5.0元

数学建模

重庆邮电大学 2011－2012 学年第二学期

数学建模　期末考试　（A 卷 ）

密　封　线

专业：　班级：　姓名：　学号：

订　线

题号	一	二	三	四	五	六	总分
分数							
评卷人							

一．（本题 8 分）简述什么是数学建模和数学建模的基本步骤

数学模型是一种模拟，是用数学符号、数学式子、程序、图形等对实际课题本质属性的抽象而又简洁的刻划，它或能解释某些客观现象，或能预测未来的发展规律，或能为控制某一现象的发展提供某种意义下的最优策略或较好策略。数学模型一般并非现实问题的直接翻版，它的建立常常既需要人们对现实问题深入细微的观察和分析，又需要人们灵活巧妙地利用各种数学知识。这种应用知识从实际课题中抽象、提炼出数学模型的过程就称为

数学建模步骤：

(1)模型准备：首先要了解问题的实际背景，明确题目的要求，收集各种必要的信息。

(2)模型假设：为了利用数学方法，通常要对问题做出必要的、合理的假设，使问题的主要特征凸现出来，忽略问题的次要方面。

(3)模型构成：根据所做的假设以及事物之间的联系，构造各种量之间的关系，把问题化为数学问题，注意要尽量采用简单的数学工具。

4)模型求解：利用已知的数学方法来求解上一步所得到的数学问题，此时往往还要作出进一步的简化或假设。

(5)模型分析：对所得到的解答进行分析，特别要注意当数据变化时所得结果是否稳定。

(6)模型检验：分析所得结果的实际意义，与实际情况进行比较，看是否符合实际，如果不够理想，应该修改、补充假设，或重新建模，不断完善。

(7)模型应用：所建立的模型必须在实际应用中才能产生效益，在应用中不断改进和完善。

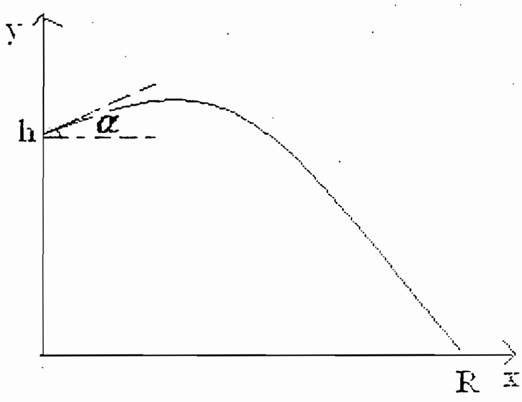
二．（本题 10 分）设有线性规划问题

$$
\begin{cases}
\max\ z = x_1 + x_3 \\
s.t.\quad x_1 + 2x_2 \le 5 \\
\qquad x_2 + 2x_3 = 6 \\
\qquad x_j \ge 0,\ j = 1,2,3
\end{cases}
$$

（1）将该线性规划问题化为标准型，（2）写出 MATLAB 求解程序

三．（本题 12 分）建立铅球掷远模型，不考虑阻力，设铅球初速度为 v，出手高度为 h 出手角度为 α（与地面夹角），建立投掷距离与 v, h, α 的关系式，并在 v, h 一定的条件下求最佳出手角度。

解：在图中坐标下铅球运动方程为



$\ddot{x} = 0, \ddot{y} = -g, x(0) = 0, y(0) = h, \dot{x}(0) = v\cos\alpha, \dot{y}(0) = v\sin\alpha$. 解出 $x(t)$， $y(t)$ 后，可以求得铅球掷远为

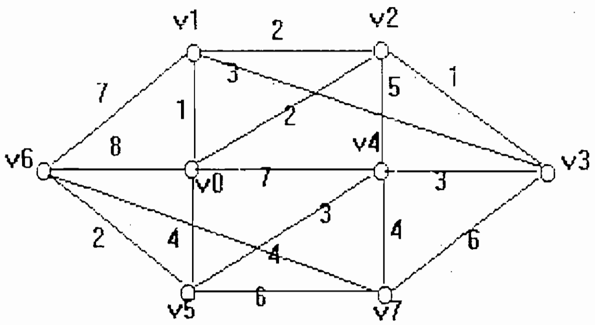
$$R = \frac{v^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha + \left(\frac{v^2}{g^2}\sin^2\alpha + \frac{2h}{g}\right)^{1/2} v\cos\alpha,$$ 这个关系还可表为

$$R^2 g = 2v^2\cos^2\alpha\left(h + R\tan\alpha\right)$$

由此计算 $\frac{dR}{d\alpha}\Big|_{\alpha^*} = 0$，得最佳出手角度 $\alpha^* = \sin^{-1}\frac{v}{\sqrt{2\left(v^2 + gh\right)}}$，和最佳成绩

$R^* = \frac{v}{g}\sqrt{v^2 + 2gh}$ 设 $h = 1.5m$，$v = 10m/s$，则 $\alpha^* \approx 41.4^0$，$R^* = 11.4m$

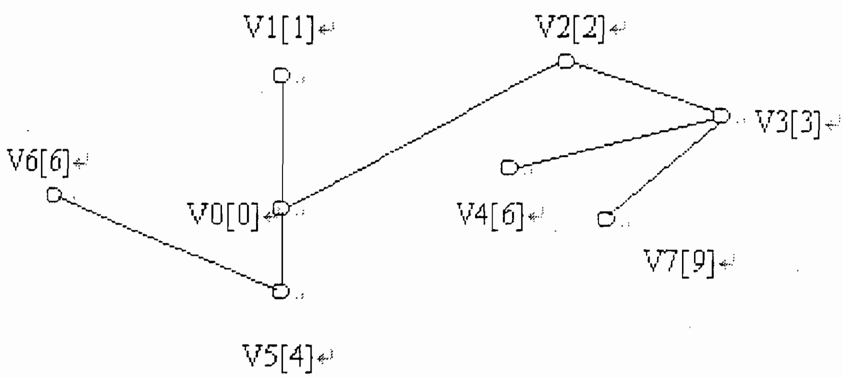
四．（本题 17 分）已知 8 个城市 v_0，v_1，…,v_7 之间有一个公路网（如图所示），每条公路为图中的边，边上的权数表示通过该公路所需的时间．



（1）设你处在城市 v_0，那么从 v_0 到其他各城市，应选择什么路径使所需的时间最短？

（2）求出该图的一棵最小生成树。

解： 到其它各点的最短路如下图：



各点的父点如下：

v0	**v1**	**v2**	**v3**	**v4**	**v5**	**v6**	**v7**
v0	**v0**	**v0**	**v2**	**v3**	**v0**	**v5**	**v3**

各点的最短路径及最短路长分别为：

$v0$: 0

$v0 \to v1$: 1

$v0 \to v2$: 2

$v0 \to v2 \to v3$: 3

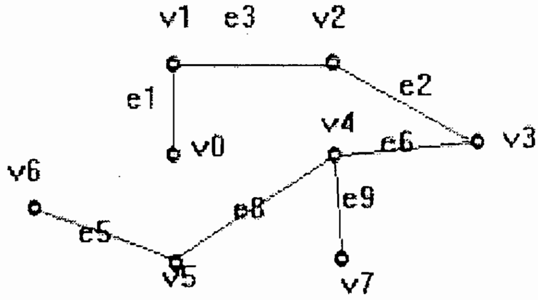
$v0 \to v2 \to v3 \to v4$: 6

$v0 \to v5$: 4

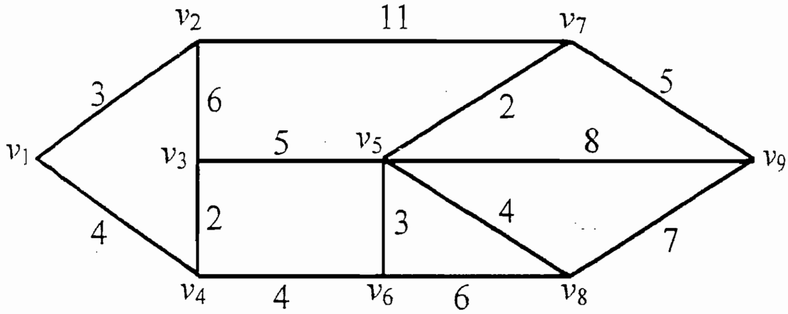
$v0 \to v5 \to v6$: 6

$v0 \to v2 \to \to v3 \to v7$: 9

(2)最小生成树如下图：

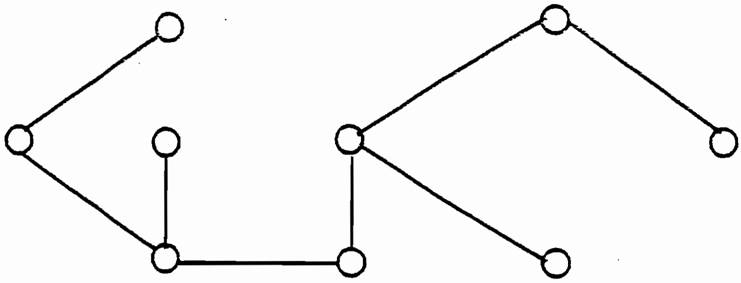


五．（本题 17 分）如图一是某村镇 9 个自然屯（用 $v_1,\cdots,v_9$ 表示）间可架设有线电视线路的最短距离示意图，边旁数字为距离（单位：km）．若每 km 的架设费用是定数 20 元/m，试协助有线电视网络公司设计一个既使得各村屯都能看到有线电视又使架设费用最低的路线，并求出最小架设费用.



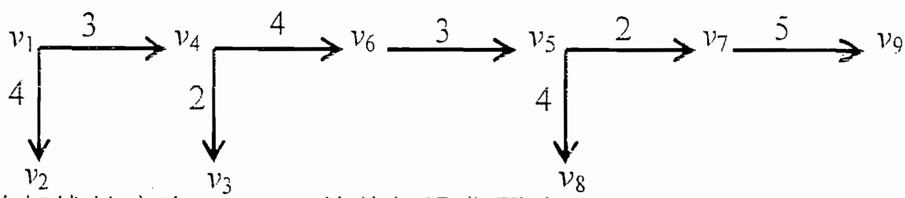
图一

解： 由题意可知，只需求出该网络图的最小树即可. 利用破圈法容易得树形图（图二）:



图二

故得架设路线为:



总架线长度为 27km，故总架设费用为 $27\times1000\times20=54$（万元）

六． 三个砖厂 A_1,A_2,A_3 向三个工地 B_1,B_2,B_3 供应红砖. 各砖厂的供应量与各工地的需求量以及各砖厂调运红砖到各工地的单价见表. 试安排调运方案，使总费用最小？

工地 单价/百元 砖厂	B_1	B_2	B_3	供应量/万块
A_1	10	6	4	170
A_2	7	5	6	200
A_3	8	3	9	150
需求量/万块	160	180	180	

解：本问题是一个产销平衡的运输问题，可以利用表上作业法直接求解，首先确定初始方案：

工地 单价/百元 砖厂	B_1	B_2	B_3	供应量/万块
A_1	10×	6×	4 170	170
A_2	7 160	5 30	6 10	200
A_3	8×	3 150	9×	150
需求量/万块	160	180	180	

其次对方案进行最优性检验：

$\lambda_{11}=10-4+6-7=5>0$，　$\lambda_{12}=6-4+6-5=3>0$，

$\lambda_{31}=8-7+5-3=3>0$，　$\lambda_{33}=9-3+5-6=5>0$，

故上述方案已是最优方案，即总运费最低的调运方案为：

$$A_1\xrightarrow{170}B_3,A_2\xrightarrow{160}B_1,A_2\xrightarrow{30}B_2,A_2\xrightarrow{10}B_3,A_3\xrightarrow{150}B_2$$

总费用为　$4\times170+7\times160+5\times30+6\times10+3\times150=2460$（百元）.

密 封 线

年级：　　专业：　　班级：　　姓名：　　学号：

重庆邮电大学 2009-2010 学年度第二学期

数学建模　　考试试题（A）开卷

题号	一	二	三	四	五	总分
分数						
评卷人						

（时间 120 分钟）

一、(15 分)什么是数学建模？数学建模论文的主要内容是什么？

数学建模：

数学模型（Mathematical Model）是一种模拟，是用数学符号、数学式子、程序、图形等对实际课题本质属性的抽象而又简洁的刻划，它或能解释某些客观现象，或能预测未来的发展规律，或能为控制某一现象的发展提供某种意义下的最优策略或较好策略。数学模型一般并非现实问题的直接翻版，它的建立常常既需要人们对现实问题深入细微的观察和分析，又需要人们灵活巧妙地利用各种数学知识。这种应用知识从实际课题中抽象、提炼出数学模型的过程就称为数学建模

主要内容：

1．标题、摘要部分

题目——写出较确切的题目（不能只写 A 题、B 题）。

摘要——200-300 字，包括模型的主要特点、建模方法和主要结果。

内容较多时最好有个目录。

2．中心部分

1）问题提出，问题分析。

2）模型建立：

① 补充假设条件，明确概念，引进参数；

② 模型形式（可有多个形式的模型）；

③ 模型求解；

④ 模型性质；

3）计算方法设计和计算机实现。

4）结果分析与检验。

5）讨论——模型的优缺点，改进方向，推广新思想。

6）参考文献——也有特定格式。

3．附录部分

计算程序，框图。

各种求解演算过程，计算中间结果。

各种图形、表格。

1. 二、（25 分） 某厂按合同规定须于当年每个季度末分别提供 10,15,25,2 台同一规格的柴油机。已知该厂各季度的生产能力及生产每台柴油机的成本如下表所示，如果生产出的柴油机当季不交货，每台积压一个季度需储存、维护等费用 0.15 万元，建立一个数学模型（不要求求解），要求在完成合同的情况下，使该厂全年生产（包括储存、维护）费用最小。

季度	生产能力（台）	三位成本（万元/台）
一	25	10.8
二	35	11.1
三	30	11.0
四	10	11.3

解：设 x_{ij} 为第 i 季度生产的用于第 j 季度交货的柴油机的台数，则由题意 ：

$$x_{11} = 10$$
$$x_{12} + x_{22} = 15$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 25$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 20$$

又由生产能力的要求，有

$$x_{44} < 10$$
$$x_{33} + x_{34} < 30$$
$$x_{22} + x_{23} + x_{24} < 35$$
$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} < 25$$

再设 c_{ij} 表示第 i 季度生产的用于第 j 季度交货的每台柴油机的实际成本，其值如下表：

i \ j	1	2	3	4
1	10.8	10.95	11.10	11.25
2		11.10	11.25	11.40
3			11	11.15
4				11.30

设 a_i 表示第 j 季度的生产能力，b_j 表示第 i 季度的合同供应量，则建立本问题模型：

$$\min \quad z = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} c_{ij}x_{ij}$$

$$s.t. \quad \sum_{j=1}^{4} x_{ij} \leqslant a_i$$

$$\sum_{i=1}^{4} x_{ij} = b_j$$

$$x_{ij} \geqslant 0$$

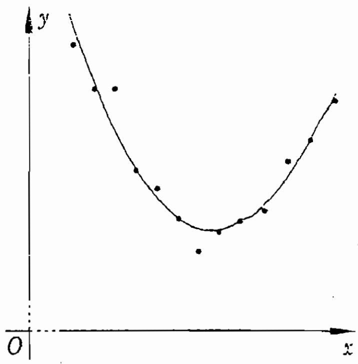
三、（20 分）某种合金的主要成分使金属甲与金属乙.经试验与分析，发现这两种金属成分所占的百分比之和 x 与合金的膨胀系数 y 之间有一定的相关关系.先测试了 12 次，得数据如下表：

表 2

x_i	37.0	37.5	38.0	38.5	39.0	39.5	40.0
y_i	3.40	3.00	3.00	2.27	2.10	1.83	1.53
x_i	40.5	41.0	41.5	42.0	42.5	43.0	
y_i	1.70	1.80	1.90	2.35	2.54	2.90	

试建立合金的膨胀系数 y 与两种金属成分所占的百分比之和 x 的模型。

解：画出散点图(图 2-11)，从散点图上看出，这 13 已知的数据点大致在一条抛物线的周围,假定回归函数为



$$y=\beta_0+\beta_1 x+\beta_2 x^2.$$

作变换 $x_1=x, x_2=x^2$，用多元线性回归分析方法得到

$$y=(3.40, 3.00, \cdots, 2.90)^T,$$

$$X=\begin{pmatrix} 1 & 37.0 & 1369.00 \\ 1 & 37.5 & 1406.25 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 43.0 & 1849.00 \end{pmatrix}_{13\times 3},$$

$$\beta=(\beta_0, \beta_1, \beta_2)^T.$$

$$X^TX=\begin{pmatrix} 13.0 & 520.0 & 20845.5 \\ 520.0 & 20845.5 & 837460 \\ 20845.5 & 837460 & 33717085 \end{pmatrix}, X^Ty=\begin{pmatrix} 30.32 \\ 1207.9 \\ 48249.3 \end{pmatrix},$$

$$(X^TX)^{-1}=\begin{pmatrix} 20304.1 & -1016.5 & 12.6958 \\ -1016.5 & 50.9166 & -0.6362 \\ 12.6958 & -0.6362 & 0.00795 \end{pmatrix}, \quad \beta=(X^TX)^{-1}X^Ty=\begin{pmatrix} 271.6231 \\ -13.3866 \\ 0.1660 \end{pmatrix}.$$

又

$$Q=(y-X\beta)^T(y-X\beta)=0.2523,$$

$$\bar{y}=2.3323, \quad S_{yy}=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2=4.2212, U=S_{yy}-Q=3.9689.$$

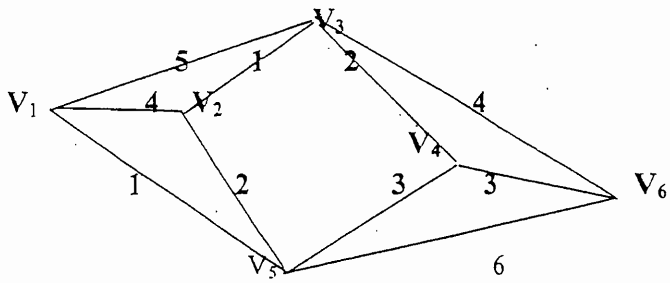
在显著性水平 $\alpha=0.01$ 下，用 F 检验法检验 H_0：$\beta_1=\beta_2=0$.

因为统计量 $F=\dfrac{3.9689/2}{0.2523/10}=78.6601>F_{0.01}(2-1, 13-2-1)=7.5594$，所以拒绝 H_0，即 Y 与 2 个变量 x_1, x_2 之间存在特别显著的线性相关关系.

再用 t 检验法检验假设 H_1：$\beta_i=0$，i=1,2，可知变量 x_1，x_2 对 y 的影响显著.

故 x 与 y 之间的经验公式为 $y=271.6231-13.3866x+0.1660x^2$.

四、（15 分）给出如下所示网络的最佳巡回算法及结论。



五、（25 分）要在雨中从一处沿直线跑到另一处，若雨速为常数且方向不变，试建立数学，模型讨论是否跑都越快，淋雨量越少。

将人体简化成一个长方体，高 $a = 1.5m$（颈部以下），宽 $b = 0.5m$ 厚 $c = 0.2m$，设跑步距离

$d = 1000m$, 跑步最大速度 $v_m = 5m/s$，雨速 $u = 4m/s$ ，降雨量 $w = 2cm/h$，

记跑步速度为 v，按以下步骤进行讨论；

（1）不考虑雨的方向，设降雨淋遍全身，以最大速度跑步，估计跑完全程的总淋雨量

（2）雨从迎面吹来，雨线与跑步方向在同一铅直平面内，且与人体的夹角为 θ，如图 1 建立总淋雨量与速度 v 及参数 a,b,c,d,u,w,θ 之间的关系，问速度 v 多大，总淋雨量最少，计算 $\theta = 0, \theta = 30^0$ 时的总淋雨量。

（3)）雨从背面吹来，雨线方向与跑步方向在同一铅直平面内，且与人体的夹角为 ∂，如图 2 建立总淋雨量与速度 v 及参数 a,b,c,d,u,w,∂ 之间的关系，问速度 v 多大，总淋雨量最少，计算 $\theta = 30^0$ 时的总淋雨量。

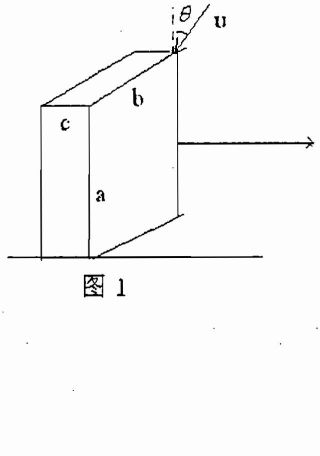


图 1

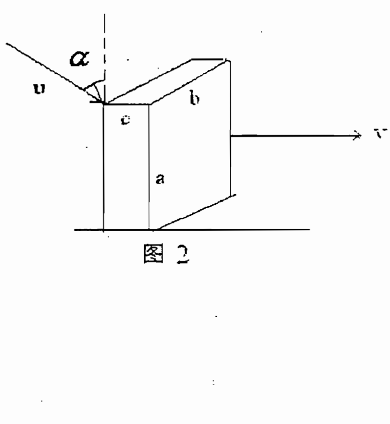


图 2

解:

1) 全身面积 $s = 2ab + 2ac + bc = 2.2m^2$，淋雨时间 $t = d/v_m = 200s$，降雨量 $\omega = 2\,cm/h = 10^{-4}/18\; m/s$，所以总淋雨量 $Q = st\omega \approx 2.44$ 升

2) 顶部淋雨量 $Q_1 = bcd\omega \cos\theta / v$；雨速水平分量 $u\sin\theta$，方向与 v 相反，合速度 $u\sin\theta + v$，迎面单位时间、单位面积的淋雨量 $\omega(u\sin\theta + v)/u$，迎面淋雨量 $Q_2 = abd\omega(u\sin\theta + v)/uv$，所以总淋雨量

$$Q = Q_1 + Q_2 = \frac{bd\omega}{u}\,\frac{cu\cos\theta + a(u\sin\theta + v)}{v}$$

。 $v = v_m$ 时 Q 最小，$\theta = 0, Q \approx 1.15$ 升。$\theta = 30^0, Q \approx 1.55$ 升。

3) 与 2）不同的是，合速度为 $|u\sin\alpha - v|$，于是总淋雨量

$$Q = \begin{cases} \dfrac{bd\omega}{u}\,\dfrac{cu\cos\alpha + a(u\sin\alpha - v)}{v} = \dfrac{bd\omega}{u}\,\dfrac{u(c\cos\alpha + a\sin\alpha) - av}{v}, & v \le u\sin\alpha \\ \dfrac{bd\omega}{u}\,\dfrac{cu\cos\alpha + a(v - u\sin\alpha)}{v} = \dfrac{bd\omega}{u}\,\dfrac{u(c\cos\alpha - a\sin\alpha) + av}{v}, & v > u\sin\alpha \end{cases}$$

，若 $c\cos\alpha - a\sin\alpha < 0$，即 $\tan\alpha > c/a$，则 $v = u\sin\alpha$ 时 Q 最小。否则 $v = v_m$ 时 Q 最小。当 $\alpha = 30^0, \tan\alpha > 0.2/1.5, v = 2\,m/s, Q \approx 0.24$ 升最小。

2010 数学建模期末试卷

一、投资问题（20分）

某银行计划用一笔资金进行有价证券的投资，可供购进的证券以及其信用等级、到期年限、收益如下表所示。按照规定，市政证券的收益可以免税，其他证券的收益按 50%的税率纳税。此外还有以下限制：

（1）政府及代办机构的证券总共至少要购进 400 万元；

（2）所购证券的平均信用等级不超过 1.4（信用等级数字越小，信用程度越高）；

（3）所购进证券的平均到期年限不超过 5 年。

证券名称	证券种类	信用等级	到期年限	到期税前收益(%)
A	市政	2	9	4.3
B	代办机构	2	15	5.4
C	政府	1	4	5.0
D	政府	1	3	4.4
E	市政	5	2	4.5

若该经理有 1000 万元资金，应如何投资？写出投资计划的数学模型。

解：设 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 分别表示购买证卷 A,B,C,D,E 的金额（万元），则到期后的净收益为：

$$\max z = 0.043x_1 + 0.027x_2 + 0.025x_3 + 0.022x_4 + 0.045x_5$$

约束条件为：

（1）政府及代办机构的证券总共至少要购进 400 万元，即

$$x_2 + x_3 + x_4 \geq 400$$

（2）所购证券的平均信用等级不超过 1.4，即

$$\frac{2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 5x_5}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5} \leq 1.4$$

（3）所购进证券的平均到期年限不超过 5 年。$\dfrac{9x_1 + 15x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 2x_5}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5} \leq 5$

(4)投资总额为 1000 万

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 1000$$

整理得到（以百万为单位）：

$$\max z = 0.043x_1 + 0.027x_2 + 0.025x_3 + 0.022x_4 + 0.045x_5$$

$$s.t.\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 \ge 4 \\ 6x_1 + 6x_2 - 4x_3 - 4x_4 + 36x_5 \le 0 \\ 4x_1 + 10x_2 - x_3 - 2x_4 - 3x_5 \le 0 \\ x_i \ge 0, i = 1,2,3,4,5 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \le 10 \end{cases}$$

二、**战争模型**（共计 25 分）

下列方程给出了正规战争模型：$\begin{cases} \dot{x}(t) = -ay \\ \dot{y}(t) = -bx \\ x(0) = x_0, y(0) = y_0 \end{cases}$，其中 $x(t), y(t)$ 分别为甲、乙双方在时刻 t 的兵力，a, b 分别为乙方和甲方的战斗有效系数。假设 $a/b = 8, x_0 = 2y_0$，问：乙取胜时的剩余兵力是多少？乙方取胜的时间如何确定？

解：由模型：

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -ay \\ \dot{y}(t) = -bx \\ x(0) = x_0, y(0) = y_0 \end{cases} \qquad (1)$$

消去 t, 得到相轨线方程为：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{bx}{ay},$$

解得：

$$ay^2 - bx^2 = k,$$
$$k = ay_0^2 - bx_0^2$$

(1) 乙方取胜的充要条件是：当 x=0 时，$y > 0$ 等价于 $k > 0 \Leftrightarrow \left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2 > \frac{b}{a}$，因为

$\frac{b}{a} = \frac{1}{8}, \left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2 = \frac{1}{4}$，故乙方胜，当乙方取胜时 $x(t) = 0$, 从而 $y = \sqrt{\frac{k}{a}} = \frac{\sqrt{2}}{2}y_0$。

(2) 为了求得乙方取胜的时间，解方程组 (1)，重写为：

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ -b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ -b & 0 \end{pmatrix}$$

求解得到 A 的特征值为 $\lambda_1 = \sqrt{ab}, \lambda_2 = -\sqrt{ab}$，

$\lambda_1=\sqrt{ab}$ 对应的特征向量为 $u=\begin{pmatrix}-\sqrt{\frac{a}{b}} & 1\end{pmatrix}^T$

$\lambda_1=-\sqrt{ab}$ 对应的特征向量为 $u=\begin{pmatrix}\sqrt{\frac{a}{b}} & 1\end{pmatrix}^T$，

从而方程组（1）的解为：

$$\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}-\sqrt{\frac{a}{b}}\\1\end{pmatrix}e^{\sqrt{ab}t}+c_2\begin{pmatrix}\sqrt{\frac{a}{b}}\\1\end{pmatrix}e^{-\sqrt{ab}t} \qquad (2)$$

从而 $x(t)=-c_1\sqrt{\frac{a}{b}}e^{\sqrt{ab}t}+c_2\sqrt{\frac{a}{b}}e^{-\sqrt{ab}t}$， $y(t)=-c_1e^{\sqrt{ab}t}+c_2e^{-\sqrt{ab}t}$，由初始条件

$x(0)=x_0,y(0)=y_0$ 得到 $c_1=\frac{1}{2}\left(y_0-\sqrt{\frac{b}{a}}x_0\right),c_2=\frac{1}{2}\left(y_0+\sqrt{\frac{b}{a}}x_0\right)$

$$x(t)=\frac{1}{2}(x_0-\sqrt{\frac{a}{b}}y_0)e^{\sqrt{ab}t}+\frac{1}{2}(x_0+\sqrt{\frac{a}{b}}y_0)e^{-\sqrt{ab}t} \qquad (3)$$

当 $x(t)=0$ 时，解得

$$e^{2\sqrt{ab}t}=\frac{-(x_0+\sqrt{\frac{a}{b}}y_0)}{(x_0-\sqrt{\frac{a}{b}}y_0)},$$

将 $x_0=2y_0,a=8b$ 代入上式得到 $e^{2\sqrt{ab}t}=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=3+2\sqrt{2}$

$$t=\frac{\ln(3+2\sqrt{2})}{4\sqrt{2}b}$$

三、（传染病模型）（25 分）

模型一：假设（1）每个病人每天传染的人数为常数 λ；（2）一个人得病后，经久不愈，并在传染期内不会死亡；记 $i(t)$ 表示时刻 t 的病人人数，求 $i(t)$ 所满足的微分方程，求出 $i(t)$ 并对进行讨论（$i(0)=i_0$）。

模型二：用 $i(t)$、$s(t)$ 分别表示在 t 时刻传染病人数和健康人数，$i(0)=i_0$。假设（1）每个病人在单位时间内传染的人数与健康人数成正比，比例系数为 λ；（2）一个人得病后，经久不愈，并在传染期内不会死亡；（3）总人数不变，$i(t)+s(t)=N$；求 t 时刻传染病人数 $i(t)$，并对模型及 $i(t)$ 进行讨论。

解：模型一：

由假设在时间 Δt 内，增加的病人人数为 $i(t+\Delta t)-i(t)=\lambda i(t)\Delta t$，于是得到微分方程为

$$\begin{cases} \dfrac{di(t)}{dt}=\lambda i(t) \\ i(0)=i_0 \end{cases}$$

解得 $i(t)=i_0e^{\lambda t}$。

讨论：上述函数说明传染病的传播是按指数函数增加的；这个结果与传染病的初期是比较吻合的，传播速度比较快；但当 $t\to+\infty$，$i(t)\to+\infty$，这显然不符合实际情况。

模型二：

由假设在时间 Δt 内，增加的病人人数为 $i(t+\Delta t)-i(t)=i(t)\times\lambda s(t)\Delta t$，于是得到微分方程：

$$\begin{cases} \dfrac{di(t)}{dt}=\lambda i(t)s(t) \\ i(0)=i_0 \\ s(t)+i(t)=N \end{cases}$$

模型求解：

原方程变为

$\begin{cases} \dfrac{di(t)}{dt}=\lambda i(t)[N-i(t)] \\ i(0)=i_0 \end{cases}$，利用分离变量法得到，$\dfrac{di(t)}{i(t)[N-i(t)]}=\lambda dt$ 或

$\displaystyle\int\frac{di(t)}{i(t)[N-i(t)]}=\int\lambda dt$，$\displaystyle\frac{1}{N}\int(\frac{1}{i(t)}+\frac{1}{N-i(t)})di(t)=\lambda t+c_1$，

或 $\dfrac{1}{N}\{\ln i(t)-\ln[N-i(t)]\}=\lambda t+c_1$

化简得到 $i(t)=\dfrac{CNe^{\lambda Nt}}{1+Ce^{\lambda Nt}}$，其中 $c=e^{c_1N}$，由初始条件 $i(0)=i_0$ 得

$c=\dfrac{i_0}{N-i_0}$，故 $i(t)=\dfrac{CNe^{\lambda Nt}}{1+Ce^{\lambda Nt}}=\dfrac{N}{1+\left(\dfrac{N}{i_0}-1\right)e^{-\lambda Nt}}$

讨论：首先由 $\dfrac{di(t)}{dt}=\lambda i(t)[N-i(t)]$ 知，当 $i(t)=\dfrac{N}{2}$ 时，$\dfrac{di(t)}{dt}$ 达到最大值，由

$i(t)=\dfrac{N}{1+\left(\dfrac{N}{i_0}-1\right)e^{-\lambda Nt}}=\dfrac{N}{2}$，推出 $\dfrac{di(t)}{dt}$ 达到最大值的时刻为 $t_m=\lambda^{-1}N^{-1}\ln\left(\dfrac{N}{i_0}-1\right)$，

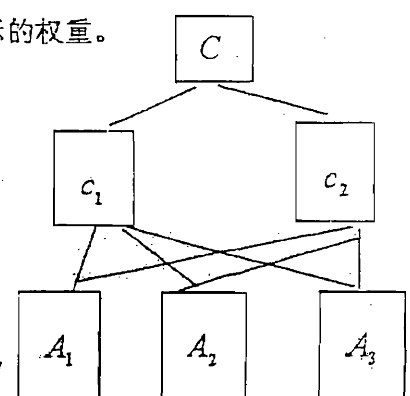
这时病人人数增加最快，预示着传染病高潮的到来；第二，t_m 与 λ、N 成反比，既总人数和传染强度增加时，传染病高峰来的越快。同时，如果知道了传染强度 λ（可由统计数据给出），总人数 N，则可以预报传染病高峰到来的时间，对于防治传染病是有益处的；第三，模型的缺点是当 $t\to+\infty$，$i(t)\to N$，既所有的人将要生病，这与实际不符。主要原因是模型假设没有考虑病人会被治愈，病人也可能死亡等情况。

四、(共 20 分)

学生毕业后选择工作，有两个衡量准则：工资水平和个人发展。现有三个待选单位：A_1,A_2,A_3。假设相对于总目标选择工作 C，准则"工资水平 c_1"和"个人发展 c_2" c_1,c_2 的权重为 $w_0=[0.5,0.5]^T$；相对于准则"工资水平 c_1"，方案 A_1,A_2,A_3 的判断距阵为

$$A=\begin{pmatrix}1&2&5\\1/2&1&2\\1/5&1/2&1\end{pmatrix}$$，相对于准则"个人发展 c_2"，方案 A_1,A_2,A_3 的判断距阵为

$$B=\begin{pmatrix}1&3&1/3\\1/3&1&1/5\\3&5&1\end{pmatrix}$$，试用和法求方案 A_1,A_2,A_3 对总目标的权重。



答：

$$A=\begin{pmatrix}1&2&5\\1/2&1&2\\1/5&1/2&1\end{pmatrix}\text{中各列归一化}\longrightarrow\begin{pmatrix}10/17&4/7&\\5/17&2/7&2/8\\2/17&1/7&1/8\end{pmatrix}$$

$$\text{各行求和}\longrightarrow\begin{pmatrix}1.785\\0.830\\0.385\end{pmatrix}\text{再归一化}\longrightarrow\begin{pmatrix}0.595\\0.277\\0.128\end{pmatrix}=w_1$$ 6 分

$$B=\begin{pmatrix}1&3&1/3\\1/3&1&1/5\\3&5&1\end{pmatrix}\text{中各列归一化}\longrightarrow\begin{pmatrix}0.231&0.333&0.217\\0.077&0.111&0.130\\0.692&0.556&0.652\end{pmatrix}$$

$$\text{求各行平均值}\longrightarrow\begin{pmatrix}0.260\\0.106\\0.633\end{pmatrix}=w_2$$ 6分

所以三个方案 A_1,A_2,A_3 对总目标的权重为：

$$W=(w_1,w_2)w_0=\begin{bmatrix}0.595 & 0.260\\ 0.277 & 0.106\\ 0.128 & 0.633\end{bmatrix}\begin{pmatrix}0.5\\ 0.5\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}0.43\\ 0.19\\ 0.38\end{bmatrix}$$ 3 分

故三个待选单位 A_1,A_2,A_3 的排名为 1，3，2。

五、贷款买房问题（共计 10 分）

某高校一对年轻夫妇为买房要用银行贷款 10 万元，年利率为 6.39%（月利率为 r=0.5325%），贷款期为 20 年(=240 个月)，这对夫妇希望知道每月要还多 多少钱，20 年才可以还清？（1）假设这对夫妇每月可以节余 1000 元，是否可以去买房呢？（2）若贷款期还是 20 年(=240 个月)，但第 11 年第一个月起，银行贷款年利率提高到 12%（月利率为 1%），问从第 11 年的第一个月起，每个月要还多少款？（提示：设第 i 个月欠银行的款数为 A_i，则第 $i+1$ 个月欠银行的款数（加上利息）应为 $(1+r)A_i$，r 为月利率，而一开始的借款数为 $A_0=10万$）。

解：设第 i 个月欠银行的款数为 A_i，则第 $i+1$ 个月欠银行的款数（加上利息）应为 $(1+r)A_i$，但每月的还款数为 x，故总的欠款数为 $A_{i+1}=(1+r)A_i-x$，而一开始的借款数为 $A_0=10万$，所以我们的数学模型可表述为：

$$\begin{cases}A_{k+1}=(1+r)A_k-x\\ A_0(=10万已知)\end{cases}$$

上述模型求解

由 $A_1=(1+r)A_0-x$

$$A_2=(1+r)A_1-x=(1+r)[(1+r)A_0-x]-x=(1+r)^2A_0-x[1+(1+r)];$$

利用数学归纳法得到

$$A_k=(1+r)^kA_0-x[1+(1+r)+\ldots+(1+r)^{k-1}]$$

$$=(1+r)^kA_0-\frac{x}{r}[(1+r)^k-1]$$，k=1, 2, 3, ⋯, 240.

由 $A_{240}=0$，解得

$$x=\frac{A_0r(1+r)^k}{(1+r)^k-1}=\frac{10\times0.005325\times(1+0.005325)^{240}}{(1+0.005325)^{240}-1}$$=739.11(元)；故这对夫妇可以买房。

（2）因为第 11 年第一个月，即第 121 个月的欠款数为

$$A_{121}=(1+r)^{121}A_0-\frac{x}{r}[(1+r)^{121}-1]$$

$$=(1+0.005325)^{121}\times10\times10000-\frac{739.11}{0.005325}[(1+0.005325)^{121}-1]$$

=190144.7714-125120.9426=65023.83(元)

根据(1),从第 11 年的第一个月起，在余下的 10 年中，每个月还款数为

$$\bar{x}=\frac{\bar{A}_0\bar{r}(1+\bar{r})^k}{(1+\bar{r})^k-1}$$，此处 $\bar{A}_0=65023.83$，$\bar{r}=0.01$（当银行年利率提高到 12%，则月利率为 1%），k=120, 代入上式得到

$$\bar{x}=\frac{\bar{A}_0\bar{r}(1+\bar{r})^k}{(1+\bar{r})^k-1}=\frac{65023.83\times0.01\times(1+0.01)^{120}}{(1+0.01)^{120}-1}$$

$$=\frac{65023.83\times0.01\times3.300386895}{2.300386895}\approx932.90\text{（元）}$$

即每月还款数增加到 932.90 元。

试题编号：

熬食堂
永别了

重庆邮电大学 2010—2011 学年二学期

数学建模与仿真试卷（期末）（A卷）（开卷）

（时间 120 分钟）

题　号	一	二	三	四	五	六	七	总 分
得　分								
评卷人								

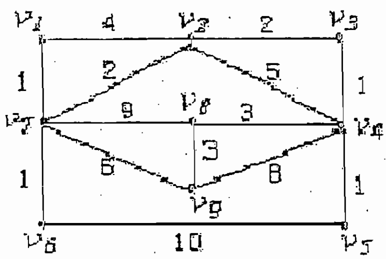
一、（15 分） 简述数学模型的基本概念，数学建模论文的基本内容及评价建模论文的主要标准？

二、（20 分）某厂生产甲乙两种口味的饮料，每百箱甲饮料需用原料 6 千克，工人 10 名，可获利 10 万元；每百箱乙饮料需用原料 5 千克，工人 20 名，可获利 9 万元。今工厂共有原料 60 千克，工人 150 名，又由于其他条件所限甲饮料产量不超过 800 箱。问如何安排生产计划，即两种饮料各生产多少使获利最大（注：建立相关的数学模型，并写出相应的 MATLAB 求解程序即可）。

三、（15 分）（狐狸与野兔）在一个封闭的大草原里生长着狐狸和野兔，设 t 时刻它们的数量分别为 $y(t)$ 和 $x(t)$，且满足以下的微分方程组：

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dt}=0.001xy-0.9y,\\ \dfrac{dx}{dt}=4x-0.02xy.\end{cases}$$

请另建立一个微分方程组来分析人们对野兔进行捕猎会产生什么后果？（设对野兔的捕猎系数为 k）



四、（20 分）求以下赋权图中顶点 v_1 到其余各个顶点的最短路（需有迭代步骤）。

五、（15 分）储蓄问题：银行帐户上的钱数增长的规律服从马尔萨斯法则。设 $P(0)$ 是本金，b 是利率，令 $P(n)$ 为第 n 年开始时帐单上的钱的总数，则有

$$P(n+1) = P(n) + bP(n)$$

（1）假设某公司有 200 万元存在银行，如果年计息 $b=4\%$，请分别计算一年后、两年后、……、第六年后银行帐户上的存款数目；如果利息不变，按月计息 b 应该为多少？

（2）依照下列利率：$b=4\%$ 按年计息使一笔存款达到本金的两倍分别计算所用的时间是多久？

六、（15 分）（生产存贮问题）某工厂与购货单位签订的供货合同如下表。该厂每月最大产量为 4 百件，仓库的存货能力为 3 百件。已知每一百件货物的生产费为一万元。在生产的月份，每批产品的生产准备费为 4 千元，仓库保管费为每一百件货物每月一千元。假定 1 月初开始时及 6 月底交货后仓库中都无存货。问该厂应该如何安排每月的生产与库存，才能既满足交货合同的要求，又使总费用最小？（只需建立数学模型）

月份	1	2	3	4	5	6
交货量（百件）	1	2	5	3	2	1

试题编号：

重庆邮电大学 2010—2011 学年 2 学期

数学建模试卷（期末）（A 卷）（开卷）

（时间 120 分钟）

题　号	一	二	三	四	五	六	七	总　分
得　分								
评卷人								

一、（15 分）　简述数学模型的基本概念，数学建模论文的基本内容及评价建模论文的主要

标准？

二、（20 分）某厂生产甲乙两种口味的饮料，每百箱甲饮料需用原料 6 千克，工人 10 名，可获利 10 万元；每百箱乙饮料需用原料 5 千克，工人 20 名，可获利 9 万元。今工厂共有原料 60 千克，工人 150 名，又由于其他条件所限甲饮料产量不超过 800 箱。问如何安排生产计划，即两种饮料各生产多少使获利最大（注：建立相关的数学模型，并写出相应的 MATLAB 求解程序即可）。

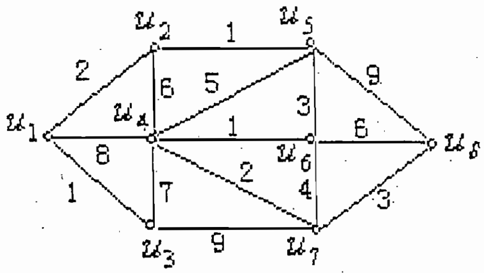
三、（20 分）储蓄问题：银行帐户上的钱数增长的规律服从马尔萨斯法则。设 $P(0)$ 是本金，b 是利率，令 $P(n)$ 为第 n 年开始时帐单上的钱的总数，则有

$$P(n+1)=P(n)+bP(n)$$

（1）假设某公司有 200 万元存在银行，如果年计息 $b=4\%$，请分别计算一年后、两年后、……、第六年后银行帐户上的存款数目；如果利息不变，按月计息 b 应该为多少？

（2）依照下列利率：$b=4\%$ 按年计息使一笔存款达到本金的两倍分别计算所用的时间是多久？

四、（15 分）求以下赋权图中顶点 u_5 到其余各个顶点的最短路（需有迭代步骤）。



五、（15 分）某报童以每份 0.03 元的价格买进报纸，以 0.05 元的价格出售。根据长期统计，报纸每天的销售量及百分率为

销售量	200	210	220	230	240	250
百分率	0.10	0.20	0.40	0.15	0.10	0.05

已知当天销售不出去的报纸，将以每份 0.02 元的价格退还报社。试用模拟方法确定报童每天买进多少份报纸，能使平均总收入最大?

六、（15 分）下面是六十年代世界人口的增长数据（单位：亿）：

年份	1960	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968
人口	29.72	30.61	31.51	32.13	32.34	32.85	33.56	34.20	34.83

（1）请你仔细分析数据，绘出数据散布图并选择合适的函数形式对数据进行拟合；

（2）用你的经验回归模型试计算：以 1960 年为基准，人口增长一倍需要多少年？世界人口何时将达到 100 亿？

年级：

装 密

专业：

班级：

订 封

姓名：

线 线

学号：

15栋实惠打印店

重庆邮电大学 2009—2010 学年第 2 学期

课程名：数学建模

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
分数											
评卷人											

一、简述什么是数学模型和数学建模的基本步骤.（20 分）

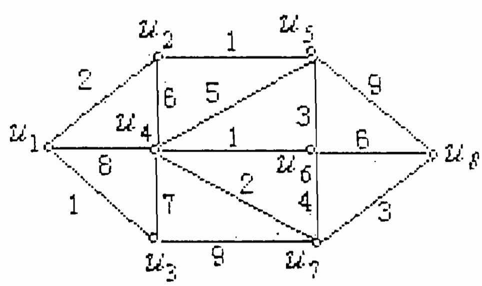
答：所谓数学模型，是关于部分现实世界为一定目的而作的抽象、简化的数学结构。简而言之，数学模型是用数学术语对部分现实世界的描述。

二、某车间有甲、乙、丙三台机床，可用于加工三种工件。假定这三台车床的可用台时数分别为 700、800 和 900，需加工的三种工件的数量分别为 600、300 和 500，且已知用三种不同车床加工单位数量不同工件所需的台时数和加工费用如下表。问怎样分配车床的加工任务，才能既满足加工工件的要求，又使加工费用最低？（**只建立模型和编写求解程序，可不求出结果**）（20 分）

车床类型	单位工件所需加工台时数			单位工件的加工费用			可用台时数
	工件 1	工件 2	工件 3	工件 1	工件 2	工件 3	
甲	0.4	1.1	1.0	13	9	10	700
乙	0.5	1.2	1.3	11	12	8	800
丙	0.3	1.0	0.9	10	11	12	900

三、如果在食饵-----捕食者系统中，捕食者掠食的对象只是成年的食饵，而未成年的食饵因体积太小免遭捕获。在适当的条件下建立这三者之间关系的模型，并求平衡点。（20 分）

四、求下图从顶点 u_3 到其余顶点的最短路。（20 分）



五、某报童以第份 0。03 元的价格买进报纸，以 0.05 元的价格出售、根据长期统计，报纸每天的销售量及百分率为

销售量	100	120	140	160
百分率	0.2	0.3	0.35	0.15

已知当天销售不出去的报纸，将以每份 0.02 元的价格退还报社，试用模拟方法确定报童每天买进报纸数量，使报童获利最大。

（1）编写模拟框图（10 分）

（2）编写模拟程序（10 分）

2007年数学建模试题及答案

1．设某产品的供给函数$\varphi(p)$与需求函数$f(p)$皆为线性函数：

$$\varphi(p)=3p+4,\qquad f(p)=-kp+9$$

其中p为商品单价，试推导k满足什么条件使市场稳定。

解：设 Pn 表示 t=n 时的市场价格，由供求平衡可知：

$$\varphi(p_{n-1})=f(p_n) \qquad 2\text{分}$$

$$3p_{n-1}+4=-kp_n+9$$

即：

$$p_n=-\frac{3}{k}p_{n-1}+\frac{5}{k}$$

经递推有：

$$p_n=-\frac{3}{k}(p_{n-2}\cdot\frac{-3}{k}+\frac{5}{k})+\frac{5}{k}\cdots$$

$$=(-\frac{3}{k})^n\cdot p_0+\sum_{n=1}^{n}(-\frac{3}{k})^{n-1}\cdot\frac{5}{k} \qquad 6\text{分}$$

p_0表示初始时的市场价格

当$n\to\infty$时：若$\left|-\frac{3}{k}\right|<1$时，即$0<k<3$，则$p_n$收敛，即市场稳定。 10分

2．某植物园的植物基因型为AA、Aa、aa，人们计划用AA型植物与每种基因型植物相结合的方案培育后代（遗传方式为常染色体遗传），经过若干代后，这种植物后代的三种基因型分布将出现什么情形？总体趋势如何？

依题意设未杂交时 aa 、Aa、AA 的分布分别为a_0,b_0,c_0，杂交 n 代后分别为 an　bn cn (向为白分手)
由遗传学原理有：

$$\begin{cases}a_n=0\cdot a_{n-1}+0\cdot b_{n-1}+0\cdot c_{n-1}\\ b_n=a_{n-1}+\frac{1}{2}b_{n-1}+0\cdot c_{n-1}\\ c_n=0\cdot a_{n-1}+\frac{1}{2}b_{n-1}+c_{n-1}\end{cases} \qquad 4\text{分}$$

设向量$x_n=(a_n,b_n,c_n)^T$

$$x_n=M\cdot X_{n-1}$$

式中

$$M=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}$$

递推可得：$X_n = M^n \cdot X_0$

对 M 矩阵进行相似对角化后可得：

$$\Lambda=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

其相似对角阵

$$p=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}=p^{-1}$$

从而

$$M^n = p\Lambda^n \cdot p^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & (\frac{1}{2})^n & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$M^n=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ (\frac{1}{2})^{n-1} & (\frac{1}{2})^{n-1} & 0\\ 1-(\frac{1}{2})^{n-1} & 1-(\frac{1}{2})^{n-1} & 1\end{bmatrix}$$

$$a_n = 0$$

$$b_n = a_0(\frac{1}{2})^{n-1} + b_0(\frac{1}{2})^{n-1} + 0$$ 8 分

$$c_n = c_0 + (1-(\frac{1}{2})^{n-1})\cdot a_0 + (1-(\frac{1}{2})^{n-1})\cdot b_0$$

当 $n\to\infty$ 时，$a_n \to 0, b_n \to 0, c_n \to 1$。 10 分

3．试建立人口 Logistic(逻辑)模型，并说明模型中何参数为自然增长率，为什么？

解：人口净增长率与人口极限以及目前人口均相关。人口量的极限为 M，当前人口数量为 N（t），r 为比例系数。建立模型：

$$\frac{dN(t)}{dt} = r\cdot(1-\frac{N(t)}{M})\cdot N(t)$$

$$N|_{t=0} = N_0$$ 4 分

求解得到

$$N(t)=\frac{N_m}{1+(\frac{N_m}{N_0}-1)e^{-rt}} \qquad 6 分$$

注意到当 $N(t)\to M$ 时，$r\cdot(1-\frac{N(t)}{M})\to r$ 并说明 r 即为自然增长率。 10 分

4. 1968 年，介壳虫偶然从澳大利亚传入美国，威胁着美国的柠檬生产。随后，美国又从澳大利亚引入了介壳虫的天然捕食者——澳洲瓢虫。后来，DDT 被普通使用来消灭害虫，柠檬园主想利用 DDT 进一步杀死介壳虫。谁料，DDT 同样杀死澳洲瓢虫。结果，介壳虫增加起来，澳洲瓢虫反倒减少了。试建立数学模型解释这个现象。

解：依据题意，设介壳虫的数量为 x(t)，澳洲瓢虫的数量为 y(t),则有数模方程组：

$$(1)\begin{cases}\frac{dx}{dt}=ax-bxy\\ \frac{dy}{dt}=-cy+f\times y\end{cases}$$ 式中 a b c f 均大于零。 4 分

解方程组（1） $$\frac{dx}{dy}=\frac{ax-bxy}{-cy+f\times y}$$

得： $$\frac{(a-by)dy}{y}=\frac{fx-c}{x}dx$$

$$a\ln y+c\ln x=fx+by+k$$

$$y^a\cdot x^c=e^{fx+by}\times k'$$

$$(3)\qquad \frac{y^a\cdot x^c}{e^{fc}\cdot e^{by}}=k'$$

式（3）给出一族封闭曲线，显然 x(t)、y(t)即为以下为周期（T>0）的周期函数，由于调查的虫子的数量为一个周期内的均值

则有 $\bar{x}=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{1}{f}(\frac{y'}{y}+c)dt$

$$\bar{y}=\frac{1}{T}\int_0^T\cdot\frac{1}{b}(a-\frac{x'}{x})dt \qquad 6 分$$

$$\bar{x}=\frac{c}{f}+[ln\ y(T)\quad ln\ y(0)]=\frac{c}{f}$$

$$\bar{y}=\frac{a}{b}+[ln\times(T)\quad ln\times(0)]=\frac{a}{b}$$

当使用杀虫剂 DDT 后，设杀死介壳虫，$\varepsilon\cdot x(t)$，澳洲瓢虫 $\varepsilon\cdot y(t)$

则有模型为：
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax - \varepsilon x - bxy = (a-\varepsilon)x - bxy \\ \dfrac{dy}{dt} = -cy - \varepsilon y + fxy = -(c+\varepsilon)y + fxy \end{cases}$$

显然此时有： $\bar{x} = \dfrac{c+\varepsilon}{f}$ $\qquad \bar{y} = \dfrac{a-\varepsilon}{b}$

即介壳虫的数量增加，澳洲瓢虫的数量反而减小。 10 分

5．根据水情资料， 某地汛期出现平水水情的概率为 0.9，出现高水水情的概率为 0.05，出现洪水水情的概率为 0.05。位于江边的某工地对其大型施工设备拟定三个处置方案：

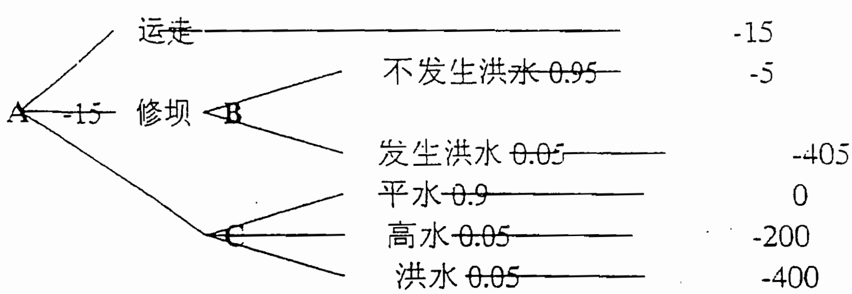
（1） 运走，需支付运费 15 万元。

（2） 修堤坝保护，需支付修坝费 5 万元。

（3） 不作任何防范，不需任何支出。

若采用方案（1)，那么无论出现任何水情都不会遭受损失；若采用方案（2)，则仅当发生洪水时，因堤坝冲垮而损失 400 万元的设备；若采用方案（3），那么当出现平水水位时不遭受损失，发生高水水位时损失部分设备而损失 200 万元，发生洪水时损失设备 400 万元。根据上述条件，选择最佳决策方案。

解：我们利用数学期望来评判方案的优劣：



E(A)=-15 （2 分）

E(B)=0.95×(-5)+0.05×（-405）= -25 （5 分）

E(C)=0×0.75+(-200)×0.05+0.05×(-400)=-30 （8 分）

所以-E(A)< -E(B)< -E(C)，因而 A 方案是最佳决策方案。 （10 分）

6．某厂按合同规定须于当年每个季度末分别提供 10,15,25,20 台同一规格的柴油机。已知该厂各季度的生产能力及生产每台柴油机的成本如下表所示，如果生产出的柴油机当季不交货，每台积压一个季度需储存、维护等费用 0.15 万元，建立一个数学模型（不要求求解），要求在完成合同的情况下，使该厂全年生产（包括储存、维护）费用最小。

季度	生产能力（台）	三位成本（万元/台）
一	25	10.8
二	35	11.1
三	30	11.0
四	10	11.3

解：设 x_{ij} 为第 i 季度生产的用于第 j 季度交货的柴油机的台数，则由题意 ：

$$x_{11} = 10$$
$$x_{12} + x_{22} = 15$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 25 \qquad (3分)$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 20$$

又由生产能力的要求，有

$$x_{44} < 10$$
$$x_{33} + x_{34} < 30$$
$$x_{22} + x_{23} + x_{24} < 35 \qquad (6分)$$
$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} < 25$$

再设 c_{ij} 表示第 i 季度生产的用于第 j 季度交货的每台柴油机的实际成本，其值如下表：

i \ j	1	2	3	4
1	10.8	10.95	11.10	11.25
2		11.10	11.25	11.40
3			11	11.15
4				11.30

设 a_i 表示第 j 季度的生产能力，b_j 表示第 i 季度的合同供应量，则建立本问题模型：

$$\min \quad z = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} c_{ij}x_{ij}$$

$$s.t. \quad \sum_{j=1}^{4} x_{ij} \leqslant a_i$$

$$\sum_{i=1}^{4} x_{ij} = b_j \qquad (10分)$$

$$x_{ij} \geqslant 0$$

7．考虑某地区影响青年生长发育主要因素分析。已知 13 岁至 18 岁各年龄组的四项指标为 X_0——生长发育不良的比率；X_1——五项身体素质不及格的比率；X_2——营养不良比率；X_3——患病比率，数据见下表：

年龄	13	14	15	16	17	18
X_0	40.39	46.08	47.06	47.26	48.98	49.06
X_1	32.29	34.31	33.33	35.40	37.68	42.16
X_2	37.25	37.25	25.50	12.75	9.8	16.67

X_3	6.36	8.23	9.36	7.3	5.2	6.5

请利用关联分析法分析影响发育的三项指标哪个对生长发育不良影响大？

分辨系数 $\rho = 0.5$.

解：

（1）进行初始化处理

$$X_0 = (\frac{40.39}{40.39},\frac{46.08}{40.39},,\frac{47.06}{40.39},\frac{47.26}{40.39},\frac{48.989}{40.39},\frac{49.06}{40.39})$$ （2 分）

$$= (1.,1.1409,1.1651,1.1701,1.2127,1.2147)$$

同理得到

$$X_0 = (1,1.0626,1.0322,1.0963,1.1669,1.3057)$$

及 X_2， X_3

（5 分）

（2）利用公式

$$\xi_i(k) = \frac{\min_i \min_{ki} |X_0(k) \quad X_i(k)| + \rho \max_i \max_{ki} |X_0(k) \quad X_i(k)|}{|X_0(k) \quad X_i(k)| + \rho \max_i \max_{ki} |X_0(k) \quad X_i(k)|}$$

计算各个关联系数：

$$\xi_1 = (1,0.86,0.78,0.87,0.91,0.84)$$

$$\xi_2 = (1,0.77,0.5,0.36,0.33,0.38)$$

$$\xi_3 = (1,0.76,0.61,0.96,0.55,0.71)$$ （8 分）

（3）计算关联度

利用公式 $r_i = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_i(k)$ 得到

$$r_1 = 0.876，\quad r_2 = 0.558，\quad r_3 = 0.763$$

从而 X_1 即五项身体素质不及格的比率对生长发育不良的比率影响最大。（10 分）

2005 数学建模试题

1.（10 分）设某产品的供给函数 $\varphi(p)$ 与需求函数 $f(p)$ 皆为线性函数：

$$\varphi(p) = 5p + 6 \qquad f(p) = -8p + 7$$

其中 p 为商品单价，试判断市场是否稳定并给出推理过程。

2.（10 分）某植物园的植物基因型为 AA、Aa、aa，人们计划用 AA 型植物与每种基因型植物相结合的方案培育后代（遗传方式为常染色体遗传），经过若干代后，这种植物后代的三种基因型分布将出现什么情形？总体趋势如何？

3. （10 分）建立捕鱼问题的模型，并通过求解微分方程的办法给出最大的捕捞量。

4. （10 分）试建立 Lanchester 游击战模型，并在无自然损失及没有增援的条件下求解模型，给出敌对双方获胜的条件。

5. （10 分）根据水情资料， 某地汛期出现平水水情的概率为 0.7，出现高水水情的概率为 0.2，出现洪水水情的概率为 0.1。位于江边的某工地对其大型施工设备拟定三个处置方案：

a) 运走，需支付运费 20 万元。

b) 修堤坝保护，需支付修坝费 8 万元。

c) 不作任何防范，不需任何支出。

若采用方案（1），那么无论出现任何水情都不会遭受损失；若采用方案（2），则仅当发生洪水时，因堤坝冲垮而损失 600 万元的设备；若采用方案（3），那么当出现平水水位时不遭受损失，发生高水水位时损失部分设备而损失 300 万元，发生洪水时损失设备 600 万元。根据上述条件，选择最佳决策方案。

6.（10 分）由七种规格的包装箱要装到两辆铁路平板车上去。包装箱的宽和高时一样的，但厚度（t，以厘米计）及重量（ω，以公斤计）是不同的。下表给出了每种包装箱的厚度、重量以及数量。每辆平板车有 10.2 米的地方可用来装包装箱（像面包片那样），载重为 40 吨。由于当地货运得限制，对 C_5，C_6，C_7 类的包装箱的总数有一个特别的限制：这类箱子所占的空间（厚度）不能超过 302.7 厘米。试把包装箱（见下表）装到平板车上去使得浪费的空间最小。

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7
t(厘米)	48.7	52.0	61.3	72.0	48.7	52.0	64.0
W(公斤)	2000	3000	1000	500	4000	2000	1000
件数	8	7	9	6	6	4	8

7. （10 分）以你的专业知识举一个灰色系统理论方面的问题，论述其灰色特征，并提出你的解决办法。

2005 数学建模考试参考答案

1.解：由题意：

$$\varphi(p)=5(p-\frac{1}{3})+\frac{83}{13}$$

$$f(p)=-8(p-\frac{1}{3})+\frac{83}{13}$$

需求与供给有交点，$(\frac{1}{13},\frac{83}{13})$

把时间区间n等分，$t_n=n\tau,\tau$为步长，P_n为t_n时的价格，则由供求平衡的需要，由于供给由上一时刻的需求决定于是有

$$\varphi(P_{n-1})=f(P_{n1})$$ （4 分）

即 $f(P_n)=-8(P_n-\frac{1}{13})+\frac{83}{13}=5(P_{n-1}-\frac{1}{13})+\frac{83}{13}=\varphi(P_{n-1})$ 递推得

$P_n=(-\frac{5}{8})^n(P_0-\frac{1}{13})+\frac{1}{13}$ P_0为初始价格 （8 分）

$\frac{5}{8}<1$ 当$n\to\infty$，P_n收敛，市场稳定。 （10 分）

2．解：设a_n,b_n,c_n分别表示第n代中，AA,Aa,aa占总体的百分率，

则$a_b+b_n+c_n=1$

考虑第n代基因型与第$n-1$代的关系，选用 AA 型植物培育后代，则

$$\begin{cases}a_n=1a_{n-1}+\frac{1}{2}b_{n-1}+0c_{n-1}\\ b_n=0a_{n-1}+\frac{1}{2}b_{n-1}+1c_{n-1}\\ c_n=0a_{n-1}+0b_{n-1}+\frac{1}{2}c_{n-1}\end{cases}$$ （4 分）

$$AA+\begin{cases}AA & 1\\ Aa & \frac{1}{2}\\ aa & 0\end{cases}\quad AA \qquad\qquad AA+\begin{cases}AA & 1\\ Aa & \frac{1}{2}\\ aa & 0\end{cases}\quad Aa$$

令 $M=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 1\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$ 设 $\begin{bmatrix}a_n\\ b_n\\ c_n\end{bmatrix}=X^{(n)}$ 则 $X^{(n)}=MX^{(n-1)}=\cdots M^nX^{(0)}$, $X^{(0)}=(a_0,b_0,c_0)^T$

（6 分）

相对 M 进行相似变换，对角仪，$M=PDP^{-1}$

$$P = P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

故 $M^n = (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{2})^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1-\frac{1}{2^n} & 1-\frac{1}{2^{n-1}} \\ 0 & \frac{1}{2^n} & \frac{1}{2^{n-1}} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (8 分)$$

$$\begin{cases} a_n = a_0 + b_0 + c_0 - \frac{1}{2^n}b_0 - \frac{1}{2^{n-1}}c_0 \\ b_n = \frac{1}{2^n}b_0 + \frac{1}{2^{n-1}}c_0 \\ c_n = 0 \end{cases}$$

令 $n \to \infty$，有 $a_n \to 1$ $b_n \to 0$ $c_n \to 0$，经过若干代后，将全部培育成 AA 型植物，Aa 型与 aa 型全部消失。 （10 分）

3. 解：设某水域现有鱼量 x，由于受资源限制所能容纳的最大鱼量 x_m，高自然增长率 r，捕捞增长率 k，按人口的逻辑模型建立微分方程。

$$\frac{dx}{dt} = rx(1-\frac{x}{x_m}) - kx \qquad (2 分)$$

要保持鱼量平衡 $\frac{dx}{dt}=0$，设平衡点为 x_0，解得 $x_0 = \frac{r-k}{r}x_m$

设 $\frac{dx}{dt} = f(x)$, 考虑 $f(x)$ 在 x_0 的泰勒展式

$f(x) = f'(x_0)(x-x_0) + 0(x-x_0)$ $\qquad f'(x_0) = k - r$

当 $f'(x_0) > 0$ 时 $\quad f(x)$ 与 $x - x_0$ 同号 $\quad x_0$ 为不稳定平衡点

当 $f'(x_0) < 0$ 时 $\quad f(x)$ 与 $x - x_0$ 异号 $\quad x_0$ 为稳定平衡点

$f'(x_0) < 0$ 即 $\quad r > k$ （6 分）

设 $f_1(x) = rx(1-\frac{x}{x_m})$ $\quad f_2(x) = kx$ $\quad$ 由于 $k < r$

曲线 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 有交点，因 $f_1(x)$ 在原点切线为 $y = rx$

解得，易知当 $x_0 = \frac{x_m}{2}$ 时，取得最大捕捞量

$$k = \frac{1}{2}r, \qquad f_2(x) = \frac{1}{2}rx_0 = \frac{r}{4}x_m$$

最大捕捞量为 $\frac{r}{4}x_m$ （10 分）

4 解：设 $x(t), y(t)$ 为两支部队兵力，a,b 为作战损失率，$(a,b \geq 0)$

建立模型

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -axy \\ \frac{dy}{dt} = -bxy \end{cases}$$ （2 分）

则①② $\frac{dx}{dy} = \frac{a}{b}$ ③

解③ $b(x - x_0) = a(y - y_0)$

$$bx - ay = bx_0 - ay_0$$ （6 分）

令 $L = bx_0 - ay_0$

某部分获胜，即对方部队先减少到 0，于是，

若 $L = 0$，$\frac{b}{a} = \frac{y}{x_0}$ x, y 同时为 0

若 $L > 0$，即 $\frac{b}{a} > \frac{y_0}{x_0}$，当 $x = \frac{L}{b}$ 时，$y = 0$ x 获胜

若 $L < 0$，即 $\frac{b}{a} < \frac{y_0}{x_0}$，当 $y = -\frac{L}{a}$ 时，$x = 0$ y 获胜 （10 分）

5. 解：设三种方案分别为 A，B，C，通过判断三种方案的期望效益大小选择方案，最佳方案即期望效益最大。

期望效益

$E(A) = -20$ （3 分）

$E(B) = -8 + 0.9 \times 0 + 0.1 \times (-600) = -68$ （6 分）

$E(C) = 0.7 \times 0 + 0.2 \times (-300) + 0.1 \times (-600)$ （9 分）

$=-120$

$E(A)>E(B)>E(C)$

采取方案 A 为最佳。 （10 分）

6 解：设Ci型箱的原度，a_i米，重b_i公斤，在其一辆车上装x_i件，另一车上装y_i件，设Ci型箱的总数为d_i则$x_i+y_i=d_i$，则则归结为以下的线性规划问题

$$\max(10.2-\sum_{i=1}^{8}a_ix_i)+(10.2-\sum_{i=1}^{8}a_iy_i) \quad (a_i,b_i,d_i\text{表中已给出})$$ （4 分）

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{7}a_ix_i\le 10.2\\ \sum_{i=1}^{7}b_ix_i\le 40\\ \sum_{i=5}^{7}a_ix_i\le 3.027\\ \sum_{i=1}^{7}a_iy_i\le 10.2\\ \sum_{i=1}^{7}b_iy_i\le 40\\ \sum_{i=5}^{7}a_iy_i\le 3.027\\ x_i+y_i=d_i \quad i=1,2,\cdots 7\\ x_i,y_i\ge 0\text{且}x_i,y\text{为整数}\end{cases}$$ （8 分）

给出两个约束条件 （10 分）

7 答：黑色系统一般为只知输入与输出，却不知它们的关系，白色系统一般为全部知道输入与输出的关系和具体参数，灰色系统为知道输入与输出的部分关系。 （5 分）

如经济系统的投资开发资源量的关系问题，更确切点给密切协作一经验数据及某年的投资预测，由于经济问题其原理并不明确，其内部诸要素之间存在复杂的高度非线性相互作用，所以相对我们的认识而言经济系统是一个灰色系统。考虑到逐年统计数据可能存在受诸多因素影响的误差，可以采用一次累加做生成数，对投资与产量分别作业成数，然后用$GM(1,1)$模型求解，最后再用一次累减得到要求的结果。 （10 分）

一．规划论模型

（一）．线性规划模型

要求：会建立模型，简单问题图解法。写出 MATLAB 程序

例1 某制药厂生产甲、乙两种药品，生产这两种药品要消耗某种维生素。生产每吨药品所需要的维生素量分别为30Kg，20Kg，所占设备时间分别为5台班，1台班，该厂每周所能得到的维生素量为160kg，每周设备最多能开15个台班。且根据市场需求，甲种产品每周产量不应超过4t。已知该厂生产每吨甲、乙两种产品的利润分别为5万元及2万元。问该厂应如何安排两种产品的产量才能使每周获得的利润最大？

	每吨产品的消耗		每周资源总量
	甲	乙	
维生素 /kg	30	20	160
设备/台班	5	1	15

解：设该厂每周安排生产甲、乙两种药品的产量分别为 x_1, x_2 吨，则有

$$\max z = 5x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 16 \\ 5x_1 + x_2 \le 15 \\ x_1 \le 4 \\ x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

例 2 某工厂在计划期内要安排生产 I 、II 两种产品，已知生产单位产品所需的设备台数及 A、B 两种原料的消耗，如下表所示。

	I	II	
设备	1	2	8 台数
原材料 A	4	0	16kg
原材料 B	0	4	12kg

该工厂每生产一件产品 I 可获利 2 元，每生产一件产品 II 可获利 3 元，问应如何安排生产计划使工厂获利最多？

这问题可以用以下的数学模型来描述：设 x_1，x_2 分别表示在计划期内产品 I、II 的产量。因为设备的有效台数为 8，这是一个限制产量的条件，所以在确定 I 、II 的产量时，要考虑不超过设备的有效台数，即可用不等式表示为：

$$x_1 + 2x_2 \le 8 .$$

同理，因原材料 A 、B 的限量，可以得到以下不等式组：

$$\begin{cases} 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12. \end{cases}$$

该工厂的目标是在不超过所有资源限量的条件下，如何确定产量 x_1、x_2 以得到最大的利润。若用 z 表示利润，这时 $z = 2x_1 + 3x_2$ 。综上所述，该计划问题可用数学模型表示为：

目标函数： $\max z = 2x_1 + 3x_2$

满足约束条件：
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12. \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

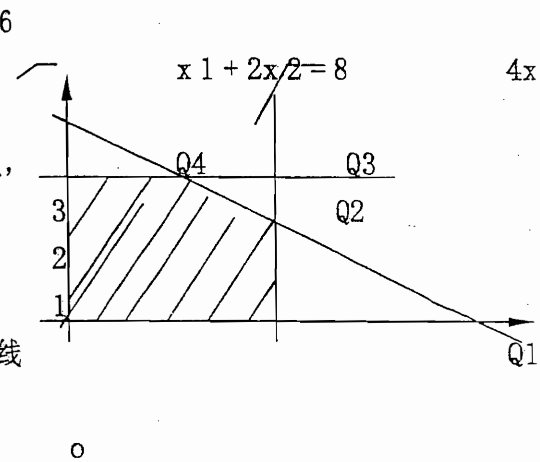
2. 图解法

图解法简单直观，有助于了解线性规划问题求解的基本原理。现对例 1 进行图解。

条件（1）、（2）对应的恰好是图 1 中斜线下方和两条坐标轴在第一象限中的三角形 AOB 内的整点（即横、纵坐标都是整数的点）。当整点越靠近直线 AB，残料就越少（若 AB 恰好过其中一个整点，则该整点坐标所对应的截料方法一定是无残了的最佳截料方法）。比较 C、D、E、F、G、H，知 E（2，5）距直线 AB 最近，故知取 x =2，y = 5 是材料利用率最高的截料方法。

在以 x1、x2 为坐标轴的直角坐标系中，非负条件 x1，x2 ≥ 0 是指第一象限（及 x 轴正半轴、y 轴正半轴）。每一个约束条件都表示一个半平面。若约束条件 $x_1 + 2x_2 \le 8$ 是代表以直线 $x_1 + 2x_2 = 8$ 为边界的左下方的半平面。

若同时满足 $x_1 + 2x_2 \le 8$，$4x_1 \le 16$，$4x_2 \le 12$ 和 $x_1, x_2 \ge 0$ 约束的点，必然在由这三个半平面围成的区域内。由例 1 的所有约束条件为半平面围成的区域见右图阴影部分。阴影区域中的每一个点（包括边界点）都这个线性规划问题的解。



再分析目标函数 $\max z = 2x_1 + 3x_2$，在这坐标平面上，它表示以 z 为参数、$-\frac{2}{3}$ 为斜率的一族平行直线 ：

$$x_2 = -\frac{2}{3}x_1 + \frac{z}{3}$$

位于同一直线上的点，具有相同的目标函数值，因而称它为“等值线”。当 z

值由小变大时，直线 $x2=-\frac{2}{3}x1+\frac{z}{3}$ 沿其法线方向（法线方向是指与直线垂直的方向）向上方移动。当移动到 Q 2 点时，使 z 值在可行域（阴影部分）边界上实现最大化，这就得到了例 1 的最优解 Q2，Q2 点的坐标为（4，2）。于是算得 z =14。

这说明该厂的最优生产计划方案是：生产产品 I 4 件，生产产品更新换代 II 2 件，可得到最大利润为 14 元.

例 3(饮食问题) 有一个美国人的饮食方案要求他吃的所有食物都来自四个“基本食物组”之一(巧克力蛋糕、冰淇淋、苏打水和干酪蛋糕). 目前他可以消费的食物有下列 4 种：胡桃巧克力糖、巧克力冰淇淋、可口可乐和菠萝干酪蛋糕. 一块胡桃巧克力糖的价格为 50 美分，一勺巧克力冰淇淋的价格为 20 美分，一瓶可口可乐的价格为 30 美分，一块菠萝干酪蛋糕的价格为 80 美分. 他每天至少必须摄取 500 卡路里、6 盎司巧克力、10 盎司糖和 8 盎司脂肪. 表 1 列出了每种食物每单位的营养含量. 这个美国人想以最小成本满足自己每天的营养要求，那他应该怎样做.

表 1 食物的营养价值数据

食物类型	卡路里	巧克力(盎司)	糖(盎司)	脂肪(盎司)
胡桃巧克力糖(1块)	400	3	2	2
巧克力冰淇淋(1勺)	200	2	2	4
可口可乐(1瓶)	150	0	4	1
菠萝干酪蛋糕(1块)	500	0	4	5

建模过程：这个美国人追求的目标是使饮食的费用最少. 因此这个美国人必须做出决策：对于每种食物，每天应当吃多少. 因此，需要定义下列决策变量：

x_1 = 每天吃的胡桃巧克力糖的数量(单位：块)，

x_2 = 每天吃的巧克力冰淇淋的数量(单位：勺)，

x_3 = 每天喝的可口可乐的数量(单位：瓶)，

x_4 = 每天吃的菠萝干酪蛋糕的数量(单位：块).

他追求的目标是使饮食的费用最少，因此目标函数为

$z=50x_1+20x_2+30x_3+80x_4$.

决策变量必须满足以下 4 个条件：

(1) 每天摄取的卡路里至少必须达到 500 卡路里. 即

$400x_1+200x_2+150x_3+500x_4\geq 500$.

(2) 每天摄取的巧克力至少必须达到 6 盎司. 即

$3x_1+2x_2\ge 6$.

(3) 每天摄取的糖至少必须达到 10 盎司. 即

$2x_1+2x_2+4x_3+4x_4\ge 10$.

(4) 每天摄取的脂肪至少必须达到 8 盎司. 即

$2x_1+4x_2+x_3+5x_4\ge 8$.

以及非负限制

$x_j\ge 0, j=1,2,3,4$.

该美国人饮食费用最少的数学模型为

$$
\max z=50x_1+20x_2+30x_3+80x_4;
$$

$$
\text{s.t.}\begin{cases}400x_1+200x_2+150x_3+500x_4\ge 500,\\ 3x_1+2x_2\ge 6,\\ 2x_1+2x_2+4x_3+4x_4\ge 10,\\ 2x_1+4x_2+x_3+5x_4\ge 8,\\ x_j\ge 0,\ j=1,2,3,4.\end{cases}
$$

这个问题的最优解是 $x_1=x_4=0, x_2=3, x_3=1, z=90$，表示每天最少花 90 美分便可得到符合饮食要求的 750 卡路里、6 盎司巧克力、10 盎司糖和 13 盎司脂肪.

（二）、整数线性规划模型

要求：会建立模型，写出 MATLAB 程序

例 3　某产品有 A_1 和 A_2 两种型号，需经过 B_1、B_2、B_3 三道工序。单件工时和利润、各工序每周工时限制见下表。问工厂应如何安排生产，才能使总利润最大？试建立本问题的数学模型。

工序 / 工时（小时/件） / 产品型号	B_1	B_2	B_3	利润（元/件）
A_1	0.3	0.2	0.3	25
A_2	0.7	0.1	0.5	40
每周工时限制	250 小时	100 小时	150 小时	

解　设工厂每周生产 A_1 型号的产品 x_1 件，A_2 型号的产品 x_2 件，则该问题的数学模型为

$$
\max\quad Z=25x_1+40x_2.
$$

$$
\begin{cases}0.3x_1+0.7x_2\le 250,\\ 0.2x_1+0.1x_2\le 100,\\ 0.3x_1+0.5x_2\le 150,\\ x_1,x_2\text{取非负整数}.\end{cases}
$$

（三）. 非线性规划模型

要求：会建立模型，写出 MATLAB 程序，简单的有约束问题的求解。

例 4　某公司有 6 个建筑工地要开工，每个工地的位置（用平面坐标 (a,b) 表示，距离单位：km）及水泥日用量 d（单位：t（吨））由表 1 给出. 目前有两个临时料场位于 A(5,1) 和 B(2,7)，日储量各有 $20t$. 请回答以下两个问题：

(1)假设从料场到工地之间均有直线道路相连，试制定每天从 A、B 两料场分别向各工地运送水泥的供应计划，使总的吨公里数最小.

(2)为进一步减少吨公里数，打算舍弃目前的两个临时料场，修建两个新料场，日储量仍各为 20t，问建在何处最佳，可以节省多少吨公里数.

表 1　工地的位置(a,b)及水泥日用量d的数据

料场	1	2	3	4	5	6
a	1.25	8.75	0.5	5.75	3	7.25
b	1.25	0.75	4.75	5	6.5	7.75
d	3	5	4	7	6	11

建模过程：公司追求的目标是每天从 A、B 两料场分别向各工地运送水泥总的吨公里数最小.

为表述该问题，设工地的位置与水泥日用量分别为(a_i,b_i)和d_i（$i=1,2,\cdots,6$），料场位置及其日储量分别为(x_j,y_j)和e_j（$j=1,2$）. 定义决策变量w_{ij}（$i=1,2,\cdots,6$，$j=1,2$）：料场j向工地i的运送量（$i=1,2,\cdots,6$，$j=1,2$），在问题(2)中，新建料场位置(x_j,y_j)也是决策变量. 公司追求总的吨公里数最小的目标函数为

$$f=\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{6}w_{ij}\sqrt{(x_j-a_i)^2+(y_j-b_i)^2}.$$

决策变量w_{ij}（$i=1,2,\cdots,6$，$j=1,2$）必须满足以下约束条件：

(i)满足各工地的水泥日用量

$$\sum_{j=1}^{2}w_{ij}=d_i,\ i=1,2,\cdots,6.$$

(ii)各料场的运送量不能超过日储量

$$\sum_{i=1}^{6}w_{ij}\le e_j,\ j=1,2.$$

(iii)符号限制条件

$w_{ij}\ge 0$，$i=1,2,\cdots,6$，$j=1,2$.

(1)公司追求总的吨公里数最小的数学模型是如下线性规划模型

$$\min f=\sum_{i=1}^{6}w_{i1}\sqrt{(5-a_i)^2+(1-b_i)^2}+\sum_{i=1}^{6}w_{i2}\sqrt{(2-a_i)^2+(7-b_i)^2};$$

$$s.t.\quad \sum_{j=1}^{2} w_{ij} = d_i, i=1,2,\cdots,6,$$

$$\sum_{i=1}^{6} w_{ij} \le e_j, j=1,2,$$

$$w_{ij} \ge 0,\quad i=1,2,\cdots,6,\ j=1,2.$$

例 5：试建立求表面积为 a^2 而体积最大的长方体的体积的数学模型。

解　设长方体的三个棱长分别为 x、y、z，则本问题的数学模型为

$$\max \quad V = xyz.$$

$$\begin{cases} 2xy+2yz+2xz=a^2, \\ x>0, y>0, z>0. \end{cases}$$

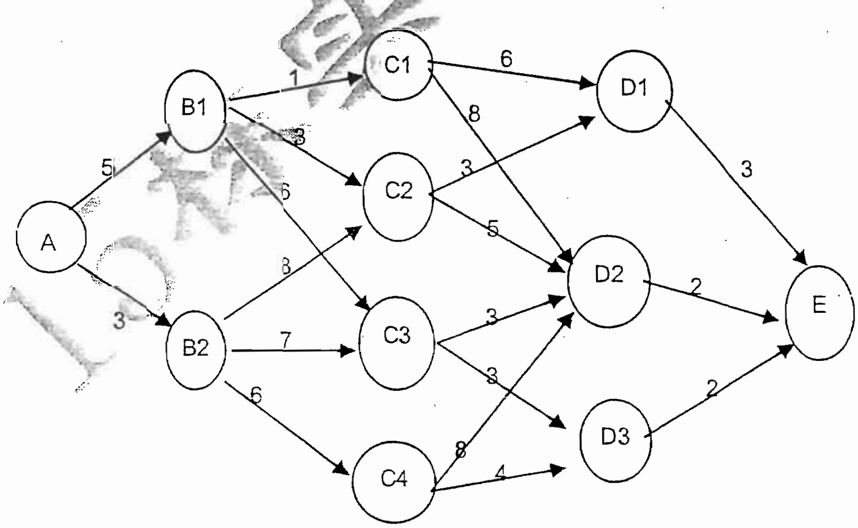
非线性规划模型的求解有多种方法，如罚函数法、共轭梯度法、拟 Newton 法等，在此我们就不学习了，应用时可使用数学软件去求解。

（四）．动态规划模型

要求：会建立模型，掌握模型求解方法

例 6 最短路问题及其解法（组合投资问题）

：如下图所示，称它为线路图（网络图）。



1．问题

求一条从起点 A 到终点 E 的连通弧，使其总弧长最短—最短路问题。

2．意义

最短路问题的含义是很广泛的，如点代表加油站，弧代表管道，弧长代表铺设管道的费用。问题就变成让我们设计一条从起点 A 到终点 E 的管道，使其总费用最少。

3．特点

①从 A 到 E 整个过程可分为从 A 到 B（B 有二种选择 B1,B2）从 B 到 C（C 有四种选择 C1，C2，C3，C4 ），从 C 到 D（D 有三种选择 D1，D2，D3），在从 D 到 E 四个阶段，是一个多阶段决策问题。

② 每个阶段都有起点，用x_k表示第 K 阶段的起点，并称为状态变量：每个阶段都有终点，前一段的终点就是后一段的起点。

③从每个起点出发（状态出发），都有若干选择（例如从 B1 出发有三种选择），用u_k 表示从第 K 阶段的状态x_k出发所作的选择并成为决策变量。决策变量全体成为决策集合（允许决策集合），即为D_k。

④如果用$f_k(x_k)$表示从第 K 阶段的状态x_k出发终点的最短弧长，或者用$f_k(x_k)$表示从起点到第 K 阶段的状态x_k的最短弧长，则问题就变成求$f_1(x_1)(=f_1(A))$或者求出$f_5(x_{51})(=f_5(E))$。

4．解法

①逆序解法：从后向前逐步求出各阶段到终点 E 的最短路线与最短弧长，最后求出

即从最后一个阶段 K=4 开始。

逆序解法：求

$$f_1(x_1)$$

$$f_5(x_5)=f_5(E)=0$$

$$k=4, f_4(D_1)=3, f_4(D_2)=2, f_4(D_3)=2$$

K=3，有 4 个状态，每个状态又有两个决策可选取，所以有

$$f_3(C_1)=\min\begin{Bmatrix} d(C_1,D_1)+f_4(D_1) \\ d(C_1,D_2)+f_4(D_2) \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 6+3 \\ 8+2 \end{Bmatrix}=9$$

最短弧长为 9，路径为 $C_1 \to D_1 \to E$，决策为 $u_3(C_1)=D_1$。

$$f_3(C_2)=6; C_2 \to D_1 \to E, u_3(C_2)=D_1$$

$$f_3(C_3)=5; C_3 \to D_2 \to E, u_3(C_3)=D_2$$

$$f_3(C_4)=5; C_4 \to D_2 \to E, u_3(C_4)=D_2$$

K=2，有 2 个状态，每个状态又有 3 个决策可选，所以有

$$f_2(\mathring{B}_1)=\min\begin{Bmatrix} d(B_1,C_1)+f_3(C_1) \\ d(B_1,C_2)+f_3(C_2) \\ d(B_1,C_3)+f_3(C_3) \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 1+9 \\ 3+6 \\ 6+5 \end{Bmatrix}=9$$

$B_1 \to C_2 \to E, u_2(B_1) = C_2, u_3(C_2) = D_2, u_4(D_1) = E.$

$$f_2(B_2) = \min \begin{Bmatrix} d(B_2, C_2) + f_3(C_2) \\ d(B_2, C_3) + f_3(C_3) \\ d(B_2, C_4) + f_3(C_4) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 8+6 \\ 7+5 \\ 6+6 \end{Bmatrix} = 12$$

$B_2 \to C_3 \to D_2 \to E,$ 或 $B_3 \to C_4 \to D_3 \to E$

$K=1$

$u_2(B_2) = C_3, u_3(C_3) = D_2, u_4(D_2) = E$

$$f_1(A) = \min \begin{Bmatrix} d(A, B_1) + f_2(B_1) \\ d(A, B_1) + f_2(B_2) \end{Bmatrix}$$

那么从 A 到 E 的最短弧长为 14，路径为 $A \to B_1 \to C_2 \to D_1 \to E$

二． 微分方程模型：

要求：会建立模型，掌握模型求解方法

例 7：传染病模型

长期以来，建立传染病模型来描述传染病的传染过程，分析受感染人数变化规律，预报传染病的高潮的到来等等，一直是各国专家和官员关注的课题.

模型：传染病模型

模型 1（SI 模型）假设条件为

1. 人群分为易感者(Susceptible)和已感者(Infictive). 两类. 时刻 t 这两类人在总人数中所占的比例分别记为 $s(t)$ 和 $i(t)$.
2. 每个病人每天有效接触的平均人数是常数 λ，λ 称日接触率. 当病人与健康者有效接触时，使健康者受感染变为病人.

根据假设，每人每天可使 $\lambda s(t)$ 个健康者变为病人，因为病人数为 $Ni(t)$，所以每天共有 $\lambda Ns(t)i(t)$ 个健康者变为病人，既有：

$$N\frac{di}{dt} = \lambda Nsi$$

(1)

又因为 $s(t)+i(t)=1$ (2)

初始时刻(t=0)病人比例为 i_0，则

$$\begin{cases}\dfrac{di}{dt}=\lambda i(1-i)\\ i(0)=i_0\end{cases}$$

$$i(t)=\frac{1}{1+(\frac{1}{i_0}-1)e^{\lambda t}} \quad (4)$$

例 8：放射性废物处理问题

问题

美国原子能委员会以往处理浓缩的放射性废料的方法，一直是把它们装入密封的圆桶里，然后扔到水深为 90 多米的海底。生态学家和科学家们表示担心，怕圆桶下沉到海底时与海底碰撞而发生破裂，从而造成核污染。原子能委员会分辨说这是不可能的。为此工程师们进行了碰撞实验，发现当圆桶下沉速度超过 12.2m/s 与海底相撞时，圆桶就可能发生碰裂。这样为避免圆桶碰裂，需要计算一下圆桶沉到海底时速度是多少？这时已知圆桶重量为 239.46kg，体积为 0.2058m3， 海水密度为 1035.71 kg /m3。如果圆桶速度小于 12.2m/s，就说明这种方法是安全可靠的，否则就要禁止用这种方法来处理放射性废料。假设水的阻力与速度大小成正比例，其正比例常数 k=0.6。

问题建立的模型

圆桶的位移和速度分别满足下面的微分方程：

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=mg-pgV-k\frac{ds}{dt} \quad (1)$$

$$m\frac{dv}{dt}=mg-pgV-kv \quad (2)$$

考虑受到的阻力，这时圆桶的速度应满足如下的微分方程：

$$m\frac{dv}{dt}=mg-pgV-kv^2 \quad (3)$$

三．差分方程模型

要求：会建立模型，掌握模型求解方法

例 9：设差分方程 $x_{n+2}+3x_{n+1}+2x_n=0, x_0=0, x_1=1$，求 x_n

解：解法1：特征方程为$\lambda^2+3\lambda+2=0$，有根：$\lambda_1=-1,\lambda_2=-2$

故：$x_n=c_1(-1)^n+c_2(-2)^n$为方程的解。

由条件$x_0=0,x_1=1$得：$x_n=(-1)^n-(-2)^n$

例10 ：设现有一笔 p 万元的商业贷款，如果贷款期是 n 年，年利率是 r_1，今采用月还款的方式逐月偿还，建立数学模型计算每月的还款数是多少？

模型分析：在整个还款过程中，每月还款数是固定的，而待还款数是变化的，找出这个变量的变化规律是解决问题的关键。

模型假设：设贷款后第 k 个月后的欠款数是A_k元，月还款为m元，月贷款利息为$r=\frac{r_1}{12}$。

模型建立：关于离散变量A_k，考虑差分关系有：

$$A_k+rA_k=A_{k+1}+m,\quad A_{k+1}=(1+r)A_k-m$$

$$A_0=100000,A_{24}=0$$

模型求解：令 $B_k=A_k-A_{k-1}$，则$B_k=B_{k-1}(1+r)=B_1(1+r)^{k-1}$

$$\therefore A_k=A_0+B_1+B_2+\ldots+B_k=A_0+B_1[1+(1+r)+\ldots+(1+r)^{k-1}]$$

$$=A_0(1+r)^k-\frac{m}{r}[(1+r)^k-1],k=0,1,2,\ldots$$

把已知数据A_0,r代入$A_{12n}=0$中，可以求出月还款额m。例如：

$A_0=10000,r=0.0052125,n=2$时，可以求出：$m=444.356$元。

四．网络图论模型

要求：会建立模型，掌握模型求解方法及有关算法

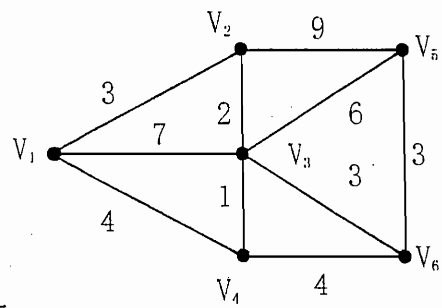
（一）最短路径问题

（二）最小生成树问题

1．prim 算法构造最小生成树

2．Kruskal 算法构造最小生成树

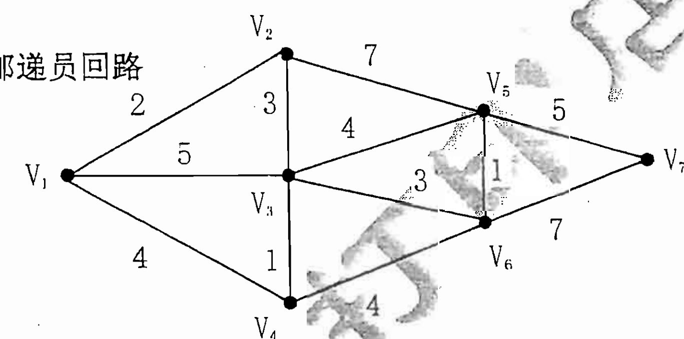
例 11：求下图的最小生成树



（三）欧拉巡回的求法

（四）最佳邮递员回路

例 12：求下图的最佳邮递员回路



例 13 从北京（Pe）乘飞机到东京(T)、纽约(N)、墨西哥城(M)、伦敦(L)、巴黎(Pa)五城市做旅游，每城市恰去一次再回北京，应如何安排旅游线，使旅程最短？各城市之间的航线距离如下表：

	L	M	N	Pa	Pe	T
L		56	35	21	51	60
M	56		21	57	78	70
N	35	21		36	68	68
Pa	21	57	36		51	61
Pe	51	78	68	51		13
T	60	70	68	61	13	

四．函数插值与最小二乘拟合

要求：熟悉函数插值与最小二乘拟合的理论和方法，会利用 MATLAB 做插值与拟合

（一）线性插值法、多项式插值法、样条插值法、Lagrange 插值法

1．Lagrange 插值法

a．待定系数法： 假设插值多项式 $L_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots a_1x+a_0$，利用待定系数法即可求得满足插值条件 $L_n(x_i)=y_i \quad i=0,1,\cdots,n$ 的插值函数。关键在于确定待定系数 $a_n,a_{n-1},\cdots,a_0$。

b．利用基函数的构造方法 首先构造 $n+1$ 个满足条件：$L_i(x_j)=\delta_{ij}$ 的 n 次插值基函数 $l_i(x)$，再将其线性组合即可得如下的 **Lagrange** 插值多项式：

$$l_i(x)=\prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}\frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$$

其中

$$i=0,1,\ldots,n$$

（二）最小二乘拟合

最小二乘拟合： 已知一批离散的数据 $(x_i,y_i), i=0,1,\cdots,n$， x_i 互不相同，寻求一个拟合函数 $f(x)$，使 $f(x_i)$ 与 y_i 的误差平方和在最小二乘意义下最小。在最小二乘意义下确定的 $f(x)$ 称为最小二乘拟合函数。

实例：温度曲线问题

气象部门观测到一天某些时刻的温度变化数据为：

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T	13	15	17	14	16	19	26	24	26	27	29

试描绘出温度变化曲线。

曲线拟合有多种方式，下面是一元函数采用最小二乘法对给定数据进行多项式曲线拟合，最后给出拟合的多项式系数。

该函数求解线性模型： $y=ax+b$