5.0 试题编号：

数值计算方法

重庆邮电大学 2012-2013 学年第一学期

数值计算方法试卷（期末）（A 卷）（闭卷）

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	总 分
得 分									
评卷人									

一、填空题（24 分）

1、 改变函数 $f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ $(x\gg 1)$的形式，使计算结果较精确

________________。

2、若用二分法求方程 $f(x)=0$ 在区间[1,2]内的根，要求精确到第 3 位小数，则需要对分________次。

3、设 $f(x)=\begin{pmatrix} x_1^2+x_2^2 \\ x_1x_2 \end{pmatrix}$，则 $f'(x)=$__________

4、设 $S(x)=\begin{cases} 2x^3, & 0\le x\le 1 \\ x^3+ax^2+bx+c, & 1\le x\le 2 \end{cases}$ 是 3 次样条函数，则

a=_____, b=_____, c=______。

5、若用复化梯形公式计算 $\int_0^1 e^x dx$，要求误差不超过 10^{-6}，利用余项公式估计，至少用_____个求积节点。

6、写出求解方程组 $\begin{cases} x_1+1.6x_2=1 \\ -0.4x_1+x_2=2 \end{cases}$ 的 Gauss-Seidel 迭代公式

____________________________，迭代矩阵为_________________，

此迭代法是否收敛_______。

7、设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$，则 $\|A\|_\infty=$________，$\mathrm{Cond}_\infty(\mathbf{A})=$_______。

8、若用 Euler 法求解初值问题 $y'=-10y,\quad y(0)=1$，为保证算法的绝对稳定，

则步长 h 的取值范围为_________

二、证明题(64 分)

1、写出求方程 $4x=\cos(x)+1$ 在区间[0,1]的根的收敛的迭代公式，并证明其收敛性。

2、 (12 分)以 100,121,144 为插值节点，用插值法计算 $\sqrt{115}$ 的近似值，并利用余项估计误差。

3、 (10 分)求 $f(x)=e^x$ 在区间[0,1]上的 1 次最佳平方逼近多项式。

4、(10 分)用复化 Simpson 公式计算积分 $I=\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}dx$ 的近似值，要求误差限为 0.5×10^{-5}。

5、(10 分)用 Gauss 列主元消去法解方程组：

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 24 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 34 \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 = 27 \end{cases}$$

6、(8 分)求方程组 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 的最小二乘解。

7、 (8 分)已知常微分方程的初值问题：

$$\begin{cases} dy/dx = x/y, \quad 1 \le x \le 1.2 \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

用改进的 Euler 方法计算 $y(1.2)$ 的近似值，取步长 $h = 0.2$。

三．计算题(12 分，在下列 5 个题中至多选做 3 个题)

1、(6 分)求一次数不超过 4 次的多项式 p(x)满足：

$p(1)=15$， $p'(1)=20$， $p''(1)=30$， $p(2)=57$， $p'(2)=72$

2、(6 分)构造代数精度最高的如下形式的求积公式，并求出其代数精度：

$$\int_0^1 xf(x)dx \approx A_0 f\left(\frac{1}{2}\right)+A_1 f(1)$$

3、 (6 分)用幂法求矩阵 $A=\begin{pmatrix}10 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ 的模最大的特征值及其相应的单位特征向量，迭代至特征值的相邻两次的近似值的距离小于 0.05，取特征向量的初始近似值为 $(1,0)^T$。

4、 (6 分)推导求解常微分方程初值问题

$$y'(x)=f(x,y(x)), a\le x\le b,\ y(a)=y_0$$

的形式为 $y_{i+1}=y_i+h(\beta_0 f_i+\beta_1 f_{i-1})$,i=1,2,…,N

的公式，使其精度尽量高，其中 $f_i=f(x_i,y_i)$, $x_i=a+ih$, i=0,1,…,N, $h=(b-a)/N$

5、(6 分)求出用差分方法求解常微分方程的边值问题

$$\begin{cases} y''+p(x)y'+q(x)y+r(x)=0,\ a\le x\le b \\ y'(a)=0,\quad y(b)=0 \end{cases}$$

所得到的三对角线性方程组。

A 卷参考答案：

一.(24 分)

(1) (2 分) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$ (2) (2 分) 10

(3) (2 分) $\begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}$ (4) (3 分) 3 -3 1 (5) (3 分) 477

(6) (6 分) $\begin{cases} x_1^{(k+1)}=1-1.6x_2^{(k)} \\ x_2^{(k+1)}=2+0.4x_1^{(k+1)} \end{cases}, k=0,1,\cdots \begin{pmatrix} 0 & -1.6 \\ 0 & -0.64 \end{pmatrix}$ 收敛

(7) (4 分) 9 91 (8) (2 分) h<0.2

二. (64 分)

(1) (6 分) $x_{n+1}=\phi(x_n)=\dfrac{1}{4}[1+\cos(x_n)]$，n=0,1,2,…

$|\phi'(x)|=\dfrac{1}{4}|\sin(x)|\le\dfrac{1}{4}<1$ ∴ 对任意的初值 $x_0\in[0,1]$,迭代公式都收敛。

(2) (12 分) 用 Newton 插值方法：差分表：

100 121 144	10 11 12	0.0476190 0.0434783	-0.0000941136

$\sqrt{115}\approx$10+0.0476190(115-100)-0.0000941136(115-100)(115-121)

=10.7227555

$f'''(x)=\dfrac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$

$|R|=\left|\dfrac{f'''(\xi)}{3!}(115-100)(115-121)(115-144)\right|$

$\le\dfrac{1}{6}\dfrac{3}{8}100^{-\frac{5}{2}}\times15\times6\times29\approx0.00163$

(3) (10 分)设 $\phi(x)=c_1\phi_1(x)+c_2\phi_2(x)=c_1+c_2x$

$\begin{pmatrix} (\phi_1,\phi_1) & (\phi_1,\phi_2) \\ (\phi_2,\phi_1) & (\phi_2,\phi_2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (f,\phi_1) \\ (f,\phi_2) \end{pmatrix}$，$(\phi_1,\phi_1)=\int_0^1 dx=1$，$(\phi_1,\phi_2)=\int_0^1 xdx=\dfrac{1}{2}$，

$(\phi_2,\phi_2)=\int_0^1 x^2dx=\dfrac{1}{3}$，$(f,\phi_1)=\int_0^1\exp(x)dx=e-1$，$(f,\phi_2)=\int_0^1 x\exp(x)dx=1$

$$\begin{pmatrix}1 & 1/2\\ 1/2 & 1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e-1\\ 1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.8731\\ 1.690\end{pmatrix},\ \phi(x)=0.8731+1.690x$$

$\phi(x)=4e-10+(18-6e)x$=0.873127+1.69031x

(4) (10 分)

$$S_1=\frac{1}{6}\left(f(0)+4f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)\right)=0.94614588$$

$$S_2=\frac{1}{12}\left(f(0)+4f\left(\frac{1}{4}\right)+2f\left(\frac{1}{2}\right)+4f\left(\frac{3}{4}\right)+f(1)\right)=0.94608693$$

$|I-S_2|\approx\frac{1}{15}|S_2-S_1|=0.393\times10^{-5}$ $\quad I\approx S_2=0.94608693$

或利用余项：$f(x)=\frac{\sin(x)}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\frac{x^8}{9!}-\cdots$

$f^{(4)}(x)=\frac{1}{5}-\frac{x^2}{7\times2!}+\frac{x^4}{9\times4!}-\cdots\qquad \left|f^{(4)}(x)\right|\le\frac{1}{5}$

$|R|=\frac{(b-a)^5}{2880n^4}\left|f^{(4)}(\eta)\right|\le\frac{1}{2880\times5n^4}\le0.5\times10^{-5}$，$n\ge2$，$I\approx S_2=\cdots$

(5) (10 分)

3.0000	1.0000	5.0000	34.0000
0.0000	3.6667	0.3333	12.6667
0.0000	5.3333	-2.3333	4.3333

3.0000	1.0000	5.0000	34.0000
0.0000	5.3333	-2.3333	4.3333
0.0000	0.0000	1.9375	9.6875

$x=(2.0000,3.0000,5.0000)^T$

(6) (8 分) $(A^TA)x=A^Tb$，$\begin{pmatrix}3 & 6\\ 6 & 14\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\ 20\end{pmatrix}$，$x=\begin{pmatrix}-1.3333\\ 2.0000\end{pmatrix}$

若用 Householder 变换，则：

$$(A,b)\to\begin{pmatrix}-1.73205 & -3.46410 & 4.61880\\ 0 & -0.36603 & -1.52073\\ 0 & -1.36603 & -2.52073\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix} -1.73205 & -3.46410 & -4.61880 \\ 0 & 1.41421 & 2.82843 \\ 0 & 0 & 0.81650 \end{pmatrix}$$

最小二乘解： $(-1.33333，2.00000)^T$.

(7) (8 分)

$k_1 = f(x_0, y_0) = 0.5$， $k_2 = f(x_1, y_0 + hk_1) = 1.1/(2 + 0.2 \times 0.5) = 0.5238095$

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) = 2 + 0.1 \times (0.5 + 0.5238095) = 2.1071429$$

三. (12 分)

(1) 差分表：

1	15	20	15	7	1
1	15	20	22	8	
1	15	42	30		
2	57	72			
2	57				

$$p(x) = 15 + 20(x-1) + 15(x-1)^2 + 7(x-1)^3 + (x-1)^3(x-2)$$
$$= 5 + 4x + 3x^2 + 2x^3 + x^4$$

其他方法：设 $p(x) = 15 + 20(x-1) + 15(x-1)^2 + (x-1)^3(ax+b)$

令 $p(2) = 57$， $p'(2) = 72$，求出 a 和 b

(2) 取 f(x)=1,x，令公式准确成立，得：

$A_0 + A_1 = \frac{1}{2}$， $\frac{1}{2}A_0 + A_1 = \frac{1}{3}$ $A_0 = \frac{1}{3}$， $A_1 = \frac{1}{6}$

f(x)=x^2 时，公式左右=1/4; f(x)=x^3 时，公式左=1/5，公式右=5/24

∴ 公式的代数精度=2

(3) ① $u_1 = Av_0 = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix}$， $\lambda_1^{(1)} = (u_1, v_0) = 10.00$， $v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|_2} = \begin{pmatrix} 0.9950 \\ 0.09950 \end{pmatrix}$

② $u_2 = Av_1 = \begin{pmatrix} 10.05 \\ 1.095 \end{pmatrix}$， $\lambda_1^{(2)} = (u_2, v_1) = 10.108$， $v_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|_2} = \begin{pmatrix} 0.9941 \\ 0.1083 \end{pmatrix}$，

$$\left|\lambda_1^{(1)} - \lambda_1^{(2)}\right| = 0.11 > 0.05$$

③ $u_3 = Av_2 = \begin{pmatrix} 10.05 \\ 1.102 \end{pmatrix}$, $\lambda_1^{(3)} = (u_3, v_2) = 10.110$, $v_3 = \dfrac{u_3}{\|u_3\|_2} = \begin{pmatrix} 0.9940 \\ 0.1090 \end{pmatrix}$,

$\left|\lambda_1^{(2)} - \lambda_1^{(3)}\right| = 0.002 < 0.05$

$\therefore \lambda_1 \approx 10.11$, $x_1 \approx \begin{pmatrix} 0.9940 \\ 0.1090 \end{pmatrix}$

(4) 局部截断误差=$y(t_{i+1}) - y_{i+1}$

数值计算方法 3元

试题编号：

重庆邮电大学 2009－2010 学年第二学期

数值计算方法试卷（期末）A 卷（闭卷）

题　号	一	二	三	四	五	六	七	八	总　分
得　分									
评卷人									

一、填空题（本大题共 10 小题，每题 3 分，共 30 分）

1、为使 $x=\frac{1}{3}$ 近似值的相对误差限不超过 0.1×10^{-2},应取________位有效数字

2、$x_1^*=0.032, x_2^*=1.0021, x_3^*=385.6$ 是四舍五入得到的近似值，则 $x_1^*+x_2^*+x_3^*$ 的绝对误差限为________

3、设 $x_i(i=0,1,2,3)$ 为互异节点，$l_i(x)$ 为对应的三次 Lagrange 插值基函数，则 $\sum_{i=0}^{3}x_i^3 l_i(x)=$__________

4、已知 $f(x)=x^7+x^4+3x+1$，则 $f[2^0,2^1,\cdots 2^7]=$________

5、计算 $f=(\sqrt{2}-1)^6$，取 $\sqrt{2}\approx1.4$，下列等价表达式中，哪种计算结果较好______

$A\ \ \frac{1}{(\sqrt{2}+1)^6}$　　$B\ \ (3-2\sqrt{2})^3$　　$C\ \ \frac{1}{(3+2\sqrt{2})^3}$　　$D\ \ 99-70\sqrt{2}$

6、$C_k^{(n)}$ 为牛顿-科斯特系数，则 $\sum_{k=0}^{n}C_k^{(n)}=$________

7、用牛顿法求方程 $x^2-25=0$ 的根，写出迭代公式__________

8、$cond(A)_1=5$，则 $cond(2A)_1=$__________

9、x 为一个向量，已知 $\|x\|_\infty=5$，则 $\|2x\|_\infty=$__________

10、改进欧拉算法为____阶算法，其截断误差为__________

二、计算题（本大题共 7 小题，每小题 9 分，共 7×9＝63 分）

1、令 $x_0 = 0, x_1 = 1$,求 $y = e^{-x}$ 的一次插值多项式，并估计插值误差。

2、已知一组实验数据如下表，求一条形如 $y = a + b / x$ 的最小二乘拟合曲线。（只需要写出拟合方程，不求解）

x_i	1	2	5	10
y_i	8	7	10	21

3、用三角分解法解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 18 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 20 \end{cases}$$

4、用梯形公式、Simpson 公式计算定积分 $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$

5、确定下列积分公式中的待定系数，使其代数精度尽量高，并指出代数精度

$\int_{-h}^{h} f(x) \approx A_{-1} f(-h) + A_0 f(0) + A_1 f(h)$。

6、判定下列方程组利用雅克比迭代和 G-S 迭代方法的收敛性，说明理由，并写出迭代方程组

$$\begin{cases} 20x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 24 \\ x_1 + 8x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 - 3x_2 + 15x_3 = 30 \end{cases}$$

7、利用欧拉方法和改进欧拉方法解初值问题。（写出数值计算公式，计算到 y_2，h=0.1）

$$\begin{cases} y' + y = x \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad 0 \le x \le 0.4$$

三、证明题（共 1 小题，每题 7 分）

证明：中矩形公式 $\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f(\frac{a+b}{2}); R[f] = \frac{f''(\eta)}{24}(b-a)^3$

数值计算方法 09-10（2）A 卷参考解答（限选）

一、填空选择

1、4　　2、0.05055　　3、x^3　　4、1　　5、C　　6、1

7、$x_{k+1}=x_k-\dfrac{x_k^2-25}{2x_k}=\dfrac{1}{2}(x_k+\dfrac{25}{x_k})$　　8、5　　9、10

10、2；$o(h^3)$ 或 $-\dfrac{1}{12}h^3y'''(\xi)$

二、计算题

1、解：由线性插值公式知：$\phi(x)=y_0+\dfrac{y_1-y_0}{x_0-x_1}(x-x_0)=1+\dfrac{\frac{1}{e}-1}{1-0}(x-0)=1+(\dfrac{1}{e}-1)x$

$|R_1(x)|=|\dfrac{f''(\xi)}{2!}(x-0)(x-1)|=|\dfrac{e^{-\xi}}{2}x(x-1)|\le\dfrac{1}{2}|x(x-1)|\qquad 0\le\xi\le1$

2、解：令 $X=\dfrac{1}{x}$，则拟合曲线为 $y=a+bX$，原数据对应为

x_i	1	2	5	10
X_i	1	0.5	0.2	0.1
y_i	8	7	10	21

所以拟合方程为：$\begin{cases}4a+1.8b=36\\1.8a+1.3b=15.6\end{cases}$

3、解：$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&5&2\\3&1&5\end{pmatrix}$ 则 $L=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&-5&1\end{pmatrix}$，$U=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&-4\\0&0&-24\end{pmatrix}$ 令 $Ux=y$，则原方程即为 $Ly=b$；$\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&-5&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14\\18\\20\end{pmatrix}$ 解得 $\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14\\-10\\-72\end{pmatrix}$；所以

$\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&-4\\0&0&-24\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_3\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14\\18\\20\end{pmatrix}$；解得 $\begin{pmatrix}x_1\\x_3\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

4、解：$f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}, f(0)=1, f(0.5)=0.8, f(1)=0.5$

梯形公式得：$\int_0^1 \dfrac{1}{1+x^2}dx \approx \dfrac{1}{2}[f(0)+f(1)]$=0.75

辛普生公式得：$\int_0^1 \dfrac{1}{1+x^2}dx \approx \dfrac{1}{6}[f(0)+4f(0.5)+f(1)]=\dfrac{47}{60}\approx 0.7833$

5、解：分别令 $f(x)=1$，$f(x)=x$，$f(x)=x^2$ 带入得：

$$\begin{cases} 2h = A_{-1}+A_0+A_1 \\ 0=-A_{-1}h+A_1h \\ \dfrac{2}{3}h^3=A_{-1}h^2+A_1h^2 \end{cases} \quad \text{解得：} A_{-1}=A_1=\frac{1}{3}h; A_0=\frac{4}{3}h$$

令 $f(x)=x^3$，带入左边=0=右边=0。成立

$f(x)=x^4$，左边=$\dfrac{2}{5}h^5$，右边=$\dfrac{2}{3}h^5$，不成立

所以代精度为 3

另解：公式与辛普生公式比较可知：$A_{-1}=A_1=\dfrac{1}{3}h; A_0=\dfrac{4}{3}h$，所以代数精度为 3

6、解：方程组化为 $Ax=b$，则 $A=\begin{pmatrix} 20 & 2 & 3 \\ 1 & 8 & 1 \\ 2 & -3 & 15 \end{pmatrix}$，为严格对角占优矩阵，所以对雅克比迭代和 G-S 迭代法都收敛。

雅克比迭代方程为 $\begin{cases} x_1^{k+1}=\dfrac{1}{20}(24-2x_2^k-3x_3^k) \\ x_2^{k+1}=\dfrac{1}{8}(12-x_1^k-x_3^k) \\ x_3^{k+1}=\dfrac{1}{15}(30-2x_1^k+3x_2^k) \end{cases}$

G-S 迭代方程组为 $\begin{cases} x_1^{k+1}=\dfrac{1}{20}(24-2x_2^k-3x_3^k) \\ x_2^{k+1}=\dfrac{1}{8}(12-x_1^{k+1}-x_3^k) \\ x_3^{k+1}=\dfrac{1}{15}(30-2x_1^{k+1}+3x_2^{k+1}) \end{cases}$

7、解：$f(x,y)=x-y$，

利用欧拉公式得：$y_{i+1}=y_i+hf(x_i,y_i)=y_i+0.1(x_i-y_i)$

$y_1=0+0.1(0-0)=0$

$y_2=0+0.1(0.1-0)=0.01$

利用改进欧拉公式得：

$\overline{y_{i+1}}=y_i+hf(x_i,y_i)=y_i+0.1(x_i-y_i)$

$y_{i+1}=y_i+\frac{h}{2}[f(x_i,y_i)+f(x_{i+1},\overline{y_{i+1}})=y_i+0.05[(x_i-y_i)+(x_{i+1}-\overline{y_{i+1}})]$

$\overline{y}_1=0+0.1(0-0)=0,$

$y_1=0+0.05[(0-0)+(0.1-0)]=0.005$

$\overline{y}_2=0.005+0.1(0.1-0.005)=0.0145,$

$y_2=0.005+0.05[(0.1-0.005)+(0.2-0.0145)]=0.019025$

三、证明

证明：将 $f(x)$ 在 $x=\frac{a+b}{2}$ 出展开成泰勒公式为：

$f(x)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})+\frac{1}{2!}f''(\xi)(x-\frac{a+b}{2})^2$

取前二项做近似值得：

$\int_a^b f(x)\approx\int_a^b[f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})]dx$

$=(b-a)f(\frac{a+b}{2})$

余项为 $R[f]=\int_a^b\frac{1}{2!}f''(\xi)(x-\frac{a+b}{2})^2dx=\frac{1}{2!}f''(\xi)\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})^2dx=\frac{f''(\xi)}{24}(b-a)^3$

试题编号：

重庆邮电大学 2009—2010 学年第二学期

数值计算方法试卷（期末）B 卷（闭卷）

题　号	一	二	三	四	五	六	七	八	总 分
得　分									
评卷人									

一、填空题（本大题共 10 小题，每题 3 分，共 30 分）

1、四舍五入得到的近似值 $x^*=0.032$ 的有效数值位数为________，相对误差限为________________,绝对误差限为_______________

2、已知 $x_0=0,x_1=1,x_2=2,x_3=3,\ f_0=0,f_1=1.1,f_2=2.5,f_3=4$，则差商 $f[x_0,x_1,x_2]$=_______________

3、$\lambda_1,\lambda_2\cdots\lambda_n$ 为矩阵的 n 个特征值 $|\lambda_1|>|\lambda_2|\geq\cdots|\lambda_n|$，则乘幂法计算特征值的收敛速度取决于____________

4、已知 $f(x)$ 为 n 次多项式，则 $f[x,x_0]$ 为_________次多项式

5、计算 $f=(\sqrt{2}-1)^6$，取 $\sqrt{2}\approx1.4$，下列等价表达式中，那种就算结果较好________

$A\ \dfrac{1}{(\sqrt{2}+1)^6}$　　$B\ (3-2\sqrt{2})^3$　　$C\ \dfrac{1}{(3+2\sqrt{2})^3}$　　$D\ 99-70\sqrt{2}$

6、确定下列积分公式中的待定系数，使其代数精度尽量高

$\int_{-h}^{h}f(x)\approx A_{-1}f(-h)+A_0f(0)+A_1f(h)$ 则 A_{-1}=______　A_0=_______　A_1=______

7、方程 $x^3-x^2-1=0$ 在 $x_0=1.5$ 附近有根，试判断下列迭代格式 $x_{k+1}=1+\dfrac{1}{x_k^2}$ 在 $x_0=1.5$ 附近的收敛性____________

8、$A=\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix}$，则 $\|A\|_1$=________，$cond(A)_1$ =___________

9、A为一个矩阵，已知$\|A\|_\infty=5$，则$\|2A\|_\infty=$____________

10、对初值问题$\begin{cases} y'=-20y \\ y(0)=1 \end{cases}$，则步长 h 满足______________时，Euler 法是稳定的_

二、计算题（本大题共 7 小题，每小题 9 分，共 7×9＝63 分）

1、求方程 $x^2-56x+1=0$ 的两个根，使其至少具有四位有效数字（要求利用 $\sqrt{783}\approx 27.982$）

2、已知函数表如下表 1，求二次 Lagrange 插值多项式 $p_2(x)$。

x	3	1	4
y	4	2	5

3、用乘幂法计算 $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$ 按模最大特征值与特征向量，取初值

$(0,0,1)^T$，迭代三次。

4、用辛普生公式计算积分 $I=\int_0^1 e^{-x}dx$（可用 e 表达），并估计误差

5、方程 $x^3-x^2-1=0$ 在 $x_0=1.5$ 附近有根，试判断下列迭代格式在 $x_0=1.5$ 附近的收敛性，。

(1) $x_{k+1}=1+\frac{1}{x_k^2}$； (2) $x_{k+1}=\sqrt[3]{1+x_k^2}$； (3) $x_{k+1}=\frac{1}{\sqrt{x_k-1}}$

6、判定下列方程组利用雅克比迭代和 G-S 迭代方法的收敛性，说明理由，并写出迭代方程组

$$\begin{cases} 20x_1+2x_2+3x_3=24 \\ x_1+8x_2+x_3=12 \\ 2x_1-3x_2+15x_3=30 \end{cases}$$

7、利用欧拉方法和改进欧拉方法解初值问题。（写出数值计算公式，计算到y_2，h=0.1）

$$\begin{cases} y' = \dfrac{2}{3}xy^2 \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad 0 \le x \le 0.7$$

三、证明题（共 1 小题，每题 7 分）

证明：设$x_0, x_1, x_2 \cdots x_n$为插值节点，$l_k(x)$（$k = 0,1,\cdots n$）（$n \ge 1$）为拉格朗日插值基函数，则$\sum_{i=0}^{n} l_i(x) = 1$

25 数值计算方法

试题编号：

重庆邮电大学 2008—2009 学年第二学期

数值计算方法试卷（期末）A 卷（闭卷）

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	总 分
得 分									
评卷人									

一、填空题（本大题共 11 小题，每空 2 分，共 32 分）

1、四舍五入得到的近似值 $x^*=100$ 的有效数值位数为 3 ，相对误差限为 $\frac{1}{2}\times10^{-2}$ ，绝对误差限为 $\frac{1}{2}$

2、$x^*=1.21$ 是四舍五入得到的近似值，则 $(x^*)^2$ 的相对误差为 1×10^{-2}

3、$l_i(x)$ 为拉格朗日差值基函数，$x_i(i=0,1,2\cdots n)n>3$ 为插值节点，则 $l_3(x_3)=$ 1

4、已知 $f(x_0)=1, f(x_1)=1.2, f(x_2)=1.3$，则 $f[x_0,x_1,x_2]=$ $\frac{f[x_0,x_1]-f[x_1,x_2]}{x_0-x_2}$

5、确定公式中的常数 $\int_{-1}^{1}f(x)dx\approx a_0f(-1)+a_1f(0)+a_2f(1)$，使代数精度尽量高，则 $a_0=$ $\frac{1}{3}$ ，$a_1=$ $\frac{4}{3}$ ，$a_2=$ $\frac{1}{3}$

6、迭代序列 $x_{k+1}=x_k^3-1$ 在区间 $[1.5,2]$ 上的收敛情况 发散 .

7、$A=\begin{bmatrix}4 & -3\\ 2 & 1\end{bmatrix}$，则 $\|A\|_1=$ 7 ，$cond(A)_1=$ 6.3

8、对初值问题 $\begin{cases}y'=-20y\\ y(0)=1\end{cases}$，则步长 h 满足 $0<h<0.1$ 时，Euler 法是稳定的

9、用牛顿迭代法求解方程 $f(x)=\cos x-x=0$ 的迭代格式为 $x_{k+1}=x_k+\frac{\cos x_k-x_k}{1+\sin x_k}$

10、若 SOR 迭代法收敛，则松弛因子 ω 的取值范围应满足条件 $0<\omega<2$

11、$A=\begin{bmatrix}20 & 2 & 3\\ 1 & 8 & 1\\ 2 & -3 & 15\end{bmatrix}$，对于方程组 $Ax=b$ 雅克比迭代方法的收敛性__________

二、计算题（本大题共小题，每小题 8 分，共 7×8＝56 分）

$x_0\ \ y_0\ \ x_1\ \ y_1\ \ x_2\ \ y_2$

1、已知 $f(x)$ 过三点（1，0），（2，-5），（3，-6），试求其二次 Lagrange 插值多项式，并求 $f(2.5)$ 的近似值。

$L_2(x)=l_0(x)y_0+l_1(x)y_1+l_2(x)y_2 = 5(x-1)(x-3)-3(x-1)(x-\ldots = (x-1)(2x-9)$

$l_0=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}=\frac{(x-3)(x-2)}{2}$ $\quad l_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}=\frac{(x-1)(x-3)}{-1}$ $\quad l_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}=\frac{(x-1)(x-2)}{2\times}$

$f(2.5)=L(2.5)=(2.5-1)(2\times2.5-9)=1.5\times(-4)=-6$

2、用乘幂法计算 $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$ 按模最大特征值与特征向量，取初值 $v_0=(0,0,1)^T$，迭代三次。

$u_1=Av_0=(0,-1,2)^T \quad \alpha_1=2 \quad v_1=(0,-\frac{1}{2},1)^T$

$u_2=Av_1=(\frac{1}{2},-2,\frac{5}{2})^T \quad \alpha_2=\frac{5}{2} \quad v_2=(\frac{1}{5},-\frac{4}{5},1)^T$

$u_3=Av_2=(\frac{6}{5},-\frac{13}{5},\frac{14}{5})^T \quad \alpha_3=\frac{14}{5} \quad v_3=(\frac{3}{7},-\frac{13}{14},1)^T$

3、利用三角分解求解方程组

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 2 & 4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14\\ 8\\ 13\end{pmatrix}$$

$A=\begin{pmatrix}\frac{5}{7} & 0 & 0\\ -4 & -7 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & -5\end{pmatrix}$

$\begin{cases}Ly=b\\ Ux=y\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=y_1\\ x_2+2x_3=y_2\\ -5x_3=y_3\end{cases}$

$\begin{cases}\frac{5}{7}y_1=14\\ -4y_1-7y_2=8\\ 2y_1+y_3=13\end{cases} \Rightarrow$

4、用辛普生公式计算积分 $I=\int_0^1 e^{-x}dx$（可用 e 表达），并估计误差。

$\int_0^1 e^{-x}dx=\frac{b-a}{6}[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)]$

$=\frac{1}{6}[f(0)+4f(\frac{1}{2})+f(1)]$

$=\frac{1}{6}[1+4e^{-\frac{1}{2}}+e^{-1}]$

5、求 3 个不同求积节点 x_0, x_1, x_2 使公式：$\int_{-1}^1 f(x)dx=C[f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)]$ 具有 3 次代数精度。辛普生公式具有3次代数精度.

$\int_{-1}^1 f(x)dx=\frac{b-a}{6}[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)]$

$=\frac{1}{3}[f(-1)+4f(0)+f(1)]$

6、设矩阵
$$A=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 8 & -3 & 2 \\ 4 & 11 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \end{array}$$
，$b=(1,2,3)^T$，则 $AX=b$ 的高斯-赛德尔迭代方法的收敛性，并写出迭代后的方程格式

解：其方程组为
$$\begin{cases} x_1^{k+1}=\frac{1}{8}(3x_2^k-2x_3^k+1) \\ x_2^{k+1}=\frac{1}{11}(-4x_1^{k+1}+x_3^k+2) \\ x_3^{k+1}=\frac{1}{4}(-2x_1^{k+1}-x_2^{k+1}+3) \end{cases}$$

7、用改进的 Euler 法解下列初值问题，

$f(x,y)=\frac{2}{3}xy^2$

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2}{3}xy^2 \\ y(0)=1\end{cases}$$ $(x\in[0,0.7]$，写出迭代公式，取步长 h=0.1，计算 y_1, y_2。

$$\begin{cases}\hat{y}_{i+1}=y_i+hf(x_i,y_i) \\ y_{i+1}=y_i+\frac{h}{2}\left[f(x_i,y_i)+f(x_{i+1},\hat{y}_{i+1})\right]\end{cases}$$

$\hat{y}_1=y_0+hf(x_0,y_0)=1+0.1\times 0=1$

$y_1=y_0+\frac{h}{2}[f(0.1,1)]=1+\frac{0.1}{2}\times\frac{0.2}{3}=\frac{0.02}{6}+1=\frac{6.02}{6}\approx 1.0033$

$\hat{y}_2=y_1+hf(x_1,y_1)=1.0033+0.1f(0.1,1.0033)=$

三、证明题（共 2 小题，每题 6 分）：

1、$\int_a^b f(x)=(b-a)f(b)-\frac{f'(\varepsilon)}{2}(b-a)^2 \quad \varepsilon\in(a,b)$。

泰勒公式

$f(x)|_b=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots\frac{f^{(n)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^n$

$=f(b)+f'(b)(x-b)\cdots$

$\int_a^b f(x)=\int_a^b f(b)dx+\int_a^b f'(\xi)(x-b)dx$

$=f(b)(b-a)-\frac{1}{2}f'(\xi)(b-a)^2 \quad \xi\in(a,b)$.

2、证明 A,B 均为 n 阶矩阵，则 $cond(AB)\le cond(A)cond(B)$

$cond(AB)=\|(AB)^{-1}\|\,\|AB\|$

$=\|B^{-1}A^{-1}\|\,\|AB\|$

$\le\|B^{-1}\|\|A^{-1}\|\cdot\|A\|\|B\|$

$=cond(A)\cdot cond(B)$.

年级：　专业：　班级：　姓名：　学号：

装　订　线　密　封　线

重庆邮电大学 2006/07 学年第 1 学期

数值计算方法 考试题 （A 卷）

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
分数											
评卷人											

一、填空题（每小题 5 分,共 40 分）

1、四舍五入得到的近似值 8×10^6 有 7 位有效数字，它的绝对误差限为 0.5×10^6.

2、解线性代数方程组的迭代法收敛的充要条件是迭代矩阵的谱半径 小于1 .

3、若 $f(x)=x^6+x^3+1$，则差商 $f[2^0,2^1,\cdots,2^8]=$ 0 .

4、设 $A=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 5 & -6\end{bmatrix}$，则 $cond(A)_\infty=$ 11 .

$110/14 = \frac{55}{7}$

5、取 4 位有效数字，用梯形公式计算积分 $\int_{0.5}^{1}\sqrt{x}dx$ 的近似值为 $\frac{0.5(\sqrt{0.5}+1)}{2}$；梯形公式的代数精度 $m=$ 1 .

6、乘幂法可计算矩阵按模 最大 的特征值.

三、计算题（42 分）

1、已知 $\ln10\approx2.3026$，$\ln11\approx2.3979$，试利用拉格朗日线性插值求 $\ln10.5$ 的近似值，并估计误差.

取 $x_0=10$. $x_1=11$

$h(x)=2.3026+\frac{2.3978-2.3026}{}(x-10)$

2、给定数据如下，求一次最小二乘拟合多项式.

令设 $P_1(x)=a_0+a_1x$.

将数据代入得法方程组

$3a_0+a_1\sum_{i=1}^{3}x_i=\sum_{i=1}^{3}y_i$

$a_0\sum_{i=1}^{3}x_i+a_1\sum_{i=1}^{3}x_i^2=\sum_{i=1}^{3}x_iy_i$

x	1	2	3
$f(x)$	5.0	5.3	5.6

3、写出用牛顿法求方程 $f(x)=x^3-x^2-1=0$ 根的迭代公式。

$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}=x_k-\frac{x_k^3-x_k^2-1}{3x_k^2-2x_k}=\frac{2x_k^3-x_k^2+1}{3x_k^2-2x_k}$

4、对初值问题 $\begin{cases} y'=1+xy, & x\in[0,0.5] \\ y(0)=1 \end{cases}$，写出改进欧拉法公式，并求 $y(0.1)$ 的近似值. $(h=0.1)$

欧拉 $y_{i+1}=y_i+hf(x_i,y_i)$

~~$y_{i+1}=y_i+hy'=y_i+0.1+0.1x_iy_i$~~

改进欧拉 $y_{i+1}=y_i+\frac{h}{2}\left(f(x_i,y_i)+f(x_{i+1},y_{i+1})\right)$

$y(0.1)=y(0)+\frac{0.1}{2}\left[(1+0\times1)+1+0.1\times1\right]=1.105$

5、写出解线性方程组 $\begin{cases} x_1-2x_2+2x_3=5 \\ -x_1+3x_2=-1 \\ 2x_1+7x_3=2 \end{cases}$ 的高斯-赛德尔迭代公式.

$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=5+2x_2^{(k)}-2x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)}=\frac{1}{3}\left(x_1^{(k+1)}-1-3x_2^{(k)}\right) \\ x_3^{(k+1)}=\frac{1}{7}\left(2-2x_1^{(k+1)}\right) \end{cases}$

雅可比迭代

$\begin{cases} x_1^{(k)}=5+2x_2^{(k)}-2x_3^{(k)} \\ x_2^{(k)}=\frac{1}{3}\left(-1+x_1^{(k)}\right) \\ x_3=\frac{1}{7}\left(2-2x_1^{(k)}\right) \end{cases}$

6、作矩阵 A 的三角分解法（LU 分解） $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

克劳特 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

四、简答题（18 分）

1．什么是微分方程数值解？构造微分方程数值解的基本方法有哪些？

差商、数值积分、泰勒公式

2．谈谈你学习数值计算方法的体会。

重庆邮电学院 2002/2003 学年第一学期

计算机科学与技术专业 410010 班

《数值计算方法》考试题（A 卷）

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总 分
分 数										
评阅人										

一、 单选选择题（每题 3 分,共 18 分）

1、非奇异矩阵 A 的条件数 Cond(A)满足（ ）

（A）>1 (B) ≥ 1 （C）≤ 1 （D）<1

2、计算 $a=(\sqrt{2}-1)^6$，取 $\sqrt{2}\approx 1.4$，采用下列等式计算结果最好的是（ ）

（A）$\dfrac{1}{(\sqrt{2}+1)^6}$ （B）$99-70\sqrt{2}$ （C）$\dfrac{1}{(3+2\sqrt{2})^3}$ （D）$(3-2\sqrt{2})^3$

3、对任意初始向量 $X^{(0)}$ 及右端向量 f，一般迭代过程 $X^{(k+1)}=BX^{(k)}+f$ 收敛于方程组的精确解 X^* 的充要条件是（ ）

（A）$\|B\|_1<1$ （B）$\|B\|_\infty<1$ （C）$\rho(B)<1$ （D）$\|B\|_2<1$

4、求解常微分方程初值问题的中点公式

$$y_{k+1}=y_k+hf(x_k+\frac{1}{2}h,y_k+\frac{1}{2}hf(x_k,y_k))$$

的局部截断误差为（ ）

（A） O（h） (B) $O(h^2)$ （C） O（h^3） (D) $O(h^4)$

5、以下判断正确的是（ ）

（A） 数值积分的梯形公式的代数精度为 1;

(B) 解常微分方程初值问题欧拉（Euler）方法的局部截断误差为O(h)；

(C) 若A为n阶可逆矩阵，则必存在单位下三角阵L和上三角阵U，使A=LU；

(D) 区间[a，b]上的三次样调插值函数S（x）在[a，b]上具有直到三阶连续导数。

6、以下判断错误的是（　）

(A) 在使用松弛法（SOR）解线性代数方程组 $AX=b$ 时，若松弛因子ω满足：|ω-1|≥1，则迭代法一定发散；

(B) 若A为n阶正交矩阵，则A的条件数 $Cond(A)_2=1$；

(C) 若A为n阶方阵，对足标：$i=1,2,\ldots n$ 均有 $|a_{ii}|\geq\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}|$，则解线性代数方程组的高斯—赛德尔（G－S）迭代法一定收敛；

(D) 解非线性方程 $f(x)=0$ 的牛顿（Newton）迭代法在单根 x^* 附近是平方收敛的。

二、　填空题（每题3分,共15分）

1、设 $f(x)=4x^8+3x^4+2x^2+1$，则差商 $f[2^0,2^1,\ldots,2^8]=$ ________

2、已知方程 $ax^2+bx+c=0$ 存在两个实根，但它们的绝对值相差悬殊，若用计算机求解这两个根，相应的公式应为：________________

3、求方程 $x=4-2^x$ 在 x_0=1.5附近的根 x^*，若用迭代公式：$x_{k+1}=\ln(4-x_k)/\ln 2$（k=0，1，2，…），则其产生的序列 $\{x_k\}$ 是否有 $\lim_{k\to\infty}x_k=x^*$？______，其理由是____

____

数值计算方法期末试题一

一、 填空题（每空 1 分，共 17 分）

1、如果用二分法求方程 $x^3+x-4=0$ 在区间 $[1,2]$ 内的根精确到三位小数，需对分（　　　）次。

2、迭代格式 $x_{k+1}=x_k+\alpha(x_k^2-2)$ 局部收敛的充分条件是 α 取值在（　　　　　）。

3、已知 $S(x)=\begin{cases} x^3 & 0\le x\le 1 \\ \frac{1}{2}(x-1)^3+a(x-1)^2+b(x-1)+c & 1\le x\le 3 \end{cases}$ 是三次样条函数，则 a=(　　　　)，b=（　　　　　），c=（　　　　　）。

4、$l_0(x),l_1(x),\cdots,l_n(x)$ 是以整数点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 为节点的 Lagrange 插值基函数，则 $\sum_{k=0}^{n} l_k(x)=$（　），$\sum_{k=0}^{n} x_k l_j(x_k)=$（　　），当 $n\ge 2$ 时 $\sum_{k=0}^{n}(x_k^4+x_k^2+3)l_k(x)=$（　　　　　）。

5、设 $f(x)=6x^7+2x^4+3x^2+1$ 和节点 $x_k=k/2, k=0,1,2,\cdots,$ 则 $f[x_0,x_1,\cdots,x_n]=$_ 和 $\Delta^7 f_0=$__________。

6、5 个节点的牛顿-柯特斯求积公式的代数精度为________，5 个节点的求积公式最高代数精度为__________。

7、$\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ 是区间 $[0,1]$ 上权函数 $\rho(x)=x$ 的最高项系数为 1 的正交多项式族，其中 $\varphi_0(x)=1$，则 $\int_0^1 x\varphi_4(x)dx=$____________。

8、给定方程组 $\begin{cases} x_1-ax_2=b_1 \\ -ax_1+x_2=b_2 \end{cases}$，$a$ 为实数，当 a 满足____________，且 $0<\omega<2$ 时，SOR 迭代法收敛。

9、解初值问题 $\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$ 的改进欧拉法 $\begin{cases} y_{n+1}^{[0]}=y_n+hf(x_n,y_n) \\ y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1}^{[0]})] \end{cases}$ 是_________阶方法。

10、设 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & a \\ a & a & 1 \end{bmatrix}$，当 $a\in$（　　　　　　）时，必有分解式 $A=LL^T$，其中 L 为下三角阵，当其对角线元素 $l_{ii}(i=1,2,3)$ 满足（　　　　　　）条件时，这种分解是唯一的。

二、选择题（每题 2 分）

1、解方程组 $Ax=b$ 的简单迭代格式 $x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+g$ 收敛的充要条件是（　　　　）。

（1）$\rho(A)<1$，　(2) $\rho(B)<1$，　(3) $\rho(A)>1$，　(4) $\rho(B)>1$

2、在牛顿-柯特斯求积公式：$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\sum_{i=0}^{n} C_i^{(n)} f(x_i)$ 中，当系数 $C_i^{(n)}$ 是负值时，公式的稳定性不能保证，所以实际应用中，当（　　　）时的牛顿-柯特斯求积公式不使用。

（1）$n \ge 8$，　（2）$n \ge 7$，　（3）$n \ge 10$，　（4）$n \ge 6$，

3、有下列数表

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5
f(x)	-2	-1.75	-1	0.25	2	4.25

所确定的插值多项式的次数是（　　　　）。

（1）二次；　（2）三次；　（3）四次；　（4）五次

4、若用二阶中点公式 $y_{n+1} = y_n + hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{4} f(x_n, y_n))$ 求解初值问题 $y' = -2y, y(0) = 1$，试问为保证该公式绝对稳定，步长 h 的取值范围为（　　　　）。

(1) $0 < h \le 2$，　(2) $0 \le h \le 2$，　(3) $0 < h < 2$，　(4) $0 \le h < 2$

三、计算题

1、（8分）用最小二乘法求形如 $y = a + bx^2$ 的经验公式拟合以下数据：

x_i	19	25	30	38
y_i	19.0	32.3	49.0	73.3

2、（15分）用 $n=8$ 的复化梯形公式（或复化 Simpson 公式）计算 $\int_0^1 e^{-x} dx$ 时，

(1) (1)　试用余项估计其误差。

（2）用 $n=8$ 的复化梯形公式（或复化 Simpson 公式）计算出该积分的近似值。

四、证明题

1、（15 分）方程$x^3-x-1=0$在$x=1.5$附近有根，把方程写成三种不同的等价形式（1）$x=\sqrt[3]{x+1}$对应迭代格式$x_{n+1}=\sqrt[3]{x_n+1}$；(2) $x=\sqrt{1+\frac{1}{x}}$对应迭代格式$x_{n+1}=\sqrt{1+\frac{1}{x_n}}$；(3) $x=x^3-1$对应迭代格式$x_{n+1}=x_n^3-1$。判断迭代格式在$x_0=1.5$的收敛性，选一种收敛格式计算$x=1.5$附近的根，精确到小数点后第三位。选一种迭代格式建立 Steffensen 迭代法，并进行计算与前一种结果比较，说明是否有加速效果。

2、（8 分）已知方程组$AX=f$，其中

$$A=\begin{bmatrix}4 & 3 & \\ 3 & 4 & -1 \\ & -1 & 4\end{bmatrix},\quad f=\begin{bmatrix}24 \\ 30 \\ -24\end{bmatrix}$$

（1）　（1）　列出 Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代法的分量形式。

（2）　（2）　求出 Jacobi 迭代矩阵的谱半径，写出 SOR 迭代法。

五、1、（15 分）取步长$h=0.1$，求解初值问题$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=-y+1 \\ y(0)=1\end{cases}$用改进的欧拉法求$y(0.1)$的值；用经典的四阶龙格—库塔法求$y(0.1)$的值。

2、（8 分）求一次数不高于 4 次的多项式 $p(x)$ 使它满足

$p(x_0)=f(x_0)$, $p(x_1)=f(x_1)$, $p'(x_0)=f'(x_0)$, $p'(x_1)=f'(x_1)$, $p(x_2)=f(x_2)$

六、（下列 2 题任选一题，4 分）

1、1、 数值积分公式形如

$$\int_0^1 xf(x)dx \approx S(x)=Af(0)+Bf(1)+Cf'(0)+Df'(1)$$

（1） （1） 试确定参数 A,B,C,D 使公式代数精度尽量高；（2）设 $f(x)\in C^4[0,1]$，推导余项公式 $R(x)=\int_0^1 xf(x)dx-S(x)$，并估计误差。

2、 用二步法

$$y_{n+1}=\alpha_0 y_n+\alpha_1 y_{n-1}+h[\theta f(x_n,y_n)+(1-\theta)f(x_{n-1},y_{n-1})]$$

求解常微分方程的初值问题 $\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$ 时，如何选择参数 α_0,α_1,θ 使方法阶数尽可能高，并求局部截断误差主项，此时该方法是几阶的。

数值计算方法试题二

一、判断题：（共 16 分，每小题 2 分）

1、若 A 是 $n\times n$ 阶非奇异阵，则必存在单位下三角阵 L 和上三角阵 U，使 $A=LU$ 唯一成立。　（　　　　）

2、当 $n\ge 8$ 时，Newton－cotes 型求积公式会产生数值不稳定性。（　　　　）

3、形如 $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i)$ 的高斯（Gauss）型求积公式具有最高代数精确度的次数为 $2n+1$。　（　　　　）

4、矩阵 $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$ 的 2－范数 $\|A\|_2=9$。（　　　　）

5、设 $A=\begin{pmatrix}2a & a & 0\\ 0 & a & 0\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix}$，则对任意实数 $a\ne 0$，方程组 $Ax=b$ 都是病态的。（用 $\|\cdot\|_\infty$）
（　　　　）

6、设 $A\in R^{n\times n}$，$Q\in R^{n\times n}$，且有 $Q^TQ=I$（单位阵），则有 $\|A\|_2=\|QA\|_2$。
（　　　　）

7、区间 $[a,b]$ 上关于权函数 $W(x)$ 的直交多项式是存在的，且唯一。（　　　　）

8、对矩阵 A 作如下的 Doolittle 分解：

$$A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\ 4 & 7 & 7\\ -2 & 4 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ -1 & a & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\ 0 & b & 1\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}$$

，则 a,b 的值分别为 $a=2$，$b=2$。
（　　　　）

二、填空题：（共 20 分，每小题 2 分）

1、设 $f(x)=9x^8+3x^4+21x^2+10$，则均差
$f[2^0,2^1,\cdots,2^8]=$__________，$f[3^0,3^1,\cdots,3^9]=$__________。

2、设函数 $f(x)$ 于区间 $[a,b]$ 上有足够阶连续导数，$p\in[a,b]$ 为 $f(x)$ 的一个 m 重零点，Newton 迭代公式 $x_{k+1}=x_k-m\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ 的收敛阶至少是__________阶。

3、区间 $[a,b]$ 上的三次样条插值函数 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有直到__________阶的连续导数。

4、向量 $X=(1,-2)^T$，矩阵 $A=\begin{pmatrix}7 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}$，则
$\|AX\|_1=$__________，$cond(A)_\infty=$__________。

5、为使两点的数值求积公式：$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f(x_0)+f(x_1)$具有最高的代数精确度，则其求积基点应为$x_1 =$__________，$x_2 =$__________。

6、设$A \in R^{n\times n}$，$A^T = A$，则$\rho(A)$（谱半径）__________$\|A\|_2$。（此处填小于、大于、等于）

7、设$A=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$，则$\lim\limits_{k\to\infty} A^k =$__________。

三、简答题：（9分）

1、 方程$x=4-2^x$在区间$[1,2]$内有唯一根x^*，若用迭代公式：$x_{k+1}=\ln(4-x_k)/\ln 2 \quad (k=0,1,2,\cdots)$，则其产生的序列$\{x_k\}$是否收敛于$x^*$？说明理由。

2、 使用高斯消去法解线性代数方程组，一般为什么要用选主元的技术？

3、 设$x=0.001$，试选择较好的算法计算函数值$f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x^2}$。

四、（10分）

已知数值积分公式为：

$\int_0^h f(x)dx \approx \frac{h}{2}[f(0)+f(h)]+\lambda h^2[f'(0)-f'(h)]$，试确定积分公式中的参数$\lambda$，使其代数精确度尽量高，并指出其代数精确度的次数。

五、证明题

（8 分）已知求 $\sqrt{a}(a>0)$ 的迭代公式为：

$$x_{k+1}=\frac{1}{2}(x_k+\frac{a}{x_k}) \quad x_0>0 \quad k=0,1,2\cdots$$

证明：对一切 $k=1,2,\cdots,\ x_k\geq\sqrt{a}$，且序列 $\{x_k\}$ 是单调递减的，从而迭代过程收敛。

六、（9 分）数值求积公式 $\int_0^3 f(x)dx\approx\frac{3}{2}[f(1)+f(2)]$ 是否为插值型求积公式？为什么？其代数精度是多少？

七、（9 分）设线性代数方程组 $AX=b$ 中系数矩阵 A 非奇异，X 为精确解，$b\neq0$，若向量 $\tilde{X}$ 是 $AX=b$ 的一个近似解，残向量 $r=b-A\tilde{X}$，证明估计式：

$$\frac{\left\|X-\tilde{X}\right\|}{\|X\|}\leq cond(A)\frac{\|r\|}{\|b\|}$$

（假定所用矩阵范数与向量范数相容）。

八、(10 分)设函数$f(x)$在区间$[0,3]$上具有四阶连续导数，试求满足下列插值条件的一个次数不超过 3 的插值多项式$H(x)$，并导出其余项。

i	0	1	2
x_i	0	1	2
$f(x_i)$	-1	1	3
$f'(x_i)$	3		

九、(9 分)设$\{\varphi_n(x)\}$是区间$[a,b]$上关于权函数$w(x)$的直交多项式序列，$x_i(i=1,2,\cdots,n,n+1)$为$\{\varphi_{n+1}(x)\}$的零点，$l_i(x)(i=1,2,\cdots,n,n+1)$是以$\{x_i\}$为基点的拉格朗日(Lagrange)插值基函数，$\int_a^b f(x)w(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n+1} A_k f(x_k)$为高斯型求积公式，证明：

（1） （1）当$0 \le k,j \le n, k \ne j$时，$\sum_{i=1}^{n+1} A_i\varphi_k(x_i)\varphi_j(x_i)=0$

（2） $\int_a^b l_k(x)l_j(x)w(x)dx=0 \quad (k \ne j)$

（3） $\sum_{k=1}^{n+1}\int_a^b l_k^2(x)w(x)dx=\int_a^b w(x)dx$

十、(选做题 8 分)

若$f(x)=\omega_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$，$x_i(i=0,1,\cdots,n)$互异，求$f[x_0,x_1,\cdots,x_p]$的值，其中$p \le n+1$。

数值计算方法试题一答案

一、 一、填空题（每空 1 分，共 17 分）

1、(10)　2、($(-\frac{\sqrt{2}}{2},0)\ (0,\frac{\sqrt{2}}{2})$)　3、a=(3)，b=(3)，c=(1)

4、(1)、(x_j)、(x^4+x^2+3)　5、<u>6</u>、$\frac{7\times 6}{2^7}=945/4=236.25$　6、<u>9</u>

7、<u>0</u>　8、$|a|<1$ 9、<u>2</u>　10、($-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}$)、($l_{ii}>0$)

二、 二、选择题（每题 2 分）

1、((2))　2、((1))　3、((1))　4、((3))

三、1、(8 分) 解：$\Phi=span\{1,x^2\}$

$$A^T=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 19^2 & 25^2 & 31^2 & 38^2\end{bmatrix} \qquad y^T=[19.0 \quad 32.3 \quad 49.0 \quad 73.3]$$

解方程组　$A^TAC=A^Ty$

其中
$$A^TA=\begin{bmatrix}4 & 3391\\ 3391 & 3529603\end{bmatrix} \qquad A^Ty=\begin{bmatrix}173.6\\ 179980.7\end{bmatrix}$$

解得：
$$C=\begin{bmatrix}0.9255577\\ 0.0501025\end{bmatrix}$$
所以 $a=0.9255577$，　$b=0.0501025$

2、(15 分) 解：
$$|R_T[f]|=\left|-\frac{b-a}{12}h^2f''(\eta)\right|\le\frac{1}{12}\times\frac{1}{8^2}\times e^0=\frac{1}{768}=0.001302$$

$$T(8)=\frac{h}{2}[f(a)+2\sum_{k=1}^{7}f(x_k)+f(b)]$$
$$=\frac{1}{16}[1+2\times(0.8824969+0.7788008+0.60653066$$
$$+0.5352614+0.47236655+0.41686207)+0.36787947]$$
$$=0.6329434$$

四、1、(15 分) 解：(1) $\varphi'(x)=\frac{1}{3}(x+1)^{-\frac{2}{3}}$，$|\varphi'(1.5)|=0.18<1$，故收敛；

(2) $\varphi'(x)=-\dfrac{1}{2x^2\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$，$|\varphi'(1.5)|=0.17<1$，故收敛；

(3) $\varphi'(x)=3x^2$，$|\varphi'(1.5)|=3\times1.5^2>1$，故发散。

选择 (1)：$x_0=1.5$，$x_1=1.3572$，$x_2=1.3309$，$x_3=1.3259$，$x_4=1.3249$，
$x_5=1.32476$，$x_6=1.32472$

Steffensen 迭代：
$$x_{k+1}=x_k-\frac{(\varphi(x_k)-x_k)^2}{\varphi(\varphi(x_k))-2\varphi(x_k)+x_k}$$

$$=x_k-\frac{(\sqrt[3]{x_k+1}-x_k)^2}{\sqrt[3]{\sqrt[3]{x_k+1}+1}-2\sqrt[3]{x_k+1}+1}$$

计算结果：$x_0=1.5$，$x_1=1.324899$，$x_2=1.324718$ 有加速效果。

2、（8 分）解：Jacobi 迭代法：
$$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=\frac{1}{4}(24-3x_2^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)}=\frac{1}{4}(30-3x_1^{(k)}+x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)}=\frac{1}{4}(-24+x_2^{(k)}) \\ k=0,1,2,3,\cdots \end{cases}$$

Gauss-Seidel 迭代法：
$$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=\frac{1}{4}(24-3x_2^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)}=\frac{1}{4}(30-3x_1^{(k+1)}+x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)}=\frac{1}{4}(-24+x_2^{(k+1)}) \\ k=0,1,2,3,\cdots \end{cases}$$

$$B_J=-D^{-1}(L+U)=\begin{bmatrix} 0 & -3/4 & 0 \\ -3/4 & 0 & 3/4 \\ 0 & 3/4 & 0 \end{bmatrix},\quad \rho(B_J)=\sqrt{5/8}(\text{或}\frac{\sqrt{10}}{4})=0.790569$$

SOR 迭代法：
$$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=(1-\omega)x_1^{(k)}+\frac{\omega}{4}(24-3x_2^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)}=(1-\omega)x_2^{(k)}+\frac{\omega}{4}(30-3x_1^{(k+1)}+x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)}=(1-\omega)x_3^{(k)}+\frac{\omega}{4}(-24+x_2^{(k+1)}) \\ k=0,1,2,3,\cdots \end{cases}$$

五、1、（15 分）解：改进的欧拉法：
$$\begin{cases} y_{n+1}^{(0)}=y_n+hf(x_n,y_n)=0.9y_n+0.1 \\ y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1}^{(0)})]=0.905y_n+0.095 \end{cases}$$

所以 $y(0.1)=y_1=1$；

经典的四阶龙格—库塔法：
$$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+\frac{h}{6}[k_1+2k_2+2k_3+k_4] \\ k_1=f(x_n,y_n) \\ k_2=f(x_n+\frac{h}{2},y_n+\frac{h}{2}k_1) \\ k_3=f(x_n+\frac{h}{2},y_n+\frac{h}{2}k_2) \\ k_4=f(x_n+h,y_n+hk_3) \end{cases}$$
$k_1=k_2=k_3=k_4=0$，所以 $y(0.1)=y_1=1$。

2、（8 分）解：设 $H_3(x)$ 为满足条件 $\begin{cases} H_3(x_i)=f(x_i) \\ H_3'(x_i)=f'(x_i) \quad i=0,1 \end{cases}$ 的 Hermite 插值多项式，

则 $p(x)=H_3(x)+k(x-x_0)^2(x-x_1)^2$ 代入条件 $p(x_2)=f(x_2)$ 得：

$$k=\frac{f(x_2)-H_3(x_2)}{(x_2-x_0)^2(x_2-x_1)^2}$$

六、（下列 2 题任选一题，4 分）

1、解：将 $f(x)=1,x,x^2,x^3$ 分布代入公式得：$A=\frac{3}{20},B=\frac{7}{20},B=\frac{1}{30},D=-\frac{1}{20}$

构造 Hermite 插值多项式 $H_3(x)$ 满足 $\begin{cases} H_3(x_i)=f(x_i) \\ H_3'(x_i)=f'(x_i) \quad i=0,1 \end{cases}$ 其中 $x_0=0,x_1=1$

则有：$\int_0^1 xH_3(x)dx=S(x)$，$f(x)-H_3(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x^2(x-1)^2$

$$R(x)=\int_0^1 x[f(x)-S(x)]dx=\int_0^1\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x^3(x-1)^2dx$$

$$=\frac{f^{(4)}(\eta)}{4!}\int_0^1 x^3(x-1)^2dx=\frac{f^{(4)}(\eta)}{4\times60}=\frac{f^{(4)}(\eta)}{1440}$$

2、解：

$$R_{n,h}=y(x_{n+1})-y_{n+1}=y(x_n)+hy'(x_n)+\frac{h^2}{2!}y''(x_n)+\frac{h^3}{3!}y'''(x_n)+\cdots$$

$$-\alpha_0y(x_n)-\alpha_1(y(x_n)-hy'(x_n)+\frac{h^2}{2!}y''(x_n)-\frac{h^3}{3!}y'''(x_n)+\cdots)$$

$$-h[\theta y'(x_n)+(1-\theta)(y'(x_n)-hy''(x_n)+\frac{h^2}{2!}y'''(x_n)-\frac{h^3}{3!}y^{(4)}(x_n)+\cdots]$$

$$=(1-\alpha_0-\alpha_1)y(x_n)+h(1-1+\alpha_1)y'(x_n)$$

$$+h^2(\frac{1}{2}-\frac{\alpha_1}{2}+1-\theta)y''(x_n)+h^3(\frac{1}{6}+\frac{\alpha_1}{6}-\frac{1-\theta}{2})y'''(x_n)+O(h^4)$$

所以 $\begin{cases} 1-\alpha_0-\alpha_1=0 \\ \alpha_1=0 \\ \frac{1}{2}-\frac{\alpha_1}{2}+1-\theta=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_0=1 \\ \alpha_1=0 \\ \theta=\frac{3}{2} \end{cases}$

主项：$\frac{5}{12}h^3y'''(x_n)$ 该方法是二阶的。

数值计算方法试题二答案

一、　一、判断题：（共 10 分，每小题 2 分）

1、（ X ） 2、（ √ ） 3、（ X ） 4、（ √ ） 5、（ X ）
6、（ √ ）7、（ X ） 8、（ X ）

二、　二、填空题：（共 10 分，每小题 2 分）

1、$9\times 8!$、<u>0</u>　2、<u>　二　</u>3、<u>　二　</u>4、<u>16 、90</u> 5、$-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}$ 6、<u>　=　</u>
7、<u>0</u>

三、　三、简答题：（15 分）

1、1、　解：迭代函数为 $\varphi(x)=\ln(4-x)/\ln 2$

$$\left|\varphi'(x)\right| = \left|\frac{-1}{4-x}\times\frac{1}{\ln 2}\right| < \frac{1}{4-2}\times\frac{1}{\ln 2} < 1$$

2、2、　答：Gauss 消去法能进行到底的条件是各步消元的主元素 $a_{kk}^{(k)}$ 全不为 0，如果在消元过程中发现某个主元素为 0，即使 $\det(A)\neq 0$，则消元过程将无法进行；其次，即使主元素不为 0，但若主元素 $a_{kk}^{(k)}$ 的绝对值很小，用它作除数，将使该步消元的乘数绝对值很大，势必造成舍入误差的严重扩散，以致于方程组解的精确程度受到严重影响，采用选主元的技术，可避免主元素 $a_{kk}^{(k)}=0$ 或 $\left|a_{kk}^{(k)}\right|$ 很小的情况发生，从而不会使计算中断或因误差扩大太大而使计算不稳定。

3、3、　解：

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n!)}+\cdots$$

$$1-\cos x = \frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{(2n!)}+\cdots$$

$$f(x) = \frac{1}{2!}-\frac{x^2}{4!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n!)}+\cdots$$

四、　四、解：$f(x)=1$ 显然精确成立；

$f(x)=x$ 时，$\int_0^h x\,dx = \frac{h^2}{2} = \frac{h}{2}[0+h]+\lambda h^2[1-1]$；

$f(x)=x^2$ 时，$\int_0^h x^2 dx = \frac{h^3}{3} = \frac{h}{2}[0+h^2]+\lambda h^2[0-2h] = \frac{h^3}{2}-2\lambda h \Rightarrow \lambda = \frac{1}{12}$；

$f(x)=x^3$ 时，$\int_0^h x^3 dx = \frac{h^4}{4} = \frac{h}{2}[0+h^3]+\frac{1}{12}h^2[0-3h^2]$；

$f(x)=x^4$ 时，$\int_0^h x^4 dx = \frac{h^5}{5} \neq \frac{h}{2}[0+h^4]+\frac{1}{12}h^2[0-4h^3] = \frac{h^5}{6}$；

所以，其代数精确度为 3。

五、　五、证明：$x_{k+1} = \frac{1}{2}(x_k+\frac{a}{x_k}) \geq \frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{x_k\times\frac{a}{x_k}} = \sqrt{a}\quad k=0,1,2\cdots$

故对一切 $k=1,2,\cdots,\ x_k \ge \sqrt{a}$。

又 $\frac{x_{k+1}}{x_k}=\frac{1}{2}(1+\frac{a}{x_k^2})\le\frac{1}{2}(1+1)=1$ 所以 $x_{k+1}\le x_k$，即序列 $\{x_k\}$ 是单调递减有下界，

从而迭代过程收敛。

六、 六、解：是。因为 $f(x)$ 在基点 1、2 处的插值多项式为

$$p(x)=\frac{x-2}{1-2}\times f(1)+\frac{x-1}{2-1}\times f(2)$$

$\int_0^3 p(x)dx=\frac{3}{2}[f(1)+f(2)]$。其代数精度为 1。

七、 七、证明：由题意知：$AX=b, A\tilde{X}=b-r$

$$A(X-\tilde{X})=r\Rightarrow X-\tilde{X}=A^{-1}r\Rightarrow\left\|X-\tilde{X}\right\|\le\left\|A^{-1}\right\|\|r\|$$

又 $AX=b\Rightarrow\|b\|=\|AX\|\le\|A\|\|X\|\Rightarrow\frac{1}{\|X\|}\le\frac{\|A\|}{\|b\|}$

所以 $\frac{\left\|X-\tilde{X}\right\|}{\|X\|}\le\|A\|\left\|A^{-1}\right\|\|r\|\Big/\|b\|=cond(A)\frac{\|A\|}{\|b\|}$。

八、解：设 $H(x)=N_2(x)+ax(x-1)(x-2)$

$$N_2(x)=f(0)+f[0,1](x-0)+f[0,1,2](x-0)(x-1)=1-2x-\frac{1}{2}(x-0)(x-1)$$

所以 $H(x)=1-2x-\frac{1}{2}x(x-1)+ax(x-1)(x-2)$

由 $H'(0)=3$ 得：$a=\frac{1}{4}$

所以 $H(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{5}{4}x^2+3x-1$

令 $R(x)=f(x)-H(x)$，作辅助函数 $g(t)=f(t)-H(t)-k(x)t^2(t-1)(t-2)$

则 $g(t)$ 在 $[0,3]$ 上也具有 4 阶连续导数且至少有 4 个零点：$t=x,0,1,2$

反复利用罗尔定理可得：$k(x)=f^{(4)}(\xi)\Big/4!$，$(\because g^{(4)}(\xi)=0)$

所以 $R(x)=f(x)-H(x)=k(x)x^2(x-1)(x-2)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x^2(x-1)(x-2)$

九、 九、证明：形如 $\int_a^b f(x)w(x)dx\approx\sum_{k=1}^{n+1}A_kf(x_k)$ 的高斯（Gauss）型求积公式具有

最高代数精度 2n+1 次，它对 $f(x)$ 取所有次数不超过 2n+1 次的多项式均精确成立

1） $\sum_{i=1}^{n+1} A_i\varphi_k(x_i)\varphi_j(x_i) = \int_a^b \varphi_k(x)\varphi_j(x)w(x)dx = 0$

2）因为 $l_i(x)$ 是 n 次多项式，且有 $l_i(x_j) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$

所以 $\int_a^b l_k(x)l_j(x)w(x)dx = \sum_{i=1}^{n+1} A_i l_k(x_i)l_j(x_i) = 0$ $(k \neq j)$

3）取 $f(x) = l_i^2(x)$，代入求积公式：因为 $l_i^2(x)$ 是 2n 次多项式，

所以 $\int_a^b l_i(x)w(x)dx = \sum_{j=1}^{n+1} A_j[l_i(x_j)]^2 = A_i$

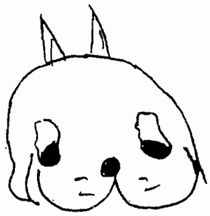
$$\sum_{k=1}^{n+1}\int_a^b l_k^2(x)w(x)dx = \sum_{k=1}^{n+1} A_k = \int_a^b w(x)dx$$

故结论成立。

十、 十、解：

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_p] = \sum_{i=0}^{p} \frac{f(x_i)}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{p}(x_i - x_j)} = 0 \quad p \leq n$$

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_{n+1}] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} = 1$$



数值计算方法复习（一）

第一章　误差

要求：

1、了解误差的概念，来源：模型误差、观测误差、截断误差、舍入误差；

2、掌握绝对误差、相对误差与有效数字；

3、知道数值运算中误差传播的规律及应注意的问题。

例 1：问 3.142，3.141，$22/7$ 分别作为 π 的近似值各具有几位有效数字？

例 2：设计算球体体积允许其相对误差限为 1%，问测量球半径的相对误差限最大为多少？

例 3：1）经过四舍五入得出 $x_1=6.1025$，$x_2=80.115$。试问它们分别具有几位有效数字？

2）求 x_1+x_2 的绝对误差限。

3）若 $x^*=3587.64$ 是 x 的具有六位有效数字的近似值，求 x 的绝对误差限.

第二章　插值法

要求：

1、了解插值问题的提法，差商与差分的概念与求法；

2、掌握 Lagrange 插值多项式与 Newton 插制多项式的求法；

3、了解分段低次插值，样条插值；

4、了解数值微分。

例 1：已知 $\sqrt{100}=10$，$\sqrt{121}=11$，$\sqrt{144}=12$，用抛物线插值求 $\sqrt{115}$ 的近似值，并估计误差。　$\sqrt{115}$

例 2：设 $f(x)=x^4$，试利用拉格朗日插值余项定理写出以 $-1, 0, 1, 2$ 为插值节点的三次插值多项式。

例 3：已知 $f(x)=4x^8+3x^4+2x^2+1$，求 $f[2^0,2^1,\cdots,2^8]$.

例 4：已知 $f(x)=\sin x$ 的数值表如下，试写出三阶（向前）差分表.

X	0.4	0.5	0.6	0.7
sinx	0.38942	0.47943	0.56464	0.64422

例 5：已知 $x=0,2,3,5$ 对应的函数值为 $y=1,3,2,5$，做三次 Newton 插值多项式. 如再增加 $x=6$ 时的函数值为 6，作四次 Newton 插值多项式。

例 6：判断函数 $f(x)=\begin{cases}0,-1\le x<0\\ x^3,0\le x<1\\ x^3+(x-1)^2,1\le x\le 2\end{cases}$ 是否为三次样条函数.

第三章　曲线拟合

要求：了解最小二乘法的提法，掌握最小二乘法

例 1：用最小二乘法建立下表的经验公式

x	1	2	4	6	8	10
Y	1.8	3.7	8.2	12.0	15.8	20.2

第四章 矩阵的特征值与特征向量

要求：了解乘幂法与反幂法，雅可比方法；会求主特征值和相应的特征向量。

例 1：用幂法求矩阵 $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 4 & 5\end{pmatrix}$ 的主特征值和对应的特征向量.

（取 $v_0=(1,1)^T$，精度为 0.1）

第五章 数值积分

要求：

1、掌握构造数值积分公式的基本方法；

2、会求数值积分公式的代数精度

3、了解 Newton-Cotes 公式；复和求积公式，龙贝格算法。

例 1：用梯形公式和辛普森公式计算积分 $\int_0^1 e^{-x}dx$，并估计误差。

例 2：求近似公式 $\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1}{3}[2f(\frac{1}{4})-f(\frac{1}{2})+2f(\frac{3}{4})]$ 的代数精度。

例 3：求三个不同的节点 x_1,x_2,x_3 和常数 c，使求积公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx c[f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)]$$

具有尽可能高的代数精度.

例 4：推导求积公式 $\int_a^b f(x)dx=(b-a)+\frac{1}{2}f'(\eta)(b-a)^2$.

第六章 非线性方程与非线性方程组

要求：

1、了解二分法；简单迭代法；

2、掌握迭代法收敛的充分条件；

3、掌握 Newton 迭代法及局部收敛条件；了解弦割法；

例 1：叙述二分法的优缺点。

例 2：用二分法和迭代法求方程 $f(x)=x^3-x-1=0$ 的根。

例 3：判别下列方程能否用迭代法求解：

（1）$x=(\cos x+\sin x)/4$　　　(2) $x=4-2^x$

例 4：证明用迭代公式 $x_{k+1}=\frac{x_k}{2}+\frac{1}{x_k}$，$k=0,1,2\cdots$ 产生序列，对于 $x_0\ge 1$ 均收敛于 $\sqrt{2}$.

例 5：设 $a>0$，试建立求 $\frac{1}{a}$ 的牛顿迭代公式，要求在迭代公式中不含有除法运算.

第七章 解方程组的数值方法

要求：

1、了解 Gauss 消去法，掌握列主元素消去法

2、直接三角分解法，掌握 Doolittle 分解法，了解追赶法

3、掌握向量与矩阵的范数；了解条件数，病态方程组的性态；

4、掌握 Jacobi 迭代法、Gauss-Seidel 迭代法；
5、掌握迭代法的收敛的充分条件、充要条件与误差估计。

例 1：用 Gauss 消去法、列主元素消去法和矩阵的三角分解法（LU 分解）分别解方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 14 \\ 8 \\ 13 \end{bmatrix}.$$

例 2：（1）设 $\vec{x}=(3\ \ -1\ 5\ 8)^T$，求 $\|\vec{x}\|_1$，$\|\vec{x}\|_2$，$\|\vec{x}\|_\infty$.

（2）已知 $A=\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$，求 $\|A\|_1$，$\|A\|_2$ $\|A\|_\infty$；并求 $cond(A)_\infty$，$cond(A)_2$.

例 3：给定线性方程组 $\begin{cases} 10x_1 + x_3 - 5x_4 = -7 \\ x_1 + 8x_2 - 3x_3 = 11 \\ 3x_1 + 2x_2 - 8x_3 + x_4 = 23 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 7x_4 = 17 \end{cases}$，写出雅可比迭代公式和高斯-赛德尔迭代公式；并考察它们的敛散性。

例 4：设 A 为 n 阶非奇异矩阵，$\|\cdot\|$ 表示矩阵的任何一种算子范数，试证 $\|A^{-1}\| \geq \dfrac{1}{\|A\|}$.

第八章　常微分方程初值问题的数值解法

要求：

1、掌握显、隐式 Euler 方法、梯形公式与改进 Euler 方法；
2、掌握二阶、四阶龙格-库塔方法；
3、会分析局部截断误差与整体截断误差；
4、了解数值方法的收敛性与稳定性，会求绝对稳定区域。

例 1：试分别用欧拉方法 $(h=0.025)$、改进欧拉方法 $(h=0.05)$ 以及经典 R-K 方法 $(h=0.1)$ 求初值问题 $\begin{cases} y' = 1 - y, & x \in [0,0.3] \\ y(0) = 0 \end{cases}$ 的数值解。

例 2：对初值问题 $\begin{cases} y' + y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$，证明用梯形公式求得的近似解为 $y_n = \left(\dfrac{2-h}{2+h}\right)^n$。

例 3：求向后欧拉方法的绝对稳定区域。

注：除有精度要求外，试题中所有迭代方法至多要求迭代 3 次。