Численное решение краевой задачи принципа максимума в задаче оптимального управления методом стрельбы.

1 Постановка задачи.

Рассматривается задача Лагранжа с фиксированным временным отрезком и без ограничений вида "меньше или равно":

$$\begin{aligned} B_0 = \int_0^2 \frac{t^r}{1+\dot{x}^2} dt \to inf, \\ x(0) = 0, x(2) = 1, r \in \{1, 2\} \\ u \in [0, 16] \end{aligned} \tag{1}$$

Требуется формализовать задачу, как задачу оптимального управления. Свести задачу принципом максимума Понтрягина к краевой задаче, численно решить полученную задачу методом стрельбы и обосновать точность полученных результатов. Проверить полученные экстремали Понтрягина на оптимальность при различных значениям параметра $r \in \{1, 2\}$.

2 Формализация задачи.

Формализуем задачу, как задачу оптимального управления. Для этого обозначим $u = \ddot{x}, y = \dot{x}$. Тогда наша задача примет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = u \\ u \in [0, 16] \\ x(0) = 0 \\ x(2) = 1 \\ r \in \{1, 2\} \\ B_0 = \int_0^2 \frac{t^r}{1+\dot{x}^2} dt \to inf \end{cases} \tag{2}$$

3 Система необходимых условий оптимальности.

Выпишем функции Лагранжа и Понтрягина:

$$\mathcal{L} = \int_0^T \mathbf{L} dt + l,$$

$$\text{Лагранжиан } \mathbf{L} = p_x \cdot (\dot{x} - y) + p_y \cdot (\dot{y} - u) + \lambda_0 \cdot \frac{t^r}{1+y^2},$$

$$\text{Терминант } l = \lambda_1 \cdot x(0) + \lambda_2 \cdot (x(2) - 1),$$

$$H = p_x \cdot y + p_y \cdot u - \lambda_0 \cdot \frac{t^r}{1+y^2}.$$

Применим к задаче оптимального управления (2) принцип максимума Понтрягина. Необхоимые условия оптимальности:

(а) Уравнение Эйлера-Лагранжа (сопряженная система уравнений, условие стационарности по $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$), $\begin{pmatrix} \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{\partial H}{\partial y} \end{pmatrix}$:

$$\begin{cases} \dot{p}_x = 0 \\ \dot{p}_y = -p_x - \lambda_0 \frac{2 \cdot t^r \cdot y}{(1+y^2)^2} \end{cases} \tag{3}$$

(б) Условие оптимальности на управление, $u = arg\, abs\, max\, H(u)$:

В нашем случае $H(u) = p_y \cdot u$: $u = arg\, abs\, max\, (p_y \cdot u) = \begin{cases} 16 \text{ ,если } p_y > 0 \\ 0 \text{ ,если } p_y < 0 \end{cases}$

(в) Условие трансверсальности по $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $p_x(t_k) = (-1)^k \cdot \frac{\partial l}{\partial x(t_k)}, p_y(t_k) = (-1)^k \cdot \frac{\partial l}{\partial y(t_k)}$, где $k \in \{0, 1\}, t_0 = 0, t_1 = 2$:

$$p_y(0) = 0,\ p_y(2) = 0, \tag{4}$$

$$p_x(0) = \lambda_1,\ p_x(2) = -\lambda_2 \tag{5}$$

(г) Условие стационарности по t_k:
Нет, так как в задаче (2) t_k - известные константы;

(д) Условие дополняющей нежёсткости:
Нет, так как в задаче (2) отсутсвуют условия вида "меньше или равно";

(е) Условие неотрицательности: $\lambda_0 \geq 0$.

(ж) Условие нормировки (множители Лагранжа могут быть выбраны с точностью до положительного множителя);

(з) НЕРОН (множители Лагранжа НЕ Равны Одновременно Нулю).

4 Анормальный случай и исследование задачи.

Исследуем возможность анормального случая $\lambda_0 = 0$. Из первого уравнения системы (3) имеем, что $p_x = const = p_x(0)$. Тогда при $\lambda_0 = 0$ из второго уравнения системы (3) имеем $p_y(t) = p_x(0) \cdot t + p_y(0)$. Но из условия (4) имеем $p_x(0) = 0$, что означает, что $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Тогда получили следующую ситуацию:
в момент времени $t = 0$ получили $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, p_x, p_y) = O$. Таким образом если $\lambda_0 = 0$, то все множители Лагранжа равны 0, что противоречит условию (з).

Так как $\lambda_0 \neq 0$, то можем в силу поункта (ж) положить $\lambda_0 = 1$, тогда все коэффициенты должны находится однозначно.

5 Краевая задача.

Таким образом, на основе принципа Понтрягина задача оптимального управления (2) сводится к краевой задаче. А именно из (2), (3), (4) получаем следующую систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = u, \\ \dot{p}_x = 0 \\ \dot{p}_y = -p_x - \frac{2 \cdot t^r \cdot y}{(1+y^2)^2} \\ u = \begin{cases} 16 \text{ ,если } p_y > 0 \\ 0 \text{ ,если } p_y < 0 \end{cases} \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} &x(0) = 0,\ x(2) = 1, \\ &p_y(0) = 0,\ p_y(2) = 0, \\ &r \in \{1, 2\}. \end{aligned} \tag{7}$$

6 Численное решение краевой задачи методом стрельбы.

Краевая задача (6)-(7) решается численно методом стрельбы. В качестве параметров пристрелки выбирают недостающие для задачи Коши значения при $t = 0$. В нашем случае параметрами пристрелки будут $y(0) = \alpha_1$, $p_x(0) = \alpha_2$. Задав эту пару парметров, мы можем решить задачу Коши на конечном отрезке $[0, 2]$ и получить по соответсвующему выбронному $\overrightarrow{\alpha} = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ функции $x(\cdot)\,[\alpha_1, \alpha_2]$, $y(\cdot)\,[\alpha_1, \alpha_2]$, $p_x(\cdot)\,[\alpha_1, \alpha_2]$, $p_y(\cdot)\,[\alpha_1, \alpha_2]$. В частности можем получить $y(2)\,[\alpha_1, \alpha_2]$, $p_x(2)\,[\alpha_1, \alpha_2]$. Задача Коши для системы дифференциальных уравнений (6) с начальными условиями (7), заданнымии в момент времени $t = 0$, с учетом заданного $\overrightarrow{\alpha}$ решается численно явным способом, а имеено с помощью метода Рунге-Кутты 8-го порядка, основанным на расчетных формулах Дормана-Принса 8(7) DOPRI8 с автоматическим выбором шага(то есть с контролем относительной локальной погрешности на шаге по правилу Рунге). Для решения нашей краевой задачи нужно подобрать $\overrightarrow{\alpha}$ таким образом, чтобы выполнились условия:

$$\begin{aligned} x(2)\,[\alpha_1, \alpha_2] - 1 = 0, \\ p_y(2)\,[\alpha_1, \alpha_2] = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

Тогда можем определить вектор функцию невязок $X(\overrightarrow{\alpha}) = \begin{pmatrix} x(2)\,[\alpha_1, \alpha_2] - 1 \\ p_y(2)\,[\alpha_1, \alpha_2] \end{pmatrix}$. Таким образом, выбирая для решения краевой задачи метод стрельбы, решение краевой задачи свелось к решению двух алгебраических уравнений от двух неизвесных, а именно $X(\overrightarrow{\alpha}) = 0$. Корень $\overrightarrow{\alpha}$ системы алгебраических уравнений $X(\overrightarrow{\alpha}) = 0$ находится методом Ньютона с модификацией Исаева-Сонина. Решение линейной системы уравнений внутри модифицированного метода Ньютона осуществляется методом Гаусса с выбором главного элемента по столбцу, с повторным пересчетом. В нашей задаче крайне важен следующий тест части программы, решающей задачу Коши, на системе дифференциальных уравнений с известным аналитическим решением.

7 Тест решения задачи Коши - гармонический осциллятор

В таблице ниже приведены результаты численного интегрирования системы дифференциальных уравнений гармонического осциллятора $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$ с начальными условиями $\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ явным методом Рунге-Кутты с оценкой погрешности на шаге через 8-ую производную для различного конечного времени T и различных значений максимально допустимой относительной погрешности на шаге интегрирования Δ_{loc} . $Steps$ - общее число сделанных шагов интегрирования (число принятых шагов); $|x(T)|$ и $|y(T) - cos(T)|$ - невязки в конце; $\Delta x(\cdot)$ и $\Delta y(\cdot)$ - максимальное отличие полученного решения от известного аналитического $\begin{cases} x(t) = sin(t) \\ y(t) = cos(t) \end{cases}$ по всем шагам; $\delta_K(T)$ - оценка глобальной погрешности по формуле $\delta_K(t_{i+1}) = r_i + \delta_K(t_i) \cdot e^{L_i}$, где r_i - главный член в оценке локальной погрешности, а $L_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mu dt$; μ - логарифмическая норма матрицы Якоби исходной системы дифференциальных уравнений, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \text{-1} & 0 \end{pmatrix}$, равная максимальному собственному значению матрицы $\frac{(J+J^T)}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, то есть $0 \Rightarrow \delta_K(t_{i+1}) = r_{i+1} + \delta_K(t_i)$; $R_x = \left| \frac{x_{10^{-8}}(T) - x_{10^{-10}}(T)}{x_{10^{-10}}(T) - x_{10^{-12}}(T)} \right|$, $R_y = \left| \frac{y_{10^{-8}}(T) - y_{10^{-10}}(T)}{y_{10^{-10}}(T) - y_{10^{-12}}(T)} \right|$.

В таблице ниже представлены полученные данные:

T	Δ_{loc}	$Steps$	$\lvert x(T)\rvert$	$\lvert y(T) - \cos(T)\rvert$	$\Delta x(\cdot)$	$\Delta y(\cdot)$	$\delta_K(T)$	R_x	R
	10^{-08}	6	$1.99 \cdot 10^{-08}$	$1.26 \cdot 10^{-08}$	$1.45 \cdot 10^{-08}$	$1.42 \cdot 10^{-08}$	$2.04 \cdot 10^{-08}$		
π	10^{-10}	10	$2.24 \cdot 10^{-10}$	$3.42 \cdot 10^{-10}$	$2.57 \cdot 10^{-10}$	$2.57 \cdot 10^{-10}$	$3.61 \cdot 10^{-10}$	88.73	36.
	10^{-12}	17	$2.29 \cdot 10^{-12}$	$6.71 \cdot 10^{-12}$	$4.55 \cdot 10^{-12}$	$4.48 \cdot 10^{-12}$	$6.29 \cdot 10^{-12}$		
	10^{-08}	53	$2.00 \cdot 10^{-07}$	$1.27 \cdot 10^{-07}$	$1.44 \cdot 10^{-07}$	$1.44 \cdot 10^{-07}$	$2.05 \cdot 10^{-07}$		
$10 \cdot \pi$	10^{-10}	93	$2.23 \cdot 10^{-09}$	$3.41 \cdot 10^{-09}$	$2.56 \cdot 10^{-09}$	$2.56 \cdot 10^{-09}$	$3.60 \cdot 10^{-09}$	89.82	37.
	10^{-12}	165	$2.31 \cdot 10^{-11}$	$6.79 \cdot 10^{-11}$	$4.57 \cdot 10^{-11}$	$4.57 \cdot 10^{-11}$	$6.39 \cdot 10^{-11}$		
	10^{-08}	522	$2.00 \cdot 10^{-06}$	$1.27 \cdot 10^{-06}$	$1.44 \cdot 10^{-06}$	$1.44 \cdot 10^{-06}$	$2.05 \cdot 10^{-06}$		
$10^2 \cdot \pi$	10^{-10}	926	$2.24 \cdot 10^{-08}$	$3.43 \cdot 10^{-08}$	$2.57 \cdot 10^{-08}$	$2.57 \cdot 10^{-08}$	$3.62 \cdot 10^{-08}$	89.41	36.
	10^{-12}	1645	$2.31 \cdot 10^{-10}$	$6.80 \cdot 10^{-10}$	$4.58 \cdot 10^{-10}$	$4.58 \cdot 10^{-10}$	$6.40 \cdot 10^{-10}$		
	10^{-08}	5216	$2.00 \cdot 10^{-05}$	$1.27 \cdot 10^{-05}$	$1.44 \cdot 10^{-05}$	$1.44 \cdot 10^{-05}$	$2.05 \cdot 10^{-05}$		
$10^3 \cdot \pi$	10^{-10}	9252	$2.24 \cdot 10^{-07}$	$3.43 \cdot 10^{-07}$	$2.57 \cdot 10^{-07}$	$2.57 \cdot 10^{-07}$	$3.62 \cdot 10^{-07}$	89.49	36.
	10^{-12}	16441	$2.31 \cdot 10^{-09}$	$6.80 \cdot 10^{-09}$	$4.58 \cdot 10^{-09}$	$4.58 \cdot 10^{-09}$	$6.40 \cdot 10^{-09}$		
	10^{-08}	52155	$2.00 \cdot 10^{-04}$	$1.27 \cdot 10^{-04}$	$1.44 \cdot 10^{-04}$	$1.44 \cdot 10^{-04}$	$2.05 \cdot 10^{-04}$		
$10^4 \cdot \pi$	10^{-10}	92519	$2.24 \cdot 10^{-06}$	$3.43 \cdot 10^{-06}$	$2.57 \cdot 10^{-06}$	$2.57 \cdot 10^{-06}$	$3.62 \cdot 10^{-06}$	89.48	36.
	10^{-12}	164407	$2.25 \cdot 10^{-08}$	$6.80 \cdot 10^{-08}$	$4.58 \cdot 10^{-08}$	$4.58 \cdot 10^{-08}$	$6.40 \cdot 10^{-08}$		
	10^{-08}	521580	$2.00 \cdot 10^{-03}$	$1.27 \cdot 10^{-03}$	$1.44 \cdot 10^{-03}$	$1.44 \cdot 10^{-03}$	$2.05 \cdot 10^{-03}$		
$10^5 \cdot \pi$	10^{-10}	925185	$2.24 \cdot 10^{-05}$	$3.43 \cdot 10^{-05}$	$2.57 \cdot 10^{-05}$	$2.57 \cdot 10^{-05}$	$3.62 \cdot 10^{-05}$	89.60	36.
	10^{-12}	1644068	$2.45 \cdot 10^{-07}$	$6.80 \cdot 10^{-07}$	$4.58 \cdot 10^{-07}$	$4.58 \cdot 10^{-07}$	$6.40 \cdot 10^{-07}$		
	10^{-08}	5219496	$2.02 \cdot 10^{-02}$	$1.26 \cdot 10^{-02}$	$1.44 \cdot 10^{-02}$	$1.44 \cdot 10^{-02}$	$2.05 \cdot 10^{-02}$		
$10^6 \cdot \pi$	10^{-10}	9252025	$2.24 \cdot 10^{-04}$	$3.43 \cdot 10^{-04}$	$2.57 \cdot 10^{-04}$	$2.57 \cdot 10^{-04}$	$3.62 \cdot 10^{-04}$	89.99	36.
	10^{-12}	16440684	$2.22 \cdot 10^{-06}$	$6.80 \cdot 10^{-06}$	$4.58 \cdot 10^{-06}$	$4.58 \cdot 10^{-06}$	$6.40 \cdot 10^{-06}$		

8 Аналитическое решение задачи.

Отыскание общего решения данной системы является достаточно тяжелой задачей, поэтому наша цель будет найти такие решения, которые удовлетворяютя данной системе. Итак, имеем следующую систему уравнеий:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = u, \\ \dot{p}_x = 0 \\ \dot{p}_y = -p_x - \frac{2 \cdot t^r \cdot y}{(1+y^2)^2} \\ u = \begin{cases} 16 \text{ ,если } p_y > 0 \\ 0 \text{ ,если } p_y < 0 \end{cases} \end{cases}$$
$$x(0) = 0,\ x(2) = 1,$$
$$p_y(0) = 0,\ p_y(2) = 0,$$
$$r \in \{1, 2\}.$$

Задаем начальные условия:

$$x(0) = 0 \ ,\ \ y(0) = y_0 \ ,\ \ p_y(0) = 0 \ ,\ \ p_x(0) = p_x^0. \tag{9}$$

Решим для начала задачу с параметром $r = 1$.

Будем считать, что $p_x^0 > 0$. Тогда имеем $\dot{p}_y(0) < 0$, что означает, что необходимо выставить параметр $u = 0$.. Решая эту систему уравнеий получаем следующие решения:

$$\begin{cases} x(t) \ = \ y_0 \cdot t \\ y(t) \ \equiv \ y_0 \\ p_x(t) \ \equiv \ p_x^0 \\ p_y(t) \ = \ -p_x^0 \cdot t \ - \ \frac{y_0}{(1+y_0^2)^2 \cdot t^2} \end{cases}$$

Пусть t^* - момент, когда $p_x(t^*) \ = \ 0$. Заметим лишь, что если $y_0 \ = \ 0$, то имеем противоречие с $p_y(2) = 0$. Тогда для этого момента времени справедливо:

$$\begin{cases} x(t^*) \ = \ y_0 \cdot t^* \\ y(t^*) \ = \ y_0 \\ p_x(t^*) \ = \ p_x^0 \\ p_y(t^*) \ = \ 0 \end{cases} \quad \text{,где } t^* \ = \ \frac{p_x^0 \cdot (1 + y_0^2)^2}{-y_0}.$$

$$t^* \ > \ 0 \Rightarrow y_0 \ < \ 0$$

$t^* \in (0 \ , \ 2]$, причем если $t^* \ = \ 2$, то имеем противоречие с $x(2) = 1;\ \Rightarrow$

$$\Rightarrow \ t^* \in (0 \ , \ 2) \Leftrightarrow \ 0 \ < \ p_x^0 \ < \ \frac{-2 \cdot y_0}{(1 + y_0^2)^2}$$

Заметим, что $\dot{p}_y(t^*) = p_x^0 \ > \ 0$, что означает, что решение переходит в верхнюю полуплоскость трансверсально, поэтому после точки t^* считаем $u = 16$. Для удобства совершим сдвиг по оси времени $t \ = \ \tau + t^*$, и тогда новая систеа примет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{x} \ = \ y, \\ \dot{y} \ = \ u, \\ \dot{p}_x \ = \ 0 \\ \dot{p}_y \ = \ -p_x - \frac{2\cdot(\tau+t^*)\cdot y}{(1+y^2)^2} \end{cases} \quad \text{, с начальными условиями} \begin{cases} x(0) \ = \ y_0 \cdot t^* \\ y(0) \ = \ y_0 \\ p_x(0) \ = \ p_x^0 \\ p_y(0) \ = \ 0 \end{cases}$$

Решаем эту систему уравнений и получаем следующее решение:

$$\begin{cases} x(\tau) \ = \ 8\tau^2 + \tau \cdot y_0 + y_0 \cdot t^* \\ y(\tau) \ = \ 16\tau + y_0 \\ p_x(\tau) \ = \ p_x^0 \\ p_y(\tau) \ = \ \frac{1}{256}\left(16\left(-16 \cdot p_x^0 \cdot \tau - \frac{t^*}{1+y_0^2} + \frac{\tau+t^*}{1+(16\cdot\tau+y_0)^2}\right) + \mathbf{Arctan}(y_0) - \mathbf{Arctan}(16\tau + y_0)\right) \end{cases}$$

Попытаемся найти такие начальные значения, что будут выполнены краевые условия, то есть:

$$\begin{cases} x(2-t^*) \ = \ 1 \\ p_y(2-t^*) \ = \ 0 \end{cases} \quad \text{, причем } p_x^0 \ = \ -\frac{t^* \cdot y_0}{(1+y_0^2)^2}$$

$$x(2-t^*) \ = \ 1 \ \Rightarrow \ t^* \ = \ 2 \pm \frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{1 - 2\cdot y_0} \ ,$$

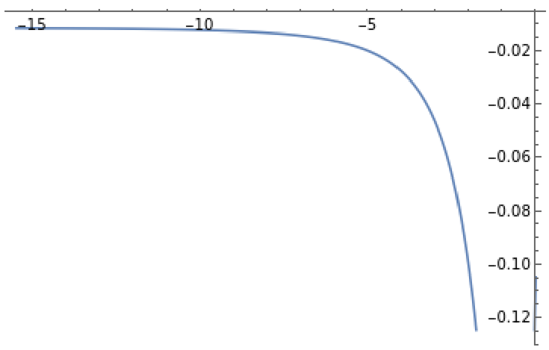
также необходимо вспомнить об ограничении $t^* \in (0,2)$,

$$\left[\begin{array}{l} t^* \ = \ 2 + \frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{1-2\cdot y_0} \ > 2 \ \text{ для } \forall y_0 \ < \ 0 \text{ -противоречие.} \\ t^* \ = \ 2 - \frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{1-2\cdot y_0} \ \Rightarrow \ -\frac{31}{2} \ < \ y_0 \ < \ 0 \end{array}\right.$$

подставляя соответствующие функции в последнее уравннение системы $\Rightarrow$

$$\frac{4(-8+\sqrt{2-4\cdot y_0})}{1+y_0^2} + \\ + 32 \cdot \frac{\sqrt{2-4\cdot y_0}(132\cdot y_0 - 264\cdot y_0^2 + 20\cdot y_0^3) + (1 - 33\cdot y_0 + 196\cdot y_0^2 - 257\cdot y_0^3 + 3\cdot y_0^4)}{(1+y_0^2)^2\cdot(33 + 8(-8+\sqrt{2-4\cdot y_0})\cdot y_0 + y_0^2)} + \\ + \mathbf{Arctan}(y_0) - \mathbf{Arctan}(4\sqrt{2-4\cdot y_0} + y_0) \ = \ 0$$

Из рисунка видно, что последнее уравнение не разрешимо на промежутке $-\frac{31}{2} \ < \ y_0 \ < \ 0$. Причем из рисунка также видно, что $p_y(2-t^*)$ в зависимости от y_0 может принимать как положительные, так и отрицательные значения, поэтому опять найдется точка переключения со своими ограничениями. После точки переключения управление $u \ = \ 0$.



Это породит новую систему уравнений со своими начальными условиями, с учетом сдвигом по времени эту систему можно записать так:

Для удобства введем обозначения $t_1 = t^*$, t_2 -момент времени, когда посленяя функция $p_y(t2) = 0$.

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{p}_x = 0 \\ \dot{p}_y = -p_x - \frac{2\cdot(t+t_1+t_2)\cdot y}{(1+y^2)^2} \end{cases},$$

с начальными условиями

$$\begin{cases} x(0) = x_2 \\ y(0) = y_2 \\ p_x(0) = p_x^0 \\ p_y(0) = 0 \end{cases}, \text{ где } \begin{cases} x_2 = 8t_2^2 + t_2 \cdot y_0 + y_0 \cdot t_1 \\ y_2 = 16t_2 + y_0 \\ t_1 = \frac{p_x^0 \cdot (1+y_0^2)^2}{-y_0} \end{cases}$$

Далее хотим разрешить краевую задачу. Решение системы уравнений примет вид:

$$\begin{cases} x(t) = x_2 \cdot t + x_2 \\ y(t) = y_2 \\ p_x(t) = p_x^0 \\ p_y(t) = t\left(-p_x^0 - \frac{2\cdot(t_1+t_2)\cdot y_2}{(1+y_2^2)^2} - \frac{t\cdot y_2}{(1+y_2^2)^2}\right) = t \cdot \psi(t, t_2, t_1, y_2, p_x^0) \end{cases}$$

Опишем идею построения уравнений :

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} t_1 = t_1(y_0, p_x^0) \Rightarrow p_x^0 = p_x^0(y_0, t_1) \\ y_2 = y_2(y_0, t_2) \\ x_2 = x_2(t_2, t_1, y_0) \\ x(2 - t_1 - t_2) = \phi(y_2, x_2, t_1, t_2) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow t_1 = t_1(t_2, y_0) \end{array}\right\} \Rightarrow p_x^0 = p_x^0(y_0, t_2) \\ \psi(2 - t_1 - t_2, t_2, t_1, y_2, p_x^0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(t_2, y_0) = 0.$$

А также вспоминая предшествующее уравнение $p_y(t_2) = 0 \Leftrightarrow G(t_2, t_1, y_0, p_x^0) = 0$ и совершая аналогичный ряд действия, имеем:

$$\begin{array}{l} f(t_2, y_0) = 0 \\ g(t_2, y_0) = 0 \end{array}$$

Было найда пара точек (рис.1 и рис.2), которые могут претедовать на решение, но не одна из точек не подхоит, так как вычесленное по ним время $t_1 < 0$.

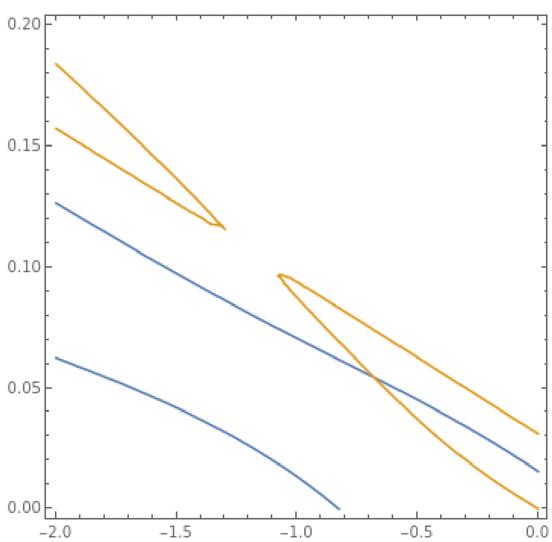


Рис. 1: $y_0 = -0.681078049$
$t_2 = 0.054491750283$

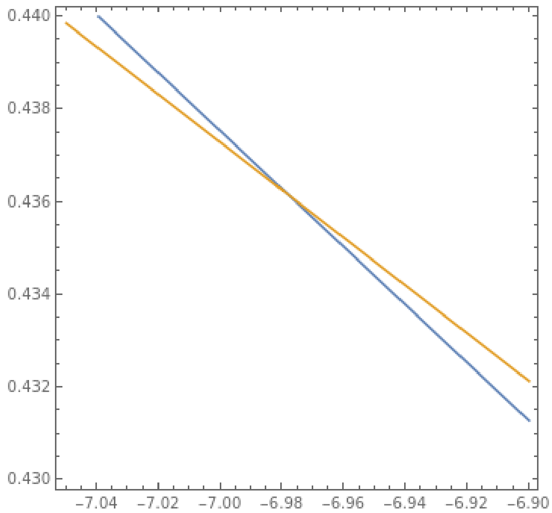


Рис. 2: $y_0 = -6.977892188$
$t_2 = 0.43614901116$

Таким образом мы можем далее искать точку переключения и продолжать решение, но это уже сложная задача, поэтому будем пытаться найти решение среди других начальных параметров.

Далее будем считать, что $p_x^0 = 0$. Заметим, что $y(0) = y_0 \neq 0$, так как решения, тождественно равные 0 нас не интересуют. Таким образом задача распадается на два случая:

Пусть $y_0 > 0$. Тогда для достаточно маленьково δ верным будет утверждение, что $\dot{p}_y(\tau) < 0$ на всем промежутке $(0, \delta)$. Так как $p_y(0) = 0$, то необходимо брать $u = 0$. Это приведет к тому, что:

$$p_y(t) = \frac{-t^2 \cdot y_0}{(1 + y_0^2)^2} \Rightarrow$$

$\nexists t_1$, что $p_y(t_1) = 0$, что приводит к противоречию.

Пусть $y_0 < 0$. Тогда для достаточно маленьково δ верным будет утверждение, что $\dot{p}_y(\tau) > 0$ на всем промежутке $(0, \delta)$. Так как $p_y(0) = 0$, то необходимо брать $u = 16$. Это приведет к тому, что:

$$p_y(t) = \frac{\mathbf{Arctan}(y_0) - \mathbf{Arctan}(16 \cdot t + y_0)}{256} + \frac{t}{16(1 + (16 \cdot t + y_0)^2)}$$

$x(t) = 8t^2 + t \cdot y_0$, требуем, чтобы $p_y(2) = 0$ и $x(2) = 1$.

$$x(2) = 1 \;\Rightarrow\; y_0 = -\tfrac{31}{2} \;\Rightarrow\; p_y(2) \neq 0.$$

Это означает, что следует искать точку переключения t_1 , затем строить новую систему уравнений и ее решать, в ходе чего будет получено: Для удобства считаем, что произошел сдвиг по времени.

$$p_y(t) = \frac{-t^2 \cdot y_1}{(1 + y_1^2)^2} \text{ , где } y_1 = 16 * t_1 + y_0.$$

Таким образом имеем, что необходимо выполение $y_1 = 0$, иначе невозможно выполнение краевых условие. Тогда имеем уравнение $t_1 = t_1(y_0)$, подстановка которого в $p_y(t_1) = 0$,полученного на первом шаге дает противоречие, значит решение вообще невозможно при $p_x^0 = 0$.

Тогда разберемся с последним случаем $p_x^0 < 0$.

Тогда $\dot{p}_y(0) > 0$, и в качестве параметра необходимо взять $u = 16$. Тогда получим систему, решением которого имеет вид:

$$\begin{cases} x(t) = 8t^2 \cdot y_0 \\ y(t) = 16t + y_0 \\ p_x(t) \equiv p_x^0 \\ p_y(t) = -p_x^0 \cdot t + \frac{\mathbf{Arctan}(y_0) - \mathbf{Arctan}(16 \cdot t + y_0)}{256} + \frac{t}{16(1 + (16 \cdot t + y_0)^2)} \end{cases}$$

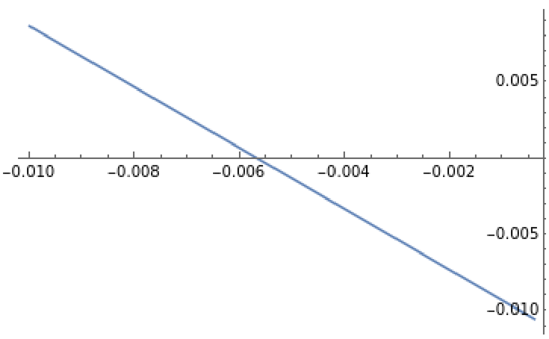


Рис. 3: $p_x^0 = -0.00566313$

Тогда попытаемся решить такую систему:

$$x(2) = 1 \;\Rightarrow\; y_0 = -\tfrac{31}{2}$$
$$p_y(2) = 0 \text{ , при} y_0 = -\tfrac{31}{2} \;\Rightarrow\; p_x^0 = -0.00566313$$

Таким образом мы нашли решение, не имеющее точки переключения с начальными параметрами $(p_x^0, y_0) = (-0.00566313, -\frac{31}{2})$.

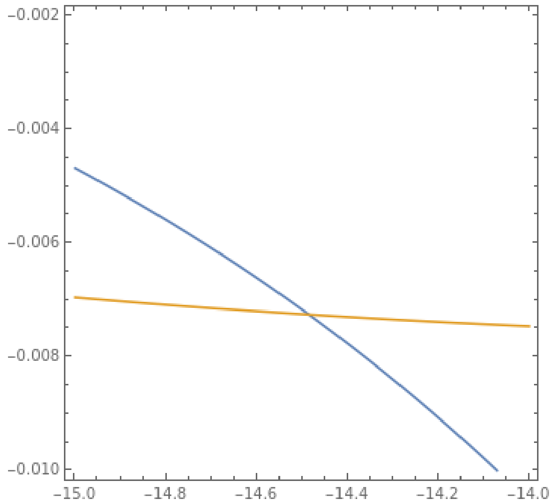


Рис. 4: $\mathrm{p}_x^0 = -0.00725785633$
$\mathrm{y}_0 = -14.4849204322$

Попытаемся теперь построить решение, проходящее через одну точку переключения. Тогда получим новую систему уравнений(с учетом сдвига по времени и сменой значения параметра на 0):

$$\begin{cases} \dot{x} \equiv y_1 \\ \dot{y} \equiv 0 \\ p_x(t) \equiv p_x^0 \\ \dot{p}_y = -p_x^0 - \frac{2(t+t_1)\cdot y_1}{(1+y_1^2)^2} \end{cases} \text{, где } \begin{cases} x(0) = x_1 = 8t_1^2 + t_1 \cdot y_0 \\ y(0) = y_1 = 16t_1 + y_0 \\ p_y(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x(t) = y_1 \cdot t + x_1 \\ y(t) = y_1 \\ p_y(t) = -p_x^0 \cdot t - \frac{t^2 \cdot y_1}{(1+y_1^2)^2} - \frac{2t \cdot t_1 \cdot y_1}{(1+y_1^2)^2} \end{cases} \text{, где}$$

$$0 = -p_x^0 \cdot t_1 + \frac{\mathbf{Arctan}(y_0) - \mathbf{Arctan}(16 \cdot t_1 + y_0)}{256} + \frac{t_1}{16(1 + (16 \cdot t_1 + y_0)^2)} \Leftrightarrow f_2(y_0, t_1, p_x^0) = 0$$

x(2-t1) $= y_1 \cdot (2 - t1) + x_1 = 1 \Rightarrow t_1 = \frac{1}{2}(4 - \sqrt{16 + y_0})$

$$\begin{cases} p_y(2 - t_1) = 0 \\ t_1 = t_1(y_0) \\ y_1 = y_1(y_0, t_1) \end{cases} \Rightarrow F_1(p_x^0, y_0) = 0$$

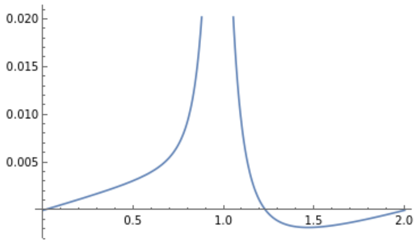
$$\Rightarrow \begin{cases} F_2(p_x^0, y_0) = 0 \\ F_1(p_x^0, y_0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_2(y_0, t_1, p_x^0) = 0 \\ t_1 = t_1(y_0) \end{cases} \Rightarrow F_2(p_x^0, y_0) = 0$$

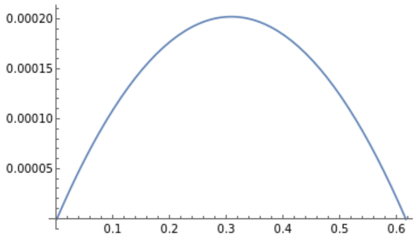
Решая эту систему, находим точку $(p_x^0, y_0) = (-0.00725785633, -14.4849204322)$ осталось проверить, что эта точка определяет допустимое t_1 .

$$t_1 = \frac{1}{2}(4 - \sqrt{16 + y_0}) \;\Rightarrow\; t_1 = 1.384553 \in (0, 2) \;\Rightarrow\; \text{удовлетворяет ограничениям на время.}$$

$(\mathrm{p}_x^0, y_0) = (-0.00566313, -\frac{31}{2})$
- без точек переключения .
$(\mathrm{p}_x^0, y_0) = (-0.00725785633, -14.4849204322)$
- с одной точкой переключения.



Но если для первой пары точек явно постоить функцию p_x^0 , то увидем, что у этой функции на самом деле должна быть точка переключения, чего мы не обнаружили.



А если посмотреть на вторую пару точек и явно построим p_x^0 после первой точки переключения, то увидем, что график расположен выше оси, что противоречит выбору управления.

Поэтому оба нами найденных "решения"таковыми не являются.