Численное решение краевой задачи принципа максимума в задаче оптимального управления методом стрельбы.

1 Постановка задачи.

Рассматривается задача Лагранжа с фиксированным временным отрезком и без ограничений вида "меньше или равно":

$$B_0 = \int_0^T (\ddot{x}^2 - \dot{x}^2 - x^2)dt \tag{1}$$

Требуется формализовать задачу, как задачу оптимального управления. Свести задачу принципом максимума Понтрягина к краевой задаче, численно решить полученную задачу методом стрельбы и обосновать точность полученных результатов. Проверить полученные экстремали Понтрягина на оптимальность при различных значениям параметра $T \in \{0.1, 1, 10, 20\}$.

2 Формализация задачи.

Формализуем задачу, как задачу оптимального управления. Для этого обозначим $u = \ddot{x}, y = \dot{x}$. Тогда наша задача примет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = u \\ u \in [-1, 1] \\ x(0) = 0 \\ x(T) = 0 \\ y(0) = 0 \\ T \in \{0.1, 1, 10, 20\} \\ B_0 = \int_0^T (u^2 - y^2 - x^2)dt \longrightarrow extr \end{cases} \tag{2}$$

3 Система необходимых условий оптимальности.

Выпишем функции Лагранжа и Понтрягина:

$$\mathcal{L} = \int_0^T \mathbf{L}dt + l,$$

$$\text{Лагранжиан } \mathbf{L} = p_x \cdot (\dot{x} - y) + p_y \cdot (\dot{y} - u) + \lambda_0 \cdot (u^2 - y^2 - x^2),$$

$$\text{Терминант } l = \lambda_1 \cdot x(0) + \lambda_2 \cdot x(T) + \lambda_3 \cdot y(0),$$

$$H = p_x \cdot y + p_y \cdot u - \lambda_0 \cdot (u^2 - y^2 - x^2).$$

Применим к задаче оптимального управления (2) принцип максимума Понтрягина. Необхоимые условия оптимальности:

(а) Уравнение Эйлера-Лагранжа (сопряженная система уравнений, условие стационарности по $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$), $\begin{pmatrix} \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{\partial H}{\partial y} \end{pmatrix}$:

$$\begin{cases} \dot{p}_x = -2 \cdot \lambda_0 \cdot x \\ \dot{p}_y = -p_x - 2 \cdot \lambda_0 \cdot y \end{cases} \tag{3}$$

(б) Условие оптимальности на управление, $u = arg\,abs\,max\ H(u)$:

В нашем случае $H(u) = p_y \cdot u - \lambda_0 \cdot u^2$:

$u = arg\,abs\,max\ (p_y \cdot u) = \begin{cases} 1, \text{если } p_y\ >\ 1 \\ p_y, \text{если } -1 \leq p_y \leq 1 \\ -1, \text{если } p_y\ <\ 1 \end{cases}$

(в) Условие трансверсальности по $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $p_x(t_k) = (-1)^k \cdot \frac{\partial l}{\partial x(t_k)}, p_y(t_k) = (-1)^k \cdot \frac{\partial l}{\partial y(t_k)}$, где $k \in \{0, 1\}, t_0 = 0, t_1 = 2$:

$$p_y(0) = \lambda_3,\ p_y(T) = 0, \tag{4}$$

$$p_x(0) = \lambda_1,\ p_x(T) = -\lambda_2 \tag{5}$$

(г) Условие стационарности по t_k:
Нет, так как в задаче (2) t_k - известные константы;

(д) Условие дополняющей нежёсткости:
Нет, так как в задаче (2) отсутсвуют условия вида "меньше или равно";

(е) Условие неотрицательности: $\lambda_0 \geq 0$.

(ж) Условие нормировки (множители Лагранжа могут быть выбраны с точностью до положительного множителя);

(з) НЕРОН (множители Лагранжа НЕ Равны Одновременно Нулю).

4 Анормальный случай и исследование задачи.

Пусть $\lambda_0 = 0$. Тогда изучаемая система примет вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \qquad \begin{cases} \dot{p}_x = 0 \\ \dot{p}_y = -p_x \\ p_y(T) = 0 \end{cases} \Rightarrow\ p_y(t) = \frac{p_y^0}{T}(T-t) \\ \dot{y} = u \\ \dot{p}_x = 0 \\ \dot{p}_y = -p_x \quad H(u) = u \cdot p_y \ \Rightarrow\ u = \begin{cases} 1 \text{ ,если } p_y > 0 \\ [-1, 1] \text{ ,если } p_y = 0 \\ 1 \text{ ,если } p_y < 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_y(t) = \frac{p_y^0}{T}(T-t) \\ p_y^0 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{y} = u \\ y(0) = 0 \\ u = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = t \\ x(0) = x(T) = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{противоречие.}$$

$$\begin{cases} p_y(t) = \frac{p_y^0}{T}(T-t) \\ p_y^0 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{y} = u \\ y(0) = 0 \\ u = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = -t \\ x(0) = x(T) = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{противоречие.}$$

$p_y^0 = 0 \ \Rightarrow\ p_x^0 = 0 \ \Rightarrow$ считаем противоречие с тем, что управление выбирается не однозначно.

Далее для удоюства будем считать, что $\lambda_0 = 1/2$.

5 Краевая задача.

Таким образом, на основе принципа Понтрягина задача оптимального управления (2) сводится к краевой задаче. А именно получаем следующую систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = u, \\ \dot{p}_x = -x \\ \dot{p}_y = -p_x - y \\ u = \begin{cases} 1, \text{ если } p_y \ > \ 1 \\ p_y, \text{ если } -1 \leq p_y \leq 1 \\ -1, \text{ если } p_y \ < \ 1 \end{cases} \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{array}{l} x(0) = 0, \ x(T) = 0, \\ y(0) = 0, \ p_y(T) = 0, \\ T \in \{0.1, 1, 10, 20\}. \end{array} \tag{7}$$

6 Численное решение краевой задачи методом стрельбы.

Краевая задача решается численно методом стрельбы. В качестве параметров пристрелки выбирают недостающие для задачи Коши значения при $t = 0$. В нашем случае параметрами пристрелки будут $p_x(0) = \alpha_1$, $p_y(0) = \alpha_2$. Задав эту пару парметров, мы можем решить задачу Коши на конечном отрезке $[0, T]$ и получить по соответсвующему выбронному $\overrightarrow{\alpha} = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ функции $x(\cdot)\left[\alpha_1, \alpha_2\right]$, $y(\cdot)\left[\alpha_1, \alpha_2\right]$, $p_x(\cdot)\left[\alpha_1, \alpha_2\right]$, $p_y(\cdot)\left[\alpha_1, \alpha_2\right]$. В частности можем получить $x(T)\left[\alpha_1, \alpha_2\right]$, $p_y(T)\left[\alpha_1, \alpha_2\right]$. Задача Коши для системы дифференциальных уравнений (6) с начальными условиями (7), заданнымии в момент времени $t = 0$, с учетом заданного $\overrightarrow{\alpha}$ решается численно явным способом, а имеено с помощью метода Рунге-Кутты 8-го порядка, основанным на расчетных формулах Дормана-Принса 8(7) DOPRI8 с автоматическим выбором шага(то есть с контролем относительной локальной погрешности на шаге по правилу Рунге). Для решения нашей краевой задачи нужно подобрать $\overrightarrow{\alpha}$ таким образом, чтобы выполнились условия:

$$\begin{array}{c} x(T)\left[\alpha_1, \alpha_2\right] = 0, \\ p_y(T)\left[\alpha_1, \alpha_2\right] = 0 \end{array} \tag{8}$$

Тогда можем определить вектор функцию невязок $X(\overrightarrow{\alpha}) = \begin{pmatrix} x(T)\left[\alpha_1, \alpha_2\right] \\ p_y(T)\left[\alpha_1, \alpha_2\right] \end{pmatrix}$. Таким образом, выбирая для решения краевой задачи метод стрельбы, решение краевой задачи свелось к решению двух алгебраических уравнений от двух неизвесных, а именно $X(\overrightarrow{\alpha}) = 0$. Корень $\overrightarrow{\alpha}$ системы алгебраических уравнений $X(\overrightarrow{\alpha}) = 0$ находится методом Ньютона с модификацией Исаева-Сонина. Решение линейной системы уравнений внутри модифицированного метода Ньютона осуществляется методом Гаусса с выбором главного элемента по столбцу, с повторным пересчетом. В нашей задаче крайне важен следующий тест части программы, решающей задачу Коши, на системе дифференциальных уравнений с известным аналитическим решением.

7 Тест решения задачи Коши - гармонический осциллятор

В таблице ниже приведены результаты численного интегрирования системы дифференциальных уравнений гармонического осциллятора $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$ с начальными условиями $\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ явным методом Рунге-Кутты с оценкой погрешности на шаге через 8-ую производную для различного конечного времени T и различных значений максимально допустимой относительной погрешности на шаге интегрирования Δ_{loc} . $Steps$ - общее число сделанных шагов интегрирования (число принятых шагов); $|x(T)|$ и $|y(T) - cos(T)|$ - невязки в конце; $\Delta x(\cdot)$ и $\Delta y(\cdot)$ - максимальное отличие полученного решения от известного аналитического $\begin{cases} x(t) = sin(t) \\ y(t) = cos(t) \end{cases}$ по всем шагам; $\delta_K(T)$ - оценка глобальной погрешности по формуле $\delta_K(t_{i+1}) = r_i + \delta_K(t_i) \cdot e^{L_i}$, где r_i - главный член в оценке локальной погрешности, а $L_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mu dt$; μ - логарифмическая норма матрицы Якоби исходной системы дифференциальных уравнений, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, равная максимальному собственному значению матрицы $\frac{(J+J^T)}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, то есть $0 \Rightarrow \delta_K(t_{i+1}) = r_{i+1} + \delta_K(t_i)$; $R_x = \left| \frac{x_{10^{-8}}(T) - x_{10^{-10}}(T)}{x_{10^{-10}}(T) - x_{10^{-12}}(T)} \right|$, $R_y = \left| \frac{y_{10^{-8}}(T) - y_{10^{-10}}(T)}{y_{10^{-10}}(T) - y_{10^{-12}}(T)} \right|$.

В таблице ниже представлены полученные данные:

T	Δ_{loc}	$Steps$	$\|x(T)\|$	$\|y(T) - \cos(T)\|$	$\Delta x(\cdot)$	$\Delta y(\cdot)$	$\delta_K(T)$	R_x	R
π	10^{-08}	6	$1.99 \cdot 10^{-08}$	$1.26 \cdot 10^{-08}$	$1.45 \cdot 10^{-08}$	$1.42 \cdot 10^{-08}$	$2.04 \cdot 10^{-08}$	88.73	36.
	10^{-10}	10	$2.24 \cdot 10^{-10}$	$3.42 \cdot 10^{-10}$	$2.57 \cdot 10^{-10}$	$2.57 \cdot 10^{-10}$	$3.61 \cdot 10^{-10}$		
	10^{-12}	17	$2.29 \cdot 10^{-12}$	$6.71 \cdot 10^{-12}$	$4.55 \cdot 10^{-12}$	$4.48 \cdot 10^{-12}$	$6.29 \cdot 10^{-12}$		
$10 \cdot \pi$	10^{-08}	53	$2.00 \cdot 10^{-07}$	$1.27 \cdot 10^{-07}$	$1.44 \cdot 10^{-07}$	$1.44 \cdot 10^{-07}$	$2.05 \cdot 10^{-07}$	89.82	37.
	10^{-10}	93	$2.23 \cdot 10^{-09}$	$3.41 \cdot 10^{-09}$	$2.56 \cdot 10^{-09}$	$2.56 \cdot 10^{-09}$	$3.60 \cdot 10^{-09}$		
	10^{-12}	165	$2.31 \cdot 10^{-11}$	$6.79 \cdot 10^{-11}$	$4.57 \cdot 10^{-11}$	$4.57 \cdot 10^{-11}$	$6.39 \cdot 10^{-11}$		
$10^2 \cdot \pi$	10^{-08}	522	$2.00 \cdot 10^{-06}$	$1.27 \cdot 10^{-06}$	$1.44 \cdot 10^{-06}$	$1.44 \cdot 10^{-06}$	$2.05 \cdot 10^{-06}$	89.41	36.
	10^{-10}	926	$2.24 \cdot 10^{-08}$	$3.43 \cdot 10^{-08}$	$2.57 \cdot 10^{-08}$	$2.57 \cdot 10^{-08}$	$3.62 \cdot 10^{-08}$		
	10^{-12}	1645	$2.31 \cdot 10^{-10}$	$6.80 \cdot 10^{-10}$	$4.58 \cdot 10^{-10}$	$4.58 \cdot 10^{-10}$	$6.40 \cdot 10^{-10}$		
$10^3 \cdot \pi$	10^{-08}	5216	$2.00 \cdot 10^{-05}$	$1.27 \cdot 10^{-05}$	$1.44 \cdot 10^{-05}$	$1.44 \cdot 10^{-05}$	$2.05 \cdot 10^{-05}$	89.49	36.
	10^{-10}	9252	$2.24 \cdot 10^{-07}$	$3.43 \cdot 10^{-07}$	$2.57 \cdot 10^{-07}$	$2.57 \cdot 10^{-07}$	$3.62 \cdot 10^{-07}$		
	10^{-12}	16441	$2.31 \cdot 10^{-09}$	$6.80 \cdot 10^{-09}$	$4.58 \cdot 10^{-09}$	$4.58 \cdot 10^{-09}$	$6.40 \cdot 10^{-09}$		
$10^4 \cdot \pi$	10^{-08}	52155	$2.00 \cdot 10^{-04}$	$1.27 \cdot 10^{-04}$	$1.44 \cdot 10^{-04}$	$1.44 \cdot 10^{-04}$	$2.05 \cdot 10^{-04}$	89.48	36.
	10^{-10}	92519	$2.24 \cdot 10^{-06}$	$3.43 \cdot 10^{-06}$	$2.57 \cdot 10^{-06}$	$2.57 \cdot 10^{-06}$	$3.62 \cdot 10^{-06}$		
	10^{-12}	164407	$2.25 \cdot 10^{-08}$	$6.80 \cdot 10^{-08}$	$4.58 \cdot 10^{-08}$	$4.58 \cdot 10^{-08}$	$6.40 \cdot 10^{-08}$		
$10^5 \cdot \pi$	10^{-08}	521580	$2.00 \cdot 10^{-03}$	$1.27 \cdot 10^{-03}$	$1.44 \cdot 10^{-03}$	$1.44 \cdot 10^{-03}$	$2.05 \cdot 10^{-03}$	89.60	36.
	10^{-10}	925185	$2.24 \cdot 10^{-05}$	$3.43 \cdot 10^{-05}$	$2.57 \cdot 10^{-05}$	$2.57 \cdot 10^{-05}$	$3.62 \cdot 10^{-05}$		
	10^{-12}	1644068	$2.45 \cdot 10^{-07}$	$6.80 \cdot 10^{-07}$	$4.58 \cdot 10^{-07}$	$4.58 \cdot 10^{-07}$	$6.40 \cdot 10^{-07}$		
$10^6 \cdot \pi$	10^{-08}	5219496	$2.02 \cdot 10^{-02}$	$1.26 \cdot 10^{-02}$	$1.44 \cdot 10^{-02}$	$1.44 \cdot 10^{-02}$	$2.05 \cdot 10^{-02}$	89.99	36.
	10^{-10}	9252025	$2.24 \cdot 10^{-04}$	$3.43 \cdot 10^{-04}$	$2.57 \cdot 10^{-04}$	$2.57 \cdot 10^{-04}$	$3.62 \cdot 10^{-04}$		
	10^{-12}	16440684	$2.22 \cdot 10^{-06}$	$6.80 \cdot 10^{-06}$	$4.58 \cdot 10^{-06}$	$4.58 \cdot 10^{-06}$	$6.40 \cdot 10^{-06}$		

8 Оценка точности решения задачи Коши

Качественно наша система может находится в трех состояниях, два из которых очень похоже в плане оценки точности решения, так системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -1, \\ \dot{p}_x = -x \\ \dot{p}_y = -p_x - y \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = 1, \\ \dot{p}_x = -x \\ \dot{p}_y = -p_x - y \end{cases}$$

при соответсвующих областях изменения p_y имеют индентичные матрицы.

Матрица Якоби системы дифференциальных уравнений имеет вид:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Для определения скорости распространения ошибки в оценках глобальной погрешности определяется логарифмическая норма матрицы $\mu(J)$ -максимальное собственное значение матрицы $(J+J^T)/2$ и норма матрицы $\|J\|$ -максимальное сингулярное число.

$$J^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (J+J^T)/2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\lambda & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\lambda & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = \frac{4\lambda^4 - 4\lambda^2 + 1}{4} \Rightarrow \Big\{ \lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \lambda_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \lambda_4 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Отсюда максимальное собственное значение матрицы $(J+J^T)/2$, $\mu(J) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Теперь вычислим максимальное сингулярное число:

$$J \cdot J^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{det}(J \cdot J^T - \lambda \cdot E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 - 4\lambda^3 + 4\lambda^2 - \lambda$$

$$\|J\| = \sqrt{\lambda_{max}} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Так как $\frac{1}{\sqrt{2}} = \mu \leqslant \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, то применима следующая оценка глобальной погрешности:

$$\|\vec{x}(t) - \vec{v}(t)\| \leqslant e^{L(t)} \left(\delta_K(0) + \int_0^t e^{-L(s)} \rho(s) ds \right),$$

$\vec{x}(t)$ - вектор точного значения фазовых переменных системы,
$\vec{v}(t)$ - вектор фазовых переменных системы,вычисляемый в результате решения задачи Коши,
$\rho(s)$ - ошибка в вычисленных правых частях системы в момент времени s,
$\delta_K(t)$ - ошибка в вычисленных значениях фазовых переменных задачи в момент времени t, для оценки точности решения задачи Коши мы предполагаем, что в начальный момент времени значения фазовых переменных заданы правильно, то есть $\delta_K(0) = 0$,
$L(t) = \int_0^t l(s)ds$ - где $\mu(J(s, x(s), y(s), p_x(s), p_y(s)))$

Так как для логарифмической нормы получена аналитическая формула, не зависящая от $t, x(t), y(t), p_x(t), p_y(t)$, и имеем $l = \frac{1}{\sqrt{2}}$, то интеграл $L_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} l(s)ds$ - можно не только оценить, но и вычислить явно: $L_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} l(s)ds = \frac{1}{\sqrt{2}}(t_{i+1} - t_i)$, в частности $L(T) = \int_0^T l(s)ds = T \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$. Тогда величина глобальной погрешности решения задачи Коши $\delta_K(T)$ может быть оценена через C_ρ, где константа $C_\rho \geqslant \rho(s)$ - оценивает сверху $\rho(s)$:

$$\delta_K(T) \leqslant e^{L(T)} \left(\delta_K(0) + \int_0^T e^{-L(s)} \rho(s) ds \right) = e^{L(T)} \delta_K(0) + e^{L(T)} \int_0^T e^{-L(s)} \rho(s) ds$$

$$\delta_K(T) \leqslant e^{\frac{T}{\sqrt{2}}} \delta_K(0) + e^{\frac{T}{\sqrt{2}}} \int_0^T e^{-\frac{s}{\sqrt{2}}} C_\rho ds = e^{\frac{T}{\sqrt{2}}} \delta_K(0) + \sqrt{2} C_\rho \left(e^{\frac{T}{\sqrt{2}}} - 1 \right)$$

Таким образом, глобальная ошибка в решении задачи Коши при начальной ошибке $\delta_K(0)$ оценивается по выше описанной формуле, где C_ρ - максимум ошибки в вычислении правых частей.

Такие же рассужден можем провести для системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = p_y, \\ \dot{p}_x = -x \\ \dot{p}_y = -p_x - y \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

В результате получим:

$$\delta_K(T) \leqslant e^{L(T)} \left(\delta_K(0) + \int_0^T e^{-L(s)} \rho(s) ds \right) = e^{L(T)} \delta_K(0) + e^{L(T)} \int_0^T e^{-L(s)} \rho(s) ds$$

$$\delta_K(T) \leqslant e^{T \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{4}} \delta_K(0) + e^{T \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{4}} \int_0^T e^{s \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{4}} C_\rho ds = e^{T \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{4}} \delta_K(0) + \frac{4}{1+\sqrt{5}} C_\rho \left(e^{T \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{4}} - 1 \right)$$

Но мы имеем конкретное решение и хотим оценить его точность. Наше решение разбивается на 4 участка:

$$\begin{cases} [0, t_1] \text{ с управлением } u = -1 \\ [t_1, t_2] \text{ с управлением } u = p_y \\ [t_2, t_3] \text{ с управлением } u = 1 \\ [t_3, T] \text{ с управлением } u = p_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} [0,t_1] \\ \delta_K(0)=0 \end{cases} \Rightarrow \delta_K(t_1) \leqslant \sqrt{2} C_\rho^{(1)} \left(e^{\frac{t_1}{\sqrt{2}}} - 1 \right)$$

$$\begin{cases} [t_1,t_2] \\ \delta_K(t_1) \leqslant \sqrt{2} C_\rho^{(1)} \left(e^{\frac{t_1}{\sqrt{2}}} - 1 \right) \\ \delta_K(t_2) \leqslant e^{(t_2-t_1)\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{4}} \delta_K(t_1) + \frac{4}{1+\sqrt{5}} C_\rho^{(2)} \left(e^{(t_2-t_1)\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{4}} - 1 \right) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta_K(t_2) \leqslant e^{(t_2-t_1)\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{4}} \left(\sqrt{2} C_\rho^{(1)} \left(e^{\frac{t_1}{\sqrt{2}}} - 1 \right) \right) + \frac{4}{1+\sqrt{5}} C_\rho^{(2)} \left(e^{(t_2-t_1)\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{4}} - 1 \right)$$

На этом шаге можно упростить оценку, вообще говоря $C_\rho^{(i)}$ - это максимум ошибки в правых частях, накопившийся к соответствующему моменту времени, поэтому их все можно сверху оценить константой C_ρ - максимальная ошибка в правых частях за все время. Аналогично все слогаемые вида t_i , $t_{i+1} - t_i$ можно заменить просто на T. Тогда оценка примет вид:

$$\delta_K(t_2) \leqslant e^{T\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{4}} \left(\sqrt{2} C_\rho \left(e^{\frac{T}{\sqrt{2}}} - 1 \right) \right) + \frac{4}{1+\sqrt{5}} C_\rho \left(e^{T\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{4}} - 1 \right)$$

Аналогично можно получить оценки $\delta_K(t_3)$, $\delta_K(T)$:

$$\delta_K(t_3) \leqslant e^{\frac{T}{\sqrt{2}}} \left(e^{T\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{4}} \left(\sqrt{2} C_\rho \left(e^{\frac{T}{\sqrt{2}}} - 1 \right) \right) + \frac{4}{1+\sqrt{5}} C_\rho \left(e^{T\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{4}} - 1 \right) \right) + \sqrt{2} C_\rho \left(e^{\frac{T}{\sqrt{2}}} - 1 \right)$$

$$\delta_K(T) \leqslant e^{T\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{4}} \left(e^{\frac{T}{\sqrt{2}}} \left(e^{T\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{4}} \left(\sqrt{2} C_\rho \left(e^{\frac{T}{\sqrt{2}}} - 1 \right) \right) + \frac{4}{1+\sqrt{5}} C_\rho \left(e^{T\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{4}} - 1 \right) \right) + \sqrt{2} C_\rho \left(e^{\frac{T}{\sqrt{2}}} - 1 \right) \right) +$$
$$+ \frac{4}{1+\sqrt{5}} C_\rho \left(e^{T\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{4}} - 1 \right)$$

выделяя самый большой член этой последовательности можем получить следующую грубую оценку

$$\delta_K(T) \leqslant e^{T\cdot\frac{1+\sqrt{5}+\sqrt{8}}{\sqrt{2}}} \cdot C_\rho$$

Касательно нашей задачи - эта оценка подойдет и для T=10, и для T=20, так как решение проходит через те же области управления в том же порядке.

9 Аналитическое решение

Решение в данной задаче представляется в виде кусочно-дифференцируемых функций, поэтому искать аналитическое решение не будем, а будем считать, что численное решение максимальной точности и будет нашим решением, с которым мы все будем сравнивать.

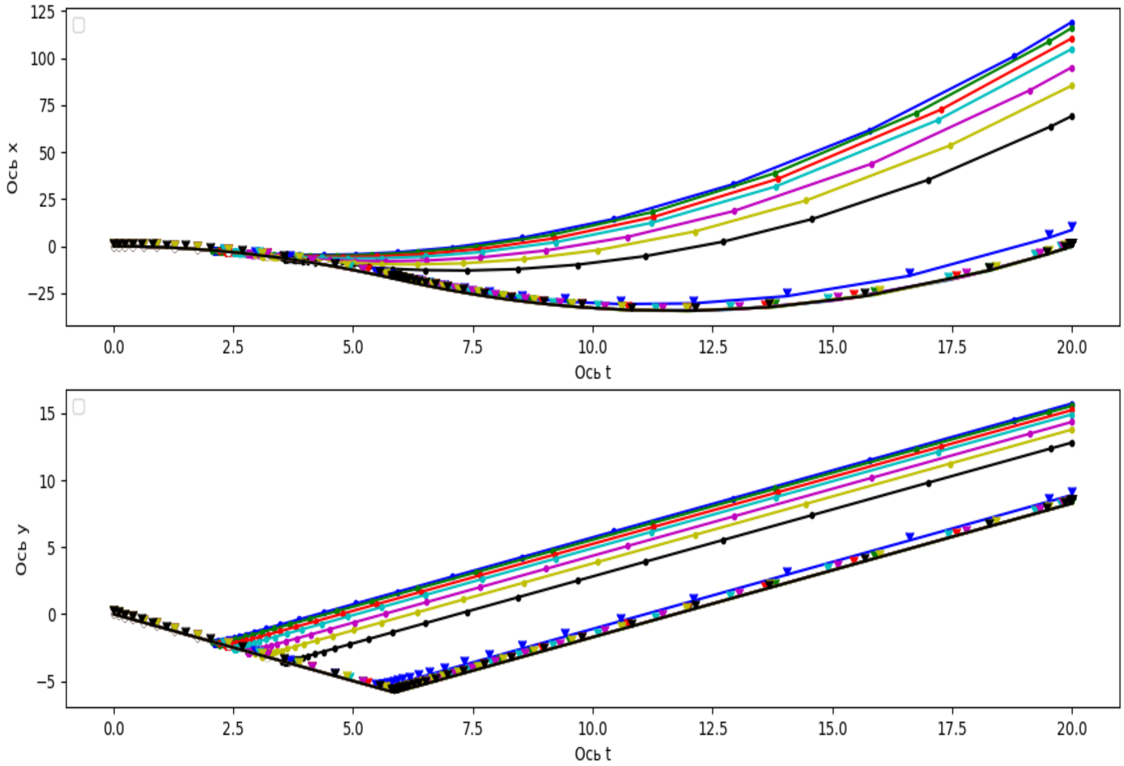
10 Правило Рунге

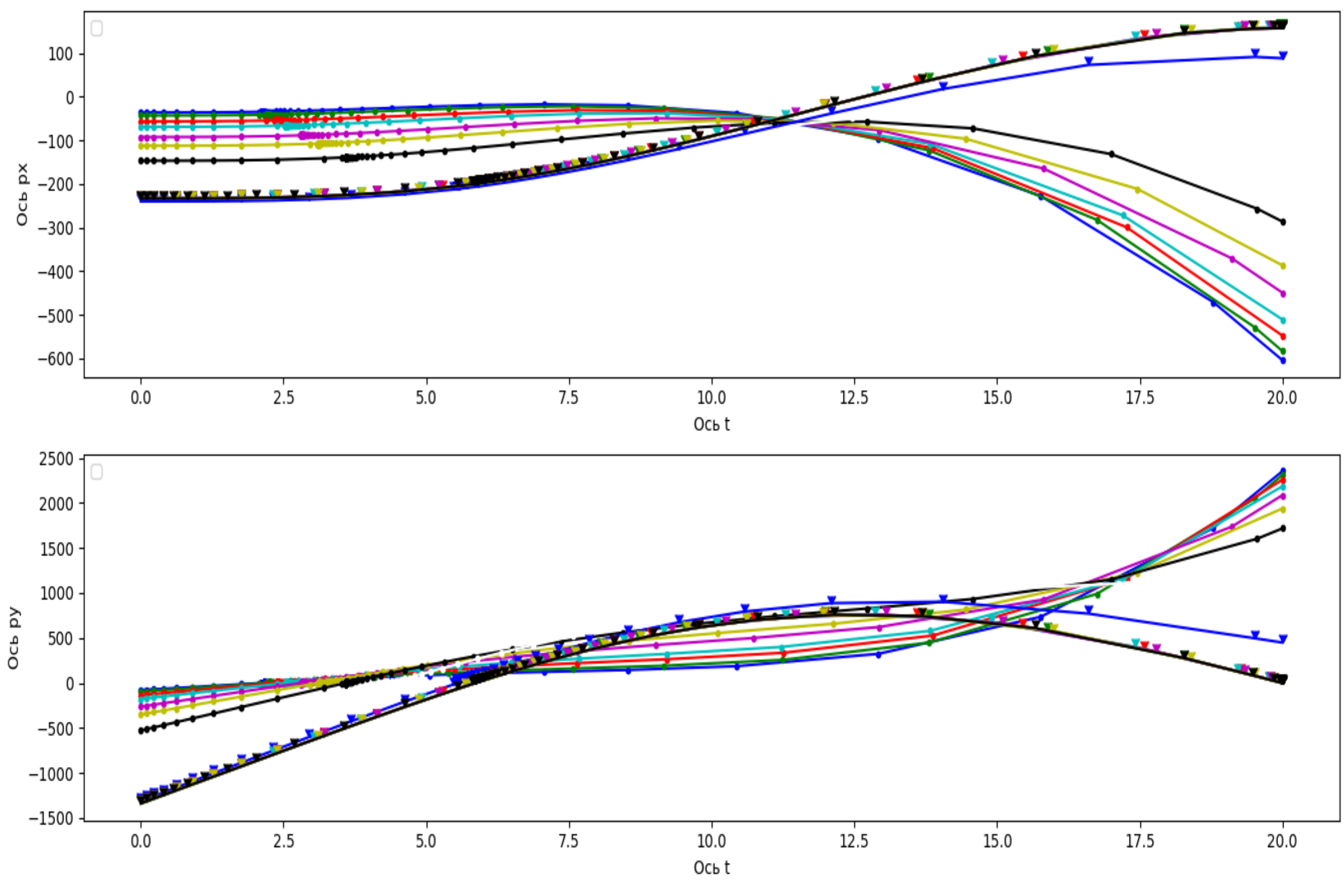
В таблице, указанной ниже, проверяется правило Рунге. А именно были просчитаны отличия $\Delta x(t), \Delta y(t), \Delta p_x(t), \Delta p_y(t)$ фазовых переменны от действительного решения, накомленная к соответствующему моменты времени. $\Delta H(t)$ - изменение первого интеграла за все время по шагам, то есть $|maxH(t) - minH(t)|$. $\delta_K(T)$ - это глобальная ошибка, накопившаяся к моменту времени t.

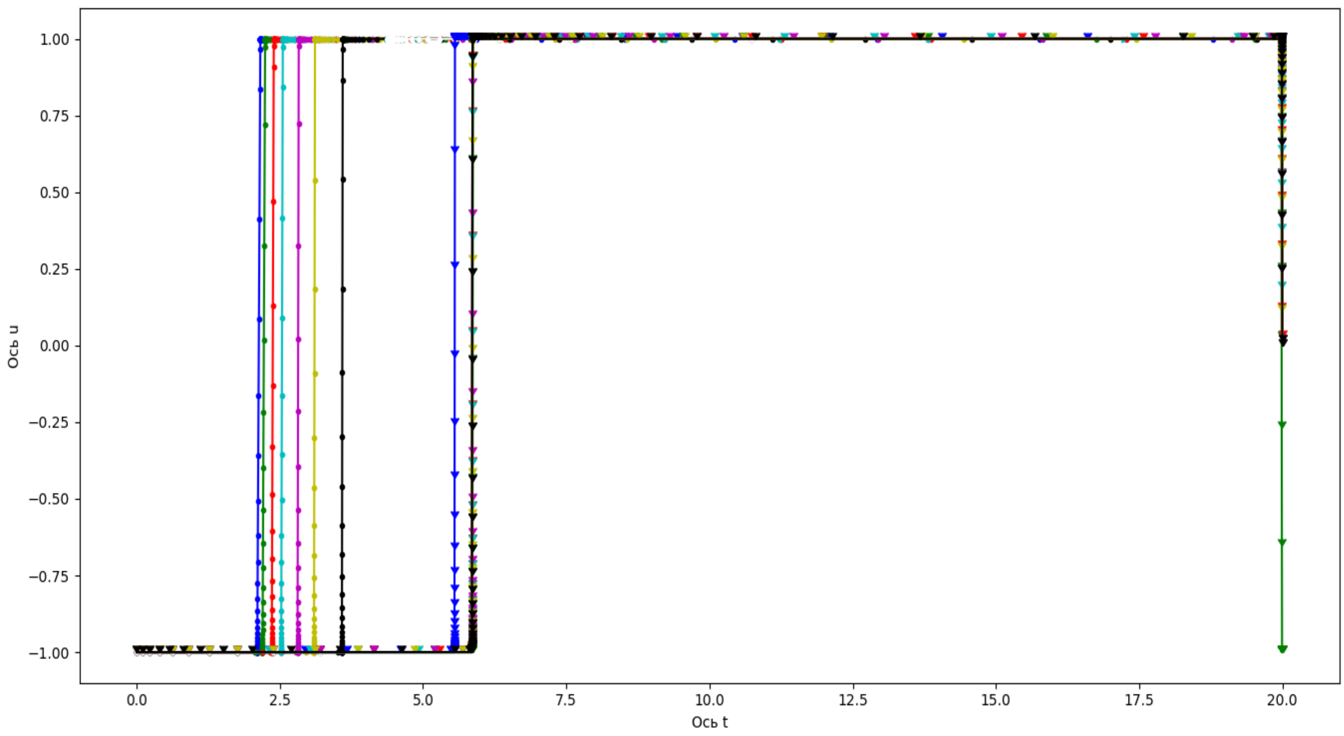
t	Δ_{loc}	$\Delta x(t)$	$\Delta y(t)$	$\Delta p_x(t)$	$\Delta p_y(t)$	$\delta_K(T)$	$\Delta H(t)$
$T = 10$							
2.5	10^{-8}	$1.609 \cdot 10^{-15}$	0.00	0.00	$2.131 \cdot 10^{-14}$	$3.733 \cdot 10^{-14}$	$1.421 \cdot 10^{-14}$
5		$4.274 \cdot 10^{-15}$	$1.110 \cdot 10^{-8}$	$3.552 \cdot 10^{-15}$	$3.413 \cdot 10^{-14}$	$4.801 \cdot 10^{-8}$	$8.526 \cdot 10^{-14}$
7.5		$4.274 \cdot 10^{-15}$	$1.110 \cdot 10^{-8}$	$7.105 \cdot 10^{-15}$	$3.413 \cdot 10^{-14}$	$2.812 \cdot 10^{-7}$	$8.526 \cdot 10^{-14}$
10		$1.232 \cdot 10^{-12}$	$1.772 \cdot 10^{-8}$	$1.421 \cdot 10^{-14}$	$1.276 \cdot 10^{-12}$	$1.661 \cdot 10^{-6}$	$9.947 \cdot 10^{-14}$
2.5	10^{-10}	$1.609 \cdot 10^{-15}$	0.00	0.00	$2.131 \cdot 10^{-14}$	$3.733 \cdot 10^{-14}$	$1.421 \cdot 10^{-14}$
5		$5.162 \cdot 10^{-15}$	$1.127 \cdot 10^{-10}$	0.00	$3.716 \cdot 10^{-14}$	$4.849 \cdot 10^{-10}$	$7.105 \cdot 10^{-14}$
7.5		$6.938 \cdot 10^{-15}$	$1.127 \cdot 10^{-10}$	$6.217 \cdot 10^{-15}$	$4.427 \cdot 10^{-14}$	$2.840 \cdot 10^{-9}$	$7.105 \cdot 10^{-14}$
10		$7.320 \cdot 10^{-15}$	$1.987 \cdot 10^{-10}$	$1.332 \cdot 10^{-14}$	$5.695 \cdot 10^{-14}$	$1.680 \cdot 10^{-8}$	$9.947 \cdot 10^{-14}$
2.5	10^{-12}	$1.609 \cdot 10^{-15}$	0.00	0.00	$2.131 \cdot 10^{-14}$	$3.733 \cdot 10^{-14}$	$1.421 \cdot 10^{-14}$
5		$2.498 \cdot 10^{-15}$	$1.062 \cdot 10^{-12}$	$5.329 \cdot 10^{-15}$	$3.336 \cdot 10^{-14}$	$4.944 \cdot 10^{-12}$	$9.947 \cdot 10^{-14}$
7.5		$2.498 \cdot 10^{-15}$	$1.062 \cdot 10^{-12}$	$7.105 \cdot 10^{-15}$	$4.046 \cdot 10^{-14}$	$2.898 \cdot 10^{-11}$	$9.947 \cdot 10^{-14}$
10		$4.229 \cdot 10^{-15}$	$1.736 \cdot 10^{-12}$	$1.421 \cdot 10^{-14}$	$7.697 \cdot 10^{-14}$	$1.712 \cdot 10^{-10}$	$1.278 \cdot 10^{-13}$
$T = 20$							
5	10^{-8}	$2.498 \cdot 10^{-15}$	0.00	0.00	$5.684 \cdot 10^{-13}$	$5.078 \cdot 10^{-12}$	$4.547 \cdot 10^{-13}$
10		$3.022 \cdot 10^{-12}$	$1.609 \cdot 10^{-8}$	$4.263 \cdot 10^{-14}$	$3.848 \cdot 10^{-12}$	$3.011 \cdot 10^{-7}$	$9.094 \cdot 10^{-13}$
15		$3.025 \cdot 10^{-12}$	$1.609 \cdot 10^{-8}$	$1.350 \cdot 10^{-13}$	$3.961 \cdot 10^{-12}$	$1.033 \cdot 10^{-5}$	$9.094 \cdot 10^{-13}$
20		$6.539 \cdot 10^{-12}$	$2.596 \cdot 10^{-8}$	$1.492 \cdot 10^{-13}$	$7.764 \cdot 10^{-12}$	$3.548 \cdot 10^{-4}$	$9.094 \cdot 10^{-13}$
5	10^{-10}	$2.498 \cdot 10^{-15}$	0.00	0.00	$5.684 \cdot 10^{-13}$	$5.078 \cdot 10^{-12}$	$4.547 \cdot 10^{-13}$
10		$2.381 \cdot 10^{-14}$	$1.246 \cdot 10^{-10}$	$4.263 \cdot 10^{-14}$	$8.235 \cdot 10^{-13}$	$2.515 \cdot 10^{-9}$	$1.591 \cdot 10^{-12}$
15		$2.381 \cdot 10^{-14}$	$1.246 \cdot 10^{-10}$	$1.634 \cdot 10^{-13}$	$1.050 \cdot 10^{-12}$	$8.631 \cdot 10^{-8}$	$1.591 \cdot 10^{-12}$
20		$3.538 \cdot 10^{-14}$	$1.822 \cdot 10^{-10}$	$1.350 \cdot 10^{-13}$	$8.818 \cdot 10^{-13}$	$2.963 \cdot 10^{-6}$	$1.591 \cdot 10^{-12}$
5	10^{-12}	$2.498 \cdot 10^{-15}$	0.00	0.00	$5.684 \cdot 10^{-13}$	$4.978 \cdot 10^{-12}$	$4.547 \cdot 10^{-13}$
10		$2.498 \cdot 10^{-15}$	$9.832 \cdot 10^{-13}$	$2.842 \cdot 10^{-14}$	$7.136 \cdot 10^{-13}$	$1.904 \cdot 10^{-10}$	$2.046 \cdot 10^{-12}$
15		$2.498 \cdot 10^{-15}$	$9.832 \cdot 10^{-13}$	$4.973 \cdot 10^{-14}$	$8.273 \cdot 10^{-13}$	$6.534 \cdot 10^{-9}$	$2.046 \cdot 10^{-12}$
20		$1.078 \cdot 10^{-14}$	$1.251 \cdot 10^{-12}$	$6.394 \cdot 10^{-14}$	$9.522 \cdot 10^{-13}$	$2.243 \cdot 10^{-7}$	$2.046 \cdot 10^{-12}$

11 Полученные фазовые переменные и значения функционала.

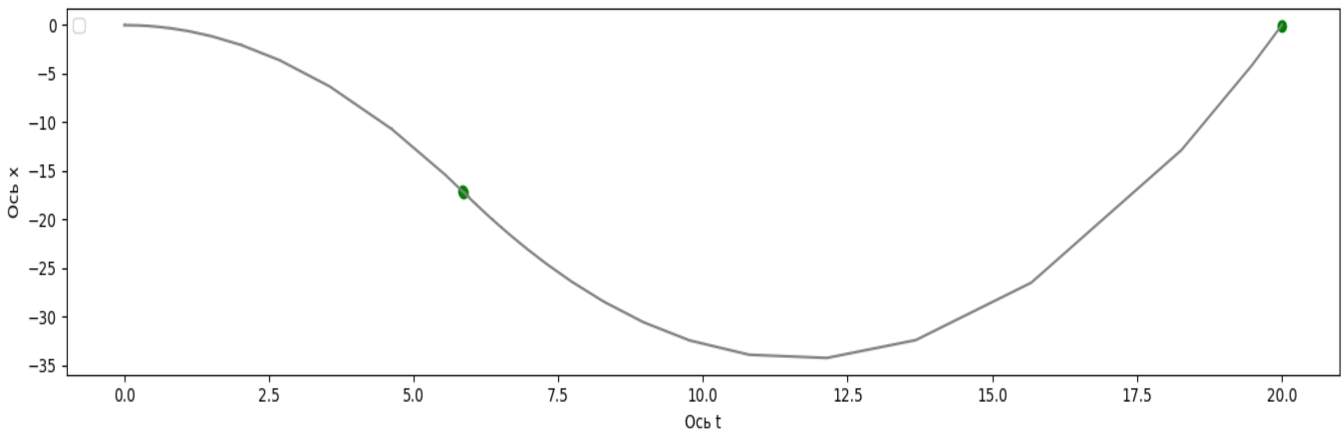
Разберемся с случаем T=20. Ниже будут представлены графики, соответсвующие постепенному поиску оптимальной траектории. Эти графики несут лишь изобразительный характер и не содержат самих данных:

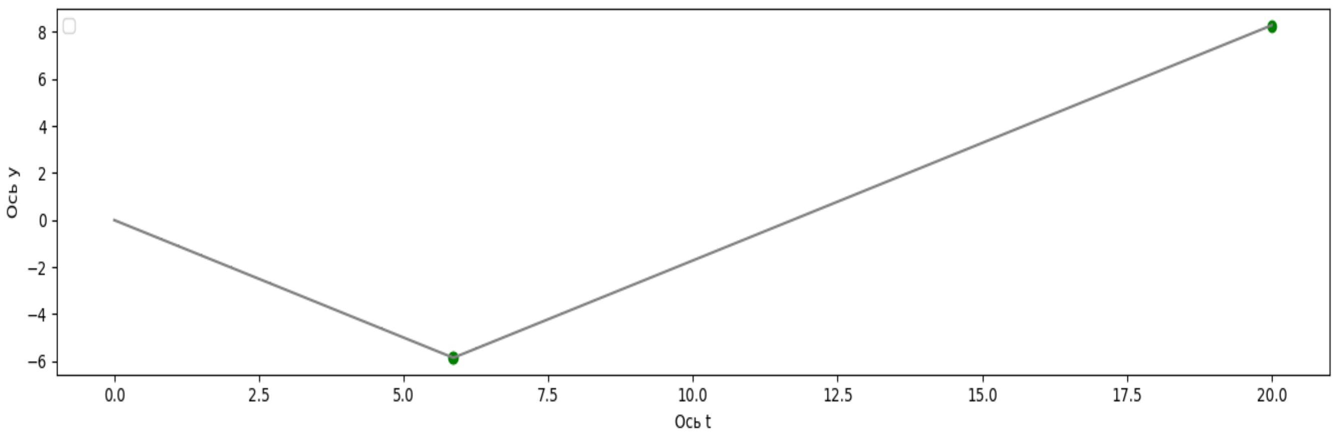

Ось x
Ось t
Ось y
Ось t

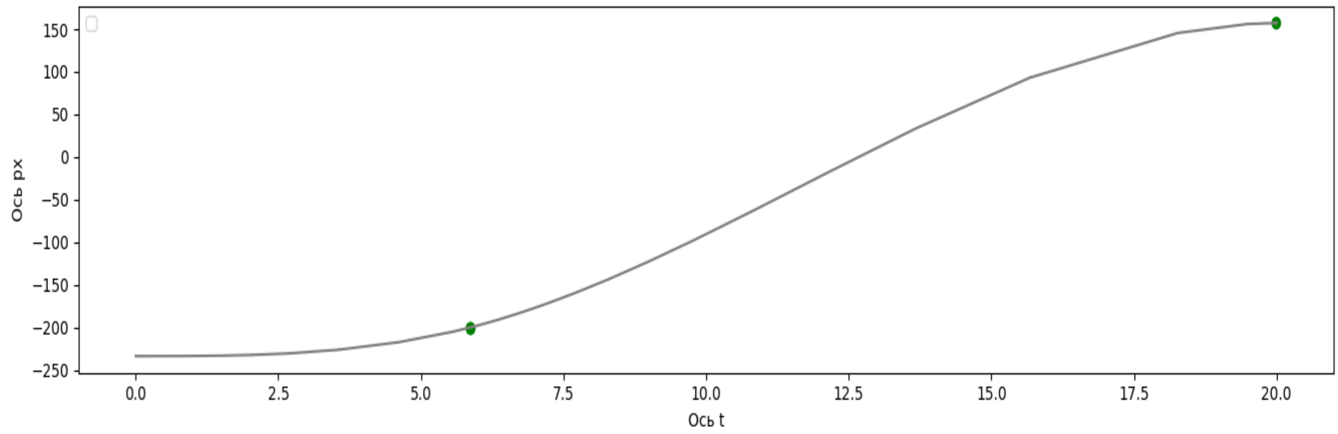

Ось px
Ось t
Ось py
Ось t

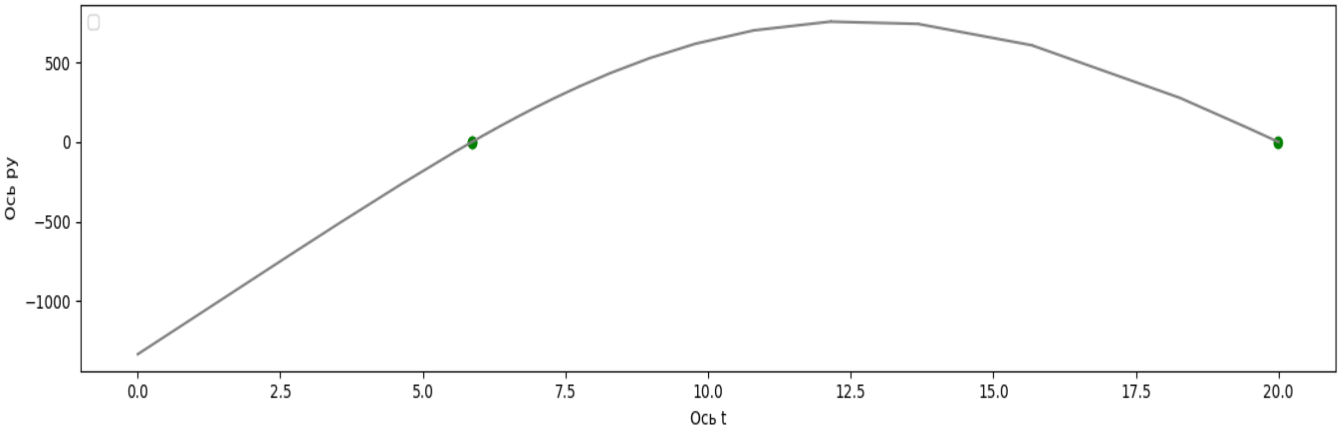


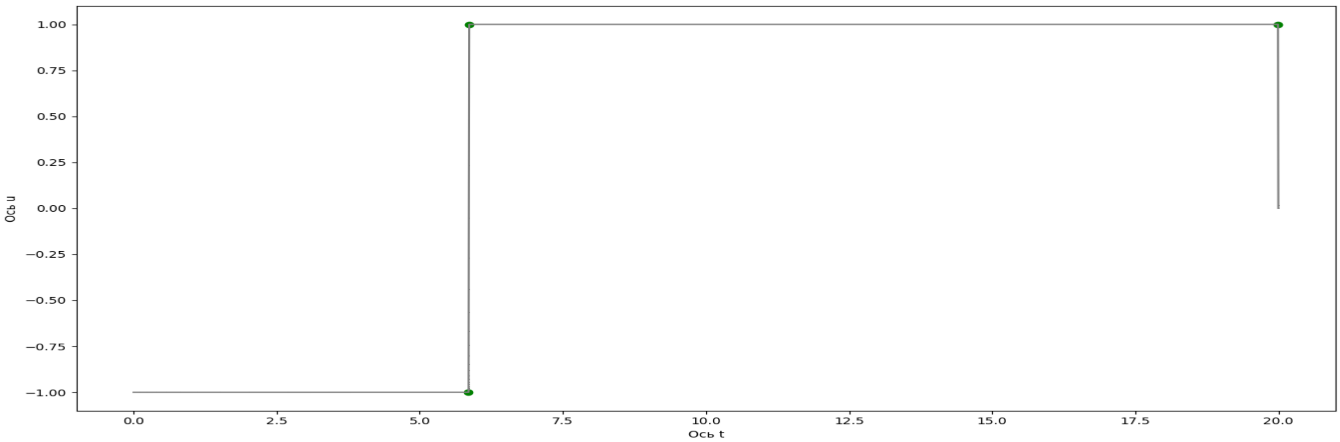
Поэтому теперь нарисуем графики фазовых переменны для финальных параметров пристрелки.









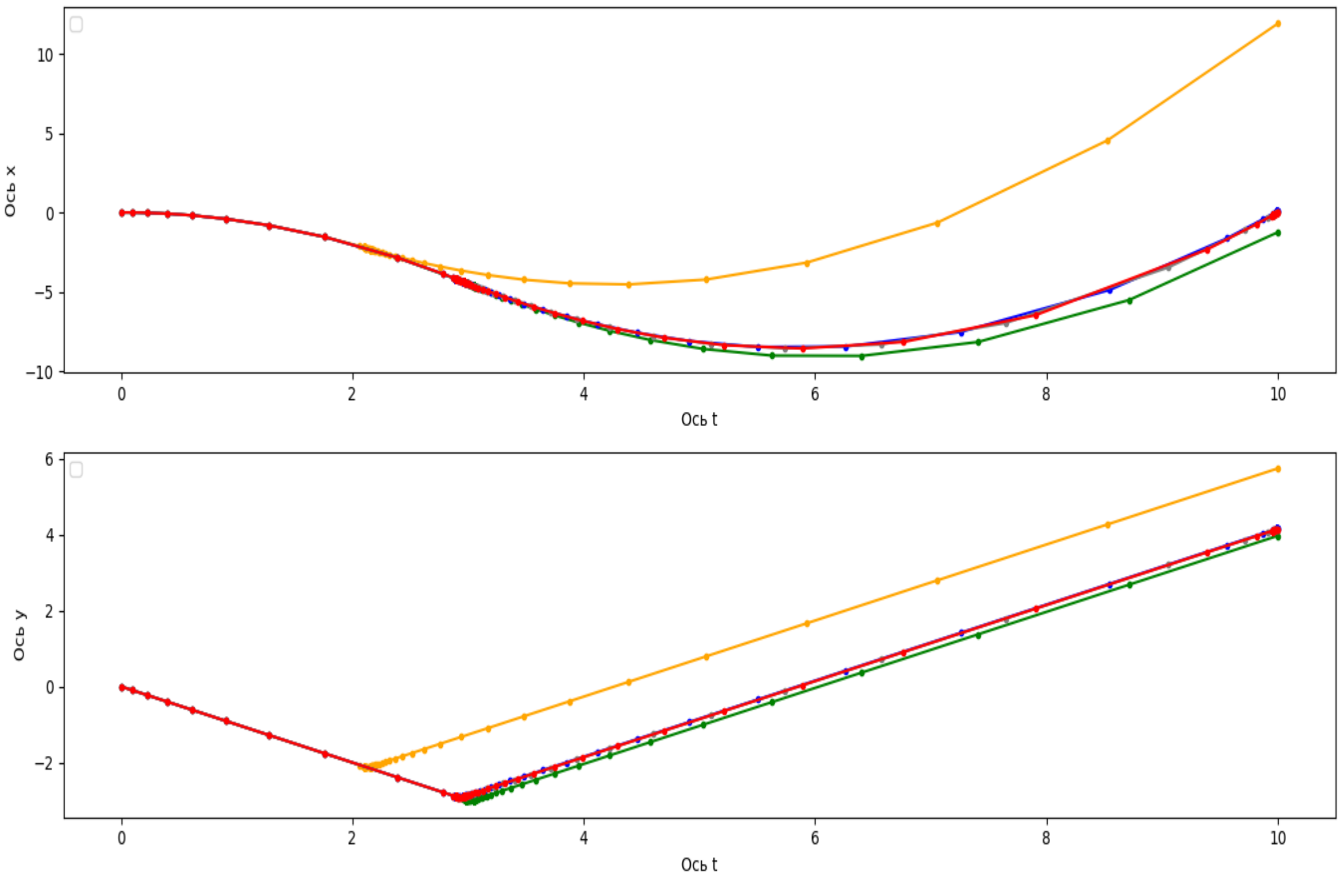


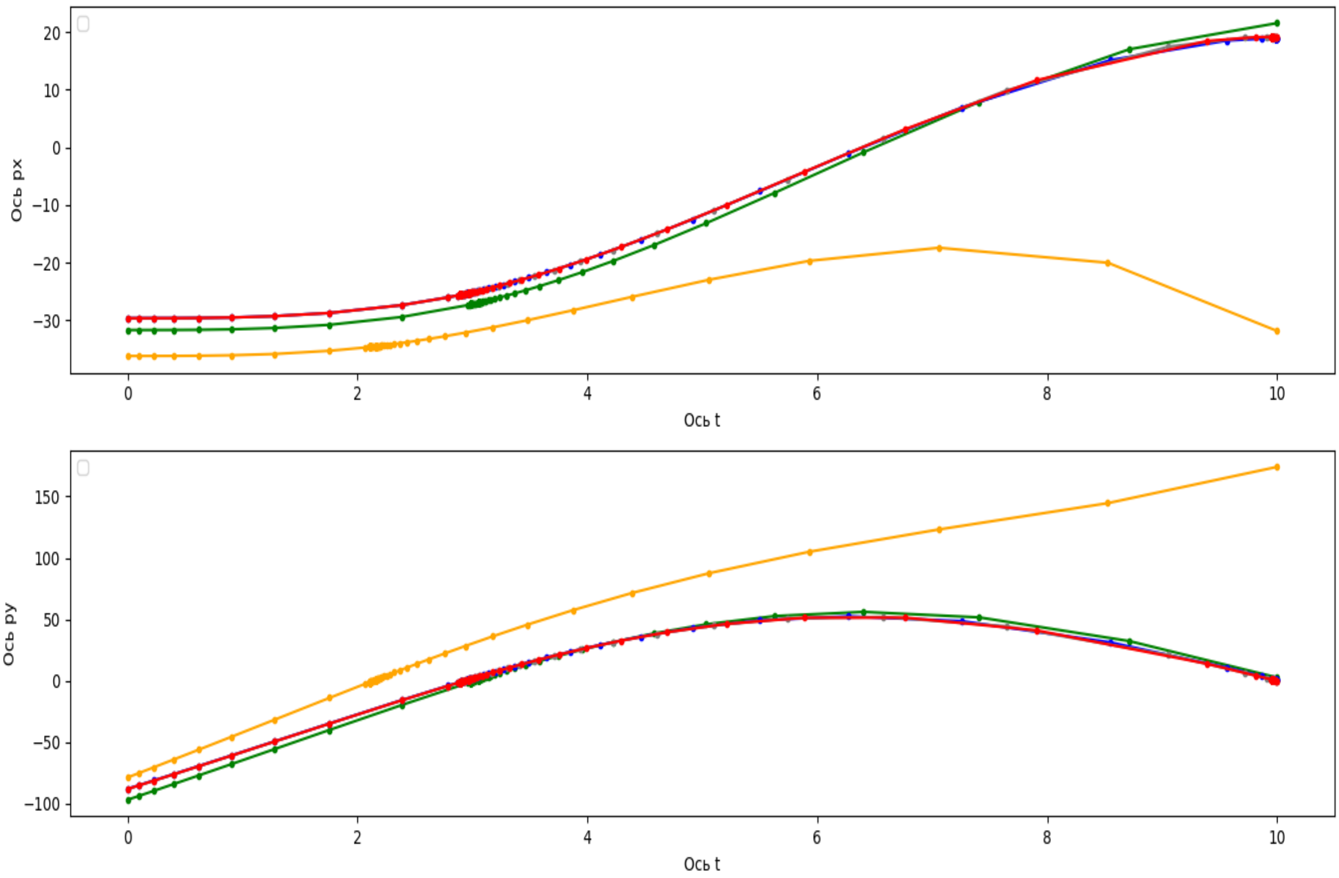
Явно укажим теперь точки переключения для финальных параметров пристрелки.

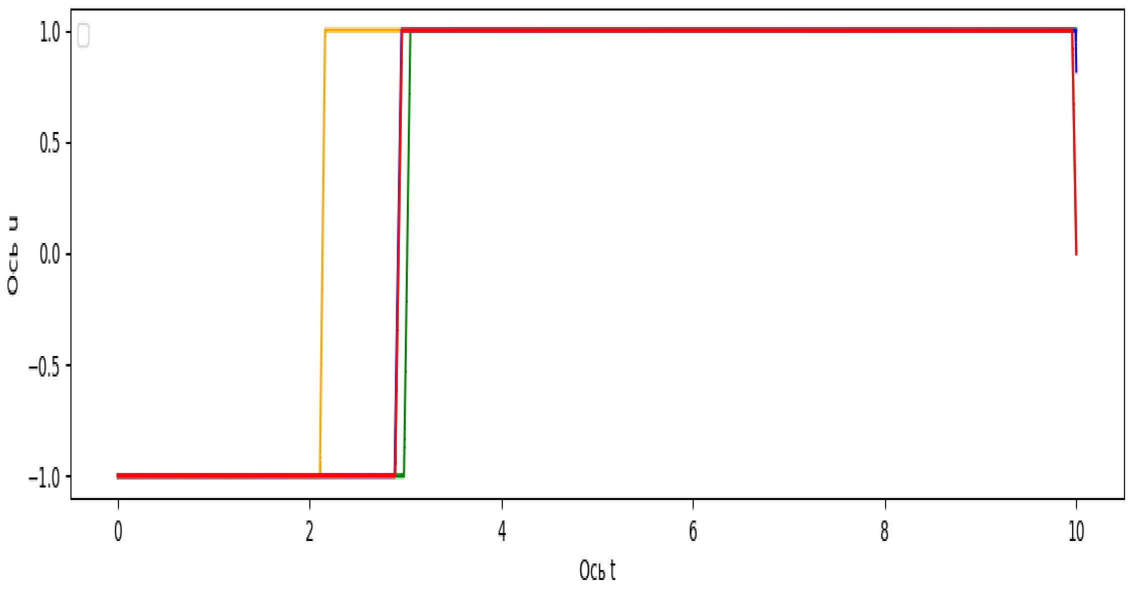
t	$x(t)$	$y(t)$	$p_x(t)$	$p_y(t) = u$
5.853006	−17.12884	−5.853006	−200.0278	−1.00
5.862724	−17.18574	−5.853005	−199.8611	1.00
19.993953	−0.05007457	8.278224	157.0778	1.00

Расчет интеграла $B_0 = \int_0^T (u^2 - y^2 - x^2)dt$ дает следующее: $B_0 = -10794.147030$.

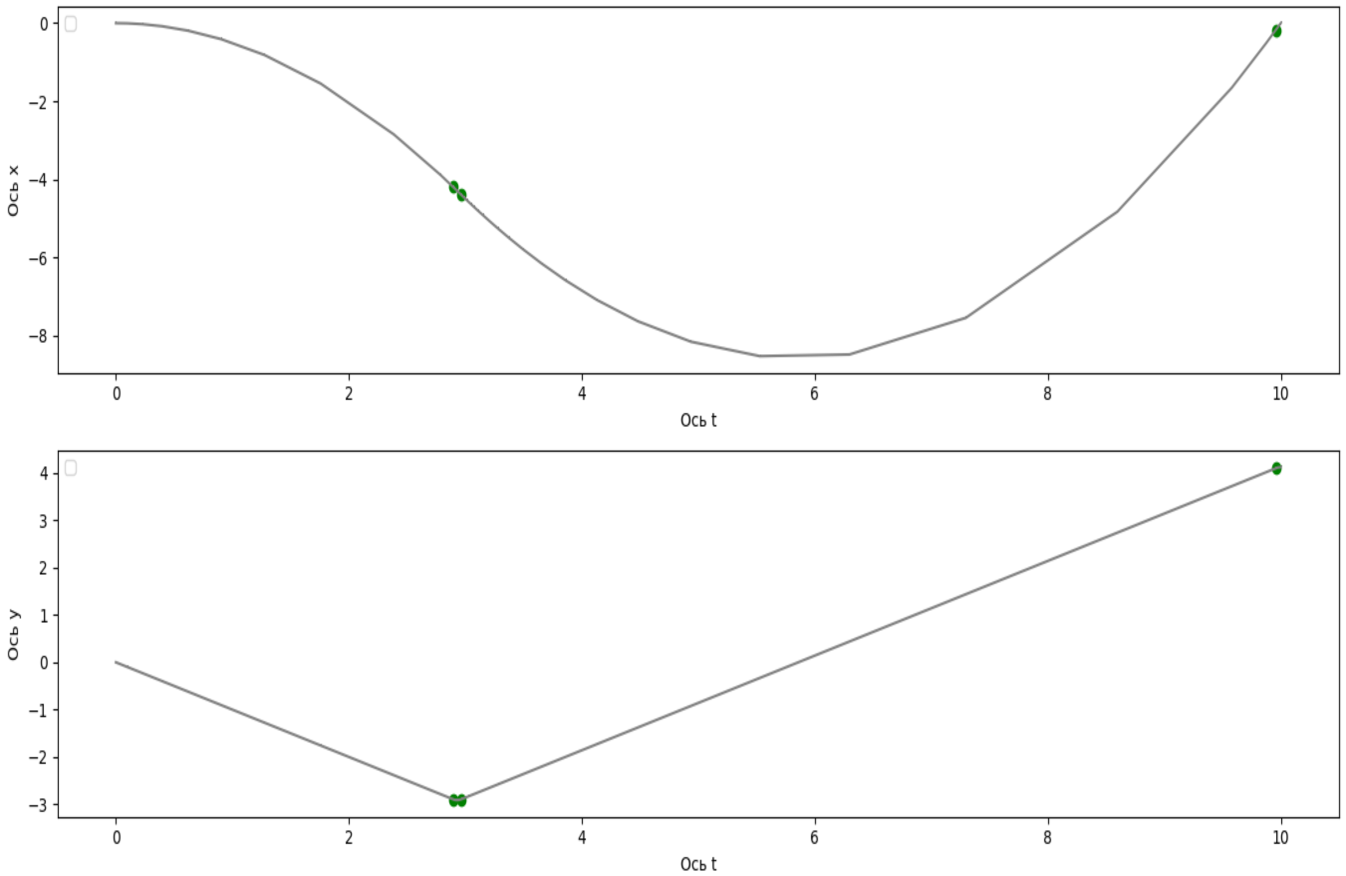
Разберемся с случаем T=10. Ниже будут представлены графики, соответсвующие постепенному поиску оптимальной траектории. Эти графики несут лишь изобразительный характер и не содержат самих данных:

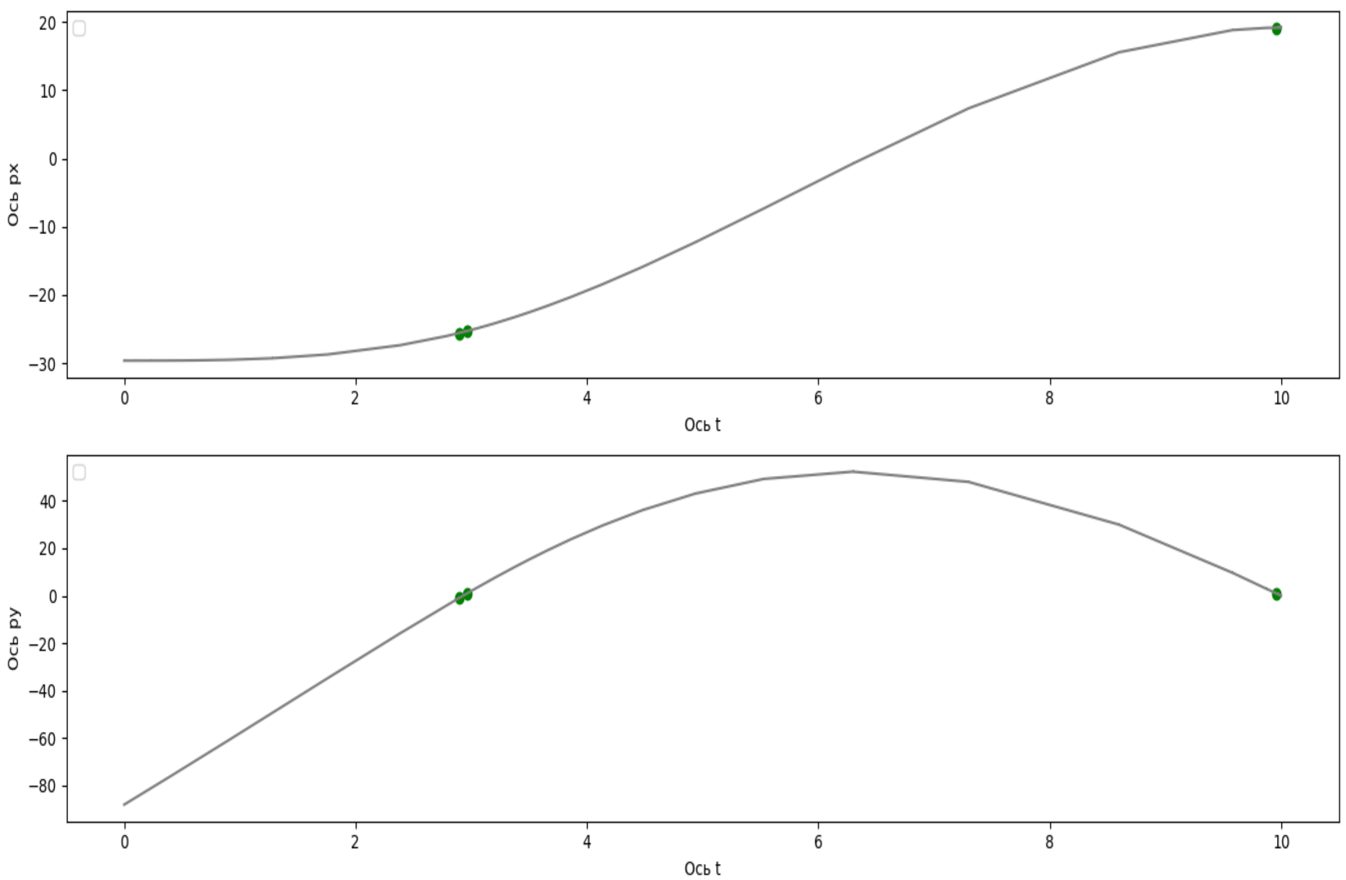


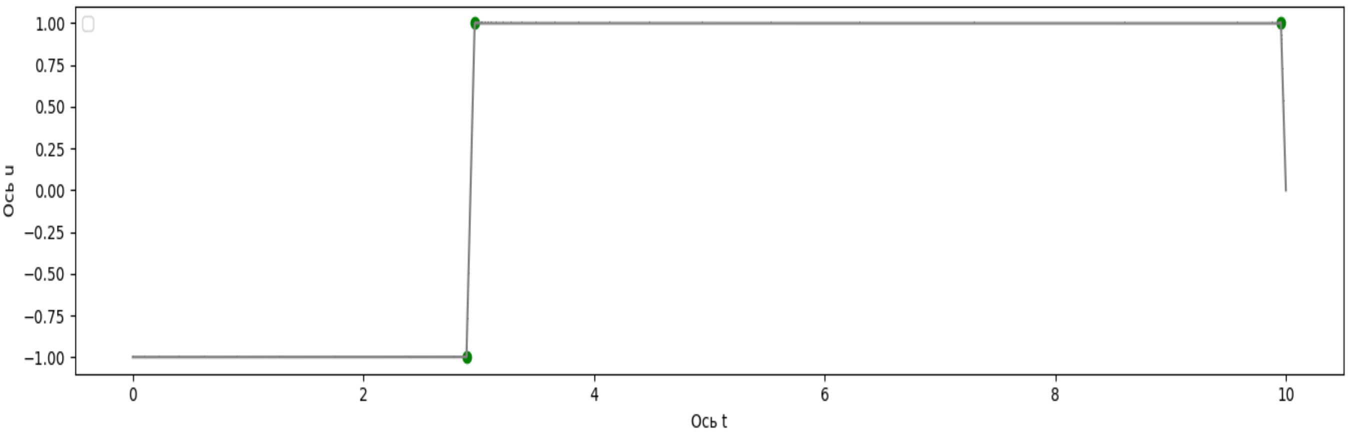




Поэтому теперь нарисуем графики фазовых переменны для финальных параметров пристрелки.


Ось x
0
−2
−4
−6
−8
Ось t
0
2
4
6
8
10
Ось y
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
Ось t
0
2
4
6
8
10


Ось px
20
10
0
−10
−20
−30
Ось t
0
2
4
6
8
10
Ось py
40
20
0
−20
−40
−60
−80
Ось t
0
2
4
6
8
10



Явно укажим теперь точки переключения для финальных параметров пристрелки.

t	$x(t)$	$y(t)$	$p_x(t)$	$p_y(t) = u$
2.893731	-4.186838	-2.893731	-25.59574	-1.00
2.964275	-4.391799	-2.893605	-25.29316	1.00
9.957065	-0.1766136	4.099185	19.17492	1.00

Расчет интеграла $B_0 = \int_0^T (u^2 - y^2 - x^2)dt$ дает следующее: $B_0 = -358.309826$.

Что же касается параметров $T = 1, T = 0.1$. Будем придерживаться следующей логики, если система состоит из непрерывных функций, то непрерывно изменяя параметр T , то тогда оптимальное решение тоже будет изменяться непрерывно. Поэтому сделаем следующий алгоритм, берем начальные параметры пристрелки при $T = 10$, находим параметры оптимальной траектории, уменьшим T на 0.1, возьмем теперь опять в качестве начальных параметров пристрелки параметры, полученные на предыдущем шаге и повторим алгоритм, и так далее ...

Таким образом дойдем до того, что при $T = 3.3$ - мы можем найти оптимальное управление, но уже при $T = 3.2$ - мы уже не можем найти оптимальное управление, поэтому будем считать, что при $T = 1, T = 0.1$ - нет возможности найти оптимальное решение.