1 Аналитическое решение задачи.

Отыскание общего решения данной системы является достаточно тяжелой задачей, поэтому наша цель будет найти такие решения, которые удовлетворяютя данной системе. Итак, имеем следующую систему уравнеий:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = u, \\ \dot{p}_x = 0 \\ \dot{p}_y = -p_x - \frac{2 \cdot t^r \cdot y}{(1+y^2)^2} \\ u = \begin{cases} 16 \text{ ,если } p_y > 0 \\ 0 \text{ ,если } p_y < 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$x(0) = 0,\ x(2) = 1,$$
$$p_y(0) = 0,\ p_y(2) = 0,$$
$$r \in \{1, 2\}.$$

Задаем начальные условия:

$$x(0) = 0 \ , \ \ y(0) = y_0 \ , \ \ p_y(0) = 0 \ , \ \ p_x(0) = p_x^0. \tag{1}$$

Решим для начала задачу с параметром $r = 1$.

Будем считать, что $p_x^0 > 0$. Тогда имеем $\dot{p}_y(0) < 0$, что означает, что необходимо выставить параметр $u = 0$.. Решая эту систему уравнеий получаем следующие решения:

$$\begin{cases} x(t) \ = \ y_0 \cdot t \\ y(t) \ \equiv \ y_0 \\ p_x(t) \ \equiv \ p_x^0 \\ p_y(t) \ = \ -p_x^0 \cdot t \ - \ \frac{y_0}{(1+y_0^2)^2 \cdot t^2} \end{cases}$$

Пусть t^* - момент, когда $p_x(t^*) \ = \ 0$. Заметим лишь, что если $y_0 \ = \ 0$, то имеем противоречие с $p_y(2) = 0$. Тогда для этого момента времени справедливо:

$$\begin{cases} x(t^*) \ = \ y_0 \cdot t^* \\ y(t^*) \ = \ y_0 \\ p_x(t^*) \ = \ p_x^0 \\ p_y(t^*) \ = \ 0 \end{cases} \quad \text{,где } t^* \ = \ \frac{p_x^0 \cdot (1 + y_0^2)^2}{-y_0}.$$

$t^* \ > \ 0 \Rightarrow y_0 \ < \ 0$

$t^* \in (0 \ , \ 2]$, причем если $t^* \ = \ 2$, то имеем противоречие с $x(2) = 1;$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \ t^* \in (0 \ , \ 2) \Leftrightarrow \ 0 \ < \ p_x^0 \ < \ \dfrac{-2 \cdot y_0}{(1 + y_0^2)^2}$

Заметим, что $\dot{p}_y(t^*) = p_x^0 \ > \ 0$, что означает, что решение переходит в верхнюю полуплоскость трансверсально, поэтому после точки t^* считаем $u = 16$. Для удобства совершим сдвиг по оси времени $t \ = \ \tau + t^*$, и тогда новая систеа примет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{x} \ = \ y, \\ \dot{y} \ = \ u, \\ \dot{p}_x \ = \ 0 \\ \dot{p}_y \ = \ -p_x - \frac{2\cdot(\tau+t^*)\cdot y}{(1+y^2)^2} \end{cases} \quad \text{, с начальными условиями} \begin{cases} x(0) \ = \ y_0 \cdot t^* \\ y(0) \ = \ y_0 \\ p_x(0) \ = \ p_x^0 \\ p_y(0) \ = \ 0 \end{cases}$$

Решаем эту систему уравнений и получаем следующее решение:

$$\begin{cases} x(\tau) \ = \ 8\tau^2 + \tau \cdot y_0 + y_0 \cdot t^* \\ y(\tau) \ = \ 16\tau + y_0 \\ p_x(\tau) \ = \ p_x^0 \\ p_y(\tau) \ = \ \frac{1}{256}\left(16\left(-16 \cdot p_x^0 \cdot \tau - \frac{t^*}{1+y_0^2} + \frac{\tau+t^*}{1+(16\cdot\tau+y_0)^2}\right) + \mathbf{Arctan}(y_0) - \mathbf{Arctan}(16\tau + y_0)\right) \end{cases}$$

Попытаемся найти такие начальные значения, что будут выполнены краевые условия, то есть:

$$\begin{cases} x(2-t^*) \ = \ 1 \\ p_y(2-t^*) \ = \ 0 \end{cases} \quad \text{, причем } p_x^0 \ = \ -\frac{t^* \cdot y_0}{(1+y_0^2)^2}$$

$$x(2-t^*) \ = \ 1 \ \Rightarrow \ t^* \ = \ 2 \ \pm \frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{1 - 2\cdot y_0} \ ,$$

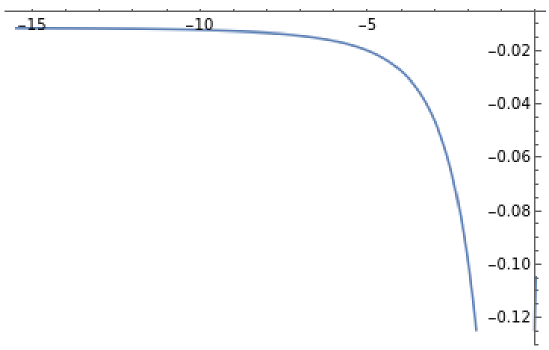
также необходимо вспомнить об ограничении $t^* \in (0, 2)$,

$$\left[\begin{array}{l} t^* \ = \ 2 \ + \frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{1-2\cdot y_0} \ > 2 \ \text{ для } \forall y_0 \ < \ 0 \text{ -противоречие.} \\ t^* \ = \ 2 \ - \frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{1-2\cdot y_0} \ \Rightarrow \ -\frac{31}{2} \ < \ y_0 \ < \ 0 \end{array} \right.$$

подставляя соответствующие функции в последнее уравннение системы $\Rightarrow$

$$\frac{4(-8+\sqrt{2-4\cdot y_0})}{1+y_0^2} + \\ + 32 \cdot \frac{\sqrt{2-4\cdot y_0}(132\cdot y_0 - 264\cdot y_0^2 + 20\cdot y_0^3) + (1 - 33\cdot y_0 + 196\cdot y_0^2 - 257\cdot y_0^3 + 3\cdot y_0^4)}{(1+y_0^2)^2\cdot(33 + 8(-8+\sqrt{2-4\cdot y_0})\cdot y_0 + y_0^2)} + \\ + \mathbf{Arctan}(y_0) - \mathbf{Arctan}(4\sqrt{2-4\cdot y_0} + y_0) \ = \ 0$$

Из рисунка видно, что последнее уравнение не разрешимо на промежутке $-\frac{31}{2} \ < \ y_0 \ < \ 0$. Причем из рисунка также видно, что $p_y(2-t^*)$ в зависимости от y_0 может принимать как положительные, так и отрицательные значения, поэтому опять найдется точка переключения со своими ограничениями. После точки переключения управление $u \ = \ 0$.



Это породит новую систему уравнений со своими начальными условиями, с учетом сдвигом по времени эту систему можно записать так:

Для удобства введем обозначения $t_1 = t^*$, t_2 -момент времени, когда посленяя функция $p_y(t2) = 0$.

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{p}_x = 0 \\ \dot{p}_y = -p_x - \frac{2\cdot(t+t_1+t_2)\cdot y}{(1+y^2)^2} \end{cases},$$

с начальными условиями

$$\begin{cases} x(0) = x_2 \\ y(0) = y_2 \\ p_x(0) = p_x^0 \\ p_y(0) = 0 \end{cases}, \text{ где } \begin{cases} x_2 = 8t_2^2 + t_2\cdot y_0 + y_0\cdot t_1 \\ y_2 = 16t_2 + y_0 \\ t_1 = \frac{p_x^0\cdot(1+y_0^2)^2}{-y_0} \end{cases}$$

Далее хотим разрешить краевую задачу. Решение системы уравнений примет вид:

$$\begin{cases} x(t) = x_2\cdot t + x_2 \\ y(t) = y_2 \\ p_x(t) = p_x^0 \\ p_y(t) = t\left(-p_x^0 - \frac{2\cdot(t_1+t_2)\cdot y_2}{(1+y_2^2)^2} - \frac{t\cdot y_2}{(1+y_2^2)^2}\right) = t\cdot\psi(t,t_2,t_1,y_2,p_x^0) \end{cases}$$

Опишем идею построения уравнений :

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} t_1 = t_1(y_0,p_x^0) \Rightarrow p_x^0 = p_x^0(y_0,t_1) \\ \left.\begin{array}{l} y_2 = y_2(y_0,t_2) \\ x_2 = x_2(t_2,t_1,y_0) \\ x(2-t_1-t_2) = \phi(y_2,x_2,t_1,t_2) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow t_1 = t_1(t_2,y_0) \end{array}\right\} \Rightarrow p_x^0 = p_x^0(y_0,t_2) \\ \psi(2-t_1-t_2,t_2,t_1,y_2,p_x^0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(t_2,y_0) = 0.$$

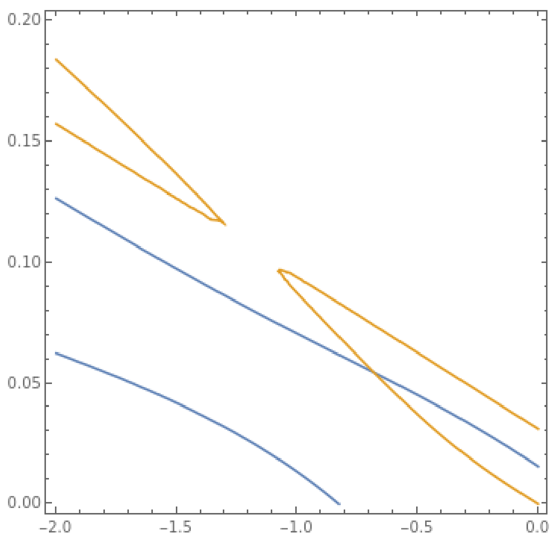


Рис. 1: $y_0 = -0.681078049$
$t_2 = 0.054491750283$

А также вспоминая предшествующее уравнение $p_y(t_2) = 0 \Leftrightarrow G(t_2,t_1,y_0,p_x^0) = 0$ и совершая аналогичный ряд действия, имеем:

$$\begin{array}{l} f(t_2,y_0) = 0 \\ g(t_2,y_0) = 0 \end{array}$$

Было найда пара точек (рис.1 и рис.2), которые могут претедовать на решение, но не одна из точек не подхоит, так как вычесленное по ним время $t_1 < 0$.

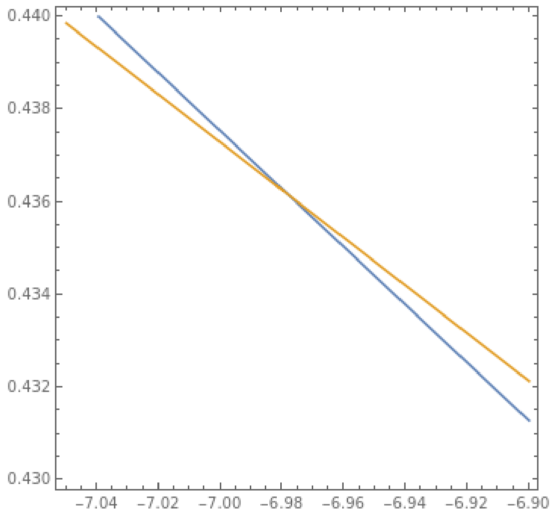


Рис. 2: $y_0 = -6.977892188$
$t_2 = 0.43614901116$

Таким образом мы можем далее искать точку переключения и продолжать решение, но это уже сложная задача, поэтому будем пытаться найти решение среди других начальных параметров.

Далее будем считать, что $p_x^0 = 0$. Заметим, что $y(0) = y_0 \neq 0$, так как решения, тождественно равные 0 нас не интересуют. Таким образом задача распадается на два случая:

Пусть $y_0 > 0$. Тогда для достаточно маленьково δ верным будет утверждение, что $\dot{p}_y(\tau) < 0$ на всем промежутке $(0, \delta)$. Так как $p_y(0) = 0$, то необходимо брать $u = 0$. Это приведет к тому, что:

$$p_y(t) = \frac{-t^2 \cdot y_0}{(1 + y_0^2)^2} \Rightarrow$$

$\nexists t_1$, что $p_y(t_1) = 0$, что приводит к противоречию.

Пусть $y_0 < 0$. Тогда для достаточно маленьково δ верным будет утверждение, что $\dot{p}_y(\tau) > 0$ на всем промежутке $(0, \delta)$. Так как $p_y(0) = 0$, то необходимо брать $u = 16$. Это приведет к тому, что:

$$p_y(t) = \frac{\mathbf{Arctan}(y_0) - \mathbf{Arctan}(16 \cdot t + y_0)}{256} + \frac{t}{16(1 + (16 \cdot t + y_0)^2)}$$

$x(t) = 8t^2 + t \cdot y_0$, требуем, чтобы $p_y(2) = 0$ и $x(2) = 1$.

$x(2) = 1 \;\Rightarrow\; y_0 = -\frac{31}{2} \;\Rightarrow\; p_y(2) \neq 0.$

Это означает, что следует искать точку переключения t_1 , затем строить новую систему уравнений и ее решать, в ходе чего будет получено: Для удобства считаем, что произошел сдвиг по времени.

$$p_y(t) = \frac{-t^2 \cdot y_1}{(1 + y_1^2)^2} \text{ , где } y_1 = 16 * t_1 + y_0.$$

Таким образом имеем, что необходимо выполение $y_1 = 0$, иначе невозможно выполнение краевых условие. Тогда имеем уравнение $t_1 = t_1(y_0)$, подстановка которого в $p_y(t_1) = 0$,полученного на первом шаге дает противоречие, значит решение вообще невозможно при $p_x^0 = 0$.

Тогда разберемся с последним случаем $p_x^0 < 0$.

Тогда $\dot{p}_y(0) > 0$, и в качестве параметра необходимо взять $u = 16$. Тогда получим систему, решением которого имеет вид:

$$\begin{cases} x(t) = 8t^2 \cdot y_0 \\ y(t) = 16t + y_0 \\ p_x(t) \equiv p_x^0 \\ p_y(t) = -p_x^0 \cdot t + \frac{\mathbf{Arctan}(y_0) - \mathbf{Arctan}(16 \cdot t + y_0)}{256} + \frac{t}{16(1 + (16 \cdot t + y_0)^2)} \end{cases}$$

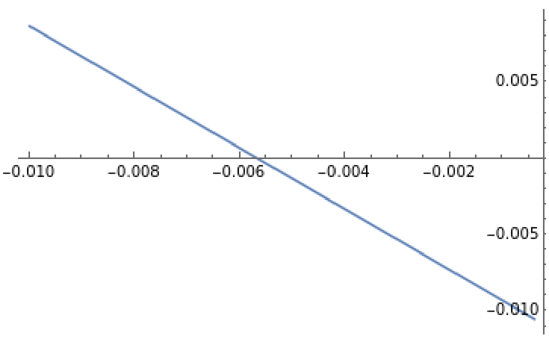


Рис. 3: $p_x^0 = -0.00566313$

Тогда попытаемся решить такую систему:

$$\begin{array}{l} x(2)=1 \;\Rightarrow\; y_0=-\frac{31}{2} \\ p_y(2)=0 \text{ , при} y_0=-\frac{31}{2} \;\Rightarrow\; p_x^0=-0.00566313 \end{array}$$

Таким образом мы нашли решение, не имеющее точки переключения с начальными параметрами $(p_x^0, y_0) = (-0.00566313, -\frac{31}{2})$.

Попытаемся теперь построить решение, проходящее через одну точку переключения. Тогда получим новую систему уравнений(с учетом сдвига по времени и сменой значения параметра на 0):

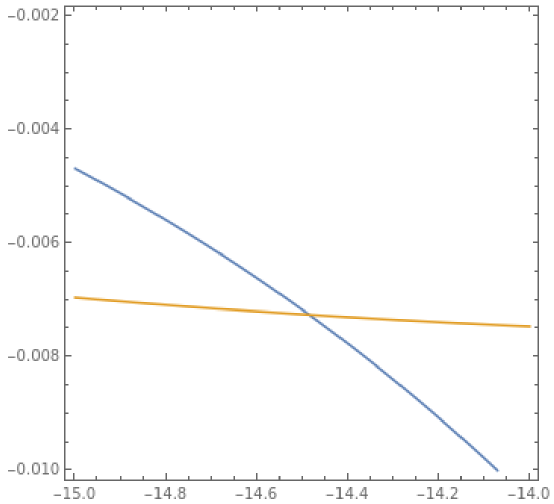


Рис. 4: $\mathrm{p}_x^0 = -0.00725785633$
$\mathrm{y}_0 = -14.4849204322$

$$\begin{cases} \dot{x} \equiv y_1 \\ \dot{y} \equiv 0 \\ p_x(t) \equiv p_x^0 \\ \dot{p}_y = -p_x^0 - \frac{2(t+t_1)\cdot y_1}{(1+y_1^2)^2} \end{cases} \text{, где } \begin{cases} x(0) \;=\; x_1 \;=\; 8t_1^2 + t_1\cdot y_0 \\ y(0) \;=\; y_1 \;=\; 16t_1 + y_0 \\ p_y(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x(t) \;=\; y_1\cdot t + x_1 \\ y(t) \;=\; y_1 \\ p_y(t) = -p_x^0\cdot t - \frac{t^2\cdot y_1}{(1+y_1^2)^2} - \frac{2t\cdot t_1\cdot y_1}{(1+y_1^2)^2} \end{cases} \text{, где}$$

$$0 = -p_x^0\cdot t_1 + \frac{\mathbf{Arctan}(y_0) - \mathbf{Arctan}(16\cdot t_1 + y_0)}{256} + \frac{t_1}{16(1+(16\cdot t_1+y_0)^2)} \Leftrightarrow f_2(y_0, t_1, p_x^0) = 0$$

x(2-t1) $= y_1\cdot(2 - t1) + x_1 \;=\; 1 \Rightarrow t_1 = \frac{1}{2}(4 - \sqrt{16+y_0})$

$$\left.\begin{array}{l} \begin{cases} p_y(2-t_1) = 0 \\ t_1 = t_1(y_0) \\ y_1 = y_1(y_0, t_1) \end{cases} \Rightarrow\; F_1(p_x^0, y_0) = 0 \\ \begin{cases} f_2(y_0, t_1, p_x^0) = 0 \\ t_1 = t_1(y_0) \end{cases} \Rightarrow\; F_2(p_x^0, y_0) = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} F_2(p_x^0, y_0) = 0 \\ F_1(p_x^0, y_0) = 0 \end{cases}$$

Решая эту систему, находим точку $(p_x^0, y_0) = (-0.00725785633, -14.4849204322)$ осталось проверить, что эта точка определяет допустимое t_1 .

$$t_1 = \frac{1}{2}(4 - \sqrt{16+y_0}) \;\Rightarrow\; t_1 = 1.384553 \in (0,2) \;\Rightarrow\; \text{удовлетворяет ограничениям на время.}$$

Таким образом мы нашли два решения:

$(\mathrm{p}_x^0, y_0) = (-0.00566313, -\frac{31}{2})$ - без точек переключения .
$(\mathrm{p}_x^0, y_0) = (-0.00725785633, -14.4849204322)$ - с одной точкой переключения.