



تمرین کامپیوتری اول

سیگنال‌ها و سیستم‌ها

علیرضا وثوقی‌راد

پویا نریمانی

a.vosoughi99@gmail.com

pouya.narimani@ut.ac.ir

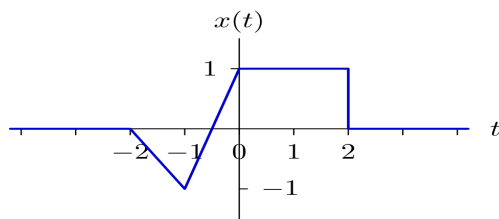
دکتر اخایی

پاییز ۹۸

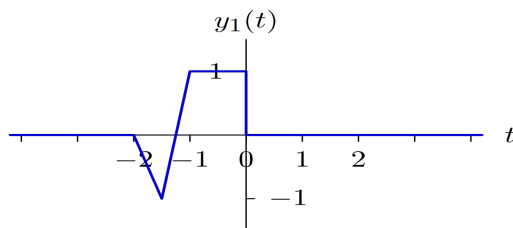
سوال ۱ (ترسیم سیگنال‌ها):

۱. سیگنال‌های پله و رمپ را به صورت دستی پیاده‌سازی کنید و در بازه‌ی زمانی مناسب آن‌ها را رسم کنید. سپس در مورد نمونه برداری تحقیق کرده و از سیگنال‌های پله و رمپ با فرکانس ۱۰ و ۱۰۰ نمونه در ثانیه نمونه برداری کرده و آن‌ها را رسم کنید. منظور از فرکانس نمونه برداری تعداد نمونه‌های انتخاب شده از سیگنال در هر ثانیه است. مثلاً اگر ۱۰۰۰ نمونه در ۱۰ ثانیه داشته باشیم، فرکانس نمونه برداری $F_s = \frac{1000}{10} = 100$ نمونه در ثانیه خواهد شد.

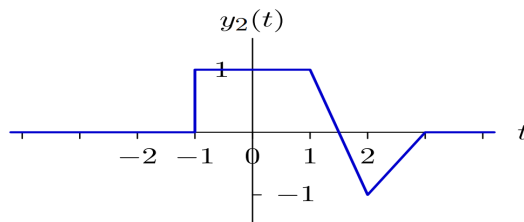
۲. سیگنال $x(t)$ را برحسب سیگنال‌های رمپ و پله واحد بنویسید و رابطه‌ی آن‌ها را در گزارش کار خود ذکر کنید. سپس با استفاده از توابعی که در قسمت قبل نوشته‌اید، تابعی برای سیگنال $x(t)$ پیاده‌سازی کنید و سیگنال $x(t)$ را رسم کنید.



۳. حال با استفاده از شیفت و مقیاس زمانی سیگنال $y_1(t)$ را برحسب سیگنال $x(t)$ بنویسید و رابطه‌ی بین آن‌ها را در گزارش کار خود ذکر کنید. سپس تابعی برای سیگنال $y_1(t)$ پیاده‌سازی کنید و آن را رسم کنید.



۴. قسمت قبل را برای سیگنال $y_2(t)$ تکرار کنید.



(برای ترسیم سیگنال‌ها از پکیج matplotlib و برای پیاده‌سازی سیگنال‌ها بر روی بردار زمان از تابع map استفاده کنید.)

سوال ۲ (تجزیه سیگنال‌ها)

با توجه به تعریف سیگنال‌های زیر به سوالات زیر پاسخ دهید:

$$\begin{aligned}x_o[n] &= \frac{x[n] - x[-n]}{2} & x_e[n] &= \frac{x[n] + x[-n]}{2} \\x_l[n] &= \begin{cases} x[n] & ; n < 0 \\ 0 & ; \text{O.W} \end{cases} & x_r[n] &= \begin{cases} x[n] & ; n \geq 0 \\ 0 & ; \text{O.W} \end{cases} \\x_l[0] &= 0 \quad \text{and} \quad x_r[0] = x[0]\end{aligned}$$

۱. توابعی را پیاده‌سازی کنید که سیگنال‌های x_r ، x_l و x_e و x_o را برای سیگنال ورودی دلخواه محاسبه کند و آن‌ها را رسم کند. سپس از سیگنال $x(t)$ در سوال ۱ با فرکانس ۱۰۰ نمونه در ثانیه نمونه برداری کرده و سیگنال‌های فوق را به ازای آن رسم کنید.

۲. آیا می‌توان سیگنال $x[n]$ را با استفاده از سیگنال‌های x_r و x_e تعیین کرد؟ استدلال خود را در گزارش کار خود بنویسید و در صورت مثبت بودن جواب، سیگنال $x[n]$ سیگنال بازسازی شده را در کنار سیگنال اصلی رسم کرده و نتایج را تحلیل کنید.

۳. آیا می‌توان سیگنال $x[n]$ را با استفاده از سیگنال‌های x_l و x_o بازسازی کرد؟ مراحل قسمت قبل را تکرار کنید و توضیحات خود را در گزارش کار بنویسید.

سوال ۳ (سیستم‌ها)

سیستم و ورودی‌های زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}y(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t-u)} x(u-2) du \\x_1(t) &= u(t) - u(t-2) \\x_2(t) &= u(t) - u(t-3)\end{aligned}$$

۱. ابتدا خطی بودن سیستم را توسط اصل سوپروپوزیشن بررسی کنید. یکبار $S\{a_1x_1(t) + a_2x_2(t)\}$ را محاسبه کرده و آن را رسم کنید. بار دیگر $S\{a_1x_1(t)\} + S\{a_2x_2(t)\}$ را محاسبه کرده و رسم کنید. نتایج را تحلیل کنید.

(انتگرال را می‌توانید دستی محاسبه کنید. ولی در صورت استفاده از پکیج scipy و محاسبه آن توسط برنامه نمره مثبت دارد.)

۲. سیگنال $x_1(t)$ را به عنوان ورودی به سیستم می‌دهیم و در خروجی سیستم، سیگنال $y_1(t)$ را دریافت می‌کنیم. سپس خروجی سیستم به سیگنال $x_1(t-3)$ را $y_2(t)$ نام‌گذاری می‌کنیم. سیگنال‌های $y_2(t)$ و $y_1(t-3)$ را رسم کنید و برابر بودن آن‌ها را بررسی کنید.

۳. با توجه به نتایجی که در دو قسمت قبل بدست آورده‌اید، آیا سیستم LTI است؟

سوال ۴ (انرژی سیگنال)

۱. تابعی بنویسید که انرژی سیگنال را محاسبه کند.

۲. با استفاده از تابعی که در قسمت قبل آن را پیاده‌سازی کرده‌اید، انرژی سیگنال‌های $x(t)$ و $y_1(t)$ و $y_2(t)$ که در سوال ۱ گفته شده‌اند را بدست آورید. دقت کنید که ما انرژی سیگنال را در این سوال در حوزه پیوسته محاسبه می‌کنیم ولی تابعی که در قسمت قبل پیاده‌سازی کرده‌اید، انرژی سیگنال گسسته را محاسبه می‌کند. برای یافتن مقدار انرژی در حالت پیوسته کافی است که خروجی تابع قسمت قبل را در یک ضریب، ضرب کنیم. با مقایسه‌ی دو رابطه‌ی انرژی برای سیگنال‌های گسسته و پیوسته استدلال کنید که ضریب باید برابر چه مقداری باشد. توضیحات خود را به طور کامل در گزارش کار بنویسید.

سوال ۵ (کانولوشن)

۱. تابعی پیاده‌سازی کنید که کانولوشن دو سیگنال را محاسبه کند.

۲. به کمک تابعی که در قسمت قبل آن را پیاده‌سازی کرده‌اید، کانولوشن دو سیگنال زیر را محاسبه کنید.

$$\begin{aligned}x_1[n] &= \left(\frac{1}{2^{-n+1}}\right) \cdot (u[n+2] - u[n-2]) \\x_2[n] &= \begin{cases} \sum_{i=-\infty}^n (\sin(2n) + e^{j\pi n}) \cdot (u[n+3] - u[n-5]) & ; 0 < n < 7 \\ 0 & ; \text{O.W} \end{cases}\end{aligned}$$

۳. کانولوشن بلوکی (امتیازی):

کانولوشن بلوکی برای فیلتر کردن سیگنال‌های real time استفاده می‌شود. در این روش سیگنال را که طول آن نامحدود یا نامعلوم است، به بلوک‌های کوچکتر تقسیم می‌کنیم و سپس با یک تاخیر، پردازش را روی آن انجام می‌دهیم.

خطی بودن عملگر کانولوشن این اطمینان را به ما می‌دهد که مجموع کانوالو تمامی بلوک‌ها با پاسخ ضربه، برابر کانوالو کل سیگنال با پاسخ ضربه سیستم است.

فرض کنید که سیستمی با پاسخ ضربه $h[n]$ دارید که در بازه‌ی $0 \leq n \leq P-1$ غیر صفر است. همچنین سیگنال $x(t)$ یا همان ورودی برای $0 \leq n$ مقدار صفر دارد. حال سیگنال $x(t)$ را مانند زیر به بلوک‌هایی به طول L تقسیم می‌کنیم.

$$x[n] = \sum_{r=0}^{\infty} x_r[n - rL]$$

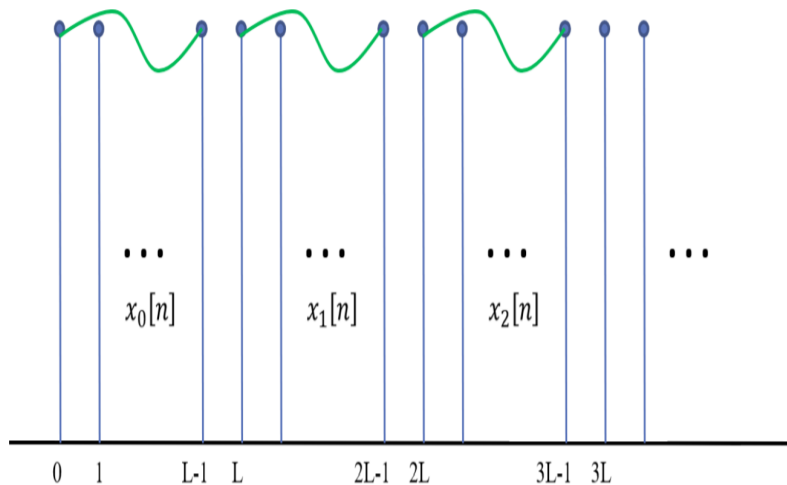
که در آن $P > L$ و داریم:

$$x_r[n] = \begin{cases} x[n + rL] & ; 0 \leq n \leq L-1 \\ 0 & ; \text{O.W} \end{cases}$$

ابتدا برای دو سیگنال زیر $y[n] = h[n] * x[n]$ (کانولوشن دو سیگنال) را با استفاده از دستور `numpy.convolve` در بازه‌ی $0 \leq n \leq 99$ محاسبه و نمودار آن را با استفاده از دستور `stem` رسم کنید.

$$x[n] = \cos(n^2) \sin\left(\frac{2\pi n}{5}\right)$$

$$h[n] = (0.9^n)(u[n] - u[n - 10])$$



با فرض $L = 50$ سیگنال $x[n]$ را به دو بلوک تقسیم کنید که طول هر کدام ۵۰ شود. دو سیگنال $y_0[n] = h[n] * x_0[n]$ و $y_1[n] = h[n] * x_1[n]$ را که در آن $x_0[n]$ ، ۵۰ نمونه اول $x[n]$ و $x_1[n]$

، ۵۰ نمونه دوم $x[n]$ است، حساب کنید. حال فرم سیگنال خروجی به صورت زیر خواهد بود:

$$y[n] = x[n] * h[n] = y_0[n] + y_1[n - k]$$

در عبارت بالا k مناسب را بدست آورید. (دقت کنید که طول هر کدام از سیگنال‌های $y_0[n]$ و $y_1[n]$ باید $L + P - 1$ باشد). وقتی سیگنال $y_0[n]$ و $y_1[n]$ را با هم جمع می‌کنید، ناحیه‌ای وجود دارد که در آن مقادیر غیر صفر از دو سیگنال با هم جمع می‌شوند. به این خاطر به روش کانولوشن بلوکی، ”هم‌پوشانی و اضافه کردن” نیز می‌گویند. سیگنال خروجی یعنی $y[n]$ را با استفاده از این روش حساب کنید و آن را در بازه‌ی $0 \leq n \leq 99$ با استفاده از stem رسم کنید. آیا به همان نتیجه قبلی می‌رسید؟ نتایج را تحلیل کنید.

در نهایت یک تابع بنویسید که عمل هم‌پوشانی و اضافه کردن را انجام دهد. ورودی‌های این تابع، پاسخ ضربه (h) ، بردار ورودی سیستم (x) و طول هر بلوک (L) هستند. طول بردار x دلخواه و طول هر بلوک یک عدد دلخواه بزرگتر از طول فیلتر است. حال قسمت قبل را با تابع خود دوباره انجام دهید و نتایج را در گزارش کار خود بنویسید.

به نکات زیر توجه کنید:

۱. تمامی کدها باید به زبان برنامه‌نویسی python باشند.
۲. گزارش کار شما در روند تصحیح از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. لطفا تمامی نکات و محاسبات خود را به صورت دقیق در گزارش خود ذکر کنید.
۳. فایل pdf مربوط به گزارش را به همراه کدهای پایتون مربوطه در یک فایل zip با عنوان "نام و شماره دانشجویی" خود بنویسید و upload کنید.
۴. در صورت هر گونه تقلب نمرات تمامی افراد شرکت کننده در آن صفر تلقی خواهد شد.
۵. استفاده از کدهای آماده مجاز نمی‌باشد. مگر اینکه صورت سوال به صورت واضح استفاده از کد را بلامانع اعلام کرده باشد.
۶. در صورت وجود هرگونه ابهام و سوال با دستیارهای آموزشی مربوطه در تماس باشید:

a.vosoughi99@gmail.com
pouya.narimani@ut.ac.ir