind Teilmengen von M
 - $P_{\mathbb{N}}^{(1)} = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$ über \mathbb{N}
- Zweistellige (binäre) Relationen bestehen aus Paaren
 - $T_{\mathbb{N}}^{(2)} = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), \dots, (3, 3), (3, 6), (3, 9), \dots\}$ über \mathbb{N}
 - $<_{\mathbb{N}}^{(2)} = \{(0, 1), (0, 2), \dots, (1, 2), (1, 3), \dots\}$ über \mathbb{N}
 - Bei binären Relationen schreiben wir oft xRy statt $R(x, y)$.
(z. B. $1 <_{\mathbb{N}} 2$ statt $<_{\mathbb{N}} (1, 2)$ oder $(1, 2) \in <_{\mathbb{N}}$)
- Nullstellige Relationen sind leer oder enthalten das leere Tupel ()
 - die einzigen nullstelligen Relation über jeder Menge sind $F^{(0)} = \{\}$ und $W^{(0)} = \{()\}$

Beispiel 4.11

- $=_{\mathbb{N}} = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), \dots\}$
- $<_{\mathbb{Z}} = \{(i, i + j) \mid i \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{N}^{\geq 1}\}$
- \neq_N mit $N = \{w \mid w \text{ ist ein Nachname}\}$
 - $\{(Müller, Mayer), (Müller, Schulze), (Mayer, Schulze), (Mayer, Müller), (Schulze, Mayer), (Schulze, Müller)\} \subseteq \neq_N$

Definition 4.12 (linkstotal, rechtseindeutig)

Sei R eine binäre Relation über M und N .

- Gibt es für jedes $x \in M$ ein $y \in N$ mit $R(x, y)$, so heißt R **linkstotal**.
 - Gilt für alle $x \in M$ und $y, z \in N$, dass aus $R(x, y)$ und $R(x, z)$ folgt, dass auch $y = z$ gilt, so heißt R **rechtseindeutig**.
-
- Linkstotal: Jedes Element aus M steht mit mindestens einem Element aus N in Relation.
 - Rechtseindeutig: Jedes Element aus M steht mit höchstens einem Element aus N in Relation.

Definition 4.13 (Funktion)

Seien M, N Mengen.

- Eine partielle Funktion $f : M \rightarrow N$ ist eine Relation $f \subseteq (M \times N)$, die rechtseindeutig ist.
- Eine (totale) Funktion $f : M \rightarrow N$ ist eine Relation $f \subseteq (M \times N)$, die linkstotal und rechtseindeutig ist.
- M heißt Definitionsmenge von f .
- N heißt Zielmenge von f .

Eine Funktion (auch: Abbildung) ordnet (jedem) Element der Definitionsmenge höchstens ein Element der Zielmenge zu.

Definition 4.14 (Notation von Funktionen)

Funktionen können mit der folgenden Schreibweise angegeben werden:

Funktionssymbol : Definitionsmenge \rightarrow Zielmenge ; Zuordnungsvorschrift

Man schreibt dann auch $f(x) = y$ statt $(x, y) \in f$ oder $x f y$.

Für endliche Definitionsmengen kann man eine Funktion als Menge der einzelnen Zuordnungen angeben.

Beispiel 4.15

- $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}; x \mapsto x^2$
- $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}; x \mapsto |x|$
- $h : \{A, B, C\} \rightarrow \mathbb{B}; \{A \mapsto 1, B \mapsto 0, C \mapsto 1\}$

Definition 4.16 (n -stellige Funktion auf einer Menge)

Sei M eine Menge.

Eine Funktion $f : M^n \rightarrow M$ heißt n -stellige Funktion oder Operation auf M .

Beispiel 4.17

- $+_{\mathbb{N}}$, die Addition der natürlichen Zahlen, ist eine zweistellige Operation auf \mathbb{N} .
Z. B.: $(2, 3) \mapsto 5$
- $!_{\mathbb{N}}$, die Fakultät der natürlichen Zahlen, ist eine einstellige Operation auf \mathbb{N} .
Z. B.: $4 \mapsto 24$

- Funktion $f : M^0 \rightarrow M$
- $M^0 = \{()\}$
- Definitionsmenge hat nur ein Element
- f ist durch $f(())$ eindeutig festgelegt
- Nullstellige Funktionen beschreiben Konstanten!

Beispiel 4.18

- $c : \mathbb{N}^0 \rightarrow \mathbb{N}; () \mapsto 5$ ist die Konstante 5
- Für die Menge aller Menschen M bezeichnet $d : M^0 \rightarrow M; () \mapsto$ Kurt Gödel den einzelnen Menschen Kurt Gödel.

Funktionssymbol Zeichen, z. B. „+“

zugeordnete **Stelligkeit**: „ $+^{(2)}$ “

„ $x +^{(2)} y$ “ ist korrekter Ausdruck, „ $x +^{(2)}$ “ nicht
wenn Stelligkeit klar ist, wird sie oft nicht angegeben
auch: **Operator**

Funktion Mathematisches Konstrukt

z. B. $+_{\mathbb{N}}$: Abbildung von $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ (zweistellig)
auch: **Operation**

Achtung

Dasselbe **Funktionssymbol** kann für verschiedene Trägermengen durch unterschiedliche **Funktionen** interpretiert werden!

Beispiel 4.19 (Symbol „ $\cdot^{(2)}$ “)

- Funktion $\cdot_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}; (x, y) \mapsto x \cdot y$ (Multiplikation)
z. B. $2 \cdot_{\mathbb{N}} 3 = 6$
- Funktion $\cdot_S : S \times S \rightarrow S; (x, y) \mapsto xy$ (Konkatenation)
 S : Menge der Strings über $\{a, b, c, \dots, z\}$
z. B. $ab \cdot_S bc = abbc$

Analogie aus der OO-Programmierung: Überladen von Operatoren

- ein Symbol „+“
- unterschiedliche Funktionen je nach Typ der Objekte
 - Integer-Addition
 - Matrix-Addition
 - Vereinigung von Mengen
 - ...

Signaturen

Analog unterscheidet man Relationen und Prädikate:

Prädikat Zeichen „<“

Stelligkeit $<^{(2)}$

3 < 4 ist korrekter Ausdruck

Relation $<_{\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Definition 4.20 (Signatur)

Eine Signatur ist ein Paar (F, P) , wobei

- F eine Menge von Funktionssymbolen ist,
- P eine Menge von Prädikaten ist,
- jedem Element von $F \cup P$ eine Stelligkeit zugeordnet ist.

Beispiel 4.21

- $(\{+^{(2)}, \cdot^{(2)}, 0^{(0)}, 1^{(0)}\}, \{\})$ ist die Signatur der Arithmetik
- $(\{+^{(2)}, \cdot^{(2)}, 0^{(0)}, 1^{(0)}\}, \{\leq^{(2)}\})$ ist die Signatur der geordneten Arithmetik
- $(\{\}, \{E^{(2)}\})$ ist die Signatur der Graphen

Definition 4.22 (Struktur)

Sei $\Sigma = (F, P)$ eine Signatur. Eine Σ -Struktur \mathcal{A} besteht aus

- einer nichtleeren Menge A ,
- einer n -stetigen Funktion $f_{\mathcal{A}} : A^n \rightarrow A$ für jedes n -stetige Funktionssymbol $f \in F$,
- einer n -stetigen Relation $S_{\mathcal{A}} \subseteq A^n$ für jedes n -stetige Prädikat $S \in P$.

Beispiel 4.23 (Strukturen mit Signatur der Arithmetik)

- $(\mathbb{N}, +_{\mathbb{N}}, \cdot_{\mathbb{N}}, 0_{\mathbb{N}}, 1_{\mathbb{N}})$
- $(\mathbb{N}^{2 \times 2}, +_M, \cdot_M, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$,
wobei $+_M$ und \cdot_M als Matrizen-Addition und -Multiplikation definiert sind
- $(\mathbb{B}, +_{\mathbb{B}}, \cdot_{\mathbb{B}}, 0_{\mathbb{B}}, 1_{\mathbb{B}})$ mit $\mathbb{B} = \{0_{\mathbb{B}}, 1_{\mathbb{B}}\}$ und
$$\begin{array}{c|cc} +_{\mathbb{B}} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}, \quad \begin{array}{c|cc} \cdot_{\mathbb{B}} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$

- Das Gebiet der **Algebra** beschäftigt sich mit den Eigenschaften von **Rechenoperationen**
- Eine **Algebraische Struktur** (kurz: Algebra) hat eine **funktionale** Signatur.

Beispiel 4.24 (Bekannte algebraische Strukturen)

- $(\mathbb{Z}, +_{\mathbb{Z}}^{(2)}, 0_{\mathbb{Z}}^{(0)}, -_{\mathbb{Z}}^{(1)})$ ist eine **Gruppe**
- $(\mathbb{Z}, +_{\mathbb{Z}}^{(2)}, 0_{\mathbb{Z}}^{(0)}, -_{\mathbb{Z}}^{(1)}, \cdot_{\mathbb{Z}}^{(2)})$ ist ein **Ring**

Relation Menge von Tupeln

Funktion Abbildung von Tupeln auf Elemente

Signatur Funktionssymbole und Prädikate mit fester Stelligkeit

Struktur Menge mit entsprechenden Funktionen und Relationen

Inhalt

1. Einführung

2. Mengen

3. Aussagenlogik

4. Prädikatenlogik

4.1 Relationen und Funktionen

4.2 Syntax

4.3 Semantik

4.4 Schlussfolgerungsverfahren

5. Prolog

Prädikatenlogik erster Stufe: Syntax

| Konstruktor | Notation | reale Welt | Mathematik |
|---------------------------------|--|--|---|
| Variablen | x, y | (Menschen) | (Zahlen) |
| Konstantensymbole | a, b, c | calvin, hobbes, mom, dad | $1, 2, \pi$ |
| Funktionssymbole | $f(x), h(x, y)$ | mutter(calvin),
ehepartner(mom) | $x + y, \sqrt{x},$
$\log_b x$ |
| Prädikate
(Relationssymbole) | $R(x), S(x, y)$ | Sohn(mom,calvin),
Freund(calvin,hobbes) | $x > y, x = y,$
Prim(x) |
| Quantoren | $\forall x P(x),$
$\exists y S(x, y)$ | $\forall x (\text{Freund}(x, \text{hobbes}))$
$\exists x (\text{Freund}(\text{calvin}, x))$ | $\forall x (x \geq 0)$
$\exists x (x + x = 2)$ |
| Junktoren | $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow$ | | |

- Ein n -stelliges Funktionssymbol hat genau n Argumente
- + und log sind zweistellig (binär) ($x + y, \log_b x$)
- $\sqrt{}$ ist einstellig (unär) (\sqrt{x})
- mutter() und ehepartner() sind einstellig
- nullstellige Funktionssymbole sind Konstantensymbole
- Notation (falls notwendig): $f^{(n)}$

Aus Variablen und Funktionssymbolen (einschließlich Konstantensymbolen) sind Terme zusammengesetzt.

Definition 4.25 (Term)

Terme sind wie folgt induktiv definiert:

- Jede Variable ist ein Term.
- Wenn f ein n -stelliges Funktionssymbol ist und t_1, \dots, t_n Terme sind, ist auch $f(t_1, \dots, t_n)$ ein Term.

Terme, die keine Variablen enthalten, heißen auch Grundterme.

Beachte:

- Jede Konstante ist ein Term.
- Terme bezeichnen Elemente der Domäne.

Beispiele: Terme

- Variablen: $\{x, y\}$
- Funktionssymbole: $\{c^{(0)}, d^{(0)}, f^{(1)}, +^{(2)}\}$

Beispiel 4.26 (Grundterme)

- c
- $f(f(d))$
- $c + f(c)$ oder $+(c, f(c))$
- $+(c, +(d, +(f(c), f(d))))$

Beispiel 4.27 (Terme, die keine Grundterme sind)

- x
- $f(y)$
- $c + f(y)$
- $+(c, +(y, +(f(x), f(y))))$

- Ein n -stelliges Prädikat hat genau n Terme als Argumente.
 - Keine Prädikate in Prädikaten!
- $>$ ist zweistellig ($x > y$)
- Prim() ist einstellig (Prim(x)).
- Sohn() und Freund() sind zweistellig.

Aus Prädikaten und Termen sind Atome zusammengesetzt.

Definition 4.28 (Atom)

Atome sind wie folgt definiert:

- Wenn R ein n -stelliges Prädikat ist und t_1, \dots, t_n Terme sind, ist $R(t_1, \dots, t_n)$ ein Atom.

Atome, die keine Variablen enthalten, heißen auch **Grundatome**.

- Jedes nullstellige Prädikat ist ein Atom.
 - Nullstellige Prädikate sind **Aussagenvariablen**.
- Atome repräsentieren **Elementaraussagen** (sind wahr oder falsch).

- Prädikate: $\{A^{(0)}, P^{(1)}, >^{(2)}\}$

Beispiel 4.29 (Grundatome)

- $P(c)$
- $c > f(c)$ oder $> (c, f(c))$
- $c > c$
- $P(c + f(c))$
- A

Beispiel 4.30 (Atome, die keine Grundatome sind)

- $x > y$
- $f(y) > c + f(x)$
- $P(f(c + y))$

Aus Atomen, Quantoren und Junktoren sind (komplexe) Formeln zusammengesetzt.

Definition 4.31 (Prädikatenlogische Formel)

Formeln sind wie folgt induktiv definiert:

- Jedes Atom ist eine Formel.
- Wenn φ und ψ Formeln sind und x eine Variable ist, sind auch die folgenden Ausdrücke Formeln:
 - $(\neg\varphi)$, \mathbf{W} , \mathbf{F}
 - $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$, $(\varphi \leftrightarrow \psi)$
 - $(\forall x\varphi)$, $(\exists x\varphi)$

- Allquantor \forall : $\forall x\varphi$
- Existenzquantor \exists : $\exists x\varphi$

Die Formel φ steht im **Gültigkeitsbereich** (Scope) des Quantors.
Der Quantor **bindet** die freien Vorkommen von x in φ .

Definition 4.32 (frei, gebunden)

- Eine Variable, die in einer quantorenfreien Formel φ vorkommt, ist **frei**.
- In einer Formel $(\forall x\varphi)$ oder $(\exists x\varphi)$ **bindet** der Quantor die freien Vorkommen von x in φ (so dass diese Vorkommen nicht mehr frei sind).
- Eine Formel mit freien Variablen heißt **offen**.
- Eine Formel ohne freie Variablen heißt **geschlossen** (oder auch **Satz**).
- Quantor bindet nur **Vorkommen** einer Variable, nicht Variable selbst.
- In $P(x) \wedge \forall x Q(x)$ kommt x sowohl frei als auch gebunden vor.

$f \gg P \gg \forall, \exists \gg \neg \gg \wedge \gg \vee \gg \rightarrow \gg \leftrightarrow$

- Funktionssymbole binden stärker als Prädikate
 - $x + y > c + d$ bedeutet $(x + y) > (c + d)$
- Prädikate binden stärker als Quantoren
 - $\forall x \forall y x + y = y + x$ bedeutet $\forall x \forall y (x + y = y + x)$
 - Sonst wäre es auch keine Formel: $(\forall x \forall y x) + y = y + x$
 - Klarer in Präfix-Notation: $\forall x \forall y = (+(x, y), +(y, x))$
- Quantoren binden stärker als Junktoren
 - $\forall x R(x, y) \wedge S(x)$ bedeutet $(\forall x R(x, y)) \wedge S(x)$
 - $\exists y R(c, y) \rightarrow S(y)$ bedeutet $(\exists y R(c, y)) \rightarrow S(y)$
 - anschaulich: Quantor bindet Variablen bis zum nächsten Junktor
(oder bis zur schließenden Klammer)
- Klammern können weggelassen werden, wenn sie den Vorrang nicht verändern

Beispiel 4.33 (Offene Formeln)

- $P(x)$
- $f(y) > c + f(x)$
- $P(y) \vee x > c$
- $x > y \rightarrow \neg \forall x(x > y)$
- $\forall x P(x) \vee x > c \quad (!)$

Beispiel 4.34 (Sätze)

- $\forall x x > c$
- $\forall x \forall y (x > y \vee y > x \vee x = y)$
- $\exists x P(x)$
- $\exists x (P(x) \vee x > d)$
- $\exists x (P(x) \rightarrow \forall y (y + c > x))$

Übung 4.35

Gegeben sei die Signatur $(\{+, f^{(1)}, c^{(0)}, d^{(0)}\}, \{=^{(2)}, >^{(2)}, P^{(1)}\})$.

Entscheiden Sie, in welche Kategorien die folgenden Ausdrücke fallen:

- (Grund-) Term
- offene Formel
- Unsinn
- (Grund-) Atom
- Satz

Entscheiden Sie, ob die Variablenvorkommen gebunden oder frei sind.

- | | |
|--------------------------------|--|
| 1 $x + y$ | 9 $P(\forall x(x = x))$ |
| 2 $x + y > c$ | 10 $x > y \wedge x + y$ |
| 3 $P(c, d)$ | 11 $\forall x(x > c \vee c > x) \vee x = c$ |
| 4 $x > P(d)$ | 12 $c > f(d)$ |
| 5 $\forall x(x + c > x)$ | 13 $P(P(x))$ |
| 6 $\forall x > (+(x, c), x)$ | 14 $f(f(x))$ |
| 7 $\forall x, y(x > y)$ | 15 $\forall x \forall y(P(x) > P(y))$ |
| 8 $\exists x \exists y(x + y)$ | 16 $\exists x P(x) \rightarrow \forall x P(x)$ |

Inhalt

- 1. Einführung
- 2. Mengen
- 3. Aussagenlogik
- 4. Prädikatenlogik**
 - 4.1 Relationen und Funktionen
 - 4.2 Syntax
 - 4.3 Semantik**
 - 4.4 Schlussfolgerungsverfahren
- 5. Prolog

Interpretation in der Aussagenlogik

- weist Aussagenvariablen Wert 1 oder 0 zu
- macht Formel wahr oder falsch

Interpretation in der Prädikatenlogik

- bestimmt das Universum (auch Domäne genannt)
- weist jedem n -stetlichen Funktionssymbol f eine n -stetige Funktion $f^{\mathcal{I}}$ über dem Universum zu
- weist jedem n -stetigen Prädikat R eine n -stetige Relation $R^{\mathcal{I}}$ über dem Universum zu
- macht Formel wahr oder falsch

$$\varphi = \forall x R(x, f(x))$$

Beispiel 4.36 (Interpretation \mathcal{I} mit Menschen als Domäne)

- Universum $\Delta^{\mathcal{I}}$: $M = \{\text{Anna}, \text{Bob}, \text{Clara}, \text{Dirk}\}$
- Funktion $f^{\mathcal{I}}$: $\text{ehepartner}_M = \{\text{Anna} \mapsto \text{Bob}, \text{Bob} \mapsto \text{Anna}, \text{Clara} \mapsto \text{Dirk}, \text{Dirk} \mapsto \text{Clara}\}$
- Relation $R^{\mathcal{I}}$: $\text{Mag}_M = \{(\text{Anna}, \text{Bob}), (\text{Anna}, \text{Clara}), (\text{Bob}, \text{Anna}), (\text{Bob}, \text{Dirk}), (\text{Clara}, \text{Dirk}), (\text{Dirk}, \text{Anna}), (\text{Dirk}, \text{Bob})\}$
- \mathcal{I} macht φ falsch (weil Dirk Clara nicht mag)

$$\varphi = \forall x R(x, f(x))$$

Beispiel 4.37 (Interpretation \mathcal{J} mit Zahlen als Domäne)

- Universum $\Delta^{\mathcal{J}}$: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$
- Funktion $f^{\mathcal{J}}$: $s_{\mathbb{N}}$ (Nachfolger) = $\{0 \mapsto 1, 1 \mapsto 2, \dots\}$
- Relation $R^{\mathcal{J}}$: $<_{\mathbb{N}}$ (kleiner als) = $\{(0, 1), (0, 2), \dots, (1, 2), (1, 3), \dots\}$
- \mathcal{J} macht φ wahr (weil jede Zahl kleiner ist als ihr Nachfolger)

Wahrheitswert hängt von der Interpretation ab

- der Interpretation der Funktionssymbole und Prädikate
Wenn \mathcal{J}' R als $>_{\mathbb{N}}$ interpretiert, ist $\varphi^{\mathcal{J}'}$ falsch
- dem Universum
 $\forall x \exists y (y < x)$ ist wahr in \mathbb{Z} , aber falsch in \mathbb{N} .

Übung 4.38

- 1 Sei $\varphi = \forall x \forall y (\neg G(x, y) \wedge R(x, y) \rightarrow \exists z (\neg G(z, x) \wedge \neg G(z, y) \wedge P(z)))$ und \mathcal{I} wie folgt:

- $\Delta^{\mathcal{I}}$ ist die Menge aller Menschen;
- $G^{\mathcal{I}} = \{(x, x) \mid x \in \Delta^{\mathcal{I}}\}$ bezeichnet die Gleichheit;
- $R^{\mathcal{I}}$ = streiten;
- $P^{\mathcal{I}}$ = sich freuen.

Was ist die Aussage von $\varphi^{\mathcal{I}}$?

- 2 Sei $\psi = \forall x \exists y G(f(x, y), c)$ und \mathcal{T} wie folgt:

- $\Delta^{\mathcal{T}} = \mathbb{Z}$;
- $G^{\mathcal{T}} = \{(x, x) \mid x \in \Delta^{\mathcal{T}}\}$ bezeichnet die Gleichheit;
- $f^{\mathcal{T}} = +_{\mathbb{Z}}$, d. h. Addition für Ganzzahlen;
- $c^{\mathcal{T}} = 0_{\mathbb{Z}}$, d. h. Null (als Element der Ganzzahlen).

Was ist die Aussage von $\psi^{\mathcal{T}}$? Ist $\psi^{\mathcal{T}}$ wahr oder falsch?

Wie werden freie Variablen interpretiert?

- Jede freie Variable wird von \mathcal{I} auf ein Element der Domäne abgebildet
- Ähnlich Variablenzuweisung in Aussagenlogik
 - Jede Aussagenvariable wird auf ein Element von \mathbb{B} abgebildet
- In der Praxis interessieren wir uns meistens für Sätze.

Definition 4.39 (Interpretation in der Prädikatenlogik)

Für eine Formel φ mit Funktionssymbolen F , Prädikaten P und freien Variablen V ist eine Interpretation \mathcal{I} ein Tripel $(\Delta^{\mathcal{I}}, \cdot^{\mathcal{I}}, \mu)$ mit

- $\Delta^{\mathcal{I}}$ ist eine nichtleere Menge,
 - $\cdot^{\mathcal{I}}$ weist
 - jedem n -stetigen $f \in F$ eine n -stetige Funktion $f^{\mathcal{I}}$ über $\Delta^{\mathcal{I}}$ zu,
 - jedem n -stetigen $R \in P$ eine n -stetige Relation $R^{\mathcal{I}}$ über $\Delta^{\mathcal{I}}$ zu.
 - $\mu : V \rightarrow \Delta^{\mathcal{I}}$ weist jedem $x \in V$ ein Element $x^{\mathcal{I}} \in \Delta^{\mathcal{I}}$ zu.
-
- Domäne darf **nicht leer** sein.
 - Nullstellige Funktionssymbole (Konstantensymbole) werden auf Elemente der Domäne abgebildet.
 - Nullstellige Prädikate werden auf $\{()\}$ oder $\{\}$ abgebildet.
 - Aussagenvariablen: $\{()\} \rightsquigarrow 1_{\mathbb{B}}$; $\{\} \rightsquigarrow 0_{\mathbb{B}}$

Der Wahrheitswert komplexer Formeln wird rekursiv bestimmt:

- Für einen komplexen **Term** $t = f(t_1, \dots, t_n)$ werden
 - mögliche freie Variablen x, y, \dots durch $\mu(x), \mu(y), \dots$ ersetzt;
 - die Terme t_1, \dots, t_n rekursiv ausgewertet als $t_1^{\mathcal{I}}, \dots, t_n^{\mathcal{I}}$;
 - die Funktion $f^{\mathcal{I}}$ für diese Ergebnisse ausgewertet: $t^{\mathcal{I}} = f^{\mathcal{I}}((\mu(t_1))^{\mathcal{I}}, \dots, (\mu(t_n))^{\mathcal{I}})$.
- Für ein **Atom** $\varphi = P(t_1, \dots, t_n)$ werden
 - die Terme t_1, \dots, t_n rekursiv ausgewertet;
 - geprüft, ob das sich ergebende Tupel in $P^{\mathcal{I}}$ enthalten ist.
- Für **gebundene** Variablen $\forall x\varphi / \exists x\varphi$ wird geprüft, ob φ für alle/ein Element der Domäne wahr ist.
- Formeln mit **Junktoren** werden wie in der Aussagenlogik ausgewertet.

Beispiel 4.40

$$\varphi = \neg P(x) \wedge \exists y R(c, f(y))$$

$$\begin{array}{lcl} \Delta^I & = & \mathbb{N} \\ \mu & = & \{x \mapsto 4_{\mathbb{N}}\} \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} P^I & = & \text{Prim}_{\mathbb{N}} \\ R^I & = & \leq_{\mathbb{N}} \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} f^I & = & s_{\mathbb{N}} \\ c^I & = & 17_{\mathbb{N}} \end{array}$$

Bestimmung von φ^I :

| | |
|--------------------------------------|---|
| $\varphi^I =$ | $\neg P^I(\mu(x)) \wedge \exists y R^I(c^I, f^I(y))$ |
| μ auswerten | $\neg P^I(4_{\mathbb{N}}) \wedge \exists y R^I(c^I, f^I(y))$ |
| Funktionssymbole | $\neg P^I(4_{\mathbb{N}}) \wedge \exists y R^I(17_{\mathbb{N}}, s_{\mathbb{N}}(y))$ |
| Prädikate | $\neg \text{Prim}_{\mathbb{N}}(4_{\mathbb{N}}) \wedge \exists y \leq_{\mathbb{N}} (17_{\mathbb{N}}, s_{\mathbb{N}}(y))$ |
| Quantor: Wähle $y = 20_{\mathbb{N}}$ | $\neg \text{Prim}_{\mathbb{N}}(4_{\mathbb{N}}) \wedge \leq_{\mathbb{N}} (17_{\mathbb{N}}, s_{\mathbb{N}}(20_{\mathbb{N}}))$ |
| Funktion auswerten | $\neg \text{Prim}_{\mathbb{N}}(4_{\mathbb{N}}) \wedge \leq_{\mathbb{N}} (17_{\mathbb{N}}, 21_{\mathbb{N}})$ |
| Relationen auswerten | $\neg 0_{\mathbb{B}} \wedge 1_{\mathbb{B}}$ |
| Junktoren auswerten | $1_{\mathbb{B}}$ |

Definition 4.41 (Modell)

Eine Interpretation $\mathcal{I} = (\Delta^{\mathcal{I}}, \cdot^{\mathcal{I}}, \mu)$ erfüllt eine Formel φ (ist ein Modell für φ , $\mathcal{I} \models \varphi$), wenn

- $\varphi = P(t_1, \dots, t_n)$ ein Atom ist und $((\mu(t_1))^{\mathcal{I}}, \dots, (\mu(t_n))^{\mathcal{I}}) \in P^{\mathcal{I}}$ gilt;
- $\varphi = \forall x \psi(x)$ gilt und für jedes $x \in \Delta^{\mathcal{I}}$ $\psi(x)$ gilt;
- $\varphi = \exists x \psi(x)$ gilt und für ein $x \in \Delta^{\mathcal{I}}$ $\psi(x)$ gilt;
- φ einen Junktor enthält (z. B., $\varphi = \neg \varphi_1$, $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$) und entsprechend der Wahrheitstabelle als wahr ausgewertet wird.

Definition 4.42 (Logische Implikation)

Eine Formel φ impliziert logisch eine Formel ψ ($\varphi \models \psi$), wenn jedes Modell von φ auch Modell von ψ ist.

Übung 4.43

Gegeben sei die Signatur $(\{f^{(1)}, c^{(0)}\}, \{R^{(2)}, =^{(2)}\})$.

Finden Sie für jeden der folgenden Sätze eine Interpretation, die ihn wahr macht, und eine Interpretation, die ihn falsch macht.

Hierbei soll das Prädikat „ $=$ “ als Gleichheit von Elementen der Domänen interpretiert werden. Verwenden Sie als Domänen Mengen von Zahlen.

- 1 $\forall x \forall y (R(x, y) \rightarrow \exists z (R(x, z) \wedge R(z, y)))$
- 2 $\neg \exists x (f(x) = c)$
- 3 $\forall x \forall y (f(x) = f(y) \rightarrow x = y)$

Beispiel 4.44 (Körperaxiome)

Abschluss unter Addition

$$\forall x \forall y \exists z (x + y = z)$$

Assoziativität der Addition

$$\forall x \forall y \forall z ((x + (y + z)) = ((x + y) + z))$$

Kommutativität der Addition

$$\forall x \forall y (x + y = y + x)$$

Neutrales Element der Addition

$$\forall x (x + 0 = x)$$

Inverses Element der Addition

$$\forall x \exists y (x + y = 0)$$

Abschluss unter Multiplikation

$$\forall x \forall y \exists z (x \cdot y = z)$$

Assoziativität der Multiplikation

$$\forall x \forall y \forall z ((x \cdot (y \cdot z)) = ((x \cdot y) \cdot z))$$

Kommutativität der Multiplikation

$$\forall x \forall y (x \cdot y = y \cdot x)$$

Neutrales Element der Multiplikation

$$\forall x (x \cdot 1 = x)$$

Inverses Element der Multiplikation

$$\forall x (x = 0 \vee \exists y (x \cdot y = 1))$$

Distributivität

$$\forall x \forall y \forall z (x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z))$$

PL erster Stufe Quantifizierung von Elementen ($\exists x P(x)$)

PL zweiter Stufe Quantifizierung von Prädikaten ($\exists P \forall x P(x)$)

PL dritter Stufe Quantifizierung von Prädikaten über Prädikaten ($\exists R \forall P (R(P))$)

...

- PL1 genügt zur Axiomatisierung der rationalen Zahlen (\rightsquigarrow Algebra)
- PL2 ist notwendig für reelle Zahlen (\rightsquigarrow Analysis)

Definition 4.45 (Dedekind-Vollständigkeit)

Eine Menge M ist **Dedekind-vollständig**, wenn jede nach oben beschränkte nichtleere Teilmenge $S \subseteq M$ eine kleinste obere Schranke hat.

Beispiel 4.46 (Irrationale Zahl $\sqrt{2}$)

- $S = \{x \mid x \cdot x \leq 2\}$
- Kleinste obere Schranke von S : $\sqrt{2}$
- $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \rightsquigarrow$ nicht Dedekind-vollständig
- $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \rightsquigarrow$ Dedekind-vollständig



Richard Dedekind
(1831–1916)

$$\forall S \quad \langle [\exists x S(x) \wedge \exists x \forall y (S(y) \rightarrow y < x)] \rightarrow \\ \exists x [\forall y (S(y) \rightarrow y \leq x) \wedge \forall z (z < x \rightarrow \exists t (z < t \wedge S(t)))] \rangle$$

„Für jede Menge S gilt: Wenn S mindestens ein Element enthält und ein x existiert, das größer ist als alle Elemente y von S , dann existiert auch ein x , das größer oder gleich jedem Element y von S ist und für jedes z , das kleiner ist als dieses x , gibt es ein t , das größer als z und in S enthalten ist.“

In der Prädikatenlogik kann man mehr ausdrücken als in der Aussagenlogik ...

Beispiel 4.47 (Pinguine)

- Tux ist ein Pinguin.
 $P(t)$
- Kein Pinguin kann fliegen.
 $\forall x(P(x) \rightarrow \neg F(x))$
- Alle Pinguine sind Vögel.
 $\forall x(P(x) \rightarrow V(x))$
- Manche Vögel können nicht fliegen.
 $\exists x(V(x) \wedge \neg F(x))$

... aber: Schlussfolgern in der Prädikatenlogik ist schwieriger als in der Aussagenlogik.



Eigenname Konstantensymbol (Hans, Stuttgart, Europa)

Substantiv Einstelliges Prädikat (Mensch, Haus, Stadt, Zahl)

Adjektiv Einstelliges Prädikat (schön, groß, lebendig)

Verb Prädikat oder Funktionssymbol

Stelligkeit abhängig von Anzahl der Objekte

keins Einstelliges Prädikat (lebt, existiert)

eins Zweistelliges Prädikat (kauft, hat, mag)

mehrere Mehrstelliges Prädikat (kauft-von, hat-Ausbildungsvertrag-mit)

eindeutig Funktionssymbol (mutter, direkter-nachfolger)

und, oder „Frauen und Kinder zuerst“ $\rightsquigarrow F(x) \vee K(x) \rightarrow Z(x)$

wenn, dann „Wenn A, dann B“ $\rightsquigarrow A \rightarrow B$

„Nur wenn A, dann B“ $\rightsquigarrow B \rightarrow A$

Häufige Kombinationen:

\forall mit \rightarrow Jeder Mensch ist ein Lebewesen.

\exists mit \wedge Manche Lebewesen können schwimmen.

Übung 4.48

Formalisieren Sie die folgenden Sätze in Prädikatenlogik.

Verwenden Sie hierzu

- die einstelligen Prädikate Student, Professor, Vorlesung,
- die zweistelligen Prädikate Mag, Betreut, Hält,
- das zweistellige Prädikat $=$ (für Gleichheit von Elementen).

- 1 Jeder Professor mag alle Studenten.
- 2 Jeder Student mag (mindestens) einen Professor.
- 3 Es gibt einen Studenten, der genau einen Professor mag.
- 4 Studenten werden nur von Professoren betreut.
- 5 Jeder Professor hält mindestens zwei Vorlesungen.
- 6 Jeder Professor betreut nur Studenten, die ihn mögen.

Inhalt

- 1. Einführung
- 2. Mengen
- 3. Aussagenlogik
- 4. Prädikatenlogik**
 - 4.1 Relationen und Funktionen
 - 4.2 Syntax
 - 4.3 Semantik
 - 4.4 Schlussfolgerungsverfahren**
- 5. Prolog

Inhalt

1. Einführung

2. Mengen

3. Aussagenlogik

4. Prädikatenlogik

4.1 Relationen und Funktionen

4.2 Syntax

4.3 Semantik

4.4 Schlussfolgerungsverfahren

4.4.1 Resolution

4.4.2 Tableaus

5. Prolog

Wie kann das Resolutionsprinzip auf PL übertragen werden?

Beispiel 4.49 (naive Resolution in PL)

$$\forall x(H(x) \rightarrow \exists y M(x, y)) \quad H(c)$$

A diagram illustrating the application of naive resolution. It shows a line connecting the formula $\forall x(H(x) \rightarrow \exists y M(x, y))$ to the atom $H(c)$ via a red question mark $?$.

Probleme:

- Interaktion von Quantoren: $\forall x\varphi, \forall x\neg\varphi$ vs. $\exists x\varphi, \exists x\neg\varphi$
- Interaktion von Variablen und Konstanten
- Erzeugung von KNF in Formeln mit Quantoren

Ansatz:

- Elimination des Existenz-Quantors
- Ersetzung von Variablen durch Terme, um Atome gleich zu machen

Schritt 1: Negations-Normalform

Vorgehen wie in AL

1 Elimination von \rightarrow und \leftrightarrow

- $\varphi \leftrightarrow \psi \rightsquigarrow (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$
- $\varphi \rightarrow \psi \rightsquigarrow \neg\varphi \vee \psi$

2 Anwendung der de-Morgan-Gesetze und ihrer Entsprechungen für Quantoren

- $\neg(\varphi \wedge \psi) \rightsquigarrow \neg\varphi \vee \neg\psi$
- $\neg(\varphi \vee \psi) \rightsquigarrow \neg\varphi \wedge \neg\psi$
- $\neg\forall x \varphi \rightsquigarrow \exists x \neg\varphi$
- $\neg\exists x \varphi \rightsquigarrow \forall x \neg\varphi$

3 Elimination von doppelter Negation und negierten Boole'schen Konstanten

- $\neg\neg\varphi \rightsquigarrow \varphi$
- $\neg W \rightsquigarrow F$
- $\neg F \rightsquigarrow W$

- **Ergebnis:** Formel nur mit Junktoren \wedge , \vee und \neg direkt vor Atomen

Definition 4.50 (Skolem-Form)

Eine prädikatenlogische Formel φ ist in **Skolem-Form (SF)**, wenn sie in NNF ist und keine Existenzquantoren enthält.

Transformation in SF:

Ersetze existentiell quantifizierte Variablen durch Terme



Thoralf Skolem
(1887–1963)

Beispiel 4.51 (Skolemisierung)

„Es gibt einen Präsidenten.“

$$\exists x P(x) \rightsquigarrow P(c)$$

c ist neu!

„Jeder Mensch hat eine Mutter.“

$$\forall x \exists y (H(x) \rightarrow M(x, y)) \rightsquigarrow \forall x (H(x) \rightarrow M(x, f(x)))$$

f ist neu!

Skolemisierungs-Algorithmus

Eingabe: Formel φ in NNF

Ausgabe: skolemisierte Formel $sf(\varphi)$

- 1: **while** φ enthält existentiell quantifizierte Variablen **do**
- 2: sei y erste existentiell quantifizierte Variable
- 3: sei $\{\forall x_1, \dots, \forall x_n\}$ die Menge der Allquantoren, in deren Scope $\exists y$ liegt
- 4: erzeuge neues n -stelliges Funktionssymbol f
- 5: ersetze alle Vorkommen von y im Scope von $\exists y$ durch $f(x_1, \dots, x_n)$
- 6: **return** φ

Beachte:

- Bearbeite Existenzquantoren von vorne nach hinten
- Das neue Funktionssymbol f heißt **Skolem-Funktionssymbol**
- Existentiell quantifizierte Variablen, die nicht im Scope eines Allquantors stehen, werden durch **Konstanten** ersetzt.
- φ und $sf(\varphi)$ sind nicht äquivalent, aber **erfüllbarkeitsäquivalent**.
- **Ergebnis:** Formel ohne Existenzquantor

Übung 4.52

Skolemisieren Sie die folgenden Formeln:

1 $\forall x(\exists y R(x, y) \wedge \exists y \neg R(x, y)) \wedge \exists y \exists z \neg R(y, z)$

2 $\exists x \forall y(R(x, y) \vee R(y, x)) \wedge \neg \forall y \neg(R(y, y) \wedge \neg R(y, f(y))) \vee \forall x \neg(\exists y R(x, y) \rightarrow \forall y R(x, y))$

Schritt 2.1: Optimierung der Skolemisierung

Problem: Unnötig großer Scope von Allquantoren

Beispiel 4.53 (unnötig komplexe Skolem-Funktion)

$$\forall x \exists y (P(x) \wedge Q(y)) \rightsquigarrow \forall x (P(x) \wedge Q(f(x)))$$

Da y nicht von x abhängt, könnte y durch eine Konstante ersetzt werden.

Lösung: Zusätzliche Vorverarbeitung für einfachere Skolem-Funktionen

- 1 Negations-Normalform
- 2 Skolem-Form
 - 1 Miniscoping
 - 2 Skolemisierung

Ziel: Äquivalenzumformung zur Minimierung des Scopes von Quantoren

Annahme: x kommt frei in φ und ψ vor, aber nicht in χ

- | | |
|---|---|
| ■ $\forall x(\varphi \wedge \chi) \rightsquigarrow \forall x\varphi \wedge \chi$ | ■ $\exists x(\varphi \wedge \chi) \rightsquigarrow \exists x\varphi \wedge \chi$ |
| ■ $\forall x(\varphi \vee \chi) \rightsquigarrow \forall x\varphi \vee \chi$ | ■ $\exists x(\varphi \vee \chi) \rightsquigarrow \exists x\varphi \vee \chi$ |
| ■ $\forall x(\varphi \wedge \psi) \rightsquigarrow \forall x\varphi \wedge \forall x\psi$ | ■ $\exists x(\varphi \vee \psi) \rightsquigarrow \exists x\varphi \vee \exists x\psi$ |

Dabei: Quantoren von innen nach außen bearbeiten.

Beispiel 4.54 (Skolem-Funktionen mit Miniscoping)

Miniscoping:

$$\forall x \exists y(P(x) \wedge Q(y)) \rightsquigarrow \forall x(P(x) \wedge \exists y Q(y)) \rightsquigarrow \forall x P(x) \wedge \exists y Q(y)$$

Skolemisierung:

$$\forall x P(x) \wedge \exists y Q(y) \rightsquigarrow \forall x P(x) \wedge Q(\textcolor{green}{c})$$

Übung 4.55

$$\varphi = \forall x \exists y ((P(x) \vee S(x, y) \vee Q(y)) \wedge Q(x))$$

Skolemisieren Sie die Formel φ

- 1 mit dem Standardverfahren;
- 2 mit dem Miniscoping-Verfahren.

Schritt 3: Allquantoren entfernen

1 Negations-Normalform

2 Skolem-Form

1 Miniscoping

2 Skolemisierung

3 Allquantoren entfernen

- Alle verbleibenden Variablen universell quantifiziert
- Quantor \forall nicht mehr notwendig
- Zuvor: Mehrfach quantifizierte Variablen umbenennen
- **Ergebnis:** Formel ohne Quantoren

Beispiel 4.56 (Entfernen des Allquantors)

$$\begin{aligned} & \forall x(P(x, c) \vee Q(x)) \vee \forall x P(x, x) \\ \rightsquigarrow & \forall x(P(x, c) \vee Q(x)) \vee \forall y P(y, y) \\ \rightsquigarrow & P(x, c) \vee Q(x) \vee P(y, y) \\ \text{nicht} & P(x, c) \vee Q(x) \vee P(x, x) \end{aligned}$$

- 1 Negations-Normalform
- 2 Skolem-Form
 - 1 Miniscoping
 - 2 Skolemisierung
- 3 Entfernung des Allquantors
 - 1 Variablen-Umbenennung
 - 2 \forall weglassen
- 4 Konjunktive Normalform
 - Wie in AL: Anwendung des Distributivgesetzes
 - Atome statt Aussagenvariablen
 - **Ergebnis:** Konjunktion von Disjunktionen

Beispiel 4.57 (PL-Resolution)

Ausgangsformel $\exists z H(z) \wedge \forall x(H(x) \rightarrow \exists y M(x, y))$

NNF $\exists z H(z) \wedge \forall x(\neg H(x) \vee \exists y M(x, y))$

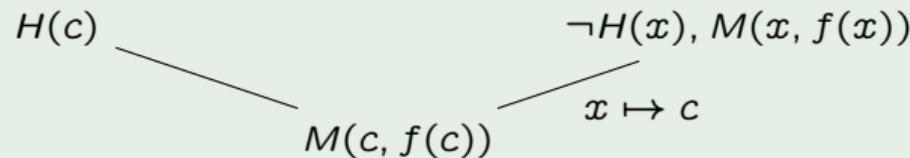
→ eliminiert

Skolem-Form $H(c) \wedge \forall x(\neg H(x) \vee M(x, f(x)))$

\exists eliminiert

KNF $H(c) \wedge (\neg H(x) \vee M(x, f(x)))$

PL-Atome statt Aussagenvariablen



- Finde Variablenbelegung, die zwei Atome syntaktisch gleich macht
- Ersetze Variablen in gesamter Klausel
- Erzeuge Resolvente

Definition 4.58 (Substitution)

Eine Substitution ist eine Funktion, die Variablen auf Terme abbildet.

Beispiel 4.59 (Substitution)

Die Substitution

$$\sigma = \{x \mapsto f(z), y \mapsto g(c, d)\}$$

bildet x auf $f(z)$ und y auf $g(c, d)$ ab.

Die Anwendung einer Substitution auf einen Term oder eine Formel ersetzt alle Variablen des Definitionsbereichs durch ihre Funktionswerte:

$$\sigma(g(x, f(y))) = g(f(z), f(g(c, d)))$$

Definition 4.60 (Unifikator)

Ein **Unifikator** ist eine Substitution, die zwei Formeln auf dieselbe Formel abbildet.

Beispiel 4.61 (Unifikator von $R(a, y)$ und $R(x, f(a))$)

$$\begin{array}{lll} \varphi = R(a, y) & \psi = R(x, f(a)) & \sigma = \{x \mapsto a, y \mapsto f(a)\} \\ \sigma(\varphi) = R(a, f(a)) = \sigma(\psi) & & \end{array}$$

Resolution von C_1 und C_2 ist möglich, wenn es Atome φ, ψ und Substitution σ gibt mit

- $\varphi \in C_1$ und $\neg\psi \in C_2$
- σ ist Unifikator von φ und ψ .

Beispiel 4.62 (gleiche Variable in mehreren Klauseln)

Problem Unifikator für $P(x, c)$ und $P(d, x)$ wird nicht gefunden

Lösung Disjunkte Umbenennung der Variablen $P(x, c), P(d, y), \sigma = \{x \mapsto d, y \mapsto c\}$

Beispiel 4.63 (Abbildung von x auf $f(x)$)

Problem Unifikation von x und $f(x)$ resultiert in $x \mapsto f(x)$

Lösung Occurs-Check: x kann nicht auf Term abgebildet werden, der x enthält

Übung 4.64

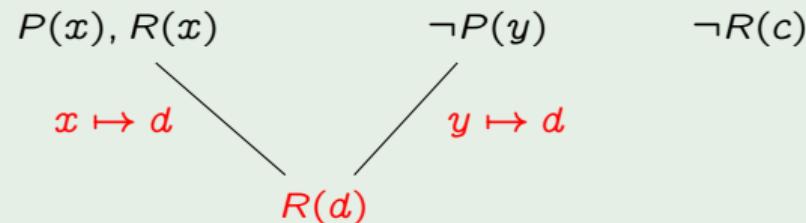
Seien

- u, w, x, y, z Variablen,
- c, d Konstantensymbole,
- f ein einstelliges und g ein zweistelliges Funktionssymbol,
- N und P einstellige, R ein zweistelliges und S ein dreistelliges Prädikat.

Versuchen Sie, Unifikatoren für die folgenden Paare von Atomen zu finden.

- 1 $P(x)$ und $P(f(g(y, z)))$
- 2 $P(x)$ und $N(f(y))$
- 3 $R(x, f(x))$ und $R(f(y), z)$
- 4 $R(x, f(x))$ und $R(f(y), y)$
- 5 $R(x, f(x))$ und $R(f(c), d)$
- 6 $S(x, f(g(x, y)), g(x, f(d)))$ und $S(g(c, d), f(z), g(g(c, u), w))$

Beispiel 4.65 (Mehrere mögliche Unifikatoren)



Problem manche Unifikatoren verhindern Resolution

Lösung Allgemeinster Unifikator (MGU): ersetze so wenig wie möglich

Unifikations-Algorithmus

Eingabe: Atome φ, ψ

Ausgabe: $\text{au}(\varphi, \psi)$, wenn φ und ψ unifizierbar sind; „nicht unifizierbar“, sonst

```
1:  $\sigma := \{\}$ 
2: while  $\sigma(\varphi) \neq \sigma(\psi)$  do
3:     sei  $i$  die erste Position, an der sich  $\sigma(\varphi)$  und  $\sigma(\psi)$  unterscheiden
4:     if  $\sigma(\varphi)|_i$  oder  $\sigma(\psi)|_i$  ist Prädikat then
5:         return „nicht unifizierbar“
6:     else if weder  $\sigma(\varphi)|_i$  noch  $\sigma(\psi)|_i$  ist Variable then
7:         return „nicht unifizierbar“
8:     else
9:         sei  $x$  die Variable,  $t$  der andere Term
10:        if  $x$  ist echter Subterm von  $t$  then
11:            return „nicht unifizierbar“
12:        else
13:            Ersetze jedes Vorkommen von  $x$  in  $\sigma$  durch  $t$ 
14:             $\sigma := \sigma \cup \{x \mapsto t\}$ 
15: return  $\sigma$ 
```

Beispiel 4.66

$$\varphi = R(x, z, g(x, f(y)))$$

$$\psi = R(f(c), u, g(w, f(g(u, w))))$$

$$x \mapsto f(c) \quad \text{Occurs-Check}$$

$$u \mapsto z \quad \text{allgemeinster Unifikator}$$

$$w \mapsto f(c)$$

$$y \mapsto g(z, f(c))$$

Übung 4.67

Seien

- x, y, z Variablen,
- c, d Konstanten,
- f einstelliges, g ein zweistelliges und h ein dreistelliges Funktionssymbol,
- S und T dreistellige Prädikate.

Wenden Sie den Unifikations-Algorithmus an, um allgemeinste Unifikatoren für die folgenden Paare von Termen zu finden. Beachten Sie die disjunkte Umbenennung der Variablen.

- 1 $\varphi_1 = S(x, f(y), g(z, d))$ und $\psi_1 = S(c, f(x), g(f(z), z))$
- 2 $\varphi_2 = T(x, f(x), h(f(y), z, z))$ und $\psi_2 = T(c, f(y), h(z, f(x), c))$

Prämissen:

- 1 Bob kauft einen Kürbis.

$$\exists x(\text{Kauft}(b, x) \wedge \text{Kürbis}(x))$$

- 2 Wer einen Kürbis kauft, isst ihn oder schnitzt ihn.

$$\forall x \forall y (\text{Kauft}(x, y) \wedge \text{Kürbis}(y) \rightarrow \text{Isst}(x, y) \vee \text{Schnitzt}(x, y))$$

- 3 Kinder essen keine Kürbisse.

$$\forall x (\text{Kind}(x) \rightarrow \forall y (\text{Kürbis}(y) \rightarrow \neg \text{Isst}(x, y)))$$

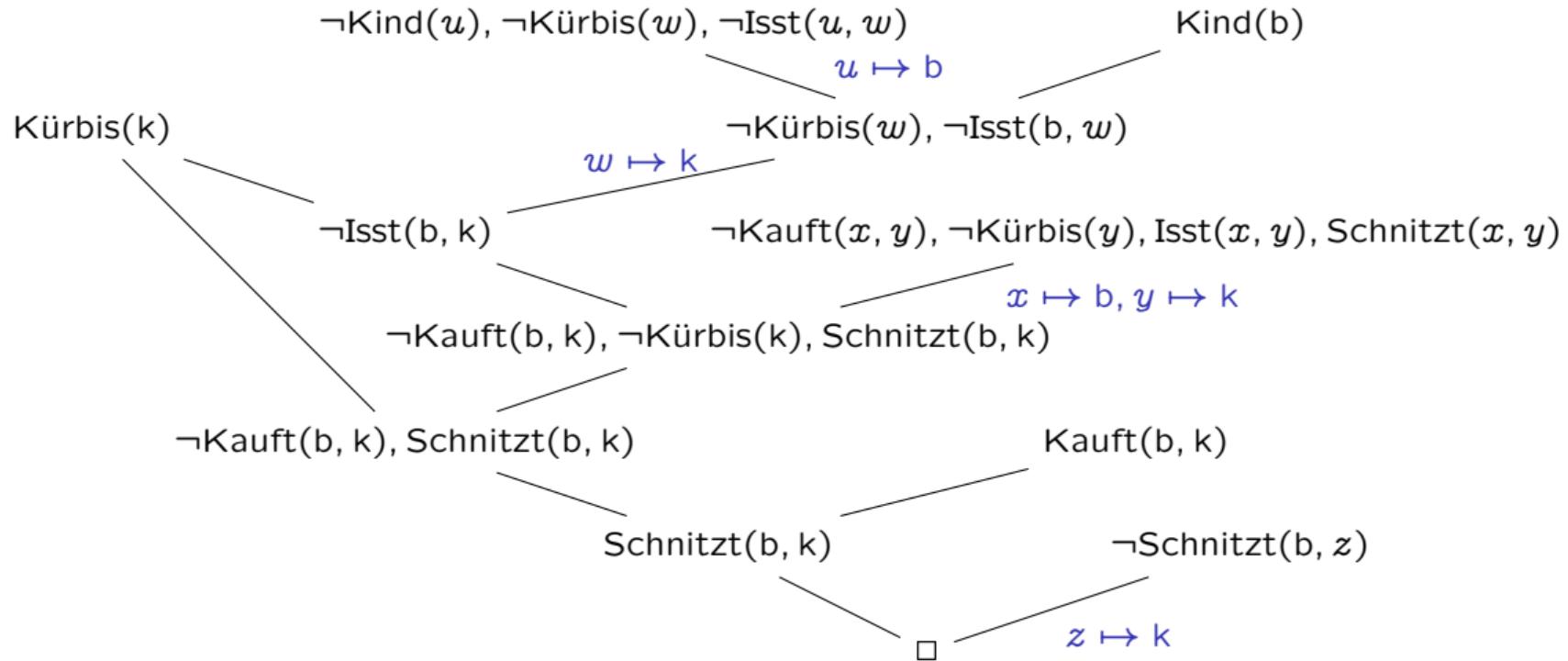
Konklusion:

- 4 Wenn Bob ein Kind ist, schnitzt er etwas.

$$\text{Kind}(b) \rightarrow \exists x \text{Schnitzt}(b, x)$$

- 0 Konjunktion von Prämissen und Negation der Konklusion
- 1 Negations-Normalform
 - 1 Ersetzung von $\varphi \rightarrow \psi$ durch $\neg\varphi \vee \psi$
 - 2 Gesetze von De Morgan
 - 3 Entfernung doppelter Negation
- 2 Skolemisierung
- 3 Allquantoren
 - 1 Variablen-Umbenennung
 - 2 \forall weglassen
- 4 Konjunktive Normalform

Kauft(b, k) \wedge
Kürbis(k) \wedge
 $(\neg\text{Kauft}(x, y) \vee \neg\text{Kürbis}(y) \vee \text{Isst}(x, y) \vee \text{Schnitzt}(x, y)) \wedge$
 $(\neg\text{Kind}(u) \vee \neg\text{Kürbis}(w) \vee \neg\text{Isst}(u, w)) \wedge$
Kind(b) \wedge
 $\neg\text{Schnitzt}(b, z)$



Übung 4.68

Zeigen Sie mittels Resolution der folgenden Folgerung:

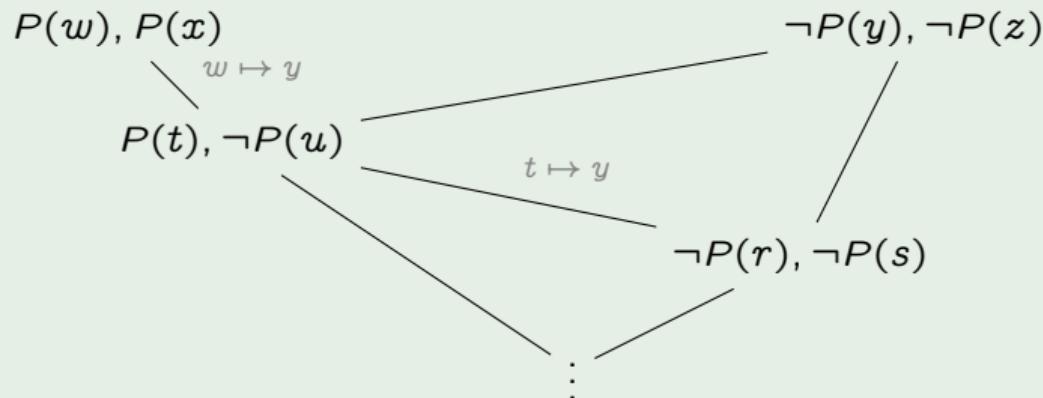
Prämissen:

- 1 Alle Hunde bellen.
- 2 Wer Katzen hat, hat keine Mäuse.
- 3 Wer leicht aufwacht, hat nichts, das bellt.
- 4 Anna hat einen Hund oder eine Katze.

Konklusion:

- 5 Wenn Anna leicht aufwacht, hat sie keine Mäuse.

Beispiel 4.69 (Resolution von $\{P(w), P(x)\}$ und $\{\neg P(y), \neg P(z)\}$)



- Problem
- redundante Literale
 - $\forall w \forall x (P(w) \vee P(x)) \equiv \forall x P(x)$

- Lösung
- eliminiere Redundanz
 - führe Unifikation **innerhalb** einer Klausel durch

Definition 4.70 (Faktor)

Sei $C = \{L_1, L_2, L_3, \dots\}$ und σ allgemeinster Unifikator von L_1 und L_2 .
Dann hat C den Faktor $\sigma(C)$.

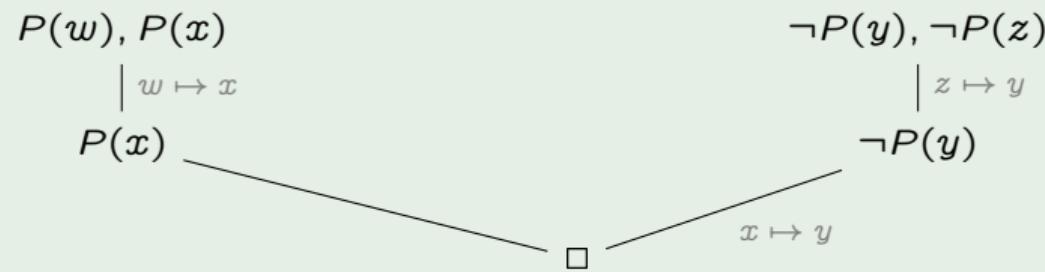
Beispiel 4.71 (Faktoren)

- $\{P(w), P(x)\}$ hat Faktor $\{P(x)\}$.
- $\{P(x), P(c)\}$ hat Faktor $\{P(c)\}$.
- $\{P(x), P(c), R(x, y)\}$ hat Faktor $\{P(c), R(c, y)\}$.

Neue Regel:

Wenn C_1 den Faktor C_2 hat, leite C_2 von C_1 ab ($C_1 \vdash C_2$).

Beispiel 4.72 (Faktorisierung)



Satz 4.73 (Korrektheit der PL-Resolution)

$\mathcal{K}(\varphi) \vdash^* \square$ impliziert Unerfüllbarkeit von φ .

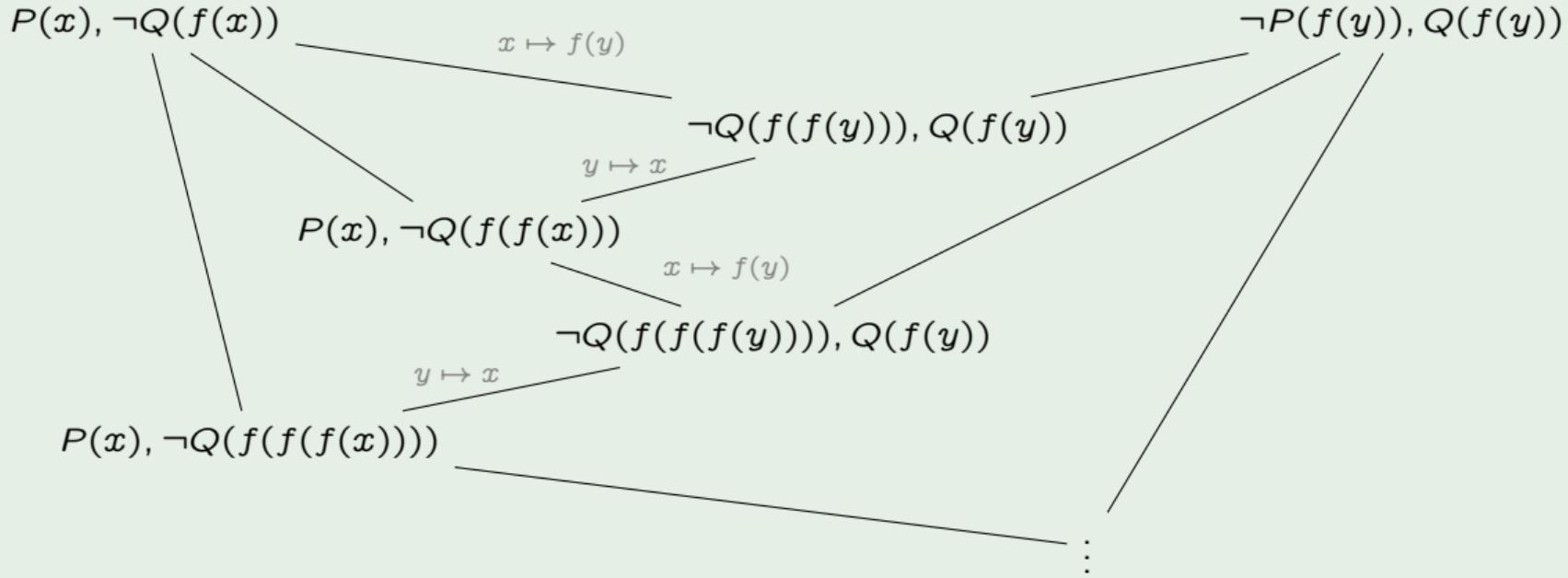
Satz 4.74 (Widerlegungsvollständigkeit der PL-Resolution)

Wenn φ unerfüllbar ist, gilt $\mathcal{K}(\varphi) \vdash^* \square$.

Terminierung?

Terminiert der Resolutionsalgorithmus für jede Eingabe?

Beispiel 4.75



PL-Erfüllbarkeit unentscheidbar \rightsquigarrow Terminierung nicht erreichbar.

Inhalt

1. Einführung

2. Mengen

3. Aussagenlogik

4. Prädikatenlogik

4.1 Relationen und Funktionen

4.2 Syntax

4.3 Semantik

4.4 Schlussfolgerungsverfahren

4.4.1 Resolution

4.4.2 Tableaus

5. Prolog

- Gleiches Grundprinzip
 - Regeln
 - Clashes
- Vorverarbeitung: NNF
 - Negation nur vor Atomen
- Zusätzliche Regeln für Quantoren
 - \forall -Regel
 - \exists -Regel
- Definition von Clash auf PL-Formeln erweitert

\exists Wenn $\exists x\varphi \in S$ gilt

und **keine Substitution** $\sigma = \{x \mapsto t\}$ für einen Term t existiert mit $\sigma(\varphi) \in S$

dann $S := S \cup \sigma(\varphi)$ mit $\sigma = \{x \mapsto c\}$ für ein neues Konstantensymbol c

- eliminiere \exists durch Skolemisierung
- Konstanten können immer verwendet werden
 - \forall -Quantoren werden vorher durch \forall -Regel bearbeitet
 - keine komplexen Skolem-Funktionen nötig

\forall Wenn $\forall x\varphi \in S$ gilt

und t ein **beliebiger** Grundterm ist

dann $S := S \cup \sigma(\varphi)$ mit $\sigma = \{x \mapsto t\}$

- t kann auch neues Konstantensymbol sein
- anwendbar auf unendliche Menge von Grundterminen
 - Keine Anwendbarkeitsbedingung \rightsquigarrow **immer anwendbar!**
 - Terminierung ist nicht garantiert

Beispiel: Halloween-Tableau

| | | |
|----|---|--|
| 1 | $\exists x (\text{Kauft}(b, x) \wedge \text{Kürbis}(x)) \quad \wedge$
$\forall x \forall y (\neg \text{Kauft}(x, y) \vee \neg \text{Kürbis}(y) \vee \text{Isst}(x, y) \vee \text{Schnitzt}(x, y)) \quad \wedge$
$\forall x (\neg \text{Kind}(x) \vee \forall y (\neg \text{Kürbis}(y) \vee \neg \text{Isst}(x, y))) \quad \wedge$
$\text{Kind}(b) \wedge \forall x \neg \text{Schnitzt}(b, x)$ | |
| 2 | $\exists x (\text{Kauft}(b, x) \wedge \text{Kürbis}(x))$ | 1: \wedge |
| 3 | $\forall x \forall y (\neg \text{Kauft}(x, y) \vee \neg \text{Kürbis}(y) \vee \text{Isst}(x, y) \vee \text{Schnitzt}(x, y))$ | |
| 4 | $\forall x (\neg \text{Kind}(x) \vee \forall y (\neg \text{Kürbis}(y) \vee \neg \text{Isst}(x, y)))$ | |
| 5 | $\text{Kind}(b)$ | |
| 6 | $\forall x \neg \text{Schnitzt}(b, x)$ | |
| 7 | $\text{Kauft}(b, k) \wedge \text{Kürbis}(k)$ | 2: $\exists(x \mapsto k)$ |
| 8 | $\text{Kauft}(b, k)$ | 7: \wedge |
| 9 | $\text{Kürbis}(k)$ | |
| 10 | $\neg \text{Schnitzt}(b, k)$ | 6: $\forall(x \mapsto k)$ |
| 11 | $\neg \text{Kauft}(b, k) \vee \neg \text{Kürbis}(k) \vee \text{Isst}(b, k) \vee \text{Schnitzt}(b, k)$ | 3: $\forall(x \mapsto b, y \mapsto k)$ |
| 12 | $\neg \text{Kind}(b) \vee \forall y (\neg \text{Kürbis}(y) \vee \neg \text{Isst}(b, y))$ | 4: $\forall(x \mapsto b)$ |
| 13 | $\neg \text{Kind}(b) \quad \forall y (\neg \text{Kürbis}(y) \vee \neg \text{Isst}(b, y))$ | 12: \vee |
| 14 | $\not\vdash 5 \quad \neg \text{Kürbis}(k) \vee \neg \text{Isst}(b, k)$ | 13: $\forall(y \mapsto k)$ |
| 15 | $\neg \text{Kürbis}(k) \quad \neg \text{Isst}(b, k)$ | 14: \vee |
| 16 | $\not\vdash 9 \quad \neg \text{Kauft}(b, k) \quad \neg \text{Kürbis}(k) \quad \text{Isst}(b, k) \quad \text{Schnitzt}(b, k)$ | 11: \vee |
| | $\not\vdash 8 \quad \not\vdash 9 \quad \not\vdash 15 \quad \not\vdash 10$ | |

- φ ist unerfüllbar
- Prämissen implizieren Konklusion

Übung 4.76

Verwenden Sie ein Tableau, um zu zeigen, dass Anna keine Mäuse hat.

$$\begin{aligned}\varphi = & \forall x(\neg H(x) \vee B(x)) \quad \wedge \\& \forall x \forall y \forall z(\neg \text{Hat}(x, y) \vee \neg K(y) \vee \neg \text{Hat}(x, z) \vee \neg M(z)) \quad \wedge \\& \forall x \forall y(\neg L(x) \vee \neg \text{Hat}(x, y) \vee \neg B(y)) \quad \wedge \\& \exists x(\text{Hat}(a, x) \wedge (H(x) \vee K(x))) \quad \wedge \\& L(a) \wedge \exists x(\text{Hat}(a, x) \wedge M(x))\end{aligned}$$

Peano-Axiomensystem der natürlichen Zahlen :

- 1 Null ist eine natürliche Zahl.
- 2 Jede natürliche Zahl hat eine natürliche Zahl als Nachfolger.
- 3 Null ist nicht der Nachfolger einer natürlichen Zahl.
- 4 Wenn natürliche Zahlen denselben Nachfolger haben, handelt es sich um dieselbe Zahl.
- 5 Die natürlichen Zahlen sind die kleinste Menge, die Null und den Nachfolger jedes Elements enthält.

Alternativ:

Jede Menge, die Null und den Nachfolger jedes Elements enthält, ist eine Obermenge der natürlichen Zahlen.



Giuseppe Peano
(1858–1932)

Übung 4.77

1 Formalisieren Sie die Peano-Axiome 1–4 in der Prädikatenlogik.

■ Verwenden Sie die folgende Signatur:

- Prädikat $N^{(1)}(x)$: „ x ist eine natürliche Zahl“
 - Prädikat $=^{(2)}(x, y)$: „ x ist gleich y “
- Für Gleichheit gehen wir davon aus, dass die korrekte Interpretation fest vorgegeben ist.
- Funktionssymbol $z^{(0)}$: die Konstante „Null“
 - Funktionssymbol $s^{(1)}(x)$: „Nachfolger von x “

■ Axiom 5 kann in der PL 1. Stufe nicht formalisiert werden.

2 Zeigen Sie, dass die Axiome 1–4 **widerspruchsfrei** sind.

- Zeigen Sie die Erfüllbarkeit der Konjunktion der Axiome.
- Resolution und Tableaualgorithmus terminieren nicht immer.

3 Zeigen Sie, dass die Axiome 1–4 **unabhängig** sind.

- Zeigen Sie für jedes Axiom, dass seine Negation zusammen mit den anderen Axiomen erfüllbar ist; z. B. $1 \wedge 2 \wedge \neg 3 \wedge 4$.
- Verwenden Sie die vom Tableau-Algorithmus erzeugten Modelle, um sich zu verdeutlichen, dass diese Modelle nicht isomorph zu \mathbb{N} sind.

- Problem: Effizienz abhängig von Auswahl der Terme in \forall -Regel
 - in Beispielen: immer sofort „richtiger“ Term
 - Programm muss alle Möglichkeiten testen
 - Signatur mit 4 Konstantensymbolen und Formel mit 5 universell quantifizierten Variablen $\rightsquigarrow 4^5 = 1024$ mögliche Regelanwendungen
 - Signatur mit Funktionssymbolen \rightsquigarrow unendlich viele Möglichkeiten
- Abhilfe:
 - Heuristiken: Beginne mit Termen, die bereits vorkommen
 - Nicht in jedem Fall ausreichend: $\forall x P(x) \wedge \forall x \neg P(x)$
 - Modifizierter Algorithmus: Tableau-Algorithmus mit [Unifikation](#)
 - Verzögere Substitution
 - Verwende Unifikation zum Finden einer Substitution, die Clash erzeugt

\forall^u Wenn $\forall x\varphi \in S$

dann $S := S \cup \sigma(\varphi)$ mit $\sigma = \{x \mapsto y\}$ für eine neue Variable y

- y ist freie Variable!
- immer anwendbar

\exists^u Wenn $\exists x\varphi \in S$

und es keine Substitution $\sigma = \{x \mapsto t\}$ für einen Term t gibt mit $\sigma(\varphi) \in S$

und φ enthält die freien Variablen y_1, \dots, y_n

dann $S := S \cup \sigma(\varphi)$ mit $\sigma = \{x \mapsto f(y_1, \dots, y_n)\}$ für ein neues n -stelliges f

- Nachteil: Komplexe Skolem-Funktionen nötig

S Wenn es in einer Spalte Formeln φ und ψ gibt

und einen Unifikator σ für die freien Variablen mit $\sigma(\varphi) = \neg\sigma(\psi)$

dann wende σ auf gesamtes Tableau an

- nicht nur auf aktuelle Spalte!
- gleiches Ergebnis, wie wenn man σ von Anfang an verwendet hätte
- freie Variablen müssen überall ersetzt werden

Beispiel 4.78

| | | | |
|---|--|---------------------------------|-------------------------------------|
| 1 | $\forall x \exists y (M(x, y) \vee P(x, y)) \wedge \forall z (\neg M(c, z) \wedge \neg P(c, z))$ | | |
| 2 | $\forall x \exists y (M(x, y) \vee P(x, y))$ | 1: \wedge | |
| 3 | $\forall z (\neg M(c, z) \wedge \neg P(c, z))$ | | |
| 4 | $\exists y (M(c, y) \vee P(c, y))$ | 2: $\forall^u (x \mapsto r)$ | |
| 5 | $M(c, f(c)) \vee P(c, f(c))$ | 4: $\exists^u (y \mapsto f(r))$ | |
| 6 | $\neg M(c, f(c)) \wedge \neg P(c, f(c))$ | 3: $\forall^u (z \mapsto s)$ | |
| 7 | $\neg M(c, f(c))$ | 6: \wedge | |
| 8 | $\neg P(c, f(c))$ | | |
| 9 | $M(c, f(c))$ | 5: \vee | S { $r \mapsto c, s \mapsto f(c)$ } |
| | $\downarrow 7$ | $\downarrow 8$ | |

Mit den Übungsaufgaben auf der Seite

<https://www.cs.utexas.edu/users/novak/reso.html>

können Sie die Themen

- Formalisierung
- Normalformen
- Resolution
- Tableaus

im Selbststudium vertiefen.

Syntax Variablen, Prädikate, Funktionssymbole, Quantoren
Terme, Atome, komplexe Formeln
Modellierung der inneren Struktur von Aussagen

Interpretation Domäne, Funktionen, Relationen

Schlussfolgerung korrekt, vollständig
nicht terminierend \rightsquigarrow unentscheidbar

Resolution NNF, SF, Unifikation, Faktorisierung

Tableau \exists/\forall -Regel, Anwendbarkeit

1. Einführung
2. Mengen
3. Aussagenlogik
4. Prädikatenlogik
- 5. Prolog**
 - 5.1 Terme
 - 5.2 Fakten, Regeln und Anfragen
 - 5.3 Unifikation, Termgleichheit und Arithmetik
 - 5.4 Horn-Resolution und Suchbäume
 - 5.5 Rekursion
 - 5.6 Listen
 - 5.7 Der Cut

- entwickelt 1972 in Frankreich von Alain Colmerauer
- Programmation en logique
- ISO-Standard 1995
- Deklarative Programmiersprache
 - „Was gilt?“
 - Beschreibung der Domäne
 - Beantwortung von Anfragen
 - Verwendung logischer Schlussfolgerungsverfahren
- Gegenbegriff: Imperative Programmiersprache
 - „Was ist zu tun?“
 - Beschreibung eines Vorgehens (Algorithmus)
- ermöglicht sehr kompakte Programme
- erfordert andere Denkweise
- Anwendungsbereiche:
 - Künstliche Intelligenz
 - Spracherkennung



Alain Colmerauer
(1941–2017)

Beispiel 5.1 (Imperatives Kochrezept)

- 1 3 Knoblauchzehen schälen und pressen
- 2 1 Chilischote kleinschneiden
- 3 Knoblauch und Chili in 50ml Olivenöl andünsten
- 4 300g Spaghetti 8 Minuten kochen
- 5 Spaghetti und Öl mischen

Beispiel 5.2 (Deklaratives Kochrezept)

- Spaghetti aglio, olio e peperoncino besteht aus einer Mischung von 300g gekochten Spaghetti und Aglio-Olio-Peperoncino-Sauce
- Spaghetti sind gekocht, wenn sie 8 Minuten in kochendem Wasser gelegen haben.
- Aglio-Olio-Peperoncino-Sauce entsteht durch das Andünsten von 3 gepressten Knoblauchzehen und 1 geschnittenen Chilischote in 50ml Olivenöl

- Beschreibung der Domäne in der Wissensbank
 - einzelne Aussagen formuliert als Klauseln
 - Programmier-Paradigma: Rekursion
 - keine Kontrollstrukturen wie if, while, for
 - kein goto
- Interpreter beantwortet Anfragen zur Domäne
 - Ableitung von neuem Wissen aus Wissensbank
 - Methode:
 - Unifikation von Anfragen und Klauseln der Wissensbank
 - Resolution

- enthält Beschreibung der Welt
- ist das Prolog-„Programm“
- besteht aus prädikatenlogischen Formeln ([Klauseln](#))

Beispiel 5.3

| Prolog | Prädikatenlogik | natürliche Sprache |
|--|--|---|
| <code>party.</code> | P | „Es gibt eine Party.“ |
| <code>woman(mia).</code> | $W(m)$ | „Mia ist eine Frau.“ |
| <code>human(X) :- woman(X).</code> | $\forall x(W(x) \rightarrow H(x))$ | „Jede Frau ist ein Mensch.“ |
| <code>human(X) :-
 human(father(X)),
 human(mother(X)).</code> | $\forall x(H(f(x)) \wedge H(m(x)) \rightarrow H(x))$ | „Sind Vater und Mutter eines Individuums Menschen, ist es auch ein Mensch.“ |

Interpreter

- beantwortet Anfragen
- nutzt Wissensbank
- zieht Schlussfolgerungen

Anfragen

- sind Klauseln
- sind gültig, wenn ihre Negation unerfüllbar ist
- Interpreter testet Erfüllbarkeit der Negation mit Resolution

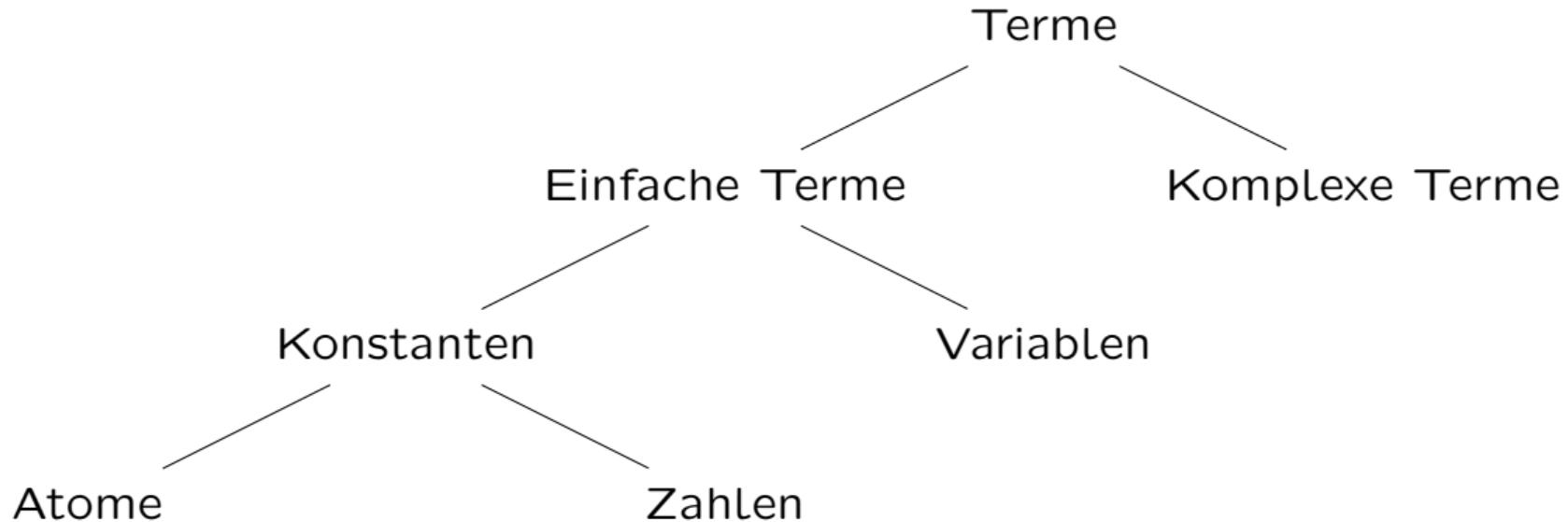
Beispiel 5.4

| Prolog | Prädikatenlogik | natürliche Sprache |
|--|-----------------------------------|--|
| <code>woman(mia).</code> | $W(m)$ | „Ist Mia eine Frau?“ |
| <code>human(mia).</code> | $H(m)$ | „Ist Mia ein Mensch?“ |
| <code>human(X).</code> | $\exists x H(x)$ | „Wer ist ein Mensch?“ |
| <code>human(X), human(father(X)).</code> | $\exists x (H(x) \wedge H(f(x)))$ | „Wer ist ein Mensch und hat einen menschlichen Vater?“ |

- 1. Einführung
- 2. Mengen
- 3. Aussagenlogik
- 4. Prädikatenlogik
- 5. Prolog**

5.1 Terme

- 5.2 Fakten, Regeln und Anfragen
- 5.3 Unifikation, Termgleichheit und Arithmetik
- 5.4 Horn-Resolution und Suchbäume
- 5.5 Rekursion
- 5.6 Listen
- 5.7 Der Cut



Vorsicht

Die Begriffe **Term** und **Atom** haben eine andere Bedeutung als in der Logik!

- | | |
|-----------|--|
| Atome | <ul style="list-style-type: none">■ Strings bestehend aus Buchstaben, Ziffern und Unterstrich (<u>_</u>) beginnend mit Kleinbuchstaben,
Z. B. <code>butch</code>, <code>honey_bunny</code>, <code>bigKahunaBurger3</code>■ Beliebige Strings in einfachen Anführungsstrichen
Z. B. <code>'Vincent'</code>, <code>'Big Kahuna Burger'</code>, <code>'mia@wallace.us'</code> |
| Variablen | <ul style="list-style-type: none">■ Strings bestehend aus Buchstaben, Ziffern und Unterstrich beginnend mit Großbuchstaben oder Unterstrich
Z. B. <code>X</code>, <code>Y</code>, <code>Variable</code>, <code>_var1</code> |
| Zahlen | <ul style="list-style-type: none">■ Ganzzahlen: Strings bestehend aus Ziffern, ggf. beginnend mit Minus
Z. B. <code>1</code>, <code>65536</code>, <code>-28</code>■ Gleitkommazahlen: Zusätzlich Dezimalpunkt und Exponentialschreibweise
Z. B. <code>2.5</code>, <code>-0.000372</code>, <code>3.1415e-3</code> |

Übung 5.5

Sind die folgenden Ausdrücke Atome, Variablen oder keins von beidem?

- 1 vINCENT
- 2 Footmassage
- 3 variable23
- 4 Variable2000
- 5 big_kahuna_burger
- 6 'big kahuna burger'
- 7 big kahuna burger
- 8 'Jules'
- 9 _Jules
- 10 '_Jules'

Funktor muss Atom sein

Argumente können beliebige Terme sein (auch komplexe)

- getrennt durch Komma
- eingeschlossen in Klammern
- Anzahl der Argumente: Stelligkeit
- kein Leerzeichen zwischen Funktor und Klammer

Beispiel 5.6

```
loves(marsellus, mia)
woman(mia)
eats(jules, big_kahuna_burger)
```

```
knows(koons, father(butch))
loves(vincent, wife(marsellus))
less(zero, s(s(s(zero))))
```

Prädikatenlogik

- Funktionssymbol $f^{(i)}$ hat feste Stelligkeit i
- $f^{(1)}(x, y)$ ist syntaktisch falsch

Prolog

- Atom f kann mit unterschiedlichen Stelligkeiten verwendet werden
- $f(x)$ und $f(x, y)$ können parallel verwendet werden
- Notation: $f/1$ bzw. $f/2$
- Zwischen $f/1$ und $f/2$ besteht kein Zusammenhang
 - aus $\text{mother}(\text{john}, \text{anna})$ folgt nicht $\text{mother}(\text{anna})$

Definition 5.7 (Prädikat)

Ein Prädikat ist ein Atom, das als äußerster Funktor in einem komplexen Term in der Wissensbank vorkommt.

Prädikatenlogik

- Funktionssymbol \rightsquigarrow Term \rightsquigarrow Domänenwert

| | |
|--------|---|
| Prolog | <ul style="list-style-type: none">■ Prädikat \rightsquigarrow Atom \rightsquigarrow Wahrheitswert■ keine syntaktische Unterscheidung zwischen Funktionssymbolen und Prädikaten■ Faustregel:<ul style="list-style-type: none">■ Äußerster Funktor: Prädikat■ Innere Funktoren: Funktionssymbole |
|--------|---|

Beispiel 5.8

- `knows(koons, father(butch)).`
 - `knows` ist zweistelliges Prädikat
 - `father` ist einstelliges Funktionssymbol ("Der Vater von Butch")
- `father(butch).`
 - `father` ist einstelliges Prädikat ("Butch ist ein Vater.")

Übung 5.9

Sind die folgenden Ausdrücke Atome, Variablen, komplexe Terme oder nichts von allem?

- 1 loves(Vincent,mia)
- 2 'loves(Vincent,mia)'
- 3 Butch(boxer)
- 4 boxer(Butch)
- 5 and(big(burger),kahuna(burger))
- 6 and(big(X),kahuna(X))
- 7 _and(big(X),kahuna(X))
- 8 (Butch kills Vincent)
- 9 kills(Butch Vincent)
- 10 kills(Butch, Vincent)
- 11 kills(Butch, Vincent)
- 12 kills(Butch(X), Vincent(Y))

Einfacher Term

Atom beginnt mit Kleinbuchstabe
entspricht Funktionssymbol oder Prädikat in Prädikatenlogik

Variable beginnt mit Großbuchstabe oder Unterstrich

Zahl Ganzzahl oder Gleitkommazahl

Komplexer Term

besteht aus

Funktor Atom

Argumente beliebige Terme

Prädikat Äußerster Funktor eines komplexen Terms

1. Einführung
2. Mengen
3. Aussagenlogik
4. Prädikatenlogik
- 5. Prolog**
 - 5.1 Terme
 - 5.2 Fakten, Regeln und Anfragen**
 - 5.3 Unifikation, Termgleichheit und Arithmetik
 - 5.4 Horn-Resolution und Suchbäume
 - 5.5 Rekursion
 - 5.6 Listen
 - 5.7 Der Cut

Definition 5.10 (Goal)

Jedes Atom und jeder komplexe Term ist ein Goal.

- entspricht prädikatenlogischem Atombegriff
- in Wissensbank: Aussage über Domäne
- als Anfrage: Frage zur Domäne

Beispiel 5.11 (Goals)

| Term | Aussage | Anfrage |
|-------------------|------------------------|------------------------|
| rain | Es regnet. | Regnet es? |
| woman(mia) | Mia ist eine Frau. | Ist Mia eine Frau? |
| mother(john,anna) | Johns Mutter ist Anna. | Ist Anna Johns Mutter? |
| age(john,12) | John hat das Alter 12. | Hat John das Alter 12? |

Keine Goals: Zahlen, Variablen

Fakten und Anfragen

Fakten

Syntax <Goal>.

Semantik Der Fakt gilt in der Domäne.

Beispiel 5.12

Wissensbank

```
woman(mia).  
woman(jody).  
woman(yolanda).  
dances(jody).  
party.
```

Anfragen

Syntax <Goal>.

Semantik Gilt die Aussage in der Domäne?

Beispiel 5.13

Interpreter

```
?- woman(mia).  
true.  
?- dances(jody).  
true.  
?- dances(mia).  
false.  
?- party.  
true.
```

Closed World Assumption

Beispiel 5.14

Wissensbank

```
dances(jody).
```

Interpreter

```
?- dances(jody).  
true.  
?- dances(mia).  
false.
```

- Antwort **true** bedeutet: Anfrage ist **gültig**
 - In jedem Modell der KB gilt auch die Anfrage
- Antwort **false** bedeutet: Anfrage ist **falsifizierbar**
 - Es gibt ein Modell der KB, in dem die Anfrage nicht gilt.
 - Antwort **false** bedeutet **nicht**, dass aus der KB folgt, dass **Mia nicht tanzt**.
 - Sondern: Aus der KB **folgt nicht**, dass Mia tanzt.

Definition 5.15 (Closed World Assumption)

Alle Aussagen, die nicht mit Sicherheit aus der KB folgen, werden als **false** betrachtet.

falsifizierbar

erfüllbar

unerfüllbar

kontingent

gültig

false

true

Regeln

Syntax `<Kopf> :- <Rumpf> .`

Kopf und Rumpf: Goals

Semantik Kopf **wenn** Rumpf

Der Rumpf impliziert den Kopf.

Beispiel 5.16

Wissensbank

```
works(jules).  
hungry(vincent).  
hungry(jules) :- works(jules).  
eats(vincent) :- hungry(vincent).  
eats(jules) :- hungry(jules).
```

- 2 Fakten
- 3 Regeln

Interpreter

```
?- eats(vincent).  
true.  
?- eats(jules).  
true.
```

Fakt kann als Regel mit leerem Rumpf aufgefasst werden: `works(jules) :- true.`

Konjunktion in Regeln

Syntax $\langle \text{Kopf} \rangle :- \langle \text{Rumpf} \rangle$

Kopf: Goal

Rumpf: $\langle \text{Goal1} \rangle , \langle \text{Goal1} \rangle , \dots$

Semantik Kopf wenn Goal1 und Goal2 und ...

Konjunktion der Goals im Rumpf impliziert den Kopf.

Beispiel 5.17

Wissensbank

```
happy(butch).  
hungry(vincent).  
eats(butch) :- happy(butch), hungry(butch).  
eats(vincent) :- happy(vincent).  
eats(vincent) :- hungry(vincent).
```

Interpreter

```
?- eats(butch).  
false.  
?- eats(vincent).  
true.
```

Disjunktion

Syntax `<Kopf> :- <Rumpf>`

Kopf: `<Goal>`

Rumpf: `<Goal1> ; <Goal1> ; ...`

Semantik Kopf wenn Goal1 oder Goal2 oder ...

Disjunktion der Goals im Rumpf impliziert den Kopf.

Beispiel 5.18

Wissensbank

```
happy(butch).  
hungry(vincent).  
eats(butch) :- happy(butch), hungry(butch).  
eats(vincent) :- happy(vincent); hungry(vincent).
```

Interpreter

```
?- eats(butch).  
false.  
?- eats(vincent).  
true.
```

Konvention: Statt Semikolon mehrere Regeln verwenden \rightsquigarrow bessere Lesbarkeit

Variablen in Anfragen

- können vom Nutzer als Argumente eines Funktors verwendet werden
- können vom Interpreter an Terme **gebunden** werden
- gebundene Variable kann Wert nie mehr ändern
- Variablenbindung wird zurückgegeben
- Suche nach anderen Bindungen: ; eingeben

Beispiel 5.19

Wissensbank

```
woman(mia).  
woman(jody).  
woman(yolanda).
```

Interpreter

```
?- woman(X).  
X = mia ;  
X = jody ;  
X = yolanda.
```

Konjunktive Anfragen

- Anfragen mit mehreren Goals, getrennt durch Komma
- Variablenbindung muss **alle** Goals gleichzeitig wahr machen

Beispiel 5.20

Wissensbank

```
woman(mia).  
woman(jody).  
woman(yolanda).  
  
loves(vincent, mia).  
loves(marsellus, mia).  
loves(pumpkin, honey_bunny).  
loves(honey_bunny, pumpkin).
```

Interpreter

```
?- loves(marsellus,X), woman(X).  
X = mia.  
?- loves(pumpkin,X), woman(X).  
false.
```

Variablen in der Wissensbank

- Klauseln in der Wissensbank können Variablen enthalten
- Diese sind implizit **universell** quantifiziert

Beispiel 5.21

Wissensbank

```
loves(vincent,mia).  
loves(marsellus,mia).  
loves(pumpkin, honey_bunny).  
loves(honey_bunny, pumpkin).  
  
jealous(X,Y):- loves(X,Z), loves(Y,Z).  
  
human(X).
```

Interpreter

```
?- jealous(marsellus, W).  
W = vincent ;  
W = marsellus.  
?- human(vincent).  
true.
```

Mit welcher Anfrage erhält man alle Eifersüchtigen?

Übung 5.22

Formalisieren Sie die folgenden Aussagen als Prolog-Wissensbank:

- 1 Butch ist ein Killer.
- 2 Marsellus und Mia sind miteinander verheiratet.
- 3 Zed ist tot.
- 4 Marsellus tötet jeden, der Mia die Füße massiert.
- 5 Mia liebt jeden guten Tänzer.
- 6 Jules isst alles, was nahrhaft oder lecker ist.

Übung 5.23

Gegeben sei die folgende Wissensbank:

```
hasWand(harry).  
quidditchPlayer(harry).  
wizard(ron).  
wizard(X) :- hasBroom(X), hasWand(X).  
hasBroom(X) :- quidditchPlayer(X).
```

Welche Antworten gibt der Interpreter auf die folgenden Anfragen?

- 1 wizard(ron).
- 2 wizard(hermione).
- 3 wizard(harry).
- 4 wizard(X).

Goal Atom oder komplexer Term

Fakt <Goal>.

Regel <Goal> :- <Goal> [, <Goal> ...] .

Anfrage <Goal> [, <Goal> ...] .

- erfolgreich: **true** oder Variablenbindung
weitere Antworten mit ;
- nicht erfolgreich: **false**

Variablen

- in Wissensbank: **universell** quantifiziert („Jede Frau ist ein Mensch.“)
- in Anfrage: **existentiell** quantifiziert („Gibt es einen Menschen?“)

Inhalt

1. Einführung
2. Mengen
3. Aussagenlogik
4. Prädikatenlogik
5. Prolog
 - 5.1 Terme
 - 5.2 Fakten, Regeln und Anfragen
 - 5.3 Unifikation, Termgleichheit und Arithmetik**
 - 5.4 Horn-Resolution und Suchbäume
 - 5.5 Rekursion
 - 5.6 Listen
 - 5.7 Der Cut

Definition 5.24

Prolog-Terme t und s sind **unifizierbar**, wenn es eine Substitution σ gibt, die die in s und t enthaltenen Variablen so an Terme bindet, dass $\sigma(t) = \sigma(s)$ gilt.

Unterschiede zur Unifikation in der Prädikatenlogik

- keine strikte Trennung zwischen Funktionssymbolen und Prädikaten
 X ist unifizierbar mit `woman(mia)`.
- kein Occurs-Check
 X ist unifizierbar mit `father(X)`.
Abhilfe: `unify_with_occurs_check(X,father(X))`.

Unifikation und Stelligkeit

Wissensbank

```
married(marsellus,mia).
```

Interpreter

```
?- married(X).
```

ERROR: Unknown procedure: married/1

Unifikation mit =

Das Prädikat =/2

- ist erfolgreich, wenn die beiden Argumente unifizierbar sind
- gibt die für die Unifikation notwendigen Variablenbindungen zurück

Beispiel 5.25

Interpreter

```
?- X = mia.  
X = mia.  
?- woman(X) = woman(mia).  
X = mia.  
?- loves(X,vincent) = loves(mia,X).  
false.  
?- loves(mia,vincent) = loves(X,X).  
false.  
?- knows(father(vincent),X) = knows(Y,mother(mia)).  
X = mother(mia), Y = father(vincent).
```

Übung 5.26

Wie beantwortet der Prolog-Interpreter die folgenden Anfragen?

- | | |
|------------------------|--|
| 1 bread = bread. | 8 food(X) = food(bread). |
| 2 'Bread' = bread. | 9 food(bread,X) = food(Y,sausage). |
| 3 'bread' = bread. | 10 food(bread,X,beer) = food(Y,sausage,X). |
| 4 Bread = bread. | 11 food(bread,X,beer) = food(Y,kahuna_burger). |
| 5 bread = sausage. | 12 food(X) = X. |
| 6 food(bread) = bread. | 13 meal(food(bread),drink(beer)) = meal(X,Y). |
| 7 food(bread) = X. | 14 meal(food(bread),X) = meal(X,drink(beer)). |

Das Prädikat \=

- zweistellig (\=/2)
- Negation von =
- gibt **false** zurück, wenn die Argumente unifizierbar sind
- gibt **true** zurück, wenn die Argumente **nicht** unifizierbar sind
- gibt nie Variablenbindungen zurück

Beispiel 5.27

```
?- mia \= vincent.  
true.  
?- a \= b.  
true.  
?- a \= a.  
false.  
?- a \= B.  
false.  
? B = b, a \= B.  
B = b.
```

Unifikation für Anfragen

Ein Goal einer Anfrage wird unifiziert

- mit den **Fakten** der Wissensbank
- mit den **Regel-Köpfen** der Wissensbank

Beispiel 5.28

Wissensbank

```
vertical(line(point(X,Y), point(X,Z))).  
horizontal(line(point(X,Y), point(Z,Y))).
```

Interpreter

```
?- horizontal(line(point(1,2), point(3,W))).  
W = 2.  
?- horizontal(line(point(2,3), Point)).  
Point = point(_G2239,3).
```

- `_G2239` ist **ungebundene interne Variable**
- Bedeutung: Jede Bindung führt zum Erfolg

Übung 5.29

Gegeben sei die folgende Wissensbank:

```
house_elf(dobby).  
witch(hermione).  
witch('McGonagall').  
wizard(ron).  
magic(X) :- house_elf(X).  
magic(X) :- wizard(X).  
magic(X) :- witch(X).
```

Welche Antworten erzeugen die folgenden Anfragen?

- 1** magic(house_elf).
- 2** wizard(harry).
- 3** magic(wizard).
- 4** magic('McGonagall').
- 5** magic(Hermione).

Die anonyme Variable _

- ist mit jedem Term unifizierbar
- kann bei jedem Vorkommen unterschiedlich gebunden werden
- Bindung wird nicht zurückgegeben
- Zweck: Platzhalter für Terme, die uninteressant sind

Beispiel 5.30

Wissensbank

```
married(mia,marsellus).  
  
married(X) :- married(X,_).  
married(X) :- married(_,X).
```

Interpreter

```
?- married(X,Y).  
X = mia, Y = marsellus.  
?- married(X,X).  
false.  
?- married(_,_).  
true.  
?- married(X).  
X = mia ;  
X = marsellus.
```

Übung 5.31

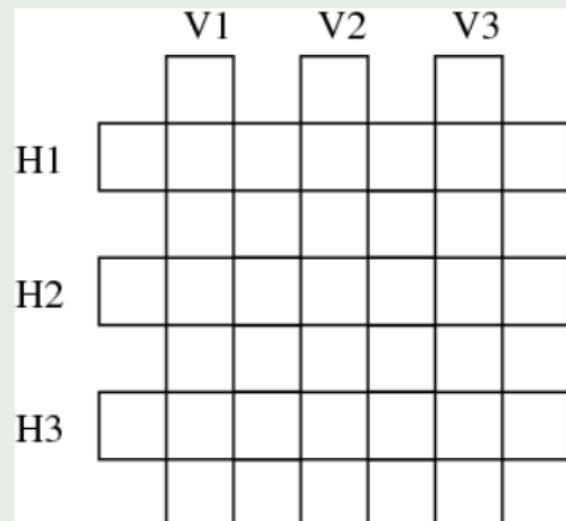
Gegeben sind die folgenden 6 italienischen Wörter:

astante, astoria, baratto, cobalto, pistola, statale.

Schreiben Sie ein Prädikat `crossword/6`, das diese Wörter wie in einem Kreuzworträtsel in das Schema rechts einträgt, so dass die Anfrage `crossword(V1,V2,V3,H1,H2,H3)` eine korrekte Belegung der Zeilen und Spalten ausgibt.

Verwenden Sie hierzu die folgende Wissensbank:

```
word(astante, a,s,t,a,n,t,e).  
word(astoria, a,s,t,o,r,i,a).  
word(baratto, b,a,r,a,t,t,o).  
word(cobalto, c,o,b,a,l,t,o).  
word(pistola, p,i,s,t,o,l,a).  
word(statale, s,t,a,t,a,l,e).
```



Termgleichheit: Das Prädikat ==

Prädikat = testet, ob Argumente **unifizierbar** sind

Prädikat == testet, ob Argumente bereits **gleich** sind

- zweistellig
- gibt **true** zurück, wenn beide Argumente derselbe Term sind
- bindet **nie** Variablen
- berücksichtigt bereits bestehende Variablenbindungen
- Negation: \==

Beispiel 5.32

| | | | |
|----------------------|-----------------------------|-----------------------|---------------|
| a = a. | true. | a == a. | true. |
| a = b. | false. | a == b. | false. |
| a = B. | B = a. | a == B. | false. |
| a = B, a = B. | B = a. | a = B, a == B. | B = a. |
| vincent = 'vincent'. | true. | vincent == 'vincent'. | true. |
| Vincent = 'Vincent'. | Vincent = 'Vincent'. | Vincent == 'Vincent'. | false. |

Übung 5.33

Wie beantwortet der Prolog-Interpreter die folgenden Anfragen?

- 1 married(X,Y) = married(Y,X).
- 2 married(X,Y) == married(Y,X).
- 3 married(X,Y) = married(Y,X), married(X,Y) == married(Y,X).
- 4 married(X,Y) == married(Y,X), married(X,Y) = married(Y,X).
- 5 married(X,Y) \== married(Y,X), married(X,Y) = married(Y,X).
- 6 married(X,Y) == married(Y,X), married(X,Y) \= married(Y,X).
- 7 married(X,Y) \== married(Y,X), married(X,Y) \= married(Y,X).
- 8 loves(X,Y) = loves(mia,mia).
- 9 loves(X,X) = loves(Y,lover(Y)).
- 10 loves(X,X) = loves(mia,lover(mia)).

- Das Prädikat `=/2` führt Unifikation durch
 - Anfrage `X = 2 + 3` liefert Antwort `X = 2 + 3`
 - kann nicht für Rechnungen genutzt werden
- Das Prädikat `is/2` führt arithmetische Operationen durch
 - `X is 2 + 3` liefert Antwort `X = 5`
- Funktionsweise:
 - rechte Seite wird **arithmetisch ausgewertet**
 - Ergebnis wird mit linker Seite **unifiziert**
- Integer-Operatoren: `+, -, *, div, mod`
 - Operator / liefert nicht immer Ganzzahlen
 - „Punkt vor Strich“ wird respektiert
 - Klammern sind erlaubt
- Infix- und Präfix-Notation sind gleichwertig
`X is 1 + 2 * 3` ist derselbe Term wie
`is(X,+(1,*(2,3)))`
- Operatoren führen keine Berechnungen durch
 - `+(2,3)` ist ein komplexer Term wie `mother(john, mary)`
 - Berechnung erfolgt erst durch `is`

Beispiel 5.34

Interpreter

```
?- X is 1 + 2 * 3.  
X = 7.  
?- X is (1 + 2) * 3.  
X = 9.  
?- X is 7 div 3.  
X = 2.  
?- X is 7 mod 3.  
X = 1.  
?- 7 is 1 + 2 * 3.  
true.
```

Beispiel 5.35

Wissensbank

```
square(X,Y) :- Y is X * X.  
inc(X,Y) :- Y is X + 1.  
addThreeAndDouble(X, Y) :- Y is (X+3) * 2.
```

Interpreter

```
?- square(-5,Y).  
Y = 25.  
?- inc(6,Y).  
Y = 7.  
?- addThreeAndDouble(3,Y).  
Y = 12.
```

- alle Variablen auf **rechter** Seite müssen **gebunden** sein

```
?- X is Y + 2.
```

ERROR: Arguments are not sufficiently instantiated

- rechte Seite muss korrekter arithmetischer Ausdruck sein

```
?- X is 5 + z.
```

ERROR: Arithmetic: ‘z/0’ is not a function

- Linke Seite wird **nicht** ausgewertet

```
?- 1 + 2 is 1 + 2.
```

false.

Der Term 3 ist nicht unifizierbar mit $1 + 2$

Vergleichsprädikate

| Arithmetik | Prolog |
|------------|-----------|
| $x < y$ | X < Y |
| $x \leq y$ | X = $<$ Y |
| $x = y$ | X =:= Y |
| $x \neq y$ | X =\= Y |
| $x \geq y$ | X >= Y |
| $x > y$ | X > Y |

- Funktionsweise:
 - 1 Beide Seiten werden arithmetisch ausgewertet
 - 2 Ergebnisse werden verglichen
 - 3 Abhängig vom Ergebnis ist das Goal erfolgreich oder scheitert
- Beide Seiten müssen korrekte arithmetische Terme sein
- Keine Seite darf ungebundene Variablen enthalten
- Vorsicht: Es heißt $=<$ und nicht \leq !

Beispiel 5.36

```
?- 1 + 2 =:= 2 + 1.  
true.  
?- 3 > 5.  
false.  
?- 2 + 3 =\= 5.  
false.  
?- 4 >= 4.  
true.
```

```
?- X + 2 =< X + 3.  
ERROR: Arguments are not sufficiently instantiated  
?- X = 17, X + 2 =< X + 3.  
X = 17.  
?- X = 3 + Y, Y = 2 * 4, X + 2 =:= 3 + 2 * 5.  
X = 3 + 2 * 4, Y = 2 * 4.  
?- X =:= 2 + 3.  
ERROR: Arguments are not sufficiently instantiated
```

Übung 5.37

Welche Antworten liefern die folgenden Anfragen?

- | | |
|-----------------|-----------------------------------|
| 1 14 is 2 * 7. | 8 2 + 3 == 3 + 2. |
| 2 14 =\= 2 * 6. | 9 2 + 3 =:= 3 + 2. |
| 3 14 = 2 * 7. | 10 7 - 2 =\= 9 - 2. |
| 4 14 == 2 * 7. | 11 p == 'p'. |
| 5 14 \== 2 * 7. | 12 p =\= 'p'. |
| 6 14 =:= 2 * 7. | 13 vincent == VAR. |
| 7 14 \= X * Y. | 14 vincent = VAR, VAR == vincent. |

- Unifikation bindet Variablen an andere Terme
 - implizit bei Suche nach passendem Goal in Wissensbank
 - explizit durch Prädikat `=`
- Anonyme Variable `_` kann bei jedem Auftreten neu gebunden werden
- Prädikat `==` testet Termgleichheit
 - bindet `keine` Variablen
- Prädikat `is` wertet rechte Seite aus und unifiziert Ergebnis mit linker Seite
- Prädikate `=:=`, `=\=`, `>`, `<`, `>=`, `=<` werten beide Seiten aus und vergleichen Ergebnisse

1. Einführung
2. Mengen
3. Aussagenlogik
4. Prädikatenlogik
- 5. Prolog**
 - 5.1 Terme
 - 5.2 Fakten, Regeln und Anfragen
 - 5.3 Unifikation, Termgleichheit und Arithmetik
 - 5.4 Horn-Resolution und Suchbäume**
 - 5.5 Rekursion
 - 5.6 Listen
 - 5.7 Der Cut

$$R_1 \wedge R_2 \wedge \dots \wedge R_n \rightarrow K$$

- erstmals beschrieben 1951 von Alfred Horn
- erlauben effiziente Schlussfolgerungsverfahren
 - Aussagenlogik: P-vollständig statt NP-vollständig
 - Prädikatenlogik: weniger Verzweigungen

Definition 5.38

Eine prädikatenlogische **Horn-Formel** hat die Form
Rumpf \rightarrow Kopf, wobei

Kopf ein Atom oder F ist;

Rumpf eine Konjunktion von Atomen oder W ist.

Eine **Horn-Klausel** ist eine in KNF transformierte Horn-Formel.



Alfred Horn
(1918–2001)

Arten von Horn-Klauseln

| | Kopf ist Atom
definite Klausel | Kopf ist F
Ziel-Klausel |
|-----------------------------|---|--|
| Rumpf
ist
Konjunktion | $B(x, y) \wedge K(y, z) \rightarrow O(z, x)$
$\{\neg B(x, y), \neg K(y, z), O(z, x)\}$
Regel-Klausel | $K(x, y) \wedge W(x) \rightarrow F$
$\{\neg K(x, y), \neg W(x)\}$
Anfrage-Klausel |
| Rumpf
ist
W | $W \rightarrow B(a, b)$
$\{B(a, b)\}$
Fakten-Klausel | $W \rightarrow F$
$\{\}$
leere Klausel |

- Horn-Klauseln haben höchstens ein positives Literal
- Resolution von zwei definiten Klauseln erzeugt eine definite Klausel
- Resolution einer Anfrage- mit einer definiten Klausel erzeugt eine Zielklausel
- Resolution von zwei Zielklauseln ist nicht möglich

Beispiel 5.39

| Klausel | Prolog-Syntax | Logik-Syntax | natürliche Sprache |
|---------|------------------------------------|--|--|
| Fakt | human(vincent) | $H(v)$ | Vincent ist ein Mensch. |
| | male(vincent) | $M(v)$ | Vincent ist männlich. |
| | human(mia) | $H(m)$ | Mia ist ein Mensch. |
| | female(mia) | $F(m)$ | Mia ist weiblich. |
| Regel | woman(X) :-
human(X), female(X) | $\forall x(H(x) \wedge F(x)) \rightarrow W(x)$ | Wer menschlich und weiblich ist,
ist eine Frau. |
| Anfrage | woman(X) | $\exists x W(x)$ | Gibt es eine Frau? |

- Gesuchte Antwort: Folgt die Anfrage Q aus der Wissensbank K ?
 - teste mittels Resolution die Erfüllbarkeit $K \wedge \neg Q$
 - im Beispiel: $\forall x \neg W(x)$
- Negation wird in Prolog nicht explizit angegeben
 - Regelköpfe (einschließlich Fakten) sind positiv
 - Regelrümpfe und Anfragen sind implizit negiert

SLD-Resolution

Selective Wählen nächstes Literal (In Prolog: zuletzt eingeführtes)

Linear Erste Elternklausel ist zuletzt erzeugte Zielklausel

Definite clause Zweite Elternklausel ist definite Klausel

Methode

- lege Atome (Goals) der Anfrage auf Stack
- unifiziere oberstes Goal mit allen Regelköpfen
- wenn erfolgreich: ersetze Goal durch Regelrumpf (evtl. mehrere Möglichkeiten)
- wenn Stack leer: Anfrageklausel ist unerfüllbar bzgl. Wissensbank

Vorteile

- weniger Unifikationen: Nur gewähltes Literal mit Köpfen der definiten Klauseln
- weniger erzeugte Klauseln: Nur eine Resolvente pro Anfrage-Klausel

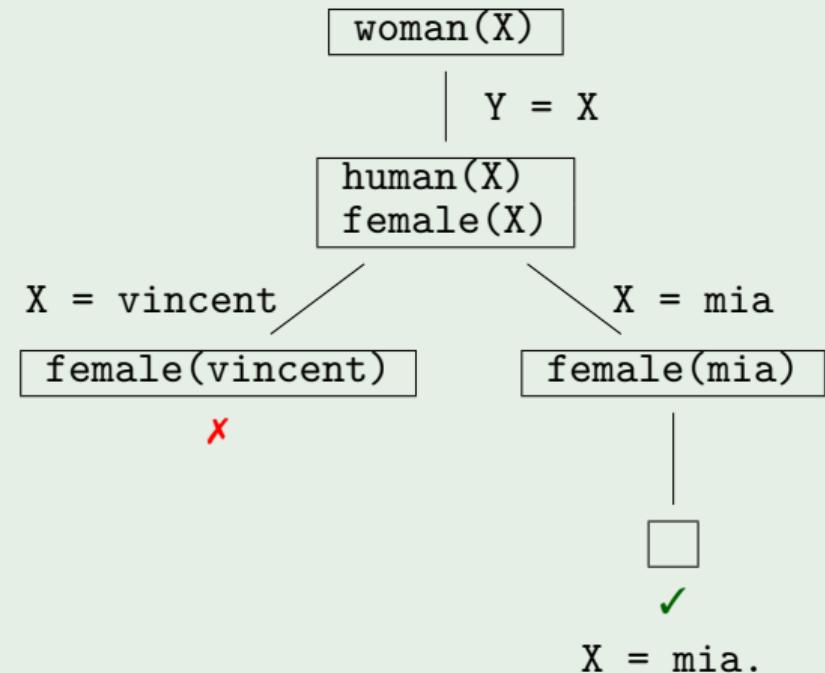
Beispiel 5.40

Wissensbank

```
human(vincent).
male(vincent).
```

```
human(mia).
female(mia).
```

```
woman(Y) :- human(Y), female(Y).
```



SLD-Algorithmus

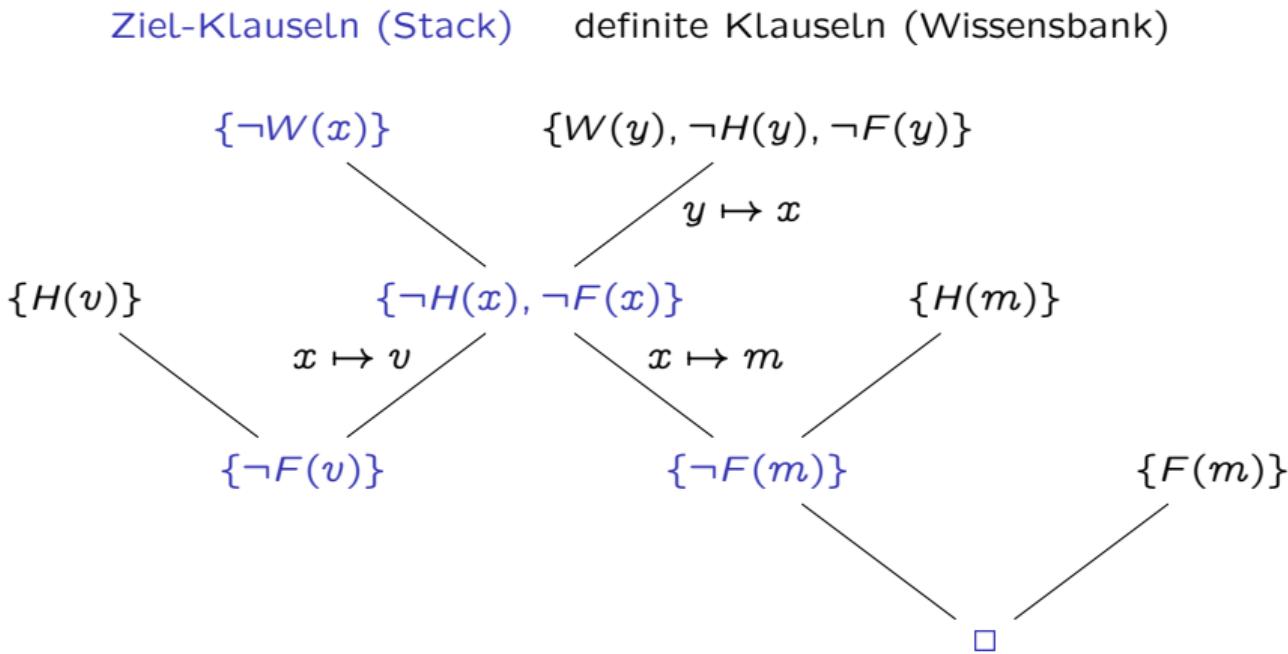
Eingabe: Anfrage-Klausel Q , Wissensbank K

Ausgabe: Variablenbindung, falls $K \models Q$ gilt, sonst **false**

```
1: initialisiere Stack  $S$  mit Goals aus  $Q$ 
2: while  $S$  ist nicht leer do
3:    $G := \text{pop}(S); i := 0$ 
4:   for all Klausel  $C$  in  $K$  do
5:      $\sigma_i := \text{unify}(G, \text{kopf}(C))$ 
6:     if  $\sigma_i$  existiert then
7:        $C_i := C; i := i + 1$ 
8:     if  $i \geq 1$  then
9:       if  $i \geq 2$  then
10:        lege Verzweigungspunkt an: Speichere  $C_i$  und  $\sigma_i$  für alle  $i \geq 2$ 
11:        push( $S, \text{rumpf}(C_1)$ )
12:        Wende  $\sigma_1$  auf alle Goals in  $S$  an
13:     else
14:       if Verzweigungspunkt  $B$  vorhanden then
15:         Backtrack zu  $B$ ; Weiter mit nächstem  $C_i$ 
16:       else
17:         return false
18: return Variablenbindungen
```

Vergleich mit Resolutionsgraph

Signatur: $(\{m^{(0)}, v^{(0)}\}, \{W^{(1)}, H^{(1)}, F^{(1)}\})$



Übung: Suchbaum

Übung 5.41

Gegeben sei die Wissensbank aus Übung 5.29:

```
house_elf(dobby).  
witch(hermione).  
witch('McGonagall').  
wizard(ron).  
  
magic(X) :- house_elf(X).  
magic(X) :- wizard(X).  
magic(X) :- witch(X).
```

Zeichnen Sie den Suchbaum für die Anfrage

```
?- magic(A).
```

Übung 5.42

Gegeben sei die folgende Wissensbank:

```
brother(albert, arthur).  
brother(arthur, albert).  
brother(beth, bob).  
  
child(albert, beth).  
child(beth, charlie).  
  
uncle(X, Y) :- brother(Z, Y), child(Z, X).
```

Zeichnen Sie den Suchbaum für die Anfrage

```
?- uncle(A, B).
```

Zusammenfassung: Horn-Resolution

Horn-Formel $R_1 \wedge R_2 \wedge \dots \wedge R_n \rightarrow K$

Horn-Klausel $\neg R_1 \vee \neg R_2 \vee \dots \vee \neg R_n \vee K$

definite Klausel genau ein positives Atom

Regel mindestens ein negatives Atom

Fakt kein negatives Atom

Zielklausel kein positives Atom

Anfrage mindestens ein negatives Atom

leere Klausel kein negatives Atom

Horn-Resolution

- beginnt mit Anfrage
- unifiziert erstes Goal mit Regel-**Köpfen**
- ersetzt erstes Goal durch Regel-**Rumpf**
- solange, bis alle Goals abgearbeitet sind (**true**)
oder keine Unifikation möglich ist (**false**)

Suchbaum

- Stack von Goals
- Verzweigungspunkte bei mehreren Unifikationen
- Backtracking

- 1. Einführung
- 2. Mengen
- 3. Aussagenlogik
- 4. Prädikatenlogik
- 5. Prolog**

- 5.1 Terme
- 5.2 Fakten, Regeln und Anfragen
- 5.3 Unifikation, Termgleichheit und Arithmetik
- 5.4 Horn-Resolution und Suchbäume
- 5.5 Rekursion**
- 5.6 Listen
- 5.7 Der Cut

Beispiel 5.43 (Fakultät iterativ)

```
int ifac (int n)
{
    int fac = 1;
    for (int i = 1; i <= n; i++)
        fac = fac * i;
    return fac;
}
```

Beispiel 5.44 (Fakultät rekursiv)

```
int rfac (int n)
{
    if (n == 0)
        return 1;
    else
        return n * rfac (n-1);
}
```

To iterate is human, to recurse divine.

L Peter Deutsch

Definition 5.45

Ein Prolog-Prädikat p ist **rekursiv**, wenn in einer Regel, die p als Kopf hat, im Rumpf ebenfalls p vorkommt.

Beispiel 5.46

Wissensbank

```
child(anna,betty).  
child(betty,carol).  
child(carol,donna).  
  
descend(X,Y):- child(X,Y).  
descend(X,Y):- child(X,Z), descend(Z,Y).
```

Interpreter

```
?- descend(anna,betty).  
true.  
?- descend(anna,carol).  
true.  
?- descend(anna,donna).  
true.
```

Suchbaum für descend(anna,donna) .

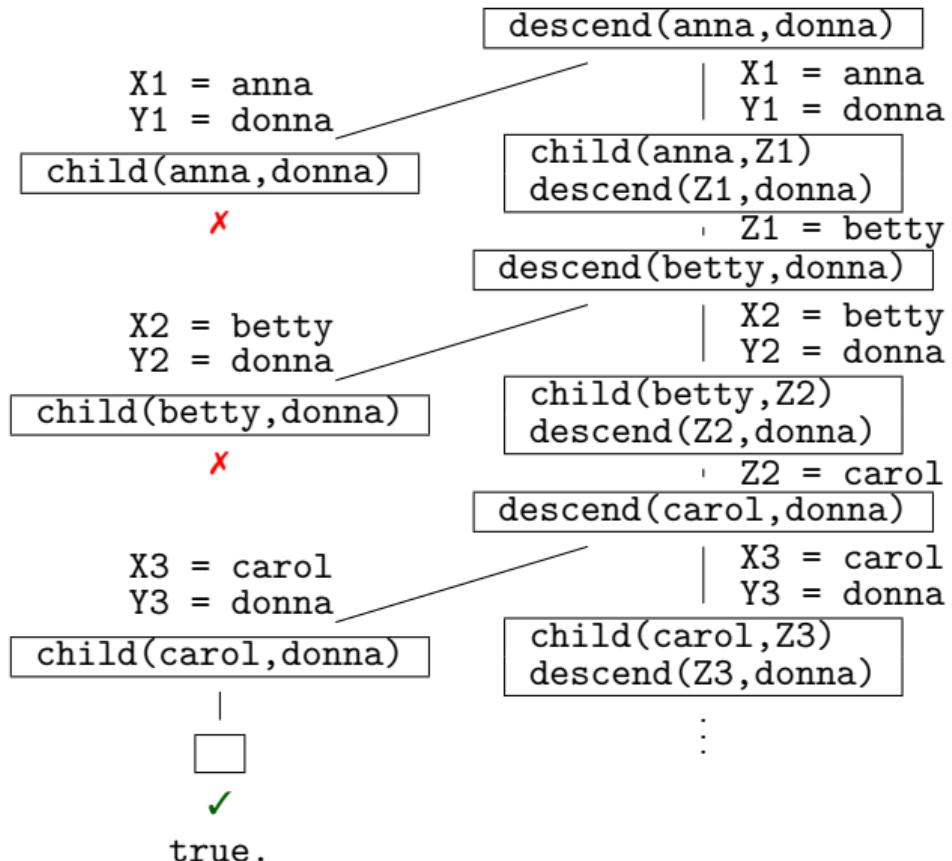
Wissensbank

```
child(anna,betty).  
child(betty,carol).  
child(carol,donna).
```

```
% Basisklausel  
descend(X,Y) :- child(X,Y).  
% Rekursive Klausel  
descend(X,Y) :- child(X,Z),  
    descend(Z,Y).
```

Variablenumbenennung

Bei jeder Unifikation werden die Variablen aus der Wissensbank umbenannt.



Übung 5.47

Ändert sich etwas an der Funktion des Prädikats `descend/2`, wenn man die rekursive Klausel

```
descend(X,Y) :- child(X,Z), descend(Z,Y).
```

durch

```
descend(X,Y) :- descend(X,Z), descend(Z,Y).
```

ersetzt?

Peano-Axiome:

- 1 Null ist eine natürliche Zahl.
- 2 Jede natürliche Zahl hat eine natürliche Zahl als Nachfolger.

Beispiel 5.48

Wissensbank

```
numeral(0).  
numeral(s(X)) :- numeral(X).
```

Interpreter

```
?- numeral(s(s(s(0)))).  
true.  
?- numeral(X).  
X = 0 ;  
X = s(0) ;  
X = s(s(0))  
...
```

Beispiel 5.49

Wissensbank

```
% Basisklausel  
add(0,X,X).  
% Rekursive Klausel  
add(s(X),Y,s(Z)) :- add(X,Y,Z).
```

Intuitiv:

- „Die Summe von 0 und X ist X.“
- „Die Summe vom Nachfolger von X und Y ist der Nachfolger der Summe von X und Y.“

Interpreter

```
?- add(s(s(0)),s(s(s(0))),Sum).  
Sum = s(s(s(s(s(0))))).
```

Übung 5.50

Zeichnen Sie den Suchbaum für die Anfrage

```
?- add(s(s(0)), s(s(s(0))), Sum).
```

Übung 5.51

Gegeben sei die logische Notation für natürliche Zahlen aus Beispiel 5.48.

Schreiben Sie ein Prädikat less/2, das genau dann gilt, wenn das erste Argument echt kleiner ist als das zweite, also:

```
?- less(0, s(s(0))).  
true.  
?- less(s(0), s(0)).  
false.
```

Testen Sie Ihr Programm auch mit Variablen als Parametern.

Prädikatenlogik

- \wedge und \vee sind kommutativ
- $P(x) \wedge B(x, y) \vee C(z)$ ist äquivalent zu $C(z) \vee B(x, y) \wedge P(x)$

Prolog

- Goals auf dem Stack werden von oben nach unten verarbeitet
- Wissensbank wird von oben nach unten durchsucht
- `child(X,Y)`, `descend(Y,Z)` und `descend(Y,Z)`, `child(X,Y)` sind logisch äquivalent, aber prozedural unterschiedlich

Wünschenswert für rekursive Prädikate:

- Basisklausel vor rekursiver Klausel
- Rekursives Goal als letztes im Rumpf (tail-rekursiv)

Varianten von descend/2

Beispiel 5.52 (Korrekte Prädikat)

```
descend(X,Y) :- child(X,Y).  
descend(X,Y) :- child(X,Z), descend(Z,Y).
```

descend(X,Y). \rightsquigarrow 6 Antworten:

- 1 X = anna, Y = betty**
- 6 X = betty, Y = donna**

Beispiel 5.54 (Goals vertauscht)

```
descend(X,Y) :- child(X,Y).  
descend(X,Y) :- descend(Z,Y), child(X,Z).
```

descend(X,Y). \rightsquigarrow 6 Antworten, dann Fehler:

- 1 X = anna, Y = betty**
- 6 X = anna, Y = donna**

ERROR: Out of local stack

Beispiel 5.53 (Klauseln vertauscht)

```
descend(X,Y) :- child(X,Z), descend(Z,Y).  
descend(X,Y) :- child(X,Y).
```

descend(X,Y). \rightsquigarrow 6 Antworten:

- 1 X = anna, Y = donna**
- 6 X = carol, Y = donna.**

Beispiel 5.55 (Beides vertauscht)

```
descend(X,Y) :- descend(Z,Y), child(X,Z).  
descend(X,Y) :- child(X,Z).
```

descend(X,Y). \rightsquigarrow Fehler:

ERROR: Out of local stack

- Rekursive Regel: Kopf-Prädikat taucht im Rumpf auf
- notwendig für leistungsfähige Programme
- für Suchbaum: Variablen umbenennen
- kann zu nicht terminierenden Programmen führen
- Abhilfe:
 - in Wissensbank: zuerst nicht-rekursive Klausel
 - im Regel-Rumpf: zuerst nicht-rekursive Goals ([Tail-Rekursion](#))

1. Einführung
2. Mengen
3. Aussagenlogik
4. Prädikatenlogik

5. Prolog

- 5.1 Terme
- 5.2 Fakten, Regeln und Anfragen
- 5.3 Unifikation, Termgleichheit und Arithmetik
- 5.4 Horn-Resolution und Suchbäume
- 5.5 Rekursion
- 5.6 Listen
- 5.7 Der Cut

[Head | Tail]

- Head
 - erstes Element der Liste
 - beliebiger Prolog-Term (Variable, Atom, Zahl, komplexer Term)
- Tail
 - Rest der Liste
 - alles bis auf das erste Element
 - ist immer eine Liste
- []
 - leere Liste
 - hat weder Head noch Tail
 - ähnlich Null-Pointer

Beispiel 5.56 (Liste mit 3 Elementen)

```
[ vincent | [ mia | [ jules | [ ] ] ] ] ]
```

ist die Liste bestehend aus den Atomen vincent, mia und jules.

Aufzählung der Elemente

- [vincent, mia, jules]
- oft besser lesbar als Head-Tail-Notation
- Notationen können gemischt werden: [vincent, mia | [jules]]

Beispiel 5.57

```
?- [Head | Tail] = [vincent,mia,jules].  
Head = vincent, Tail = [mia,jules].  
?- [Head | Tail] = [mia].  
Head = mia, Tail = [].  
?- [Head | Tail] = [].  
false.  
?- [First, Second | Rest] = [vincent, mia, jules, marsellus].  
First = vincent, Second = mia, Rest = [jules, marsellus].  
?- [First, Second] = [mia].  
false.  
?- [First, Second] = [vincent,mia,jules].  
false.
```

Listen als Listen-Elemente

[[]]

- erstes Element: leere Liste
- Rest: leere Liste

~> Liste, die als einziges Element die leere Liste enthält

~> [[]]

[mia, [vincent, marsellus], [butch, [father(butch), mother(butch)]], []]

- erstes Element: mia
- zweites Element: Liste [vincent, marsellus]
- drittes Element: Liste [butch, [father(butch), mother(butch)]]
- viertes Element: leere Liste

Übung 5.58

Sind die folgenden Ausdrücke syntaktisch korrekte Listen?

Wenn ja, wie viele Elemente haben sie jeweils?

- 1** [1| [2,3,4]]
- 2** [1,2,3| []]
- 3** [1| 2,3,4]
- 4** [1| [2| [3| [4]]]]]
- 5** [1,2,3,4| []]
- 6** [[1,2]| 4]
- 7** [[1,2], [3,4] | [5,6,7]]

Übung 5.59

Welche Antworten gibt der Interpreter auf die folgenden Anfragen?

- 1** [a,b,c] = [a, [b,c]].
- 2** [a,b,c] = [a| [b,c]].
- 3** [a,b,c] = [a,b, [c]].
- 4** [a,b,c] = [a,b| [c]].
- 5** [a,b,c] = [a,b,c, []].
- 6** [a,b,c] = [a,b,c| []].
- 7** [] = _.
- 8** [] = [_].

Menge [mia, vincent, yolanda, butch]

Folge [1,1,2,3,5,8,13,21]

Vektor [1,0,3,7]

Matrix [[1,0,0], [0,1,0], [0,0,1]]

Objekt ['Marsellus', 'Wallace', '3.8.1968', 'Los Angeles']

Menge von Objekten [['Vincent', 'Vega'], ['Jules', 'Winnfield']]

Satz [zed,is,dead]

Das Prädikat member

- zweistellig
- erstes Argument: Term T
- zweites Argument: Liste L
- Resultat: true, wenn T ein Element von L ist, sonst false

Beispiel 5.60

```
?- member(a, [a]).  
true.  
?- member(a, [b,c,d]).  
false.  
?- member(d, [b,c,d]).  
true.  
?- member(a, [[a],b]).  
false.  
?- member(b, [[a],b]).  
true.
```

```
?- member(X, [a,b,[c,d],father(butch),Y]).  
X = a ;  
X = b ;  
X = [c,d] ;  
X = father(butch) ;  
X = Y.  
?- member(X, []).  
false.  
?- member(X,a).  
false.
```

```
member(X, [X|_]).  
member(X, [_|T]) :- member(X, T).
```

X ist ein Element von L, wenn

- X das erste Element von L ist oder
- X ein Element des Rests der Liste ist.

Optimierungen:

- Unifikation im Regelkopf
- Anonyme Variable vermeidet Warnung **Singleton Variable**

Übung 5.61

Zeichnen Sie den Suchbaum für die Anfrage

```
?- member(X,[a,father(butch),[c,d]]).
```

Das Prädikat length

- zweistellig
- erstes Argument: Liste
- zweites Argument: Länge der Liste

```
length([] ,0).  
length([_|T] ,X) :- length(T,Y), X is Y + 1.
```

Beispiel 5.62

```
?- length([],X).  
X = 0.  
?- length([a,b,c],X).  
X = 3.  
?- length([a,[b,c]],X).  
X = 2.
```

```
?- length([a,b],2).  
true.  
?- length(X,3).  
X = [_G578, _G584, _G590].
```

Beispiel 5.63

Wissensbank

```
a2b([], []).  
a2b([a|A], [b|B]) :- a2b(A, B).
```

a2b antwortet **true**, wenn

- beide Argumente Listen sind,
- beide Listen gleich lang sind,
- die erste Liste nur aus a besteht,
- die zweite Liste nur aus b besteht.

Interpreter

```
?- a2b([a,a,a],[b,b,b]).  
true.  
?- a2b([a,a,a],[b,b]).  
false.  
?- a2b(a,b).  
false.  
?- a2b([a,t],[b,b]).  
false.  
?- a2b([a,a,a],X).  
X = [b,b,b].  
?- a2b([a|T],[b,b,b]).  
T = [a,a].
```

Übung 5.64

Zeichnen Sie den Suchbaum für die Anfrage

Interpreter

```
?- a2b([a,a,a],X).
```

Übung 5.65

Schreiben Sie ein zweistelliges Prädikat `twice`, dessen erstes Argument eine Liste ist, und dessen zweites Argument eine Liste ist, die jedes Element der ersten Liste zweimal enthält.

Interpreter

```
?- twice([1,b,mia],[1,1,b,b,mia,mia]).  
true.  
?- twice([a,b,c],X).  
X = [a,a,b,b,c,c].
```

Das Prädikat append

- dreistellig
- Resultat: `true`, wenn alle Argumente Listen sind und die Konkatenation von erstem und zweiten Argument gleich dem dritten Argument ist
- kann zum Aneinanderhängen und Aufteilen von Listen verwendet werden

```
append([], L, L).  
append([H|T], L, [H|R]) :- append(T, L, R).
```

- Die Konkatenation der leeren Liste mit einer beliebigen Liste `L` ist gleich `L`.
- Die Konkatenation einer nichtleeren Liste `[H|T]` mit einer Liste `L` hat
 - als Kopf `H`
 - als Rumpf die Konkatenation von `T` und `L`
- analog zum Prädikat `add/3` in Beispiel 5.49

Suchbaum für append

Beispiel 5.66

Wissensbank

```
append( [ ] ,L,L) .  
append( [H|T] ,L, [H|R] ) :-  
    append(T,L,R) .
```

A = [a|R1]
= [a|[b|R2]]
= [a|[b|[c|R3]]]
= [a|[b|[c|[1,2,3]]]]
= [a,b,c,1,2,3]

append([a,b,c],[1,2,3],A)

H1 = a, T1 = [b,c]
L1 = [1,2,3], A = [a|R1]

append([b,c],[1,2,3],R1)

H2 = b, T2 = [c]
L2 = [1,2,3], R1 = [b|R2]

append([c],[1,2,3],R2)

H3 = c, T3 = []
L3 = [1,2,3], R2 = [c|R3]

append([],[1,2,3],R3)

| L4 = [1,2,3], R3 = L4



A = [a,b,c,1,2,3]

Beispiel 5.67

■ Konkatenation von Listen

```
?- append([a,b],[c,d],X).  
X = [a,b,c,d].
```

■ Differenz-Listen

```
?- append([a,b],X,[a,b,c,d]).  
X = [c,d].  
?- append(X,[c,d],[a,b,c,d]).  
X = [a,b] ;  
false.
```

■ Aufteilungsmöglichkeiten für Listen

```
?- append(X,Y,[a,b,c,d]).  
X = [ ] , Y = [a,b,c,d] ;  
X = [a] , Y = [b,c,d] ;  
X = [a,b] , Y = [c,d] ;  
X = [a,b,c] , Y = [d] ;  
X = [a,b,c,d] , Y = [ ] ;  
false.
```

Wissensbank

```
prefix(Pre,List) :-  
    append(Pre,_,List).  
  
suffix(Suf,List) :-  
    append(_,Suf,List).  
  
sublist(Sub,List) :-  
    prefix(Pre,List),  
    suffix(Sub,Pre).
```

Interpreter

```
?- prefix(X,[a,b,c]).  
X = [] ;  
X = [a] ;  
X = [a, b] ;  
X = [a, b, c] ;  
false.  
?- suffix(X,[a,b,c]).  
X = [a, b, c] ;  
X = [b, c] ;  
X = [c] ;  
X = [] ;  
false.
```

Interpreter

```
?- sublist(X,[a,b,c]).  
X = [] ;  
X = [a] ;  
X = [] ;  
X = [a, b] ;  
X = [b] ;  
X = [] ;  
X = [a, b, c] ;  
X = [b, c] ;  
X = [c] ;  
X = [] ;  
false.
```

Übung: Wer hat das Zebra?

Übung 5.68

Eine Straße besteht aus drei Häusern.

- Sie haben die Farben Rot, Grün und Blau.
- Sie werden von einem Engländer, einem Japaner und einem Spanier bewohnt.
- In jedem Haus gibt es ein Haustier: Eine Schnecke, einen Jaguar und ein Zebra.

Wir wissen:

- Der Engländer wohnt im roten Haus.
- Der Jaguar wohnt beim Spanier.
- Der Japaner wohnt rechts vom Halter der Schnecke.
- Der Halter der Schnecke wohnt rechts vom grünen Haus.

Wer hat das Zebra?

Tips:

- Nutzen Sie Listen, um die Straße und deren Häuser zu repräsentieren.
- Nutzen Sie die Prädikate `member` und `sublist`, um die Aussagen zu codieren.

- [Head | Tail]

- Head erstes Element

- Tail Liste der restlichen Elemente

- leere Liste: []

- Rekursive Bearbeitung

- Basisklausel: Bearbeitung der leeren Liste

- Rekursive Klausel: Bearbeitung des Kopfs, rekursive Bearbeitung des Rumpfs

- wichtige Prädikate: `member`, `length`, `append`

- 1. Einführung
- 2. Mengen
- 3. Aussagenlogik
- 4. Prädikatenlogik
- 5. Prolog**

- 5.1 Terme
- 5.2 Fakten, Regeln und Anfragen
- 5.3 Unifikation, Termgleichheit und Arithmetik
- 5.4 Horn-Resolution und Suchbäume
- 5.5 Rekursion
- 5.6 Listen
- 5.7 Der Cut**

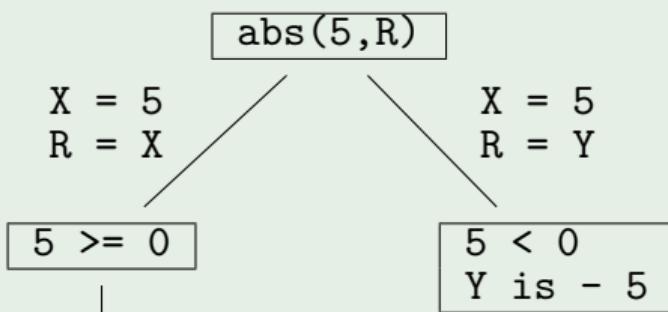
Beispiel 5.69 (Betrag)

Wissensbank

```
abs(X,X) :- X >= 0.  
abs(X,Y) :- X < 0, Y is -X.
```

Interpreter

```
?- abs(-5,R).  
R = 5 ;  
false.
```



R = 5

- Verzweigungspunkt für jeden Aufruf von abs
- Wenn folgendes Goal fehlschlägt \rightsquigarrow Backtracking Z.B. $\text{abs}(5,X)$, $X > 10$, ...
- Backtracking ist sinnlos, da Alternativen sich ausschließen
 - Platzverschwendungen durch Verzweigungspunkt
 - Zeitverschwendungen durch Backtracking
- Wünschenswert: Verzweigungspunkte verhindern

Definition 5.70 (Eltern-Goal, Subgoal)

Gegeben sei eine Regel mit Kopf K und Rumpf R .

Das Goal in K heißt Eltern-Goal der Goals in R ; die Goals in R heißen Subgoals von K .

Beispiel 5.71

Wissensbank

```
a(X) :- b(X), c(X), d(X).
```

- $a(X)$ ist Eltern-Goal von $b(X)$, $c(X)$ und $d(X)$.
- $b(X)$, $c(X)$ und $d(X)$ sind Subgoals von $a(X)$.

- Name: Cut
- nullstellig
- immer erfolgreich
- entfernt Verzweigungspunkte, die nach dem Aufruf des Eltern-Goals angelegt wurden
 - kein Backtracking vor den Cut
 - bestehende Variablenbindungen werden fixiert
 - keine alternativen Unifikationen
 - keine alternativen Klauseln zur Erfüllung eines Goals
- prozedural, nicht deklarativ
- ermöglicht neue Programmkonstrukte (Negation)
- kann Effizienz erhöhen

Beispiel: Funktionsweise des Cut

Beispiel 5.72 (Betrag mit Cut)

Wissensbank

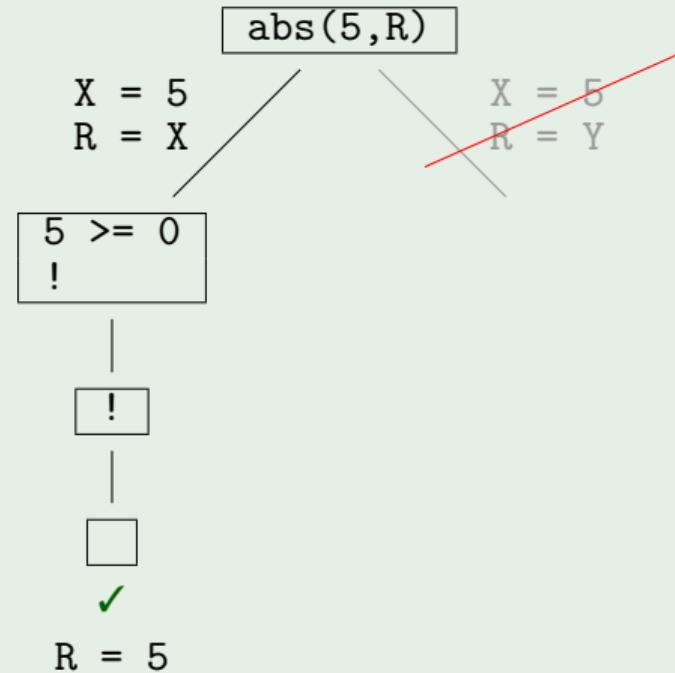
```
abs(X,X) :- X >= 0, !.  
abs(X,Y) :- X < 0, Y is -X.
```

Beim Erreichen des Cut:

- Verzweigungspunkt gelöscht
- Variablenbindungen fixiert

Interpreter

```
?- abs(5,R).  
R = 5.
```



Übung 5.73

Das einstellige Prädikat `number` gibt genau dann `true` zurück, wenn das Argument eine Zahl ist:

Interpreter

```
?- number(1).  
true.  
?- number(X).  
false.  
?- number([1]).  
false.  
?- number(1+2).  
false.  
?- X is 1 + 2, number(X).  
X = 3.
```

Schreiben Sie ein zweistelliges Prädikat `filter`, das als erstes Argument eine Liste erhält und im zweiten Argument die Liste derjenigen Elemente zurückgibt, die keine Zahlen sind.

Das Prädikat fail

- nullstellig
- löst Backtracking aus
- kann zusammen mit Cut zum Beschreiben von Ausnahmen verwendet werden

Beispiel 5.74 („Vincent mag alle Burger außer dem Big Kahuna“)

Wissensbank

```
likes(vincent,kahuna) :- !, fail.  
likes(vincent,X) :- burger(X).  
  
burger(bigMac).  
burger(kahuna).  
burger(royale).
```

Interpreter

```
?- likes(vincent,bigMac).  
true.  
?- likes(vincent,kahuna).  
false.  
?- likes(vincent,royale).  
true.  
?- likes(vincent,B).  
false.
```

Closed World Assumption Wahr ist nur, was aus der Wissensbank folgt.

Negation as Failure Was nicht aus der Wissensbank folgt, ist falsch.

Realisierung mit Cut und fail:

```
not(Goal) :- Goal, !, fail.  
not(Goal).
```

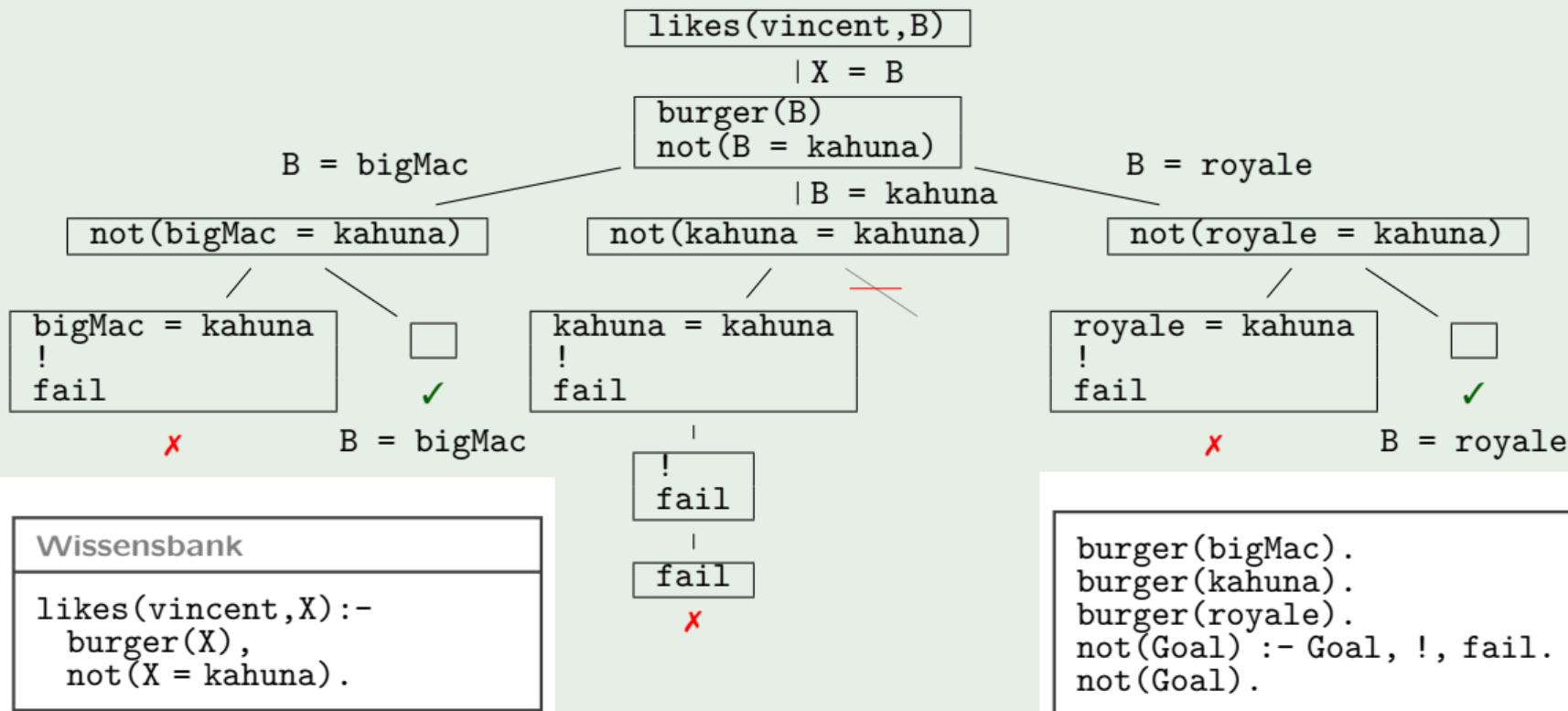
- Wenn Goal aus KB folgt \rightsquigarrow false.
- Sonst \rightsquigarrow true.

Unterschiede zu logischer Negation

- $\varphi \models \neg\psi$ gdw $\varphi \wedge \psi$ unerfüllbar ist.
- Aus KB folgt `not(Goal)`, wenn $\text{KB} \wedge \neg\text{Goal}$ erfüllbar ist.
- Negierte Fakten sind nicht möglich (`not(happy(butch))`.)

Beispiel: Negation und Burger

Beispiel 5.75



Beispiel 5.76

Wissensbank

```
likes(vincent,X) :- burger(X),  
    not(X = kahuna).  
burger(bigMac).  
burger(kahuna).
```

Eltern-Goal: **not**.

Interpreter

```
?- likes(vincent,bigMac).  
true.  
?- likes(vincent,kahuna).  
false.  
?- likes(vincent,B).  
B = bigMac.
```

Wissensbank

```
likes(vincent,kahuna) :- !, fail.  
likes(vincent,X) :- burger(X).  
burger(bigMac).  
burger(kahuna).
```

Eltern-Goal: **likes**.

Interpreter

```
?- likes(vincent,bigMac).  
true.  
?- likes(vincent,kahuna).  
false.  
?- likes(vincent,B).  
false.
```

Übung 5.77

Im folgenden Programm ist im Prädikat `likes` die Reihenfolge der beiden Goals vertauscht:

```
likes(vincent,X) :- not(X = kahuna), burger(X).
```

Wie beantwortet der Interpreter nun die folgende Anfrage?

```
?- likes(vincent,B).
```

Zeichnen Sie ggf. den Berechnungsbaum.

- entfernt Verzweigungspunkte
 - vom Aufruf des Eltern-Goals
 - bis zum Cut
- kann zusammen mit `fail` Ausnahmen codieren
- Prädikat `not` beschreibt `negation as failure`
 - Cut verhindert Backtracking
 - `fail` verursacht Scheitern des aktuellen Zweigs
 - nicht äquivalent zu logischer Negation

- deklarativ
 - Beschreibung der Domäne in der [Wissensbank](#)
 - Anfragen im [Interpreter](#)
- einfacher Term: Atom, Variable oder Zahl
- komplexer Term: Funktor und Argumente
- Goals, Fakten, Regeln und Anfragen
- Unifikation (=) bindet Variablen, == nicht
- Arithmetik: is, =:=, =\=, ...
- Suchbaum
 - Bearbeite Stack von oben nach unten
 - Unifiziere erstes Goal mit allen Regelköpfen
 - Verzweigungspunkte, Backtracking
- Rekursion: Prädikat verwendet sich selbst; Standard-Programmierparadigma
- Listen: Standard-Datenstruktur
- Cut verhindert Backtracking