6.0元 高 数

年级： 专业： 班级： 姓名： 学号：

装 订 线 密 封 线

重庆邮电大学 2013/2014 学年 第一学期

《高等数学》（上） （A）

题 号	一	二	三	四	五	六	总分
分 数							
评 阅 人							

一． 单项选择题(本题共有 5 个小题，每小题 3 分，共 15 分)

1．当 $x\to 1$时，下列函数中与$1-x$是等价无穷小的是（　　）

（A）$1-x^2$　（B）$1-x^3$　（C）x^2-1　（D）$\frac{1}{2}(1-x^2)$

2．设 $f(x)$连续，则$\frac{d}{dx}\int_x^0 tf(x^2-t^2)dt$ =(　　)

(A) $xf(x^2)$　(B) $-xf(x^2)$　(C) $2xf(x^2)$　(D) $-2xf(x^2)$

3．设 $f(x)=\int_0^x \sin t^2 dt$， $g(x)=x^3+x^4$，则当$x\to 0$时， $f(x)$是$g(x)$的

（　　）

(A)等价无穷小　(B)同阶非等价无穷小

(C)高阶无穷小　(D)低阶无穷小

4．设 $f(t)$在$[1,+\infty)$上连续， $f(1)=0,\int_1^{x^3} f(t)dt=\ln x$ 则 $f(e)=$（　　）

（A）$\frac{1}{3}$，（B）$\frac{1}{3e}$，　（C）0;　（D）e.

5.如果函数 $f(x)$在x_0处满足：$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h^2}=2013$。则 $f(x)$在x_0处（　　）

(A) 不可导；　(B) 可导，且 $f'(x_0)=2013$ ；

(C) 可导性不确定；　(D) 可导，且 $f'(x_0)=0$ 。

二． 填空题(本题共有 7 个小题，每小题 3 分，共 21 分)

1. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f'(0)=1$，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(2\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$=______________。

2. 设方程 $y^5+2y-x-3x^7=0$ 确定了隐函数 $y=y(x)$，则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}$=____________。

3． 已知点 $(1,3)$ 是曲线 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点，则 $b-a$=__________。

4． 反常积分 $\int_0^{+\infty} x^2e^{-x}dx$=_____________。

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\sin\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}\sin x\right)$=__________________.

6. 设 $y=xe^x$，则 $y^{(n)}$=____________.

7. 微分方程 $y''+3y'+2y=0$ 的通解为__________________。

三．计算题(每小题 4 分，共 24 分)

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{2x+\sin x}{x+\cos x}+\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^{2x}\right]$

2. 设 $y=x^2(\cos x)^{\sin x}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$

3. $f(x)=\begin{cases} xe^{-x^2} & x\ge 0 \\ \dfrac{1}{1+\cos x} & -1<x<0 \end{cases}$，求 $\int_1^4 f(x-2)dx$

4. 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{-x}-3x}{1-\cos x}$

5. 求$\int\dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx$

6. 求$\int\dfrac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}dx$

四 应用题（第 1 小题 6 分，第 1 小题 9 分，共 15 分）

1. 设曲线$y=e^x$，$y=e^{-x}$及$x=1$所围成的平面图形为 D.

1） 求平面图形 D 的面积 ；

2） 求该平面图形 D 绕x轴旋转一周所成旋转体的体积.

2. 设函数 $f(x)$ 为可导函数, 且满足： $f(x)+2\int_0^x f(t)dt=x^2$ ，试求 $f(x)$

五．综合题

1. 求函数 $f(x)=x+\frac{1}{x}$ 的单调区间与极值（5 分）

2. 求微分方程 $(e^{x+y}-e^x)dx+(e^{x+y}+e^y)dy=0$ 的通解（5 分）

3. 求微分方程 $y''-4y'+3y=0$ 满足初始条件 $y(0)=4, y'(0)=8$ 的特解（5 分）

六．证明题（每小题 5 分，共 10 分）：

1．设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，证明：存在点 $\xi\in(0,1)$，使 $\xi f'(\xi)+f(\xi)=f'(\xi)$．

2．设函数 $f(x)$ 连续， $F(x)=\int_0^x tf(x^2-t^2)dt$ ，求证： $F'(x)=xf(x^2)$

答案

一． 1、D　2、B　3、B　4、B　5、D

二 1. 2　2. 1/2　3. 6　4. 2　5. 1　6. $(x+n)e^{x}$　7. $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}$

三．1. $\lim\limits_{x\to\infty}[\frac{2x+\sin x}{x+\cos x}+\left(\frac{x-1}{x}\right)^{2x}]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\cos x}{x}}+\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-x}\right)^{(-x)(-2)}=$

$2+e^{-2}$

2．解：将方程 $y=x^2(\cos x)^{\sin x}$ **两边取对数，** $\ln y=2\ln x+\sin x\cdot\ln(\cos x)$　**(1 分)**

将其两边对 x 求导，得 $\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{2}{x}+\cos x\ln(\cos x)+\sin x\frac{1}{\cos x}(-\sin x)$　**(3 分)**

$\frac{dy}{dx}=x^2(\cos x)^{\sin x}\cdot(\frac{2}{x}+\cos x\ln(\cos x)-\sin x\cdot\tan x)$　**(4 分)**

3. $\int_1^4 f(x-2)dx\overset{t=x-2}{=}\int_{-1}^2 f(t)dt=\int_{-1}^0\frac{1}{1+\cos t}dt+\int_0^2 te^{-t^2}dt$　（**2 分**）

$=[\tan\frac{t}{2}]_{-1}^0-[\frac{1}{2}e^{-t^2}]_0^2=\tan\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-4}+\frac{1}{2}$　（**4 分**）

4.原式 $\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{2e^{2x}+e^{-x}-3}{\sin x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{4e^{2x}-e^{-x}}{\cos x}=3$

5.原式= $-2\int\arcsin\sqrt{x}d\sqrt{1-x}=-2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}+2\int\sqrt{1-x}d(\arcsin\sqrt{x})$　**(2 分)**

$=-2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}+2\int\sqrt{1-x}\frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$　**(3 分)**

$=-2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}+\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx==-2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C$　**(4 分)**

6.解： 令 $x=\sin t$，$t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，$\sqrt{1-x^2}=\cos t$，$dx=\cos tdt$，　**(1 分)**

原式= $\int\frac{\cos t}{1+\cos t}dx=\int(1-\frac{1}{1+\cos t})dx=\int dt-\int\frac{1}{2\cos^2\frac{t}{2}}dx=t-\int\sec^2\frac{t}{2}d(\frac{t}{2})$　**(2 分)**

$=t-\tan\frac{t}{2}+C=t-\frac{\sin\frac{t}{2}}{\cos\frac{t}{2}}+C=t-\frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\cos^2\frac{t}{2}}+C=t-\frac{\sin t}{1+\cos t}+C$　**(3 分)**

$=\arcsin x-\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}+C$ **(4 分)**

四.

解：1.

（1）平面图形 D 的面积为：

$A=\int_0^1(e^x-e^{-x})dx==(e^x+e^{-x})\Big|_0^1=e+e^{-1}-2$ （**3** 分）

（2）平面图形 D 绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积为：

$V=\pi\int_0^1[(e^x)^2-(e^{-x})^2]dx=\pi\int_0^1(e^{2x}-e^{-2x})dx=\frac{\pi}{2}(e^{2x}+e^{-2x})\Big|_0^1$ （**6** 分）

$=\frac{\pi}{2}(e^2+e^{-2}-2)$

解：将方程 $f(x)+2\int_0^x f(t)dt=x^2$ 两边对 x 求导，得： $f'(x)+2f(x)=2x$ （**2** 分）

且 $f(0)=0$， $f'(x)+2f(x)=2x$ 对应的齐次方程为 $f'(x)+2f(x)=0$，

$\frac{d[f(x)]}{dx}=-2f(x)$， $\frac{d[f(x)]}{f(x)}=-2dx$， $\int\frac{d[f(x)]}{f(x)}=-\int 2dx$， （**3** 分）

$\ln|f(x)|=-2x+C_1$， $f(x)=Ce^{-2x}$，（$C=\pm e^{C_1}$）

$f'(x)+2f(x)=0$ 的通解为： $f(x)=Ce^{-2x}$ （**4** 分）

令 $f(x)=C(x)e^{-2x}$ 为 $f'(x)+2f(x)=2x$ 的解

$f'(x)=C'(x)e^{-2x}-2C(x)e^{-2x}$，带入方程得 $C'(x)e^{-2x}=2x$ （**5** 分）

$C(x)=\int 2xe^{2x}dx=\int xd(e^{2x})=xe^{2x}-\frac{1}{2}e^{2x}+C$ （**6** 分）

$f(x)=Ce^{-2x}+x-\frac{1}{2}$，由 $f(0)=0$ 得， $C=\frac{1}{2}$ （**7** 分）

$f(x)=\frac{1}{2}(e^{2x}+2x-1)$ （**9** 分）

五.

1. 解：函数 $f(x)=x+\frac{1}{x}$ 的定义域为在 $(-\infty,0)$、$(0,+\infty)$，

$x=0$ 为函数 $f(x)$ 的间断点 **(1 分**

$y'=1-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}$， 令 $y'=0$，得 $x=\pm1$ **(2 分)**

x	$(-\infty,-1)$	**-1**	$(-1,0)$	**(0,1)**	**1**	$(1,+\infty)$
y'	+	**0**	-	-	**0**	+
y	单调增加	极大值点	单调减少	单调减少	极小值点	单调增加

当 $x=-1$ 时，$f(x)$ 有极大值 $f(-1)=-2$，当 $x=1$ 时，$f(x)$ 有极小值 $f(1)=2$

(4 分)

$f(x)$ 的单调增加区间为 $(-\infty,-1)$、$(1,+\infty)$， $f(x)$ 的单调减少加区间为 $(-1,0)$、$(0,1)$。 **(5 分)**

2.解：$(e^{x+y}-e^x)dx+(e^{x+y}+e^y)dy=0$ 可化为 $e^x(e^y-1)dx+e^y(e^x+1)dy=0$（**1** 分）

当 $e^y-1=0$ 时， $y=0$ 是该微分方程的解 （**2** 分）

当 $e^y-1\neq0$，即 $y\neq0$ 时，有 $\frac{e^y}{e^y-1}dy=-\frac{e^x}{e^x+1}dx$，将其两边积分 （**3** 分）

$\int\frac{e^y}{e^y-1}dy=-\int\frac{e^x}{e^x+1}dx$，得：$\ln(e^y-1)=-\ln(e^x+1)+\ln C$

原方程的通解为：$(e^y-1)(e^x+1)=C$ （**4** 分）

在通解中取 $C=0$，$y=0$ 包含在通解中。 （**5** 分）

3.解： $y''-4y'+3y=0$ 对应的特征方程为： $r^2-4r+3=0$， （**1** 分）

有两个不相等的特征根 $r=1,r=3$ （**2** 分）

方程 $y''-4y'+3y=0$ 的通解为 ： $y=C_1e^x+C_2e^{3x}$ （**3** 分）

由 $y(0)=4,y'(0)=8$，可得：$C_1+C_2=4$， $C_1+3C_2=8$ （**4** 分）

可得 $C_1=C_2=2$，故所求的特解为 $y=2e^x+2e^{3x}$ （**5** 分）

六．**1.**证明：令$F(x)=(x-1)f(x)$， $f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，（**1** 分）

$F(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导， $F(0)=F(1)=0$ $F(a)<0$， $F(b)>0$，（**4** 分）

根据罗尔定理，至少有一点$\xi\in(0,1)$，使$F^{/}(\xi)=0$ 即 $\xi f'(\xi)+f(\xi)=f'(\xi)$．（**5** 分）

2.证：$F(x)=\dfrac{-1}{2}\int_0^x f(x^2-t^2)d(x^2-t^2)\overset{u=x^2-t^2}{=}\dfrac{-1}{2}\int_{x^2}^0 f(u)du=\dfrac{1}{2}\int_0^{x^2} f(u)du$ **(3 分)**

$F^{/}(x)=\dfrac{1}{2}f(x^2)(x^2)^{/}=xf(x^2)$ **(5 分)**

2012级《高等数学》(上) 联考试卷

试卷 A ,(A/B),考核方式 闭卷 (闭卷/开卷),考试时间(120分钟)

19栋雅客来打印店

学院: 专业: 班级: 姓名: 学号:

装 订 线 密 封 线

题　　号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
分　　数									

得 分	评卷人

一、单项选择题(本大题共五个小题,每小题3分,总计15分):

1、下列极限存在的是　(　　)。

(A) $\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{x^2-1}$;　　(B) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-1}$;

(C) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x}$;　　(D) $\lim\limits_{x\to0}\frac{|x|}{x}$。

2、如果函数 $f(x)$ 在 x_0 处满足: $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h^2}=2013$。则 $f(x)$ 在 x_0 处(　　)。

(A) 不可导;　　(B) 可导,且 $f'(x_0)=2013$;

(C) 可导性不确定;　　(D) 可导,且 $f'(x_0)=0$。

3、当 $x>0$ 时,下面不等式正确的为(　　)。

(A) $\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$;　　(B) $\frac{x}{1+x}>x>\ln(1+x)$;

(C) $\frac{x}{1+x}>\ln(1+x)>x$;　　(D) $\frac{x}{1+x}<x<\ln(1+x)$。

4、设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数,下列各等式正确的是(　　)。

(A) $\int F(x)dx=f(x)+c$;　　(B) $(\int f(x)dx)'=f(x)$;

(C) $d(\int f(x)dx)=f(x)+c$;　　(D) $\int f'(x)dx=f(x)$。

5、反常积分 $\int_0^1 \ln x dx$ (　　)。

(A) 收敛于 -1;　(B) 收敛于 0;　(C) 收敛于 1;　(D) 发散。

得 分	评卷人

二、填空题（本大题共五个小题，每小题 3 分，总计 15 分）

6、若当 $x \to 0$ 时，$2ax+3x^2-x^3$ 与 $\sin 4x$ 为等价无穷小，则常数 $a=$________。

7、设函数 $y=\int_0^{3x}\ln(1+t^2)dt$，则微分 $dy=$______。

8、函数 $f(x)=k\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x$ 在 $x=\frac{\pi}{3}$ 处取得极值，则常数 $k=$__________。

9、（**交大学生做**）不定积分 $\int\frac{3x-2}{\sqrt{1-x^2}}dx=$__________。

9、（**重邮学生做**）微分方程 $y''+3y'+2y=0$ 的通解为________________。

10、定积分 $\int_{-1}^{1}(\frac{x\cos x+1}{1+x^2})dx=$_____________。

得 分	评卷人

三、计算题（本大题共两个小题，每小题 5 分，满分 10 分）

11、求函数的极限：1）$\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{n-2}{n})^{3n}$；　　　　2）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos 3x}$。

得 分	评卷人

四、计算题（本大题共两个小题，每小题 5 分，满分 10 分）

12、已知函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=\arctan(\sqrt{t}) \\ y=t-\ln(1+t) \end{cases}$ 确定。

试求: 1） $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=1}$；　　2） $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}$。

得 分	评卷人

五、计算题（本大题共两个小题，每小题 5 分，满分 10 分）

13、求下列不定积分：（1） $\int \dfrac{x^2}{1+x^2}dx$；（2） $\int x\cos x dx$。

得 分	评卷人

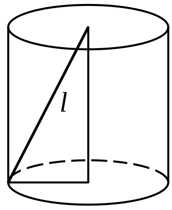
六、计算题（本大题满分 10 分）：

14、计算定积分：$I=\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx$

得 分	评卷人

七、应用题（本大题满分 10 分）：

15、如图所示, 圆柱体上底的中心到下底的边沿的距离为l，问当圆柱体高h与底半径r分别为多少时，圆柱体的体积最大？



得 分	评卷人

八、综合题（本大题共两个小题，每小题 10 分，满分 20 分）

16、（**交大学生做**）已知曲线 $y=y(x)$ 由方程 $x=y+e^{y}$ 确定，

(1) 求 $\dfrac{dy}{dx}$；(2) 求该曲线在 $x=1$ 处的切线方程。

16、（**重邮学生做**）设可导函数 $y=y(x)$ 满足方程：$xdy-2ydx=0$，且 $y(1)=1$

(1) 求函数 $y=y(x)$；

(2) 求曲线 $y=y(x)$ 与直线 $y=2x+3$ 所围成的平面图形的面积。

17、讨论函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}e^{-\frac{1}{x}},(x>0)$ 的单调性, 由此证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{n^2}^{n^2+n}f(x)dx=1$。

《高等数学（上)》（联考）参考答案

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1、B　2、D　3、A　4、B　5、A

二、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

6、<u>2</u>；

7、 $\underline{3\ln(1+9x^2)dx}$ **；**

8、<u>2</u>；

9、（交大）$\underline{-3\sqrt{1-x^2}-2\arcsin x+c}$ **，9**（重邮）$\underline{y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}}$

10、 $\underline{\dfrac{\pi}{2}}$

三、计算题（本大题共两个小题，每小题 5 分，满分 10 分）

11、求函数的极限：

1）$\lim\limits_{n\to+\infty}(\dfrac{n-2}{n})^{3n}$；　　2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos 3x}$。

解： 1）原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}[(1-\dfrac{2}{n})^{-\frac{n}{2}}]^{-6}$　　3 分

$=e^{-6}$　　5 分

原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{3\sin 3x}$　　7 分

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}}{9\cos 3x}$　　9 分

$=\dfrac{2}{9}$　　10 分

四、计算题（本大题共两个小题，每小题 5 分，满分 10 分）：

12、已知函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=\arctan(\sqrt{t}) \\ y=t-\ln(1+t) \end{cases}$ 确定。

试求：1） $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=1}$； 2） $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}$。

解：1） $\dfrac{dy}{dt}=1-\dfrac{1}{1+t}=\dfrac{t}{1+t},\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{1+t}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{t}}$ 2 分

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}/\dfrac{dx}{dt}=2t^{\frac{3}{2}}\Rightarrow\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=1}=2$； 5 分

2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\dfrac{d}{dt}(\dfrac{dy}{dx})}{\dfrac{dx}{dt}}=\dfrac{3t^{\frac{1}{2}}}{\dfrac{1}{2\sqrt{t}(1+t)}}=6t(1+t)$。 8 分

$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}=12$ 10 分

五、计算题（本大题共两个小题，每小题 5 分，满分 10 分）：

13、求下列不定积分：（1） $\int\dfrac{x^2}{1+x^2}dx$；（2） $\int x\cos x dx$。

（1） $\int\dfrac{x^2}{1+x^2}dx=\int\dfrac{x^2+1-1}{1+x^2}dx$ 2 分

$=\int(1-\dfrac{1}{1+x^2})dx=x-\arctan x+C$ 5 分

（2） $\int x\cos x dx=\int xd(\sin x)$ 7 分

$=x\sin x-\int\sin x dx$ 8 分

$=x\sin x+\cos x+C$ 10 分

六、计算题（本大题满分 10 分）：

14、计算定积分： $\int_0^4\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}dx$

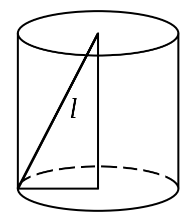
解：令 $t=\sqrt{x},\ x=t^2,dx=2tdt$ 3 分

原式$=\int_0^2 \frac{1}{1+t}2tdt = 2\int_0^2 (1-\frac{1}{1+t})dt$ 6 分

$=2[t-\ln(t+1)]\Big|_0^2 = 4-2\ln 3$。 10 分

七、应用题（本大题满分 10 分）：

15. 如图所示, 圆柱体上底的中心到下底的边沿的距离为 l, 问当圆柱体高 h 与底半径 r 分别为多少时，圆柱体的体积最大？



解：圆柱体高 h 与底半径 r 满足 $h^2+r^2=l^2$

圆柱体的体积公式为 $V=\pi r^2 h=\pi(l^2-h^2)h$ 3 分

求导并令 $V'=\pi(l^2-3h^2)=0$ 5 分

得 $h=\frac{\sqrt{3}}{3}l$，并由此解出 $r=\frac{\sqrt{6}}{3}l$. 7 分

$\frac{d^2V}{dh^2}\Big|_{h=\frac{\sqrt{3}}{3}l} = -6h\pi\Big|_{h=\frac{\sqrt{3}}{3}l} = -2\sqrt{3}\pi l<0$ **8 分**

即当底半径 $r=\frac{\sqrt{6}}{3}l$，高 $h=\frac{\sqrt{3}}{3}l$ 时，圆柱体的体积最大. 10 分

八、综合题（本大题共两个小题，每小题 10 分，满分 20 分）：

16、（交大学生做）已知曲线 $y=y(x)$ 由方程 $x=y+e^y$ 确定，

(1) 求 $\frac{dy}{dx}$；（2）求该曲线在 $x=1$ 处的切线方程。

解：（1）将方程 $x=y+e^y$ 两边对 x 求导，$1=y'+e^y\cdot y'$， 3 分

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{e^y+1}$ 5 分

（2）将 $x=1$ 代入方程 $x=y+e^y$ 得 $y=0$ 6 分

该曲线在$x=1$处的切线斜率为$k=\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1}=\left.\dfrac{1}{e^y+1}\right|_{x=1,y=0}=\dfrac{1}{2}$ 8 分

所求切线方程为$y=\dfrac{1}{2}(x-1)$ 10 分

16、(**重邮学生做**)设可导函数$y=y(x)$满足方程：$xdy-2ydx=0$，且$y(1)=1$

(1)求函数$y=y(x)$；

(2)求曲线$y=y(x)$与直线$y=2x+3$所围成的平面图形的面积。

解：(1) $xdy-2ydx=0$可化为$\dfrac{1}{y}dy=\dfrac{2}{x}dx$，两边积分$\ln|y|=2\ln|x|+\ln|C|$， 3 分

得$y=Cx^2$，由条件$y(1)=1$，得$C=1$，故所求函数为$y=x^2$ 5 分

(2) $\begin{cases} y=x^2 \\ y=2x+3 \end{cases}$，解得$\begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$、$\begin{cases} x=3 \\ y=9 \end{cases}$ 6 分

$A=\int_{-1}^{3}(2x+3-x^2)dx$ 8 分

$=\left.(x^2+2x-\dfrac{1}{3}x^3)\right|_{-1}^{3}=6\dfrac{2}{3}$ 10 分

17、讨论函数$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}e^{-\frac{1}{x}},(x>0)$的单调性, 由此证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{n^2}^{n^2+n}f(x)dx=1$。

解：1) $\because$ $f'(x)=\dfrac{2-x}{x^{\frac{5}{2}}}e^{-\frac{1}{x}}=0\Rightarrow x=2$， 3 分

$\therefore$ 当$0<x<2$时，$f(x)$单调增加；当$x>2$时，$f(x)$单调减少； 5 分

2) $\because$ $\int_{n^2}^{n^2+n}f(x)dx=f(\xi)n,(n^2\le\xi\le n^2+n)$ 6 分

从而, 当$x>2, f'(x)<0\Rightarrow nf(n^2+n)\le\int_{n^2}^{n^2+n}f(x)dx\le nf(n^2)$, 7 分

$\lim\limits_{n\to\infty}\int_{n^2}^{n^2+n}f(n^2+n)dx=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}e^{-\frac{1}{n^2+n}}=1$ 8 分

$\lim\limits_{n\to\infty}\int_{n^2}^{n^2+n}f(n^2)dx=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2}}e^{-\frac{1}{n^2}}=1$ 9 分

故由夹逼准则知$\lim\limits_{n\to\infty}\int_{n^2}^{n^2+n} f(x)dx=1$ 10 分

注： 2）的前面部分也可如下求解

∵当$x>2$时，$f(x)$单调减少， $n\to\infty$,不妨设$n>2$,

当$n^2\le x\le n^2+n$时，有 $f(n^2+n)\le f(x)\le f(n^2)$ 6 分

有$nf(n^2+n)=\int_{n^2}^{n^2+n} f(n^2+n)dx\le\int_{n^2}^{n^2+n} f(x)dx\le\int_{n^2}^{n^2+n} f(n^2)dx=nf(n^2)$ 7 分

年级：

专业：

班级：

姓名：

学号：

装　订　线

密　封　线

重庆邮电大学 2012/2013 学年 第一学期

《高等数学》（上）（B） 考试题

题　　号	一	二	三	四	五	六	七	总分
分　　数								
评 阅 人								

一．单项选择题(本题共有 5 个小题，每小题 3 分，共 15 分)

1．设 $f(x)=x(1-\cos x)$，$g(x)=x^3+x^4$，当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的（　　）

(A)等价无穷小　　(B）同阶非等价无穷小

(C)高阶无穷小　　(D)低阶无穷小

2．$x=1$是函数 $f(x)=\dfrac{x-1}{\sin(\pi x)}$ 的（　　）

(A)可去间断点　(B)跳跃间断点　(C)无穷间断点　(D)振荡间断点

3．设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，则在$[a,b]$上至少有一点ξ，使得（　　）

（A） $f'(\xi)=0$　　（B） $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

（C） $f(\xi)=0$　　（D） $f(\xi)=\dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$

4．设 $f(x)=\int_x^2\sqrt{2+t^2}\,dt$，则 $f'(1)=$（　　）

（A） $-\sqrt{3}$　（B） $\sqrt{3}$　（C） $\sqrt{6}-\sqrt{3}$　（D） $\sqrt{3}-\sqrt{6}$

5．下列无穷积分收敛的是　（　　）.

(A) $\int_0^{+\infty}\cos x dx$　　(B) $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-3x}dx$

(C) $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}dx$　　(D) $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$

二． 填空题(本题共有 5 个小题，每小题 3 分，共 15 分)

6． 设函数 $f(x)=\begin{cases} e^{x-2}, & x<2 \\ ax+4, & x\geq 2 \end{cases}$ 在 $x=2$ 处连续，则 $a=$________________。

7．设 $f'(x_0)=1$，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}=$________________。

8． 设参数 $\begin{cases} x=1+t^2 \\ y=t^3 \end{cases}$ 确定了函数 $y=y(x)$，则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=2}=$______________________ 。

9． 函数 $y=\ln(1+x^2)$ 的单调增加区间是___________________。

10． 微分方程 $y''+5y'-6y=0$ 的通解为_________________。

三、计算题（本大题共两个小题，每小题 5 分，满分 10 分）:

11、求函数的极限：

1） $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+2+3+...+(n-1)}{n^2}$；

2） $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$ 。

四、计算题（本大题共两个小题，每小题 5 分，满分 10 分）：

12、已知曲线 $y=y(x)$ 由方程 $y^5+2y-x-3x^7=0$ 确定，

(1) 求 dy ；(2) 求该曲线在 $(0,0)$ 处的切线方程及法线方程。

五、计算题（本大题共两个小题，每小题 5 分，满分 10 分）：

13、求下列不定积分：

（1） $\int \frac{x^2+x+1}{x(x^2+1)}dx$ ；

（2） $\int e^{\sqrt{x}}dx$

六、计算题（本大题共两个小题，每小题 5 分，满分 10 分）：

14、（1）计算定积分：$\int_0^4 \frac{x+4}{\sqrt{2x+1}}dx$

（2）求曲线 $y=\frac{1}{x}$ 与直线 $y=x$ 、 $x=2$ 所围成的平面图形的面积。

七、应用题（本大题共两个大题，每题 10 分，满分 20 分）：

15. 从一块边长为 6 的正方形铁皮四角截去同样大小的正方形，然后把四边折起来做成一个无盖盒子,问要截去的小正方形的边长 x 为多少时，才能使盒子的容积 V 最大?

16. 求一曲线的方程，该曲线通过原点，并且它在点(x,y)处的切线的斜率等于$2x+y$。

八、证明题（本大题共两个小题，每小题 5 分，满分 10 分）：

17．设函数$y=f(x)=x^5+x-1$，

试证：（1） $y=f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内单调递增

（2）方程 $f(x)=0$ 在$(0,1)$内有且仅有一个实根。

重庆邮电大学 2012/2013 学年 第一学期

《高等数学》（上） （B）参考答案

一、填空题（每小题 **3** 分，共 **15** 分）

1、B　　2、A　　3、D　　4、A　　5、B

二、单项选择题（每小题 **3** 分，共 **15** 分）

6、 $\underline{-\frac{3}{2}}$；**7、** $\underline{2}$；**8、** $\underline{3}$；　**9、** $\underline{[0,+\infty)}$，**10、** $\underline{y=C_1e^{-6x}+C_2e^{x}}$

三、计算题（本大题共两个小题，每小题 5 分，满分 10 分）：

11、求函数的极限：

1）$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1+2+3+\ldots+(n-1)}{n^2}$；

解： 1）原式$=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\frac{n}{2}(n-1)}{n^2}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n-1}{2n}=\frac{1}{2}$　　5 分

2）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)$。

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{x+1}}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2(x+1)}=\frac{1}{2}$　　5 分

四、计算题（本大题共两个小题，每小题 5 分，满分 10 分）：

12、已知曲线 $y=y(x)$ 由方程 $y^5+2y-x-3x^7=0$ 确定，

(1) 求 dy；(2) 求该曲线在 $(0,0)$ 处的切线方程及法线方程。

解：（1）将方程 $y^5+2y-x-3x^7=0$ 两边对 x 求导，$5y^4y'+2y'-1-21x^6=0$，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1+21x^6}{5y^4+2},\quad dy=\frac{1+21x^6}{5y^4+2}dx$$　　5 分

（2）当 $x=0$，$y=0$　　6 分

该曲线在 $x=0$ 处的切线斜率为 $k=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=\frac{1}{2}$，　所求切线方程为 $y=\frac{1}{2}x$　　8 分

该曲线在$x=0$处的法线斜率为$k_1=-2$， 所求法线方程为$y=-2x$ 10 分

五、计算题（本大题共两个小题，每小题 5 分，满分 10 分）：

13、求下列不定积分：

（1）$\int\frac{x^2+x+1}{x(x^2+1)}dx$；

解：原式=$\int(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2+1})dx=\int(1-\frac{1}{1+x^2})dx=\ln|x|-\arctan x+C$ **5 分**

（2）$\int e^{\sqrt{x}}dx$

解：令 $t=\sqrt{x},\ x=t^2,dx=2tdt$ 2 分

原式=$2\int te^t dt=2\int td(e^t)=2[te^t-\int e^t dt]=2(t-1)e^t+C=2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}}+C$ 5 分

六、计算题（本大题共两个小题，每小题 5 分，满分 10 分）：

14、（1）计算定积分：$\int_0^4\frac{x+4}{\sqrt{2x+1}}dx$

解：令 $t=\sqrt{2x+1},\ x=\frac{t^2-1}{2},dx=tdt$ 2 分

原式=$\int_1^3\frac{\frac{t^2-1}{2}+4}{t}tdt=\int_1^3\frac{t^2+7}{2}dt=\frac{1}{2}[\frac{t^3}{3}+7t]\Big|_1^3=11\frac{1}{3}$。 5 分

（2）求曲线$y=\frac{1}{x}$与直线$y=x$、$x=2$所围成的平面图形的面积。

（2）$\begin{cases}y=x\\ y=\frac{1}{x}\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}$、$\begin{cases}x=3\\ y=9\end{cases}$ 1 分

$A=\int_1^2(x-\frac{1}{x})dx=(\frac{1}{2}x^2-\ln x)\Big|_1^2=\frac{3}{2}-\ln 2$ 5 分

七、应用题（本大题共两个小题，每小题 10 分，满分 20 分本大题共两个小题，每小题 10 分，满分 20 分）：

15. 从一块边长为 6 的正方形铁皮四角截去同样大小的正方形,然后把四边折起来做成一个无盖盒子,问要截去的小正方形的边长x为多少时，才能使盒子的容积最大?

解：截去的小正方形的边长为x（$0<x<3$）

盒子的容积为$V=x(6-2x)^2=4x^3-24x^2+36x$ 3 分

求导并令 $V^{/}=12x^2-48x+36=12(x-3)(x-1)=0$ 6 分

得 $x=1$，并由此解出$V^{//}\Big|_{x=1}=-24<0$. 9 分

即当 $x=1$，盒子的容积最大 10 分

16．求一曲线的方程，该曲线通过原点，并且它在点(x,y)处的切线的斜率等于$2x+y$。

17．解：该问题为$\dfrac{dy}{dx}=2x+y, y\Big|_{x=0}=0$ 1 分

$\dfrac{dy}{dx}=2x+y$对应的齐次方程为$\dfrac{dy}{dx}=y$，其通解为$y=Ce^x$ 3 分

令$y=C(x)e^x$为$\dfrac{dy}{dx}=2x+y$的解，$C^{/}(x)=2xe^{-x}$ 5 分

得$C(x)=\int 2xe^{-x}dx=-2(x+1)e^{-x}+C$ 7 分

$\dfrac{dy}{dx}=2x+y$通解为$y=-2(x+1)+Ce^x$, 8 分

由$y\Big|_{x=0}=0$，得$C=2$, 9 分

所求曲线的方程为：$y=-2(x+1)+2e^x$ 10 分

八、证明题（本大题共两个小题，每小题 5 分，满分 10 分）

17．设函数$y=f(x)=x^5+x-1$，试证：（1） $y=f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内单调递增

（2）方程 $f(x)=0$ 在$(0,1)$内有且仅有一个实根。

证：1）$\because$ $f^{'}(x)=5x^4+1$, 2 分

$\therefore$ 当$\forall x\in(-\infty,+\infty)$时，$f^{/}(x)>0$，$y=f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内单调递增 5 分

2）$\because$ $f(x)=x^5+x-1$在$[0,1]$上连续，且$f(0)=-1, f(1)=1$ 2 分

由零点存在定理知，在$(0,1)$内至少存在一点方程ξ，使得$f(\xi)=0$ 3 分

$y=f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内单增，方程$f(x)=0$在$(0,1)$内有且仅有一个实根 5 分

试题编号：

重庆邮电大学2011-2012学年第一学期

高等数学（上） 期末试卷（A卷）

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	总 分
得 分									
评卷人									

一、计算题(一)（每小题7分，共21分）

1. 已知 $f(\sin\frac{x}{2})=\cos x+1$，求 $f(\cos\frac{x}{2})$.

2. 指出函数 $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x^2-1}$ 的间断点及其类型.

3. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)$.

二、计算题(二)（每小题 7 分，共 21 分）

1. 设 $f(t)$ 连续， $g(x)=x\int_0^x f(t)dt$ ，求 $g''(0)$.

2. 当 x 为何值时，函数 $y=\int_0^x te^{-t^2}$ 有极值？

3. 求曲线$\begin{cases} x=\sin t \\ y=\cos 2t \end{cases}$在$t=\dfrac{\pi}{4}$处的切线方程.

三、**计算题(三)**（每小题 7 分，共 35 分）

1. 计算积分$\int\dfrac{\sqrt{x-1}}{2x}dx$.

2. 计算积分$\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}\,dx$.

3. 计算积分$\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}dx$.

4. 求微分方程 $xdy+2ydx=0$ 满足 $y\big|_{x=2}=1$ 的特解.

5. 求微分方程 $y''+4y=0$ 的通解，并设出方程 $y''+4y=e^x$ 的特解形式.

四、综合题（每小题 8 分，共 16 分）

1. 求常数 a,b 的值，使得函数 $f(x)=\begin{cases} a+\dfrac{1}{2}x, & x\le 0 \\ \ln(bx+1), & x>0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导.

2. 求由抛物线$\sqrt{y}=x$，直线$y=-x$及$y=1$所围成的图形面积.

五、证明题（7 分）

设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续且单调增加，证明不等式

$$\int_a^b xf(x)dx \geq \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx.$$

2011-12（1）高等数学（上） 期末试卷参考答案

一、计算题(一)（每小题 7 分，共 21 分）

1．因 $f(\sin\frac{x}{2})=1-2\sin^2\frac{x}{2}+1$，…4 分

故 $f(\cos\frac{x}{2})=2-2\cos^2\frac{x}{2}$ …7 分

2．间断点 $x=-1$，因为 $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\infty$，

所以 $x=-1$ 为第二类间断点（无穷间断点）； …4 分

间断点 $x=1$，因为 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\frac{1}{2}$，

所以 $x=1$ 为第一类间断点（可去间断点）． …7 分

3．$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}=2$． …7 分

二、计算题(二)（每小题 7 分，共 21 分）

1．$g'(x)=\int_0^x f(t)dt+xf(x)$， …4 分

$$g''(0)=\lim_{h\to0}\frac{g'(h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\int_0^h f(t)dt+hf(h)-0}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\int_0^h f(t)dt}{h}+\lim_{h\to0}f(h)=2f(0)$$ …7 分

2．$y'=xe^{-x^2}$，令 $y'=0$，有 $x=0$； …3 分

$y''=e^{-x^2}-2x^2e^{-x^2}$，$y''(0)=1>0$， …6 分

故 $x=0$ 时函数有极值. …7 分

3．$\frac{dy}{dx}\Big|_{t=\pi/4}=\frac{-2\sin2t}{\cos t}\Big|_{t=\pi/4}=-2\sqrt{2}$， …3 分

$t=\frac{\pi}{4}$ 时，$x=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$y=0$ …5 分

切线方程 $y=-2\sqrt{2}(x-\frac{\sqrt{2}}{2})$，即 $2\sqrt{2}x+y-2=0$． …7 分

三、计算题(三)（每小题 7 分，共 35 分）

1. 令 $\sqrt{x-1}=t$，则 $\int\frac{\sqrt{x-1}}{2x}dx=\int\frac{t^2}{1+t^2}dt=\int\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt$ …3 分

$=t-\arctan t+C$ …5 分

$=\sqrt{x-1}-\arctan\sqrt{x-1}+C$. …7 分

2. 令 $x-1=t$， …2 分

则原式= $\int_{-1}^{1}(1+t)\sqrt{1-t^2}dt=\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}dt=\frac{\pi}{2}$. …7 分

3. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{e^x+e^{-x}}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+e^{2x}}de^x=\arctan e^x\Big|_{-\infty}^{+\infty}$ …4 分

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan e^x-\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan e^x=\frac{\pi}{2}$. …7 分

4. 分离变量 $\frac{dy}{y}=-\frac{2}{x}dx$， …2 分

两端积分 $\ln|y|=-\ln x^2+\ln|C|$ …4 分

通解为 $y=C/x^2$； …5 分

将 $y|_{x=2}=1$ 代入得 $C=4$， …6 分 故特解为 $y=\frac{4}{x^2}$. …7 分

5. 对应齐次方程的特征方程 $r^2+4=0$ …2 分

有根 $r_{1,2}=\pm 2i$， …3 分

通解 $Y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x$； …5 分

由非齐次项可设方程的特解形式为 $y^*=Ae^x$， A 为常数. …7 分

四、综合题（每小题 8 分，共 16 分）

1. $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，$\Rightarrow a=0$； …3 分

又 $f_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\frac{x}{2}-0}{x-0}=\frac{1}{2}$， …5 分 $f_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln(bx+1)-0}{x-0}=b$ …7 分

所以 $b=\frac{1}{2}$. …8 分

2. 取 y 为积分变量，…3 分

则 $A=\int_0^1(\sqrt{y}+y)dy=\frac{7}{6}$.　　…8 分

五、证明题（7 分）

因 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加，故 $(x-\frac{a+b}{2})\left[f(x)-f(\frac{a+b}{2})\right]\geq 0$　…2 分

从而　$\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})\left[f(x)-f(\frac{a+b}{2})\right]dx\geq 0$　…3 分

但　$\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})dx=0$，从而　$\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})f(\frac{a+b}{2})dx=0$　…5 分

于是　$\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})f(x)dx\geq 0$，即 $\int_a^b xf(x)dx\geq\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$. … 7 分

年级：

装 密

专业：

班级：

订 封

姓名：

线 线

学号：

重庆邮电大学 2010—2011 学年第 一 学期

高等数学（上） 考试题 （ A 卷）

题号	一	二	三	四	五	六	总分
分数							
评卷人							

一. 求极限(每小题 5 分，共 15 分)

1. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1+2+\cdots+n}{2+n}-\dfrac{n}{2})$

2. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sin 2x}$

3. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{-x}-3x}{1-\cos x}$

二、求函数的导数(每小题 5 分，共 15 分)

1. 设 $y=xe^{x^2}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$、$\dfrac{d^2y}{dx^2}$

2．求方程 $x^2+y^2=r^2$（$r>0$，常数）确定的隐函数 $y=y(x)$ 的微分 dy

3．设 $y=x^2(\cos x)^{\sin x}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$

二．求积分(每小题 6 分，共 30 分)

1．求 $\int \frac{1}{x^2}e^{1-\frac{1}{x}}dx$，

2．求 $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx$，

3．求$\int \frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}dx$

4．求$\int_0^1 \frac{x+3}{\sqrt{2x+1}}dx$

5．求$\int_{\frac{1}{e}}^{e} \left|\ln x\right| dx$

三．解答题(每小题 6 分，共 18 分)

1. 设函数$f(x)=\begin{cases} x^2, & x \le 1 \\ ax+b, & x>1 \end{cases}$，为使$f(x)$在$x=1$处可导，$a$、$b$应取何值？

2. 设 $\vec{a}=(2,3,-1)$、$\vec{b}=(1,-2,3)$、$\vec{c}=(2,-1,1)$，向量 $\vec{d}$ 垂直于向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$，且 $\vec{d}$ 与 $\vec{c}$ 的数量积为 -6，求向量 $\vec{d}$

3. 求过点 $(1,-1,1)$ 且垂直于平面 $x-y+z=7$ 和 $3x+2y-12z+5=0$ 的平面方程

四．应用题(每小题 6 分，共 12 分)

1．求函数 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ 的单调区间与极值

2．计算由两条抛物线 $y=x^2$、$y^2=x$ 所围成的平面图形的面积

五．证明题(每小题 5 分，共 10 分)

1．证明：当 $x>1$时，$e^x > ex$

2．设函数 $f(x)$ 连续，$F(x)=\int_0^x tf(x^2-t^2)dt$，求证：$F'(x)=xf(x^2)$.

重庆邮电大学 **2010—2011** 学年第 一 学期

高等数学（上）（ A ）参考解答

一．求极限(每小题 5 分，共 15 分)

1． 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n(n+1)}{2(2+n)}-\frac{n}{2})=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+n-n(n+2)}{2(2+n)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-n}{4+2n}=-\frac{1}{2}$ **(5 分)**

2． 原式$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{2x(\sqrt{1+x}+1)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{2x(\sqrt{1+x}+1)}=\frac{1}{4}$ **(5 分)**

3． 原式$\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{2e^{2x}+e^{-x}-3}{\sin x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{4e^{2x}-e^{-x}}{\cos x}=3$ **(5 分)**

六．　求函数的导数(每小题 5 分，共 15 分)

1.解：$\frac{dy}{dx}=e^{x^2}+xe^{x^2}\cdot2x=(1+2x^2)e^{x^2}$ **(3 分)**

$\frac{d^2y}{dx^2}=4xe^{x^2}+(1+2x^2)2xe^{x^2}=2x(2x^2+3)e^{x^2}$ **(5 分)**

2． 解：将方程$x^2+y^2=r^2$两边对x求导，得$2x+2y\frac{dy}{dx}=0$，$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$ **(4 分)**

$dy=-\frac{x}{y}dx$ **(5 分)**

3． 解：将方程$y=x^2(\cos x)^{\sin x}$两边取对数，$\ln y=2\ln x+\sin x\cdot\ln(\cos x)$ **(1 分)**

将其两边对x求导，得$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{2}{x}+\cos x\ln(\cos x)+\sin x\frac{1}{\cos x}(-\sin x)$ **(3 分)**

$\frac{dy}{dx}=x^2(\cos x)^{\sin x}\cdot(\frac{2}{x}+\cos x\ln(\cos x)-\sin x\cdot\tan x)$ **(5 分)**

七．　求积分(每小题 6 分，共 30 分)

2． 原式$=\int e^{1-\frac{1}{x}}d(1-\frac{1}{x})=e^{1-\frac{1}{x}}+C$ **(6 分)**

3． 原式$=-2\int\arcsin\sqrt{x}d\sqrt{1-x}=-2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}+2\int\sqrt{1-x}d(\arcsin\sqrt{x})$ **(2 分)**

$=-2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}+2\int\sqrt{1-x}\frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$ **(4 分)**

$=-2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}+\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx==-2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C$ **(6 分)**

3．解：令 $x=\sin t$， $t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$， $\sqrt{1-x^2}=\cos t$， $dx=\cos t dt$， **(1 分)**

原式=$\int\frac{\cos t}{1+\cos t}dx$=$\int(1-\frac{1}{1+\cos t})dx$=$\int dt-\int\frac{1}{2\cos^2\frac{t}{2}}dx$=$t-\int\sec^2\frac{t}{2}d(\frac{t}{2})$ **(3 分)**

=$t-\tan\frac{t}{2}+C$=$t-\frac{\sin\frac{t}{2}}{\cos\frac{t}{2}}+C$=$t-\frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\cos^2\frac{t}{2}}+C$=$t-\frac{\sin t}{1+\cos t}+C$ **(5 分)**

=$\arcsin x-\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}+C$ **(6 分)**

4．解：令 $\sqrt{2x+1}=t$，则 $x=\frac{t^2-1}{2}$， $dx=tdt$， **(1 分)**

当 $x=0$ 时，$t=1$，当 $x=1$ 时，$t=\sqrt{3}$ **(2 分)**

原式=$\int_1^{\sqrt{3}}\frac{\frac{1}{2}(t^2-1)+3}{t}tdt=\frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{3}}(t^2+5)dt=\frac{1}{2}(\frac{t^3}{3}+5t)\Big|_1^{\sqrt{3}}=3\sqrt{3}-\frac{8}{3}$ **(6 分)**

5．解：$\int_{\frac{1}{e}}^{e}\ln|x|dx$=$\int_{\frac{1}{e}}^{1}(-\ln x)dx$+$\int_1^e\ln xdx$ **(1 分)**

=$-x\ln x\Big|_{\frac{1}{e}}^{1}$+$\int_{\frac{1}{e}}^{1}dx$+$x\ln x\Big|_1^e$-$\int_1^e dx$=$2(1-\frac{1}{e})$ **(6 分)**

八． 解答题(每小题 **6** 分，共 **18** 分)

4. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\le 1\\ ax+b, & x>1\end{cases}$，为使 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导， a、b 应取何值。

解：要使 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，必使 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续

$\lim\limits_{x\to1^{+0}}f(x)=\lim\limits_{x\to1^{+0}}(ax+b)=a+b$， $\lim\limits_{x\to1^{-0}}f(x)=\lim\limits_{x\to1^{-0}}x^2=1=f(1)$ **(1 分)**

$\lim\limits_{x\to1^{-0}}f(x)=\lim\limits_{x\to1^{+0}}f(x)=f(1)$，可得： $a+b=1$ **(2 分)**

$f_+'(1)=\lim\limits_{x\to1^{+0}}\frac{\mathrm{ax+b-1}}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^{+0}}\frac{\mathrm{ax-a}}{x-1}=a$ **(3 分)**

$f_-'(1)=\lim\limits_{x\to 1^{-0}}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^{-0}}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$ **(4 分)**

$f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，$f_-'(1)=f_+'(1)$，可得：$a=2$ **(5 分)**

当 $a=2$、$b=-1$ 时，$f(x)$ 在 $x=1$ 处可导。 **(6 分)**

5. 解：向量 $\vec{d}$ 垂直于向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$，

$$\vec{d}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})=\lambda\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}=(7\lambda,-7\lambda,-7\lambda),$$ **(3 分)**

由于 $\vec{d}$ 与 $\vec{c}$ 的数量积为 -6，$\vec{d}\cdot\vec{c}=-6$，即 $14\lambda+7\lambda-7\lambda=-6$， **(5 分)**

得 $\lambda=-\dfrac{3}{7}$，$\vec{d}=(-3,3,3)$ **(6 分)**

3. 求过点 $(1,-1,1)$ 且垂直于平面 $x-y+z=7$ 和 $3x+2y-12z+5=0$ 的平面方程。

解：平面 $x-y+z=7$ 的法向量为：$\vec{n}_1=(1,-1,1)$， **(1 分)**

平面 $3x+2y-12z+5=0$ 的法向量为 $\vec{n}_2=(3,2,-12)$， **(2 分)**

由于所求平面与这两个平面垂直，取所求平面的法向量为

$$\vec{n}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -12 \end{vmatrix}=(10,15,5),$$ **(4 分)**

所求平面的方程为：$10(x-1)+15(y+1)+5(z-1)=0$，即 $2x+3y+z=0$。

(6 分)

九.　　应用题**(每小题 6 分，共 12 分)**

1. 解：函数 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ 的定义域为在 $(-\infty,0)$、$(0,+\infty)$，

$x=0$ 为函数 $f(x)$ 的间断点 **(1 分)**

$y'=1-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x^2-1}{x^2}$，　令 $y'=0$，得 $x=\pm 1$ **(2 分)**

x	$(-\infty,-1)$	**-1**	$(-1,0)$	**(0,1)**	**1**	$(1,+\infty)$
y'	**+**	**0**	**-**	**-**	**0**	**+**

y	单调增加	极大值点	单调减少	单调减少	极小值点	单调增加

当 $x=-1$ 时, $f(x)$ 有极大值 $f(-1)=-2$,当 $x=1$ 时, $f(x)$ 有极小值 $f(1)=2$

(5 分)

$f(x)$ 的单调增加区间为 $(-\infty,-1)$ 、 $(1,+\infty)$ ， $f(x)$ 的单调减少加区间为 $(-1,0)$、$(0,1)$ 。 **(6 分)**

2．解：由 $\begin{cases} y=x^2 \\ x=y^2 \end{cases}$ ，得交点坐标为 $(0,0)$ 、 $(1,1)$ **(1 分)**

所求平面图形的面积为 $A=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)dx=(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}x^2)\Big|_0^1=\frac{1}{3}$ **(6 分)**

十． 证明题**(每小题 5 分，共 10 分)**

1．证：设 $f(x)=e^x-ex$， $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 内连续， **(1 分)**

$f'(x)=e^x-1$，当 $x>1$ 时, $f'(x)>0$， **(3 分)**

$f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 内单调增加，当 $x>1$ 时， $f(x)>f(1)=0$，即 $e^x>ex$ 。 **(5 分)**

2 证: $F(x)=\frac{-1}{2}\int_0^x f(x^2-t^2)d(x^2-t^2)\overset{u=x^2-t^2}{=}\frac{-1}{2}\int_{x^2}^0 f(u)du=\frac{1}{2}\int_0^{x^2} f(u)du$ **(3 分)**

$F'(x)=\frac{1}{2}f(x^2)(x^2)'=xf(x^2)$ **(5 分)**

年级：

专业：

班级：

姓名：

学号：

密 封 线

重庆邮电大学 2009/2010 学年 第一学期

《高等数学》（上） （A） 考试题

题 号	一	二	三	四	五	六	七	总分
分 数								
评 阅 人								

一． 单项选择题(本题共有 6 个小题，每小题 3 分，共 18 分)

1．当 $x\to 1$ 时，下列函数中与 $1-x$ 是等价无穷小的是（ ）

（A）$1-x^2$ （B）$1-x^3$ （C）x^2-1 （D）$\frac{1}{2}(1-x^2)$

2． $x=1$ 是函数 $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$ 的（ ）

(A)可去间断点 (B)跳跃间断点 (C)无穷间断点 (D)振荡间断点

3. 设 $\int f(x)dx=e^{2x}+C$，则 $f(x)$ 的导函数是( )。

（A）e^{2x} (B) $2e^{2x}$ (C) $4e^{2x}$ (D) $\frac{1}{2}e^{2x}$

4． 设 $f(x)$ 连续，则 $\dfrac{d}{dx}\int_x^0 tf(x^2-t^2)dt$ =( )

(A) $xf(x^2)$ (B) $-xf(x^2)$ (C) $2xf(x^2)$ (D) $-2xf(x^2)$

5．函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上二阶可导，$f(x)$ 为奇函数，在 $(0,+\infty)$ 上 $f'(x)>0$，$f''(x)<0$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上有（ ）

（A）$f'(x)<0$，$f''(x)<0$ （B）$f'(x)<0$，$f''(x)>0$

（C）$f'(x)>0$，$f''(x)<0$ （D）$f'(x)>0$，$f''(x)>0$

6．设向量 $\vec{a}=(-1,1,\sqrt{2})$，则向量 $\vec{a}$ 的方向余弦 $\cos\beta$ 是( )

(A) $-\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $\frac{1}{4}$

二． 填空题(本题共有 6 个小题，每小题 3 分，共 18 分)

1. 设函数 $f(x)=\begin{cases}2e^{x} & ,x<0\\ a+x^{2} & ,x\geq 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$____________。

2. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f'(0)=1$，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(2\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=$____________。

3. 设方程 $y^{5}+2y-x-3x^{7}=0$ 确定了隐函数 $y=y(x)$，则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=$____________。

4. 已知点 $(1,3)$ 是曲线 $y=ax^{3}+bx^{2}$ 的拐点，则 $b-a=$_________。

5. 反常积分 $\int_{0}^{+\infty}x^{2}e^{-x}dx=$____________。

6. 设向量 $\vec{a}=(-1,1,2)$ 与 $\vec{b}=(4,2,k)$ 垂直，则 $k=$____________。

一． 求极限(每小题 6 分，共 12 分)

1. 计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{2x+\sin x}{x+\cos x}+\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^{2x}\right]$

2. 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^{2}}-\dfrac{1}{x\tan x}\right)$

三. 求导数(每小题 6 分，共 12 分)

1．设 $y=x^2e^x+x^{\sin x}$．（$x>0$），求导数 $\dfrac{dy}{dx}$

2．求由参数方程 $\begin{cases} x=t-\ln(1+t) \\ y=t^3+t^2 \end{cases}$ 所确定的函数的导数 $\dfrac{dy}{dx}$、$\dfrac{d^2y}{dx^2}$

四. 求积分(每小题 6 分，共 12 分)

1．求不定积分 $\int(e^{2x+1}+\frac{\ln x}{x}+x\cos x)dx$

2．求定积分 $\int_1^4 \frac{dx}{x(1+\sqrt{x})}$

五. 证明题(每小题 6 分，共 12 分)

1．证明：方程 $x^3+x-1=0$ 在 $(0,1)$ 内有且仅有一个实根。

2． 证明： 当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$\tan x > x+\dfrac{1}{3}x^3$

六. 应用题(每小题 8 分，共 16 分)

1．要做一个容积为 3000m^3 的无盖圆柱形蓄水池，已知池底单位面积造价为池壁单位面积造价的 3 倍，问蓄水池底半径r和高h等于多少时才能使总造价最低？

2．设曲线$y=e^x$，$y=e^{-x}$及$x=1$所围成的平面图形为 D.

（1）求平面图形 D 的面积 ；

（2）求该平面图形 D 绕x轴旋转一周所成旋转体的体积.

《高等数学》（上）A 卷试题参考解答

一． 单项选择题(每小题 3 分，共 18 分)

1. D，2. A，3. C，4. B，5. D，6. B

二． 填空题(每小题 3 分，共 18 分)

1. **2**，2. 2，3. $\frac{1}{2}$，4. 6，5. 2，6. **1**。

三．求极限(每小题 6 分，共 12 分)

1．解：$\lim\limits_{x\to\infty}[\frac{2x+\sin x}{x+\cos x}+\left(\frac{x-1}{x}\right)^{2x}]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\cos x}{x}}+\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-x}\right)^{(-x)(-2)}$ （4 分）

$=2+e^{-2}$ （6 分）

2．解：$\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x})=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^2\tan x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}$ （2 分）

$\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-1}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{3x^2}=\frac{1}{3}$ （6 分）

四． 求导数(每小题 6 分，共 12 分)

1．解：$\frac{dy}{dx}=2xe^x+x^2e^x+(x^{\sin x})'$， （2 分）

设 $y_1=x^{\sin x}$，$\ln y_1=\sin x\cdot\ln x$，将上面的方程两边对 x 求导， （3 分）

$\frac{y_1'}{y_1}=\cos x\cdot\ln x+\frac{\sin x}{x}$，$y_1'=x^{\sin x}(\cos x\cdot\ln x+\frac{\sin x}{x})$ （5 分）

$\frac{dy}{dx}=(x^2+2x)e^x+x^{\sin x}(\cos x\cdot\ln x+\frac{\sin x}{x})$ （6 分）

2．解：$x=t-\ln(1+t)$，$\frac{dx}{dt}=1-\frac{1}{t+1}=\frac{t}{t+1}$，$y=t^3+t^2$，$\frac{dy}{dt}=3t^2+2t$，（2 分）

$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt}=3t^2+5t+2$ （3 分）

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})=\frac{\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx})}{\frac{dx}{dt}}=\frac{6t+5}{\frac{t}{t+1}}=6t+11+\frac{5}{t}$ （**6** 分）

五． 求积分(每小题 6 分，共 12 分)

1．解：原式$=\frac{1}{2}\int e^{2x+1}d(2x+1)+\int\frac{\ln x}{x}dx+\int xd(\sin x)$ （2 分）

$=\frac{1}{2}e^{2x+1}+\int\ln xd(\ln x)+x\sin x-\int\sin xdx$ （4 分）

$=\frac{1}{2}e^{2x+1}+\frac{1}{2}(\ln x)^2+x\sin x+\cos x+C$ （6 分）

2．解：令$\sqrt{x}=t$，则$x=t^2,dx=2tdt$，当$x=1$时，$t=1$，当$x=4$时，$t=2$，（2 分）

$\int_1^4\frac{dx}{x(1+\sqrt{x})}=\int_1^2\frac{2tdt}{t^2(1+t)}=2\int_1^2\frac{dt}{t(1+t)}=2\int_1^2(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1})dt=2\ln\frac{t}{t+1}\Big|_1^2=4\ln 2-2\ln 3$ （6 分）

六． 证明题(每小题 6 分，共 12 分)

1．证：设$f(x)=x^3+x-1$，显然$f(x)$在$[0,1]$上连续， （1 分）

$f(0)=-1<0$，$f(1)=1>0$，由零点存在定理知，至少存在一点$\xi\in(0,1)$，

使得$f(\xi)=0$，故$f(x)=0$在$(0,1)$内至少有一个根。 （4 分）

$f'(x)=3x^2+1>0$，$f(x)$严格单调增加，$f(x)=0$在$(0,1)$内只有一个根。（6 分）

2． 证： 设$f(x)=\tan x-x-\frac{1}{3}x^3$ ，$f(x)$在$[0,\frac{\pi}{2})$内连续 （1 分）

$f'(x)=\sec^2 x-1-x^2=\tan^2 x-x^2=(\tan x+x)(\tan x-x)$ （3 分）

$x\in(0,\frac{\pi}{2})$，$\tan x>x>0$，$f'(x)>0$，$f(x)$在$[0,\frac{\pi}{2})$内单调增加，（5 分）

当$0<x<\frac{\pi}{2}$时，$f(x)>f(0)=0$，即$\tan x>x+\frac{1}{3}x^3$ （6 分）

六．应用题(每小题 8 分，共 16 分)

解：设蓄水池底半径和高分别为r、h (m)，池壁的造价为a（元/m^2），池底的造价为$3a$（元/m^2），则$\pi r^2h=3000$，$h=\frac{3000}{\pi r^2}$ （1 分）

则总造价为$P=3a\pi r^2+2a\pi rh=a(3\pi r^2+\frac{6000}{r})$，$\frac{dP}{dr}=a(6\pi r-\frac{6000}{r^2})$， （3 分）

令$\frac{dP}{dr}=a(6\pi r-\frac{6000}{r^2})=0$，得$r_0=\frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}$，$\frac{d^2P}{dr^2}\Big|_{r_0}=a(6\pi+\frac{12000}{r^3})\Big|_{r_0}>0$ （4 分）

$r=\frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}$是$P=a(3\pi r^2+\frac{6000}{r})$的唯一极小值点，（6分）

函数$P=a(3\pi r^2+\frac{6000}{r})$在$r=\frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}$有最小值，（7分）

蓄水池底半径$r=\frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}$、高$h=\frac{30}{\sqrt[3]{\pi}}$时，总造价最低。（8分）

2．解：（1）平面图形D的面积为：

$$A=\int_0^1(e^x-e^{-x})dx==(e^x+e^{-x})\Big|_0^1=e+e^{-1}-2$$（4分）

（2）平面图形D绕x轴旋转一周所成旋转体的体积为：

$$V=\pi\int_0^1[(e^x)^2-(e^{-x})^2]dx=\pi\int_0^1(e^{2x}-e^{-2x})dx=\frac{\pi}{2}(e^{2x}+e^{-2x})\Big|_0^1$$（7分）

$$=\frac{\pi}{2}(e^2+e^{-2}-2)$$（8分）

密

封

线

重庆邮电大学 2008—2009 学年第 一 学期

高等数学（上） 考试题 （A 卷）

题号	一	二	三（1-2）	三（3-5）	三（6--7）	四	五	总分
分数								
评卷人								

一、填空题(本大题共 6 小题，每小题 3 分，共 18 分)。

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\sin\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}\sin x\right)=$________________.

2. 设 $y=xe^{x}$，则 $y^{(n)}=$____________.

3. $\int xe^{-x^2}dx=$________________.

4. $\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{1+x^2}dx=$________________.

5. 设方程 $y=1+xe^{y}$ 确定了隐函数 $y=y(x)$，则 $\dfrac{dy}{dx}=$__________.

6. 直线 $x-1=\dfrac{y}{-4}=z+3$ 和直线 $\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z}{1}$ 的夹角为__________.

二. 选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设 $f(x)=\int_0^x\sin t^2dt$，$g(x)=x^3+x^4$，则当 $x\to0$ 时，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的（ ）。

(A) 等价无穷小 (B) 同阶非等价无穷小

(C) 高阶无穷小 (D) 低阶无穷小

2．设 $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$，则 $x=1$ 是函数 $f(x)$ 的（　　）。

（A）可去间断点　（B）连续点　（C）无穷间断点　（D）跳跃间断点

3．设 $f(t)$ 在 $[1,+\infty)$ 上连续，$f(1)=0, \int_1^{x^3} f(t)dt=\ln x$ 则 $f(e)=$（　　）。

（A）$\dfrac{1}{3}$，（B）$\dfrac{1}{3e}$，　（C）0；　（D）e.

4．$\int \dfrac{e^x}{e^{2x}+1}dx=$（　　）。

（A）$\ln(e^{2x}+1)+C$　　（B）$\arctan(e^{2x})+C$

（C）$\arctan(e^x)+C$　　（D）$\tan(e^x)+C$

5．直线 $L:\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-3}{-4}$ 与平面 π：$x+y+z=3$ 的位置关系是（　　）。

（A）L 与 π 平行但 L 不在 π 上　　（B）L 与 π 垂直相交

（C）L 在 π 上　　（D）L 与 π 相交但不垂直。

三 计算题（每小题 6 分，共 42 分）

1．求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

2．设 $\begin{cases} x=2+3\cos t \\ y=3\sin t \end{cases}$，求 $\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2}$

3. 求函数 $y=\ln(x^2+1)$ 的图形的拐点和凹凸区间

4. 求 $\int \arctan\sqrt{x}dx$

5. $f(x)=\begin{cases} xe^{-x^2} & x\geq 0 \\ \dfrac{1}{1+\cos x} & -1<x<0 \end{cases}$，求 $\int_1^4 f(x-2)dx$

6．求过点 $p_0(4,2,3)$，与平面 $\prod: x+y+z-10=0$ 平行且与直线

$L:\begin{cases} x+2y-z-5=0 \\ z-10=0 \end{cases}$ 垂直的直线方程。

7．设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2e^{n(x-1)}+ax+b}{e^{n(x-1)}+1}$，试确定常数 a、b 的值，使 $f(x)$ 处处可导,并求

$f(x)$

密

封

线

四 应用题（第 1 小题 7 分，第 2 小题 8 分，共 15 分）

1.求由曲线 $y=e^{-x}$ 与直线 $x=0$、$x=1$、$y=0$ 所围成的平面图形绕 y 轴旋转一周而成的旋转体的体积.

2. 要制作一个下部为矩形，上部为半圆形的窗户，半圆的直径等于矩形的宽，要求窗户的周长为定值 l，问矩形的宽和高各为多少时，窗户的面积 A 最大？

五．证明题（每小题 5 分，共 10 分）：

1．设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，证明：存在点 $\xi\in(0,1)$，使 $\xi f'(\xi)+f(\xi)=f'(\xi)$．

2．证明：当 $x<1$ 时，$e^x\le\dfrac{1}{1-x}$．

《高等数学（上）》（2008-20090 考试题（A 卷）

参考答案

一、选择题（每小题 3 分，共 18 分）

1、1；2、$(x+n)e^x$；3、$-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$；4、$\frac{\pi}{2}$；5、$\frac{e^y}{1-xe^y}$或$\frac{e^y}{2-y}$；6、$\frac{\pi}{4}$；

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1、B ；2、A 3、B 4、C 5、C

三、计算题（每小题 6 分，共 42 分）

1、$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2x\cos x}}=e^{-\frac{1}{2}}$；（6 分）

2、$\frac{dy}{dt}=3\cos t,\frac{dx}{dt}=-3\sin t$，$\frac{dy}{dx}=\frac{3\cos t}{-3\sin t}=-\cot t$；（3 分）

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(-\cot t)=\frac{d(-\cot t)}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{\csc^2 t}{-3\sin t}=-\frac{1}{3}\csc^3 t$ （6 分）

3. 函数 $y=\ln(x^2+1)$ 在$(-\infty,+\infty)$内连续且可导，

$\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{1+x^2}$，$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2(1-x^2)}{1+x^2}$。由$\frac{d^2y}{dx^2}=0$得$x=\pm 1$（2 分），

当$x\in(-\infty,-1)$或$x\in(1,+\infty)$时，$y''<0$，函数$y=\ln(x^2+1)$图形上凸（3 分），

当$x\in(-1,1)$时，$y''>0$，函数$y=\ln(x^2+1)$图形上凹，（4 分）；

函数$y=\ln(x^2+1)$图形的凹区间为$[-1,1]$，凸区间为$(-\infty,-1],[1,+\infty)$，（5 分）

拐点为$(\pm 1,\ln 2)$（6 分）

4、令$\sqrt{x}=t$，$x=t^2,dx=2tdt$，原式$=2\int t\arctan t dt=\int \arctan t d(t^2)$ （2 分）

$=t^2\arctan t-\int\frac{t^2}{1+t^2}dt=t^2\arctan t-\int(1-\frac{1}{1+t^2})dt=(t^2+1)\arctan t-t+C$ （5 分）

$=(x+1)\arctan\sqrt{x}-\sqrt{x}+C$ （6 分）

5、$\int_1^4 f(x-2)dx\overset{t=x-2}{=}\int_{-1}^2 f(t)dt=\int_{-1}^0\frac{1}{1+\cos t}dt+\int_0^2 te^{-t^2}dt$ （3 分）

$=[\tan\frac{t}{2}]_{-1}^0-[\frac{1}{2}e^{-t^2}]_0^2=\tan\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-4}+\frac{1}{2}$ （6 分）

6．解：$L:\begin{cases}x+2y-z-5=0\\ z-10=0\end{cases}$ 的方向向量为 $\vec{s}=\begin{vmatrix}i & j & k\\ 1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=2i-j$ （2分）

所求直线的方向向量为 $\vec{s_1}=(2i-j)\times(i+j+k)=\begin{vmatrix}i & j & k\\ 2 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=-i-2j+3k$ （4分）

所求直线的方程为：$\dfrac{x-4}{-1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-3}{3}$，（6分）

7．解：$f(x)=\begin{cases}ax+b & ,x<1\\ \dfrac{a+b+1}{2} & ,x=1\\ x^2 & ,x>1\end{cases}$ 要使 $f(x)$ 处处可导，只要 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导（1分）

$f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，$f(1+0)=f(1-0)$，得 $a+b=1$（2分）

$f'_+(1)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$，（3分）

$f'_-(1)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{ax+b-1}{x-1}=a$ （4分）

要使 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，$f'_+(1)=f'_-(1)$，可得 $a=2$，$b=-1$ （5分）

$f(x)=\begin{cases}2x-1 & ,x\le1\\ x^2 & ,x>1\end{cases}$ （6分）

四．应用题

1．$V=\int_0^1 2\pi xf(x)dx=2\pi\int_0^1 xe^{-x}dx=-2\pi\{[xe^{-x}]_0^1-\int_0^1 e^{-x}dx\}=2\pi(1-2e^{-1})$ （7分）

2．设问矩形的宽和高各分别为 x,y，则 $\dfrac{\pi}{2}x+x+2y=l$，$A=xy+\dfrac{1}{8}\pi x^2$ （2分）

$A=\dfrac{l}{2}x-\dfrac{1}{8}\pi x^2-\dfrac{x^2}{2}$，$\dfrac{dA}{dx}=\dfrac{l}{2}-\dfrac{1}{4}\pi x-x$，$\dfrac{dA}{dx}=0$，$x=\dfrac{4l}{2(\pi+4)}$，$\dfrac{d^2A}{dx^2}=\dfrac{1}{4}\pi-1<0$

$x=\dfrac{2l}{\pi+4}$ 为面积函数 A 的唯一极大值点，面积有最大值，$y=\dfrac{l}{\pi+4}$ （7分）

当 $x=\dfrac{2l}{\pi+4}$，$y=\dfrac{l}{\pi+4}$ 面积有最大值，（8分）

五、证明题（每小题5分，共10分）

1、证明：令 $F(x)=(x-1)f(x)$，$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，（1分）

$F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，$F(0)=F(1)=0$ $F(a)<0$，$F(b)>0$，（4分）

根据罗尔定理，至少有一点 $\xi\in(0,1)$，使 $F'(\xi)=0$ J即 $\xi f'(\xi)+f(\xi)=f'(\xi)$．（5分）。

2、证：设 $f(x)=(1-x)e^x-1$，由于函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上连续且可导，（1 分）

$f'(x)=-xe^x$，当 $x<0$ 时，$f'(x)=-xe^x>0$，$f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，

当 $0<x<1$ 时，$f'(x)=-xe^x<0$，$f(x)$ 在 $[0,1)$ 上单调递减，（4 分）

当 $x<1$ 时，$f(x)<f(0)=0$，$(1-x)e^x-1<0$，$e^x\le\dfrac{1}{1-x}$（5 分）