密

年级：一

专业：信息与计算科学

封

班级：1191401

线

姓名：杨云

学号：2014213060

重庆邮电大学 2014 学年度第一学期
数学分析（1）半期考试试题

（时间 100 分钟）

题号	一	二	三	四	总分
分数					
评卷人					

30+

一、填空题（40 分，4 分/小题）

$1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$

1. 设 $f(x)=1-\cos 2x, x\in R$，则当 $x\to 0$ 时，与 $f(x)$ 等价的无穷小有（~~$g(x)=x$~~; $g(x)=2x^2$）

2. 当 $n\to\infty$ 时 a_n 不以 a 为极限的"$\varepsilon-N$"定义是（对于任意 ε，$\exists N$，当 $n>N$ 时，$|a_n-a|\geq\varepsilon$ $\exists\varepsilon>0, \forall N>0, \exists n>N\ |a_n-a|\geq\varepsilon$

3. 函数可导是其可微的（充要）条件；

4. 数集 $\left\{2-\frac{n}{n+1}, n\in N_+\right\}$ 的上确界是（$\frac{3}{2}$），下确界是（1）；

5. 设 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的导数是（0）；

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^3-7}{-5n^3+2n^2+6}=$（$-\frac{3}{5}$）；

7. 设 $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{\sqrt{x}}, & x>0, \\ 1-x^2, & x<0. \end{cases}$ 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的左极限为（1）；

8. 设 $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$，则 $f(x)$ 的不连续点有（$x=1$，$x=2$），其中的可移不连续点是（~~(2,4)~~）；$x=2$

极限存在的值

$\frac{(x-2)(x+2)}{(x-1)(x-2)}$

9. 设 $\begin{cases} x=e^t\sin t \\ y=e^t\cos t \end{cases}$，则 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{3}}=$（$\sqrt{3}-2$）；

10. 设 $y=\ln(2-\sin x)$，则 $dy\big|_{x=\frac{\pi}{6}}=$（$-\frac{\sqrt{3}}{3}dx$）.

杨云 2014213060 1191401

1616618

33015

15310611473 18875147142

二、计算题(共 42 分， 6 分/小题)

70

;6 = 66

1.求极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)^{2^n}$.

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)^{2^n}$

$=\left[\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)\right]^{2^n}$

$=1$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{-2^{n-1}}\right)^{-2^{n-1}}\right]^{-2}=\dfrac{1}{e^2}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$

2.函数 $y=f(x)$ 由方程 $yx=1+xe^y$ 确定,求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

+6

解：$y'x+y=e^y+xe^y y'$

$\therefore y'=\dfrac{e^y-y}{x-xe^y}$ $\quad \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{e^y-y}{x-xe^y}$

$\therefore y''x+2y'=e^y\cdot y'+e^y y'+xe^y[y']^2+xe^y\cdot y''$

$\therefore y''=\dfrac{2e^y y'+xe^y[y']^2-2y'}{x-xe^y}$

$\therefore \dfrac{d^2y}{dx^2}=(2e^y-2)\dfrac{e^y-y}{(x-xe^y)^2}+xe^y\times\dfrac{(e^y-y)^2}{(x-xe^y)^3}$

$y'=\dfrac{e^y-y}{x-xe^y}$

$=\dfrac{xe^y-xy}{x^2(1-e^y)}=\dfrac{1}{x^2(e^y-1)}$

$\therefore y''=\dfrac{-2x(e^y-1)+x^2e^y\cdot y'}{x^4(e^y-1)^2}$

3.设 $y=(2x)^{\sin 3x}$，求 dy.

+6

解：$\ln y=\sin 3x\ln 2x$

$\dfrac{1}{y}y'=3\cos 3x\ln 2x+\sin 3x\times\dfrac{1}{2x}\times 2$

$\therefore y'=(3\cos 3x\ln 2x+\dfrac{1}{x}\sin 3x)(2x)^{\sin 3x}$

$\therefore dy=(3\cos 3x\ln 2x+\dfrac{1}{x}\sin 3x)(2x)^{\sin 3x}dx$

4.求极限：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x^2}{x\sin^3 2x}$.

$1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$　　$\sin x \sim x$

$1-\cos x^2 \sim \frac{x^4}{2}$　　$\sin 2x \sim 2x$

解：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x^2}{x\sin^3 2x}=\infty$ ×

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x^2}{x\sin^3 2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{x^4}{2}}{x\sin^3 2x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3}{2\sin^3 2x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3}{2\times8x^3}=\dfrac{1}{16}$

5.设 $y=f(e^{-2x})$，求二阶导数 y''.

+6

解：$y'=-2f'(e^{-2x})\times e^{-2x}$

$\therefore y''=4f''(e^{-2x})e^{-4x}+4f'(e^{-2x})e^{-2x}$

6.求心形线 $\rho=a(1+\cos\theta)(a>0)$ 在 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 处的切线方程和法线方程.

$(\frac{\pi}{3},\frac{3}{2}a)$ 在直角坐标系中的坐标是 $(\frac{3}{4}a,\frac{3\sqrt3}{4}a)$

$\begin{cases} y=\rho\sin\theta \\ x=\rho\cos\theta \end{cases}$

+6

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{[a(1+\cos\theta)\sin\theta]'}{[a(1+\cos\theta)\cos\theta]'}=\dfrac{\cos\theta+\cos2\theta}{-\sin\theta-\sin2\theta}$

$\theta=\frac{\pi}{3}$时

$y'=0$

$\therefore$ 切线方程为 $y=\frac{3\sqrt3}{4}a$

法线方程为 $x=\frac{3}{4}a$

解：$\theta=\frac{\pi}{3}$时，$\rho=\frac{3}{2}a$　$\therefore$ 点 $(\frac{\pi}{3},\frac{3}{2}a)$

在直角坐标系中为 $(\frac{3}{4}a,\frac{3\sqrt3}{4}a)$

$\rho=a+a\cos\theta$

$\rho^2=a\rho+a\cos\theta\rho$

~~$x^2+y^2=a\sqrt{x^2+y^2}+ax$~~

$2x+2y\cdot y'=\frac{1}{2}a(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}(2x+2y\cdot y')+a$

~~当 $x=\frac{3}{4}a$，$y=\frac{3\sqrt3}{4}a$时，$y'=0$~~

$\therefore$ 切线方程是 $y=\frac{3\sqrt3}{4}a$

法线方程是 $x=\frac{3}{4}a$

7.求满足条件：$\lim\limits_{x\to 0}(\frac{x^2+1}{1+x}-ax-b)=0$ 的常数 a,b.

解：$\lim\limits_{x\to 0}(\frac{x^2+1}{1+x}-ax-b)$

$=\lim\limits_{x\to 0}(\frac{x^2+1-b-bx}{1+x}-ax)=0$

+6

$\therefore b=1 \quad a\in R$

三、应用题（6 分）

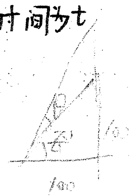
1．一气球从距离观察员 100m 处离地面铅直上升，当气球高度为 100m 时，其上升速率为 200m/min（分）．求此时观察员视线的仰角增加的速率是多少？

+6

解：设增加仰角为θ，到达的高度时的时间为t

$\tan(\theta+\frac{\pi}{4})=\frac{100+200t}{100}$

$=1+2t$



$\tan\theta=\frac{t}{t+1}$

$\therefore \theta=\arctan\frac{t}{t+1}$

$\theta'=\frac{1}{1+(\frac{t}{t+1})^2}$

$t=0$时 $\theta'=1$

$\therefore$仰视角增加的速率是1

设上升的高度为$h(t)$ 在时间t时刻仰角为$\theta(t)$

$\tan\theta(t)=\frac{h(t)}{100}$ 已知$h(t)=100$ $h'(t)=200$ m/min 求$\theta'(t)$

对t求导

$\sec^2\theta(t)\cdot\theta'(t)=\frac{h'(t)}{100}$

$\theta=\frac{\pi}{4}$时，

$\theta'(t)=\frac{h'(t)}{100}\times\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4}}=1$

$\therefore$仰角增加的速率是1

四、证明题（12 分，4 分/小题）

1. 用极限的"$\varepsilon-\delta$"分析定义证明：$\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{x}=\sqrt{x_0}\,(x_0\geq 0)$.

证明：对 $\forall\varepsilon>0$，存在 δ，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，$|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}|<\varepsilon$

即 $|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}|=\left|\dfrac{x-x_0}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}\right|<\varepsilon$

+3

取 $\delta=1$，$|x-x_0|<1$　$x_0-1<x<x_0+1$

$\therefore \sqrt{x}+\sqrt{x_0}>\sqrt{x_0-1}+\sqrt{x_0}$

只要 $|x-x_0|<(\sqrt{x_0-1}+\sqrt{x_0})\varepsilon$，即有 $|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}|<\varepsilon$

取 $\delta=\min\{1,(\sqrt{x_0-1}+\sqrt{x_0})\varepsilon\}$，$\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{x}=\sqrt{x_0}$

证明：对 $\forall\varepsilon>0$，存在 δ，当 $|x-x_0|<\delta$ 时

$|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}|=\left|\dfrac{x-x_0}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}\right|<\dfrac{|x-x_0|}{\sqrt{x_0}}<\varepsilon$　$x_0=0$?

令 $\delta_1<\sqrt{x_0}\,\varepsilon$ 即可

当 $x_0=0$ 时，有 $|\sqrt{x}-\sqrt{0}|=\sqrt{x}<\varepsilon$

$\delta_2<\varepsilon^2$ 即可

$\therefore \forall\varepsilon>0$，$\exists\,\delta=\min\{\sqrt{x_0}\,\varepsilon,\varepsilon^2\}$，

当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}|<\varepsilon$ 成立

2. 设 $x_n=1+\dfrac{\cos x}{3}+\dfrac{\cos 2x}{3^2}+\cdots+\dfrac{\cos nx}{3^n}$；证明数列$\{x_n\}$收敛.

证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{3}{2}$　$\forall\varepsilon>0$，存在 N，当 $n>N$ 时，$\left|x_n-\dfrac{3}{2}\right|<\varepsilon$

$\because x_n<1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{3^n}=1+\dfrac{\frac{1}{3}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{3}}=1+\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{3^n}\right)$

$\therefore \left|x_n-\dfrac{3}{2}\right|<\dfrac{1}{2}\times\left(1-\dfrac{1}{3^n}\right)$

$\left|x_n-\dfrac{3}{2}\right|<\dfrac{1}{2\times 3^n}<\varepsilon$　即 $n>+\dfrac{\ln\frac{1}{2\varepsilon}}{\ln 3}$

取 $N=\left[\dfrac{\ln\frac{1}{2\varepsilon}}{\ln 3}\right]$，当 $n>N$ 时，$x_n\to\dfrac{3}{2}$

即$\{x_n\}$收敛.

证明：柯西收敛原理

$|x_{n+p}-x_n|=\left|\dfrac{\cos(n+1)x}{3^{n+1}}+\dfrac{\cos(n+2)x}{3^{n+2}}+\cdots+\dfrac{\cos(n+p)x}{3^{n+p}}\right|$

$\leq\dfrac{1}{3^{n+1}}+\dfrac{1}{3^{n+2}}+\cdots+\dfrac{1}{3^{n+p}}$

$=\dfrac{\frac{1}{3^{n+1}}\left(1-\frac{1}{3^p}\right)}{1-\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3^n}\left(1-\dfrac{1}{3^p}\right)\leq\dfrac{1}{3^n}<\varepsilon$

当 $3^n>\dfrac{1}{\varepsilon}$　即 $n>\dfrac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln 3}$

取 $N=\left[\dfrac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln 3}\right]$　当 $m,n>N$ 时，有 $|x_n-x_m|<\varepsilon$

$\therefore$ 命题成立.

3．叙述并证明康托尔一致连续性定理.

解：康托尔一致连续性定理.

+1

在闭区间$[a,b]$上连续的函数在$[a,b]$上一定一致连续.

闭区间$[a,b]$上的连续函数$f(x)$一定在$[a,b]$上一致连续.

证明：反证法

假设$f(x)$在$[a,b]$上非一致连续，也就是说$\exists \varepsilon_0>0$，对于$\forall \eta>0$，在区间至少存在$x_1^{(1)}$及$x_1^{(2)}$虽有$|x^{(1)}-x^{(2)}|<\eta$，有$|f(x^{(1)})-f(x^{(2)})|\geq \varepsilon_0$

现取$\eta=\frac{1}{n}$，那么在$[a,b]$内存在两个点列$\{x_n^{(1)}\}$及$\{x_n^{(2)}\}$，虽然$|x_n^{(1)}-x_n^{(2)}|<\frac{1}{n}$

但$|f(x_n^{(1)})-f(x_n^{(2)})|\geq \varepsilon_0$

应用魏尔斯特拉斯致密性定理，在有界数列$\{x_n^{(1)}\}$中存在一个收敛子列$x_{n_k}^{(1)}\to x_0 \ (k\to\infty)$

且$x_0\in[a,b]$

$\because |x_n^{(1)}-x_n^{(2)}|<\frac{1}{n}$ $\therefore |x_{n_k}^{(1)}-x_{n_k}^{(2)}|<\frac{1}{n_k}$

亦即 $x_{n_k}^{(1)}-x_{n_k}^{(2)}\to 0$

$\because x_{n_k}^{(1)}\to x_0$ $\therefore x_{n_k}^{(2)}\to x_0$

且有$|f(x_{n_k}^{(1)})-f(x_{n_k}^{(2)})|\geq \varepsilon_0$

另，$\because f(x)$在x_0连续 即$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

按函数极限与数列极限的关系有

$\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}^{(1)})=f(x_0)$ $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}^{(2)})=f(x_0)$

$\therefore \lim\limits_{k\to\infty} (f(x_{n_k}^{(1)})-f(x_{n_k}^{(2)}))=0$

与$|f(x_{n_k}^{(1)})-f(x_{n_k}^{(2)})|\geq \varepsilon_0$相矛盾.

$\therefore$ 假设不成立.