◀ Очевидно, f(x)= $\lim\limits_{x\to 0} f_n(x) = 0$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$ Поскольку,

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant 1} |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right), \lim_{x\to\inf}\left(\frac{1}{1+n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}\right) = \frac{1}{\epsilon}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0$$

то по критерию, доказанному в примере 103, $f_n(x) \neq 0$

105. $f_n(x) = x^n - x^{2n}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

◀ Имеем $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, $x \in [0,1]$. Функция f(n) достигает абсолютного максимума во внутренней точке сегмента: $x_n = \dfrac{1}{\sqrt[n]{2}}$,$x_n \in [0,1]$. Таким образом, имеем

$$\sup_{x\in[0,1]} r_n(x) = f_n(x_n) = \frac{1}{4} \quad , \quad \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in[0,1]} r_n(x)\right) = \frac{1}{4} \neq 0$$

.

Отсюда следует, что последовательность стремится к 0 неравномерно.

106.$f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n+x} = x$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

◀ Нетрудно увидеть, что $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{nx}{1+n+x} = x$ и справедлива оценка $\sup\limits_{x\in[0,1]}\left|\dfrac{nx}{1+n+x} - x\right| \leqslant \dfrac{2}{n+1}$. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)|\right) = 0 \quad , \quad f_n(x) = x$$

107 $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n^2}}$, -∞ $< x < +\infty$.

◀ При $n \to \infty f_n(x) \to |x|$ на интервале $[-\infty, +\infty]$, причем

$$\sup_{x\in-\infty}\left|\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}} - |x|\right| = \sup_{x\in[-\infty,+\infty]}\frac{1}{n^2\left(\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}} + |x|\right)} = \frac{1}{n},$$

поэтому $f_n(x) \rightrightarrows |x|$ на всей числовой прямой.▶

108 $f_n(x) = n\left(\sqrt{x+\dfrac{1}{n}} - \sqrt{x}\right)$,$0 < x < +\infty$.

◀ Очевидно

$$f(x) = n\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}} - \sqrt{x}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad 0 < x < +\infty.$$

Поскольку

$$\sup_{0<x<+\infty}\left|\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+\frac{1}{n}} + \sqrt{x}}\right| = \sup_{0<x<+\infty}\frac{1}{2n\sqrt{x}\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}} + \sqrt{x}\right)^2} = +\infty,$$

по утверждению примера 103 последовательность сходится неравномерно.▶

109a) $f_n(x) = sin(x), -\infty < x < +\infty$;

б)$f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} sin\dfrac{x}{n}, -\infty < x < +\infty$;

◀ Имеем:

а)$f(x) = \lim\limits_{n\to 0}\sin x = 0$

б)$f(x) = \lim\limits_{n\to 0}\sin x = 0$

Поскольку в случае а)

$$\sup_{-\infty<x<+\infty} f_n(x) = \frac{1}{n} \to 0 \text{ при } n \to +\infty,$$

а в случае б)

$$\sup_{-\infty<x<+\infty} |sin\frac{x}{n}| = 1$$

Достигается при $x = \frac{\pi n}{2}(2k+1), k \in Z$, то, в силу примера 103, заключаем, что в случае а)$f_n(x) \neq 0$. а в случае б) последовательность сходится неравномерно ◄

110 а)$f(x) = \arctan nx, 0 < x < \infty$, б)$f(x) = x \arctan nx, 0 < x < \infty$.

◄ а) Имеем $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} arctg(nx) = \frac{\pi}{2}$. Поскольку

$$\sup_{0<x<+\infty} \left|\frac{\pi}{2} - \arctan nx\right| = \lim_{x\to+0} \left|\frac{\pi}{2} - \arctan nx\right| = \frac{\pi}{2},$$

то последовательность сходится неравномерно ◄

б) Здесь $f(x) = \frac{\pi x}{2}, r_n(x) = x\left(\frac{\pi}{2} - \arctan nx\right)$ Используя равенство $\frac{\pi}{2} - \arctan nx = \arctan \frac{1}{nx}$, и неравенство $\arctan a < a$, имеем оценку

$$\left|x\left(\frac{\pi}{2} - \arctan nx\right)\right| = \left|x \arctan \frac{1}{nx}\right| < x\frac{1}{nx} = \frac{1}{n} \to 0, n \to \infty,$$

независимо от $x \in [0, +\infty]$ ◄. Следовательно, по определению 2, п.4.1 $f_n(x) \rightrightarrows \frac{\pi x}{2}$

111. $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$: а) на конечном интервале [a,b] ; б) на интервале [0,1]

◄ В обоих случаях легко находим предельную функцию $f : x \to \epsilon^x$. Далее, в случае ф) преставляем последователность в виде

$$f_n(x) = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right).$$

Здесь $n > N$, где N выбирается из очевидного условия $1 + \frac{x}{N} > 0$ при $x \in [a, b]$. Применяя к функции $x \to \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$, формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, из (1) получаем

$$f_n(x) = \exp\left(x - \frac{x^2\varepsilon_n^2}{2n}\right), n \in N.$$

Поскольку

$$\epsilon^x\left(1 - \exp\left\{-\frac{x^2\varepsilon_n^2}{2n}\right\}\right) < \epsilon^b\left(1 - \exp\left\{-\frac{M^2}{2n}\left(1 - \frac{M}{n}\right)^{-2}\right\}\right),$$

где M = max, стремится к нулю при $n \to \infty$ независимо от $\in [a, b]$, то по определнию 2 $f_n(x) \rightrightarrows \epsilon^x$ на [a, b].
В случае б) получаем

$$\lim_{x\to\infty} \left|\epsilon^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right| = +\infty,$$

Поэтому $\sup\limits_{0<x<1} r_n(x) = +\infty$ Таким образо, последовательность на всей прямой сходится неравномерно ►

112. $f(x) = n\left(x\frac{1}{n} - 1\right), 1 \leqslant x \leqslant a.$

◄ Легко найти, что $f_n(x) \to \ln x$ на [1, a] при $n \to \infty$. Далее, применяя формулу Тейлора, находим

$$r_n(x) = \left|n(x^{\frac{1}{n}} - 1) - \ln x\right| = \left|n(\epsilon^{\frac{1}{n}\ln x} - 10 - \ln x\right| =$$

$$= \left|\left(1 + \frac{1}{n}\ln x - \frac{\ln^2 x}{2n^2}\epsilon^{\varepsilon} - 1\right) - \ln x\right| = \frac{\ln^2 x}{2n^2}\epsilon^{\varepsilon m} < \frac{\ln^2 x}{2n^2}\epsilon^{\varepsilon} \to 0$$