6.0元 **线性代数**

试题编号：

重庆邮电大学 2014-15 学年第一学期

《线性代数》试卷（期末）（A 卷）（闭卷）

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	总 分
得 分									
评卷人									

一、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1. 行列式 $D=\begin{vmatrix}0&0&0&1\\0&0&2&0\\0&3&0&0\\4&0&0&0\end{vmatrix}$ 的值为____________________。

2. 矩阵乘积 $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\end{pmatrix}$ 的计算结果为____________________。

3. 5 阶单位矩阵的秩为____________________。

4. 两向量 $\alpha=(a_1,a_2)$, $\beta=(b_1,b_2)$ 线性相关的充要条件是____________________。

5. 若 3 阶矩阵 A 与 B 相似，且 A 的特征值为 1, 2, 3, 则 $|B^*+E|=$______________。

（此处 E 为 3 阶单位矩阵，B* 为 B 的伴随矩阵）

二、选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1. 按自然数从小到大为标准次序，排列 2413 的逆序数为（　　　　）

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

2. 设 A 为 n 阶方阵, 则下列矩阵为对称矩阵的是（　　）

A. $A-A^T$　　B. A^TA　　C. $(AB^T)C$　　D. C^TAC, C 为 n 阶方阵

3. 设 n 阶矩阵 A 与 B 等价, 则必有

A. 当 $|A|=a$ 时, $|B|=a$　　B. 当 $|A|=a$ 时, $|B|=-a$

C. 当$|A| \neq 0$时，$|B| = 0$　　　　D. 当$|A| = 0$时，$|B| = 0$

4. 设向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关，向量$\alpha$可由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表示，而向量$\beta$不能由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表示，则对于任意常数k，下列说法正确的是(　　)

A. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, k\alpha + \beta$线性无关　　B. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, k\alpha + \beta$线性相关

C. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha + k\beta$线性无关　　D. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha + k\beta$线性相关

5. n阶实对称矩阵A为正定阵的充要条件是(　　)

A. 所有$k(k = 1, 2, \cdots, n)$级子式为正　　B. A的所有特征值非负

C. A^{-1}为正定阵　　D. $R(A) = n$

三、解答题（共7大题，总分60分）

1、计算行列式$\begin{vmatrix} 4 & 9 & 16 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$的值（6分）。

2、问λ, μ取何值时，齐次线性方程组$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \mu x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2\mu x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$有非零解？（8分）

3、设4×4矩阵$A=(\alpha,\ \gamma_2,\ \gamma_3,\ \gamma_4)$,$B=(\beta,\ \gamma_2,\ \gamma_3,\ \gamma_4)$,其中$\alpha,\beta$，$\gamma_2$，$\gamma_3,\gamma_4$均为4维列向量，且已知行列式$|A|=4,|B|=1$，求行列式$|A+B|$。（6分）

4、设$A=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}$，求$A^{-1}$。（8分）

5、（12分）当λ取何值时，线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+\lambda x_3=4 \\ -x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda^2 \\ x_1-x_2+2x_3=-4 \end{cases}$

（1）无解；（2）有唯一解；（3）无穷多解？并在有解时求出所有解。

6、（10分）已知$\alpha_1=(1,0,2,3),\alpha_2=(1,1,3,5),\alpha_3=(1,-1,a+2,1),$

$\alpha_4=(1,2,4,a+8)$及$\beta=(1,1,b+3,5)$。

（1）a,b为何值时，β不能表示成$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的线性组合？

（2）a,b为何值时，β有$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的唯一线性表示，并求出该表示式。

7、（10 分）设 A 为 3 阶矩阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是线性无关的三维列向量，且满足

$$A\alpha_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, A\alpha_2=2\alpha_2+\alpha_3, A\alpha_3=2\alpha_2+3\alpha_3。$$

（1） 求矩阵 B，使得 $A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)B$；

（2） 求矩阵 A 的特征值；

（3） 求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵。

四、证明题（10 分）

1、（5 分）设 A,B 都是正交阵，证明 AB 也是正交阵。

2、（5 分）设 n 阶矩阵 A 满足 $A^2=A$，E 为 n 阶单位矩阵，证明

$$R(A)+R(A-E)=n。$$

试题编号：

重庆邮电大学 2013-2014 学年一学期

线性代数试卷（期末）（A 卷）（闭卷）

		二	三	四	五	六	七	八	总 分
得 分									
评卷人									

一、选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1. 设 n 阶方阵 A,B 等价，则（　　）

（A） $|A|=|B|$ （B）$|A|\neq|B|$ （C）$|A|\neq 0$ 则必有 $|B|\neq 0$ （D） $|A|=-|B|$

2. 对矩阵 $A_{4\times5}$，以下结论正确的是（　　）

（A）A 的秩至少是 4　　（B）A 的列向量组线性相关
（C）A 的列向量组线性无关　　（D）A 中存在 4 阶非零子式

3. A 是 $m\times n$ 矩阵，R(A)= m<n，则下列正确的是(　　)
（A）A 的任意 m 个列向量线性无关
（B）A 的任意一个 m 阶子式必不为零
（C）A 经过初等行变换必可化为 $(E_m,0)$ 的形式
（D）齐次线性方程组 AX=0 有无穷解

4. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=4x_1^2+4x_2^2+4x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$，则(　　)

（A）f 的秩为 1　　（B）f 的秩为 2
（C）f 为正定二次型　　（D）f 为负定二次型

5. 若三阶方阵 A 的三个特征值为 1，2，-3，属于特征值 1 的特征向量为 $\beta_1=(1,1,1)^T$，属于特征值 2 的特征向量为 $\beta_2=(1,-1,0)^T$，则向量 $\beta=-\beta_1-\beta_2=(-2,0,-1)^T$（　　）

（A）是 A 的属于特征值 1 的特征向量　　（B）是 A 的属于特征值 2 的特征向量
（C）是 A 的属于特征值-3 的特征向量　　（D）不是 A 的特征向量

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

6. 在五阶行列式中 $a_{12}a_{53}a_{41}a_{24}a_{35}$ 的符号为______。

7. 设 A 是 3×3 矩阵，$|A|=-2$，把 A 按列分块为 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$，其中 $\alpha_j\ (j=1,2,3)$ 是 A 的第 j 列，则 $|\alpha_3-2\alpha_1,3\alpha_2,\alpha_1|=$ ___6________。

8. X 和 Y 是 R^n 中的任意两个非零向量，记 $A = XY^T$，则矩阵 A 的秩是______.

9. 若 n 元线性方程组有唯一解，且其系数矩阵的秩为 r，则 r 与 n 的关系必为_____.

10. 设向量空间 $W = \{(x_1, 2x_2, 3x_1)^T | x_1, x_2 \in R\}$，则 W 的维数等于______。

三、计算题（本大题共 2 小题，每小题 6 分，共 12 分）

11. 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, 求 $|AB|$ 及 $|BA|$ 的值。

12. 设 $D = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix}$，D 的 (i,j) 元的余子式为 M_{ij}，计算 $\sum_{i=1}^{4} M_{i1}$ 的值。

四、计算题（本大题共 2 小题，每小题 8 分，共 16 分）

13. 设$A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&2&1\end{pmatrix}$，$B$是三阶矩阵，且$A^2+E=AB-2A+B$，求$B$。

14. 设$A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&-1&1\\2&4&-3\end{pmatrix}$，求$A^{-1}$。

五、（本大题共 2 小题，每小题 8 分，共 16 分）

15. 已知向量组 $\beta_1=(1,1,0)^T,\beta_2=(0,1,1)^T,\beta_3=(1,3,0)^T,\beta_4=(1,1,1)^T$，求：

① 此向量组的秩和一个极大线性无关组。

② 将其余向量由该极大线性无关组线性表出。

16. n 阶矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & a & \cdots & a \\ a & a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a & a & \cdots & a \end{pmatrix}$, 其中 $a\neq 0$ 是常数。试求 A 的特征值并判断 A 是否可对角化。

六、解答题（本大题共 2 小题，每小题 8 分，共 16 分）

17. 对向量组 $X_1=(1,1,1)^T$, $X_2=(3,-1,4)^T$, 设计第三个向量 X_3，使得 (X_1,X_2,X_3) 能构成 R^3 的一个基需要满足的条件是什么？试写出一个这样的 X_3。

18. 求解下列方程组，分析实数 a 取何值时，方程组解无解、有唯一解或无穷解。并在有解时求出其解。

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+x_4=1 \\ x_1-2x_2-x_3+x_4=-1 \\ x_1-2x_2+5x_3+x_4=a \end{cases}$$

七、证明题（本大题共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分）

19. 已知向量组$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$线性无关，A 是一个 n 阶非奇异矩阵。证明：

向量组$(AX_1,AX_2,\cdots,AX_n)$线性无关。

线性代数课程试卷（期末）（A 卷）参考答案与评分

一、选择题

C、B、D、C、D、

二、填空题

负　　6　　1　　r =n　　2

三、计算题

11、解：$|AB|=\begin{vmatrix}2&2&-4\\0&1&5\\1&1&-2\end{vmatrix}=0$　（3 分）　$|BA|=\begin{vmatrix}2&1\\3&-1\end{vmatrix}=-5$　（3 分）

12、解：$M_{11}+M_{21}+M_{31}+M_{41}=A_{11}-A_{21}+A_{31}-A_{41}$　（2 分）

$$=\begin{vmatrix}1&-5&2&1\\-1&1&0&-5\\1&3&1&3\\-1&-4&-1&-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-5&2&1\\-1&1&0&-5\\1&3&1&3\\0&-1&0&0\end{vmatrix}=(-1)\begin{vmatrix}1&2&1\\-1&0&-5\\1&1&3\end{vmatrix}$$

$$=(-1)\begin{vmatrix}-1&0&-5\\-1&0&-5\\1&1&3\end{vmatrix}=0$$　（4 分）

四、计算题

13、解：　$A^2+2A+E=AB+B$　（4 分）

$\therefore (A+E)^2=(A+E)B$，且因为$|A+E|\neq 0,(A+E)^{-1}$存在　（2 分）

$$\therefore B=A+E=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&2&1\\1&2&2\end{pmatrix}$$　（2 分）

14、解：$(A,E)=\begin{pmatrix}1&2&-2&1&0&0\\2&-1&1&0&1&0\\2&4&-3&0&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&-2&1&0&0\\0&-5&5&-2&1&0\\0&5&-4&0&-1&1\end{pmatrix}$

$$\sim\begin{pmatrix}1&2&-2&1&0&0\\0&1&-1&\frac{2}{5}&-\frac{1}{5}&0\\0&0&1&-2&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{1}{5}&\frac{2}{5}&0\\0&1&0&-\frac{8}{5}&-\frac{1}{5}&1\\0&0&1&-2&0&1\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1&2&0\\-8&-1&5\\-10&0&5\end{pmatrix}$$

五、计算题

15、解： $\begin{pmatrix}1&0&1&1\\1&1&3&1\\0&1&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&2&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&2&0\\0&0&-2&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{3}{2}\\0&1&0&1\\0&0&1&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$（4 分）

所以： $R(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=3$，$\beta_1,\beta_2,\beta_3$是其一个极大线性无关组。（2 分）

$\beta_4=\frac{3}{2}\beta_1+\beta_2-\frac{1}{2}\beta_3$ （2 分）

16、解： $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}a-\lambda&a&\cdots&a\\a&a-\lambda&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a&a&\cdots&a-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}na-\lambda&a&\cdots&a\\na-\lambda&a-\lambda&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\na-\lambda&a&\cdots&a-\lambda\end{vmatrix}$

$=(na-\lambda)\begin{vmatrix}1&a&\cdots&a\\0&-\lambda&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&-\lambda\end{vmatrix}=(na-\lambda)(-\lambda)^{n-1}$ $\lambda_1=\lambda_2=\cdots\lambda_{n-1}=0,\ \lambda_n=na$

（3 分）

（1）当$\lambda_1=\lambda_2=\cdots\lambda_{n-1}=0$时，$AX=0\rightarrow A=\begin{pmatrix}a&a&\cdots&a\\a&a&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a&a&\cdots&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=0$

由于$R(A)=1$，$AX=0$的基础解系有 n-1 个解向量，即特征值 0 有 n-1 个线性无关的特征向量。 （2 分）

（2）当 $\lambda_n = na$，$(A-naE)X=0 \to \begin{pmatrix} -(n-1)a & a & \cdots & a \\ a & -(n-1)a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a & a & \cdots & -(n-1)a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$

由于 $\begin{pmatrix} -(n-1)a & a & \cdots & a \\ a & -(n-1)a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a & a & \cdots & -(n-1)a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a & -(n-1)a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a & a & \cdots & -(n-1)a \end{pmatrix} \sim$

$$\sim \begin{pmatrix} a & a & \cdots & \cdots & -(n-1)a \\ 0 & -na & \cdots & \cdots & -(n-2)a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & -a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad R(A-naE)=n-1.$$

即特征值 $\lambda_n = na$ 有 1 个线性无关的特征向量。（2 分）

矩阵 A 共有 n 个线性无关的特征向量，所以矩阵 A 可以对角化。（1 分）

六、解答题。

17. 解：$\begin{vmatrix} 1 & 3 & x_1 \\ 1 & -1 & x_2 \\ 1 & 4 & x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & x_1 \\ 0 & -4 & x_2-x_1 \\ 0 & 1 & x_3-x_1 \end{vmatrix} = 5x_1 - x_2 - 4x_3 \neq 0$；　（6 分）

如单位向量 e_1。　（2 分）

若写成“(X_1,X_2,X_3)线性无关”，可酌情给分。另，也可通过初等行变换得到。

18、 解：$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 5 & 1 & a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & a-1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-5 \end{pmatrix}$　（4 分）

（1）当 $a=5$ 时，方程组有无穷解为：$X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$　（2 分）

（2）当 $a \neq 5$ 时，方程组无解。　（2 分）

七、证明题

19. 证明：令线性组合：$k_1AX_1+k_2AX_2+\cdots+k_nAX_n=0$ （1 分）

由于 A 是一个 n 阶非奇异矩阵，所以 A^{-1} 存在。 （1 分）

用 A^{-1} 左乘上式，得：

$k_1X_1+k_2X_2+\cdots+k_nX_n=0$ （2 分）

再由于 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 线性无关，所以：$k_1=k_2=\cdots=k_n=0$。

综上所述，$(AX_1,AX_2,\cdots,AX_n)$ 线性无关。 （1 分）

20. 设 A 是一 n 阶方阵，证明：存在一个 n 阶非零矩阵 B，使 $AB=0$ 的充要条件是 $|A|=0$。

证明：（1）若 $AB=0$，将 B 列分块，得：$A(B_1,B_2,\cdots,B_n)=0$，（1 分）

此即：$AB_1=0$，$AB_2=0$，$\cdots\cdots AB_n=0$，由于 B 非零矩阵，

说明齐次方程组 AX=0 有非零解，所以 $|A|=0$。 （2 分）

或：$AB=0$，得出：$R(A)+R(B)\le n$， （1 分）

而 B 非零矩阵，$R(B)\ge 1$

所以 $R(A)\le n-1$，所以 $|A|=0$。 （2 分）

（2）若 $|A|=0$，则齐次方程组 AX=0 有无穷多解， （1 分）

选取 n 个非零解 $X_1,X_2,\cdots,X_n$

则 $A(X_1,X_2,\cdots,X_n)=0$，令 $B=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 即可达到要求。（1 分）

试题编号： P290

重庆邮电大学 12-13 学年一学期

线性代数试卷（期末）（A 卷）（闭卷）

年级： 专业： 班级： 姓名： 学号：

装 订 线 密 封 线

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	总 分
得 分									
评卷人									

一、计算下列各题（本大题共 5 小题，每小题 7 分，共 35 分）

1、设矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&1&1\\2&1&2\\1&2&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&-1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，计算 $AB-BA$。

2、已知行列式 $\begin{vmatrix}-1&5&6&8\\1&1&1&1\\2&0&-8&6\\-3&4&2&5\end{vmatrix}$，计算：$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}$，其中 A_{ij} 是元素 a_{ij} 的代数余子式。

3、计算 n 级行列式 $D=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$。

4、设 A 为 n 级方阵，且 $|A|=\dfrac{1}{2}$，计算 $|(2A)^{-1}+3A^{*}|$。

5. 设有向量组 $\alpha_1=(a,1,1),\alpha_2=(1,2,-1),\alpha_3=(1,2,0)$，当 a 取何值时，（1）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关；（2）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关。

二、（本大题共 4 小题，每小题 9 分，共 36 分）

6、求解矩阵方程 $AX-A=X$，其中 $A=\begin{pmatrix}2&2&0\\2&1&3\\0&1&0\end{pmatrix}$。

7、求向量组

$\alpha_1=(1,0,2,1),\alpha_2=(1,2,0,1,),\alpha_3=(2,1,3,0),\alpha_4=(2,5,-1,4),\ \alpha_5=(1,-1,3,-1)$ 的秩和一个极大线性无关组，并将其余向量由该极大线性无关组线性表示。

8、λ 为何值时，线性方程组 $\begin{cases} x_1+\lambda x_2+x_3=0, \\ x_1-x_2+x_3=0, \\ \lambda x_1+x_2+2x_3=0 \end{cases}$，有非零解？并求出方程组的所有非零解。

9、化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2-4x_1x_2-4x_2x_3$ 为规范形，并求出所用的变换矩阵。

装　　密

订　　封

线　　线

三、（本大题共 1 小题，共 11 分）

10、求正交矩阵 P，使得 P^TAP 成对角形，其中 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

四、（本大题共 1 小题，共 8 分）

11、试求 λ 的值，使二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\lambda(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ 是正定的.

五、证明题（本大题共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分）

12、证明：如果向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关，而 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta$ 线性相关，则向量 β 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表出，且表法唯一。

13、设方阵 A 满足 $A^2+A=4E$，证明：$A-E$ 可逆，并求其逆。

2012-2013(1)《线性代数》期末试题

参考答案及评分标准

（2012-2013 学年第 1 学期）（A 卷）

一、（本大题共 5 小题，每小题 7 分，共 35 分）

1、解

$$AB-BA=\begin{pmatrix}3&1&1\\2&1&2\\1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&-1&0\\1&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&-1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1&1\\2&1&2\\1&2&3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}6&2&-2\\6&1&0\\8&-1&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4&0&0\\4&1&0\\4&3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&0&0\\4&-4&-2\end{pmatrix}$$ ……………… 7 分

2、 解 因 $a_{21}=a_{22}=a_{23}=a_{24}=1$

所以 $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=a_{21}A_{41}+a_{22}A_{42}+a_{23}A_{43}+a_{24}A_{44}=0$ ……………… 7 分

3（7 分）、解：

$$D=\begin{vmatrix}n-1&1&1&\cdots&1&1\\n-1&0&1&\cdots&1&1\\n-1&1&0&\cdots&1&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\n-1&1&1&\cdots&0&1\\n-1&1&1&\cdots&1&0\end{vmatrix}=(n-1)\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1&1\\1&0&1&\cdots&1&1\\1&1&0&\cdots&1&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1&1&1&\cdots&0&1\\1&1&1&\cdots&1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1&1\\0&-1&0&\cdots&0&0\\0&0&-1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&-1&0\\0&0&0&\cdots&0&-1\end{vmatrix}$$

$=(-1)^{n-1}(n-1)$。

4、解 因 $A^*=|A|A^{-1}=\dfrac{1}{2}A^{-1}$，所以 ……………… 2 分

$$|(2A)^{-1}+3A^*|=|\frac{1}{2}A^{-1}+\frac{3}{2}A^{-1}|=|2A^{-1}|=2^{n+1}.$$ ……………… 7 分

5. 解 $|A|=\begin{vmatrix}a&1&1\\1&2&2\\1&-1&0\end{vmatrix}=(2a-1)$ ……………… 3 分

（1）$a\neq\dfrac{1}{2}$ 时，$|A|\neq0$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关； ………………5 分

（2）$a=\dfrac{1}{2}$ 时，$|A|=0$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关。 ………………7 分

二、（本大题共 4 小题，每小题 9 分，共 36 分）

6、解　由 $AX-A=X$，有 $(A-E)X=A$，$A-E=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&0&3\\0&1&-1\end{pmatrix}$，

$$(A-E)^{-1}=\begin{pmatrix}-3&2&6\\2&-1&-3\\2&-1&-4\end{pmatrix},$$ ………………6 分

所以 $X=(A-E)^{-1}A=\begin{pmatrix}-3&2&6\\2&-1&-3\\2&-1&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2&0\\2&1&3\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&2&6\\2&0&-3\\2&-1&-3\end{pmatrix}$。 ……………… 9 分

另解　由 $AX-A=X$，有 $(A-E)X=A$，$A-E=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&0&3\\0&1&-1\end{pmatrix}$， …………… 3 分

$$(A-E,A)=\begin{pmatrix}1&2&0&2&2&0\\2&0&3&2&1&3\\0&1&-1&0&1&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&0&2&2&0\\0&-4&3&-2&-3&3\\0&1&-1&0&1&0\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&2&2&0&0\\0&0&-1&-2&1&3\\0&1&-1&0&1&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&-2&2&6\\0&0&-1&-2&1&3\\0&1&0&2&0&-3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&-2&2&6\\0&1&0&2&0&-3\\0&0&1&2&-1&-3\end{pmatrix}$$

故　$X=\begin{pmatrix}-2&2&6\\2&0&-3\\2&-1&-3\end{pmatrix}$。 ……………… 9 分

7、解

$$\begin{pmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\2&0&3&-1&3\\1&1&0&4&-1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\0&-2&-1&-5&1\\0&0&-2&2&-2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&1&-1&1\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&0&4&-1\\0&2&0&6&-2\\0&0&0&0&0\\0&0&1&-1&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&1&0\\0&1&0&3&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&1&-1&1\end{pmatrix}$$ ……………… 5 分

所以向量组的秩为 3，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是一个极大线性无关组， ……………… 7 分

$$\alpha_4=\alpha_1+3\alpha_2-\alpha_3,\alpha_5=-\alpha_2+\alpha_3$$ ………………… 9 分

8、解 $D=\begin{vmatrix}1 & \lambda & 1\\ 1 & -1 & 1\\ \lambda & 1 & 2\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda+1)$ ………………… 3 分

因为方程组有非零解的充要条件是 $D=0$，所以当 $\lambda=2$ 或 $\lambda=-1$ 时，方程组有非零解。 ………………… 5 分

当 $\lambda=2$ 时，方程组为

$$\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=0,\\ x_1-x_2+x_3=0,\\ 2x_1+x_2+2x_3=0\end{cases}$$

解得方程组的一般解为 $\begin{cases}x_1=-x_3\\ x_2=0\end{cases}$，$x_3$ 为自由未知量； ………………… 7 分

当 $\lambda=-1$ 时，方程组为

$$\begin{cases}x_1-x_2+x_3=0,\\ x_1-x_2+x_3=0,\\ -x_1+x_2+2x_3=0\end{cases}$$

解得方程组的一般解为 $\begin{cases}x_1=x_2\\ x_3=0\end{cases}$，$x_2$ 为自由未知量 ………………… 9 分

9、解 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2-4x_1x_2-4x_2x_3=2(x_1-x_2)^2-(x_2+2x_3)^2+4x_3^2$

令 $\begin{cases}y_1=\sqrt{2}x_1-\sqrt{2}x_2\\ y_2=x_2+2x_3\\ y_3=2x_3\end{cases}$，即 $\begin{cases}x_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}y_1+y_2-y_3\\ x_2=y_2-y_3\\ x_3=\dfrac{1}{2}y_3\end{cases}$， ………………… 6 分

则 f 的规范形为 $f=y_1^2-y_2^2+y_3^2$， …………………8 分

所用变换矩阵为

$$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$ ………………… 9 分

$\lambda=-2.\quad \xi_1=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}.$

$\lambda=4.\quad \xi_2=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}.$

$\lambda=1.\quad \xi_3=\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}.$

6

三、(本大题共 1 小题，共 11 分)

10 解 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 0 & 2\\ 0 & \lambda-4 & 0\\ 2 & 0 & \lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-4)(\lambda-1)(\lambda-6)$

求得特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=4,\lambda_3=6$， ………………… 4 分

对于 $\lambda_1=1$，解方程组 $(1E-A)X=0$，得特征向量 $\alpha_1=(2,0,1)$，单位化得 $p_1=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(2,0,1)$；

对于 $\lambda_2=4$，解方程组 $(4E-A)X=0$，得特征向量 $\alpha_2=(0,1,0)$，单位化得 $p_2=(0,1,0)$；

对于 $\lambda_3=6$，解方程组 $(6E-A)X=0$，得特征向量 $\alpha_2=(1,0,-2)$，单位化得 $p_3=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(1,0,-2)$.

故所求正交矩阵为

$$P=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & \sqrt{5} & 0\\ 1 & 0 & -2\end{pmatrix}，且 P^TAP=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}.$$ ………………… 11 分

四、(本大题共 1 小题，共 8 分)

11、解 二次型的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix}$$ ………………… 2 分

二次型正定当且仅当 $\lambda>0$，$\begin{vmatrix}\lambda & 1\\ 1 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-1>0$，$\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+2)>0$，

解得 $\lambda>1$. 即当 $\lambda>1$ 时，二次型正定. ………………… 8 分

五、证明题(本大题共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分)

12、证明：如果向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关，而 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta$ 线性相关，则向量 β 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表出，且表法唯一。

证 因 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta$ 线性相关，则存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_r,k_{r+1}$ 使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r+k_{r+1}\beta=0$$ ………………… 1 分

其中必有 $k_{r+1}\neq 0$，否则，若 $k_{r+1}=0$，而 $k_1,k_2,\cdots,k_r$ 不全为零有

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r = 0$$

这与$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关的假设矛盾，所以$k_{r+1} \neq 0$，于是

$$\beta = -\frac{k_1}{k_{k+1}}\alpha_1 - \frac{k_2}{k_{k+1}}\alpha_2 - \cdots - \frac{k_r}{k_{k+1}}\alpha_r$$ ………………… 3分

又若$\beta = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \cdots + l_r\alpha_r$，$\beta = m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 + \cdots + m_r\alpha_r$，则

$$(l_1 - m_1)\alpha_1 + (l_2 - m_2)\alpha_2 + \cdots + (l_r - m_r)\alpha_r = 0$$

因$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关，所以$l_i - m_i = 0$，即$l_i = m_i$, $(i = 1, 2, \cdots, r)$。 ………… 5分

13、设方阵A满足$A^2 + A = 4E$，证明：$A - E$可逆，并求其逆。

证 由$A^2 + A = 4E$，$(A-E)(A+2E) = 2E$, $(A-E)\dfrac{(A+2E)}{2} = E$, ………………… 3分

所以$A - E$可逆，且$(A-E)^{-1} = \dfrac{(A+2E)}{2}$. ………………… 5分

平

试题编号：

重庆邮电大学 2011-2012 学年第 1 学期

《线性代数》试卷（期末）　（闭卷）

题　号	一	二	三	四	五	六	七	八	总 分
得　分									
评卷人									

一、（本大题共 2 小题，每小题 8 分，共 16 分）

1. 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}$ 的值.

2. 设 A 为 3 级矩阵，A^* 为 A 的伴随矩阵，$|A|=\dfrac{1}{2}$，求 $|(2A)^{-1}-5A^*|$.

二、（本大题共 2 小题，每小题 8 分，共 16 分）

3. 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 2 & 0\\ 3 & 4 & 5\end{pmatrix}$, A^* 为 A 的伴随矩阵, 求 $(A^*)^{-1}$.

4. 设 $A=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$, B 是三阶矩阵，且 $AB+E=A^2-B$, 求 B.

三、（本大题共 2 小题，每小题 8 分，共 16 分）

5. 用配方法将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+6x_2x_3$ 化为标准形,并求所用的变换矩阵.

6. 写出二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+4x_2x_3$ 的矩阵，并判断其是否正定.

四、（本大题共 1 小题，共 8 分）

7. 用矩阵的初等变换求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 4\end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

五、（本大题共 1 小题，共 10 分）

8. 求下列向量组的秩和一个最大线性无关组，并将其余向量用最大线性无关组线性表示：$\alpha_1=(2,1,1)^T,\alpha_2=(4,2,2)^T,\alpha_3=(5,2,1)^T,\alpha_4=(1,0,1)^T$.

六、（本大题共 1 小题，共 10 分）

9．当 a 取何值时，齐次线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \end{cases}$$

有非零解？在有非零解的情形，求基础解系与通解.

七、（本大题共 1 小题，共 10 分）

10．设 $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$，问 A 能否相似于对角矩阵，并说明理由. 若能，求出可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

八、（本大题共 2 小题，每小题 7 分，共 14 分）

11. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关，

$$\beta_1=\alpha_1,\ \beta_2=\alpha_1+\alpha_2,\ \cdots,\ \beta_r=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_r,$$

证明：向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 线性无关.

12. 设 A，B 是两个 n 阶方阵，试求使等式 $A^2-B^2=(A+B)(A-B)$ 成立的充分必要条件.

2011-2012答案：

一、（本大题共 2 小题，每小题 8 分，共 16 分）

1. 解

$$D=\begin{vmatrix}0&5&10&-3\\0&-7&-7&7\\1&2&3&-2\\0&-10&-9&12\end{vmatrix}=(-7)\begin{vmatrix}5&10&-3\\1&1&-1\\-10&-9&12\end{vmatrix}=(-7)\begin{vmatrix}0&5&2\\1&1&-1\\0&1&2\end{vmatrix}=56. \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\ 8\text{分}$$

2. 解 $|A||(2A)^{-1}-5A^*|=|A(\frac{1}{2}A^{-1}-5A^*)|$

$$=|\frac{1}{2}E-5AA^*|=|\frac{1}{2}E-5|A|E|=|-2E|=-8, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\ 6\text{分}$$

所以 $|(2A)^{-1}-5A^*|=-16$. ………………… 8 分

二、（本大题共 2 小题，每小题 8 分，共 16 分）

3. 解 因 $(A^*)^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A$，而 $|A|=10$，所以 ………………… 4 分

$$(A^*)^{-1}=\frac{1}{10}A=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}-4&-2&-1\\-5&-3&-2\\-3&-2&-1\end{pmatrix}. \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\ 8\text{分}$$

4. 解 由 $AB+E=A^2-B$，可得

$$(A+E)B=(A+E)(A-E), \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\ 3\text{分}$$

而

$$|A+E|=\begin{vmatrix}0&3&1\\1&2&0\\2&3&2\end{vmatrix}=-7\neq 0,$$

所以 $A+E$ 可逆，于是 ………………… 6 分

$$B=A-E=\begin{pmatrix}-2&3&1\\1&0&0\\2&3&0\end{pmatrix}. \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\ 8\text{分}$$

三、（本大题共 2 小题，每小题 8 分，共 16 分）

5. 解 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2+x_3)^2+(x_2+2x_3)^2$， ………………… 3 分

令 $\begin{cases} y_1 = x_1+x_2+x_3 \\ y_2 = x_2+2x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$，即 $\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + y_3 \\ x_2 = y_2 + -2y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$ ………………… 5 分

原二次型化为标准形 $f = y_1^2 + y_2^2$，所用变换矩阵为

$$C=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$ ………………… 8 分

6. 解 二次型的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$ ………………… 3 分

因 $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}=-3<0$，故 $f(x_1,x_2,x_3)$ 不正定. ………………… 8 分

四、（本大题共 1 小题，共 8 分）

7. 解

$$(A,E)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$ ………………… 6 分

所以 $A^{-1}=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -6 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$ ………………… 8 分

五、（本大题共 1 小题，共 10 分）

8. 解 因

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}2&4&5&1\\1&2&2&0\\1&2&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&2&0&0\end{pmatrix},$$ ……………… 4 分

故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩为 3，$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$ 是向量组的一个最大无关组，且 $\alpha_2=2\alpha_1$. ………… 10 分

六、（本大题共 1 小题，共 10 分）

9. 解 系数行列式

$$\begin{vmatrix}2&-1&3\\1&-3&4\\-1&2&a\end{vmatrix}=-5(a+3)$$ ……………… 3 分

所以当时 $a=-3$ 时，方程组有非零解. ……………… 5 分

此时，方程组的系数矩阵

$$\begin{pmatrix}2&-1&3\\1&-3&4\\-1&2&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&5&-5\\1&-3&4\\0&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得 $\begin{cases}x_1=-x_3\\x_2=x_3\end{cases}$，取 $x_3=1$，得一基础解系 $\alpha=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$， ……………… 8 分

因此通解为 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$，$c$ 为任意常数. ……………… 10 分

七、（本大题共 1 小题，共 10 分）

10. 解 特征多项式

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda&-3\\-1&4-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-5)$$ ……………… 2 分

求得特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=5$，因 A 有 2 个不同的特征值，所以 A 可对角化. ……………… 5 分

对于$\lambda_1=1$，解方程$(1E-A)X=0$，得特征向量$\alpha_1=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$；

对于$\lambda_2=5$，解方程$(5E-A)X=0$，得特征向量$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$， ………………… 8 分

取$P=\begin{pmatrix}3&1\\1&-1\end{pmatrix}$，则$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0\\0&5\end{pmatrix}$. ………………… 10 分

八、（本大题共 2 小题，每小题 7 分，共 14 分）

11. 证 设$x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3+\cdots+x_r\beta_r=0$，即

$$(x_1+x_2+\cdots+x_r)\alpha_1+(x_2+x_3+\cdots+x_r)\alpha_2+\cdots+x_r\alpha_r=0$$ ………………… 3 分

因$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关，故

$$\begin{cases}x_1+x_2+\cdots+x_r=0\\ \quad x_2+\cdots+x_r=0\\ \quad\quad \cdots\cdots\\ \quad\quad\quad x_r=0\end{cases}$$ ………………… 5 分

解得 $x_1=x_2=\cdots=x_r=0$，所以$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$线性无关. ………………… 7 分

12. 证 因 $(A+B)(A-B)=A^2-AB+AB-B^2$， ………………… 2 分

故$A^2-B^2=(A+B)(A-B)$的充要条件是$-AB+AB=0$，即$AB=BA$. ………………… 7 分

试题编号：

重庆邮电大学第2学期

线性代数试卷（期末）（B卷）（闭卷）

一．填空题（每空2分，共16分）

1、向量$\alpha=[1,4,0,2]^T,\beta=[2,-2,1,3]^T$的距离为_____；内积为______。

2、当常数$a=$_____或_____时，方程组$\begin{cases} \alpha x_1=0 \\ \alpha x_2+5x_3=0 \\ x_2-x_3=0 \end{cases}$有非零解。

3、向量组$\alpha_1=[1,1,0,0]^T,\alpha_2=[0,1,1,0]^T,\alpha_3=[0,0,1,1]^T,\alpha_4=[1,0,0,1]^T$的秩为_____

4、$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}=$___________

5、三阶可逆矩阵A的特征值为2，3，4，则A^{-1}的三个特征值分别为___________

6、若$\alpha_1=[1,1,1]^T,\alpha_2=[1,2,3]^T$，则与$\alpha_1$和$\alpha_2$都正交的单位向量为_____________

二、单项选择题（每题3分，共15分）

1、设A、B为n阶可逆阵，则$(A^{-1}B^{-1})^T=$_______

（A）$(A^{-1})^T(B^{-1})^T$　（B）$(A^T)^{-1}(B^T)^{-1}$　（C）$(B^TA^T)^{-1}$　（D）$(A^TB^T)^{-1}$

2、设A为n阶可逆阵，$tr(A)$为A的对角元之和，$r(A)$表示A的秩，α为非零实数，则_____。

（A）$|aA|=a|A|$　（B）$r(aA)=ar(A)$　（C）$tr(aA)=atr(A)$　（D）$(aA)^{-1}=aA^{-1}$

3、设A、B为n阶方阵，且AB=0，则_______

（A）$|A|=0$或$|B|=0$　（B）$A=0$或$B=0$

（C）$A+B=0$　（D）$|A|+|B|=0$

4. 设A为n阶方阵，且$|A|=a\neq 0$，则其伴随矩阵$|A^*|=$________

（A）a　　（B）$\dfrac{1}{a}$　　（C）a^{n-1}　　（D）a^{n}

5、设A、B为n阶可逆阵，则________

（A）$|A+B|=|A|+|B|$（B）$AB=BA$（C）$|AB|=|BA|$（D）$(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$

三、（本题12分）计算下列行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

四．（本题12分）求矩阵$A=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$的特征值和特征向量。

五．（本题12分）设$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$,

1、求A^{-1}；2、已知$AX=B$，求X

六、（本题 12 分）已知方程组$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = k \end{cases}$有解。

试求：1、k 的值；2、方程组的通解

七、（本题 12 分）

求一个正交变换 $X = PY$，把二次型 $f = 4x_1^2 + 2x_2x_3 + 3x_2^2 + 3x_3^2$ 化为标准型。

八、证明题（此题9分）

设A为二阶实对称矩阵，且满足矩阵方程 $A^2-3A+2E=0$

试证：1、$A+2E$ 可逆。

2、A为正定矩阵。

一、填空题

1、$\sqrt{39}$，0　2、0或-5　3、3　4、$\begin{bmatrix}5&3&2\\1&4&3\\0&1&1\end{bmatrix}$　5、$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}$

6、$\pm[1,-2,1]^T/\sqrt{6}$

二、选择题

1、D　2、C　3、A　4、C　5、C

三、$\begin{vmatrix}6&6&6&6\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{vmatrix}=48$

四、$|\lambda E-A|=(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda+2&-1\\4&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda+1)$

特征根为：$\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=-1$

对于$\lambda_1=\lambda_2=2$，$[2E-A]=\begin{bmatrix}4&-1&-1\\0&0&0\\4&-1&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}4&-1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

$\begin{cases}x_1=\frac{1}{4}x_2+\frac{1}{4}x_3\\x_2=x_2\\x_3=x\end{cases}$　取$k_1=\frac{1}{4}x_2,k_2=\frac{1}{4}x_3$，特征向量：$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=k_1\begin{bmatrix}1\\4\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}1\\0\\4\end{bmatrix}$

对于$\lambda_1=1,[-E-A]=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&-3&0\\4&-1&-4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$,故等价于$\begin{cases}x_1=x_3\\x_2=0\\x_3=x_3\end{cases}$

取$x_3=k\neq0$，得特征向量为：$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$

五、1. $A^{-1}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&-1\\1&-1&0\end{bmatrix}$ 2. $X=A^{-1}B=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&-1\\1&-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&1\\1&-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\-1&0&0\\0&-1&0\end{bmatrix}$

六、$[A,b]=\begin{bmatrix}1&2&-1&6\\2&-1&3&2\\3&1&2&k\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1&2\\0&1&-1&2\\0&0&0&k-8\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1&2\\0&1&-1&2\\0&0&0&k-8\end{bmatrix}$

（1） k=8;

（2） 令 k=8，得：$\begin{cases}x_1=-x_3+2\\x_2=x_3+2\\x_3=x_3\end{cases}$，令 $x_3=c$，通解为：$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=c\begin{bmatrix}1\\3\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\2\\0\end{bmatrix}$

七、$A=\begin{bmatrix}4&0&0\\0&3&1\\0&1&3\end{bmatrix}$，特征根为 $\lambda_1=2,\lambda_2=\lambda_3=4$，

对应的标准正交特征向量分别为：

$$p_1=[0,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}]^T,p_2=[1,0,0]^T,p_3=[0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}]^T,P=[p_1,p_2,p_3]$$

$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{bmatrix}$，故 $f(X)=f(PY)=2y_1^2+4y_2^2+4y_3^2$

八、1、$(A+2E)(A-5E)=-12E$，故：$(A+2E)(\frac{5}{12}E-\frac{1}{12}A)=E$，结论1成立

2、设 λ 是 A 的特征值，p 是 A 属于 λ 的特征向量。

设 $f(\lambda)=\lambda^2-3\lambda+2$，则：$f(A)=A^2-3A+2E$，由 $f(A)=0$，得：$f(\lambda)=0$

特征根为：$\lambda_1=1,\lambda_2=2$ 都大于零，且 A 为实对称矩阵，故 A 为正定矩阵。

试题编号：

中心食堂
永宏打印店

重庆邮电大学 2010-2011 学年 1 学期

线性代数试卷（期末）（A 卷）（闭卷）

题　号	一	二	三	四	五	六	七	八	总 分
得　分									
评卷人									

一、计算题（本大题共 7 小题，每小题 8 分，共 56 分）

1. 计算 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$.

2. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$，求 A^4.

3. 举例说明下列命题是错误的：若 $A^2=O$，则 $A=O$，这里 O 为零矩阵.

4. 设 $\alpha_1=(1,2,3)^T$，求非零向量 α_2，α_3，使向量组 α_1，α_2，α_3 为正交向量组.

5. 用初等变换求矩阵 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 5 & -6 & 1 \end{pmatrix}$ 的秩.

6. 已知二次型 $f=5x_1^2+5x_2^2+ax_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$ 的秩为 2，求常数 a 的值.

7. 设 $A=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&3&1\\0&2&1\end{pmatrix}$，求 A^{-1}.

二、（本题满分 12 分）求线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2=5\\2x_1+x_2+x_3+2x_4=1\\5x_1+3x_2+2x_3+2x_4=3\end{cases}$ 的通解.

三、（**本题满分 12 分**）求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 3\\ 3 & -5 & 3\\ 6 & -6 & 4\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量.

四、（**本题满分 10 分**）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$，$B=(kE+A)^2$，其中 k 为实数，E 为单位矩阵。

（1）求对角矩阵 D，使 B 与 D 相似；

（2）求 k 为何值时，B 为正定矩阵。

五、（本题共 2 题，每小题 5 分，共 10 分）

1. 设 η 为非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的一个解，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 是对应的齐次线性方程组的一个基础解系，试证：$\eta,\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 线性无关.

2. 证明：$$\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix} = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n .$$

2010-2011 学年 1 学期

线性代数试卷参考答案

一、计算题（本大题共 7 小题，每小题 8 分，共 56 分）

1. 解 原式$=\begin{vmatrix}10&10&10&10\\4&1&2&3\\3&4&1&2\\2&3&4&1\end{vmatrix}=10\begin{vmatrix}1&1&1&1\\4&1&2&3\\3&4&1&2\\2&3&4&1\end{vmatrix}=10\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&-3&-2&-1\\0&1&-2&-1\\0&1&2&-1\end{vmatrix}=-160$.

2. 解 $A^4=\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}^4=3^3\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}27&27\\54&54\end{pmatrix}$. （直接计算也可）

3. 解 如取$A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$，则$A^2=O$，但$A\neq O$. （其他例子也可）

4. 解 设$x=(x_1,x_2,x_3)^T$与α_1正交，则$x_1+2x_2+3x_3=0$。 ……3 分

解得基础解系为$\xi_1=(-2,1,0)^T$，$\xi_2=(-3,0,1)^T$。 ……5 分

故取$\alpha_2=\xi_1$，$\alpha_3=\xi_2-\dfrac{[\xi_1,\xi_2]}{[\xi_1,\xi_1]}\xi_1=\dfrac{1}{5}(-3,-6,5)^T$. ……8 分

5. 解 $\begin{pmatrix}2&-1&1&-1&3\\4&-2&-2&3&2\\2&-1&5&-6&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&-1&1&-1&3\\0&0&-4&5&-4\\0&0&4&-5&-2\end{pmatrix}$

$\sim\begin{pmatrix}2&-1&1&-1&3\\0&0&-4&5&-4\\0&0&0&0&-6\end{pmatrix}$，故秩为 3.

6. 解 f对应的$A=\begin{pmatrix}5&-1&3\\-1&5&-3\\3&-3&a\end{pmatrix}$， ……4 分

由$r(A)=2$得$|A|=0$， ……6 分 从而$a=3$. ……8 分

7. 解 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1/5 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & -2 & 3\end{pmatrix}$. （用定义、初等变换、分块矩阵等法均可）

二、（本题满分 12 分）

解 $(A\vdots b)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0 & 5\\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1\\ 5 & 3 & 2 & 2 & 3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & -8\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 13\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$ ……6 分

基础解系$\xi=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$，……8 分 特解$\eta=\begin{pmatrix}-8\\ 13\\ 0\\ 2\end{pmatrix}$ ……10 分 （可有其他形式）

通解为$\begin{pmatrix}x_1\\ x_3\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=k\xi+\eta$，……11 分 $k\in R$. ……12 分

三、（本题满分 12 分）解 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 3 & -3\\ -3 & \lambda+5 & -3\\ -6 & 6 & \lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda+2)^2(\lambda-4)$，…5 分

故A的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=-2$，$\lambda_3=4$. ……6 分

对于$\lambda_1=\lambda_2=-2$，特征向量为$\xi=k_1\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$，$k_1^2+k_2^2\neq 0$， ……9 分

对于$\lambda_3=4$，特征向量为$\eta=k_3\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$，$k_3\neq 0$. ……12 分

四、（本题满分 10 分）

解 (1) （6 分）$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & -1\\ 0 & \lambda-2 & 0\\ -1 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)^2$.

A的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=2$，$\lambda_3=0$. ……3 分

从而存在正交矩阵Q，使得 $Q^{-1}AQ=diag(2,2,0)$. ……5 分

$$于是Q^{-1}(kE+A)^2Q=\begin{pmatrix}(k+2)^2 & & \\ & (k+2)^2 & \\ & & k^2\end{pmatrix}:=D \qquad ……6分$$

(2)(4 分)由(1)知，当$k\neq 0$且$k\neq 2$时，$B=(kE+A)^2$为正定矩阵. ……10 分

五、(本题共 2 题，每小题 5 分，共 10 分)

1. 证 设有数$k_0,k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$，使得$k_0\eta+k_1\xi_1+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}=0$，……2 分

两边同左乘以A得 $k_0b\Rightarrow$ $k_0=0$，代回得$k_1\xi_1+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}=0$. ……4 分

由$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$线性无关知$k_1=k_2=\cdots=k_{n-r}=0$，所以$\eta,\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$线性无关.

……5 分

2. 证 设$D_n=\begin{vmatrix}x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0\\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1\end{vmatrix}$，按第一列展开得

$$D_n=xD_{n-1}+(-1)^{n+1}a_n\begin{vmatrix}-1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ x & -1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & x & -1\end{vmatrix}=xD_{n-1}+a_n \qquad ……3分$$

而$D_2=\begin{vmatrix}x & -1\\ a_2 & x+a_1\end{vmatrix}=x^2+a_1x+a_2$，……4 分

由递推关系知结果成立. ……5 分

(其他方法也可证明)

试题编号：

重庆邮电大学 09-10 学年第二学期

《线性代数》试卷（期末）（A 卷）（闭卷）

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	总 分
得 分									
评卷人									

一、（本大题共 2 小题，共 10 分）

1、（5 分）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}$，求 $(A^TB)^T$.

2、（5 分）已知当 $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ 时，$A^6=E$（E 为单位矩阵），求 A^{11}.

二、（本大题共 2 小题，共 14 分）

3、（7 分）设 1，-1，2 是 3 阶矩阵 A 的特征值，，求$|(\frac{1}{2}A)^{-1}-3A^{*}|$.

4、（7 分）计算行列式$D=\begin{vmatrix} x_1-a & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-a & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n-a \end{vmatrix}$.

三、（本大题共 2 小题，共 14 分）

5、（7 分）设矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，且$AX=2X+A$，求$X$.

6、（7 分）设 $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}$，求可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP$ 为对角阵.

四、（本大题共 2 小题，每小题 7 分，共 14 分）

7、（7 分）写出实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3$ 的矩阵，并将二次型化为规范形.

8、（7 分）在向量空间 R^4 中求一个单位向量 η，使它同时与向量 $\alpha=(1,1,-1,1)^T$，$\beta=(1,-1,1,-1)^T$，$\gamma=(2,1,1,3)^T$ 正交.

五、（本大题共 2 小题，共 16 分）

9、（8 分）设向量组 $\alpha_1=(2,1,4,3)^T,\alpha_2=(-1,1,-6,6)^T,\alpha_3=(-1,-2,2,-9)^T$，

$\alpha_4=(1,1,-2,7)^T$，$\alpha_5=(2,4,4,9)^T$，求该向量组的秩和一个最大线性无关组，并将其余向量由该最大线性无关组线性表示.

10、（8 分）设向量空间 R^3 的两个基为 $\alpha_1=(1,1,1)^T,\alpha_2=(1,0,-1)^T,\alpha_3=(1,0,1)^T$ 及

$\beta_1=(1,2,1)^T$，$\beta_2=(2,3,4)^T$，$\beta_3=(3,4,3)^T$，求由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵 P.

六、（本大题共 2 小题，共 20 分）

11、（12 分）当λ为何值时，方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

有唯一解？无解？有无穷多解？并在有无穷多解时求其通解.

12、（8 分）已知三阶矩阵$B \neq O$，且B的每一个列向量都是以下方程组的解

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + \lambda x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

1）求λ的值；

2）证明$|B| = 0$.

七、（本大题共 2 小题，共 12 分）

13、(6 分 ）设A,B均为n阶矩阵，且$A=B+C$，$B^T=B$，$C^T=-C$，证明：$AA^T=A^TA$的充分必要条件是$BC=CB$.

14、（6 分 ）设向量组$\beta_1=\alpha_1,\beta_2=\alpha_1+\alpha_2,\cdots,\beta_r=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_r$，且向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关，证明向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$线性无关.

重庆邮电大学09级《线性代数》期末试题参考答案及评分标准

（2009-2010学年第 2 学期）（A卷）

一、（本大题共2小题，共10分）

1、（5分）

解 $(A^TB)^T = B^TA = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5 & 1 & 4\\ 11 & 1 & 10\end{pmatrix}$. ……………… 5分

2、（5分）

解 因$A^6 = E$，所以$A^5 = A^{-1}$，

于是$A^{11} = A^5 = A^{-1} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$. ……………… 5分

二、（本大题共2小题，共14分）

3、（7分）

解 由题设$|A| = 1\cdot(-1)\cdot 2 = -2$ ……………… 2分

$|A||(\frac{1}{2}A)^{-1} - 3A^*| = |2AA^{-1} - 3AA^*|$

$= |2E - 3|A|E| = |2E + 6E| = |8E| = 512$ ……………… 6分

故 $|(\frac{1}{2}A)^{-1} - 3A^*| = -256$. ……………… 7分

4、（7分）

解

$$D = \begin{vmatrix} x_1 - a & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 - a & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n - a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i - a & x_2 & \cdots & x_n \\ \sum_{i=1}^{n} x_i - a & x_2 - a & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{i=1}^{n} x_i - a & x_2 & \cdots & x_n - a \end{vmatrix}$$ ……………… 3分

$$= (\sum_{i=1}^{n} x_i - a)\begin{vmatrix} 1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 1 & x_2 - a & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_2 & \cdots & x_n - a \end{vmatrix}$$ ……………… 5分

$$=(\sum_{i=1}^{n}x_i-a)\begin{vmatrix}1 & x_2 & \cdots & x_n\\ 0 & -a & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & -a\end{vmatrix}=(-a)^{n-1}(\sum_{i=1}^{n}x_i-a)$$ ………………… 7 分

三、（本大题共 2 小题，共 14 分）

5、（7 分）

解　由 $AX=2X+A$，知 $(A-2E)X=A$

而 $A-2E=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & -2\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}$ 可逆，所以 $X=(A-2E)^{-1}A$ ………………… 2 分

$(A-2E)^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$，　有误 ………………… 5 分

故 $X=(A-2E)^{-1}A=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3}\\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3}\\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$　有误 ………………… 7 分

另解　由 $AX=2X+A$，知 $(A-2E)X=A$ ………………… 2 分

$$(A-2E,A)=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & -2\\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

所以　$X=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3}\\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3}\\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$ ………………… 7 分

6、（7 分）

解　特征多项式 $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}3-\lambda & 2\\ 0 & -1-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-3)$，

A 的特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=3$，　……………… 3 分

对应 $\lambda_1=-1$，解方程组 $(A+E)X=O$，得基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$，　……………… 4 分

对应 $\lambda_1=3$，解方程组 $(A-3E)X=O$，得基础解系 $\xi_2=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，　……………… 5 分

令 $P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 0\end{pmatrix}$，则 P 可逆，且 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1 & \\ & 3\end{pmatrix}$　……………… 7 分

四、（本大题共 2 小题，共 14 分）

7、（7 分）

解　二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 1 & 3 & 0\\ -2 & 0 & 5\end{pmatrix}$；　……………… 2 分

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3=(x_1+x_2-2x_3)^2+2(x_2+x_3)^2-x_3^2$$

令 $\begin{cases}y_1=x_1+x_2-2x_3\\ y_2=\sqrt{2}x_2+\sqrt{2}x_3\\ y_3=x_3\end{cases}$，　……………… 6 分

则 $f(x_1,x_2,x_3)=y_1^2+y_2^2-y_3^2$.　……………… 7 分

8、（7 分）

解　设 $\xi=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T\in R^4$，则 ξ 应满足齐次线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2-x_3+x_4=0\\ x_1-x_2+x_3-x_4=0\\ 2x_1+x_2+x_3+3x_4=0\end{cases}，$$　……………… 3 分

解得基础解系 $\xi=(0,-2,-1,1)^T$，　……………… 6 分

单位化，得 $\eta=(0,-\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}})^T$ ………………… 7分

五、（本大题共2小题，共16分）

9、（8分）

解 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=\begin{pmatrix}2&-1&-1&1&2\\1&1&-2&1&4\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&0&4\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$ …… 4分

所以向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的秩为3，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 是一个最大无关组，且

$$\alpha_3=-\alpha_1-\alpha_2,\alpha_5=4\alpha_1+3\alpha_2-3\alpha_4.$$ ………………… 8分

10、（8分）

解 设 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)P$，令 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，则 $B=AP$，于是

$P=A^{-1}B$. ………………… 2分

$(A,B)=\begin{pmatrix}1&1&1&1&2&3\\1&0&0&2&3&4\\1&-1&1&1&4&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&2&3&4\\0&1&0&0&-1&0\\0&0&1&-1&0&-1\end{pmatrix}$, ………………… 7分

故所求过渡矩阵为 $P=\begin{pmatrix}2&3&4\\0&-1&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}$. ………………… 8分

另解 设 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)P$，令 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，则 $B=AP$，于是

$P=A^{-1}B=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&-1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\\1&4&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\\1&4&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3&4\\0&-1&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}$. ……… 8分

六、（本大题共2小题，共20分）

11、（12分）

解 系数行列式 $|A|=\begin{vmatrix}\lambda&1&1\\1&\lambda&1\\1&1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda-1)^2$ ………………… 4分

当 $\lambda\neq-2$ 且 $\lambda\neq1$ 时，$|A|\neq0$，方程组有唯一解； ………………… 6分

当$\lambda=-2$时，增广矩阵$B=(A,b)=\begin{pmatrix}-2&1&1&1\\1&-2&1&-2\\1&1&-2&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&1&-2\\0&1&-1&1\\0&0&0&3\end{pmatrix}$，

知$R(A)=2,R(B)=3$，故方程组无解； ………………… 8分

当$\lambda=1$时，方程组为$x_1+x_2+x_3=1$，方程组有无穷多解，通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$（c_1,c_2是任意数）． ………………… 12分

12、（8分）

解 1）由题设知方程组有非零解，所以系数行列式$|A|=0$，即

$$|A|=\begin{vmatrix}1&2&-2\\2&-1&\lambda\\3&1&-1\end{vmatrix}=5(\lambda-1)=0$$ ………………… 3分

得$\lambda=1$； ………………… 5分

2）因$A\neq O$，所以$R(A)>0$，而$R(B)\leq 3-R(A)<3$，故$|B|=0$． ………………… 8分

七、（本大题共2小题，共12分）

13、（6分）

证 因$A=B+C,\ A^T=B^T+C^T=B-C$， ………………… 1分

$$AA^T=(B+C)(B-C)=B^2-BC+CB+C^2,$$

$$A^TA=(B-C)(B+C)=B^2+BC-CB+C^2$$ ………………… 3分

所以$AA^T=A^TA\Leftrightarrow -BC+CB=BC-CB\Leftrightarrow 2BC=2CB\Leftrightarrow BC=CB$ ………………… 6分

14、（6分）

证 由已知条件得矩阵等式

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\0&1&\cdots&1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$ ………………… 3分

因矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$可逆，故$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$线性无关. ………………… 6 分

另证　设$x_1\beta_1+x_2\beta_2+\cdots+x_r\beta_r=o$，即$x_1\alpha_1+x_2(\alpha_1+\alpha_2)+\cdots+x_r(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_r)=o$，

有$(x_1+x_2+\cdots+x_r)\alpha_1+(x_2+\cdots+x_r)\alpha_2+\cdots+x_r\alpha_r=o$，因$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关，所以有

$$\begin{cases} x_1+x_2+\cdots+x_r=0 \\ \quad x_2+\cdots+x_r=0 \\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad x_r=0 \end{cases},$$ ………………… 4 分

解得$x_1=x_2=\cdots=x_r=0$，故$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$线性无关. ………………… 6 分