第 1 章 绪论

一、选择题（四个选项中仅有一项符合题目要求，每小题 3 分，共计 15 分)

1、近似数 $x^*=0.231$ 关于真值 $x=0.229$ 有（　　　）位有效数字。

（1）1；（2）2；（3）3；（4）4。

2、取 $\sqrt{3}\approx 1.732$ 计算 $x=(\sqrt{3}-1)^4$，下列方法中哪种最好？（　　　）

(1) $28-16\sqrt{3}$；　(2) $(4-2\sqrt{3})^2$；　(3) $\frac{16}{(4+2\sqrt{3})^2}$；　(4) $\frac{16}{(\sqrt{3}+1)^4}$。

3、下列说法中不属于数值方法设计中的可靠性分析的是（　　　）。

（1）方法收敛性；（2）方法的稳定性；（3）方法的计算量；（4）方法的误差估计。

4、下列说法错误的是（　　　）。

（1）如果一个近似数的每一位都是有效数字，则称该近似数为有效数；

（2）凡是经“四舍五入”得到的近似数都是有效数；

（3）数值方法的稳定性是指初始数据的扰动对计算结果的影响；

（4）病态问题是由数学问题本身的性质决定的，与数值方法有关。

5、已知近似数 x^* 的相对误差限为 0.3%，则 x^* 至少有（　　　）位有效数字。

（1）1；　（2）2；　（3）3；　（4）5。

二、填空题（每小题 3 分，共计 15 分）

1、设 π 的近似数 π^* 有 4 位有效数字，则其相对误差限为______________。

2、$\sqrt{x^*}$ 的相对误差约是 x^* 的相对误差的__________倍。

3、计算球体积时要使相对误差限为 10%，问测量半径时允许的相对误差限是____________。

4、规格化浮点数系 $F=(2,4,-1,2)$ 中一共有_____________个数

5、用数 $\frac{1}{2}[1+e^{-1}]$ 作为计算积分 $I=\int_0^1 e^{-x}dx$ 的近似值，产生的主要误差是_____________。

三、（13 分）对于有效数 $x_1^*=-3.105, x_2^*=0.001, x_3^*=0.100$，估计下列算式是相对误差限

$$y_1=x_1^*+x_2^*+x_3^*;\quad y_2=x_1^*x_2^*x_3^*;\quad y_3=x_2^*/x_3^*。$$

四、（16 分）写出下列各题的合理计算路径，使计算结果更精确（不必计算结果），并说明理由。

（1）$\frac{1-\cos x}{\sin x}$，　$x\neq 0$且$|x|<<1$；　　（2）$\frac{1}{1+2x}-\frac{1-x}{1+x}$，　$|x|<<1$；

（3）$\sqrt{x+\frac{1}{x}}-\sqrt{x-\frac{1}{x}}$, $x>>1$；（4）$\int_x^{x+1}\frac{dt}{1+t^2}$, $|x|<<1$；

五、（15 分）设序列$\{y_n\}$满足递推关系 $y_n=10\,y_{n-1}-1, n=1,2,\cdots$，若 $y_0=\sqrt{2}\approx 1.41$，计算到 y_{10} 时误差有多大？计算过程是否稳定？如果不稳定，试给出一种稳定的计算方法，并说明理由。

六、（13 分）已测得某场地长 x 的值为 $x^*=110$ 米，宽 y 的值为 $y^*=80$ 米，已知 $|x-x^*|\le 0.2$ 米，$|y-y^*|\le 0.1$ 米。试求面积 $s=xy$ 的绝对误差限和相对误差限。

七、（13 分）设 x 的近似数 x^* 表示为 $x^*=\pm 0.a_1a_2\cdots a_k\cdots a_n\times 10^m$，证明：若 a_k 是有效数字，则其相对误差不超过 $\frac{1}{2}\times 10^{-(k-1)}$；若已知相对误差 e_r^*，且 $|e_r^*|\le\frac{1}{2}\times 10^{-k}$，则 a_k 必为有效数字。

。

第 1 章 绪论 参考答案

一、选择题（15 分，每小题 3 分)

1、(2) 2、 (3) 3、(3) 4、(4) 5、（2）

二、填空题（15 分，每小题 3 分）

1、$\frac{1}{2}\times10^{-3}$；2、$\frac{1}{2}$；3、$\frac{1}{30}$；4、33；5、截断（方法）误差

(1/2*10^-3)/3.142

三、（13 分）

解：已知有效数的绝对误差限为 $e(x_1^*)=e(x_2^*)=e(x_3^*)=0.0005$， -------------（2 分）

从而相对误差限为

$$e_r(x_1^*)=0.00016, e_r(x_2^*)=0.5, e_r(x_3^*)=0.005,$$

$$e_r(y_1^*)\approx e(x_1^*)+e(x_2^*)+e(x_3^*)=0.0015,$$ --------------------------------（4 分）

由绝对误差限的传播关系式得

$$e(y_2^*)\approx|x_2^*x_3^*|e(x_1^*)+|x_1^*x_3^*|e(x_2^*)+|x_1^*x_2^*|e(x_3^*),\quad e(y_3^*)\approx\left|\frac{1}{x_3^*}\right|e(x_2^*)+\left|\frac{x_2^*}{(x_3^*)^2}\right|e(x_3^*),$$

--------------------------------（7 分）

所求算式的相对误差限为

$$e_r(y_1^*)\approx e(y_1^*)\Big/|y_1^*|\le 0.0015\big/3.004\approx0.0005,$$

$$e_r(y_2^*)\approx e(y_2^*)\Big/|y_2^*|\le e_r(x_1^*)+e_r(x_2^*)+e_r(x_3^*)\approx0.50516,$$

$$e_r(y_3^*)\approx e(y_3^*)\Big/|y_3^*|\approx e_r(x_2^*)+e_r(x_3^*)=0.505。$$ --------------------------------（13 分）

四、（16 分）

解：（1）$\frac{1-\cos x}{\sin x}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}cox\frac{x}{2}}=\tan\frac{x}{2}$（避免很小的数作除数）；------（4 分）

（2）$\frac{1}{1+2x}-\frac{1-x}{1+x}=\frac{2x^2}{(1+2x)(1+x)}$（避免相近的数相减）；-----------------（8 分）

（3）$\sqrt{x+\frac{1}{x}}-\sqrt{x-\frac{1}{x}}=\dfrac{\frac{2}{x}}{\sqrt{x+\frac{1}{x}}+\sqrt{x-\frac{1}{x}}}=\dfrac{2}{x(\sqrt{x+\frac{1}{x}}+\sqrt{x-\frac{1}{x}})}$（理由同（2））；

--------------------------------（12 分）

（4）$\int_{x}^{x+1}\frac{dt}{1+t^2}=\arctan(x+1)-\arctan(x)=\arctan\frac{1}{1+x+x^2}$（理由同（2））

（利用公式 $\tan(x-y)=\dfrac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\tan y}$ 即得）。--------------------------------（16 分）

五、（15 分）

解：$y_0^*=1.41$，则 $|e_0^*|=|y_0-y_0^*|=\frac{1}{2}\times10^{-2}$，--------------------------------（2 分）

根据递推公式得到：

$$|e_n^*|=|y_n-y_n^*|=|10y_{n-1}-10y_{n-1}^*|=10|y_{n-1}-y_{n-1}^*|$$ --------------------------------（6 分）

$$=10|e_{n-1}^*|=\cdots=10^n|e_0^*|$$

当 $n=10$ 时，$|e_{10}^*|=10^{10}|e_0^*|=10^{10}\times\frac{1}{2}\times10^{-2}=\frac{1}{2}\times10^{8}$，故该方法不稳定。---（9 分）

将递推公式改写为 $y_{n-1}=\frac{1}{10}y_n+\frac{1}{10},n=1,2,\cdots$，--------------------------------（12 分）

则有 $|e_{n-1}^*|=|y_{n-1}-y_{n-1}^*|==\frac{1}{10}|y_n-y_n^*|$，$|e_{n-2}^*|=\frac{1}{10}|y_{n-1}-y_{n-1}^*|=\frac{1}{10^2}|y_n-y_n^*|$，

$|e_0^*|==\frac{1}{10^n}|y_n-y_n^*|$，--------------------------------（14 分）

由此可以看出，如果倒着计算，误差会递减，但必须知道 y_n 的值。-----------（15 分）

六、（13 分）

解：因为 $s=xy,\frac{\partial s}{\partial x}=y,\frac{\partial s}{\partial y}=x$，--------------------------------（2 分）

$\varepsilon(x^*)=0.2$，$\varepsilon(y^*)=0.1$，--------------------------------（6 分）

绝对误差限　$\varepsilon(s^*)=\varepsilon(x^*y^*)\approx|x^*|\varepsilon(y^*)+|y^*|\varepsilon(x^*)=110\times0.1+80\times0.2=27$；

------------------------------（10 分）

相对误差限 $\varepsilon_r(s^*)=\dfrac{\varepsilon(s^*)}{s^*}\approx\dfrac{27}{110\times 80}=0.31\%$。-----------------------------（13 分）

七、（13 分）

解：a_k 是有效数字，根据有效数字的定义知 $\left|x^*-x\right|\le\dfrac{1}{2}\times 10^{m-k}$，-----------（3 分）

且 $\left|x^*\right|\ge 1\times 10^{-1}\times 10^{m}=10^{m-1}$，-------------------------------（5 分）

$$\therefore\quad \left|e_r^*\right|=\left|\frac{x^*-x}{x^*}\right|\le \frac{1}{2}\times 10^{m-k}\Big/10^{m-1}=\frac{1}{2}\times 10^{-(k-1)}$$ 。-----------------------------（8 分）

另一方面，$\left|x^*\right|\le 10^{m}$，$\left|e_r^*\right|=\left|\dfrac{x^*-x}{x^*}\right|\le\dfrac{1}{2}\times 10^{-k}$，------------------------------（10 分）

$$\therefore\quad \left|x^*-x\right|\le\frac{1}{2}\times 10^{-k}\times\left|x^*\right|\le\frac{1}{2}\times 10^{m-k},$$ -------------------------------（12 分）

所以 a_k 必为有效数字，即 x^* 至少有 k 位有效数字。------------------------------（13 分）

第 2 章 非线性方程（组）的数值解法

一、选择题（四个选项中仅有一项符合题目要求，每小题 3 分，共计 15 分)

1、已知方程 $x^3-2x-5=0$ 在区间 $[2,3]$ 存在唯一正根，若用二分法计算，至少迭代（ C ）次可以保证误差不超过 $\frac{1}{2}\times10^{-3}$。

(1) 5； (2) 7； (3) 10； (4) 12。

2、已知求方程 $f(x)=0$ 在区间 $[a,b]$ 上的根的不动点迭代为 $x_{k+1}=\varphi(x_k),k=0,1,2,\cdots$，对于其产生的数列 $\{x_k\}$，下列说法正确的是（ D ）

(1) 若数列 $\{x_k\}$ 收敛，则迭代函数 $\varphi(x)$ 唯一；

(2) 若对 $\forall x\in[a,b],|\varphi'(x)|<1$，则 $\{x_k\}$ 收敛；

(3) 若 $\forall x\in[a,b],|\varphi'(x)|>1$，则 $\{x_k\}$ 收敛；

(4)若 $\forall x\in[a,b],|\varphi'(x)|\le L<1$，则 $\{x_k\}$ 收敛。

3、若迭代法 $x_{k+1}=ax_k+\frac{2\sqrt{2}}{3x_k^2}$ 收敛于 $\sqrt{2}$，且要求收敛阶尽量高，则 a 的值为（ B ）。

(1) $\frac{1}{3}$； (2) $\frac{2}{3}$； (3) $\frac{1}{\sqrt{3}}$； (4) $\frac{\sqrt{2}}{3}$。

4、求方程根的二分法的收敛阶为（ A ）

（1）线性收敛；（2）超线性收敛；（3）平方收敛；（4）局部平方收敛。

5、解非线性方程 $f(x)=0$ 的牛顿迭代法的收敛阶为（ D ）。

（1）线性收敛；（2）局部线性收敛；（3）平方收敛；（4）局部平方收敛。

二、填空题（每小题 3 分，共计 15 分）

1、若使迭代公式 $x_{k+1}=px_k+\frac{qa}{x_k^2}+\frac{ra^2}{x_k^5}$ 产生的序列收敛到 $\sqrt[3]{a}$，并使其收敛阶尽可能高，则常数 p,q,r 的值分别为 P-2q-5r=0。

2、设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有足够阶连续导数，$p\in[a,b]$ 为 $f(x)$ 的一个 m 重零点，则迭代公式 $x_{k+1}=x_k-m\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ 的收敛阶至少是________。

3、求方程根的割线法的收敛阶为____________。

4、设向量函数 $F(x,y)=\begin{bmatrix} x^3-2y^2 \\ x^2+xy^2 \end{bmatrix}$，则其导函数在点 $(1,2)$ 值 $F'(1,2)=$ ____________。

5、求 $\sqrt{5}$ 的 **Newton** 迭代格式为________________。

三、（12 分）已知方程 $2x-\sin x-2=0$ 在 $[\frac{1}{2},\frac{\pi}{2}]$ 内存在唯一根，（1）试建立一种收敛于方程根的迭代方法，并说明收敛的理由；（2）写出相应的 **Steffenson** 迭代格式，并以 $x_0=1.5$ 为初值迭代一步。

四、（12 分）应用牛顿法于方程 $f(x)=x^n-a=0$ 和 $f(x)=1-\frac{a}{x^n}=0$，分别导出求 $\sqrt[n]{a}$ 的迭代公式，并求极限 $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{\sqrt[n]{a}-x_{k+1}}{(\sqrt[n]{a}-x^k)^2}$。

五、（12）方程 $x^3-6x-8=0$ 在 $x=3$ 附近有根，把方程写成三种不同的等价形式 (1) $x=\sqrt[3]{6x+8}$ 对应迭代格式 $x_{n+1}=\sqrt[3]{6x_n+8}$；(2) $x=\sqrt{6+\frac{8}{x}}$ 对应迭代格式 $x_{n+1}=\sqrt{6+\frac{8}{x_n}}$；(3) $x=x^3-5x-8$ 对应迭代格式 $x_{n+1}=x_n^3-5x_n-8$。判断迭代格式在 $x_0=3$ 的收敛性，选一种收敛格式计算 $x=3$ 附近的根，精确到小数点后第二位。

六、（12 分）对于下列两个方程，（1）$x=\frac{\cos x+\sin x}{4}$，（2）$x=4-2^x$，问能不能用迭代法求解？如果不能时，试将方程改写成能用迭代法求解的形式，并说明理由。

七、（12 分）考虑下述修正的牛顿迭代公式：

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{D_n},D_n=\frac{f(x_n+f(x_n))-f(x_n)}{f(x_n)},n\geq 0$$

假定 $f'(x^*)\neq 0$，证明它对单根是一个二阶方法。

八、（10 分）设 $\varphi(x)=x+x^3$，$x=0$ 为 $\varphi(x)$ 的一个不动点，验证下列迭代法 $x_{k+1}=\varphi(x_k),x_0\neq 0$ 不收敛，但改用斯蒂芬森迭代却是收敛的；并说明斯蒂芬森迭代计算 $\varphi(x)$ 的不动点 $x=0$ 时的收敛阶。

第 2 章 非线性方程（组）的数值解法 参考答案

一、选择题（15 分，每小题 3 分)

1、(3)　2、(4)　3、(2)　4、(1)　5、(4)

二、填空题（15 分，每小题 3 分）

1、$p=q=\frac{5}{9}, r=\frac{1}{9}$；2、2；3、1.618 或 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$；4、$F'(1,2)=\begin{bmatrix}3 & -8\\ 6 & 4\end{bmatrix}$；5、$x_{k+1}=\frac{x_k}{2}+\frac{5}{2x_k}$

三、（12 分）

解：（1）$2x-\sin x-2=0 \Rightarrow x=1+\frac{1}{2}\sin x$，，迭代函数 $\varphi(x)=1+\frac{1}{2}\sin x$，迭代格式

$x_{k+1}=1+\frac{1}{2}\sin x_k; k=0,1,2,\cdots$ --（3 分）

当 $x\in[0.5,\frac{\pi}{2}]$ 时，$|\varphi'(x)|=\left|\frac{1}{2}\cos x\right|\le\frac{1}{2}=L<1$，故该迭代格式收敛。------------（6 分）

相应的 **Steffenson** 迭代格式：$x_{k+1}=x_k-\frac{(\varphi(x_k)-x_k)^2}{(\varphi(\varphi(x_k))-2\varphi(x_k)+x_k)}; k=0,1,2,\cdots$ --（9 分）

$$x_{k+1}=x_k-\frac{(1+\frac{1}{2}\sin x_k-x_k)^2}{[1+\frac{1}{2}\sin(1+\frac{1}{2}\sin x_k)-2(1+\frac{1}{2}\sin x_k)+x_k]}; k=0,1,2,\cdots$$

$x_1=1.5-\frac{(1+\frac{1}{2}\sin 1.5-1.5)^2}{[1+\frac{1}{2}\sin(1+\frac{1}{2}\sin 1.5)-2(1+\frac{1}{2}\sin 1.5)+1.5]}=1.4987$。---------------------（12 分）

四、（12 分）

解：对于 $f(x)=x^n-a, f'(x)=nx^{n-1}$，因此牛顿迭代法为

$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k^n-a}{nx_k^{n-1}}=\frac{1}{n}[(n-1)x_k+\frac{a}{x_k^{n-1}}], k=0,1,2,\ldots$ ------------------------------------（3 分）

而且 $\varphi''(\sqrt[n]{a})=\frac{n-1}{\sqrt[n]{a}}$，$\lim\limits_{k\to\infty}\frac{(\sqrt[n]{a}-x_{k+1})}{(\sqrt[n]{a}-x_k)^2}=-\frac{1}{2}\frac{n-1}{\sqrt[n]{a}}$； ---------------------------------------（6 分）

对于方程 $f(x)=1-\frac{a}{x^n}, f'(x)=\frac{na}{x^{n+1}}$，牛顿迭代法为

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}=\frac{x_k}{n}[(n+1)-\frac{x_k^n}{a}],k=0,1,2,\ldots$$ ，---------------------------------- （9 分）

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt[n]{a}-x_{k+1}}{(\sqrt[n]{a}-x_k)^2}=\frac{1}{2}\frac{n+1}{\sqrt[n]{a}}$$ 。--- （12 分）

五、（12 分）

解：(1) $\varphi'(x)=\frac{6}{3}(6x+8)^{-\frac{2}{3}}$，$|\varphi'(3)|=2(18+8)^{-\frac{2}{3}}<0.22788<1$，迭代格式收敛。---（3 分）

(2) $\varphi'(x)=-\frac{4}{x^2}(6x+8)^{-\frac{1}{2}}$，$|\varphi'(2)|=\frac{4}{9}(18+8)^{-\frac{1}{2}}<0.087163<1$，迭代格式收敛。（6 分）

(3) $\varphi'(x)=3x^2-5$，$|\varphi'(2)|=22>1$，迭代格式发散。------------------------------------ （9 分）

选择格式(1)计算

k	0	1	2	3
x_k	3	2.9625	2.9539	2.9520

--- （12 分）

六、（12 分）

解：（1）$\forall x,|\varphi'(x)|=\left|\frac{-\sin x+\cos x}{4}\right|\le\frac{2}{4}=L<1$，故方程（1）能用迭代法求根。-（3 分）

?、

（2）对于方程（2），若直接取迭代函数 $\varphi(x)=4-2^x$，方程为 $f(x)=x-4+2^x$，

$f(1)<0, f(2)>0$，有根区间为 $[1,2]$，此时 $|\varphi'(x)|=|-2^x\ln 2|>2\ln 2>1$，

故不能用该迭代法求解。-- （6 分）

将原方程改写为 $x=\frac{\ln(4-x)}{\ln 2}$，迭代函数 $\varphi(x)=\frac{\ln(4-x)}{\ln 2}$，---------------------------- （9 分）

且有 $|\varphi'(x)|=\left|\frac{-1}{4-x}\cdot\frac{1}{\ln 2}\right|<\frac{1}{2\ln 2}=L<1$，故此时可以用迭代法求根。--------------- （12 分）

?

七、（12 分）

证明：将 D_n 中 $f(x_n+f(x_n))$ 在 x_n 处展开，得

$$f(x_n+f(x_n))=f(x_n)+f'(x_n)f(x_n)+\frac{1}{2}f''(\xi)f^2(x_n)$$ ，---------------------------- （2 分）

其中 ξ 介于 x_n 和 $x_n+f(x_n)$ 之间。

此时 $D_n=\dfrac{\left[f(x_n)+f'(x_n)f(x_n)+\frac{1}{2}f''(\xi)f^2(x_n)-f(x_n)\right]}{f(x_n)}=f'(x_n)+\frac{1}{2}f''(\xi)f(x_n)$----------（4 分）

又由于 x^* 是 $f(x)=0$ 的单根，故 $f(x)$ 可表示为 $f(x)=\dfrac{h(x)(x-x^*)}{\cancel{h(x)}},h(x^*)\neq 0$，---（6 分）

所以

$$f'(x_n)=h(x_n)+(x_n-x^*)h'(x_n)$$

$$x_{n+1}-x^*=x_n-x^*-f(x_n)/D_n=x_n-x^*-(x_n-x^*)h(x_n)/\left[f'(x_n)+\frac{1}{2}f''(\xi)f(x_n)\right]$$

$$=(x_n-x^*)\left\{1-h(x_n)/\left[h(x_n)+(x_n-x^*)h'(x_n)+\frac{1}{2}f''(\xi)f(x_n)\right]\right\}$$ -（9 分）

$$=\frac{(x_n-x^*)^2\left[h'(x_n)+\frac{1}{2}h(x_n)f''(\xi)\right]}{h(x_n)+(x_n-x^*)\left[h'(x_n)+\frac{1}{2}h(x_n)f''(\xi)\right]}$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}-x^*}{(x_n-x^*)^2}=\dfrac{h'(x^*)+\frac{1}{2}h(x^*)f''(x^*)}{h(x^*)}$，即迭代格式至少是二阶收敛的。---（12 分）

八、（10 分）

解：由于 $\varphi'(x)=1+3x^2$，当 $x\neq 0$ 时，$|\varphi'(x)|>1$，---------------------------------------（2 分）

且有 $|x_{k+1}-0|=|\varphi(x_k)-0|=|\varphi'(\xi)(x_k-0)|$，$\xi$ 介于 x_k 与 $\mathbf{0}$ 之间，--------------------（5 分）

若 $x_0\neq 0, L>1$，迭代不收敛；---（7 分）

若改用斯蒂芬森迭代，可得 $x_{k+1}=\psi(x_k),\psi(x)=x-\dfrac{x}{x^4+3x^2+3},\psi'(0)=\dfrac{2}{3}=L<1$，（9 分）

所以斯蒂芬森迭代法收敛，收敛阶 $p=1$。---（10 分）

第 3 章 数值逼近

一、选择题（四个选项中仅有一项符合题目要求，每小题 3 分，共计 15 分)

1、设 $f(x)=9x^8+3x^4+10$，则 $f[2^0,2^1,\cdots,2^8]$ 和 $f[3^0,3^1,\cdots,3^9]$ 的值分别为（　　　）

（1）1，1；（2）$9\times 8!$，0；（3）9，0；（4）9，1。

2、设 $l_i(x)(i=0,1,\cdots,n)$ 是 $n+1$ 个互异节点 $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ 的 Lagrange 基函数，则下列选项中正确的是（　　　）。

（1）$\sum_{i=0}^{n} x_i^2 l_i(x)=x$；（2）$\sum_{i=0}^{n} x_i^2 l_i(x)=x^2$；（3）$\sum_{i=0}^{n} x_i^2 l_i(x)=x_i^2$；（4）$\sum_{i=0}^{n} x_i^2 l_i(x_j)=x^2$。

3、设三次样条函数为 $S(x)=\begin{cases} x^3 & 0\le x\le 1 \\ \frac{1}{2}(x-1)^3+a(x-1)^2+b(x-1)+c & 1\le x\le 3 \end{cases}$，则常数 a,b,c 的值分别为（　　　）

（1）$a=b=3,c=1$；（2）$a=b=2,c=1$；（3）$a=b=c=3$；（4）$a=c=3,b=1$。

4、设 $L(x)$ 和 $N(x)$ 分别是 $f(x)$ 满足同一插值条件的 n 次拉格朗日和牛顿插值多项式，它们的插值余项分别为 $r(x)$ 和 $e(x)$，则（　　　）

（1）$L(x)\ne N(x),r(x)=e(x)$；（2）$L(x)=N(x),r(x)=e(x)$；

（3）$L(x)=N(x),r(x)\ne e(x)$；（4）$L(x)\ne N(x),r(x)\ne e(x)$。

5、区间 $[a,b]$ 上的三次样条插值函数 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有直到（　　　）阶的连续导数。

（1）1；（2）2；（3）3；（4）4。

二、填空题（每小题 3 分，共计 15 分）

1、设 $l_k(x)$ 是以 $\{x_k=k\}_{k=0}^{4}$ 为节点的 Lagrange 插值基函数，则 $\sum_{k=0}^{4} kl_k(k)=$ $\sum k$。

2、由下列数表

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5
$f(x)$	-2	-1.75	-1	0.25	2	4.25

所确定的插值多项式的最高次数是 2。 $f[x_0,\cdots x_3]=0$ . . .

3、设函数 $f(x)\in C^4[a,b]$，$S(x)$ 是关于 $f(x)$ 的带有第二类边界条件的三次样条插值函数，

如果将区间$[a,b]$无限分割，则$S''(x)$在$[a,b]$上一致收敛于函数______________。

4、设$P_n(x)$是n次 Legendre 多项式，则积分$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx =$______________。

5、设函数$f(x) \in C[a,b]$，$p(x) \in Span\{1, x, x^2, \cdots, x^n\}$，则$p(x)$是$f(x)$的最佳一致逼近多项式的充要条件是函数_____________在$[a,b]$上存在一个至少有 n+2 个点组成的交错点组。

三、（12 分）已知下列函数表：

x	0	1	2	3
$f(x)$	1	3	9	27

（1）写出相应的三次 Lagrange 插值多项式；

（2）作均差表，写出相应的三次 Newton 插值多项式，并计算$f(1.5)$的近似值。

四、（14 分）已知$f(x)$的函数表为

x_i	0	1	4
y_i	0	1	2

（1）试求$f(x)$在$[0,4]$上的 Hermite 插值多项式$H(x)$，使之满足下列条件

$$H(x_k) = f(x_k), k = 0,1,2; H'(x_1) = \frac{1}{2};$$

（2）写出余项$R(x) = f(x) - H(x)$的表达式。

五、（12 分）试用$f(x)$关于互异节点$\{x_i\}_{i=1}^{n-1}$和$\{x_i\}_{i=2}^{n}$的不超过$n-2$次的插值多项式$g(x)$和$h(x)$，构造出关于节点$\{x_i\}_{i=1}^{n}$的不超过$n-1$次的插值多项式$q(x)$。

六、（10 分）求$f(x) = e^x$在区间[0,1]上的 1 次最佳平方逼近多项式。(1, x, x²...)

七、（12 分）给定$x_1, x_2 \in [a,b]$，函数$f(x)$在$[a,b]$具有三阶导数，且满足

$$f(x) = -\frac{(x-x_1)(x-2x_0+x_1)}{(x_1-x_0)^2} f(x_0) + \frac{(x-x_1)(x-x_0)}{(x_0-x_1)} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{(x_1-x_0)^2} f(x_1) + r(x),$$

求$r(x)$的表达式。 H(x)

线性

八、（10 分）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有二阶连续导数，且 $f(a)=0$， $f(b)=0$，

试用插值方法证明下列不等式 $\max\limits_{a\le x\le b}|f(x)|\le\frac{1}{8}(b-a)^2\max\limits_{a\le x\le b}|f''(x)|$ 。

$\frac{M}{8}h^2$

第 3 章 数值逼近 参考答案

一、选择题（15 分，每小题 3 分)

1、(3)　2、(2)　3、(1)　4、(2)　5、(2)

二、填空题（15 分，每小题 3 分）

1、10；2、2；3、$f''(x)$；4、$\dfrac{2}{2n+1}$；5、$f(x)-p(x)$

三、（12 分）

解：（1）

x1　x3　x9　x27

$$L_3(x)=\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)}+\frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)}+\frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)}+\frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)}$$

$$=\frac{4}{3}x^3-2x^2+\frac{8}{3}x+1$$ --（5 分）

（2）均差表：

0	1			
1	3	2		
2	9	6	2	
3	27	18	6	$\frac{4}{3}$

--（8 分）

$$N_3(x)=1+2x+2x(x-1)+\frac{4}{3}x(x-1)(x-2)$$ --（10 分）

$$f(1.5)\approx N_3(1.5)=5$$ --（12 分）

四、（14 分）

解：$H(x)=N_2(x)+kx(x-1)(x-4)$，其中 $N_2(x)=x-\frac{1}{6}x(x-1)=-\frac{1}{6}x^2+\frac{7}{6}x$ 为不考虑导数条件的 2 次牛顿插值多项式。 --（3 分）

代入导数条件 $H'(1)=N_2'(1)-3k=\frac{1}{2}\Rightarrow k=\frac{1}{9}$（$N_2'(4)=\frac{5}{6}$） ------------------------（5 分）

$$H(x)=N_2(x)+\frac{1}{9}x(x-1)(x-4)$$ --（7 分）

设 $R(x)=f(x)-H(x)=k(x)x(x-1)^2(x-4)$ ---------------------------（9 分）

令 $g(t)=f(t)-H(t)-k(x)t(t-1)^2(t-4)$， --------------------------------（10 分）

则 $g(t)$ 有 4 个互不相同的根 $x_i, i=0,1,2; x$，（$x \neq x_i$，否则结论显然成立）

且 $g'(1)=0$，故由罗尔定理 $g'(t)$ 有 4 个互不相同的根，以此类推，则存在 ξ 使得 $g^{(4)}(\xi)=0$，

即有 $g^{(4)}(\xi)=f^{(4)}(\xi)-k(x)4!=0 \Rightarrow k(x)=\dfrac{f^{(4)}(\xi)}{4!}$ ----------------------------------（13 分）

因此 $R(x)=f(x)-H(x)=\dfrac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x(x-1)^2(x-4)$。----------------------------------（14 分）

五、（12 分）

解：不超过 $n-2$ 次的多项式 $g(x)$ 和 $h(x)$ 分别满足

$g(x_i)=f(x_i), 1\le i\le n-1$，$h(x_i)=f(x_i), 2\le i\le n$，

于是可设待求插值多项式为

$$q(x)=g(x)+A(h(x)-g(x))(x-x_1)$$ ----------------------------------（3 分）

显然 $q(x)$ 为次数不超过 $n-1$ 次的多项式，且满足

$$q(x_i)=g(x_i)=f(x_i), i=1,2,\cdots,n-1$$

利用 $q(x_n)=f(x_n)$，即 $g(x_n)+A(h(x_n)-g(x_n))(x_n-x_1)=f(x_n)$----------（6 分）

得 $A=\dfrac{f(x_n)-g(x_n)}{(h(x_n)-g(x_n))(x_n-x_1)}=\dfrac{1}{x_n-x_1}\ (h(x_n)=f(x_n))$ -------------------------（9 分）

故 $q(x)=g(x)+\dfrac{x-x_1}{x_n-x_1}(h(x)-g(x))=\dfrac{x-x_n}{x_1-x_n}g(x)+\dfrac{x-x_1}{x_n-x_1}h(x).$ ------（12 分）

六、（10 分）

解：设 $\phi(x)=c_1\phi_1(x)+c_2\phi_2(x)=c_1+c_2x$，$\begin{pmatrix}(\phi_1,\phi_1) & (\phi_1,\phi_2)\\ (\phi_2,\phi_1) & (\phi_2,\phi_2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(f,\phi_1)\\ (f,\phi_2)\end{pmatrix}$，

--（2分）

$(\phi_1,\phi_1)=\int_0^1 dx=1$，$(\phi_1,\phi_2)=\int_0^1 xdx=\dfrac{1}{2}$，$(\phi_2,\phi_2)=\int_0^1 x^2dx=\dfrac{1}{3}$，----------------（4分）

$(f,\phi_1)=\int_0^1 \exp(x)dx=e-1$，$(f,\phi_2)=\int_0^1 x\exp(x)dx=1$----------------------------（6分）

$\begin{pmatrix}1 & 1/2\\ 1/2 & 1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e-1\\ 1\end{pmatrix}$，---（8分）

$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8731 \\ 1.690 \end{pmatrix}, \phi(x) = 4e - 10 + (18 - 6e)x = 0.8731 + 1.6903x$ ---------------（10分）

七、（12 分）

解：$p_2(x) = -\dfrac{(x-x_1)(x-2x_0+x_1)}{(x_1-x_0)^2} f(x_0) + \dfrac{(x-x_1)(x-x_0)}{(x_0-x_1)} f'(x_0) + \dfrac{(x-x_0)^2}{(x_1-x_0)^2} f(x_1)$

则 $p_2(x_0) = f(x_0), p_2'(x_0) = f'(x_0), p_2(x_1) = f(x_1),$，且 $f(x) = p_2(x) + r(x)$，

所以 $r(x)$ 是 $f(x)$ 关于二次多项式 $p_2(x)$ 的插值余项，即 $r(x) = f(x) - p_2(x)$。

对于任意的 $x \in [a,b]$，若 $x = x_0$ 或 $x = x_1$，则 $r(x) = 0$；

若 $x \neq x_0$， $x \neq x_1$，则作辅助函数

$$F(t) = f(t) - p_2(t) - \frac{r(x)}{(x-x_0)^2(x-x_1)}(t-x_0)^2(t-x_1), t \in [a,b]$$

得 $F(x_0) = F(x_1) = F(x) = F'(x_0) = 0$， 且 $F(t)$ 在 $[a,b]$ 上有三阶导数，则函数 $F(t)$ 在 $[a,b]$ 上有三个不同的零点 x_0, x_1, x。由罗尔定理知， $F'(t)$ 在 $[a,b]$ 上**至少有两个**不同于 x_0, x_1, x 且互不相同的零点，又 $F'(x_0) = 0$，则 $F'(t)$ 在 $[a,b]$ 上至少有三个互异的零点，那么 $F''(t)$ 在 $[a,b]$ 上至少有两个**不同的零点**， $F'''(t)$ 在 $[a,b]$ **上至少有一个零点** ξ，

则由 $F'''(t) = f'''(t) - p_2'''(x) - \dfrac{r(x)}{(x-x_1)(x-x_0)^2}[(t-x_0)^2(t-x_1)]'''$

得 $f'''(\xi) - \dfrac{r(x)}{(x-x_0)^2(x-x_1)} \times 3! = 0$，即 $r(x) = \dfrac{(x-x_0)^2(x-x_1)}{3!} f'''(\xi)$。

总之，对于任意的 $x \in [a,b]$，存在 $\xi \in (a,b)$，使得 $r(x) = \dfrac{f'''(\xi)}{3!}(x-x_0)^2(x-x_1)$。

八、（10 分）

证明：以 $x = a, x = b$ 为基点进行线性插值，得：

$$f(x) = p_1(x) + R_1(x) = \frac{x-b}{a-b} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b) + \frac{(x-a)(x-b)}{2} f''(\xi)$$

$$= \frac{(x-a)(x-b)}{2} f''(\xi) \qquad a < \xi < b$$

因为 $|(x-a)(x-b)|$ 在 $x = \frac{a+b}{2}$ 处取得最大值

故 $\max\limits_{a \le x \le b} |f(x)| \le \frac{1}{2} \max\limits_{a \le x \le b} |f''(x)| \times \max\limits_{a \le x \le b} |(x-a)(x-b)| = \frac{(b-a)^2}{8} \max\limits_{a \le x \le b} |f''(x)|$。

第 4 章 数值积分与数值微分

一、选择题（四个选项中仅有一项符合题目要求，每小题 3 分，共计 15 分)

1、在牛顿-柯特斯求积公式 $\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\sum_{i=0}^{n} C_i^{(n)} f(x_i)$ 中，当系数 $C_i^{(n)}$ 是负值时，公式的稳定性不能保证，所以实际应用中，当（　　　　）时不使用牛顿-柯特斯求积公式。

(1) $n \geq 8$；　(2) $n \geq 7$；　(3) $n \geq 10$；　(4) $n \geq 6$ 。

$n=2$

2、若使下列求积公式中的代数精度尽量高，$\int_0^2 f(x)dx \approx A_0 f(0) + A_1 f(1) + A_2 f(2)$，

$+3$

则求积公式中的待定系数应分别为(　　　　)　　2. $C_i^{(n)}$

(1) $A_0 = 1, A_1 = \frac{1}{3}, A_2 = \frac{4}{3}$；(2) $A_0 = 1, A_1 = \frac{1}{3}, A_2 = \frac{4}{3}$；(3) $A_0 = 1, A_1 = \frac{4}{3}, A_2 = \frac{4}{3}$；

(4) $A_0 = \frac{1}{3}, A_1 = \frac{4}{3}, A_2 = \frac{1}{3}$ 。

3、若用复化的辛浦生公式计算积分 $\int_0^{\pi} \sin x dx$，问积分区间要（　　）等分才能保证误差不超过 2×10^{-5}？

（1）10；　（2）15；　（3）20；　（4）25。

4、牛顿-柯特斯数值求积公式 $\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\sum_{i=0}^{n} C_i^{(n)} f(x_i)$，则当 n 为偶数时,至少具有(　　　)次代数精度。

（1）n；　（2）$2n+1$；　（3）$n+1$；　（4）$n-1$。

5、若求积公式 $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{5} A_k f(x_k)$ 为高斯（Gauss）型，下列说法正确的是（　　　　）

(1)不能确定该求积公式的稳定性；(2) $\sum_{k=0}^{5} A_k \neq b-a$；(3) 该求积公式的代数精度为9；)

(4) $\int_a^b (x^4+3x)\omega(x)dx = 0$，其中 $\omega(x) = \prod_{k=0}^{5}(x-x_k)$。

二、填空题（每小题 3 分，共计 15　分）

1、为使两点的数值求积公式 $\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f(x_0) + f(x_1)$ 具有最高的代数精确度，则其求积节点的值应为____$\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$____。

2、求定积分的梯形公式的代数精度为____1____。

3、已知求积公式$\int_0^2 f(x)dx \approx \frac{1}{3}[f(0)+4f(1)+f(2)]$，则其代数精度为___3___。

4、求定积分的牛顿-柯特斯公式的代数精度为___5___。

5、已知插值型求积公式$\int_a^b \rho(x)f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$，$\{x_i\}_{i=0}^n$为求积节点，且

$\omega_{n+1}(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$，$P(x)\in Span\{1,x,x^2,\cdots,x^n\}$，则求积节点$\{x_i\}_{i=0}^n$为高斯点的充

要条件是___校正交___。

n=4　　n=2

三、（10 分）取 5 个等距节点，分别用复化梯形公式和复化辛普生公式计算积分$\int_1^9 \sqrt{x}dx$的近似值。

四、（12 分）设$f(x)$具有四阶连续导数，$h=x_{i+1}-x_i$，$i=0,1,2$，

(1) 证明四点数值微分公式

$$f'(x_0)\approx\frac{1}{6h}\left[-11f(x_0)+18f(x_1)-9f(x_2)+2f(x_3)\right]+O(h^3)$$

(2) 利用(1)的数值微分公式及下表中的函数值求$f'(1)$的近似值。

x	1.0	1.5	2.0	2.5
f(x)	8.00	13.75	21.00	29.75

五、（12 分）用龙贝格求积法求积分$\int_0^1 e^{x^2}dx$的近似值，要求误差不超过10^{-3}。

六、（14 分）求积公式$\int_0^1 f(x)dx \approx A_0 f(0)+A_1 f(1)+B_0 f'(0)$，又知其误差为

$R=kf'''(\xi),\xi\in(0,1)$。试确定系数A_0,A_1及B_0，使求积公式有尽可能高的代数精确度，并指出这个代数精确度和误差式中的k值。

七、（12 分）试证：若求积公式$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n}\lambda_k f(x_k)$的代数精度不小于$n$，则它的求积系

数必然是$\lambda_k=\int_a^b l_k(x)dx, k=0,1,2,\cdots,n$，其中$l_k(x)$是以$x_0,x_1,\cdots,x_n$为节点的拉格朗日插值多项式的基函数。

八、（10 分）证明：高斯（Gauss）型求积公式$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n+1} A_k f(x_k)$中的求积系数$A_i$

2n+1

可表示为：$A_i=\int_a^b l_i(x)dx=\int_a^b l_i^2(x)dx$，其中$l_i(x)$是 n 次拉格朗日(Lagrange)插值基函数，即$l_i(x)=\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n+1}\frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)},i=1,2,\cdots,n+1$。

第 4 章 数值积分与数值微分 参考答案

一、选择题（15 分，每小题 3 分)

1、(1) 2、(4) 3、(1) 4、(3) 5、(4)

二、填空题（15 分，每小题 3 分）

1、$x_0 = -1/\sqrt{3}, x_1 = 1/\sqrt{3}$；2、1；3、3；4、5；5、$\int_a^b P(x)\omega_{n+1}(x)\rho(x)dx = 0$

三、（12 分）

解：将区间$[0,9]$4 等分，$h = 2$，令 $f(x) = \sqrt{x}$，计算各节点的函数值为：

x_i	1	3	5	7	9
y_i	1	1.73205	2.23607	2.64575	3

--（4 分）

由复合梯形公式得（$n = 4, h = 2$） --（5 分）

$$T_4 = \frac{2}{2}\times[f(1) + 2f(3) + 2f(5) + 2f(7) + f(9)] \approx 17.22774$$ ------------（8 分）

由复合辛普生公式得（$n = 2, h = 4$） --（9 分）

$$S_2 = \frac{4}{6}\times[f(1) + 4f(3) + 2f(5) + 4f(7) + f(9)] \approx 17.32223$$。------------（12 分）

四、（12 分）

证明：根据泰勒公式

$$f(x_0 + kh) = f(x_0) + (kh)f'(x_0) + \frac{1}{2!}(kh)^2 f''(x_0) + \frac{1}{3!}(kh)^3 f'''(x_0) + \frac{1}{4!}(kh)^4 f^{(4)}(\xi_k) \quad \xi_k \in (x_0, x_0 + kh)\ ,\ k = 1,\ 2,\ 3$$ --（4 分）

有

$$
\begin{aligned}
&-11f(x_0)+18f(x_1)-9f(x_2)+2f(x_3)\\
&=(18-9\times 2+2\times 3)hf'(x_0)+\\
&\quad\frac{1}{2!}(18-9\times 2^2+2\times 3^2)h^2 f''(x_0)+\\
&\quad\frac{1}{3!}(18-9\times 2^3+2\times 3^3)h^3 f'''(x_0)+\\
&\quad\frac{h^4}{4!}(18f^{(4)}(\xi_1)-9\times 2^4 f^{(4)}(\xi_2)+2\times 3^4 f^{(4)}(\xi_3))\\
&=6hf'(x_0)+O(h^4)
\end{aligned}
$$

------（8 分）

从而有

$$f'(x_0)\approx\frac{1}{6h}\left[-11f(x_0)+18f(x_1)-9f(x_2)+2f(x_3)\right]+O(h^3)$$ -----（10 分）

(2) $f'(1)\approx\frac{1}{6\times 0.5}\left[-11\times 8.0+18\times 13.75-9\times 21.00+2\times 29.75\right]=10.00$ -（12 分）

五、（12 分）

解：令 $f\left(x\right)=e^{x^2},a=0,b=1$。由复合梯形公式的逐次分半法得

$T_1=\frac{b-a}{2}\left[f\left(a\right)+f\left(b\right)\right]=\frac{1-0}{2}\left[f\left(0\right)+f\left(1\right)\right]=1.8591410$ ---------------------------（2 分）

$T_2=\frac{1}{2}\left[T_1+f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[1.8591410+f\left(0.5\right)\right]=1.5715832$ ------------------------（5 分）

$$T_4=\frac{1}{2}\left\{T_2+\frac{b-a}{2}\left[f\left(\frac{3a+b}{4}\right)+f\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right]\right\}=\frac{1}{2}\left\{1.5715832+\frac{1}{2}\left[f\left(0.25\right)+f\left(0.75\right)\right]\right\}$$
$=1.4906789$

--（8 分）

运用龙贝格求积法，有

$$S_1=\frac{1}{4-1}\left(4T_2-T_1\right)=1.4757306$$
$$S_2=\frac{1}{4-1}\left(4T_4-T_2\right)=1.4637108$$ --------------------------------（10 分）
$$C_1=\frac{1}{4^2-1}\left(4^2S_2-S_1\right)=1.4629095$$

此时 $\left|C_1-S_2\right|=\frac{1}{15}\left|S_2-S_1\right|=0.8013\times 10^{-3}<10^{-3}$ 满足精度要求。----------------（12 分）

六、（14 分）

解：令 $f(x)=1,x,x^2$，分别代入求积公式两端，使其精确相等，从而得到如下方程组

$$\begin{cases} A_0+A_1=1 \\ A_1+B_0=\frac{1}{2} \\ A_1=\frac{1}{3} \end{cases}$$ ，解之得 $A_1=\frac{1}{3},A_0=\frac{2}{3},B_0=\frac{1}{6}$。--------------------------------（5 分）

求积公式为 $\int_0^1 f(x)\approx\frac{2}{3}f(0)+\frac{1}{3}f(1)+\frac{1}{6}f'(0)$，它至少有 2 次代数精确度。

令 $f(x)=x^3,\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 x^3dx=\frac{1}{4}$。 ------------------------（7 分）

而 $\frac{2}{3}f(0)+\frac{1}{3}f(1)+\frac{1}{6}f'(0)=\frac{2}{3}\times 0+\frac{1}{3}\times 1+\frac{1}{6}\times 0=\frac{1}{3}$

故此求积公式的最高代数精确度为 2。 --------------------------（9 分）

确定误差项 $R=kf'''(\xi)$ 的 k 值，应将 $f(x)=x^3$ 代入有误差项的积分中，即

$$\int_0^1 f(x)dx=\frac{2}{3}f(0)+\frac{1}{3}f(1)+\frac{1}{6}f'(0)+kf'''(\xi),\xi\in(0,1)$$ ----------------（12 分）

即 $\int_0^1 x^3dx=\frac{2}{3}\times 0+\frac{1}{3}\times 1+\frac{1}{6}\times 0+k\square 6$， $\Rightarrow\frac{1}{4}=\frac{1}{3}+6k$

$= 3!$ k

求得 $k=-\frac{1}{72}$，这时误差项 $R=-\frac{1}{72}f'''(\xi)$。 --（14 分）

七、（12 分）

证明：函数 x^m 的拉格朗日插值多项式为 $x^m=\sum_{k=0}^{n}x_k^m l_k(x),m=0,1,\cdots,n$，

其中 $l_k(x)$ 是以 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 为结点的拉格朗日插值基函数。 --------------------------（2 分）

对上式两端积分

$$\int_a^b x^m dx=\sum_{k=0}^{n}\left(\int_a^b l_k(x)dx\right)x_k^m \quad ①$$ --------------------------（4 分）

又由题设知求积公式有 n 次代数精确度，则有精确等式

$$\int_a^b x^m dx=\sum_{k=0}^{n}\lambda_k x_k{}^m,m=0,1,\cdots,n \quad ②$$ ---------------------（6 分）

②－①，得 $\sum_{k=0}^{n}(\lambda_k - \int_a^b l_k(x)dx)x_k^m = 0, m = 0,1,\cdots,n$ ③ ---------------------（8 分）

设 $t_k = \lambda_k - \int_a^b l_k(x)dx$，则由③得 $n+1$ 阶齐次线性方程组

$$\begin{cases} t_0 + t_1 + \cdots + t_n = 0 \\ x_0 t_0 + x_1 t_1 + \cdots + x_n t_n = 0 \\ x_0^2 t_0 + x_1^2 t_1 + \cdots + x_n^2 t_n = 0 \\ \vdots \\ x_0^n t_0 + x_1^n t_1 + \cdots + x_n^n t_n = 0 \end{cases}$$ ---------------------（10 分）

方程组的系数行列式为范德蒙行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$

由于结点 x_i 互异，所以 $D \neq 0$。这时方程组只有零解，即 $t_k = 0, k = 0,1,\cdots,n$。

于是 $\lambda_k = \int_a^b l_k(x)dx, k = 0,1,\cdots,n$。 -----------------------------（12 分）

八、（10 分）

证明：形如 $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n+1} A_k f(x_k)$ 的高斯（Gauss）型求积公式具有最高代数精度 2n+1 次，

它对 $f(x)$ 取所有次数不超过 2n+1 次的多项式均精确成立。 ---------------------（2 分）

（1）取 $f(x) = l_i(x)$，代入求积公式：因为 $l_i(x)$ 是 n 次多项式，且有

$l_i(x_j) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$ 所以 $\int_a^b l_i(x)dx = \sum_{j=1}^{n+1} A_j l_i(x_j) = A_i$ ---------------------（5 分）

（2）取 $f(x) = l_i^2(x)$，代入求积公式：因为 $l_i^2(x)$ 是 2n 次多项式，-----------（7 分）

所以 $\int_a^b l_i^2(x)dx = \sum_{j=1}^{n+1} A_j [l_i(x_j)]^2 = A_i$，故结论成立。 ---------------------（10 分）

第 5 章 线性代数方程组的直接解法

一、选择题（四个选项中仅有一项符合题目要求，每小题 3 分，共计 15 分)

1、一般用高斯消元法解线性代数方程组要采用的技术是（　　　　）

（1）调换方程位置；　　（2）选主元；　　（3）直接求解；　　（4）化简方程组。

2、设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 $\boldsymbol{LU}$ 分解如下：$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&2&3\\4&7&7\\-2&4&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\-1&a&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2&3\\0&b&1\\0&0&6\end{pmatrix}$

则该分解式中 a,b 的值分别为 （　　　　）

（1） $a=2,b=6$；（2） $a=6,b=2$；（3） $a=2,b=3$；（4） $a=-1,b=2$。

3、设矩阵 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$，$\boldsymbol{Q}\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$，且 $\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{E}$，则下列关系式不成立的是（　　　　）

(1) $\|\boldsymbol{A}\|_2=\|\boldsymbol{AQ}\|_2$；(2) $\|\boldsymbol{QA}\|_F=\|\boldsymbol{A}\|_F$；(3) $\|\boldsymbol{Qx}\|_2=\|\boldsymbol{x}\|_2$，其中 $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n$；

(4) $cond_\infty(\boldsymbol{A})=cond_\infty(\boldsymbol{AQ})$。

4、设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&-1&4\\-1&2&-2\\2&-3&-2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$，则 $\|\boldsymbol{Ax}\|_\infty$ 和 $\|\boldsymbol{A}\|_\infty$ 的值分别为（　　　　）

(1) 8，8；　　(2) 8，7；　　(3) 8，6；　　(4) 7，7。

5、若解线性代数方程组的**Gauss**部分选主元方法第二步得到的系数矩阵的第三列向量为

$(2\quad 6\quad 3\quad 2\quad -5\quad 4\quad 2)^T$，则第三步主行是（　　　　）

(1) 第 2 行；　　(2) 第 3 行；　　(3) 第 5 行；　　(4) 第 6 行。

二、填空题（每小题 3 分，共计 15 分）

1、设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&a\\0&a&2\end{bmatrix}$，为使 $\boldsymbol{A}$ 可分解为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{LL}^T$，其中 $\boldsymbol{L}$ 是对角元素为正的下三角矩阵，

则 a 的取值范围是__________________。

2、设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&2\end{bmatrix}$，则 $Cond_2(\boldsymbol{A})=$________________。

3、设 $\boldsymbol{x}=(2\quad 1\quad 4)^T$，如果 $\boldsymbol{Lx}=(2\quad 0\quad 0)^T$，则初等下三角矩阵 $\boldsymbol{L}=$________________。

4、设 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$ 为上半带宽为 $\boldsymbol{p}$，下半带宽为 $\boldsymbol{q}$ 的带状矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 的各阶顺序主子式均不为零，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{LU}$ 为 Doolitte 分解，则上三角矩阵 $\boldsymbol{U}$ 的上半带宽为_______________。

5、设对称正定矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_{ij})\in\boldsymbol{R}^{n\times n},\boldsymbol{a}_{11}\neq\boldsymbol{0}$，经过一次 Gauss 消元得到形如 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_{11} & * \\ 0 & \boldsymbol{A}_1\end{pmatrix}$ 的矩阵，则 $\boldsymbol{A}_1$ 是______________矩阵。

三、（12 分）试用高斯列主元素法求解线性方程组

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & -2 & -4\\ 2 & 6 & -7 & -10\\ -1 & -1 & 5 & 9\\ -3 & -5 & 0 & 15\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\-2\\14\\-6\end{bmatrix}$$

四、（12 分）利用矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的三角分解 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{LU}$ 求解下列方程组

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 3\\ -1 & -3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix}$$

五、（12 分）用平方根法求解下列方程组

$$\begin{pmatrix}4 & -2 & -4\\ -2 & 17 & 10\\ -4 & 10 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\3\\-7\end{pmatrix}$$

六、（10 分）设线性代数方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 中系数矩阵 A 非奇异，$\boldsymbol{x}$ 为精确解，$\boldsymbol{b}\neq 0$，若向量 $\tilde{\boldsymbol{x}}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个近似解，残向量 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}}$，证明估计式：$\dfrac{\|\boldsymbol{x}-\tilde{\boldsymbol{x}}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}\leq cond(A)\dfrac{\|\boldsymbol{r}\|}{\|\boldsymbol{b}\|}$（假定所用矩阵范数与向量范数相容）。

七、（12 分）设实对称矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_{ij})_{n\times n}$ 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 试证：$\|A\|_F=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^2}$。

八、（12 分）已知方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & 10 & 1\\ -10 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 10\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}14\\-5\\14\end{bmatrix}$，

（1）构造求解该方程组的一种收敛的迭代格式，并说明理由；
（2）写出（1）中迭代方法的迭代矩阵。

第 5 章 线性代数方程组的直接解法 参考答案

一、选择题（15 分，每小题 3 分)

1、(2) 2、(3) 3、(4) 4、(1) 5、(3)

二、填空题（15 分，每小题 3 分）

1、$\boldsymbol{a\in(-\sqrt{3},\sqrt{3})}$；2、$\boldsymbol{3+\sqrt{2}}$；3、$\boldsymbol{L=\begin{bmatrix}1&0&0\\-0.5&1&0\\-2&0&1\end{bmatrix}}$；4、$\boldsymbol{p}$；5、对称正定

三、（12 分）

解：$\boldsymbol{[A^{(1)},b^{(1)}]}=\begin{bmatrix}1&3&-2&-4&3\\2&6&-7&-10&-2\\-1&-1&5&9&14\\-3&-5&0&15&-6\end{bmatrix}$ --------------------------------（2 分）

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}-3&-5&0&15&-6\\2&6&-7&-10&-2\\-1&-1&5&9&14\\1&3&-2&-4&3\end{bmatrix}$$ --------------------------------（4 分）

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}-3&-5&0&15&-6\\0&\frac{8}{3}&-7&0&-6\\0&\frac{2}{3}&5&4&16\\0&\frac{4}{3}&-2&1&1\end{bmatrix}$$ --------------------------------（6 分）

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}-3&-5&0&15&-6\\0&\frac{8}{3}&-7&0&-6\\0&0&\frac{27}{4}&4&\frac{35}{2}\\0&0&\frac{3}{2}&1&4\end{bmatrix}$$ --------------------------------（8 分）

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}-3 & -5 & 0 & 15 & -6\\ 0 & \frac{8}{3} & -7 & 0 & -6\\ 0 & 0 & \frac{27}{4} & 4 & \frac{35}{2}\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{9} & \frac{1}{9}\end{bmatrix}$$ --------------------------------（10 分）

故方程组的解为 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}2 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix}^{T}$ --------------------------------（12 分）

四、（12 分）

解：将矩阵进行三角分解 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{LU}$，得

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 3\\ -1 & -3 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ -1 & 1/2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 1/2\end{pmatrix}$$ --------------------------------（4 分）

求解 $\boldsymbol{Ly}=\boldsymbol{b}$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ -1 & 1/2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{y}_1\\ \boldsymbol{y}_2\\ \boldsymbol{y}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 3\\ 6\end{bmatrix}$$,得 $\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}0 & 3 & 1/2\end{pmatrix}^{T}$ --------------------------------（8 分）

求解 $\boldsymbol{Ux}=\boldsymbol{y}$

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1\\ \boldsymbol{x}_2\\ \boldsymbol{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 3\\ 1/2\end{bmatrix}$$，得 $\boldsymbol{x}=(1,-1,1)^{T}$ --------------------------------（12 分）

五、（12 分）

解：$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4 & -2 & -4\\ -2 & 17 & 10\\ -4 & 10 & 9\end{pmatrix}=\boldsymbol{LL}^{T}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ -1 & 4 & 0\\ -2 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1 & -2\\ 0 & 4 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$ -------------（4 分）

求解 $\boldsymbol{Ly}=\boldsymbol{b}$

$$\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ -1 & 4 & 0\\ -2 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{y}_1\\ \boldsymbol{y}_2\\ \boldsymbol{y}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\ 3\\ -7\end{bmatrix}$$,得 $\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}5 & 2 & -1\end{pmatrix}^{T}$ -------------------------------（8 分）

求解 $\boldsymbol{L}^{T}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$，得 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\end{pmatrix}^T$ ------------------------------（12 分）

六、（10 分）

证明：由题意知：$AX=b, A\tilde{X}=b-r$

$$A(X-\tilde{X})=r \Rightarrow X-\tilde{X}=A^{-1}r \Rightarrow \left\|X-\tilde{X}\right\| \le \left\|A^{-1}\right\|\left\|r\right\|$$ -----------------（4 分）

又 $AX=b \Rightarrow \|b\|=\|AX\| \le \|A\|\|X\| \Rightarrow \frac{1}{\|X\|} \le \frac{\|A\|}{\|b\|}$ -------------------（7 分）

所以 $\frac{\left\|X-\tilde{X}\right\|}{\|X\|} \le \|A\|\left\|A^{-1}\right\|\|r\| / \|b\| = cond(A)\frac{\|\overset{r}{\cancel{A}}\|}{\|b\|}$。-----------------（10 分）

七、（12 分）

证明： 因为 $\boldsymbol{A}$ 对称，故 $\boldsymbol{\lambda(A^TA)=\lambda(A^2)=[\lambda(A)]^2}$，-----------------------（3 分）

所以有 $\boldsymbol{\lambda_1(A^TA)+\lambda_2(A^TA)+\cdots+\lambda_n(A^TA)=\sum_{k=1}^{n}[\lambda_k(A)]^2=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^2}$ -------（6 分）

又 $\boldsymbol{\lambda_1(A^TA)+\lambda_2(A^TA)+\cdots+\lambda_n(A^TA)=A^TA}$ 的对角元素之和

$$\boldsymbol{=\sum_{k=1}^{n}a_{1k}^2+\sum_{k=1}^{n}a_{2k}^2+\cdots+\sum_{k=1}^{n}a_{nk}^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}^2=\|A\|_F^2}$$，---------------------------（10 分）

因此 $\boldsymbol{\|A\|_F=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^2}}$。 -------------------------（12 分）

八、（12 分）

解：交换方程组的前两行，则原方程组 $\boldsymbol{Ax=b}$ 等价于 $\begin{bmatrix} -10 & 2 & 3 \\ 3 & 10 & 1 \\ 3 & 1 & 10 \end{bmatrix}\boldsymbol{x=b}$，$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} -5 \\ 14 \\ 14 \end{bmatrix}$

此时系数矩阵为严格对角占优矩阵，故 **Jacobi** 和 **Gauss-Seidel** 迭代法均收敛。（4 分）
答案（1）：**Jacobi** 迭代法的分量形式

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = [5+2x_2^{(k)}+3x_3^{(k)}]\Big/10 \\ x_2^{(k+1)} = [14-3x_1^{(k)}-x_3^{(k)}]\Big/10 ;k=0,1,2,\cdots \\ x_3^{(k+1)} = [14-3x_1^{(k)}-x_2^{(k)}]\Big/10 \end{cases}$$ --------------------------------（8 分）

迭代矩阵为：

$$B = D^{-1}(L+U) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{10} & \frac{3}{10} \\ -\frac{3}{10} & 0 & -\frac{1}{10} \\ -\frac{3}{10} & -\frac{1}{10} & 0 \end{bmatrix},$$ -----------------------------（12 分）

答案（2）：**Gauss-Seidel** 迭代法分量形式

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = [5+2x_2^{(k)}+3x_3^{(k)}]\Big/10 \\ x_2^{(k+1)} = [14-3x_1^{(k+1)}-x_3^{(k)}]\Big/10 ;k=0,1,2,\cdots \\ x_3^{(k+1)} = [14-3x_1^{(k+1)}-x_2^{(k+1)}]\Big/10 \end{cases}$$ --------------------------------（8 分）

Gauss-Seidel 迭代法的迭代矩阵为

$$G = (D-L)^{-1}U = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{3}{10} \\ 0 & \frac{3}{50} & -\frac{1}{100} \\ 0 & \frac{27}{500} & \frac{91}{1000} \end{bmatrix},$$ --------------------------------（12 分）

第 6 章 线性方程组迭代解法

一、选择题（四个选项中仅有一项符合题目要求，每小题 3 分，共计 15 分)

1、设 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的系数矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -2 & 2\\ -1 & 1 & -1\\ -2 & -2 & 1\end{bmatrix}$，若用雅可比法和高斯-赛德尔法求解，则下列说法正确的是（　　）

（1）两者都收敛；（2）两者都发散；（3）前者收敛，后者发散；（4）前者发散，后者收敛。

2、用一般迭代法 $\boldsymbol{x}^{(k+1)}=\boldsymbol{Bx}^{(k)}+\boldsymbol{g}$ 求解方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解，则当（　　　）时，迭代收敛。

（1）方程组系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对称正定；（2）方程组系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 严格对角占优；

（3）迭代矩阵 $\boldsymbol{B}$ 严格对角占优；（4）迭代矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的谱半径 $\rho(\boldsymbol{B})<1$。

3、设求解方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的迭代格式为 $\boldsymbol{x}^{(k+1)}=\begin{bmatrix}8 & 1 & 1\\ 1 & 7 & 0\\ 1 & 0 & 8\end{bmatrix}\boldsymbol{x}^{(k)}+\begin{bmatrix}7\\ 7\\ 8\end{bmatrix}$，其系数矩阵为

$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-7 & -1 & -1\\ -1 & -6 & 0\\ -1 & 0 & -7\end{bmatrix}$，迭代矩阵为 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}8 & 1 & 1\\ 1 & 7 & 0\\ 1 & 0 & 8\end{bmatrix}$，则下列说法正确的是（　　　）。

J， G—S

（1）方程组系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 严格对角占优，故此迭代收敛于方程组的解；

（2）迭代矩阵 $\boldsymbol{B}$ 严格对角占优，故此迭代收敛于方程组的解；

J　充分

（3）$\|\boldsymbol{B}\|_1=\|\boldsymbol{B}\|_\infty=10>1$，故此迭代发散；

（4）迭代矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的谱半径 $\rho(\boldsymbol{B})>1$，故此迭代发散。

4、若线性代数方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为严格对角占优阵，若用雅可比法和高斯-赛德尔法求解，则下列说法正确的是（　　　）

（1）两者都收敛；（2）两者都发散；（3）前者收敛，后者发散；（4）前者发散，后者收敛。

5、若线性代数方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为对称正定矩阵，则下列说法正确的是（　　　）

（1）雅可比法收敛；（2）高斯-赛德尔法收敛；（3）雅可比法和高斯-赛德尔法均收敛；

（4）SOR 迭代法收敛。

二、填空题（每小题 3 分，共计 15　分）

$\rho(A)=|\lambda_1|$

1、设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a & 10\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$，要使 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{a}$ 应满足的条件是____________。

2、若用高斯-赛德尔法解方程组$\begin{cases} x_1 + ax_2 = 4 \\ 2ax_1 + x_2 = -3 \end{cases}$，其中$a$为实数，则该方法收敛的充要条件是$a$应满足______________。

3、给定方程组$\begin{cases} x_1 - ax_2 = b_1 \\ -ax_1 + x_2 = b_2 \end{cases}$，$a$为实数，当$a$满足__________且$0 < \omega < 2$时，SOR 迭代法收敛。

4、设求解线性代数方程组$Ax = b$的雅可比法的迭代矩阵为B，且$\rho(B) = \dfrac{1}{2}$，若改用 SOR 迭代法计算，则最佳松弛因子$\omega =$____________。

5、设实对称正定方程组$Ax = b$，其中$A = (a_{ij}) \in R^{n\times n}$，二次函数$\varphi(x) = \dfrac{1}{2}(Ax, x) - (b, x)$，则$\nabla\varphi(x) =$______________。

三、（9 分）对于下面的迭代矩阵B，判断迭代法$x = Bx_{k-1} + f$的是否收敛。

（1）$B = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.3 \\ 0.0 & 0.5 \end{bmatrix}$；（2）$B = \begin{bmatrix} 1.1 & -0.3 \\ -0.4 & 1.2 \end{bmatrix}$；（3）$B = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.3 \\ 0.0 & 0.8 \end{bmatrix}$。

$\rho(B) = 1$

四、（14 分）已知方程组$Ax = b$，其中$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$，$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$，

（1）写出该方程组的 Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代法的分量形式；

（2）判断（1）中两种方法的收敛性，如果均收敛，说明哪一种方法收敛更快；

（3）写出相应的 SOR 迭代法的分量形式（取$\omega = 1.5$）。

五、（10 分）设 n 阶矩阵 B 的谱半径$\rho(B) \ge 1$，但 B 有一个特征值λ，其模$|\lambda| < 1$。证明：存在初始向量$x^{(0)}$，使得迭代法$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g, \quad k = 0,1,2,\cdots$得到的向量序列收敛到方程$x = Bx + g$的唯一解$x^*$。

六、（12 分）用共轭梯度法求解方程组$Ax = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$，初始近似向量取为$x^{(0)} = (0,0,0)^T$。

七、（10 分）设 H 为 n 阶实对称矩阵，A 为 n 阶正定矩阵，$A - HAH$正定，证明：迭代格

式 $x^{(k+1)} = Hx^{(k)} + b, \quad k = 0,1,2,\cdots$ 对任意初始向量 $x^{(0)}$ 都收敛。

八、（15 分）设方程组 $Ax = b$ 的系数矩阵 $A \in R^{n\times n}$ 非奇异，$A = D - L - U$，其中 $\boldsymbol{D}, -\boldsymbol{L}, -\boldsymbol{U}$ 分别是 A 的对角阵、严格下三角阵和严格上三角阵，D 非奇异。 $\det D \neq 0$

(1) 写出 Jacobi 迭代法的迭代矩阵 $\boldsymbol{B}$，并证明其特征方程为 $\mathbf{det}\left(\lambda \boldsymbol{D} - \boldsymbol{L} - \boldsymbol{U}\right) = 0$；

(2) 写出 Gauss-Seidel 迭代法的迭代矩阵 $\boldsymbol{G}$，并证明其特征方程为 $\mathbf{det}(\lambda\left(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{L}\right) - \boldsymbol{U}) = 0$；

（3）写出 SOR 迭代法的迭代矩阵 $\boldsymbol{G}_{\omega}$，并证明其特征方程为

$\mathbf{det}[\lambda(\boldsymbol{D} - \omega\boldsymbol{L}) - (1-\omega)\boldsymbol{D} - \omega\boldsymbol{U}] = 0$。

第 6 章 线性方程组迭代解法 参考答案

一、选择题（15 分，每小题 3 分)

1、(3)　2、(4)　3、(4)　4、(1)　5、(2)

二、填空题（15 分，每小题 3 分）

1、$|\boldsymbol{a}|<\mathbf{1}$；2、$|\boldsymbol{a}|<\dfrac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}$；3、$|\boldsymbol{a}|<\mathbf{1}$；4、$\dfrac{4}{2+\sqrt{3}}$；5、$\boldsymbol{Ax}-\boldsymbol{b}$

三、（9 分）

解：　(1) $\|B\|_1=0.9<1$，$\therefore$迭代法 $x_k=Bx_{k-1}+f$ 的收敛；--------------------（3 分）

(2) B 的特征值 $\lambda=1.5,0.8$，$\rho(B)=1.5>1$，$\therefore$迭代法 $x_k=Bx_{k-1}+f$ 发散；（6 分）

(3) B 的特征值 $\rho(B)=0.9<1$，$\therefore$迭代法 $x_k=Bx_{k-1}+f$ 收敛。　　　---------（9 分）

四、（14 分）

解：（1）**Jacobi** 迭代法的分量形式

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_1^{(\boldsymbol{k}+1)}=1-2\boldsymbol{x}_2^{(\boldsymbol{k})}+2\boldsymbol{x}_3^{(\boldsymbol{k})} \\ \boldsymbol{x}_2^{(\boldsymbol{k}+1)}=2-\boldsymbol{x}_1^{(\boldsymbol{k})}-\boldsymbol{x}_3^{(\boldsymbol{k})} \quad ;\boldsymbol{k}=0,1,2,\cdots \\ \boldsymbol{x}_3^{(\boldsymbol{k}+1)}=3-2\boldsymbol{x}_1^{(\boldsymbol{k})}-2\boldsymbol{x}_2^{(\boldsymbol{k})} \end{cases}$$

---------------------------------（2 分）

Gauss-Seidel 迭代法的分量形式

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_1^{(\boldsymbol{k}+1)}=1-2\boldsymbol{x}_2^{(\boldsymbol{k})}+2\boldsymbol{x}_3^{(\boldsymbol{k})} \\ \boldsymbol{x}_2^{(\boldsymbol{k}+1)}=2-\boldsymbol{x}_1^{(\boldsymbol{k}+1)}-\boldsymbol{x}_3^{(\boldsymbol{k})} \quad ;\boldsymbol{k}=0,1,2,\cdots \\ \boldsymbol{x}_3^{(\boldsymbol{k}+1)}=3-2\boldsymbol{x}_1^{(\boldsymbol{k}+1)}-2\boldsymbol{x}_2^{(\boldsymbol{k}+1)} \end{cases}$$

--------------------------------（4 分）

（2）**Jacobi** 迭代法的迭代矩阵为

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U})=\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix},$$

--------------------------------（6 分）

$\boldsymbol{\lambda}_1=\boldsymbol{\lambda}_2=\boldsymbol{\lambda}_3=0$，$\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{B})=0<1$，**Jacobi** 迭代法收敛　------------------------（8 分）

Gauss-Seidel 迭代法的迭代矩阵为

$$\boldsymbol{G}=(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

--------------------------------（10 分）

$\boldsymbol{\lambda}_1=0,\boldsymbol{\lambda}_2=\boldsymbol{\lambda}_3=2$，$\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{B})=2>1$，**Gauss-Seidel** 迭代法发散------------------（12 分）

（3）**SOR** 迭代法的分量形式

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -0.5x_1^{(k)} + 1.5(1 - 2x_2^{(k)} + 2x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = -0.5x_2^{(k)} + 1.5(2 - x_1^{(k+1)} - x_3^{(k)}) \quad ;k = 0,1,2,\cdots \\ x_3^{(k+1)} = -0.5x_3^{(k)} + 1.5(3 - 2x_1^{(k+1)} - 2x_2^{(k+1)}) \end{cases}$$ ---------------------（14 分）

五、（10 分）

证明：由 $x^* = Bx^* + g$ 与 $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g$ 相减得 $x^{(k+1)} - x^* = B\left(x^{(k)} - x^*\right)$

反复递推得 $x^{(k+1)} - x^* = B^{k+1}\left(x^{(0)} - x^*\right)$ --------------------------------（4 分）

设矩阵 B 的对应于特征值 λ 的特征向量为 y，若取初始向量 $x^{(0)} = x^* + y$，则

$$x^{(k+1)} - x^* = B^{k+1}y = \lambda^{k+1}y$$ --------------------------------（6 分）

从而有 $\left\|x^{(k+1)} - x^*\right\| = |\lambda|^{k+1}\|y\|$ --------------------------------（8 分）

因为 $|\lambda| < 1$，所以 $\lim\limits_{k\to\infty}\left\|x^{(k+1)} - x^*\right\| = 0$，即 $x^{(k+1)}$ 收敛到 x^*。 -------------（10 分）

六、（14 分）

解：容易验证系数矩阵 A 是正定矩阵。取解的初始近似向量为 $x^{(0)} = (0,0,0)^T$，用共轭梯度法迭代，计算结果如下：

$$\boldsymbol{r}^{(0)} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(0)} = (1,1,3)^T, \quad \boldsymbol{p}^{(0)} = \boldsymbol{r}^{(0)} = (1,1,3)^T$$ ------------------------------（2 分）

第 1 次迭代：

$$\alpha_0 = \frac{\left(\boldsymbol{r}^{(0)}, \boldsymbol{r}^{(0)}\right)}{\left(\boldsymbol{p}^{(0)}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}^{(0)}\right)} = \frac{1}{3}$$

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = \boldsymbol{x}^{(0)} + \alpha_0\boldsymbol{p}^{(0)} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right)^T$$

$$\boldsymbol{r}^{(1)} = \boldsymbol{r}^{(0)} - \alpha_0\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}^{(0)} = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)^T$$

$$\beta_0 = \frac{\left(\boldsymbol{r}^{(1)}, \boldsymbol{r}^{(1)}\right)}{\left(\boldsymbol{r}^{(0)}, \boldsymbol{r}^{(0)}\right)} = \frac{8}{33}$$

$$\boldsymbol{p}^{(1)} = \boldsymbol{r}^{(1)} + \beta_0\boldsymbol{p}^{(0)} = \left(\frac{10}{11}, \frac{52}{33}, \frac{2}{33}\right)^T$$ --（6 分）

第 2 次迭代：

$$\alpha_1 = \frac{\left(\boldsymbol{r}^{(1)}, \boldsymbol{r}^{(1)}\right)}{\left(\boldsymbol{p}^{(1)}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}^{(1)}\right)} = \frac{11}{25}$$

$$x^{(2)} = x^{(1)} + \alpha_1 p^{(1)} = \left(\frac{11}{15}, \quad \frac{77}{75}, \quad \frac{77}{75}\right)^T$$

$$r^{(2)} = r^{(1)} - \alpha_1 A p^{(1)} = \left(\frac{14}{25}, \quad -\frac{8}{25}, \quad -\frac{2}{25}\right)^T$$

$$\beta_1 = \frac{\left(r^{(2)}, r^{(2)}\right)}{\left(r^{(1)}, r^{(1)}\right)} = \frac{99}{625}$$

$$p^{(2)} = r^{(2)} + \beta_1 p^{(1)} = \left(\frac{88}{125}, \quad -\frac{44}{625}, \quad -\frac{44}{625}\right)^T$$ --------------------------------（10 分）

第 3 次迭代：

$$\alpha_2 = \frac{\left(r^{(2)}, r^{(2)}\right)}{\left(p^{(2)}, A p^{(2)}\right)} = \frac{25}{66}$$

$$x^{(3)} = x^{(2)} + \alpha_2 p^{(2)} = (1, \quad 1, \quad 1)^T$$

$$r^{(3)} = r^{(2)} - \alpha_2 A p^{(2)} = (0, \quad 0, \quad 0)^T$$

迭代结束，得到方程组的解：$x = (1.0000, 1.0000, 1.0000, 1.0000)^T$。------（14 分）

七、（10 分）

证明：λ 是 H 的任一特征值，u 是相应的特征向量，则 $Hu = \lambda u$，从而

$$u^T(A - HAH)u = u^T Au - u^T HAHu = u^T Au - (Hu)^T A(Hu)$$
$$= u^T Au - (\lambda u)^T A(\lambda u) = (1-\lambda^2)u^T Au$$ ---------------（4 分）

由于 A 和 $A - HAH$ 都正定，--------------------------------（6 分）

所以 $u^T(A - HAH)u = (1-\lambda^2)u^T Au > 0$，$u^T Au > 0$ ----------------------（8 分）

故 $1-\lambda^2 > 0$，$|\lambda| < 1$，$\boxed{\rho(H) < 1}$，所以题中结论成立。---------------------------（10 分）

八、（15 分）

解：(1) $B = D^{-1}(L+U)$，--------------------------------（2 分）

B 的特征方程为

$$\det(\lambda I - B) = \det\left(\lambda I - D^{-1}(L+U)\right) = \det\left(D^{-1}\right)\det(\lambda D - L - U) = 0$$

即 $\det(\lambda D - L - U) = 0$. --------------------------------（5 分）

(2) $G = (D-L)^{-1}U$，--------------------------------（7 分）

G 的特征方程为

$$\det(\lambda I - G) = \det\left(\lambda I - (D-L)^{-1}U\right) = \det\left((D-L)^{-1}\right)\det\left(\lambda(D-L)-U\right) = 0$$

即 $\det\left(\lambda(D-L)-U\right)=0$ --------------------------------（10 分）

(3) $G_\omega = (D-\omega L)^{-1}\left((1-\omega)D+\omega U\right)$， --------------------------------（12 分）

G_ω 的特征方程为

$$\det(\lambda I - G_\omega) = \det\left(\lambda I - (D-\omega L)^{-1}\left((1-\omega)D+\omega U\right)\right)$$
$$= \det\left((D-\omega L)^{-1}\right)\det\left(\lambda(D-\omega L)-(1-\omega)D-\omega U\right) = 0$$

即 $\det\left(\lambda(D-\omega L)-(1-\omega)D-\omega U\right)=0$. --------------------------------（15 分）

第 7 章 线性最小二乘问题

一、选择题（四个选项中仅有一项符合题目要求，每小题 3 分，共计 15 分)

1、在区间 $[0,1]$ 上满足 $y(0)=1.5, y(1)=2.5$ 的 0 次拟合多项式曲线是(　　　)

(1) $y=2$；(2) $y=1.5$；(3) $y=2.5$；(4) $y=4$。

2、设 $A\in C^{m\times n}$，对于其广义逆矩阵 A^{+}，下列性质不成立的是（　　　）。

（1）$(A^{+})^{+}=A$；（2）$(AB)^{+}=B^{+}A^{+}$；（3）$(A^{T})^{+}=(A^{+})^{T}$；（4）$rank(A^{+})=rank(A)$。

3、设方程组 $Ax=b, A\in R^{m\times n}$ 为不相容方程组，则下列说法错误的是（　　　）

(1) 该方程组一定存在最小二乘解；

(2) 该方程组的最小二乘解是方程组 $AA^{T}x=A^{T}b$ 的解；

(3) 若 $rank(A)=n\le m$，则其唯一的最小二乘解为 $x=(A^{T}A)^{-1}A^{T}b$；

(4) 若 $rank(A)<n\le m$，则其唯一的极小最小二乘解为 $x=A^{+}b$。

4、设 $A\in C^{m\times n}$ 的 **Moore-Penrose** 广义逆矩阵为 X，则下列方程中正确的是（　　）。

（1）$XAX=A$；（2）$AXA=X$；（3）$AXA=A$；（4）$(AX)^{H}=XA$。

5、设 **Householder** 变换矩阵 $H=I-2vv^{T}, v\in R^{n}$，下列说法错误的是（　　　）。

（1）H 是一个对称矩阵；（2）H 是一个正交矩阵；

（3）用 H 左乘以一个非零向量，可以将该向量变为单位向量；

（4）Hx 是 x 关于 v 的垂直超平面的镜面反射。

二、填空题（每小题 3 分，共计 15 分）

1、拟合三点 $A(0,2), B(1,4), C(2,6)$ 的平行于 x 轴的直线是 $y=4$ ____。

2、线性代数方程组 $Ax=b$ 相容的充要条件是 $r(A)=$ ____。

3、设 $u\in R^{n}$，则由此向量构造的 **Householder** 变换矩阵为____________。

4、设矩阵 $A\in R^{m\times n}$ 的秩为 r，且存在满秩分解 $A=FG$，则其 **Moore-Penrose** 广义逆矩阵

$A^{+}=$__________________。

5、2 阶的 **Givens** 变换矩阵 $G=$____________。

三、（10 分）求方程组 $\begin{pmatrix}1&2&3\\1&4&5\\1&6&9\\1&11&15\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\5\\7\\11\end{pmatrix}$ 的最小二乘解。

四、（13 分）求一个形如 $y=ae^{bx}$ $(a,b$ 为常数)的经验公式，使它能和下表给出的数据相拟合

x	1	1.25	1.50	1.75	2
y	5.10	5.79	6.53	7.45	8.46

五、（13 分）用改进的 **Gram-Schmidt** 正交化方法求方程组 $\begin{bmatrix}1&1&3\\1&2&4\\1&3&5\\1&4&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\5\\7\\11\end{bmatrix}$ 的极小最小二乘解。

六、（13 分）用 **Householder** $A=\begin{bmatrix}1&1&3\\1&2&4\\1&3&5\\1&4&6\end{bmatrix}$ 的正交分解 $A=QU$，其中 Q 为列正交矩阵，U 为是梯形矩阵。

七、（13 分）设 $A\in R^{m\times n}$，$b_1,b_1,\cdots,b_r\in R^m$，试证欲使 $x\in R^n$ 使 $\sum_{i=1}^{r}\|Ax-b_i\|_2^2$ 取得极小的充要条件为 x 是方程组 $Ax=\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}b_i$ 的最小二乘解。

八、（8 分）设 $A\in R^{m\times n}$，$A=UDV^T$ 是一种奇异值分解，证明 U 的列向量是对称矩阵 AA^T 的特征向量。

第 7 章 线性最小二乘问题 参考答案

一、选择题（15 分，每小题 3 分)

1、(1)　2、(2)　3、(2)　4、(3)　5、(3)

二、填空题（15 分，每小题 3 分）

1、$\boldsymbol{y=4}$；2、$\boldsymbol{rank(A)=rank(A,b)}$；3、$\boldsymbol{H=I-2uu^T/\|u\|_2}$ 2；4、$\boldsymbol{G^T(GG^T)^{-1}(F^TF)^{-1}F^T}$；

5、$\boldsymbol{G=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}}$

三、（10 分）

解：此方程组记为 $Ax=b$，系数矩阵矩阵 A 列满秩，方程组有唯一的最小二乘解。

法方程组 $A^TAx=A^Tb$ 为

$$\begin{pmatrix}3 & 23 & 32\\ 23 & 177 & 245\\ 32 & 245 & 340\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}26\\ 189\\ 262\end{pmatrix}$$

4

-------------------------------（2 分）

用平方根法求解，对系数矩阵 A^TA 进行 Cholesky 分解

$$A^TA=LL^T,L=\begin{pmatrix}2.000 & & \\ 11.50 & 6.690 & \\ 16.00 & 9.119 & 0.9215\end{pmatrix}$$

-------------------------------（6 分）

求解方程组 $Ly=A^Tb$，得 $y=(13.00,5,905,0.1697)^T$，---------------------（8 分）

然后求解方程组 $L^Tx=y$ 得 $x=(1.395,\ 0.6316,\ 0.1842)^T$，此即原方程组的最小二乘解。

-----------------------------（10 分）

四、（13 分）

解：对 $\boldsymbol{y=ae^{bx}}$ 两边取对数得 $\boldsymbol{\ln y=\ln a+bx}$　令 $\boldsymbol{Y=\ln y, a_0=\ln a}$ ------（3 分）

则有 $\boldsymbol{Y=a_0+bx}$，新的数据表为：

$\boldsymbol{x}$	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
$\boldsymbol{Y=\ln y}$	1.629	1.756	1.876	2.008	2.153

-----------------（6 分）

对数据表进行一次最小二乘拟合，得到法方程组为

$$\begin{cases}5a_0+7.5b=9.404\\ 7.5a_0+11.875b=14.422\end{cases}$$

-------------------------------（9 分）

解得$\begin{cases} a_0 = 1.122 \\ b = 0.5056 \end{cases}$ 所以$a = e^{a_0} \approx 3.071$ -------------------------------（12 分）

所求拟合函数 $y = 3.071e^{0.5056x}$。 -------------------------------（13 分）

五、（13 分）

解：首先求系数矩阵的正交三角分解。注意到矩阵的秩为 2, 且前 2 列线性无关。--（2 分）

分解第一步：

$$u_{11} = \|a_1\|_2 = 2，\ q_1 = \frac{a_1}{u_{11}} = (0.5, 0.5, 0.5, 0.5)^T，\ u_{12} = (q_1, a_2) = 5，\ u_{13} = (q_1, a_3) = 9，$$

$$a_2^{(2)} = a_2 - u_{12}q_1 = (-1.5, -0.5, 0.5, 1.5)^T，\ a_3^{(2)} = a_3 - u_{13}q_1 = (-1.5, -0.5, 0.5, 1.5)^T$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0.5 & -1.5 & -1.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1.5 & 1.5 \end{bmatrix}，\ u_1 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$ -----------------（5 分）

分解第二步：

$$u_{22} = \|a_2^{(2)}\|_2 = \sqrt{5} \approx 2.236，\ q_2 = \frac{a_2^{(2)}}{u_{22}} = (-0.6708, -0.2236, 0.2236, 0.6708)^T，$$

$$u_{23} = (q_2, a_3^{(2)}) = 2.236，\ a_3^{(3)} = a_3^{(2)} - u_{23}q_2 = 0，\ u_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2.236 & 2.236 \end{pmatrix}，$$

q_1 q_2 $a_3^{(2)}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0.5 & -1.5 & -1.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1.5 & 1.5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0.5 & -0.6708 & 0 \\ 0.5 & -0.2236 & 0 \\ 0.5 & 0.2236 & 0 \\ 0.5 & 0.6708 & 0 \end{bmatrix}，$$ --------------（8 分）

$$所以 Q = \begin{bmatrix} 0.5000 & -0.6808 \\ 0.5000 & -0.2236 \\ 0.5000 & 0.2236 \\ 0.5000 & 0.6708 \end{bmatrix}，\ U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.000 & 5.000 & 9.000 \\ 0 & 2.236 & 2.236 \end{bmatrix}。$$ -----（10 分）

求极小最小二乘解：解方程组$(UU^T)y = Q^T b$，

$$即 \begin{bmatrix} 110.0 & 31.30 \\ 31.30 & 10.00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13.00 \\ 5.814 \end{bmatrix}，\ y = (-0.4333, 1.938)^T，$$ -----------------（12 分）

则所求极小最小二乘解为 $\tilde{x} = U^T y = (-0.8667, 2.167, 0.4333)^T$。 --------------（13 分）

六、（13 分）

解：注意到矩阵的秩为 2, 且前 2 列线性无关。增广矩阵为 $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})=\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&3&3\\1&2&4&5\\1&3&5&7\\1&4&6&11\end{array}\right]$，

-------------------------------- （2 分）

第一步：

$\|a_1\|_2=2$， $\boldsymbol{y}=(2,0,0,0)^T$， $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{x}-\|\boldsymbol{x}\|_2\,\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{a}_1-\|\boldsymbol{a}_1\|_2\,\boldsymbol{e}_1=(-1\quad 1\quad 1\quad 1)^T$，

$\boldsymbol{u}\Leftarrow(1\quad -1\quad -1\quad -1)^T$ （规格化处理）， $\beta=\dfrac{2}{\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u}}=\dfrac{1}{2}$， ---------------- （4 分）

$$\boldsymbol{H}_1=\boldsymbol{I}-\beta\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}，\quad \boldsymbol{H}_1(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})\Rightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}2&5&9&13\\0&-2&-2&-5\\0&-1&-1&-3\\0&0&0&1\end{array}\right]；$$

-------------------------------- （8 分）

第二步：

$\boldsymbol{x}=(-2\quad -1\quad 0)^T$， $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{x}-\|\boldsymbol{x}\|_2\,\boldsymbol{e}_1=(-2-\sqrt{5}\quad -1\quad 0)^T$，

$\boldsymbol{u}\Leftarrow(1\quad {}^{1}\!/\!_{2+\sqrt{5}}\quad 0)^T$ （规格化处理）， $\beta=\dfrac{2}{\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u}}=1.8944$， ------ （10 分）

$$\boldsymbol{H}_2'=\boldsymbol{I}-\beta\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T=\begin{bmatrix}-0.8944&-0.4472&0\\-0.4472&0.8944&0\\0&0&1\end{bmatrix}，\quad \boldsymbol{H}_2=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&-0.8944&-0.4472&0\\0&-0.4472&0.8944&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}，$$

$U_{r\times n}$ $\qquad Q^T b$

$$\boldsymbol{H}_2\boldsymbol{H}_1(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})\Rightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}2&5&9&13\\0&2.2361&2.2361&5.8138\\0&0&0&-0.4472\\0&0&0&1\end{array}\right]，$$

$Q_1^T\ m\times r$

$$\boldsymbol{H}_2\boldsymbol{H}_1=\begin{bmatrix}0.5&0.5&0.5&0.5\\-0.6708&-0.2236&0.2236&0.6708\\0.2236&-0.6708&0.6708&-0.2236\\0.5&-0.5&-0.5&0.5\end{bmatrix}，$$ -------------------------- （12 分）

Q^T

H_2H_1 的前 2 行的转置即为 $Q=\begin{bmatrix} 0.5000 & -0.6808 \\ 0.5000 & -0.2236 \\ 0.5000 & 0.2236 \\ 0.5000 & 0.6708 \end{bmatrix}$，$U=\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2.000 & 5.000 & 9.000 \\ 0 & 2.236 & 2.236 \end{bmatrix}$。

--------------------------------（13 分）

七、（13 分）

证明：记 $b_i=\begin{pmatrix} b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{im} \end{pmatrix}^T$，$A=(a_{ij}), x=(x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n)^T$，

令 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\overset{\Delta}{=}\sum_{i=1}^{r}\|Ax-b_i\|_2^2=\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{m}(\sum_{j=1}^{n}a_{kj}x_j-b_{ik})^2$，--------------（2 分）

$\frac{\partial f}{\partial x_l}=\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{m}2a_{kl}(\sum_{j=1}^{n}a_{kj}x_j-b_{ik}), l=1,2,\cdots,n$，则 $\nabla f=2\sum_{i=1}^{r}A^T(Ax-b_i)$，--（4 分）

$\Rightarrow$ 必要性

若 f 取得极小，则 $\nabla f=2\sum_{i=1}^{r}A^T(Ax-b_i)=0$，$rA^TAx=\sum_{i=1}^{r}A^Tb_i$，$A^TAx=A^T(\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}b_i)$，

即 x 是方程组 $Ax=\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}b_i$ 的最小二乘解。 --------------------------------（9 分）

$\Leftarrow$ 充分性

若 x 是方程组 $Ax=\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}b_i$ 的最小二乘解，则 x 满足法方程组 $A^TAx=A^T(\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}b_i)$，

即 $\sum_{i=1}^{r}A^T(Ax-b_i)=0$，对 $\forall y\in R^n, y=x+z$， --------------------------------（10 分）

$$\sum_{i=1}^{r}\|Ay-b_i\|_2^2=\sum_{i=1}^{r}(A(x+z)-b_i, A(x+z)-b_i)$$

$$=\sum_{i=1}^{r}(Ax-b_i,Ax-b_i)+\sum_{i=1}^{r}(Az,Az)+2\sum_{i=1}^{r}(Ax-b_i,Az)$$

$$=\sum_{i=1}^{r}\|Ax-b_i\|_2^2+r\|Az\|_2^2+2z^T\sum_{i=1}^{r}A^T(Ax-b_i)$$

$$=\sum_{i=1}^{r}\|Ax-b_i\|_2^2+r\|Az\|_2^2\geq\sum_{i=1}^{r}\|Ax-b_i\|_2^2$$

所以 $\sum_{i=1}^{r}\|Ax-b_i\|_2^2$ 取得极小。 --------------------------------（13 分）

八、（8 分）

证明： 记$\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \cdots & \boldsymbol{u}_m\end{pmatrix}$， --------------------------------（2 分）

$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{diag}(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_p),\sigma_i\geq 0,\boldsymbol{i}=1,2,\cdots,\boldsymbol{p};\boldsymbol{p}=\min\{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\}$-------------（4 分）

$\boldsymbol{AA^T}=\boldsymbol{UDV^TVDU^T}=\boldsymbol{UD}^2\boldsymbol{U^T}$， $\boldsymbol{AA^TU}=\boldsymbol{UDV^TVDU^T}=\boldsymbol{UD}$， -------（6 分）

所以有$\boldsymbol{AA^Tu_i}=\sigma_i\boldsymbol{u}_i,\boldsymbol{i}=1,2,\cdots,\boldsymbol{m}$，即结论成立。 ------------------（8 分）

第 8 章 矩阵特征值计算方法

一、选择题（四个选项中仅有一项符合题目要求，每小题 3 分，共计 15 分)

1、下列方法中不属于计算矩阵特征值的方法是（　　　）

（1）带位移的反幂法；（2）**QR** 方法；（3）雅可比方法；（4）共轭梯度法。

2、对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 采用幂法迭代，如果该方法收敛，则其收敛速度取决于（　　　　）

(1)模最大特征值和模次最大特征值的比值；

(2)模最大特征值和模次最大特征值的模的比值；

(3)模次最大特征值和模最大特征值的比值；

(4)模次最大特征值和模最大特征值的模的比值。

3、设计算矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值的基本 **QR** 迭代方法产生的矩阵序列为 $\left\{\boldsymbol{A}^{(k)}\right\}_{k=0}^{\infty}$，则该序列中任意两个矩阵之间具有（　　　　）。

（1）合同关系；（2）正交相似关系；（3）幂等关系；（4）不确定关系。

4、关于矩阵特征值的计算，下列说法错误的是（　　　　）

（1）幂法是求实矩阵的按模最大的特征值及相应的特征向量的方法；

（2）反幂法是求实矩阵的按模最小的特征值及相应的特征向量的方法；

（3）雅可比方法是求实矩阵的全部特征值及相应的特征向量的方法；

（4）带原点位移的反幂法可以计算实矩阵的任一特征值。

5、对于计算矩阵特征值的经典雅可比方法，下列说法正确的是（　　　　）。

（1）按照行列指标的自然顺序选取旋转平面；

（2）每次迭代选取矩阵中绝对值最大的元素所在的行列作为旋转平面；

（3）每次迭代选取矩阵中非对角元素绝对值最大者所在的行列作为旋转平面；

（4）选取旋转平面的原则是使每次迭代矩阵的 $\boldsymbol{F}-$范数尽可能地减少。

二、填空题（每小题 3 分，共计 15　分）

1、设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\\ 2 & 2\end{bmatrix}$，求一正交矩阵 H_1, $\boldsymbol{P}=$______________，使得 $\boldsymbol{PA}$ 为上梯形矩阵。

2、如果 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{R}^{m\times n}$ 的所有特征值都是半单的，则称 $\boldsymbol{A}$ 为____________矩阵。

3、设 $\boldsymbol{A}$ 为上 **Hessenberg** 矩阵，且 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{QR}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 $\boldsymbol{QR}$ 分解，则 $\boldsymbol{RQ}$ 为___________矩阵。

4、设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0}\\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{3}\end{pmatrix}$，则区间 $[0,4]$ 内包含矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的___2___个特征值。

5、计算矩阵特征值的雅可比迭代过程中采用____________变换方法产生矩阵序列。

三、（10 分）利用幂法求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}11 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}$ 的模最大的特征值以及相应的一个特征向量，迭代至相邻两次特征值的误差不超过 0.5，取初始向量 $x_0=[1\quad 1]^T$。

四、（14 分）已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}6 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$，试用带位移的反幂法计算其最接近 6 的特征值及对应的特征向量，初始向量取 $\boldsymbol{u}_0=(\frac{9}{5}\quad 1\quad \frac{3}{2})^T$，迭代两步。

五、（12 分）（1）设 $\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u}=1, \boldsymbol{H}=\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T$，且 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{w}=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{v}$，证明 $\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$；

$u=b-Hb$

（2）设 $\boldsymbol{b}=(2\quad 2\quad 1)^T$，试构造镜面反射矩阵 $\boldsymbol{H}$，使得 $\boldsymbol{H}\boldsymbol{b}=(0\quad 0\quad a)^T$，并求 $\boldsymbol{a}$ 的值，其中 $\boldsymbol{a}>\boldsymbol{0}$。

六、（12 分）设实对称矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix}$，试利用 **Jacobi** 方法计算该矩阵的全部特征值和特征向量的近似值，迭代一步。

七、（12 分）设 $\boldsymbol{A}$ 为 $\boldsymbol{n}$ 阶实方阵，证明：存在镜面反射矩阵 $\boldsymbol{H}_1,\boldsymbol{H}_2,\cdots,\boldsymbol{H}_{n-1}$，使得 $\boldsymbol{H}_{n-1}\cdots\boldsymbol{H}_2\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{A}$ 为上三角矩阵。

八、（10 分）设 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$ 为实对称矩阵，其特征值次序记为 $|\lambda_1|\ge|\lambda_2|\ge\cdots\ge|\lambda_n|$，对应的特征向量 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n$ 是一个单位正交向量组，即 $(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}0 & i\ne j\\ 1 & i=j\end{cases}$，试证明：

（1）对 $\forall \boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{x}\ne\boldsymbol{0}$，有 $\lambda_n\le\frac{(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})}{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})}\le\lambda_1$； （2） $\lambda_1=\max\limits_{x\ne 0}\frac{(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})}{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})}$；

（3） $\lambda_n=\min\limits_{x\ne 0}\frac{(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})}{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})}$。

第 8 章 矩阵特征值计算方法 参考答案

一、选择题（15 分，每小题 3 分)

1、(4)　2、(4)　3、(2)　4、(3)　5、(3)

二、填空题（15 分，每小题 3 分）

1、$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$；2、非亏损；3、上 **Hessenberg**；4、2；5、**Givens** 变换

三、（10 分）

解：$\boldsymbol{u}_0=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{y}_1=\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_0=\begin{bmatrix}13\\4\end{bmatrix},\boldsymbol{u}_1=\boldsymbol{y}_1/\max(\boldsymbol{y}_1)=\begin{bmatrix}1\\4/13\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0.3077\end{bmatrix}$

$\mu_1=\max(\boldsymbol{y}_1)=13$ -- （3 分）

$\boldsymbol{y}_2=\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_1=\begin{bmatrix}151/13\\25/13\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11.6154\\1.9231\end{bmatrix},\boldsymbol{u}_2=\boldsymbol{y}_2/\max(\boldsymbol{y}_2)=\begin{bmatrix}1\\25/151\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0.1656\end{bmatrix}$

$\mu_2=\max(\boldsymbol{y}_2)=151/13=11.6154$ -- （6 分）

$\boldsymbol{y}_3=\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_2=\begin{bmatrix}1711/151\\226/151\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11.3311\\1.4967\end{bmatrix},\boldsymbol{u}_3=\boldsymbol{y}_3/\max(\boldsymbol{y}_3)=\begin{bmatrix}1\\226/1711\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0.1321\end{bmatrix}$

$\mu_3=\max(\boldsymbol{y}_3)=1711/151=11.3311$ --- （9 分）

$|\mu_3-\mu_2|=0.2843<0.5$，迭代结束。 -- （10 分）

四、（14 分）

解：该题带位移的反幂法的迭代公式为

$$\begin{cases} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}-6\boldsymbol{I})=\boldsymbol{L}\boldsymbol{U},\boldsymbol{L}\boldsymbol{z}_k=\boldsymbol{P}\boldsymbol{u}_{k-1} \\ \boldsymbol{U}\boldsymbol{y}_k=\boldsymbol{z}_k \\ \mu_k=\max(\boldsymbol{y}_k) \\ \boldsymbol{u}_k=\dfrac{\boldsymbol{y}_k}{\mu_k},\lambda=6+\dfrac{1}{\mu_k} \end{cases} \quad k=1,2,\cdots，\text{其中 } \boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}$$

（$\boldsymbol{P}$ 不唯一）（4 分）

$$L=\begin{bmatrix}1&0&0\\ \frac{1}{2}&1&0\\ 0&\frac{4}{5}&1\end{bmatrix},U=\begin{bmatrix}2&-3&1\\ 0&\frac{2}{5}&-\frac{11}{2}\\ 0&0&\frac{27}{5}\end{bmatrix},$$ --（8 分）

$k=1$ 时，

$$z_k=(1\quad 1\quad 1)^T,y_k=(1.619\quad 0.807\quad 0.185)^T,\mu_k=1.619,$$
$$u_k=(1\quad 0.499\quad 0.114)^T,\lambda=6.618$$ ；-----------------（11 分）

$k=2$ 时，

$$z_k=(0.499\quad -0.135\quad 1.108)^T,y_k=(0.743\quad 0.397\quad 0.205)^T,\mu_k=0.743,$$
$$u_k=(1\quad 0.535\quad 0.276)^T,\lambda=7.346$$ ；

靠近 6 的一个近似特征值的近似值为 $\lambda=7.346$。-----------------------------------（14 分）

五、（12 分）

解：（1）因为 $w=x+v=x+Hx=2x-2(u^Tx)u$，则

$w^Tu=[2x^T-2(u^Tx)u^T]u=2x^Tu-2(u^Tx)u^Tu=0$。--------------------------（3 分）

（2）由 $Hb=(0\quad 0\quad a)^T$，$\|b\|_2=3$，则 $\|b\|_2=\|Hb\|_2=\left\|\begin{pmatrix}0\\0\\a\end{pmatrix}\right\|_2=|a|=3\Rightarrow a=3$；（5 分）

令 $u=b-\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}\Rightarrow\|u\|_2^2=12$， --（7 分）

则 $H=I-2\dfrac{uu^T}{\|u\|_2^2}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$。 --（12 分）

六、（12 分）

解：记 $A_0=A,a_{12}^{(0)}=2$ 为主元，$a_{11}^{(0)}=1,a_{22}^{(0)}=-1$，取 $p=1,q=2(p<q)$，----（2 分）

则有

$\tau=\dfrac{a_{11}^{(0)}-a_{22}^{(0)}}{2a_{12}^{(0)}}=0.5$， $t=\dfrac{sign(\tau)}{|\tau|+\sqrt{1+\tau^2}}=0.618034$， $\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}=0.850651$，

$\sin\theta=t\cos\theta=0.525731$， --（5 分）

$$R_1=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.850651 & 0.525731 & 0\\ -0.525731 & 0.850651 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$ ------------------（8 分）

$$A_1=R_1A_0R_1^T=\begin{bmatrix}2.236068 & 0 & 0.525731\\ 0 & -2.236068 & 0.850651\\ 0.525731 & 0.850651 & 3\end{bmatrix},$$ ------------------------（10 分）

$$H_1^T=H_0^TR_1^T=IR_1^T=\begin{bmatrix}0.850651 & -0.525731 & 0\\ 0.525731 & 0.850651 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$（列存放相应的特征向量），

此时，$E(A_1)=1.0$。 --（12 分）

七、（12 分）

证明：设 A 的第 1 列为 a_1，则存在镜面反射矩阵 H_1，使得 $H_1a_1=\begin{pmatrix}\beta_1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$，则有

$$H_1A=\begin{pmatrix}\beta_1 & r^T\\ 0 & A_{n-1}\end{pmatrix},$$ --（3 分）

设存在 $H_1,H_2,\cdots,H_k$，使得 $H_k\cdots H_2H_1A=\begin{pmatrix}U_k & B_k\\ 0 & A_{n-k}\end{pmatrix}$， ------------------（5 分）

其中 $U_k=\begin{pmatrix}\beta_1 & * & * & *\\ 0 & \beta_2 & * & *\\ \vdots & \ddots & \ddots & *\\ 0 & \cdots & 0 & \beta_k\end{pmatrix}$为 k 阶上三角矩阵，A_{n-k} 为 $n-k$ 阶矩阵。

设 A_{n-k} 的第 1 列为 a_{n-k}，则存在镜面反射矩阵 H'_{n-k}，使得 $H'_{n-k}a_{n-k}=\begin{pmatrix}\beta_{k+1}\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$，（7 分）

则有

$$H'_{n-k}A_{n-k}=\begin{pmatrix}\beta_{k+1} & r_{n-k}{}^T\\ 0 & A_{n-k-1}\end{pmatrix}$$，令 $H_{k+1}=\begin{pmatrix}E_k & 0\\ 0 & H'_{n-k}\end{pmatrix}$，则 H_{k+1} 仍然为镜面反射矩阵，

---（9 分）

且有 $H_{k+1}H_k\cdots H_2H_1A=\begin{pmatrix}E_k & 0\\ 0 & H'_{n-k}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}U_k & B_k\\ 0 & A_{n-k}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}U_{k+1} & B_{k+1}\\ 0 & A_{n-k-1}\end{pmatrix}$，

其中 $U_{k+1}=\begin{pmatrix}\beta_1 & * & * & *\\ 0 & \ddots & * & *\\ \vdots & \ddots & \beta_k & *\\ 0 & \cdots & 0 & \beta_{k+1}\end{pmatrix}$，由归纳法得证。-------------------------------------（12 分）

八、（10 分）

证明：1）因为对 $\forall x\neq 0$，有 $x=\sum_{i=1}^{n}c_ix_i$，且 $\|x\|_2=(\sum_{i=1}^{n}c_i^2)^{\frac{1}{2}}$，　-----------------（3 分）

所以 $\lambda_n=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}c_i^2\lambda_n}{\sum_{i=1}^{n}c_i^2}\leq\dfrac{(Ax,x)}{(x,x)}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}c_i^2\lambda_i}{\sum_{i=1}^{n}c_i^2}\leq\dfrac{\sum_{i=1}^{n}c_i^2\lambda_1}{\sum_{i=1}^{n}c_i^2}=\lambda_1$；　---------------------------（6 分）

（2）因为 $Ax_1=\lambda_1x_1$，$\dfrac{(Ax_1,x_1)}{(x_1,x_1)}=\dfrac{\lambda_1(x_1,x_1)}{(x_1,x_1)}=\lambda_1$，由（1）即得；------------（8 分）

（3）因为 $Ax_n=\lambda_nx_n$，$\dfrac{(Ax_n,x_n)}{(x_n,x_n)}=\dfrac{\lambda_n(x_n,x_n)}{(x_n,x_n)}=\lambda_n$，由（1）即得。---------（10 分）

第 9 章 常微分方程初值问题数值方法

一、选择题（四个选项中仅有一项符合题目要求，每小题 3 分，共计 15 分)

1、改进的 **Euler** 法的整体截断误差是（　　　）

(1) $O(h)$；(2) $O(h^2)$；(3) $O(h^3)$；(4) $O(h^4)$。

2、经典的四阶龙格—库塔公式的局部截断误差是(　　　　)。

(1) $O(h^3)$；(2) $O(h^4)$；(3) $O(h^5)$；(4) $O(h^6)$。

3、设 $y_{n+1} = y_{n-1} + 2hf(x_n, y_n)$ 是求解常微分方程初值问题 $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ 的数值公式，对于该迭代公式，下列说法正确的是（　　　）

（1）单步一阶；（2）多步一阶；（3）单步二阶；（4）多步二阶。

4、对于常微分方程初值问题 $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$，下列说法错误的是（　　　　）

(1) 隐式方法要比显式方法稳定性要好；

(2) N 级显式龙格-库塔方法的局部收敛阶可以达到 $N+1$；

(3) N 级隐式龙格-库塔方法的局部收敛阶可以达到 $2N$；

(4) 如果 $f(x,y)$ 满足对 y 的李普希兹（**Lipschitz**）条件，则龙格-库塔方法一定收敛。

5、求解常微分方程初值问题的中点公式 $\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hk_2 \\ k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_1) \end{cases}$ 的局部截断误差为

（1）$O(h)$；）（2）$O(h^2)$；（3）$O(h^3)$；（4）$O(h^4)$。　(xn, yn)

二、填空题（每小题 3 分，共计 15 分）

1、设 $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ 的显式单步法为 $y_{n+1} = y_n + h\phi(x_n, y_n, h)$，如果该方法与初值问题相容，则增量函数 ϕ 满足条件________________。

2、**Euler** 方法的绝对稳定区间为________________。

3、k 阶齐次线性差分方程 $a_k y_{n+k} + a_{k-1} y_{n+k-1} + \cdots + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n = 0$ 的特征方程是____。

4、用于检验求解常微分方程初值问题的数值方法稳定性的实验方程是__________________。

5、求解常微分方程初值问题的梯形方法的局部收敛阶为__________。

三、（10 分）对于一阶微分方程初值问题$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=2x-y\\ y(0)=1\end{cases}$，取步长$h=0.2$，分别用 **Euler** 预报一校正法和经典的四阶龙格—库塔法求$y(0.2)$的近似值。

四、（12 分）某伞兵与降落伞质量为$90kg$，当伞张开时以$12m/s$速度垂直下降，假设空气阻力与伞的下降速度成正比，在速度为$6m/s$时，测得的空气阻力为$353N$（牛顿），试用欧拉方法求伞兵开伞后，第 1 秒末、第 2 秒末时各时刻的速度。

$\frac{dv}{dt}$

五、（12 分）证明改进的欧拉方法能够准确地求解初值问题$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=ax+b\\ y(0)=0\end{cases}$。

$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[\quad]$

六、（12 分）对于初值问题$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=-y\\ y(0)=1\end{cases}$，证明：用梯形公式求得的数值解为$y_n=\left(\dfrac{2-h}{2+h}\right)^n$，证明当步长$h\to 0$时，$y_n$收敛于初值问题的精确解$y(x)=e^{-x}$。

七、（14 分）用二步法$y_{n+1}=y_n+\dfrac{h}{2}[\alpha f(x_n,y_n)+\beta f(x_{n-1},y_{n-1})]$求解一阶常微分方程初值问题$\begin{cases}y'=f(x,y)\\ y(x_0)=y_0\end{cases}$，问：如何选择参数$\alpha,\beta$的值，才使该方法的阶数尽可能地高？写出此时的局部截断误差主项，并说明该方法是几阶的。

八、（10 分）考虑常微分方程初值问题$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)\\ y(a)=\eta\end{cases}(a\le x\le b)$，应用数值积分的有关理论导出二步 **Adams** 显式公式：$y_{n+1}=y_n+\dfrac{h}{2}[3f(x_n,y_n)-f(x_{n-1},y_{n-1})]$。

第 9 章 常微分方程初值问题数值方法 参考答案

一、选择题（15 分，每小题 3 分)

1、(2)　2、(3)　3、(4)　4、(2)　5、(3)

二、填空题（15 分，每小题 3 分）

1、$\phi(x,y,0)=f(x,y)$；2、$(-2,0)$；3、$a_k r^k + a_{k-1} r^{k-1} + \cdots + a_1 r + a_0 = 0$；

4、$\dfrac{dy}{dx}=\lambda y, \mathrm{Re}\lambda<0$；5、2

三、（10 分）

解：**Euler** 预报－校正法

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(0)} = y_n + 0.2(2x_n - y_n) = 0.4x_n + 0.8y_n \\ y_{n+1} = y_n + 0.1(2x_n - y_n + 2x_{n+1} - y_{n+1}^{(0)}) = 0.16x_n + 0.2x_{n+1} + 0.82y_n \end{cases}$$ ---------（3 分）

$y(0.2) \approx y_1 = 0.2\times0.2 + 0.82\times1 = 0.86$ --（4 分）

经典的四阶龙格—库塔法

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \dfrac{0.2}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ k_1 = 2x_n - y_n \\ k_2 = 2(x_n + 0.1) - (y_n + 0.1k_1) \\ k_3 = 2(x_n + 0.1) - (y_n + 0.1k_2) \\ k_4 = 2(x_n + 0.2) - (y_n + 0.2k_3) \end{cases}$$ --（8 分）

$k_1 = 1.5041; k_2 = 1.5537; k_3 = 1.5487; k_4 = 1.5943$

$y(0.2) \approx y_1 = 0.8562$ ---（10 分）

四、（12 分）

解：设阻力为 $f = kv$，由题意知 $k = \dfrac{353}{6} \approx 58.8$，--------------------------------------（2 分）

根据力学知识建立其数学模型为

$$\begin{cases} 90\dfrac{dv}{dt} = 90g - 58.8v \\ v(0) = 12 \end{cases} \quad 0 \le t \le 5，即 \begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = 9.8 - \dfrac{9.8}{15}v \\ v(0) = 12 \end{cases} \quad 0 \le t \le 5，$$ -------------（7 分）

相应的欧拉公式为 $v_{n+1} = v_n + h(9.8 - \dfrac{9.8}{15}v_n), h = 1$，-------------------------------------（9 分）

计算结果为

t	0	1	2
v	12	13.96	14.6395

-- （12 分）

五、（12 分）

解：该初值问题的精确解为 $y(x)=\frac{1}{2}ax^2+bx$，只需证明每一步的迭代值等于对应的精确值

即 $y_n=y(x_n)$。 -- （2 分）

由题意知 $f(x,y)=ax+b, x_0=0$，令 $x_n=nh$，则 $y(x_n)=\frac{1}{2}ax_n^2+bx_n$， ------- （5 分）

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_n+hf(x_n,y_n))]=y_n+\frac{h}{2}[ax_n+b+ax_{n+1}+b],$$

$$=y_n+\frac{ah}{2}[x_n+x_{n+1}]+hb=y_n+\frac{ah^2}{2}[2n+1]+hb,$$ ------------------------------------- （8 分）

由上式递推得到

$x_n = nh$

$$y_n=y_{n-1}+\frac{ah^2}{2}(2n-1)+hb=y_{n-2}+\frac{ah^2}{2}(2n-1+2n-3)+2hb$$ ---------------- （10 分）

$$=\cdots=y_0+\frac{ah^2}{2}(2n-1+2n-3+\cdots+3+1)+nhb$$

即 $y_n=\frac{a(nh)^2}{2}+nhb=\frac{1}{2}x_n^2+bx_n=y(x_n)$。 -- （12 分）

六、（12 分）

解：梯形公式为 $y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1})]$， $f(x,y)=-y$ ------ （2 分）

$$y_{n+1}=y_n-\frac{h}{2}[y_n+y_{n+1}] \quad\Rightarrow\quad y_n=y_{n-1}-\frac{h}{2}[y_{n-1}+y_n]$$ --------------------- （5 分）

从而得到递推公式 $y_n=\frac{2-h}{2+h}y_{n-1}=\left(\frac{2-h}{2+h}\right)^2 y_{n-2}=\cdots=\left(\frac{2-h}{2+h}\right)^n y_0$， $y_0=1$--- （7 分）

所以 $y_n=\left(\frac{2-h}{2+h}\right)^n$， -- （9 分）

由题设知此处 $x=nh$

$$\lim_{h\to0} y_n = \lim_{h\to0}\left(\frac{2-h}{2+h}\right)^n = \lim_{h\to0}\left(\frac{2-h}{2+h}\right)^{\frac{x}{h}} = \lim_{h\to0}\left(1-\frac{2h}{2+h}\right)^{-\frac{2+h}{2h}\cdot\left(-\frac{2h}{2+h}\cdot\frac{x}{h}\right)} = e^{-x}$$ 。--（12 分）

七、（14 分）

证明：局部截断误差为

$$T_{n+1} = y(x_{n+1}) - y(x_n) - \frac{h}{2}[\alpha f(x_n, y(x_n)) + \beta f(x_{n-1}, y(x_{n-1}))]$$ ------------（2 分）

$$= y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!}y''(x_n) + \frac{h^3}{3!}y'''(x_n) + O(h^4) - y(x_n) - \frac{h}{2}[\alpha y'(x_n) + \beta y'(x_{n-1})]$$

--（5 分 ）

$$= y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!}y''(x_n) + \frac{h^3}{3!}y'''(x_n) + O(h^4) - y(x_n) - \frac{h}{2}\alpha y'(x_n)$$

$$-\frac{h}{2}\beta[y'(x_n) - hy''(x_n) + \frac{h^2}{2!}y'''(x_n) + O(h^3)]$$ -----（8 分）

$$= h(1-\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2})y'(x_n) + \frac{h^2}{2!}(1+\beta)y''(x_n) + (\frac{h^3}{3!}-\frac{h^3}{4}\beta)y'''(x_n) + O(h^4)$$ ------（10 分）

因此有 $\begin{cases} 1-\dfrac{\alpha}{2}-\dfrac{\beta}{2}=0 \\ 1+\beta=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=3 \\ \beta=-1 \end{cases}$ ------------------（12 分）

局部截断误差主项为 $\dfrac{5h^3}{12}y'''(x_n)$，该方法是 2 阶的。 ------------------------（14 分）

八、（10 分）

证明：记 $h=\dfrac{b-a}{n}, x_i = a+ih, 0\le i\le n$

将原方程两边在区间 $[x_n, x_{n+1}]$ 上积分得 $y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x))dx$，--（2 分）

以 x_n 和 x_{n-1} 为插值节点作 $f(x, y(x))$ 的一次插值多项式，

$$L_1(x) = f(x_n, y(x_n))\frac{x-x_{n-1}}{x_n-x_{n-1}} + f(x_{n-1}, y(x_{n-1}))\frac{x-x_n}{x_{n-1}-x_n}$$ ----------------------------（4 分）

代入前式

$$y(x_{n+1}) \approx y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} L_1(x)dx$$

$$= y(x_n) + f(x_n, y(x_n))\int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{x - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}dx + f(x_{n-1}, y(x_{n-1}))\int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{x - x_n}{x_{n-1} - x_n}dx$$

$$= y(x_n) + \frac{h}{2}[3f(x_n, y(x_n)) - f(x_{n-1}, y(x_{n-1}))]$$ ------------------------------（6 分）

将 $y(x_n)$ 用 y_n 代替，“$\approx$”换为“$=$”，即得 2 步 Adams 显式公式：

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[3f(x_n, y_n) - f(x_{n-1}, y_{n-1})]$$。-----------------------------------（8 分）

综合训练

一、选择题（四个选项中仅有一项符合题目要求，每小题 2 分，共计 20 分)

1、设 π 的近似数 π^* 有 3 位有效数字，则其相对误差限为（　　　　）

(A) $\frac{1}{2}\times10^{-2}$；　(B) $\frac{1}{2}\times10^{-3}$；　(C) $\frac{1}{2}\times10^{-4}$；　(D) $\frac{1}{2}\times10^{-5}$。

2、已知方程 $x^3-x^2-1=0$ 在区间 $[1,2]$ 有唯一根，若用二分法计算，至少迭代（　　　　）

次可以保证误差不超过 10^{-3}。

(A)11；　(B)9；　(C)8；　(D)7。

3、求 $\sqrt{5}$ 的 **Newton** 迭代格式为（　　　　）

(A) $x_{k+1}=\frac{x_k}{2}-\frac{5}{2x_k}$；(B) $x_{k+1}=\frac{x_k}{2}+\frac{2}{5x_k}$；(C) $x_{k+1}=\frac{x_k}{5}+\frac{5}{2x_k}$；(D) $x_{k+1}=\frac{x_k}{2}+\frac{5}{2x_k}$。

4、已知求方程 $f(x)=0$ 在区间 $[a,b]$ 上的根的不动点迭代为 $x_{k+1}=\varphi(x_k),k=0,1,2,\cdots$，对于其产生的数列 $\{x_k\}$，下列说法正确的是（　　　　）

(A) 若数列 $\{x_k\}$ 收敛，则迭代函数 $\varphi(x)$ 唯一；

(B) 若对 $\forall x\in[a,b],|\varphi'(x)|<1$，则 $\{x_k\}$ 收敛；

(C) 若 $\forall x\in[a,b],|\varphi'(x)|\le L<1$，则 $\{x_k\}$ 收敛；

(D) 若 $\forall x\in[a,b],|\varphi'(x)|>1$，则 $\{x_k\}$ 收敛。

5、设方程组 $Ax=b, A\in R^{m\times n}(m\ge n)$ 为不相容方程组，则下列说法正确的是（　　　　）

(A) 该方程组不一定存在最小二乘解；

(B) 该方程组的最小二乘解是方程组 $A^TAx=A^Tb$ 的解；

(C) 若 $rank(A)=n$，则其唯一的最小二乘解为 $x=(AA^T)^{-1}A^Tb$；

(D) 若 $rank(A)<n$，则其唯一的最小二乘解为 $x=A^+b$。

6、若求积公式 $\int_a^b f(x)dx\approx\sum_{k=0}^{5}A_k f(x_k)$ 为高斯（**Gauss**）型，下列说法错误的是（　　　　）

(A)该求积公式始终是稳定的；(B) $\sum_{k=0}^{5} A_k = b-a$；(C) 该求积公式的代数精度为9；

$= 0$

(D) $\int_a^b (x^4+3x)\omega(x)dx = 0$，其中 $\omega(x)=\prod_{k=0}^{5}(x-x_k)$。

7、设矩阵 $A \in R^{n\times n}$， $Q \in R^{n\times n}$， 且 $Q^TQ = E$， 则下列关系式不成立的是（　　　）

(Qx, Qx)

(A) $\|A\|_2 = \|AQ\|_2$；(B) $\|QA\|_F = \|A\|_F$；(C) $\|Qx\|_2 = \|x\|_2$，其中 $x \in R^n$；

(D) $cond_2(A) = cond_\infty(AQ)$。

8、设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \end{bmatrix}$， $x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$， 则 $\|Ax\|_\infty$ 和 $\|A\|_\infty$ 的值分别为（　　　）

(A) 8，8；　　(B) 8，7；　　(C) 8，6；　　(D) 7，7。

9、设 $l_k(x)$ 是以 $\{x_k = k\}_{k=0}^{9}$ 为节点的 **Lagrange** 插值基函数，则 $\sum_{k=0}^{9} kl_k(x) =$（　　　）

(A) x；　　(B) k；　　(C) i；　　(D) 1。

10、设矩阵 $A \in R^{n\times n}$， 下列说法正确的是（　　　）

(A) 反幂法是计算矩阵的模最大的特征值和相应特征向量的方法；

(B) 计算矩阵 A 的特征值的 **QR** 迭代方法产生的矩阵序列具有正交相似关系；

(C) 若矩阵 A 的谱半径 $\rho(A) < 1$，则求解方程组 $Ax = b$ 的 **Jacobi** 方法收敛；

(D) 若矩阵 A 的谱半径 $\rho(A) < 1$，则求解方程组 $Ax = b$ 的 **Gauss-Seidel** 方法收敛。

二、填空题（每小题 3 分，共计 18 分）

1、若迭代法 $x_{k+1} = ax_k + \frac{2b}{x_k^2}$ 收敛于 $\sqrt{2}$，且要求收敛阶尽量高，则 $a =$ _____， $b =$ ____。

2、设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 4 \\ 6 & -3 & 5 \end{bmatrix}$ 的 **Doolittle** 分解为 $A = LU$， 则 $U =$ ________________。

3、设 $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 3 & -1 & -1\\ 4 & -4 & 5\end{bmatrix}$，求正交矩阵 $P=$____________，使得 PA 为上 **Hessenberg** 矩阵。

4、设向量函数 $F(x,y)=\begin{bmatrix}x^3-2y^2\\ x^2+xy^2\end{bmatrix}$，则其导函数在点 $(1,2)$ 值 $F'(1,2)=$______________。

$1,\ \cancel{x},\ x^2,\ \cancel{x^3},\ \cancel{x^4}$

5、已知求积公式 $\int_1^3 f(x)dx\approx\frac{1}{3}[f(1)+4f(2)+f(3)]$，则其代数精度为____3____。

6、已知下列数据：

x_i	-1	0	1	2
y_i	1	0	1	0

利用最小二乘法确定经验公式 $y=ax+bx^2$ 中的参数 a 和 b，则 $a=$__$-\frac{4}{11}$__，$b=$__$\frac{3}{11}$__。

三、计算题（5 道小题，共计 54 分）

1、（10 分）已知方程 $1-x+\frac{1}{2}\sin x=0$ 在 $[\frac{1}{2},\frac{\pi}{2}]$ 内存在唯一根，（1）试建立一种收敛于方程根的迭代方法，并说明收敛的理由；（2）写出相应的 **Steffenson** 迭代格式，并以 $x_0=1.5$ 为初值迭代一步。

2、（10 分）取 5 个等距节点，分别用复化梯形公式和复化辛普生公式计算积分 $\int_{-1}^{1} e^{-x} dx$ 的近似值。

3、（10 分）已知求解一阶常微分方程初值问题 $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ 的下列二步方法：

$y_{n+2} = y_{n+1} + h[af_{n+1} + bf_n]$，其中 $f_n = f(x_n, y_n)$，问：当参数 a, b 取何值时，才使该方法的阶数尽可能地高？并说明该方法是几阶的。

4、（12 分）已知 $f(x)$ 的函数表为

x_i	0	1	4
y_i	0	1	2

（1）试求 $f(x)$ 在 $[0,4]$ 上的 **Hermite** 插值多项式 $H(x)$，使之满足下列条件

3

$$H(x_k)=f(x_k),k=0,1,2;H'(x_1)=\frac{1}{2};$$

（2）写出余项 $R(x)=f(x)-H(x)$ 的表达式。

5、（12 分）取步长 $h=0.1$，分别利用 **Euler** 预报—校正方法和经典的四阶龙格—库塔法，

求解初值问题 $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=x+y \\ y(0)=1 \end{cases}$ 在 $y(0.1)$ 的近似值。

四、（8 分）已知方程组 $Ax=b$，其中 $A=\begin{bmatrix} 3 & 10 & 1 \\ -10 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 10 \end{bmatrix}$，$b=\begin{bmatrix} 14 \\ -5 \\ 14 \end{bmatrix}$，

（1）构造求解该方程组的一种收敛的迭代格式，并说明理由；

（2）写出（1）中迭代方法的迭代矩阵。

综合训练 参考答案

一、选择题（20 分，每小题 2 分)

1、(A)　2、(B)　3、(D)　4、(C)　5、(B)　6、(C)　7、(D)　8、(A)　9、(A)　10、(B)

二、填空题（15 分，每小题 3 分）

1、$\boldsymbol{a}=\frac{2}{3},\boldsymbol{b}=\frac{\sqrt{2}}{3}$；2、$\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix}2&1&2\\0&3&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$（$\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&-2&1\end{bmatrix}$）；3、$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\frac{3}{5}&\frac{4}{5}\\0&\frac{4}{5}&-\frac{3}{5}\end{bmatrix}$；

4、$\boldsymbol{F}'(1,2)=\begin{bmatrix}3&-8\\6&4\end{bmatrix}$；5、3；6、$\boldsymbol{a}=-\frac{4}{11},\boldsymbol{b}=\frac{3}{11}$。

三、计算题（5 道小题，共计 55 分）

1、（8 分）解：（1）$1-x+\frac{1}{2}\sin x=0\Rightarrow x=1+\frac{1}{2}\sin x$，取迭代函数 $\varphi(x)=1+\frac{1}{2}\sin x$，

迭代格式 $x_{k+1}=1+\frac{1}{2}\sin x_k;k=0,1,2,\cdots$ ------------（2 分）

当 $x\in[0.5,\frac{\pi}{2}]$ 时，$\left|\varphi'(x)\right|=\left|\frac{1}{2}\cos x\right|\le\frac{1}{2}=L<1$，故该迭代格式收敛。

-----------------------------------（4 分）

相应的 **Steffenson** 迭代格式：$x_{k+1}=x_k-\frac{(\varphi(x_k)-x_k)^2}{(\varphi(\varphi(x_k))-2\varphi(x_k)+x_k)};k=0,1,2,\cdots$

$$x_{k+1}=x_k-\frac{(1+\frac{1}{2}\sin x_k-x_k)^2}{[1+\frac{1}{2}\sin(1+\frac{1}{2}\sin x_k)-2(1+\frac{1}{2}\sin x_k)+x_k]};k=0,1,2,\cdots$$ ---------（6 分）

$$x_1=1.5-\frac{(1+\frac{1}{2}\sin 1.5-1.5)^2}{[1+\frac{1}{2}\sin(1+\frac{1}{2}\sin 1.5)-2(1+\frac{1}{2}\sin 1.5)+1.5]}=1.4987$$ ------------（8 分）

2、（10 分）解：将区间 $[-1,1]$ 4 等分，$h=1/2$，令 $f(x)=e^{-x}$，计算各节点的函数值为：

x_i	-1	-1/2	0	1/2	1
y_i	0.3679	0.6065	1	1.6487	2.7183

--（3 分）

由复合梯形公式得（$n=4,h=1/2$）

$$T_4=\frac{1/2}{2}\times[f(-1)+2f(-1/2)+2f(0)+2f(1/2)+f(1)]\approx 2.3992$$ -----------（6 分）

由复合辛普生公式得（$n=2,h=1$）

$$S_2=\frac{1}{6}\times[f(-1)+2f(-1/2)+4f(0)+2f(1/2)+f(1)]\approx 2.3512$$ ----------（10 分）

3、（10 分）

解：设 $y_i=y(x_i),i=n,n+1$，则局部截断误差为 $y_{n+2}=y_{n+1}+h[af_{n+1}+bf_n]$

$$\begin{aligned}T_{n+2}&=y(x_{n+2})-y_{n+2}\\&=y(x_{n+2})-y(x_{n+1})-h[af(x_{n+1},y(x_{n+1}))+bf(x_n,y(x_n))]\end{aligned}$$ ----------------------（2 分）

$$\begin{aligned}&=y(x_n)+2hy'(x_n)+\frac{4h^2}{2!}y''(x_n)+\frac{8h^3}{3!}y'''(x_n)+O(h^4)\\&-y(x_n)-hy'(x_n)-\frac{h^2}{2!}y''(x_n)-\frac{h^3}{3!}y'''(x_n)+O(h^4)\\&-h[ay'(x_{n+1})+by'(x_n)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&=y(x_n)+2hy'(x_n)+\frac{4h^2}{2!}y''(x_n)+\frac{8h^3}{3!}y'''(x_n)+O(h^4)\\&-y(x_n)-hy'(x_n)-\frac{h^2}{2!}y''(x_n)-\frac{h^3}{3!}y'''(x_n)+O(h^4)\\&-h[a(y'(x_n)+hy''(x_n)+\frac{h^2}{2!}y'''(x_n)+O(h^3))+by'(x_n)]\end{aligned}$$ ---------（5 分）

$$=h(1-a-b)y'(x_n)+h^2(2-\frac{1}{2}-a)y''(x_n)+h^3(\frac{4}{3}-\frac{1}{6}-\frac{a}{2})y'''(x_n)+O(h^4)$$ ---------（7 分）

因此有 $\begin{cases}1-a-b=0\\ \frac{3}{2}-a=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{3}{2}\\ \beta=\frac{1}{2}\end{cases}$ ------------------------（9 分）

局部截断误差主项为 $-\frac{13h^3}{12}y'''(x_n)$，该方法是 2 阶的。 ------------------------（10 分）

4、（12 分）

解：$H(x)=N_2(x)+kx(x-1)(x-4)$，其中 $N_2(x)=x-\frac{1}{6}x(x-1)=-\frac{1}{6}x^2+\frac{7}{6}x$ 为不考虑导数条件的 2 次牛顿插值多项式。 ---（4 分）

代入导数条件 $H'(1)=N_2'(1)-3k=\frac{1}{2}\Rightarrow k=\frac{1}{9}$ （$N_2'(4)=\frac{5}{6}$）

$H(x)=N_2(x)+\frac{1}{9}x(x-1)(x-4)$ ----------------------------------（7 分）

设 $R(x)=f(x)-H(x)=k(x)x(x-1)^2(x-4)$ ---------（9 分）

令 $g(t)=f(t)-H(t)-k(x)t(t-1)^2(t-4)$， ---------（10 分）

则 $g(t)$ 有 4 个互不相同的根 $x_i, i=0,1,2; x$，（$x\neq x_i$，否则结论显然成立）

且 $g'(1)=0$，故由罗尔定理 $g'(t)$ 有 4 个互不相同的根，以此类推，则存在 ξ 使得 $g^{(4)}(\xi)=0$，

即有 $g^{(4)}(\xi)=f^{(4)}(\xi)-k(x)4!=0\Rightarrow k(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}$

因此 $R(x)=f(x)-H(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x(x-1)^2(x-4)$。------------------------------（12 分）

5、（10 分）

解：（1）**Euler** 预报—校正法

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(0)}=y_n+0.1(x_n+y_n)=0.1x_n+1.1y_n \\ y_{n+1}=y_n+0.05(x_n+y_n+x_{n+1}+y_{n+1}^{(0)})=0.105x_n+0.005+1.105y_n \end{cases}$$ ---------------（3 分）

$y(0.1)\approx y_1=1.11$ ---（5 分）

（2）经典四阶龙格—库塔法：

$$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+\frac{0.1}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4) \\ k_1=x_n+y_n \\ k_2=x_n+0.05+y_n+0.05k_1 \\ k_3=x_n+0.05+y_n+0.05k_2 \\ k_4=x_n+0.1+y_n+0.1k_3 \end{cases}$$ ------------------------（9 分）

$$\begin{cases} k_1 = x_0 + y_0 = 1 \\ k_2 = x_0 + 0.05 + y_0 + 0.05k_1 = 1.1 \\ k_3 = x_0 + 0.05 + y_0 + 0.05k_2 = 1.105 \\ k_4 = x_0 + 0.1 + y_0 + 0.1k_3 = 1.2105 \end{cases}$$ -----------------（10 分）

$y(0.1) \approx y_1 = 1.0736$ ---（12 分）

四、(6 分)交换方程组的前两行，则原方程组 $Ax = b$ 等价于 $\begin{bmatrix} -10 & 2 & 3 \\ 3 & 10 & 1 \\ 3 & 1 & 10 \end{bmatrix} x = b$，$b = \begin{bmatrix} -5 \\ 14 \\ 14 \end{bmatrix}$

此时系数矩阵为严格对角占优矩阵，故 **Jacobi** 和 **Gauss-Seidel** 迭代法均收敛。-----（3 分）

答案（1）：**Jacobi** 迭代法的分量形式

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = [5 + 2x_2^{(k)} + 3x_3^{(k)}]/10 \\ x_2^{(k+1)} = [14 - 3x_1^{(k)} - x_3^{(k)}]/10 ; k = 0,1,2,\cdots \\ x_3^{(k+1)} = [14 - 3x_1^{(k)} - x_2^{(k)}]/10 \end{cases}$$ ------------------------------（6 分）

迭代矩阵为：

$$B = D^{-1}(L+U) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{10} & \frac{3}{10} \\ -\frac{3}{10} & 0 & -\frac{1}{10} \\ -\frac{3}{10} & -\frac{1}{10} & 0 \end{bmatrix},$$ ------------------------------（8 分）

答案（2）：**Gauss-Seidel** 迭代法分量形式

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = [5 + 2x_2^{(k)} + 3x_3^{(k)}]/10 \\ x_2^{(k+1)} = [14 - 3x_1^{(k+1)} - x_3^{(k)}]/10 ; k = 0,1,2,\cdots \\ x_3^{(k+1)} = [14 - 3x_1^{(k+1)} - x_2^{(k+1)}]/10 \end{cases}$$ ------------------------------（6 分）

Gauss-Seidel 迭代法的迭代矩阵为

$$G = (D-L)^{-1}U = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{3}{10} \\ 0 & \frac{3}{50} & -\frac{1}{100} \\ 0 & \frac{27}{500} & \frac{91}{1000} \end{bmatrix},$$ ------------------------------（8 分）