

太阳影子定位的计算模型

摘要

本文针对太阳影子定位技术的实现问题进行研究，主要解决了描述太阳影子长度变化和根据太阳影子变化数据或视频确定其地点与日期的问题。

针对问题一，我们借助几何和天文知识，建立了太阳影子长度关于其所在地理位置和物体高度的模型，分析了影子长度关于各个参数的变化规律；并用地理纬度、经度、日序、时刻等参数求出太阳高度角，结合物体高度，建立了物体投影长度计算模型；最终代入附件中提供的数据，得出其在给定时间的太阳影子长度变化曲线。

针对问题二，我们首先讨论了直接拟合二次函数的不可行性；然后利用影子长度的变化建立了最小二乘法拟合模型，并进一步引入影子长度变化比例和影子角度变化值作为目标参数，从而提高了数据的利用率和模型的精确性；最终针对附件一中的数据求解，得到两个可能的目标地点，具体结果如下表：

附件一 可能地点	经度	纬度
	109.7394 E	18.3326 N
	102.6672 E	3.5665 S

针对问题三，其求解变量增加了日期（日序），此时最小二乘法拟合计算的时间复杂度仅增加了较小的常数倍，所以我们沿用问题二的算法。利用改进的最小二乘法拟合，最终分别求出附件二、三中两个可能的目标地点，具体结果如下表：

	经度	纬度	日期(日序)	杆长
附件二	79.7938 E	39.8926 N	5月24日(144)	2.0008
可能地点	79.7939 E	39.8928 S	1月17日(17)	2.0008
附件三	109.9854 E	27.1108 N	1月6日(6)	2.9564
可能地点	110.245 E	32.8488 S	5月4日(124)	3.0356

针对问题四，我们首先利用平面图像中的平行线相交于无限远的透视原理，根据图像中的物体作出辅助线，得到其消隐点连成的确定而唯一的消隐线（地平线）；并借助图像中的参考物，建立空间直角坐标系，得出影子顶点坐标的变化数据；最终我们借助问题二、三中使用的算法，求得结果如下表：

	经度	纬度	日序
附件四	111.2172 E	40.6356 N	
可能地点	54.5964 W	7.3181 N	
未知日期情况下	110.2352 E	41.0880 N	6月22日(173)
所得结果	54.5505 W	6.1663 N	6月21日(172)

另外，我们计算了所得情形下影子长度与题目所给影子长度的方差之和，其大小均小于 10^{-3} ，验证了我们得到的结果的准确性。

关键词：太阳高度角 最小二乘拟合 透视原理 消隐线

一、 问题重述

本题着重讨论了太阳影子定位技术的实现，以相关的地理知识为基础，利用几何求解和最优规划等数学工具，解决以下几个问题：

1. 针对某高度为 3 米的固定直杆，在给定日期、时间范围、经纬度的情况下，建立影子长度变化的数学建模；
2. 针对某固定高度的固定直杆，已知给定日期、21 个时刻下的投影坐标，求出该物体所在的可能地点的经纬度；
3. 针对某固定高度的固定直杆，已知给定某日期 21 个时刻下的投影坐标，求出该物体所在的可能地点的经纬度及相应日期；
4. 针对某高度为 2 米的固定直杆，根据一份拍摄于 2015 年 7 月 13 日上午 8 时 54 分 06 秒至 9 时 34 分 33 秒的视频，提取出其投影变化信息，求出该物体所在的可能地点的经纬度。
5. 基于第四问，若未知拍摄日期，能否出直杆所在的可能地点的经纬度及日期。

二、 模型假设

1. 直杆在测量过程中相对地面是完全静止的；
2. 太阳光线为平行光线，且测量时天气晴朗；
3. 忽略大气对阳光折射的微弱影响；
4. 测量地点间的海拔高度相对地日距离可以忽略不计
5. 直杆的体积可忽略不计；
6. 视频在拍摄过程中的抖动可以忽略不计；
7. 假设地面是完全平整的。

三、 符号说明

符号	说明	符号	说明
l	直杆影子长度	t_c	当地实际时间与北京时间的时差
h	直杆长度	A_i	太阳方位角
α	太阳高度角	B_i	实际影长的角度
φ_x	地点纬度	x_i	实际影子顶点坐标的横坐标
φ_y	地点经度	y_i	实际影子顶点坐标的纵坐标
δ	太阳赤纬	C_i	估计数据相邻时间点的影长比
t	当地时角	D_i	实际数据相邻时间点的影长比
b	地球公转的相对角度	$ \vec{JI} $	箱子侧边的实际长度
N	从 1 月 1 号算起的日序	$ \vec{LO} $	箱子侧边的实际长度
st	真太阳时	LO	箱子的图上长度
t_b	北京时间	LN	直杆图上长度

四、 模型建立与求解

4.1 问题一：影子长度变换的数学模型

4.1.1 影子长度求解分析和模型建立

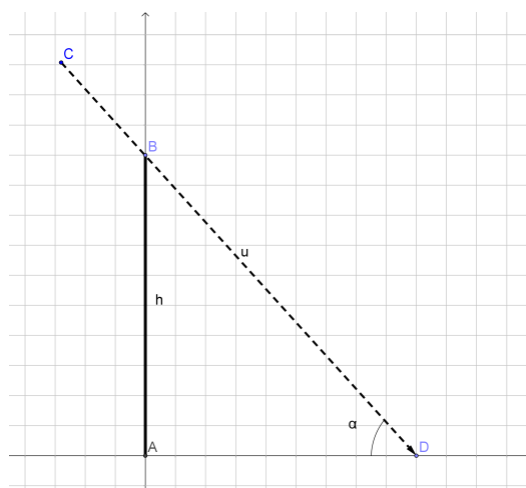


图 1 直杆投影的几何模型

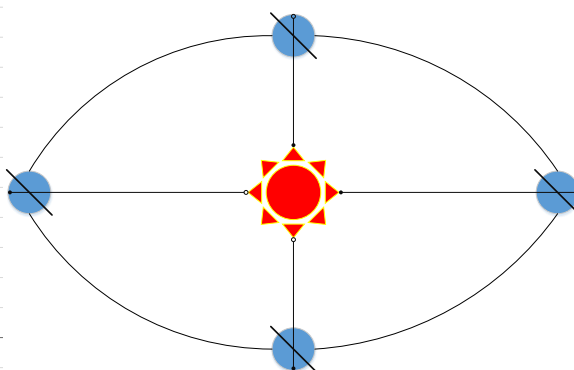


图 2 地球公转示意图

如图 1，根据几何知识可以求出高度为 h 的直杆 AB 在其垂直于的地面上的投影 AD 的长度 l ：

$$l = h \cot \alpha$$

因此，关键问题是求出光线的入射角度 α 。经查阅相关地理与天文知识文献^[1-3]，我们得知，这个角度即为太阳高度角，它与所处的地点、日期和时刻有关：

$$\sin \alpha = \sin \varphi_x \sin \delta + \cos \varphi_x \cos \delta \cos t$$

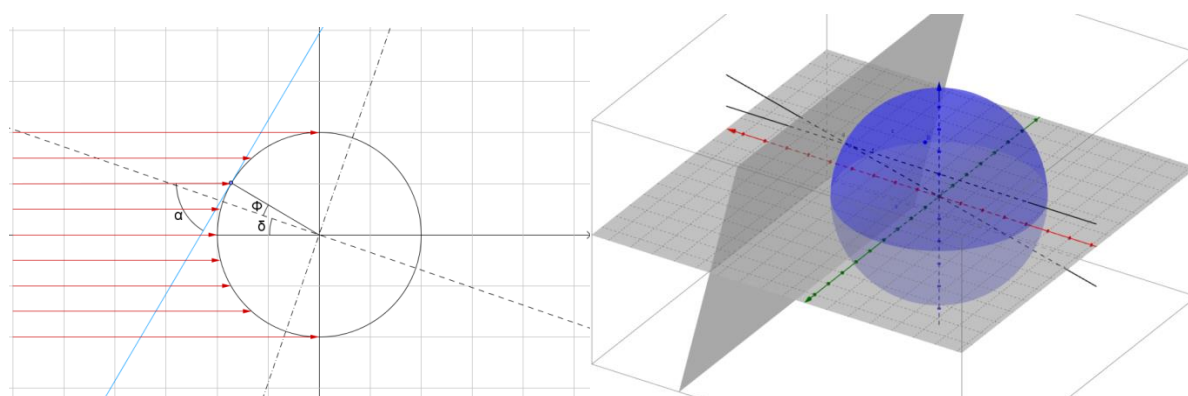


图 3 太阳光照射地球的简易模型

其中：

φ_x 为当地的地理纬度，为题目给出的已知变量；

δ 为太阳赤纬，是地球赤道平面与太阳和地球中心的连线之间的夹角（如图 3），由于地球的公转，它每时每刻都在变化着，其中在春分和秋分时刻等于零，而在夏至和冬至时刻有极值，分别为正负 23.442° ，太阳赤纬角在公转运动中任何时刻的具体值都是严格已知的（如图 2），利用查得的公式^[3]可以得出结果：

$$\delta = [0.006918 - 0.399912 \cos(b) + 0.070257 \sin(b) - 0.006758 \cos(2b) + 0.000907 \sin(2b) - 0.002697 \cos(3b) + 0.00148 \sin(3b)](180/\pi)$$

其中， b 是地球公转的相对角度：

$$b = 2\pi(N-1)/365$$

其中， N 为日数，即自每年 1 月 1 日为第一天开始计算，该天的日序。

t 为时角，是太阳光照到地面的一点和地心的连线与当地正午时地、日中心连线分别在地球赤道平面上的投影之间的夹角，具体来说：当地实际时间 12 点时的时角为零，前后每隔一小时变化 15° ，若以北京时间为标准时间，则：

$$\begin{aligned} t &= 15^\circ(st - 12) \\ st &= t_b - t_c \\ t_c &= (120^\circ - \varphi_y)/15^\circ \end{aligned}$$

其中：

st 为真太阳时：

t_b 为北京时间；

t_c 为当地实际时间与北京时间的时差：

φ_y 为当地的地理经度。

联立上述公式即可得出相应结果，即：

$$\begin{cases} l = h \cot \alpha \\ \sin \alpha = \sin \varphi_x \sin \delta + \cos \varphi_x \cos \delta \cos t \\ \delta = [0.006918 - 0.399912 \cos(b) + 0.070257 \sin(b) - 0.006758 \cos(2b) \\ \quad + 0.000907 \sin(2b) - 0.002697 \cos(3b) + 0.00148 \sin(3b)](180/\pi) \\ b = 2\pi(N-1)/365 \\ t = 15^\circ(st - 12) \\ st = t_b - t_c \\ t_c = (120^\circ - \varphi_y)/15^\circ \end{cases}$$

其中自变量分别为 h ， N ， t_b ， t_c ， φ_x ， φ_y ，标准时间以北京时间为准。

4.1.2 各参数变化对影子高度的影响分析

根据上述模型建立，我们得到以下各参数变化对影子高度的影响分析结果：

(1) 当纬度 φ_x 、经度 φ_y 、日期 N 、北京时间 t_b 固定，随着杆长 h 增加，影长 l 的变化随之增加；

(2) 当纬度 φ_x 、经度 φ_y 、日期 N 、杆长 h 固定，随着北京时间 t_b 增加，影长 l 的变化先减少后增加，且在中午某时刻出现最小值；

(3) 当纬度 φ_x 、日期 N 、杆长 h 、北京时间 t_b 固定，随着经度 φ_y 增加，影长 l 的变化如图 4-a；

(4) 当纬度 φ_x 、经度 φ_y 、杆长 h 、北京时间 t_b 固定，随着日期 N 的增加，影长 l 的变化先减少后增加，如图 4-b；

(5) 当经度 φ_y 、杆长 h 、北京时间 t_b ，日期 N 固定，随着纬度 φ_x 的增加，影长 l 的变化是赤道最短，越往两级越长，如图 4-c。

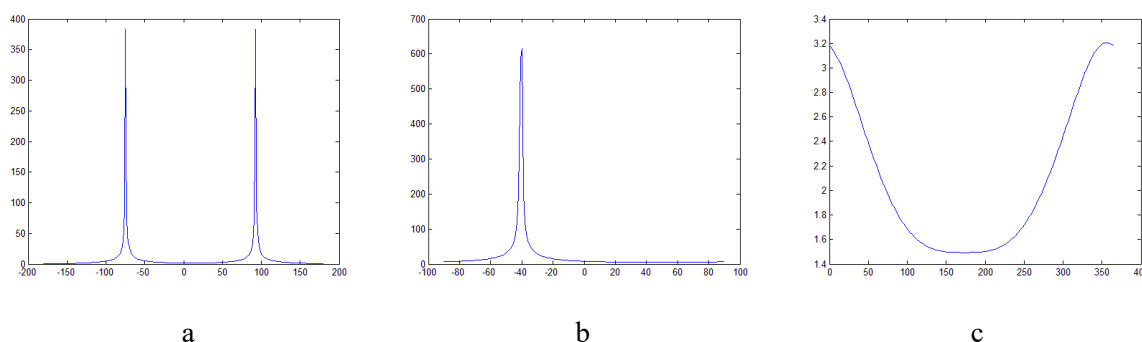


图 4 各参数变化对影子高度的影响

4.1.3 基于题目给定条件的计算

题目要求画出 2015 年 10 月 22 日北京时间 9:00-15:00 之间天安门广场（北纬 39 度 54 分 26 秒,东经 116 度 23 分 29 秒）3 米高的直杆的太阳影子长度的变化曲线。

将上述数据，即一年中第 294 天，从北京时间早上九时至十五时，北纬 39 度 54 分 26 秒,东经 116 度 23 分 29 秒，杆高为 3 米，代入上述方程组，即：

$$h = 3$$

$$N = 294$$

$$t_b = \text{from } 9 \text{ to } 15$$

$$\varphi_x = 39.9072254^\circ N$$

$$\varphi_y = 116.3913982^\circ E$$

我们利用 MATLAB 工具，解出结果并绘制出图像：

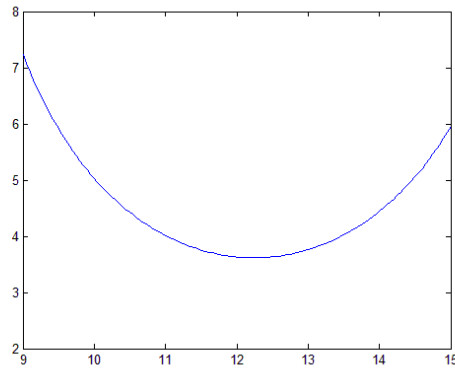


图 5 题目要求时间地点的太阳影子长度的变化曲线

其中横轴为时刻，单位为时；纵轴为影子长度，单位为米。

需要注意的是，图中有几条性质是我们所强调和关注的：

- 正午(12 时)的太阳高度角最大，因此影子最短；
- 且地球转动近似匀速，所以图像关于正午近似对称；
- 但由于天安门广场所在地的经度（东经 116 度 23 分 29 秒）和标准北京时区经度（东经 120 度）有差距，而太阳高度角是由真太阳时计算得出的，因此图像有一定偏移。

4.2 问题二：根据给定日期与时刻的影子坐标变化数据推算其位置

4.2.1 问题分析

本题实际上是第二题的变形，即第一问是在已知杆高、日期、时间范围和经纬度的情况下求出影子长度的变化，而本题是在已知日期、时间范围和影子变化的情况下求出可能地点的经纬度。

因此本题需要考虑如下问题：

- 如何建立模型，解决所求目标变量变化的问题。
- 如何消除杆高未知的影响；
- 问题一只需求出杆高一个变量，而问题二需要求出经度和纬度两个变量，问题三更考虑了日期变化的问题，因此急需考虑如何解决所求目标变量增加的问题；

本题提供的信息相对有限，因此不能继续依照第一问的方法直接公式推导求出定值。针对上述三个问题，我们下面提出方法进行解决。

4.2.2 建立模型解决目标变量

经度和纬度实际上是两个变量，而本题提供的不是影子长度变化的数据，而是提供了其具体坐标 l_x, l_y 的变化。因此抽象地来说，第一题是在已知自变量 $h, N, t_b, t_c, \varphi_x, \varphi_y$ 的情况下求影长 l ；而第二题是在已知自变量 N, t_b, t_c, l_x, l_y 的情形下，带入固定参数进行影长的最小二乘拟合，求出 φ_x, φ_y 。

4.2.3 函数直接拟合的讨论

观察问题一的图像，我们发现其图形变化的趋势与二次曲线较为类似，因此可以考虑采用二次函数直接拟合附件一数据。

但我们通过计算可知发现不同天数的影长变化率（即其导数）是明显非线性且不稳定的（如图 6），则将问题一的图像近似看作二次函数是不精确的，故采用二次函数拟合的思路是不可取的。

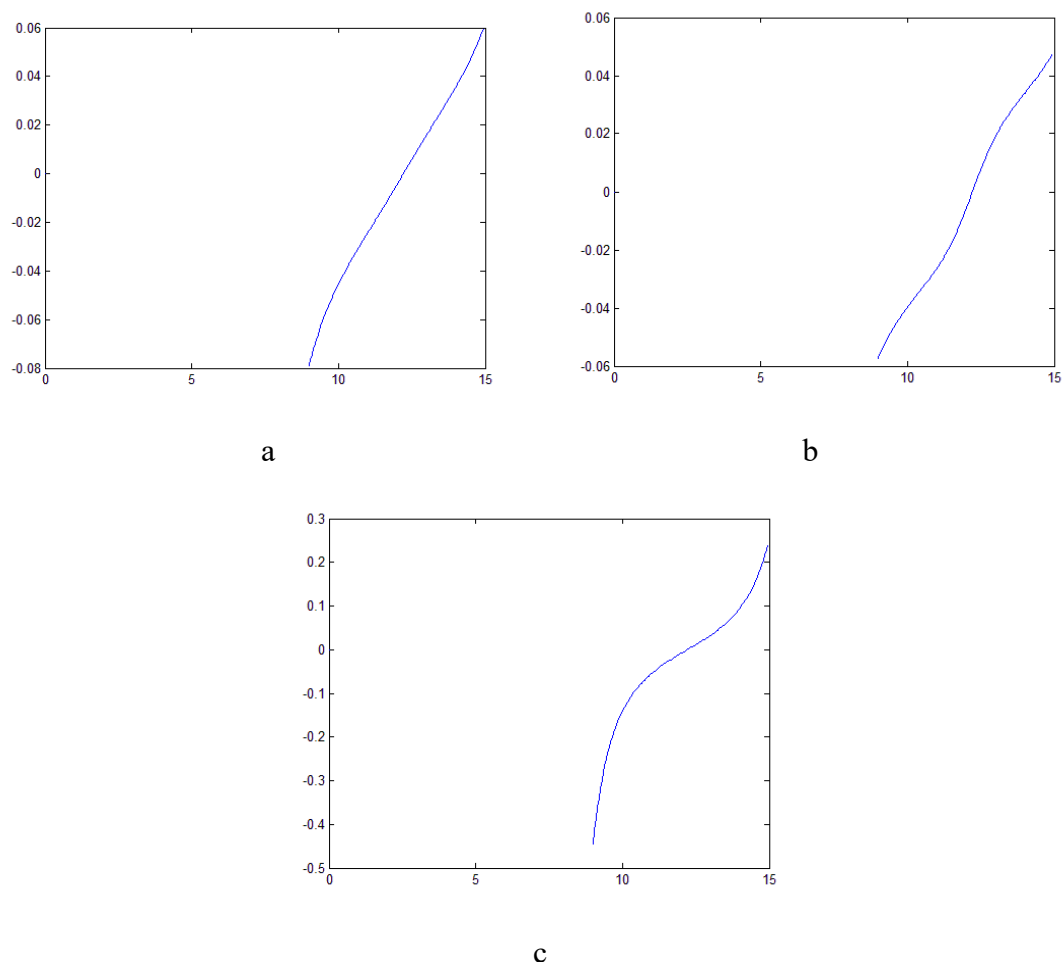


图 6 第 100 日、200 日和第 365 日的 0 至 15 时的影长变化率

4.2.4 采用最小二乘法拟合

根据附件一中的数据我们可以得到影子端点的坐标，而由坐标我们可以得到的数据有：影子长度 l 和影子角度变化值 ΔB （因为未知坐标系的正方向、因此无法确定影子相对参考系的实际角度）。

首先依据第一问中的推导我们可以计算得出：

$$\begin{cases} h = l \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \\ \sin \alpha = \sin \varphi_x \sin \delta + \cos \varphi_x \cos \delta \cos t \end{cases}$$

化简得到：

$$l = \sqrt{\frac{h^2}{(\sin \varphi_x \sin \delta + \cos \varphi_x \cos \delta \cos t)^2} - h^2}$$

其中影子长度 l 跟经度 φ_x 、纬度 φ_y 、杆高 h 这三个参数有关，因此我们可以以影子长度 l 为目标函数的主体部分，代入附件中的数据，利用最小二乘拟合的方法找出与其最为相符的地点。

接下来我们对 φ_x ， φ_y ， h 随机赋初值代入上式，得到对应不同时间点下的影长 $\hat{l}_i, i=1,2,\dots,n$ ，同时，计算出附件一所给数据不同时间点下的影长 $l_i, i=1,2,\dots,n$ 。

其中：

$$l_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}, i=1,2,\dots,21。$$

因此我们可以构造出目标函数：

$$\min \omega = \sum_{i=1}^n \left(l_i - \hat{l}_i \right)^2$$

利用最小二乘法，运用 MATLAB 进行拟合，最终迭代近似求解得到最可能地点的经度和纬度。

4.2.5 改进的最小二乘法拟合

由于直杆高度未知，消去杆高 h 可以使计算更加方便；而题目提供了坐标参数，若仅仅计算出影子长度作为目标参数则降低了有效数据量及数据利用率，因此我们又引入了角度变化值作为新的目标参数。

总结起来，在前一节的最小二乘法拟合的基础上，我们考虑引入太阳方位角，从角

度和影子长度两方面拟合求解。

由

$$\begin{cases} \sin \alpha_i = \sin \varphi_x \sin \delta + \cos \varphi_x \cos \delta \cos t_i \\ \sin A_i = \frac{\cos \delta \cdot \sin t_i}{\cos \alpha_i} \end{cases}, i = 1, 2, \dots, n$$

可得方位角为

$$A_i = \arcsin \frac{\cos \delta \cdot \sin t_i}{\cos \alpha_i}$$

因为方位角是影子与正南方向的夹角，而题目所给数据下的坐标系不能认为 x 轴正方向恰为正南，故做相邻时刻的影子角度差 $\Delta A_j = |A_i - A_{i+1}|, j = 1, 2, \dots, 20$ ，借此消除坐标系误差偏转角。而数据一所给角度差为 $\Delta B_j = |B_i - B_{i+1}|, j = 1, 2, \dots, 20$ ，其中：

$$B_i = \arctan \frac{y_i}{x_i}$$

其次，考虑相邻影长比 C_i

$$\begin{cases} \sin \alpha_i = \sin \varphi_x \sin \delta + \cos \varphi_x \cos \delta \cos t_i \\ l_i = h \cdot \cot \alpha_i \end{cases}, i = 1, 2, \dots, n$$

得到

$$C_i = \left| \frac{l_i}{l_{i+1}} \right| = \left| \frac{h \cdot \cot \alpha_i}{h \cdot \cot \alpha_{i+1}} \right| = \left| \frac{\cot \alpha_i}{\cot \alpha_{i+1}} \right|$$

而附件一数据影长比为

$$D_i = \frac{\sqrt{x_i^2 + y_i^2}}{\sqrt{x_{i+1}^2 + y_{i+1}^2}}$$

目标函数一为

$$\min \xi_1 = \sum_{j=1}^n (\Delta A_j - \Delta B_j)^2$$

目标函数二为

$$\min \xi_2 = \sum_{j=1}^n (C_j - D_j)^2$$

同样采用最小二乘法，运用 M 进行拟合，最终迭代近似求解也得到多个最可能地点的经度和纬度。

4.2.6 结果计算与分析

依据上述理论，我们编写了 MATLAB 程序，代入附件一中所给的数据，多次迭代，得出近似解区域如下：

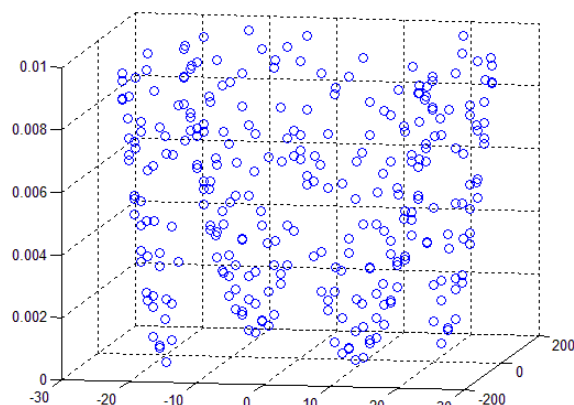


图 7 附件二中数据多次迭代得出的近似解区域

并收敛得到以下结果：

表 1 附件一可能地点计算结果

经度	纬度
109.7394 E	18.3326 N
102.6672 E	3.5665 S

我们在 Google 地图上查询了上述地点的实际位置：

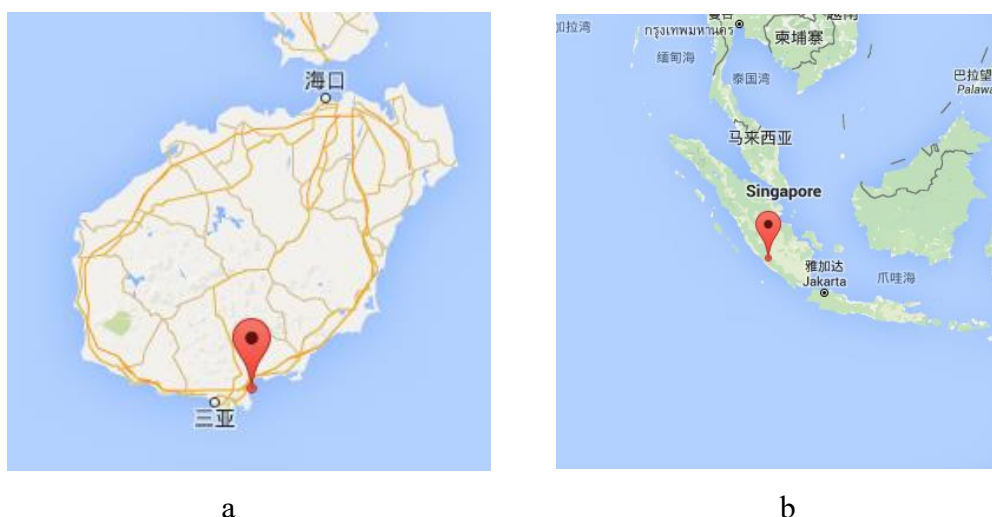


图 8 附件一可能地点实际位置

另外，我们计算了所得数据情形下影子长度与题目所给影子长度的方差之和，其大小均小于 10^{-4} ，验证了我们得到的结果的准确性。

4.3 问题三：根据给定时刻的影子坐标变化数据推算其位置和日期

4.3.1 问题分析

问题三相对问题二多了一个未知参数，即日期也未知。因此此题仅仅是比第二问多了一个参数条件，算法的复杂度仅有较小的常数级增长沿用上一问的算法从理论上来说依然是可行的。参考改进的最小二乘拟合法，我们可以对纬度、经度、日期、杆高，四个未知参数拟合求解。

另外，通过观察影长数据发现，附件二中的数据反映的影长随时间增加在不断减少，故影长最低点在 13 点 40 以后，推算其地点所在经度范围为 $0 \leq \varphi_y \leq \varphi_b - 15^\circ (t_{dz} - 12)$ ，其中 t_{dz} 为当地极限正午时间，利用附件二数据可知应为 $0 \leq \varphi_y \leq 95^\circ$ ，附件三同理，这样我们大大减少了需要计算的区间。

4.3.2 新参数的纳入

第三问相当于在第二问的基础上，日期变量由已知常量变为未知量，故现在我们有四个未知参量，即经度 φ_x 、纬度 φ_y 、杆高 h 、日期 N 。

4.3.3 问题的计算与求解

针对本问，由于赤纬公式中含有日期参量：

$$\begin{aligned}\delta &= [0.006918 - 0.399912 \cos(b) + 0.070257 \sin(b) - 0.006758 \cos(2b) \\ &\quad + 0.000907 \sin(2b) - 0.002697 \cos(3b) + 0.00148 \sin(3b)](180/\pi) \\ b &= 2\pi(N-1)/365\end{aligned}$$

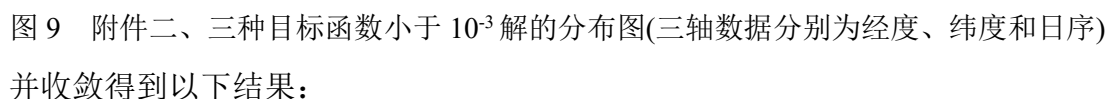
所以 l 此时含有四个需赋初值的参数：

$$l = \sqrt{\frac{h^2}{\left(\sin \varphi_x \sin \delta + \cos \varphi_x \cos \delta \cos 15^\circ \left(t_b - \frac{120^\circ - \varphi_y}{15^\circ} - 12 \right) \right)^2} - h^2}$$

因而目标函数仍为影长的最小二乘拟合：

$$\min \omega = \sum_{i=1}^n \left(l_i - \hat{l}_i \right)^2$$

依据上述理论，我们编写了 MATLAB 程序，代入附件二、三中所给的数据，多次迭代，得出近似解区域如下，



经度	纬度	日序	杆长
79.7938 E	39.8926 N	144	2.0008
79.7939 E	39.8928 S	17	2.0008

经度	纬度	日序	杆长
109.9854 E	27.1108 N	6	2.9564
110.245 E	32.8488 S	124	3.0356

Figure 1 consists of four maps labeled a, b, c, and d, each showing a different geographical location. Map a shows the Xinjiang Uygur Autonomous Region in China, with a red pin indicating a sampling site. Map b shows the Indian Ocean, with a red pin indicating a sampling site. Map c shows the Hubei province in China, with a red pin indicating a sampling site. Map d shows the Indian Ocean near Australia, with a red pin indicating a sampling site.

另外，我们计算了所得数据情形下影子长度与题目所给影子长度的方差之和，其大小均小于 10^{-5} ，验证了我们得到的结果的准确性。

4.4 问题四：视频分析影子变化

4.4.1 问题分析

针对此题，我们发现第四题实际上是基于二、三问的变形：

1. 影子变换的数据不再以数字的形式给出，而是给出了一段视频，因此我们需要根据相关的透视原理和几何知识将视频中的数据转化为如前两题附件给出的可用数据；
2. 如果我们能够根据视频得到其影子端点的坐标变换，相对于第二题而言，第四题实际多出了直杆高度为 2 m 这一条件，因此我们应该考虑在此基础上如何充分利用此条件；
3. 第四问又提出了未知视频拍摄日期的情形下如何求解，实际上这个问题是第三问的变形，相比也是多出了直杆高度为 2 m 的条件。

4.4.2 利用透视原理获得视频数据

视频的每一帧实际上是一幅图像，由图像我们可以提取出每个时刻的数据，但由于视角的变化，图像中不同位置物体的实际大小是不定的，因此在缺乏通用参照物的情况下无法测出物体的长度。

在这种情况下，我们可以利用图像中相互平行的直线映射为平面图像上的相交直线，而两条平行线在一张平面图像上的交点则为无穷远的地方，根据透视原理被称作消隐点 (vanish point)，而若得到两组消隐点，根据通过两个定点有且仅有一条直线的原理，其连线就是图像中确定而唯一的消隐线，或者说地平线。而从这条线上同一点引出的直线都相互平行（如图 11）。具体理论可以参照剑桥大学的《计算机成像多视图几何学》及牛津大学的单视图度量学论文获得证明。^[4-5]

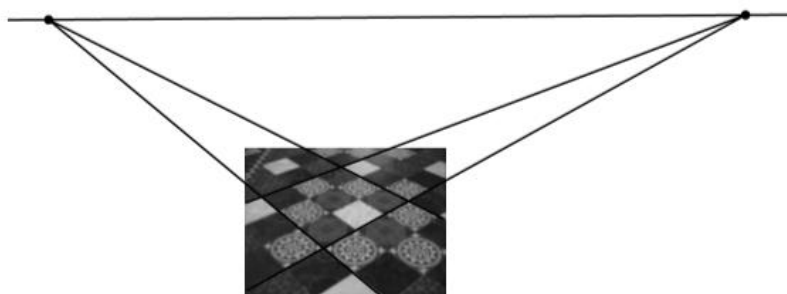


图 11 消隐点与消隐线的得出^[5]

而针对附件四中视频，我们找到了两对相互平行的线，即直杆的底座为矩形，因此底座的两对底边相互平行。我们得到两对直线 a, c 和 b, d ，其相交点即为消隐点，分别为 G, H ，再连接点 G, H 得到的直线 e 即为地平线（消隐线，即下图中的红线）。

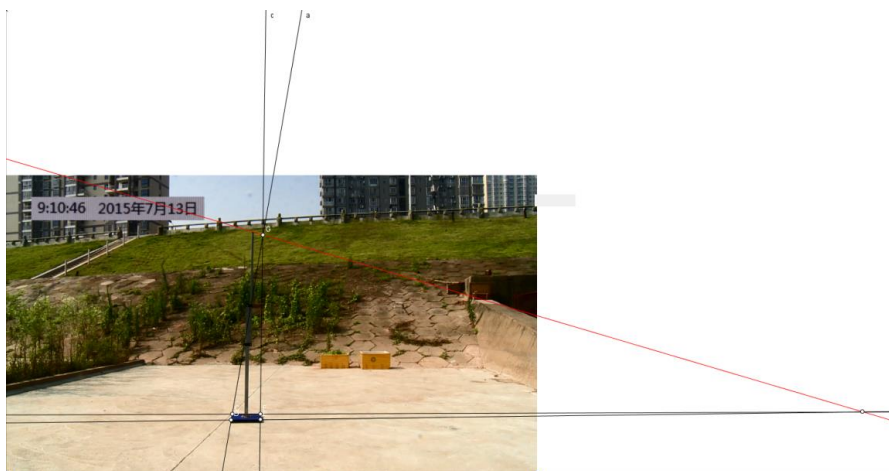


图 12 本题消隐线与消隐点的得出

然而，直杆和其影子是相交的，但是从消隐线引出的两条线仅有通过相互平行的直线的时候才能按比例测量出其长度(如图 13)。

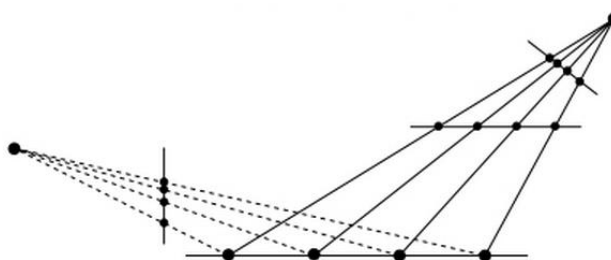


图 13 由消隐线与消隐点的得出平行线的长度比例^[5]

由图 12 我们可以观察到，在此视频的中间偏右的部分有两个黄色的箱子，按照常识来说一个箱子的形状是长方体，且平放在地面上的时候与地面相交的棱与地面垂直。因此由消隐线引出一条与箱子底点 J 和直杆底端的连线（如图） f ，并从此点引出一条与箱子顶点 I 的连线 g ，这条线 g 与直杆的交点为 O ，直杆的底点为 L ，则根据透视原理，线段 LO 与线段 JI 的长度实际上是相等的，我们又可以计算出直杆的 LO 部分与整体长度的比例，因此可以计算出 LO 的长度，进而得到 JI 的长度：

$$|JI| = |LO| = \frac{LO}{LN} h$$

其中：

$|JI|$ 为箱子侧边的实际长度；

$|\overrightarrow{LO}|$ 为箱子侧边根据透视原理映射到直杆上的实际长度；

LO 为箱子侧边根据透视原理映射到直杆上的图上长度；

LN 为直杆图上长度；

h 直杆实际长度。

设箱子底边为 JK ，且从图中可以观察到箱子的 IJK 面与拍摄面是平行的，因此按比例可以求出底边 JK 的实际长度：

$$|\overrightarrow{JK}| = \frac{JK}{JI} |\overrightarrow{JI}|$$

由此可以同理求得影子线段 LP 映射到与 JK 平行的直线 LR 上的长度，并按比例求得 LR 的实际长度 x ，由于 Y 轴上没有可以直接参考的对象，因此我们只能求得与 JK 垂直的带参数的 PR 长度 y 。

$$x_i = |\overrightarrow{LR}| = \frac{LR}{LQ} |\overrightarrow{JK}|$$

因此联立上式并化简得出：

$$\begin{cases} x_i = \frac{LR}{LQ} \frac{JK}{JI} \frac{LO}{LN} h |\overrightarrow{JK}| \\ y_i = PR = mR_i \end{cases}$$

其中， PR 与第二、三题中的 h 类似，可以划归为如上图的带参数的值。

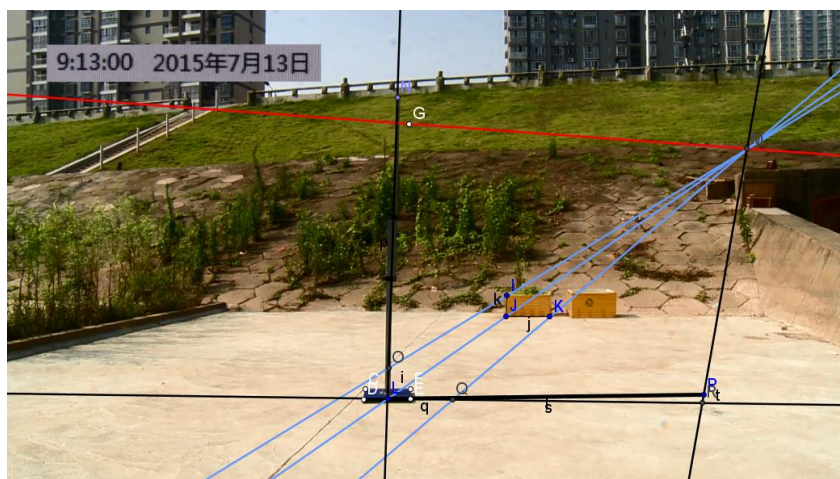


图 14 由透视原理获得线段长度比例

至此，此题就划归为与题目二已知参数数量一致的问题，则利用第二题的方法可以灵活得出结果。

4.4.3 目标函数的重新整理与求解

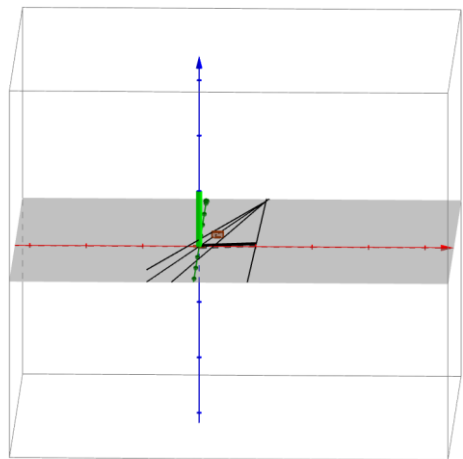


图 15 利用 GeoGebra 还原的本题实物模型

由上述推理，我们利用 GeoGebra 软件对上述模型进行重建（如图），并利用相应公式，对视频每三分钟截取一张图像进行分析，得出了相应的数据，由于 y 轴上虽然没有参考物体，但其位置与 x 轴相近，我们利用相同的公式可以得出 y 轴的估计值，从而得到影子的长度。

表 4 由透视原理获得附件四中影子坐标变化的结果(单位：米)

时间	X 轴	Y 轴带参数	Y 轴估算	影子估算长度
8:55	2.343055303	0.086566446	0.085418507	2.344611796
8:58	2.298077226	0.078949609	0.077902675	2.299397261
9:01	2.255128382	0.074039526	0.073057704	2.256311469
9:04	2.210766125	0.069871844	0.068945289	2.211840933
9:07	2.168950903	0.064844601	0.063984711	2.169894482
9:10	2.125920285	0.060573626	0.059770373	2.126760343
9:13	2.085499012	0.05320708	0.052501513	2.086159758
9:16	2.05334798	0.048597091	0.047952656	2.053907833
9:19	2.000290191	0.045436815	0.044834287	2.000792584
9:22	1.963285564	0.041618984	0.041067084	1.963715028
9:25	1.928349043	0.038359861	0.03785118	1.928720494
9:28	1.885469446	0.033012369	0.032574599	1.885750815
9:31	1.845162757	0.032660901	0.032227792	1.845444183
9:34	1.82086606	0.027400144	0.027036796	1.821066775

注：经过仔细观察，图像本身的稳定度有值得质疑的地方（例如视频在 9 时 33 分 58 秒时出现了较为明显的抖动），且图像分辨率有限，因此图像度量过程出现一定误差是不可避免的。

由上述过程，我们针对表 4 中由附件四获得的数据，借助第二问的方法得出的结果如下：

表 5 附件四中分析数据后拟合所得结果

经度	纬度
111.2172 E	40.6356 N
54.5964 W	7.3181 N

我们在 Google 地图上查询了上述地点的实际位置：



图 16 附件四可能地点实际位置

4.4.4 解决未知日期的问题

针对此题，与之前不同的仅有日期变量由已知常量变为未知量，因此我们仍然可以利用上述模型进行计算，并得到以下结果：

表 6 在日期未知的情况下附件四中分析数据所得结果

经度	纬度	日序
110.2352 E	41.0880 N	173
54.5505 W	6.1663 N	172

我们可从上表中可以看出，我们得到的经纬度与此问之前得到的结果较为相近，因此具体地点就不再描述，而日序相对于实际 7 月 13 日当天的第 193 日也较为接近，是较为理想的结果。

另外，我们计算了所得数据情形下影子长度与题目所给影子长度的方差之和，其大小均小于 10^{-3} ，验证了我们得到的结果的准确性。

至此，题目提出的四个问题均已解决。

五、 模型改进和推广

5.1 针对太阳光折射（蒙气差）的讨论

虽然太阳光经过大气层的折射几乎是可以忽略不计的，但是由于不同地区的天气状况和大气层，太阳光线的折射情形较为复杂，因此讨论此因素对模型在不同情形下的应用和适应性有着极大的实际意义。

5.2 智能算法的可行性讨论

对于本题的第三问和第四问，其时间复杂度相对来说较大，因此可以考虑使用蚁群算法、遗传算法等元启发式算法在牺牲一定精度的情况下换取更小的时间复杂度。

参考文献

- [1] 贺晓雷, 于贺军, 李建英, 丁蕾. 太阳方位角的公式求解及其应用[J]. 北京太阳能学报. 2008, 29 (01): 69-73.
- [2] 费云霞, 王春顺. 对太阳高度角的了解及其计算方法[J]. 中小企业管理与科技(上半月). 2008(01).
- [3] 刘砚刚. 四季与赤纬角和时角[J]. 太阳能. 1991(03).
- [4] Criminisi A, Reid I, Zisserman A. Single view metrology[J]. International Journal of Computer Vision, 2000, 40(2): 123-148.
- [5] Hartley R, Zisserman A. Multiple view geometry in computer vision[M]. Cambridge University Press, 2003.

附录

附录一 第一题获得影子长度具体数据

时间	9	9.05	9.1	9.15	9.2	9.25
长度	7.238863	7.078487	6.925323	6.778921	6.638871	6.504795
时间	9.3	9.35	9.4	9.45	9.5	9.55
长度	6.376348	6.253212	6.135095	6.021726	5.912858	5.80826
时间	9.6	9.65	9.7	9.75	9.8	9.85
长度	5.707719	5.611038	5.518034	5.428538	5.342391	5.259447
时间	9.9	9.95	10	10.05	10.1	10.15
长度	5.17957	5.102631	5.028512	4.957103	4.8883	4.822006
时间	10.2	10.25	10.3	10.35	10.4	10.45
长度	4.758132	4.696592	4.637308	4.580206	4.525218	4.472277
时间	10.5	10.55	10.6	10.65	10.7	10.75
长度	4.421324	4.372301	4.325157	4.27984	4.236304	4.194506
时间	10.8	10.85	10.9	10.95	11	11.05
长度	4.154405	4.115962	4.079142	4.043911	4.010239	3.978094
时间	11.1	11.15	11.2	11.25	11.3	11.35
长度	3.947451	3.918285	3.89057	3.864285	3.83941	3.815926
时间	11.4	11.45	11.5	11.55	11.6	11.65
长度	3.793815	3.77306	3.753647	3.735561	3.718791	3.703323
时间	11.7	11.75	11.8	11.85	11.9	11.95
长度	3.689149	3.676258	3.664642	3.654292	3.645203	3.637368
时间	12	12.05	12.1	12.15	12.2	12.25
长度	3.630783	3.625443	3.621345	3.618486	3.616865	3.616479
时间	12.3	12.35	12.4	12.45	12.5	12.55
长度	3.617331	3.619419	3.622744	3.627311	3.63312	3.640175
时间	12.6	12.65	12.7	12.75	12.8	12.85
长度	3.648482	3.658046	3.668872	3.680968	3.694342	3.709003
时间	12.9	12.95	13	13.05	13.1	13.15
长度	3.72496	3.742225	3.76081	3.780727	3.801991	3.824618
时间	13.2	13.25	13.3	13.35	13.4	13.45
长度	3.848625	3.874029	3.90085	3.92911	3.95883	3.990036
时间	13.5	13.55	13.6	13.65	13.7	13.75
长度	4.022753	4.05701	4.092836	4.130264	4.169328	4.210064
时间	13.8	13.85	13.9	13.95	14	14.05
长度	4.252512	4.296714	4.342715	4.390561	4.440305	4.492001
时间	14.1	14.15	14.2	14.25	14.3	14.35
长度	4.545706	4.601484	4.6594	4.719526	4.781936	4.846713
时间	14.4	14.45	14.5	14.55	14.6	14.65
长度	4.913941	4.983716	5.056134	5.131302	5.209335	5.290353
时间	14.7	14.75	14.8	14.85	14.9	14.95
长度	5.374488	5.46188	5.552679	5.647049	5.745163	5.847209
时间	15					
长度	5.953392					

注:附录二至五的程序均由 MATLAB 实现

附录二

问题一，画出影子长度和一天时间变化的曲线图

```
clear;
clc;
x=[39.907222 116.391389 165];
%a=[9:0.05:15];
p=[];
[m,n]=size(a);
for i=1:1:n
    c=[x a(i)];
    q=B2015_01gd(c);
    p=[p q];
end
%pp=p(2:1:121)-p(1:1:120);
plot(0,0);
hold on
%plot(a,p);
%aa=a(1:1:120);
%plot(aa,pp);
%axis([9,15,2 8]);
hold off

function f= B2015_01cw(x)
b=2*pi*(x-1)/365;
qqq=(0.006918-0.399912*cos(b)+0.070257*sin(b)-0.006758*cos(2*b)+0.000907*sin(2*b)-
0.002697*cos(3*b)+0.00148*sin(3*b))*(180/pi);

%f=qqq;
q1=23.45*sind(360/365*(x+284));
q2=asind(0.39795*cos(0.98563*(x-173)/180*pi));
the=(x+0.226)*2*pi/365.2422;
f=qqq;

function f= B2015_01gd(x) %x1=weidu39.907222 x2=jingdu116.391389 x3=riqi 294 x4=shijian
wd= B2015_01cw(x(3));
t=(120-x(2))/15;
%t=15*(t+x(4)-12);
t=15*(t-x(4)-12);
%a=cosd(x(1))*cosd(wd)*cosd(t)
a=sind(x(1))*sind(wd)+cosd(x(1))*cosd(wd)*cosd(t);
jd=asin(a) ;%hudu
f=3/tan(jd);
%f=2.018*cot(jd);
%f=jd; %!!
```

附录三

问题二 用最小二乘法拟合求解 附录一坐标。

```
clear
clc
x=[50 100]; % 16.7148 122.1893 0.1359
x=[-10 100]; %-5.3358 113.4799
```

```

opt=optimset('tolx',1e-10,'tolfun',1e-10);
[xx,resnorm]=lsqnonlin(@B2015_02gd,x,[],[],opt);
xx
%xx=[ 18.3326 109.7394]
Resnorm

function f=B2015_02cw(x)
b=2*pi*(x-1)/365;
f=(0.006918-0.399912*cos(b)+0.070257*sin(b)-0.006758*cos(2*b)+0.000907*sin(2*b)-
0.002697*cos(3*b)+0.00148*sin(3*b))*(180/pi);

function f= B2015_02gd(x) %x1=weidu39.907222 x2=jingdu116.391389 x3=h , y=shijian
%z1=x z2=y
a=[14.7:0.05:15.7];
y=a;
wd= B2015_01cw(108);
t=(120-x(2))/15;
tz=15*(t-y-12);
a=(sind(x(1))*sind(wd)+cosd(x(1))*cosd(wd)*cosd(tz));
fm=a;
jd=asin(a); %hudu
cd=3./tan(jd);
cc=abs(cd(1:1:20)./cd(2:1:21));%

fwa=asin(cosd(wd)*sind(tz)./cos(jd));
pp=abs(fwa(1:1:20)-fwa(2:1:21));

z1=[1.0365 1.0699 1.1038 1.1383 1.1732 1.2087 1.2448 1.2815 1.3189 1.3568 1.3955 1.4349 1.4751 1.516
1.5577 1.6003 1.6438 1.6882 1.7337 1.7801 1.8277];
z2=[0.4973 0.5029 0.5085 0.5142 0.5198 0.5255 0.5311 0.5368 0.5426 0.5483 0.5541 0.5598 0.5657 0.5715
0.5774 0.5833 0.5892 0.5952 0.6013 0.6074 0.6135];
bb=atan(z2./z1);
zz=abs(bb(1:1:20)-bb(2:1:21));

s1=sqrt(z1.^2+z2.^2);
s2=abs(s1(1:1:20)./s1(2:1:21));
f(2)=sum((s2-cc).^2);
f(1)=sum(((zz-pp)./pi.*180).^2);

用搜索选取初始值
for x1=-90:1:90 % 14-28
    for x2=-180:1:180 % 105 -145
        x=[x1 x2];
        c=sum(B2015_02gd(x))/2;
        if c<0.01
            aa=[aa c];
            bb=[bb x1];
            cc=[cc x2];
        end
    end
end
scatter3(bb,cc,aa);

求杆子长度函数
function f= B2015_02gdxxxx(x,y) %x1=weidu39.907222 x2=jingdu116.391389 x3=riqi 294 y=shijian
wd= B2015_01cw(108);%riqi=108
t=(120-x(2))/15;

```

```

tz=15*(t+y-12);
a=(sind(x(1))*sind(wd)+cosd(x(1))*cosd(wd)*cosd(tz));
jd=asin(a); %hudu
l=3./tan(jd);
f=l;

```

另一种最小二乘法拟合目标函数

```

clear
clc
a=[14.7:0.05:15.7];
z1=[1.0365 1.0699 1.1038 1.1383 1.1732 1.2087 1.2448 1.2815 1.3189 1.3568 1.3955 1.4349 1.4751 1.516
1.5577 1.6003 1.6438 1.6882 1.7337 1.7801 1.8277];
z2=[0.4973 0.5029 0.5085 0.5142 0.5198 0.5255 0.5311 0.5368 0.5426 0.5483 0.5541 0.5598 0.5657 0.5715
0.5774 0.5833 0.5892 0.5952 0.6013 0.6074 0.6135];
bb=sqrt(z1.^2+z2.^2);
zz=bb;
[xx,resnorm]=lsqcurvefit(@B2015_02xgd,x,a,zz);
resnorm

```

```

function f=B2015_02xgd(x,y)%x3=h x1=weidu x2=jingdu
wd= B2015_01cw(108);%riqi=108
t=(120-x(2))/15;
tz=15*(t-y-12);
fm=sind(x(1))*sind(wd)+cosd(x(1))*cosd(wd)*cosd(tz);
f=sqrt(x(3)^2./(fm.^2)-x(3)^2);
clear
clc
x=[39.907222 116.391389];%x1,x2
a=[12.7:0.05:13.7];
z1=[1.0365 1.0699 1.1038 1.1383 1.1732 1.2087 1.2448 1.2815 1.3189 1.3568 1.3955 1.4349 1.4751 1.516
1.5577 1.6003 1.6438 1.6882 1.7337 1.7801 1.8277];
z2=[0.4973 0.5029 0.5085 0.5142 0.5198 0.5255 0.5311 0.5368 0.5426 0.5483 0.5541 0.5598 0.5657 0.5715
0.5774 0.5833 0.5892 0.5952 0.6013 0.6074 0.6135];
C=1;bb=sqrt(z1.^2+z2.^2);
zz=bb;
lsqcurvefit(@B2015_02gdx,xx,x,a,zz);

```

附录四

求解问题三(1)，解得附录二坐标。

```

clear
clc
a=[12.68:0.05:13.68];
z1=[-1.2352 -1.2081 -1.1813 -1.1546 -1.1281 -1.1018 -1.0756 -1.0496 -1.0237 -0.998 -0.9724 -0.947 -0.9217
-0.8965 -0.8714 -0.8464 -0.8215 -0.7967 -0.7719 -0.7473 -0.7227];
z2=[0.173 0.189 0.2048 0.2203 0.2356 0.2505 0.2653 0.2798 0.294 0.308 0.3218 0.3354 0.3488 0.3619
0.3748 0.3876 0.4001 0.4124 0.4246 0.4366 0.4484];
ss=sqrt(z1.^2+z2.^2);
xx=[-30];
yy=[80];
zz=[12];
qq=[xx yy 1 zz];
[xx,resnorm]=lsqcurvefit(@B2015_03_01gdx,qq,a,ss);
Resnorm

```

```

function f= B2015_03_01gd(x) %x1=weidu39.907222 x2=jingdu116.391389 x3=riqi 294 y=shijian
u=x(3);
a=[12.68:0.05:13.68];
y=a;
wd= B2015_01cw(u);%riqi=108
t=(120-x(2))/15;
tz=15*(t-y-12);
a=(sind(x(1))*sind(wd)+cosd(x(1))*cosd(wd)*cosd(tz));
jd=asin(a); %hudu
cd=3./tan(jd);
cc=abs(cd(1:1:20)./cd(2:1:21));%

fwa=asin(cosd(wd)*sind(tz)./cos(jd));
pp=abs(fwa(1:1:20)-fwa(2:1:21));

z1=[-1.2352 -1.2081 -1.1813 -1.1546 -1.1281 -1.1018 -1.0756 -1.0496 -1.0237 -0.998 -0.9724 -0.947 -0.9217
-0.8965 -0.8714 -0.8464 -0.8215 -0.7967 -0.7719 -0.7473 -0.7227];
z2=[0.173 0.189 0.2048 0.2203 0.2356 0.2505 0.2653 0.2798 0.294 0.308 0.3218 0.3354 0.3488 0.3619
0.3748 0.3876 0.4001 0.4124 0.4246 0.4366 0.4484];
bb=atan(z2./z1);
zz=abs(bb(1:1:20)-bb(2:1:21));
s1=sqrt(z1.^2+z2.^2);
s2=abs(s1(1:1:20)./s1(2:1:21));
f(2)=sum((s2-cc).^2);
f(1)=sum(((zz-pp)./pi.*180).^2);

function f= B2015_03_01gdx(x,y)
wd= B2015_01cw(x(4));
t=(120-x(2))/15;
tz=15*(t-y-12);
fm=sind(x(1))*sind(wd)+cosd(x(1))*cosd(wd)*cosd(tz);
f=sqrt(x(3)^2./(fm.^2)-x(3)^2);
end

求解问题三(2)，解的附录三坐标
clear
clc

a=[13.15:0.05:14.15];
z1=[1.1637 1.2212 1.2791 1.3373 1.396 1.4552 1.5148 1.575 1.6357 1.697 1.7589 1.8215 1.8848 1.9488
2.0136 2.0792 2.1457 2.2131 2.2815 2.3508 2.4213 ];
z2=[3.336 3.3299 3.3242 3.3188 3.3137 3.3091 3.3048 3.3007 3.2971 3.2937 3.2907 3.2881 3.2859 3.284
3.2824 3.2813 3.2805 3.2801 3.2801 3.2804 3.2812];
ss=sqrt(z1.^2+z2.^2);
xx=[30];
yy=[110];
zz=[150];
qq=[xx yy 1 zz ];
[xx,resnorm]= lsqcurvefit(@B2015_03_02gdx,qq,a,ss);
Resnorm

function f= B2015_03_02gd(x) %x1=weidu39.907222 x2=jingdu116.391389 x3=riqi 294 y=shijian
u=x(3);
a=[13.15:0.05:14.15];
y=a;
wd= B2015_01cw(u);
t=(120-x(2))/15;

```



```

tz=15*(t-y-12);
a=(sind(x(1))*sind(wd)+cosd(x(1))*cosd(wd)*cosd(tz));
jd=asin(a); %hudu
cd=3./tan(jd);
cc=abs(cd(1:1:20)./cd(2:1:21));%
l=sqrt(x(4)^2./(a.^2)-x(4)^2);
fwa=asin(cosd(wd)*sind(tz)./cos(jd));
pp=abs(fwa(1:1:20)-fwa(2:1:21));
z1=[1.1637 1.2212 1.2791 1.3373 1.396 1.4552 1.5148 1.575 1.6357 1.697 1.7589 1.8215 1.8848 1.9488
2.0136 2.0792 2.1457 2.2131 2.2815 2.3508 2.4213 ];
z2=[3.336 3.3299 3.3242 3.3188 3.3137 3.3091 3.3048 3.3007 3.2971 3.2937 3.2907 3.2881 3.2859 3.284
3.2824 3.2813 3.2805 3.2801 3.2801 3.2804 3.2812];
bb=atan(z2./z1);
zz=abs(bb(1:1:20)-bb(2:1:21));
s1=sqrt(z1.^2+z2.^2);
s2=abs(s1(1:1:20)./s1(2:1:21));
f=sum((l-s1).^2);

function f= B2015_03_02gdx(x,y)
wd= B2015_01cw(x(4));
t=(120-x(2))/15;
tz=15*(t-y-12);
fm=sind(x(1))*sind(wd)+cosd(x(1))*cosd(wd)*cosd(tz);
f=sqrt(x(3)^2./(fm.^2)-x(3)^2);
end

```

附录五

求解问题四(1)

```

clear
clc
a=[8.92:0.05:9.57];
z1=[2.343055303 2.298077226 2.255128382 2.210766125 2.168950903 2.125920285 2.085499012
2.05334798 2.000290191 1.963285564 1.928349043 1.885469446 1.845162757 1.82086606];
z2=[0.085418507 0.077902675 0.073057704 0.068945289 0.063984711 0.059770373 0.052501513
0.047952656 0.044834287 0.041067084 0.03785118 0.032574599 0.032227792 0.027036796 ];
ss=sqrt(z1.^2+z2.^2);
xx=[18];yy=[-90];qq=[xx yy];
[xx,resnorm]= lsqcurvefit(@B2015_04_01gdx,qq,a,ss);
Resnorm

```

```

function f=B2015_04_01gdx(x,y)
wd= B2015_01cw(193);
t=(120-x(2))/15;
tz=15*(t-y-12);
fm=sind(x(1))*sind(wd)+cosd(x(1))*cosd(wd)*cosd(tz);
f=sqrt(4./(fm.^2)-4);
end

```

求解问题四(2)

```

clear
clc
a=[8.92:0.05:9.57];
z1=[2.343055303 2.298077226 2.255128382 2.210766125 2.168950903 2.125920285 2.085499012
2.05334798 2.000290191 1.963285564 1.928349043 1.885469446 1.845162757 1.82086606];
z2=[0.085418507 0.077902675 0.073057704 0.068945289 0.063984711 0.059770373 0.052501513

```

```
0.047952656 0.044834287 0.041067084 0.03785118 0.032574599 0.032227792 0.027036796 ];
ss=sqrt(z1.^2+z2.^2);
```

```
xx=[6];yy=[-50];zz=[175];
qq=[xx yy zz];
[xx,resnorm]=lsqcurvefit(@B2015_04_02gdx,qq,a,ss);
Resnorm
```

```
function f=B2015_04_02gdx(x,y)
wd= B2015_01cw(x(3));
t=(120-x(2))/15;
tz=15*(t-y-12);
fm=sind(x(1))*sind(wd)+cosd(x(1))*cosd(wd)*cosd(tz);
f=sqrt(4./(fm.^2)-4);
end
```