5.0元　复变函数

试题编号：

重庆邮电大学 2011—2012 学年 1 学期

复变函数试卷（期末）　（闭卷）

题　号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得　分											
评卷人											

1、计算下列各题．（每小题 3 分，共 9 分）

(1) $\cos i$；(2) $\ln(-2+3i)$；　(3) 3^{3-i}。

2、求解方程 $z^3+8=0$。（6 分）

3、求下列幂级数的收敛半径．（8 分）

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nz^{n-1}$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}z^n$。

4、求积分：

（1）$\int_C (x^2+iy)dz$，其中 C 是沿 $y=x^2$ 由原点到点 $z=1+i$ 的曲线。（6 分）

（2）$\oint\limits_{|z|=4}\left(\frac{1}{z-1}+\frac{2}{z+3}\right)dz$。（6 分）

（3）$\oint_{|z|=2}\frac{\sin z}{(z-\frac{\pi}{2})^2}dz$。（6 分）

5、设 $f(z)=\frac{e^z}{z^2-1}$，求 $\mathrm{Re}\,s(f(z),\infty)$。（6 分）

6、试将函数 $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ 分别在圆环域 $0<|z|<1$ 和 $2<|z|<+\infty$ 内展开为洛朗级数。（10 分）

7、设 $u=x^2-y^2+xy$，验证 u 是调和函数，并求解析函数 $f(z)=u+iv$，使之 $f(i)=-1+i$。（10 分）

8、讨论 $f(z)=|z|^2$ 的可导性和解析性。(6 分)

9、函数 $f(z)=\dfrac{e^{\frac{1}{z-1}}}{e^z-1}$ 在扩充复平面内有些什么类型的奇点？如果是极点，指出它的级数。(9 分)

10、在映射 $\omega=iz+i$ 下，下列图形映射成什么图形？（8 分）

（1）以 $z_1=i, z_2=-1, z_3=1$ 为顶点的三角形；

（2）圆域 $\mathrm{Re}(z)>0$。

11、证明：（10 分）

(1) 设函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析，$|f(z)|$ 为常数，证明 $f(z)$ 必为常数。(5 分)

（2) 由积分 $\int_C \frac{e^z}{z} dz$ 之值证明

$$\int_0^{\pi} e^{\cos\theta} \cos(\sin\theta) d\theta = \pi,$$

其中 C 取单位圆周 $|z|=1$。(5 分)

复变函数　　参考答案及评分细则

1．计算下列各题.（12 分）

解: (1) $\cos i=\frac{1}{2}(e+e^{-1})$　　（3 分）

(2) $\ln(-2+3i)=\ln|-2+3i|+i\arg(-2+3i)$　　（2 分）

$=\frac{1}{2}\ln 13+i(\pi-\arctan\frac{3}{2})$　　（1 分）

(3) $3^{3-i}=e^{(3-i)\ln 3}=e^{(3-i)(\ln 3+i\cdot 2k\pi)}=e^{3\ln 3+2k\pi+i(6k\pi-\ln 3)}$　　（2 分）

$=27e^{2k\pi}[\cos(\ln 3)-i\sin(\ln 3)]$　　（1 分）

2. 解: $z^3+8=0\Rightarrow z=\sqrt[3]{-8}=\sqrt[3]{8e^{i\pi}}=2e^{i\frac{\pi+2k\pi}{3}}\quad(k=0,1,2)$　　（4 分）

故 $z^3+8=0$ 共有三个根: $z_0=1+\sqrt{3}$，$z_1=-2$，$z_2=1-\sqrt{3}$　　（2 分）

3. (1) $R=1$　　（4 分）

(2) $R=\infty$　　（4 分）

4.（1） 解 $\int_c (x^2+iy)dz=\int_0^1 (x^2+ix^2)d(x+ix^2)$　　（4 分）

$=-\frac{1}{6}+\frac{5}{6}i$　　（2 分）

（2） $\oint_{|z|=4}(\frac{1}{z+1}+\frac{2}{z-3})dz=\oint_{|z|=4}\frac{1}{z+1}dz+\oint_{|z|=4}\frac{2}{z-3}dz$　　（2 分）

$=2\pi i*1+2\pi i*2$　　（2 分）

$=6\pi i$　　（2 分）

（3） $\oint_{|z|=2}\frac{\sin z}{(z-\frac{\pi}{2})^2}dz=2\pi i\cdot\cos(\frac{\pi}{2})=0$　　（6 分）

5 解: $f(z)=\frac{e^z}{z^2-1}=\frac{e^z}{2}(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+1})$

$\mathrm{Re}\,s(f(z),1)=\frac{e}{2}$,　　$\mathrm{Re}\,s(f(z),-1)=-\frac{e^{-1}}{2}$,　　（4 分）

因此　$\mathrm{Re}\,s(f(z),\infty)=-(\frac{e}{2}-\frac{e^{-1}}{2})=\frac{e^{-1}-e}{2}$.　　（2 分）

6. 解: $0<|z|<1$ 时 $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{2}\sum_{n=o}^{\infty}(\frac{z}{2})^n+\sum_{n=0}^{\infty}z^n$　　（4 分）

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(1-\frac{1}{z^{n+1}})z^n$$ （1 分）

$1<|z|<2$ 时 $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=\frac{-1}{2(1-\frac{z}{2})}-\frac{1}{z(1-\frac{1}{z})}$ （3 分）

$$=-\sum_{n=o}^{+\infty}\frac{z_n}{2n+1}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^n}$$ （2 分）

7. P92 书上的例 1

$$\omega=f(z)=y^3-3x^2y+i(x^3-3xy^2+C)=i(z^3+C)$$

8. 解: 设 $z=x+iy$,则 $f(z)=|z|^2=x^2+y^2$ $u_x=2x,u_y=2y,v_x=v_y=0$ （2 分）

当且仅当 $x=y=0$ 时,满足 $C-R$ 条件, （2 分）

故 $f(z)$ 仅在 $z=0$ 可导,在 z 平面内处处不解析. （2 分）

9.解: $z=1$ 为本性奇点 （3 分）

$z=2k\pi i(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 各为一级极点 （4 分）

$z=\infty$ 为非孤立奇点 （2 分）

10.解（1）以 $\omega_1=-1+i,\omega_2=0,\omega_3=2i$ 为顶点的三角形 （4 分）

（2） $\mathrm{Im}(\omega)>1.$ （4 分）

1. 证明: 设 $f=u+iv$,因为 $|f(z)|$ 为常数,不妨设 $u^2+v^2=C$ (C 为常数)

则 $u\cdot u_x+v\cdot v_y=0$ $u\cdot u_y+v\cdot v_y=0$ （2 分）

由于 $f(z)$ 在 D 内解析,从而有 $u_x=v_y$, $u_y=-v_x$ （2 分）

将此代入上述两式可得 $u_x=u_y=v_x=v_y=0$ （1 分）

于是 $u\equiv C_1,v\equiv C_2$ 因此 $f(z)$ 在 D 内为常数. （1 分）

（2）提示：由柯西积分公式得 $\oint_{|z|=1}\frac{e^z}{z}dz=0$ （1 分）

计算 $\oint_{|z|=1}\frac{e^z}{z}dz=\int_0^{2\pi}\frac{e^{(\cos\theta+i\sin\theta)}i}{e^{i\theta}}d\theta$ 经过整理即可得。 （4 分）

2010-2011《复变函数》

（期末考试）　试卷

说明：考生应将全部答案都写在答题纸上，否则作无效处理.

一、（18%）填空题

1、在 $0<|z|<1$ 内，函数 $\dfrac{1}{z(z-2)(z+1)}$ 的罗朗展式是＿＿①＿＿.

2、解析分支 $\dfrac{\sqrt{z}}{1-z}$ 在 $z=1$ 处的留数是＿＿②＿＿.

3、问是否存在解析函数 $f(z)$ 使 $f(\dfrac{1}{2n-1})=f(\dfrac{1}{2n})=\dfrac{1}{2n}$ ？＿＿③＿＿（只需回答是或否）.

4、若解析函数 $f(z)$ 的实部是 $e^x(x\cos y-y\sin y)$，则 $f(z)=$＿＿④＿＿.

5、已知分式线性函数 $f(z)$ 把上半平面变为单位圆，则 $f(z)=$＿＿⑤＿＿.

6、$\displaystyle\int_{|z-2|=\frac{1}{2}}\frac{z\,dz}{(z-1)(z-2)^2}$ 的值是＿＿⑥＿＿.

二、（24%）计算题

1、若以上半虚轴为割线，确定 $\mathrm{Ln}\,z$ 的一个解析分支 $\ln z$.并且分别求出 $w=\ln z$ 在上半虚轴的左沿和右沿，当 $z=i$ 时的值.

2、计算积分 $\mathrm{I}=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x)x^{\alpha}}$，（$\alpha$ 为常数，且 $0<\alpha<1$）.

三、（36%）解答题

1、求 $\dfrac{\mathrm{Ln}\,z}{z^2-1}$ 的解析分支和孤立奇点，并讨论这些奇点的类型.

2、在 z 平面的上半平面上，从原点起，沿虚轴作一条长为 3 的割线，试作一个单叶解析函数，把在上述半平面去掉割线而得到的开区域保形映射成 w 平面的上半平面（不包括实轴）.

3、试作一个解析函数，它把上半平面 $\mathrm{Im}\,z>0$ 保形双射成 w 平面的半带域 $-\dfrac{\pi}{2}<\mathrm{Re}\,w<\dfrac{\pi}{2}$，$\mathrm{Im}\,w>0$.

四、（22%）证明题

1、若$|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$，$z_1+z_2+z_3=0$，则$|z_1-z_2|=|z_2-z_3|=|z_1-z_3|$.

2、若在$|z|<1$内，$f(z)$解析，并且$|f(z)|\le\dfrac{1}{1-|z|}$， 则$|f^{(n)}(0)|<e(n+1)!$.

2010-11《复变函数》试题答案与评分参考

一、填空题（每空格 3 分，共 18 分）

① $-\dfrac{1}{2z}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{(-1)^n}{3}-\dfrac{1}{6}\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)z^n$　　②±1　　③否

④ze^z+ci　　⑤ $\dfrac{e^{i\theta}(z-z_0)}{z-\overline{z}_0}$ $(\operatorname{Im}z_0>0)$　　⑥ $-2\pi i$

二、（24%）计算题

1、若以上半虚轴为割线，确定$\operatorname{Ln}z$的一个解析分支$\ln z$.并且分别求出$w=\ln z$在上半虚轴的左沿和右沿，当$z=i$时的值.

解　$\operatorname{Ln}z=\ln|z|+i\arg z+2k\pi i$　$\left(\dfrac{-3\pi}{2}<\arg z<\dfrac{\pi}{2},\ \ k\in\mathbb{Z}\right)$　　（6 分）

令$\ln z=\ln|z|+i\arg z+2k\pi i$　$\left(-\dfrac{3}{2}\pi<\arg z<\dfrac{\pi}{2}\right)$　　（8 分）

则在上半虚轴的右沿，当$z=i$时，$w=\ln i=\dfrac{\pi}{2}i$

在上半虚轴的左沿，当$z=i$时，$w=\ln i=-\dfrac{3}{2}\pi i$　　（12 分）

2、计算积分$I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x)x^\alpha}$　，（α为常数，且$0<\alpha<1$）.

解因$0<\alpha<1$，故$F(z)=\dfrac{1}{(1+z)z^\alpha}$为多值函数，

取正实轴为割线且单值解析分支$f(z)=\dfrac{1}{1+z}\dfrac{1}{|z|^\alpha e^{i\alpha\arg z}}$　$(0<\arg z<2\pi)$（4 分）

（如图）设$0<\varepsilon<1<r<+\infty$，则

$$\int_{c_\varepsilon+\Gamma^++\Gamma^-+c_r} f(z)\mathrm{d}z=\int_{c_\varepsilon}+\int_{\Gamma^+}+\int_{\Gamma^-}+\int_{c_r}=(1-\mathrm{e}^{-2\pi\alpha})\int_\varepsilon^r\frac{\mathrm{d}x}{(1+x)x^\alpha}+\int_{c_\varepsilon}f(z)\mathrm{d}z+\int_{c_r}f(z)\mathrm{d}z$$

由$\left|\int_{c_\varepsilon}f(z)\mathrm{d}z\right|\le\frac{2\pi\varepsilon}{(1-\varepsilon)\varepsilon^\alpha}$知$\lim\limits_{\varepsilon\to0}\int_{c_\varepsilon}f(z)\mathrm{d}z=0$ （8 分）

由$\left|\int_{c_r}f(z)\mathrm{d}z\right|=\left|\int_0^{2\pi}\frac{r\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta}{(1+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\cdot r^\alpha\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\theta}}\right|\le\frac{2\pi r^{1-\alpha}}{1-r}$知$\lim\limits_{r\to+\infty}\int_{c_r}f(z)\mathrm{d}z=0$

故$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x)x^\alpha}=\frac{2\pi\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\pi\alpha\mathrm{i}}}{1-\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\alpha}}=\frac{\pi}{\sin\pi\alpha}$ （12 分）

三、（36%）解答题

1、求$\frac{\mathrm{Ln}\,z}{z^2-1}$的解析分支和孤立奇点，并讨论这些奇点的类型.

解因 0 和$+\infty$是支点，故 0 和$+\infty$不是孤立奇点. 因此，孤立奇点为-1和1，故可取上半虚轴作割线，因此，解析分支$\frac{\ln z}{z^2-1}=\frac{1}{z^2-1}(\ln|z|+\mathrm{i}(2k\pi+\arg z))$ $k\in\mathbb{Z}$，$-\frac{3\pi}{2}<\arg z<\frac{\pi}{2}$ （6 分）

（1） 当$k=0$时，$z=1$是可去奇点
（2） 当$k\ne0$时，$z=1$是一阶极点
（3） $z=-1$是一阶极点 （12 分）

2、在z平面的上半平面上，从原点起，沿虚轴作一条长为 3 的割线，试作一个单叶解析函数，把在上述半平面去掉割线而得到的开区域保形映射成w平面的上半平面（不包括实轴）.

解 （1）若区域D表示在z平面的上半平面，从原点起沿虚轴去掉一条长为 3 的割线，则$\omega=z^2+9$将区域D变为(ω)平面除去正实轴的开区域D_1（6 分）

（2） $w=\sqrt{w}$将D_1变为w平面的上半平面$\mathrm{Im}\,w>0$

因此$w=\sqrt{z^2+9}$即为所求 （12 分）

3、试作一个解析函数，它把上半平面$\mathrm{Im}\,z>0$保形双射成w平面的半带域

$-\frac{\pi}{2}<\mathrm{Re}\,w<\frac{\pi}{2}$，$\mathrm{Im}\,w>0$.

解 由多角形映射公式知$w=c\int_{-1}^z\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t}\sqrt{1-t}}+c_1$

由$w(-1)=\frac{-\pi}{2}$知$c_1=-\frac{\pi}{2}$

因$\int_{-1}^1\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}=\arcsin t\Big|_{-1}^1=\pi$，故由$w(1)=\frac{\pi}{2}$知$c\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$

所以$c=1$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（6分）

$$因此\ w=\int_{-1}^{z}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}-\frac{\pi}{2}=\arcsin z$$

于是$w=\arcsin z$即为所求.　　　　　　　　　　　　　　　　（12分）

四、（22%）证明题

1、若$|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$，$z_1+z_2+z_3=0$，则$|z_1-z_2|=|z_2-z_3|=|z_1-z_3|$.

证法1　因$z_1+z_2+z_3=0$，$|z_3|=1$，故$(z_1+z_2)^2=|-z_3|^2=1$

即$(z_1+z_2)(\overline{z}_1+\overline{z}_2)=1$，即$z_1\overline{z}_2+\overline{z}_1z_2=-1$　　　　　　　　（6分）

因此$(z_1-z_2)(\overline{z}_1-\overline{z}_2)=z_1\overline{z}_1-z_1\overline{z}_2-\overline{z}_1z_2+z_2\overline{z}_2=3$

即$|z_1-z_2|=\sqrt{3}$，同理$|z_2-z_3|=\sqrt{3}$ ，$|z_1-z_2|=\sqrt{3}$　　　　　　　　（11分）

证法2　由平行四边形公式$|z_1+z_3|^2+|z_1-z_3|^2=2(|z_1|^2+|z_3|^2)$知，

$|z_1-z_3|^2=2(|z_1|^2+|z_3|^2)-|z_1+z_3|^2$，而$z_1+z_2+z_3=0$，　　　　（6分）

因此$|z_1-z_3|^2=2(|z_1|^2+|z_3|^2)-|-z_2|^2=4-1=3$，$|z_1-z_3|=\sqrt{3}$，

同理$|z_2-z_3|=\sqrt{3}$ ，$|z_1-z_2|=\sqrt{3}$　　　　　　　　（11分）

2、若在$|z|<1$内，$f(z)$解析，并且$|f(z)|\le\dfrac{1}{1-|z|}$，　则$|f^{(n)}(0)|<e(n+1)!$

证　因

$$f^{(n)}(0)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{|z|=\frac{n}{n+1}}\frac{f(z)}{z^{n+1}}\mathrm{d}z \qquad （3分）$$

故

$$|f^{(n)}(0)|\le\frac{n!}{2\pi}\int_{|z|=\frac{n}{n+1}}\frac{\frac{1}{1-|z|}}{|z|^{n+1}}|\mathrm{d}z| \qquad （6分）$$

$$\le\frac{n!}{2\pi}\frac{\frac{1}{1-\frac{n}{n+1}}}{(\frac{n}{n+1})^{n+1}}2\pi\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{n}+1} \qquad （8分）$$

$$=(n+1)!\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}(n+1)! \qquad （11分）$$

复变函数测试题及答案

1、求解方程 $z^4+1=0$。（4 分）

解： $z^4+1=0 \Rightarrow z^4=-1=e^{i(2k+1)\pi} \Rightarrow z_k=e^{i\frac{1}{4}(2k+1)\pi}, k=0,1,2,3.$

$\Rightarrow z_1=e^{i\frac{1}{4}\pi}, z_2=e^{i\frac{3}{4}\pi}, z_3=e^{i\frac{5}{4}\pi}, z_4=e^{i\frac{7}{4}\pi}.$

2、求解方程 $2ch^2z-3chz+1=0$。（7 分）

解： 设 $chz=t$，则原方程变为：$2t^2-3t+1=0$，易得其解为：$t_1=\frac{1}{2},\ t_2=1$. 这样原方程就转化为：$chz=\frac{1}{2}$ 或者 $chz=1$；解之即得原方程的解为：$z=0,\ \pm i(2k\pi+\frac{2}{3}\pi)$.

3、已知解析函数 $f(z)=u+iv$ 的实部和虚部满足关系 $u-v=(x-y)\left(x^2+4xy+y^2\right)$，求该解析函数。（8 分）

解：因为 $u-v=(x-y)\left(x^2+4xy+y^2\right)=x^3+3xy(x-y)-y^3$

对上式求偏导数易得：$\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial x}=3x^2+6xy-3y^2$，$\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial y}=-3y^2-6xy+3x^2$。

根据 C-R 条件：$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$，易得：

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=3x^2+6xy-3y^2，\quad \frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}=-3y^2-6xy+3x^2；$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=6xy,\ \frac{\partial u}{\partial y}=3x^2-3y^2. \Rightarrow u=3x^2y-y^3+c \Rightarrow v=-x^3+3xy^2+c$$

$$\Rightarrow f(z)=u+iv=-iz^3+c.$$

4、计算积分 $I=\int_{-1}^{1}|z|dz$，积分路径是（1）直线段，(2) 单位圆周的上半部分。（8 分）

解：（1）$I=\int_{-1}^{1}|z|dz=2\int_0^1 xdx=1.$

（2）令 $z=e^{i\theta}$，则 $I=\int_0^{\pi} ie^{i\theta}d\theta=e^{i\theta}\Big|_0^{\pi}=-2.$

5、利用 Cauchy 积分定理计算函数 $f(z)=\frac{e^z}{(z-2)^2\left(z^2-9\right)}$ 分别沿围道 $l_1:|z|=1$ 和 $l_2:|z-1|=3$ 的积分。（10 分）

解：（1）在围道l_1内，被积函数解析，根据 Cauchy 定理可知，该围道积分为零。

（2）分析易知被积函数在围道内有两个奇点：二阶极点$z=2$和一阶极点$z=3$；而且函数在极点处的留数可计算如下：

$$\operatorname{Res} f(2)=\lim_{z\to2}\left[\frac{d}{dz}\left(\frac{e^z}{z^2-9}\right)\right]=-\frac{9}{25}e^2,\ \operatorname{Res} f(3)=\lim_{z\to3}\left(\frac{e^z}{(z-2)^2(z+3)}\right)=\frac{e^3}{6}。$$

所以原积分$=2\pi i\times\left(\frac{e^3}{6}-\frac{9e^2}{25}\right)$。

6、计算围道积分：$I=\oint_l\frac{\cos\pi z}{(z-1)^5}dz,\ l:|z|=a,\ a>1.$（6 分）

解：被积函数在围道内只有一个五阶极点$z=1$，且：

$$\operatorname{Res}\left[\frac{\cos\pi z}{(z-1)^5},1\right]=\frac{1}{4!}(\cos\pi z)^{(4)}=-\frac{\pi^4}{24}\Rightarrow\oint_{|z|=a}\frac{\cos\pi z}{(z-1)^5}dz=-\frac{\pi^5}{12}i.$$

7、求下列幂级数的收敛圆。(每题 3 分，共 6 分）

$$(1)\sum_{n=0}^{\infty}z^{n+1},\ (2)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{l}\right)z^n.$$

解：$(1)R=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|=1\Rightarrow|z|=1;\ (2)R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{l}}{\sum_{l=1}^{n+1}\frac{1}{l}}=1\Rightarrow|z|=1.$

8、将函数$\ln z$在$z=i$的邻域内分别展开为 Taylor 级数。（6 分）

解：$\because(\ln x)'=\frac{1}{x},(\ln x)''=-\frac{1}{x^2},\cdots,(\ln x)^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{1}{x^{n-1}}$

$$\therefore\ln z=\ln[i+(z-i)]=\ln i+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}(z-i)^n$$

9、在指定奇点附近展开下列函数为 Laurent 级数。（每题 3 分，共 6 分）

$(1)\frac{e^z}{1-z}$, 在$z=1$；$(2)\frac{1}{z(1-z)}$, 在$z=0$

解：$(1)\frac{e^z}{1-z}=-e\frac{e^{z-1}}{z-1}=-e\left(\frac{1}{z-1}+1+\frac{1}{2}(z-1)+\cdots\right)=-e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^{n-1}}{n!},0<|z-1|<\infty.$

$$(2)\frac{1}{z(1-z)}=\frac{1}{z}\frac{1}{(1-z)}=\frac{1}{z}(1+z+z^2+\cdots)=\sum_{k=0}^{\infty}z^{k-1},0<|z|<1.$$

10. 确定下列函数的奇点及其类型并讨论函数在无穷远点的性质。（每题 4 分，共 12 分）

(1)$\dfrac{\sin mz}{z^2+2z+2}$ $(m\neq 0)$, (2) $e^{\tan\frac{1}{z}}$, (3) $\dfrac{1}{(z-a)^k}+\sin z-\cos z$.

解：(1)$z=-1\pm i$ 为该函数的一阶极点，$z=\infty$ 使该函数的本性奇点。

(2)$z=\dfrac{1}{k\pi+\dfrac{\pi}{2}}$,0 为本性奇点，$z=\infty$ 为解析点。

(3)$z=a$ 当 $k>0$ 时为 k 阶极点，当 $k<0$ 时为解析点。$z=\infty$ 为函数的本性奇点。

11. 计算下列围道积分。（每题 4 分共 12 分）

(1)$\oint_{|z|=2}\tan z dz$, (2) $\oint_{|z|=2} e^{\frac{1}{z}}dz$, (3) $\oint_C \dfrac{dz}{(z^2+1)(z-1)^2}, C: x^2+y^2-2x-2y=0$.

解：（1）被积函数在围道内有两个一阶极点 $z=\pm\dfrac{\pi}{2}$，

所以 $\oint_{|z|=2}\tan z dz=2\pi i\left(\text{Res}(\tan z, z=\dfrac{\pi}{2})+\text{Res}(\tan z, z=-\dfrac{\pi}{2})\right)=-4\pi i$。

（2）被积函数在围道内有一个本性奇点 $z=0$，所以 $\oint_{|z|=2} e^{\frac{1}{z}}dz=2\pi i a_{-1}=2\pi i.$

（3）被积函数在围道内有两个奇点，单极点 $z=i$ 和二阶极点 $z=1$。而且：$\text{Res}f(i)=\dfrac{1}{4}$

$\text{Res}f(1)=\lim\limits_{z\to 1}\left(\dfrac{1}{z^2+1}\right)'=-\dfrac{1}{2}$。所以原积分 $=2\pi i\times\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}\right)=-\dfrac{1}{2}\pi i.$

12. 利用留数定理计算下列实积分。（每题 5 分，共 15 分）

(1)$\int_0^{\pi}\dfrac{\cos 2\theta d\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}$, (2) $\int_0^{\infty}\dfrac{\cos x dx}{(x^2+1)^2}$, (3) $\int_0^{\infty}\dfrac{x^2 dx}{x^6+1}$.

解：（1）令 $z=e^{i\theta}$，则 $d\theta=\dfrac{dz}{iz}$，且有：$\dfrac{\cos 2\theta d\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}=-\dfrac{1}{2a}\dfrac{z^4+1}{z(z-a)\left(z-\dfrac{1}{a}\right)}\equiv f(z)$。

易知函数 $g(z)=-\dfrac{2af(z)}{z}$ 有三个奇点：一阶极点 $z=a,\dfrac{1}{a}$ 和二阶极点 $z=0$。且该函数的留数为：$\text{Res}g(a)=\dfrac{a^4+1}{a(a^2-1)}, \text{Res}g\left(\dfrac{1}{a}\right)=\dfrac{a^4+1}{a(1-a^2)}, \text{Res}g(0)=a+\dfrac{1}{a}.$

当 $|a|>1$ 时，$g(z)$ 在单位圆内有两个奇点 $z=0,\dfrac{1}{a}$，

故原积分$=2\pi i\times\frac{1}{-2ai}\times\left(resg(0)+resg\left(\frac{1}{a}\right)\right)=\frac{\pi}{a^2\left(a^2-1\right)}$

当$|a|<1$时，$g(z)$在单位圆内有两个奇点$z=0,a$，

故原积分$=2\pi i\times\frac{1}{-2ai}\times\left(resg(0)+resg(a)\right)=\frac{\pi a^2}{\left(a^2-1\right)}$。

（2）$\int_0^{\infty}\frac{\cos xdx}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}dx}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx\equiv I\Rightarrow I=\pi i\times\left[\mathrm{Res}f(\mathrm{z}),i\right]=\frac{1}{2e}\pi.$

（3）(1) $\int_0^{\infty}\frac{x^2dx}{x^6+1}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2dx}{x^6+1}=\frac{1}{6}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{t^2+1}=\frac{1}{6}\times2\pi i\times\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2+1},i\right)=\frac{\pi}{6}.$

2009-2010 复变函数期末复习题

一、单项选择题(本大题共 20 小题，每小题 2 分，共 40 分)在每小题列出的四个选项中只有一个选项是符合题目要求的，请将正确选项前的字母填在题后的括号内。

1．复数 $z=\frac{16}{25}-\frac{8}{25}i$ 的辐角为（　　）

A．$\arctan\frac{1}{2}$　　B．$-\arctan\frac{1}{2}$　　C．$\pi-\arctan\frac{1}{2}$　　D．$\pi+\arctan\frac{1}{2}$

2．方程 $\mathrm{Re}z^2=1$ 所表示的平面曲线为（　　）

A．圆　　B．直线　　C．椭圆　　D．双曲线

3．复数 $z=-3(\cos\frac{\pi}{5},-i\sin\frac{\pi}{5})$ 的三角表示式为（　　）

A．$-3(\cos\frac{4}{5}\pi,+i\sin\frac{4}{5}\pi)$　　B．$3(\cos\frac{4}{5}\pi,-i\sin\frac{4}{5}\pi)$

C．$3(\cos\frac{4}{5}\pi,+i\sin\frac{4}{5}\pi)$　　D．$-3(\cos\frac{4}{5}\pi,-i\sin\frac{4}{5}\pi)$

4．设 z=cosi，则（　　）

A．Imz=0　　B．Rez=π　　C．|z|=0　　D．argz=π

5．复数 e^{3+i} 对应的点在（　　）

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

6．设 w=Ln(1-I),则 Imw 等于（　　）

A．$-\frac{\pi}{4}$　　B．$2k\pi-\frac{\pi}{4},k=0,\pm1,\cdots$

C．$\frac{\pi}{4}$　　D．$2k\pi+\frac{\pi}{4},k=0,\pm1,\cdots$

7．函数 $w=z^2$ 把 Z 平面上的扇形区域：$0<\arg z<\frac{\pi}{3},0<|z|<2$ 映射成 W 平面上的区域（　　）

A．$0<\arg z<\frac{2\pi}{3},0<|w|<4$　　B．$0<\arg z<\frac{\pi}{3},0<|w|<4$

C．$0<\arg z<\frac{2\pi}{3},0<|w|<2$　　D．$0<\arg z<\frac{\pi}{3},0<|w|<2$

8．若函数 f(z)在正向简单闭曲线 C 所包围的区域 D 内解析，在 C 上连续，且 z=a 为 D 内任一点，n 为正整数，则积分 $\oint_c\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}$ 等于（　　）

A．$\frac{2\pi i}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a)$　　B．$\frac{2\pi i}{n!}f(a)$　　C．$2\pi if^{(n)}(a)$　　D．$\frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(a)$

9．设 C 为正向圆周 | z+1|=2,n 为正整数，则积分 $\oint_c\frac{dz}{(z-i)^{n+1}}$ 等于（　　）

A．1　　B．2πi　　C．0　　D．$\frac{1}{2\pi i}$

10．设 C 为正向圆周|z|=1，则积分$\oint_c \frac{dz}{|z|}$等于（　　）

A．0　　B．2πi　　C．2π　　D．－2π

11．设函数 $f(z)=\int_0^z \zeta e^{\zeta} d\zeta$，则 f（z）等于（　　）

A．ze^z+e^z+1　　B．ze^z+e^z-1　　C．$-ze^z+e^z-1$　　D．ze^z-e^z+1

12．设积分路线 C 是帖为 z=-1 到 z=1 的上半单位圆周，则$\int_c \frac{z+1}{z^2}dz$等于（　　）

A．$2+\pi i$　　B．$2-\pi i$　　C．$-2-\pi i$　　D．$-2+\pi i$

13．幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{n!}$的收敛区域为（　　）

A．$0<|z|<+\infty$　　B．$|z|<+\infty$　　C．$0<|z|<-1$　　D．$|z|<1$

14．$z=\frac{\pi}{3}$是函数 $f(z)=\frac{\sin(z-\frac{\pi}{3})}{3z-\pi}$的（　　）

A．一阶极点　　B．可去奇点　　C．一阶零点　　D．本性奇点

15．z=-1 是函数$\frac{\cot\pi z}{(z+1)^4}$的（　　）

A．3 阶极点　　B．4 阶极点　　C．5 阶极点　　D．6 阶极点

16．幂极数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{(2n)!}z^n$的收敛半径为（　　）

A．0　　B．1　　C．2　　D．＋∞

17．设 Q（z）在点 z=0 处解析，$f(z)=\frac{Q(z)}{z(z-1)}$,则 Res[f(z),0]等于（　　）

A．Q（0）　　B．－Q（0）　　C．Q′（0）　　D．－Q′（0）

18．下列积分中，积分值不为零的是（　　）

A．$\oint_c(z^3+2z+3)dz$,其中C为正向圆周 $|z-1|=2$

B．$\oint_c e^z dz$,其中C为正向圆周 $|z|=5$

C．$\oint_c \frac{z}{\sin z}dz$,其中C为正向圆周 $|z|=1$

D．$\oint_c \frac{\cos z}{z-1}dz$,其中C为正向圆周 $|z|=2$

19．映射 $w=z^2+2z$ 下列区域中每一点的伸缩率都大于 1 的是（　　）

A．$|z+1|>\frac{1}{2}$　　B．$|z+1|<\frac{1}{2}$　　C．$|z|>\frac{1}{2}$　　D．$|z|<\frac{1}{2}$

20．下列映射中，把角形域 $0<\arg z<\frac{\pi}{4}$ 保角映射成单位圆内部 $|w|<1$ 的为（　　）

A．$w=\frac{z^4+1}{z^4-1}$　　B．$w=\frac{z^4-1}{z^4+1}$　　C．$w=\frac{z^4-i}{z^4+i}$　　D．$w=\frac{z^4+i}{z^4-i}$

二、填空题（本大题共 10 空，每空 2 分，共 30 分）

不写解答过程，将正确的答案写在每小题的空格内。错填或不填均无分。

21．复数 $z=4+\sqrt{48}i$ 的模 $|z|=$________。

22．设 $z=(1+i)^{100}$，则 $\mathrm{Im}z=$________。

23．设 $z=e^{2+i}$，则 $\arg z=$________。

24．f（z）的可导处为________。

25．方程 $\ln z=\frac{\pi}{3}i$ 的解为________。

26．设 C 为正向圆周 $|z|=1$，则 $\oint_c(\frac{1}{z}+\bar{z})dz=$________。

27．设 C 为正向圆周 $|z-i|=\frac{1}{2}$，则积分 $\oint_c\frac{e^{\pi z}}{z(z-i)^2}dz=$________。

28．设 C 为正向圆周 $|\zeta|=2$，$f(z)=\oint_c\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\zeta-z}d\zeta$，其中 $|z|<2$，则 $f'(1)=$________。

29．幂极数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}z^n$ 的收敛半径为________。

30．函数 $f(z)=\frac{1}{z}[1+\frac{1}{z+1}+\cdots+\frac{1}{(z+1)^5}]$ 在点 z=0 处的留数为________。

三、计算题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

31．求 $u=x^2+2xy-y^2$ 的共轭调和函数 $v(x,y)$，并使 $v(0,0)=1$。

32．计算积分 $I=\oint_c\frac{\bar{z}+z}{|z|}dz$ 的值，其中 C 为正向圆周 $|z|=2$。

33．试求函数 $f(z)=\int_0^z e^{-\zeta^2}d\zeta$ 在点 z=0 处的泰勒级数，并指出其收敛区域。

34．计算积分 $I=\oint_c\frac{e^{\pi z}}{(z-i)^2(z+3i)^2}dz$ 的值，其中 C 为正向圆周 $|z-1|=3$。

四、综合题（下列 3 个题中，35 题必做，36、37 题中只选做一题，需考《积分变换》者做 37 题，其他考生做 36 题，两题都做者按 37 题给分。每题 10 分，共 20 分）

35．利用留数求积分 $I=\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^4+10x^2+9}dx$ 的值。

36．设 Z 平面上的区域为 $D:|z+i|>\sqrt{2},|z-i|<\sqrt{2}$，试求下列保角映射

（1）$w_1=f_1(z)$ 把 D 映射成 W_1 平面上的角形域 $D_1:\frac{\pi}{4}<\arg w_1<\frac{3}{4}\pi$；

（2）$w_1=f_2(w_1)$ 把 D1 映射成 W2 平面上的第一象限 $D_2:0<\arg w_2<\frac{\pi}{2}$；

（3）$w=f_3(w_2)$ 把 D_2 映射成 W 平面的上半平面：$\mathrm{Im}w>0$;

（4）$w=f(z)$ 把 D 映射成 G。

37．积分变换

（1）设 $F(\omega)=$,a 是一个实数，证明

（2）利用拉氏变换解常微分方程初值问题：$\begin{cases} y''-2y;+y=1, \\ y(0)=0,y'(0)=-1. \end{cases}$

2009-2010 复变函数试题参考答案及评分标准

一、单项选择题(本大题共 20 小题，每小题 2 分，共 40 分)

1. B　2. D　3. C　4. A　5. A　6. B　7. A　8. D　9. C　10. A

11. D　12. C　13. B　14. B　15. C　16. D　17. B　18. D　19. A　20. C

二、填空题（本大题共 10 空，每空 2 分，共 20 分）

21.8　22. 0　23. 1　24. z=0　25. $z=\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})$, 或 $e^{i\frac{\pi}{3}}$

26. $4\pi i$　27. $-2\pi(\pi+i)$　28. $\frac{\pi^3}{3}i$, 或 $2\pi i\cdot\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}$　29. E　30. 6

三、计算题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

31. 解 1：$\because \frac{\partial u}{\partial x}=2x+2y, \frac{\partial u}{\partial y}=2x-2y$，

由 C—R 条件，有 $\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial x}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$，

$\therefore v=\int\frac{\partial v}{\partial x}dy=\int(2x+2y)dy=2xy+y^2+\varphi(x)$。　（2 分）

再由 $\frac{\partial u}{\partial x}=2y+\varphi'(x)=-2x+2y=-\frac{\partial u}{\partial y}$，

得 $\varphi'(x)=-2x$，于是 $\varphi(x)=-x^2+C$，

$\therefore v=2xy+y^2-x^2+C$。　（4 分）

由 $v(0,0)=1$, 得 C=1。

故 $v=2xy+y^2-x^2+1$　（5 分）

解 2：$v(x\ y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy+C$

$=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(2y-2x)dx+(2x+2y)dy+C$　（2 分）

$=-x^2+2xy+y^2+C$　（4 分）

以下同解 1。

32. 解 1：$\oint_c\frac{\bar{z}+z}{|z|}dz=\frac{1}{2}\oint_c 2\mathrm{Re}z dz=\int_{-\pi}^{\pi}2\cos\theta\cdot 2i(\cos\theta+i\sin\theta)d\theta$　(3 分)

$=4i\int_0^{\pi}(1+\cos 2\theta)d\theta=4\pi i$。　（5 分）

解 2：$\oint_c\left(\frac{\bar{z}}{|z|}+\frac{z}{|z|}\right)dz=\int_0^{2\pi}\left(\frac{2e^{-i\theta}}{2}+\frac{2e^{i\theta}}{2}\right)2ie^{i\theta}d\theta$ （3 分）

$=2i(2\pi+0)=4\pi i$。 （5 分）

33．解：因为 $f'(z)=e^{-z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-z^2)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}z^{2n}\quad(|z|<+\infty)$，（2 分）

所以由幂级数在收敛圆内逐项求积性质，得

$f(z)=\int_0^z f'(\zeta)d\zeta=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{z^{2n+1}}{2n+1}\quad(|z|<+\infty)$ （5 分）

34．解：因在 C 内 $f(z)=\frac{e^{\pi z}}{(z-i)^2(z+3i)^2}$ 有二阶级点 z=I，所以

$\oint_c f(z)dz=\frac{2\pi i}{1!}\lim_{z\to i}\left[\frac{d}{dz}(z-i)^2f(z)\right]$ （2 分）

$=2\pi i\lim_{z\to i}\left[\frac{\pi e^{\pi z}}{(z+3i)^2}-\frac{2e^{\pi z}}{(z+3i)^3}\right]$

$=\frac{\pi}{16}(-1+2\pi i)$。 （5 分）

四、综合题（下列 3 个题中，35 题必做，36、37 题中只选做一题，需考《积分变换》者做 37 题，其他考生做 36 题，两题都做者按 37 题给分。每题 10 分，共 20 分）

35．解：在上半平面内，$f(z)=\frac{e^{iz}}{(z^2+1))(z^2+9)}$ 有一阶极点 z=i 和 z=3i。 （2 分）

$\because\quad I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{(x^2+1)(x^2+9)dx}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{(x^2+1)(x^2+9)}dx$ （4 分）

$=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\{2\pi i\mathrm{Res}[f(z),i]+2\pi i\mathrm{Res}[f(z),3i]\}$， （6 分）

$\mathrm{Res}[f(z),i]=\frac{1}{16ei}$，

$\mathrm{Res}[f(z),3i]=-\frac{1}{48e^3i}$， （9 分）

$\therefore\quad I=\frac{\pi}{48e^3}(3e^2-1)$。 （10 分）

36．解：（1）由 $\begin{cases}|z+i|=\sqrt{2}\\|z-i|=\sqrt{2}\end{cases}$ 解得交点 z_1+1,z_2=-1。 （2 分）

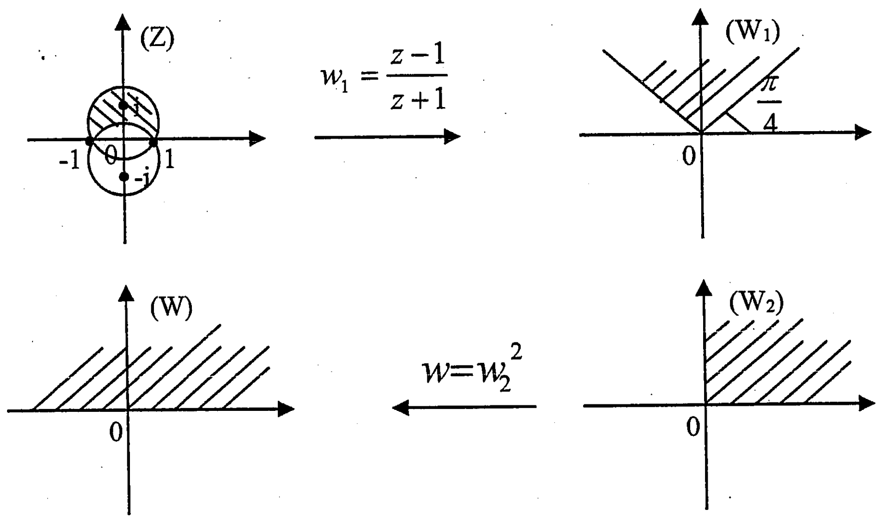
设 $w_1=\frac{z-1}{z+1}$，则它把 D 映射成 W_1 平面上的 $D_1:\frac{4}{\pi}<\arg w_1<\frac{3}{4}\pi$ （4 分）

（2）设 $w^2=e^{-i\frac{\pi}{4}}w_1$，则它把 D_1 映射成

W_2平面上的第一象限D_2:$0<\arg w_2<\dfrac{\pi}{2}$。（6分）

（3）设$w=w_2^2$，则它把D_2映射成W平面的上半平面G：$\mathrm{Im}w>0$。（8分）

（4）$w=(e^{-i\frac{\pi}{4}}\cdot\dfrac{z-1}{z+1})^2=-i(\dfrac{z-1}{z+1})^2$。（10分）



37．解：（1）$\mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau-a)g(t-\tau)d\tau\right]=\mathscr{F}\ [f(t-a)*g(t)]$（2分）

$=\mathscr{F}[f(t-a)]\cdot\mathscr{F}[g(t)]$（3分）

$=e^{-iaw}F(\omega)G(\omega)$。（5分）

（2）设F(p)=[(y(t))，对方程两边取拉氏变换，有

$p^2F(p)+1-2Pf(p)+F(p)=\dfrac{1}{p}$，（7分）

从中解得

$F(p)=\dfrac{1-p}{p}\cdot\dfrac{1}{(p-1)^2}=\dfrac{-1}{p(p-1)}$。（8分）

再求拉氏逆变换，得

$y(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{p-1}\right]$（9分）

$=1-e^t$（10分）

或利用卷积定理得到

$y(t)=-\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{p}\right]*\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{p-1}\right]=-1*e^t$（9分）

$=1-e^t$（10分）

《复变函数》模拟考试试题

《复变函数》考试试题（一）

一、　判断题（4x10=40 分）：

1、若函数 $f(z)$ 在 z_0 解析，则 $f(z)$ 在 z_0 的某个邻域内可导。（　）

2、有界整函数必在整个复平面为常数。（　）

3、若函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在 D 内连续，则 $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 都在 D 内连续。(　)

4、$\cos z$ 与 $\sin z$ 在复平面内有界。（　）

5、若 z_0 是 $f(z)$ 的 m 阶零点，则 z_0 是 $1/f(z)$ 的 m 阶极点。（　）

6、若 $f(z)$ 在 z_0 处满足柯西-黎曼条件，则 $f(z)$ 在 z_0 解析。（　）

7、若 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 存在且有限，则 z_0 是函数的可去奇点。（　）

8、若 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析，则对 D 内任一简单闭曲线 C 都有 $\int_C f(z)dz=0$。（　）

9、若函数 $f(z)$ 是单连通区域 D 内的解析函数，则它在 D 内有任意阶导数。（　）

10、若函数 $f(z)$ 在区域 D 内的解析，且在 D 内某个圆内恒为常数，则在区域 D 内恒等于常数。（　）

二、填空题（4x5=20 分）

1、若 C 是单位圆周，n 是自然数，则 $\int_C \frac{1}{(z-z_0)^n}dz=$__________。

2、设 $f(z)=(x^2+2xy)+i(1-\sin(x^2+y^2)),\forall z=x+iy\in C$，则

$\lim\limits_{z\to 1+i} f(z)=$__________。

3、设 $f(z)=\frac{1}{z^2+1}$，则 $f(z)$ 的定义域为__________。

4、$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} nz^n$ 的收敛半径为__________。

5、$\mathrm{Res}(\frac{e^z}{z^n},0)=$__________。

三、计算题（8x5=40 分）：

1、设 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$，求 $f(z)$ 在 $D=\{z:0<|z|<1\}$ 内的罗朗展式。

2、求 $\int_{|z|=1} e^{z+1}\sin z dz+\dfrac{1}{2\pi i}\int_{|z|=3}\dfrac{dz}{(z-1)(z-4)}$。

3、求函数 $\sin(2z^3)$ 的幂级数展开式。

4、求 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在 $2<|z|<+\infty$ 内的罗朗展式。

5、求 $z^4-5z+1=0$，在 $|z|<1$ 内根的个数。

《复变函数》考试试题（二）

一、判断题（4x10=40 分）：

1、若函数 $f(z)$ 在 z_0 解析，则 $f(z)$ 在 z_0 连续。（ ）

2、有界整函数必为常数。（ ）

3、若 $\{z_n\}$ 收敛，则 $\{\operatorname{Re} z_n\}$ 与 $\{\operatorname{Im} z_n\}$ 都收敛。（ ）

4、若 $f(z)$ 在区域 D 内解析，且 $f'(z)\equiv 0$，则 $f(z)\equiv C$（常数）。（ ）

5、若函数 $f(z)$ 在 z_0 处解析，则它在该点的某个邻域内可以展开为幂级数。（ ）

6、若 $f(z)$ 在 z_0 解析，则 $f(z)$ 在 z_0 处满足柯西-黎曼条件。（ ）

7、若函数 $f(z)$ 在 z_0 可导，则 $f(z)$ 在 z_0 解析。（ ）

8、若 $f(z)$ 在区域 D 内解析，则 $|f(z)|$ 也在 D 内解析。（ ）

9、若幂级数的收敛半径大于零，则其和函数必在收敛圆内解析。（ ）

10、$\cos z$ 与 $\sin z$ 的周期均为 $2k\pi$。（ ）

二、填空题（4x5=20 分）

1、$\int_{|z-z_0|=1}\dfrac{dz}{(z-z_0)^n}=$ __________。

2、设 $f(z)=\dfrac{1}{z^2+1}$，则 $f(z)$ 的孤立奇点有__________。

3、若函数 $f(z)$ 在复平面上处处解析，则称它是__________。

4、$\sin^2 z+\cos^2 z=$ __________。

5、若函数 $f(z)$ 在区域 D 内除去有限个极点之外处处解析，则称它是 D 内的

______________。

三、计算题（8x5=40 分）：

1、$\int_{|z|=1}\frac{1}{\cos z}dz.$

2、求 $\text{Res}(\frac{e^{iz}}{1+z^2},i).$

3、$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2-i}{6}\right)^n.$

4、求 $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在 $2<|z|<+\infty$ 内的罗朗展式。

5、求 $z^9-2z^6+z^2-8z-2=0$ 在 $|z|<1$ 内根的个数。

年级：　专业：　班级：　姓名：　学号：

密　封　线

重庆邮电大学 07/08 学年度第 2 学期

《复变函数》考试试题（A 卷）

（时间 120 分钟）

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
分数										
评卷人										

一、填空题（每空 2 分，共 30 分）

1、复数 $\dfrac{1}{-3+2i}$ 的三角表示式是________________，指数表示式是________________。

2、一个复数 Z 乘以 $-i$，它的模变为______________，辐角变为________________。

3、函数 e^z 的周期是____________。

4、$Ln(-3+4i)$ 的值为____________________，主值为__________________。

5、z_0 为函数 $f(z)$ 的可去奇点，则 $\mathrm{Re}\,s[f(z),z_0]=$______________。

6、若 $z=-1$ 是 $f(z)$ 的三级极点，是 $g(z)$ 的五级极点，则 $z=-1$ 是 $f(z)+g(z)$ 的____________极点，是 $f(z)/g(z)$ 的______________。

7、$\oint_{|z|=1}\left(3+\dfrac{1}{2z}\right)dz=$________________。

8、幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-1)^n$ 在 $z=-1$ 时收敛，则在 $z=-i$ 时__________。

9、$\cos\dfrac{1}{1-z}$ 以 $z=1$ 为________奇点，以 $z=\infty$ 为__________奇点。

10、在映射 $w=iz$ 下，以 $z_1=i, z_2=-1+i, z_3=1$ 为顶点的三角形映射为______________________________。

二、计算题（共 58 分）

1、解方程 $z^4+a^4=0$，其中 $a>0$ 为常数。（8 分）

2、设函数 $f(z)=my^3+nx^2y+i(x^3+lxy^2)$，问当常数 l,m,n 取何值时，$f(z)$ 在复平面上处处解析？（8 分）

3、求以$u=x^3-3xy^2$为实部的解析函数$f(z)$，使满足$f(0)=i$。（8 分）

4、求函数$f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)}$在$0<|z+1|<1$上的罗朗展式。（8 分）

5、计算下列积分（10 分）

（1）$\int_C \bar{z}dz$，积分路径C为从$-i$到i的以原点为中心的右半单位圆周；

（2）$\oint_{|z|=1}\dfrac{\cos z}{z^3}dz$；

6、用留数定理计算$\oint_{|z|=4}\dfrac{e^{z}}{(z-1)^{2}(z+2)}dz$。（8 分）

7、求函数$f(z)=\dfrac{z^{2n}}{1+z^{n}}$（$n$为正整数）的所有奇点（包括$\infty$）处的留数。（8 分）

三、证明题（每小题 6 分，共 12 分）

1、如果 $f(z)=u+iv$ 在区域 D 内解析，$\overline{f(z)}$ 也在区域 D 内解析，那么 $f(z)$ 在区域 D 内为常数。

2、若 z_0 为 $f(z)$ 的 m（$m>1$）级零点，则 z_0 为 $f'(z)$ 的 $m-1$ 级零点。

年级：
专业：
班级：
姓名：
学号：
密 封 线

重庆邮电大学 07/08 学年度第 2 学期

《复变函数》考试试题（B 卷）

（时间 120 分钟）

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
分数										
评卷人										

一、填空题（每空 2 分，共 30 分）

1、复数 $-3+2i$ 的三角表示形式为__________，指数表示形式为__________。

2、$f(z)=\dfrac{z+3}{(z-1)^2(z^2+1)}$ 在复平面上的孤立奇点是__________，若为极点其级数是__________。

3、函数 $f(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}C_n(z-z_0)^n$，则 $\operatorname{Res}[f(z),z_0]=$__________。

4、若 z_0 是 $f(z)$ 的三级极点，z_0 是 $g(z)$ 的五级极点，则 z_0 是 $f(z)\cdot g(z)$ 的______级极点，z_0 是 $f(z)/g(z)$ 的______奇点。

5、$Ln(1-i)=$__________，主值 $\ln(1-i)=$__________。

6、幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(z-1)^n$ 收敛半径__________。

7、在映射 $w=\frac{1}{z}$ 下，圆域 $|z-2|\le 1$ 映射成图形________。

8、函数 $f(z)=x^2-iy$，在________处可导，在________处解析。

9、复数 z 乘以 $1-i$ 后，模变为________，辐角变为________。

二、计算题（每小题 10 分，共 60 分）

1、求 $(1-i)^{\frac{1}{3}}$ 的值和方程 $\sin z=0$ 的根。

2、当 a,b,c,d 取何值时，函数

$$f(z)=x^2+axy+by^2+i(cx^2+dxy+y^2)$$

在复平面内处处解析？

3、计算积分 $\oint_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^3} dz$ 和 $\oint_{|z|=r<1} \frac{e^z \sin z}{(z^2+2)(z^5+3)} dz$。

4、用留数定理计算积分 $\oint_{|z|=2} \frac{z}{z^4-1} dz$。

5、将函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在圆环域 $0<|z-2|<1$ 内展开成罗朗级数。

6、函数 $f(z)=2x^3+3y^3i$ 何处可导？何处解析？

三、证明题（每小题 5 分，共 10 分）

1、 设 z_1, z_2 为两个复数，证明：

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|，\ Arg(z_1 z_2) = Argz_1 + Argz_2。$$

2、 如果 z_0 为 $f(z)$ 的 n 级极点，则 z_0 为 $f'(z)$ 的 $n+1$ 级极点。

《复变函数论》试题库

梅一A111

《复变函数》考试试题（一）

$\int_{|z-z_0|=1} \dfrac{dz}{(z-z_0)^n} =$ ________.（n 为自然数）

2. $\sin^2 z + \cos^2 z =$ ________.

3. 函数 $\sin z$ 的周期为________.

4. 设 $f(z)=\dfrac{1}{z^2+1}$，则 $f(z)$ 的孤立奇点有________.

5. 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} nz^n$ 的收敛半径为________.

6. 若函数 f(z) 在整个平面上处处解析，则称它是________.

7. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \xi$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{z_1+z_2+\dots+z_n}{n} =$ ________.

8. $\mathrm{Res}(\dfrac{e^z}{z^n},0)=$ ________，其中 n 为自然数.

9. $\dfrac{\sin z}{z}$ 的孤立奇点为________.

10. 若 z_0 是 $f(z)$ 的极点，则 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) =$ ____.

三. 计算题（40 分）:

1. 设 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$，求 $f(z)$ 在 $D=\{z: 0<|z|<1\}$ 内的罗朗展式.

2. $\int_{|z|=1} \dfrac{1}{\cos z} dz.$

3. 设 $f(z)=\int_C \dfrac{3\lambda^2+7\lambda+1}{\lambda-z} d\lambda$，其中 $C=\{z: |z|=3\}$，试求 $f'(1+i)$.

4. 求复数 $w=\dfrac{z-1}{z+1}$ 的实部与虚部.

四. 证明题.（20 分）

1. 函数$f(z)$在区域D内解析. 证明：如果$|f(z)|$在D内为常数，那么它在D内为常数.

2. 试证：$f(z)=\sqrt{z(1-z)}$ 在割去线段 $0\le \operatorname{Re} z\le 1$ 的 z 平面内能分出两个单值解析分支，并求出支割线$0\le \operatorname{Re} z\le 1$上岸取正值的那支在$z=-1$的值.

《复变函数》考试试题（二）

二. 填空题. (20 分)

1. 设$z=-i$，则$|z|=$___,$\arg z=$___,$\bar{z}=$___

2.设$f(z)=(x^2+2xy)+i(1-\sin(x^2+y^2)),\forall z=x+iy\in C$，则$\lim\limits_{z\to 1+i} f(z)=$________.

3. $\displaystyle\int_{|z-z_0|=1}\frac{dz}{(z-z_0)^n}=$________.（$n$为自然数）

4. 幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} nz^n$ 的收敛半径为__________.

5. 若 z_0 是$f(z)$的 m 阶零点且 $m>0$，则 z_0 是 $f'(z)$ 的_____零点.

6. 函数 e^z 的周期为__________.

7. 方程$2z^5-z^3+3z+8=0$在单位圆内的零点个数为________.

8. 设$f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$，则$f(z)$的孤立奇点有_________.

9. 函数$f(z)=|z|$的不解析点之集为________.

10. $\operatorname{Res}(\dfrac{z-1}{z^4},1)=$______.

三. 计算题. (40 分)

1. 求函数$\sin(2z^3)$的幂级数展开式.

2. 在复平面上取上半虚轴作割线. 试在所得的区域内取定函数$\sqrt{z}$在正实轴取正实值的一个解析分支，并求它在上半虚轴左沿的点及右沿的点$z=i$处的值.

3. 计算积分：$I=\int_{-i}^{i}|z|\,\mathrm{d}z$，积分路径为（1）单位圆（$|z|=1$）的右半圆.

4. 求 $\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{\sin z}{(z-\frac{\pi}{2})^2}dz$

四. 证明题. (20 分)

1. 设函数$f(z)$在区域 D 内解析，试证：$f(z)$在 D 内为常数的充要条件是$\overline{f(z)}$在 D 内解析.

2. 试用儒歇定理证明代数基本定理.

《复变函数》考试试题（三）

二. 填空题. （20 分）

1. 设 $f(z)=\dfrac{1}{z^2+1}$，则 $f(z)$ 的定义域为__________.

2. 函数 e^z 的周期为__________.

3. 若 $z_n=\dfrac{n+2}{1-n}+i(1+\dfrac{1}{n})^n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=$__________.

4. $\sin^2 z+\cos^2 z=$__________.

5. $\displaystyle\int_{|z-z_0|=1}\frac{dz}{(z-z_0)^n}=$__________.（$n$ 为自然数）

6. 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} nx^n$ 的收敛半径为__________.

7. 设 $f(z)=\dfrac{1}{z^2+1}$，则 $f(z)$ 的孤立奇点有__________.

8. 设$e^z=-1$，则$z=$____.

9. 若z_0是$f(z)$的极点，则$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=$____.

10. $\mathrm{Res}(\dfrac{e^z}{z^n},0)=$_____.

三. 计算题. （40 分）

1. 将函数 $f(z)=z^2e^{\frac{1}{z}}$ 在圆环域 $0<|z|<\infty$ 内展为 Laurent 级数.

2. 试求幂级数 $\sum\limits_{n=}^{+\infty}\dfrac{n!}{n^n}z^n$ 的收敛半径.

3. 算下列积分：$\displaystyle\int_C\frac{e^z\mathrm{d}z}{z^2(z^2-9)}$，其中$C$是$|z|=1$.

4. 求 $z^9-2z^6+z^2-8z-2=0$ 在$|z|<1$ 内根的个数.

四. 证明题. （20 分）

1. 函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析. 证明：如果 $|f(z)|$ 在 D 内为常数，那么它在 D 内为常数.

2. 设 $f(z)$ 是一整函数，并且假定存在着一个正整数 n，以及两个正数 R 及 M，使得当

$|z|\geq R$ 时

$$|f(z)|\leq M|z|^n,$$

证明 $f(z)$ 是一个至多 n 次的多项式或一常数。

《复变函数》考试试题（四）

二. 填空题. (20 分)

1. 设 $z=\dfrac{1}{1-i}$，则 $\operatorname{Re}z=$ __，$\operatorname{Im}z=$ ___.

2. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=\xi$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{z_1+z_2+\ldots+z_n}{n}=$ __________.

3. 函数 e^z 的周期为________.

4. 函数 $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$ 的幂级数展开式为________

5. 若函数 $f(z)$ 在复平面上处处解析，则称它是_________.

6. 若函数 $f(z)$ 在区域 D 内除去有限个极点之外处处解析，则称它是 D 内的___________.

7. 设 $C:|z|=1$，则 $\int_C(z-1)dz=$ ___.

8. $\dfrac{\sin z}{z}$ 的孤立奇点为_______.

9. 若 z_0 是 $f(z)$ 的极点，则 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=$ ___.

10. $\operatorname{Res}(\dfrac{e^z}{z^n},0)=$ __________.

三. 计算题. (40 分)

1. 解方程 $z^3+1=0$.

2. 设 $f(z)=\dfrac{e^z}{z^2-1}$，求 $\operatorname{Res}(f(z),\infty)$.

3. $\int_{|z|=2}\frac{z}{(9-z^2)(z+i)}dz$.

4. 函数 $f(z)=\frac{1}{e^z-1}-\frac{1}{z}$ 有哪些奇点？各属何类型（若是极点，指明它的阶数）.

四. 证明题. (20 分)

证明：若函数 $f(z)$ 在上半平面解析，则函数 $\overline{f(\overline{z})}$ 在下半平面解析.

2. 证明 $z^4-6z+3=0$ 方程在 $1<|z|<2$ 内仅有 3 个根.

《复变函数》考试试题（五）

二. 填空题.（20 分）

1. 设 $z=1-\sqrt{3}i$，则 $|z|=$ ___, $\arg z=$ ___, $\overline{z}=$ ___.

2. 当 $z=$ ____ 时，e^z 为实数.

3. 设 $e^z=-1$，则 $z=$ ____.

4. e^z 的周期为___.

5. 设 $C:|z|=1$，则 $\int_C(z-1)dz=$ ____.

6. $\mathrm{Res}(\frac{e^z-1}{z},0)=$ _____.

7. 若函数 $f(z)$ 在区域 D 内除去有限个极点之外处处解析，则称它是 D 内的____________。

8. 函数 $f(z)=\frac{1}{1+z^2}$ 的幂级数展开式为________.

9. $\frac{\sin z}{z}$ 的孤立奇点为_______.

10. 设 C 是以为 a 心，r 为半径的圆周，则 $\int_C\frac{1}{(z-a)^n}dz=$ ____.（n 为自然数）

三. 计算题. (40 分)

1. 求复数 $\frac{z-1}{z+1}$ 的实部与虚部.

2. 计算积分：

$$I=\int_L \operatorname{Re} z dz,$$

在这里 L 表示连接原点到 $1+i$ 的直线段.

求积分：$I=\int_0^{2\pi}\dfrac{d\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}$，其中 $0<a<1$.

应用儒歇定理求方程 $z=\varphi(z)$，在$|z|<1$ 内根的个数，在这里 $\varphi(z)$ 在 $|z|\le 1$ 上解析，并且 $|\varphi(z)|<1$.

四．证明题.(20 分)

1. 证明函数 $f(z)=|z|^2$ 除去在 $z=0$ 外，处处不可微.

2. 设 $f(z)$ 是一整函数，并且假定存在着一个正整数 n，以及两个数 R 及 M，使得当

$|z|\ge R$ 时

$$|f(z)|\le M|z|^n,$$

证明: $f(z)$ 是一个至多 n 次的多项式或一常数.

《复变函数》考试试题（六）

填空题（20 分）

若 $z_n=\dfrac{n+2}{1-n}+i(1+\dfrac{1}{n})^n$，则 $\lim z_n=$__________.

设 $f(z)=\dfrac{1}{z^2+1}$，则 $f(z)$ 的定义域为____________________.

函数 $\sin z$ 的周期为________________.

$\sin^2 z+\cos^2 z=$________________.

幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} nz^n$ 的收敛半径为____________.

若 z_0 是 $f(z)$ 的 m 阶零点且 $m>1$，则 z_0 是 $f'(z)$ 的__________零点.

若函数 $f(z)$ 在整个复平面处处解析，则称它是____________.

函数 $f(z)=|z|$ 的不解析点之集为__________.

方程$2z^5-z^3+3z+8=0$在单位圆内的零点个数为__________.

公式$e^{ix}=\cos x+i\sin x$称为__________________.

计算题（30分）

1、$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2-i}{6}\right)^n$.

2、设$f(z)=\int_C\dfrac{3\lambda^2+7\lambda+1}{\lambda-z}d\lambda$，其中$C=\{z:|z|=3\}$，试求$f'(1+i)$.

3、设$f(z)=\dfrac{e^z}{z^2+1}$，求$\mathrm{Res}(f(z),i)$.

4、求函数$\dfrac{\sin z^3}{z^6}$在$0<|z|<\infty$内的罗朗展式.

5、求复数$w=\dfrac{z-1}{z+1}$的实部与虚部.

6、求$e^{-\frac{\pi}{3}i}$的值.

证明题（20分）

方程$z^7+9z^6+6z^3-1=0$在单位圆内的根的个数为6.

若函数$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在区域D内解析，$v(x,y)$等于常数，则$f(z)$在D恒等于常数.

若z_0是$f(z)$的m阶零点，则z_0是$\dfrac{1}{f(z)}$的m阶极点.

6．计算下列积分.（8分）

(1) $\oint_{|z|=2}\dfrac{\sin z}{(z-\frac{\pi}{2})^2}dz$；　　(2) $\oint_{|z|=4}\dfrac{z^2-2}{z^2(z-3)}dz$.

7．计算积分$\int_0^{2\pi}\dfrac{d\theta}{5+3\cos\theta}$.（6分）

8．求下列幂级数的收敛半径.（6分）

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1+i)^n z^n$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n!)^2}{n^n}z^n$.

9．设 $f(z)=my^3+nx^2y+i(x^3+lxy^2)$ 为复平面上的解析函数，试确定 l，m，n 的值．（6分）

三、证明题．

1．设函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析，$\overline{f(z)}$ 在区域 D 内也解析，证明 $f(z)$ 必为常数．（5分）

2．试证明 $\overline{a}z+a\overline{z}+b=0$ 的轨迹是一直线，其中 a 为复常数，b 为实常数．（5分）

试卷一至六参考答案

《复变函数》考试试题（一）参考答案

二．填空题

1. $\begin{cases}2\pi i & n=1\\ 0 & n\neq 1\end{cases}$；　2. 1；　3. $2k\pi$，$(k\in z)$；　4. $z=\pm i$；　5. 1

6. 整函数；　7. ξ；　8. $\dfrac{1}{(n-1)!}$；　9. 0；　10. ∞.

三．计算题.

1. 解　因为 $0<|z|<1$，所以 $0<|z|<1$

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2(1-\frac{z}{2})}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z}{2})^n.$$

2. 解　因为

$$\operatorname*{Res}_{z=\frac{\pi}{2}}f(z)=\lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\frac{z+\frac{\pi}{2}}{\cos z}=\lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{-\sin z}=-1,$$

$$\operatorname*{Res}_{z=-\frac{\pi}{2}}f(z)=\lim_{z\to-\frac{\pi}{2}}\frac{z-\frac{\pi}{2}}{\cos z}=\lim_{z\to-\frac{\pi}{2}}\frac{1}{-\sin z}=1.$$

所以 $\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{1}{\cos z}dz=2\pi i(\operatorname*{Res}_{z=-\frac{\pi}{2}}f(z)+\operatorname*{Res}_{z=\frac{\pi}{2}}f(z)=0$.

3. 解　令 $\varphi(\lambda)=3\lambda^2+7\lambda+1$，则它在 z 平面解析，由柯西公式有在 $|z|<3$ 内，

$$f(z)=\int_c\frac{\varphi(\lambda)}{\lambda-z}dz=2\pi i\varphi(z).$$

所以 $f'(1+i)=2\pi i\,\varphi'(z)\big|_{z=1+i}=2\pi i(13+6i)=2\pi(-6+13i)$.

4. 解　令 $z=a+bi$，则

$$w=\frac{z-1}{z+1}=1-\frac{2}{z+1}=1-\frac{2(a+1-bi)}{(a+1)^2+b^2}=1-\frac{2(a+1)}{(a+1)^2+b^2}+\frac{2b}{(a+1)^2+b^2}.$$

故 $\mathrm{Re}(\frac{z-1}{z+1})=1-\frac{2(a+1)}{(a+1)^2+b^2}$，$\mathrm{Im}(\frac{z-1}{z+1})=\frac{2b}{(a+1)^2+b^2}$.

四. 证明题.

1. 证明 设在 D 内 $|f(z)|=C$.

令 $f(z)=u+iv$，则 $|f(z)|^2=u^2+v^2=c^2$.

两边分别对 x,y 求偏导数，得 $\begin{cases} uu_x+vv_x=0 & (1) \\ uu_y+vv_y=0 & (2) \end{cases}$

因为函数在 D 内解析，所以 $u_x=v_y, u_y=-v_x$. 代入 (2) 则上述方程组变为

$\begin{cases} uu_x+vv_x=0 \\ vu_x-uv_x=0 \end{cases}$. 消去 u_x 得，$(u^2+v^2)v_x=0$.

若 $u^2+v^2=0$，则 $f(z)=0$ 为常数.

若 $v_x=0$，由方程 (1) (2) 及 $C.-R.$方程有 $u_x=0$，$u_y=0$，$v_y=0$.

所以 $u=c_1, v=c_2$.（c_1,c_2 为常数).

所以 $f(z)=c_1+ic_2$ 为常数.

2. 证明 $f(z)=\sqrt{z(1-z)}$ 的支点为 $z=0,1$. 于是割去线段 $0\le \mathrm{Re}\,z\le 1$ 的 z 平面内变点就不可能单绕 0 或 1 转一周，故能分出两个单值解析分支.

由于当 z 从支割线上岸一点出发,连续变动到 $z=0,1$ 时，只有 z 的幅角增加 π. 所以

$f(z)=\sqrt{z(1-z)}$ 的幅角共增加 $\frac{\pi}{2}$. 由已知所取分支在支割线上岸取正值，于是可认为该分支在上岸之幅角为 0，因而此分支在 $z=-1$ 的幅角为 $\frac{\pi}{2}$，故 $f(-1)=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{2}i}=\sqrt{2}i$.

《复变函数》考试试题（二）参考答案

二. 填空题

1.1， $-\frac{\pi}{2}$， i； 2. $3+(1-\sin 2)i$； 3. $\begin{cases} 2\pi i & n=1 \\ 0 & n\neq 1 \end{cases}$； 4. 1； 5. $m-1$.

6. $2k\pi i$，$(k\in z)$. 7. 0； 8. $\pm i$； 9. R； 10. 0.

三. 计算题

1. 解 $\sin(2z^3)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2z^3)^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n+1}z^{6n+3}}{(2n+1)!}$.

2. 解 令 $z=re^{i\theta}$.

则 $f(z)=\sqrt{z}=\sqrt{r}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{2}}$， $(k=0,1)$.

又因为在正实轴去正实值，所以 $k=0$.

所以 $f(i)=e^{i\frac{\pi}{4}}$.

3. 单位圆的右半圆周为 $z=e^{i\theta}$，$-\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$.

所以 $\int_{-i}^{i}|z|dz=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}de^{i\theta}=e^{i\theta}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=2i$.

4. 解

$$\oint_{|z|=2}\frac{\sin z}{(z-\frac{\pi}{2})^2}dz=2\pi i(\sin z)'\Big|_{z=\frac{\pi}{2}}=2\pi i\cos z\Big|_{z=\frac{\pi}{2}}=0.$$

四. 证明题.

1. 证明 (必要性) 令 $f(z)=c_1+ic_2$,则 $\overline{f(z)}=c_1-ic_2$. (c_1,c_2 为实常数).

令 $u(x,y)=c_1, v(x,y)=-c_2$. 则 $u_x=v_y=u_y=v_x=0$.

即 u,v 满足 $C.-R.$, 且 u_x,v_y,u_y,v_x 连续, 故 $\overline{f(z)}$ 在 D 内解析.

(充分性) 令 $f(z)=u+iv$, 则 $\overline{f(z)}=u-iv$,

因为 $f(z)$ 与 $\overline{f(z)}$ 在 D 内解析, 所以

$u_x=v_y$， $u_y=-v_x$， 且 $u_x=(-v)_y=-v_y$， $u_y=-(-v_x)=-v_x$.

比较等式两边得 $u_x=v_y=u_y=v_x=0$. 从而在 D 内 u,v 均为常数,故 $f(z)$ 在 D 内为常数.

2. 即要证"任一 n 次方程 $a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n=0$ $(a_0\neq 0)$ 有且只有 n 个根".

证明 令 $f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n=0$，取 $R>\max\left\{\dfrac{|a_1|+\cdots+|a_n|}{|a_0|},1\right\}$，当 z 在

$C:|z|=R$ 上时，有 $|\varphi(z)|\le|a_1|R^{n-1}+\cdots+|a_{n-1}|R+|a_n|<(|a_1|+\cdots+|a_n|)R^{n-1}<|a_0|R^n$.

$$=|f(z)|.$$

由儒歇定理知在圆 $|z|<R$ 内，方程 $a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n=0$ 与 $a_0z^n=0$ 有相同个数的根. 而 $a_0z^n=0$ 在 $|z|<R$ 内有一个 n 重根 $z=0$. 因此 n 次方程在 $|z|<R$ 内有 n 个根.

《复变函数》考试试题（三）参考答案

二.填空题.

1. $\{z\,|\,z\neq\pm i,且z\in C\}$； 2. $2k\pi i\quad(k\in z)$； 3. $-1+ei$； 4. 1； 5. $\begin{cases}2\pi i & n=1\\ 0 & n\neq 1\end{cases}$；

6. 1； 7. $\pm i$； 8. $z=(2k+1)\pi i$； 9. ∞； 10. $\dfrac{1}{(n-1)!}$.

三. 计算题.

1. 解 $z^2e^{\frac{1}{z}}=z^2(1+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{2!z^2}+\cdots)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^{-n+2}}{n!}$.

2. 解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{n!}{n^n}\cdot\dfrac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{n+1}{n})^n=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n=e$.

所以收敛半径为 e.

3. 解 令 $f(z)=\dfrac{e^z}{z^2(z^2-9)}$，则 $\operatorname*{Res}\limits_{z=0}f(z)=\left.\dfrac{e^z}{z^2-9}\right|_{z=0}=-\dfrac{1}{9}$.

故原式 $=2\pi i\operatorname*{Res}\limits_{z=0}f(z)=-\dfrac{2\pi i}{9}$.

4. 解 令 $f(z)=z^9-2z^6+z^2-2$，$\varphi(z)=-8z$.

则在 C：$|z|=1$ 上 $f(z)$ 与 $\varphi(z)$ 均解析，且 $|f(z)|\le 6<|\varphi(z)|=8$，故由儒歇定理有

$N(f+\varphi,C)=N(f+\varphi,C)=1$. 即在 $|z|<1$ 内，方程只有一个根.

四. 证明题.

1. 证明　　证明 设在 D 内 $|f(z)|=C$.

令 $f(z)=u+iv$, 则 $|f(z)|^2=u^2+v^2=c^2$.

两边分别对 x,y 求偏导数, 得 $\begin{cases} uu_x+vv_x=0 & (1) \\ uu_y+vv_y=0 & (2) \end{cases}$

因为函数在 D 内解析, 所以 $u_x=v_y, u_y=-v_x$. 代入 (2) 则上述方程组变为

$\begin{cases} uu_x+vv_x=0 \\ vu_x-uv_x=0 \end{cases}$. 消去 u_x 得, $(u^2+v^2)v_x=0$.

1) $u^2+v^2=0$, 则 $f(z)=0$ 为常数.

若 $v_x=0$, 由方程 (1) (2) 及 $C.-R.$方程有 $u_x=0$, $u_y=0$, $v_y=0$.

所以 $u=c_1, v=c_2$. (c_1,c_2 为常数).

所以 $f(z)=c_1+ic_2$ 为常数.

2. 证明 取 $r>R$, 则对一切正整数 $k>n$ 时, $\left|f^{(k)}(0)\right|\le\frac{k!}{2\pi}\int_{|z|=r}\left|\frac{f(z)}{z^{k+1}}\right||dz|\le\frac{k!Mr^n}{r^k}$.

于是由 r 的任意性知对一切 $k>n$ 均有 $f^{(k)}(0)=0$.

故 $f(z)=\sum_{k=0}^{n}c_n z_n$, 即 $f(z)$ 是一个至多 n 次多项式或常数.

《复变函数》考试试题（四）参考答案

二. 填空题.

1. $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$;　2. ξ;　3. $2k\pi i \quad (k\in z)$;　4. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n} \quad (|z|<1)$;　5. 整函数;

6. 亚纯函数;　7. 0;　8. $z=0$;　9. ∞;　10. $\frac{1}{(n+1)!}$.

三. 计算题.

1.

解：$z^3=-1 \Rightarrow z=\cos\frac{2k\pi+\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi+\pi}{3} \qquad k=0,1,2$

$z_1=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$z_2=\cos\pi+i\sin\pi=-1$

$z_3=\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

2. 解 $\underset{z=1}{\mathrm{Res}}\, f(z)=\left.\frac{e^z}{z+1}\right|_{z=1}=\frac{e}{2}$，$\underset{z=-1}{\mathrm{Res}}\, f(z)=\left.\frac{e^z}{z+1}\right|_{z=-1}=\frac{e^{-1}}{-2}$.

故原式$=2\pi i(\underset{z=1}{\mathrm{Res}}\, f(z)+\underset{z=-1}{\mathrm{Res}}\, f(z))=\pi i(e-e^{-1})$.

3. 解 原式$=2\pi i\underset{z=-i}{\mathrm{Res}}\, f(z)=2\pi i\left.\frac{z}{9-z^2}\right|_{z=-i}=\frac{\pi}{5}$.

4. 解 $\frac{1}{e^z-1}-\frac{1}{z}=\frac{z-e^z+1}{z(e^z-1)}$，令 $z(e^z-1)=0$，得 $z=0,z=2k\pi i$，$k=\pm1,\pm2,\cdots$

而 $\lim\limits_{z\to0}(\frac{1}{e^z-1}-\frac{1}{z})=\lim\limits_{z\to0}\frac{z-e^z+1}{(e^z-1)z}=\lim\limits_{z\to0}\frac{1-e^z}{e^z-1+ze^z}$

$=\lim\limits_{z\to0}\frac{-e^z}{e^z+e^z+ze^z}=-\frac{1}{2}$ $\qquad\therefore z=0$ 为可去奇点

当 $z=2k\pi i$ 时，$(k\neq0),z-e^z+1\neq0$

而 $\left.\left[(e^z-1)z\right]'\right|_{z=2k\pi i}=\left.e^z-1+ze^z\right|_{z=2k\pi i}\neq0$ $\qquad\therefore z=2k\pi i$ 为一阶极点.

四. 证明题.

1. 证明 设 $F(z)=\overline{f(\overline{z})}$，在下半平面内任取一点 z_0，z 是下半平面内异于 z_0 的点，考虑

$$\lim_{z\to z_0}\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{\overline{f(\overline{z})}-\overline{f(\overline{z_0})}}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}\overline{\frac{f(\overline{z})-f(\overline{z_0})}{z-z_0}}.$$

而 $\overline{z_0}$，$\overline{z}$ 在上半平面内，已知 $f(z)$ 在上半平面解析，因此 $F'(z_0)=\overline{f'(\overline{z_0})}$，从而 $F(z)=\overline{f(\overline{z})}$ 在下半平面内解析.

2. 证明 令 $f(z)=-6z+3$，$\varphi(z)=z^4$，则 $f(z)$ 与 $\varphi(z)$ 在全平面解析，

且在 $C_1:|z|=2$ 上，$|f(z)|\leq15<|\varphi(z)|=16$，

故在$|z|<2$内$N(f+\varphi,C_1)=N(\varphi,C_1)=4$.

在$C_2:|z|=1$上，$|f(z)|\geq 3>|\varphi(z)|=1$，

故在$|z|<1$内$N(f+\varphi,C_2)=N(f,C_2)=1$.

所以$f+\varphi$在$1<|z|<2$内仅有三个零点，即原方程在$1<|z|<2$内仅有三个根.

《复变函数》考试试题（五）参考答案

一. 判断题.

1. √2. √ 3. ×4. √5. × 6. × 7. × 8. √ 9. √ 10. √.

二. 填空题.

1.2, $-\dfrac{\pi}{3}$, $1+\sqrt{3}i$;　　2. $a+2k\pi i \quad (k\in z, a$为任意实数$)$;

3. $(2k+1)\pi i,\quad (k\in z)$;　　4. $2k\pi i,(k\in z)$;　　5. 0;　　6. 0;

7. 亚纯函数;　　8. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n} \quad (|z|<1)$;　　9. 0;　　10. $\begin{cases}2\pi i & n=1\\ 0 & n\neq 1\end{cases}$.

三. 计算题.

1. 解 令$z=a+bi$，则

$$w=\frac{z-1}{z+1}=1-\frac{2}{z+1}=1-\frac{2(a+1-bi)}{(a+1)^2+b^2}=1-\frac{2(a+1)}{(a+1)^2+b^2}+\frac{2b}{(a+1)^2+b^2}.$$

故 $\mathrm{Re}(\dfrac{z-1}{z+1})=1-\dfrac{2(a+1)}{(a+1)^2+b^2}$, $\mathrm{Im}(\dfrac{z-1}{z+1})=\dfrac{2b}{(a+1)^2+b^2}$.

2. 解 连接原点及$1+i$的直线段的参数方程为 $z=(1+i)t \quad 0\leq t\leq 1$,

故$\displaystyle\int_c \mathrm{Re}\, z dz=\int_0^1\{\mathrm{Re}[(1+i)t]\}(1+i)dt=(1+i)\int_0^1 t dt=\frac{1+i}{2}$.

3. 令$z=e^{i\theta}$，则$d\theta=\dfrac{dz}{iz}$. 当$a\neq 0$时

$$1-2a\cos\theta+a^2=1-a(z+z^{-1})+a^2=\frac{(z-a)(1-az)}{z},$$

故$I=\dfrac{1}{i}\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{dz}{(z-a)(1-az)}$，且在圆$|z|<1$内$f(z)=\dfrac{1}{(z-a)(1-az)}$只以$z=a$为一级极点，在

$|z|=1$上无奇点，故$\operatorname*{Res}\limits_{z=a}f(z)=\left.\dfrac{1}{1-az}\right|_{z=a}=\dfrac{1}{1-a^2},(0<|a|<1)$，由残数定理有

$$I=\frac{1}{i}2\pi i\operatorname*{Res}_{z=a}f(z)=\frac{2\pi}{1-a^2},(0\le|a|<1).$$

4. 解 令 $f(z)=-z$，则 $f(z),\varphi(z)$ 在 $|z|\le1$ 内解析，且在 $C:|z|=1$ 上，$|\varphi(z)|<1=|f(z)|$，

所以在 $|z|<1$ 内，$N(f+\varphi,C)=N(f,C)=1$，即原方程在 $|z|<1$ 内只有一个根.

四. 证明题.

1. 证明 因为 $u(x,y)=x^2+y^2,v(x,y)\equiv0$，故 $u_x=2x,u_y=2y,v_x=v_y=0$.

这四个偏导数在 z 平面上处处连续，但只在 $z=0$ 处满足 $C.-R.$ 条件，故 $f(z)$ 只在除了 $z=0$ 外处处不可微.

2. 证明 取 $r>R$，则对一切正整数 $k>n$ 时，$|f^{(k)}(0)|\le\frac{k!}{2\pi}\int_{|z|=r}\left|\frac{f(z)}{z^{k+1}}\right||dz|\le\frac{k!Mr^n}{r^k}$ 于是由

r 的任意性知对一切 $k>n$ 均有 $f^{(k)}(0)=0$.

故 $f(z)=\sum\limits_{k=0}^{n}c_nz_n$，即 $f(z)$ 是一个至多 n 次多项式或常数.

《复变函数》考试试题（六）参考答案

二、填空题：1. $-1+ei$　　2. $z\ne\pm1$　　3. 2π　　4. 1　　5. 1

6. $m-1$ 阶　　7. 整函数　　8. $\mathbb{C}$　　9. 0　　10. 欧拉公式

三、计算题：

解：因为 $\left|\frac{2-i}{6}\right|=\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{36}}=\frac{\sqrt5}{6}<1$，　故 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{2-i}{6})^n=0$.

2. 解：$\because|1+i|=\sqrt2<3$，

$$\therefore f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\lambda)}{\lambda-z}d\lambda\quad=\int_C\frac{3\lambda^2+7\lambda+1}{\lambda-z}d\lambda.$$

因此　$f(\lambda)=2\pi i(3\lambda^2+7\lambda+1)$

故 $f(z)=2\pi i(3z^2+7z+1)$

$$f'(1+i)=2\pi i(6z+7)\big|_{1+i}=2\pi i(13+6i)=2\pi(-6+13i).$$

3.解：$\frac{e^z}{z^2+1}=\frac{e^z}{2}\cdot(\frac{1}{z+i}+\frac{1}{z-i})$　$\therefore\operatorname{Res}(f(z),i)=\frac{e^i}{2}$.

4.解：$\sin z^3=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z^3)^{2n+1}}{(2n+1)!}$，$\therefore\frac{\sin z^3}{z^6}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{6n-3}$.

5. 解：设 $z=x+iy$，则 $w=\frac{z-1}{z+1}=\frac{x-1+iy}{z+1+iy}=\frac{(x^2+y^2-1)+2yi}{(x+1)^2+y^2}$.

$$\therefore \operatorname{Re} w=\frac{x^2+y^2-1}{(x+1)^2+y^2},\quad \operatorname{Im} w=\frac{2y}{(x+1)^2+y^2}.$$

6. 解：$e^{-\frac{\pi}{3}i}=\cos(-\frac{\pi}{3})+i\sin(-\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}(1-\sqrt{3}i)$.

四、1. 证明：设 $f(z)=9z^6$，$\varphi(z)=z^7+6z^3-1$，

则在 $|z|=1$ 上，$|f(z)|=9$，$|\varphi(z)|\le 1+6+1=8$，即有 $|f(z)|>|\varphi(z)|$.

根据儒歇定理，$f(z)$ 与 $f(z)+\varphi(z)$ 在单位圆内有相同个数的零点，而 $f(z)$ 的零点个数为 6，故 $z^7+9z^6+6z^3-1=0$ 在单位圆内的根的个数为 6.

2.证明：设 $v(x,y)=a+bi$，则 $v_x=v_y=0$，由于 $f(z)=u+iv$ 在内 D 解析，因此 $\forall(x,y)\in D$ 有 $u_x=v_y=0$，$u_y=-v_x=0$.

于是 $u(x,y)\equiv c+di$ 故 $f(z)=(a+c)+(b+d)i$，即 $f(z)$ 在内 D 恒为常数.

3.证明：由于 z_0 是 $f(z)$ 的 m 阶零点，从而可设

$$f(z)=(z-z_0)^m g(z),$$

其中 $g(z)$ 在 z_0 的某邻域内解析且 $g(z_0)\neq 0$，于是 $\frac{1}{f(z)}=\frac{1}{(z-z_0)^m}\cdot\frac{1}{g(z)}$ 由 $g(z_0)\neq 0$ 可知存在 z_0 的某邻域 D_1，在 D_1 内恒有 $g(z)\neq 0$，因此 $\frac{1}{g(z)}$ 在内 D_1 解析，故 z_0 为 $\frac{1}{f(z)}$ 的 m 阶极点.