5.5元 # 工 科 数 学

试题编号：

重庆邮电大学 2012-2013 学年第 1 学期

工科数学分析基础（上）期末试卷（A）

专业：

班级：

姓名：

学号：

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
分数									
评卷人									

一. 填空题（每小题 2 分，共 10 分）

1. 设 $f(x)=\begin{cases} e^{x}(\sin x+\cos x) & x\ge 0 \\ b\arctan\dfrac{1}{x} & x<0 \end{cases}$ 足连续函数，则 $b=$__________.

2. 设 $f(x),g(x)$ 可导，$y=\arctan f(x)+g(\sqrt{x^2+1})$，则 $\dfrac{dy}{dx}=$____________________.

3. $\displaystyle\int\frac{dx}{(\sin x+\cos x)^2}=$__________________$+C$.

4. 要在某人群中推广新技术，设该人群总人数为常数 N，在任意时刻 t 已掌握新技术的人数为 $x(t)$ (视其为连续可导函数)，已知 $x(t)$ 的变化率与已掌握新技术人数和未掌握新技术人数之积成正比(比例系数为 k)，则 $x(t)$ 所满足的微分方程为________________.

5. 已知当 $x>0$ 时，$f'(\ln x)=x, f(0)=\dfrac{3}{2}$，则 $f(x)$ 在 $[0,4]$ 上的平均值为______________.

二. (9 分) 求极限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\arcsin x}{e^{x^4}-1}$.

三. (9 分) 设 $\tan(x+y)=xy^2+1 \quad (0\le y<\frac{\pi}{2})$, 求 $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0}$.

四. (9 分) 求微分方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\tan\frac{y}{x}$ 的通解.

五. (9 分) 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x^{n-1}-2x+1}{x^{n+1}+x^2+1} \quad (x\ge 0)$, 求 $f(x)$ 的表达式及反常积分 $\int_0^{+\infty}f(x)dx$.

六. (9 分) 在区间$[0,\pi]$上研究方程$\sin^3 x\cos x = a \quad (a>0)$的实根的个数.

七. (9 分) 一圆锥形贮水池(底面在上, 顶点在下), 深 4m, 底面直径 6m, 水池中装满了水, 如果将池中水全部抽出, 求所做的功. (要画出带坐标系的图形)

八. (9 分) 求微分方程 $y'' - \frac{1}{2}y' - \frac{1}{2}y = 2xe^{x}$ 的通解.

九. (11 分) 设曲线 $y=ax^2$ 与 $y=\ln x$ 相切, 求 a 的值以及此二曲线与 x 轴所围成图形 D 的面积 A, 并求 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积 V.

十. (9 分) 设 $g(x)$ 是可导函数, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x}=0$, $f(x)=-2x^2+\int_0^x g(x-t)dt$, 证明 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点, 并判断 $f(0)$ 是极大值还是极小值.

十一. (7 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上可导, 且 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\cos^2 x dx=0$, 证明 $\exists\xi\in(0,\dfrac{\pi}{2})$, 使

$$f'(\xi)=f(\xi)\tan\xi.$$

参考答案

一、1. $-\frac{2}{\pi}$

2. $\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}+g'(\sqrt{x^2+1})\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

3. $-\frac{1}{1+\tan x}$

4. $\frac{dx}{dt}=kx(N-x)$

5. $\frac{e^4+1}{4}$

二． $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\arcsin x}{e^{x^3}-1}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\arcsin x}{x^3}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{3x^2\sqrt{1-x^2}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}(-x^2)}{3x^2\sqrt{1-x^2}}$

$-\quad 1$

三． $\frac{1}{\cos^2(x+y)}(1+\frac{dy}{dx})=y^2+2xy\frac{dy}{dx}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{1-y^2\cos^2(x+y)}{2xy\cos^2(x+y)-1}$ …………………… 在已知方程中令 $x=0$，得 $\tan y=1$，

$y=\frac{\pi}{4}$ ………………………)

$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0}=\frac{1-(\frac{\pi}{4})^2\cos^2\frac{\pi}{4}}{-1}=\frac{1}{32}\pi^2-1$ ……………………

四． 令 $\frac{y}{x}=u$， 即 $y=xu$， $\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$ ………………………… 原方程

化成 $$x\frac{du}{dx}=\tan u$$

$$\frac{\cos u}{\sin u}du=\frac{dx}{x}$$

$$\ln|\sin u|=\ln|x|+C_1$$

$$\sin u=Cx$$

原方程通解为 $$\sin\frac{y}{x}=Cx$$

五．
$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2} & x>1\\ 0 & x=1\\ \frac{-2x+1}{x^2+1} & 0\le x<1\end{cases}$$

$$\int_0^{+\infty}f(x)dx=\int_0^1\frac{-2x+1}{x^2+1}dx+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$$

$$=(-\ln(x^2+1)+\arctan x)\Big|_0^1-\frac{1}{x}\Big|_1^{+\infty}$$

$$=-\ln 2+\frac{\pi}{4}+1$$

六． 设 $f(x)=\sin^3 x\cos x-a$

$$f'(x)=3\sin^2 x\cos^2 x-\sin^4 x$$

令 $f'(x)=0$ 得 $x=\frac{\pi}{3}$ $x=\frac{2\pi}{3}$

$f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{3})$，$(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3})$，$(\frac{2\pi}{3},\pi)$ 内单调

$f(0)=-a<0$ $f(\pi)=-a<0$ $f(\frac{2\pi}{3})=-\frac{3\sqrt{3}}{16}-a<0$

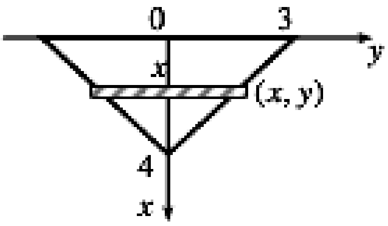
$$f(\frac{\pi}{3})=\frac{3\sqrt{3}}{16}-a$$

当 $a<\frac{3\sqrt{3}}{16}$，$f(\frac{\pi}{3})>0$，方程有两个不同实根.

当 $a=\frac{3\sqrt{3}}{16}$，$f(\frac{\pi}{3})=0$，方程有一个实根.

当 $a>\frac{3\sqrt{3}}{16}$，$f(\frac{\pi}{3})<0$，方程没有实根.

七． $$y=3-\frac{3}{4}x$$



$$dW = x\mu g\pi y^2 dx = \pi\mu g x(3-\frac{3}{4}x)^2 dx$$

$$W = \int_0^4 \pi\mu g x(3-\frac{3}{4}x)^2 dx$$

$$= \int_0^4 \frac{9}{16}\pi\mu g(16x-8x^2+x^3)dx$$

$$= 12\pi\mu g = 12000\pi g \text{ (J)}$$

八.

$$r^2 - \frac{1}{2}r - \frac{1}{2} = 0$$

$$r_1 = 1 \qquad r_2 = -\frac{1}{2}$$

$$\overline{y} = C_1 e^x + C_2 e^{-\frac{x}{2}}$$

设 $y^* = x(Ax+B)e^x$

代入方程得 $A = \frac{2}{3} \qquad B = -\frac{8}{9}$

$$y^* = (\frac{2}{3}x^2 - \frac{8}{9}x)e^x$$

通解 $y = C_1 e^x + C_2 e^{-\frac{x}{2}} + (\frac{2}{3}x^2 - \frac{8}{9}x)e^x$

九. 由二曲线相切得 $ax^2 = \ln x \quad 2ax = \frac{1}{x}$

解得 $a = \frac{1}{2e}$

$$A = \int_0^{\frac{1}{2}} (e^y - \sqrt{2ey})dy$$

$$= (e^y - \sqrt{2e}\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}})\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{e} - 1$$

$$V = \int_0^{\frac{1}{2}} 2\pi y(e^y - \sqrt{2ey})dy$$

$$= 2\pi(ye^y - e^y - \sqrt{2e}\frac{2}{5}e^{\frac{5}{2}})\Big|_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= 2\pi(1 - \frac{3}{5}\sqrt{e})$$

十. 令 $x - t = u \qquad \int_0^x g(x-t)dt = \int_0^x g(u)du$

$$f(x) = -2x^2 + \int_0^x g(u)\,du$$

$$f'(x) = -4x + g(x)$$

由题设及 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x} = 0$，得 $g(0) = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$

$$g'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{g(x) - g(0)}{x} = 0$$

$f'(0) = 0$　故 $x = 0$ 是驻点

$$f''(x) = -4 + g'(x)$$

$$f''(0) = -4 < 0$$

故 $x = 0$ 是极值点，且 $f(0)$ 是极大值

十一.　令　$F(x) = f(x)\cos x$

$$F(\frac{\pi}{2}) = 0$$

由 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\cos^2 x\,dx = 0$，及积分中值定理，$\exists c \in [0, \frac{\pi}{4}]$，使

$$f(c)\cos^2 c \cdot \frac{\pi}{4} = 0$$

因为 $\cos c \cdot \dfrac{\pi}{4} \neq 0$，故有 $F(c) = f(c)\cos c = 0$

根据罗尔中值定理，$\exists \xi \in (c, \frac{\pi}{2}) \subset (0, \frac{\pi}{2})$，使

$$F'(\xi) = 0$$

即　$f'(\xi)\cos\xi + f(\xi)(-\sin\xi) = 0$

$$f'(\xi) = f(\xi)\tan\xi$$

试题编号：

重庆邮电大学2011—2012学年1学期

工科数学分析试卷（期末）（A卷）（闭卷）

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得 分											
评卷人											

1、 求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt[3]{1+\tan x}-1)(\sqrt{1+2x^2}-1)}{\tan x-\sin x}$ （8分）

2、设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}, & x>0\\ 0, & x=0\\ xe^{\frac{1}{x}}, & x<0\end{cases}$，请判断函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 是否连续，可导，并说明理由。（10分）

3、设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\int_0^y e^u du+\int_0^x \cos u du=0$ 确定，求 $\dfrac{dy}{dx}$。（8 分）

4、求积分：

（1） $\int 2(\ln x+\dfrac{1}{x})e^x dx$.（7 分）

（2） $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{8-2x^2}\, dx$（7 分）

（3）$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$（7 分）

5、设 $y=f(x)=\int_0^x e^{-\frac{1}{2}t^2}dt,(-\infty<x<+\infty)$,判定 $y=f(x)$ 奇偶性，单调性，凹凸性，并且求曲线 $y=f(x)$ 的拐点。（12 分）

6、求微分方程 $y'-2y=x+2$ 的通解。（8 分）

7、求过点 $P(1,2,1)$ 与两直线 $L_1:\begin{cases}x+2y-z+1=0\\x-y+z-1=0\end{cases}$ 和 $L_2:\begin{cases}2x+y+z=0\\x-y+z=0\end{cases}$ 平行的平面方程。（通信专业学生选作）（7 分）

7`、设 $f(x)=2x^3-x^2+x-3$，写出函数在 $x_0=1$ 处的三阶 Taylor 多项式。（数理试验班学生选作）（7 分）

8、　求以 $4ax$ 为斜率，并过点 $(0,1)$ 的曲线 $y=y(x)$；然后试确定 a，使该曲线与 x,y 轴及直线 $x=1$ 所围成图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积最小。（10 分）

9、证明：　（16 分）

1)　证明：对任意 $x>1$，有　$e^x > xe$。(本题 6 分)

2) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可微，且 $3\int_{\frac{2}{3}}^{1} f(x)dx = f(0)$，证明：存在 $\xi \in (0,1)$ 使得 $f'(\xi)=0$。(本题 5 分)

3)　证明心形线 $\rho(\theta)=4(1+\cos\theta)$ 所围成的面积为 24π。(本题 5 分)

试题编号：

重庆邮电大学2011—2012学年1学期

工科数学分析试卷（期末参考）（A 卷）

1、 （8 分）解：

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt[3]{1+\tan x}-1)(\sqrt{1+2x^2}-1)}{\tan x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}\tan x\times\frac{1}{2}\times 2x^2}{\tan x(1-\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2x^2}{\frac{1}{2}x^2}=\frac{2}{3}$$

2、设函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1-\cos x}{\sqrt{x}}, & x>0\\ 0, & x=0\\ xe^{\frac{1}{x}}, & x<0\end{cases}$，请判断函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 是否连续，可导，并说明理由。（10 分）

解：因为 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}xe^{\frac{1}{x}}=0$， $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{\sqrt{x}}=0$

所以 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(x)=0$，故函数 $f(x)$ 在处连续。

又因为 $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{xe^{\frac{1}{x}}}{x}=0$，

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{x\sqrt{x}}=0$$

于是有 $f'_-(0)=f'_+(0)=f'(0)=0$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导。

3、设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\int_0^y e^u du+\int_0^x \cos u du=0$ 确定，求 $\frac{dy}{dx}$。（8 分）

解：对方程两端关于 x 求导，得

$$e^y y'+\cos x=0$$

于是 $y'=\frac{dy}{dx}=-\frac{\cos x}{e^y}$。

4、解：

（1） （8 分）

$$\int 2(\ln x+\frac{1}{x})e^x dx = 2\int \ln x de^x + 2\int \frac{1}{x}e^x dx = 2e^x \ln x - 2\int \frac{1}{x}e^x dx + 2\int \frac{1}{x}e^x dx = 2e^x \ln x + C.$$

（2）（7 分）

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{8-2x^2}\,dx = 2\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{8-2x^2}\,dx \underline{\underline{x = 2\sin\theta, \theta \in [0, \frac{\pi}{4}]}} 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\sqrt{2}\cos\theta \times 2\cos\theta\, d\theta = \sqrt{2}\pi + 2\sqrt{2}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} = \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} + \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$$

（3）$(\sqrt{x-1} = t) = \int_0^1 \frac{2tdt}{(t^2+1)t} + \int_1^{+\infty} \frac{2tdt}{(t^2+1)t}$

$$= \int_0^1 \frac{2dt}{(t^2+1)} + \int_1^{+\infty} \frac{2dt}{(t^2+1)} = 2\lim_{\varepsilon\to 0^+} \arctan t\Big|_\varepsilon^1 + 2\lim_{A\to+\infty} \arctan t\Big|_1^A = \pi$$

5、设 $y = f(x) = \int_0^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt, (-\infty < x < +\infty)$,判定 $y = f(x)$ 奇偶性，单调性，凹凸性，并且求曲线 $y = f(x)$ 的拐点。（12 分）

解：因为 $f(-x) = \int_0^{-x} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \underline{\underline{t = -u}} - \int_0^x e^{-\frac{1}{2}u^2} du = -\int_0^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = -f(x)$

所以 $y = f(x)$ 是奇函数。

又因为 $y' = f'(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2} > 0, (-\infty < x < +\infty)$，所以 $y = f(x)$ 在定义域上单调增加。

又 $y'' = f''(x) = -xe^{-\frac{1}{2}x^2} = 0$，得 $x = 0$。

当 $x > 0$ 时，$y'' = f''(x) < 0$，所以曲线 $y = f(x)$ 是凸的，当 $x < 0$ 时，$y'' = f''(x) > 0$，所以曲线 $y = f(x)$ 是凹的。曲线 $y = f(x)$ 的拐点为（0,0）.

6、求微分方程 $y' - 2y = x + 2$ 的通解。（8 分）

解：该方程为一阶非齐次线性微分方程，其通解为

$$y = e^{-\int P(x)dx}(C + \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx) = e^{-\int -2dx}(C + \int (x+2)e^{\int -2dx}dx)$$

$$= e^{2x}(C + \int (x+2)e^{-2x}dx) = e^{2x}(C - \frac{1}{2}(x+\frac{3}{2})e^{-2x})$$

$$= Ce^{2x} - \frac{1}{2}(x+\frac{3}{2})$$

（C 为任意常数）。

7、求过点$P(1,2,1)$与两直线 $L_1:\begin{cases}x+2y-z+1=0\\x-y+z-1=0\end{cases}$ 和$L_2:\begin{cases}2x+y+z=0\\x-y+z=0\end{cases}$ 平行的平面方程。

（通信专业学生选作）（7 分）

解：由题意：

$$L_1:\begin{cases}x+2y-z+1=0\\x-y+z-1=0\end{cases}\Rightarrow s_1=(1,2,-1)\times(1,-1,1)=(3,-2,-3)$$

$$L_2:\begin{cases}2x+y+z=0\\x-y+z=0\end{cases}\Rightarrow s_2=(2,1,1)\times(1,-1,1)=(2,-1,-3)$$

$$n=s_1\times s_2=(3,-2,-3)\times(2,-1,-3)=(3,3,1)$$

平面方程:$3\times(x-1)+3\times(y-2)+1\times(z-1)=0\Leftrightarrow 3x+3y+z=10$

7`、设$f(x)=2x^3-x^2+x-3$，写出函数在$x_0=1$处的三阶 Taylor 多项式。（7 分）

解：因为：$f(1)=-1$，$f'(1)=(6x^2-2x+1)|_{x=1}=5$，$f''(1)=(12x-2)|_{x=1}=10$

$f'''(1)=12|_{x=1}=12$，$f^{(4)}(1)=f^{(5)}(1)=\cdots=f^{(n)}(1)=0(n\geq 4)$，由 Taylor 定理可得函数在

$x_0=1$处的三阶 Taylor 多项式为：

$$\begin{aligned}f(x)&=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2+\frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3\\&=-1+5(x-1)+5(x-1)^2+2(x-1)^3\end{aligned}$$

8、 求以$4ax$为斜率，并过点$(0,1)$的曲线$y=y(x)$；然后试确定a，使该曲线与x,y轴及直线$x=1$所围成图形绕x轴旋转一周而成的旋转体的体积最小。

$$y'=4ax\Rightarrow y=2ax^2+c.\because(0,1)\in C,\therefore c=1\Rightarrow y=2ax^2+1$$

解：$V=\int_0^1\pi y^2dx=\pi\int_0^1(2ax^2+1)^2dx=\pi(\frac{4}{5}a^2+\frac{4}{3}a+1)$

$$V'(a)=\pi(\frac{4}{5}a+\frac{4}{3})=0\Rightarrow a=-\frac{5}{3},V_{\max}=\pi.$$

9、证明： （16 分）

1) 证明：对任意$x>1$，有 $e^x>xe$。(本题 6 分)

证明：令 $f(x)=e^x-xe$，则 $f(1)=0$ 且函数 $f(x)=e^x-xe$ 在 $[1,+\infty)$ 连续可导。

又 $f'(x)=e^x-e$ 对任意 $x>1$，有 $f'(x)=e^x-e>0$，即函数 $f(x)=e^x-xe$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调增加。 于是有

任意 $x>1$，$f(x)=e^x-xe>f(1)=0$，

因此， 对任意 $x>1$，有 $e^x>xe$ 成立。

2) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可微，且 $3\int_{\frac{2}{3}}^{1}f(x)dx=f(0)$，证明：存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f'(\xi)=0$。(本题 5 分)

证明： 因为 函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可微，由积分中值定理有

$$\int_{\frac{2}{3}}^{1}f(x)dx=f(c)(1-\frac{2}{3})=\frac{1}{3}f(c),c\in(\frac{2}{3},1)$$

于是有 $3\int_{\frac{2}{3}}^{1}f(x)dx=3\times\frac{1}{3}f(c)=f(c)=f(0),c\in(\frac{2}{3},1)$

从而，存在一点 $c\in(\frac{2}{3},1)$，使得函数 $f(x)$ 在 $[0,c]$ 上连续，在 $(0,c)$ 内可微，且有 $f(c)=f(0)$，即满足罗尔定理的条件，因此，在 $(0,c)$ 至少存在一点 $\xi\in(0,c)\subset(0,1)$，使得

$$f'(\xi)=0。$$

3) 证明心形线 $\rho(\theta)=4(1+\cos\theta)$ 所围成的面积为 24π。(本题 5 分)

证明：

$$A=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\rho^2(\theta)d\theta=\int_0^{\pi}\rho^2(\theta)d\theta=16\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^2d\theta$$

$$=16\int_0^{\pi}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)d\theta=16\int_0^{\pi}\frac{3}{2}d\theta+16\int_0^{\pi}(2\cos\theta+\frac{1}{2}\cos2\theta)d\theta=24\pi$$

备注：部分题目可以有不同的求解方法，但结论一般都相同，教师可以根据情况按步骤给分。

4.0元 工科数学

重庆邮电大学 2010—2011 学年第一学期

工科数学分析基础（上）期末试题（A）

（时间 120 分钟）

题　号	一	二	三	四	五	总　分
得　分						
评卷人						

年级：　专业：　班级：　姓名：　学号：

装　订　线　　密　封　线

一、选择题（15 分，第小题 3 分）

1、设 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2, x\le 2\\ ax+b, x\succ 2\end{cases}$ 在 $x=2$ 处可导，则（　　）

(A) $a=b=2$　(B) $a=2,b=-2$　(C) $a=-2,b=2$　(D) $a=b=-2$

2、设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^{f(x)}-1}=2$，则 $f'(0)=$（　　）

(A) $\frac{1}{2}$　(B)2　(C) $\frac{1}{3}$　(D) -2

3. 使得反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^\beta}dx$（$\beta$为常数）收敛的充要条件是 β 满足（　　）

(A) $1\le\beta\le 2$　(B) $1<\beta\le 2$　(C) $1<\beta<2$　(D) $1\le\beta<2$

4、若函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处不连续，则必定有(　　)

(A) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ 不存在　(B) $f_x(x_0,y_0)$ 不存在

(C) $f_y(x_0,y_0)$ 不存在　(D) f 在点 (x_0,y_0) 处不可微

5、下列反常积分发散的是　（　　）

(A) $\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sin x}dx$　(B) $\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$　(C) $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$　(D) $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln^2 x}dx$

二、填空题（15 分，第小题 3 分）

1、设 $y=f(x)\ (0<x<\sqrt{2x})$ 是由方程 $\int_0^y e^{t^2}dt+\int_0^x \sin t^2 dt=0$ 确定的隐函数，则 $f(x)$ 的单调增加区间是__________，单调减少区间是__________。

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}(e^{t^2}-1)dt}{x^6}=$ ______________ 。

3. $\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}dx=$ ____________。

4. 已知当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)=\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$ 与 $g(x)=\dfrac{c}{x^k}$ 是等价无穷小，则 $c=$ ________， $k=$ ________ 。

5. 函数 $f(x)$ 在区间 I 上有上界的定义是 ________________________________，

$f(x)$ 在区间 I 无上界的定义是 ________________________________。

三．计算下列各题（共 48 分，每小题 6 分）：

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-\sin x}{1-\sqrt{1-x^2}}$ ；

2、设 $u=f(x+y+z,xyz)$，其中 f 存在二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}$

3、设 $y=y(x)$ 满足 $x^2+y^2-ye^{xy}=2$, 求曲线 $y=y(x)$ 在点 $(0,2)$ 处的切线方程

4、计算积分 $\int_{-1}^{1}\left[\frac{\sin x}{x^6+1}+|\ln(2-x)|\right]dx$

5、设 $f(x)=\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt$, 求 $\int_0^1 xf(x)dx$.

6、计算不定积分 $\int \frac{\arccos\sqrt{x}}{\sqrt{x-x^2}}\mathrm{d}x$

7、（7 分）求微分方程初值问题$\begin{cases} y''+y=x+\sin x \\ y(0)=1, y'(0)=-\frac{1}{2} \end{cases}$的解.

8、设函数 $f(x)$ 连续，且满足 $f(x)=x\int_0^1 f(tx)dt+e^{2x}(1-x), f(0)=1$，求函数 $f(x)$。

四、综合题（14 分，7 分第小题）

1、设$|a|\le 1$，求积分$I(a)=\int_{-1}^{1}|x-a|e^{2x}dx$的最大值。

2、试讨论$f(x,y)=\begin{cases} x\arctan\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\ne(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$在点$(0,0)$

处的连续性，可偏导性及可微性。

五、证明题

1、设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上是有连续导数的有界函数，且

$|f(x)-f'(x)|\le 1$，$x\in(-\infty,+\infty)$，求证：　　$|f(x)|\le 1, x\in(-\infty,+\infty)$.

参考答案

一、选择题（15 分，第小题 3 分）

1-5 BACDA

二、填空题（15 分，第小题 3 分）

(1)　$(\sqrt{\pi},\sqrt{2\pi}),(0,\sqrt{\pi})$；　(2) $\frac{1}{3}$；　；(3) $\frac{\pi}{2}$；(4) $-\frac{1}{4},\frac{3}{2}$;

(5 $\exists M$，对 $\forall x\in I$，有 $x\le M$; $\forall M,\exists x_0\in I$，使得 $x_0>M$.

三. 计算下列各题（共 48 分，每小题 6 分）:

1.　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-\sin x}{1-\sqrt{1-x^2}}$　；

解:　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-\sin x}{1-\sqrt{1-x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{\frac{1}{2}x^2}=1.$

2、设 $u=f(x+y+z,xyz)$，其中 f 存在二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}$

. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=f_1+yzf_2$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=f_{11}+(x+z)yf_{12}+xy^2zf_{22}+yf_2$　.

3、设 $y=y(x)$ 满足 $x^2+y^2-ye^{xy}=2$，求曲线 $y=y(x)$ 在点 $(0,2)$ 处的切线方程

解:对原方程两边对 x 求导数得 $2x+2yy'-y'e^{xy}-ye^{xy}(y+xy')=0$

所以 $y'|_{(0,2)}=\dfrac{4}{3}$　所以所求的切线方程为 $3y-4x-6=0$

4、计算积分 $\int_{-1}^{1}\left[\dfrac{\sin x}{x^6+1}+|\ln(2-x)|\right]dx$

解:原式

$=\int_{-1}^{1}\ln(2-x)dx=x\ln(2-x)|_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}\dfrac{x}{x-2}dx=\ln 3-(x+2\ln(2-x))|_{-1}^{1}$ --3+3 分

$=3\ln 3-2$

5、设 $f(x)=\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt$，求 $\int_0^1 xf(x)dx$.

原式$=f(x)\dfrac{x^2}{2}|_0^1-\int_0^1 x^3e^{-x^4}dx=\dfrac{e^{-x^4}}{4}|_0^1=\dfrac{1}{4e}-\dfrac{1}{4}$ ———————————

6、计算不定积分　$\int\dfrac{\arccos\sqrt{x}}{\sqrt{x-x^2}}\mathrm{d}x$

解： $\int\frac{\arccos\sqrt{x}}{\sqrt{x-x^2}}\mathrm{d}x=2\int\frac{\arccos\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}\sqrt{x}=-2\int\arccos\sqrt{x}\mathrm{d}\arccos\sqrt{x}$ （2+3 分）

$=-\left(\arccos\sqrt{x}\right)^2+C$ （2 分）

7、（7 分）求微分方程初值问题 $\begin{cases} y''+y=x+\sin x \\ y(0)=1, y'(0)=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$ 的解.

解: $y''+y=0$ 的通解为 $\overline{y}=C_1\cos x+C_2\sin x$

$y''+y=x$ 的特解为 $Y_1=x$

$y''+y=\sin x$ 的特解为 $Y_2=-\dfrac{x\cos x}{2}$

所以 $y''+y=x+\sin x$ 的通解为 $y=C_1\cos x+C_2\sin x+x-\dfrac{x\cos x}{2}$

把 $y(0)=1, y'(0)=-\dfrac{1}{2}$ 代入得特解为 $y=\cos x-\sin x+x-\dfrac{x\cos x}{2}$

8、设函数 $f(x)$ 连续，且满足 $f(x)=x\int_0^1 f(tx)dt+e^{2x}(1-x), f(0)=1$，求函数 $f(x)$。

令 $tx=u$ 得

$\dfrac{1}{2}f(x)-\int_0^x f(u)du=e^{2x}(1-x)$， 等式两边求导并整理得：

$f'(x)-2f(x)=2(1-2x)e^{2x}$，解得

$f(x)=e^{2x}(C+2(x-x^2))$，将 $f(0)=2$ 代入得 $C=2$，所以 $f(x)=(2+2x-2x^2)e^{2x}$.

四、综合题（14 分，7 分第小题）

1、设 $|a|\le 1$，求积分 $I(a)=\int_{-1}^1|x-a|\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$ 的最大值。

解： $I(a)=\int_{-1}^1|x-a|\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=\int_{-1}^a(a-x)\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x+\int_a^1(x-a)\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$

$=a\int_{-1}^a\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x-\int_{-1}^a x\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x+\int_a^1 x\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x-a\int_a^1\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$ （2 分）

令 $I'(a)=\int_{-1}^a\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x+a\mathrm{e}^{2a}-a\mathrm{e}^{2a}-a\mathrm{e}^{2a}-\int_a^1\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x+a\mathrm{e}^{2a}=\int_{-1}^a\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x-\int_a^1\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$

$=\mathrm{e}^{2a}-\dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^2+\mathrm{e}^{-2}\right)=\mathrm{e}^{2a}-\mathrm{ch}2=0$，得 $a=\ln\sqrt{\mathrm{ch}2}$ 为唯一驻点， $I''(a)=2\mathrm{e}^{2a}>0$，

$I\left(\ln\sqrt{\mathrm{ch}a}\right)$ 为 $I\left(a\right)$ 在 $[-1,1]$ 上的最小值，而最大值只能在端点 $x=-1, x=1$ 取得。

（3 分）$I\left(-1\right)=\dfrac{3}{4}\mathrm{e}^2+\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-2}$， $I\left(1\right)=\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^2-\dfrac{5}{4}\mathrm{e}^{-2}$，所以 $I_{\max}=I\left(-1\right)=\dfrac{3}{4}\mathrm{e}^2+\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-2}$

（2 分）

2、试讨论 $f(x,y)=\begin{cases} x\arctan\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ 在点 $(0,0)$

处的连续性，可偏导性及可微性。

由 $|f(x,y)-f(0,0)|\le\frac{\pi}{2}|x|$，可得

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} f(x,y)=f(0,0)=0$，所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续.

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x\arctan\frac{1}{|x|}}{x}=\frac{\pi}{2},\ f_y(0,0)=0,$$

所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点存在偏导数.

因为 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(\arctan\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{\pi}{2})=0$，$|\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}|\le1$，

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x(\arctan\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{\pi}{2})}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$$

所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点可微.

五、证明题

1、设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是有连续导数的有界函数，且

$|f(x)-f'(x)|\le1$，$x\in(-\infty,+\infty)$，求证： $|f(x)|\le1$，$x\in(-\infty,+\infty)$.

证法 1：$\left(\mathrm{e}^{-x}f(x)\right)'=\mathrm{e}^{-x}(f'(x)-f(x))$，（**2 分**） $\forall x\in\mathbf{R}$，

$\int_x^{+\infty}\left(\mathrm{e}^{-t}f(t)\right)'\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-t}f(t)\Big|_x^{+\infty}=-\mathrm{e}^{-x}f(x)=\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\left(f'(t)-f(t)\right)\mathrm{d}t$，（**2 分**）

$\mathrm{e}^{-x}|f(x)|\le\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}|f'(t)-f(t)|\mathrm{d}t\le\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-x}$，

所以 $|f(x)|\le1$，$x\in(-\infty,+\infty)$ （**2 分**）

证法 2：用反证法。不妨设存在 $x_0\in(-\infty,+\infty)$，使得 $f(x_0)>1$，由 $|f(x_0)-f'(x_0)|\le1$，得 $f'(x_0)>0$，由于 $f'(x)$ 连续，存在 x_0 的一个邻域 $U(x_0)$，使得 $f'(x)>0$，$\forall x\in U(x_0)$。（**2 分**）下面证明对 $\forall x\in(x_0,+\infty)$，$f'(x)>0$，若不然，则存在

$x_1 \in (x_0, +\infty)$, $f'(x_1) = 0$，而 $x \in [x_0, x_1), f'(x) > 0$，则 $f(x_1) \le 1$，一方面 $f(x_1) - f(x_0) < 0$，另一方面 $f(x_1) - f(x_0) = f'(\xi)(x_1 - x_0) > 0, \xi \in (x_0, x_1)$，矛盾。于是 $f(x)$ 单增有上界，（**2 分**）$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ 存在，且 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A \ge f(x_0) > 1$，于是由 Lagrange 中值定理得知存在 $\{x_n\}$, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = +\infty, \lim\limits_{n \to \infty} f'(x_n) = 0$，从而

$\lim\limits_{n \to \infty} \left| f(x_n) - f'(x_n) \right| = A \le 1$，与 $A > 1$ 矛盾。结论得证。（**2 分**）

3.0

工科数学

重庆邮电大学 2009/2010 学年第一学期

《高等数学》(《工科数学分析》)(上)　考试题

题　号	一	二	三	四	五	总分
分　数						
评 阅 人						

装　专业：　密

班级：　封

订

姓名：　线

线

学号：

一. 单项选择题(每小题 3 分，共 30 分)

1. 若 $x_n \le a \le y_n$，($n=1,2,\ldots\ldots$) 且 $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n)=0$，则[　　]

(A) $\{x_n\}$，$\{y_n\}$都收敛于a　　(B) $\{x_n\}$收敛于a，$\{y_n\}$发散；

(C) $\{x_n\}$发散，$\{y_n\}$收敛于a　　(D) $\{x_n\}$，$\{y_n\}$都发散。

2. 当 $x\to 0$ 时，下列各无穷小量与 x 相比是高阶无穷小量的是[　　]

(A) $2x^2+x$　(B) $\sin x^2$　(C) $x+\sin x$　(D) $x^2+\sin x$

3. 下列极限中正确的是[　　]

(A) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=1$　(B) $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=1$　(C) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}=2$　(D) $\lim\limits_{x\to 0}2^{\frac{1}{x}}=\infty$

4. 函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & ,x\ne 0 \\ 0 & ,x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处[　　]

(A) 不连续　(B) 连续但不可导　(C) 可导　(D) 无界

5. 设 $f(x)=x\ln x$ 在 x_0 处可导，且 $f'(x_0)=2$，则 $f(x_0)=$[　　]。

(A) 0;　(B) 1;　(C) e;　(D) e^2.

6. 已知 $f(x)=\dfrac{1}{2}e^{-2x}$，则 $f''(\dfrac{1}{2})=$[　　]

(A) $-2e$　(B) $-\dfrac{2}{e}$　(C) $\dfrac{e}{2}$　(D) $\dfrac{2}{e}$

7. 设$y=x^x$，则$y'=$[　　]。

（A）$x^x(\ln x+1)$　（B）x^x　（C）$x^x\ln x$　（D）$\ln x+1$

8. 设$f(x)>0,g(x)>0$，且$f'(x)g(x)-f(x)g'(x)<0$,则当$a<x<b$时，有[　　]。

(A) $f(x)g(b)>f(b)g(x)$；　(B) $f(x)g(a)>f(a)g(x)$

(C) $f(x)g(x)>f(b)g(b)$；　(D) $f(x)g(x)>f(a)g(a)$.

9. 设在$[0,1]$上$f''(x)>0$, 则下列不等式中正确的[　　]。

（A）$f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$　（B）$f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$

（C）$f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$　（D）$f'(0)>f'(1)>f(1)-f(0)$

10. 函数$f(x)=4x^3-9x^2+6x$单调递减区间是[　　]。

（A）$(-\infty,0)$　(B) $(0,\frac{1}{2})$　(C)$[1,+\infty)$　(D)$[\frac{1}{2},1]$

二.填空题(每小题3分，共30分)（0190901-2、0290901、0490901-2班的同学做11、12、15-22题，其它班级的同学做13-22题）

11. 若实数列$\{a_n\}$满足条件：________________________________,

则称$\{a_n\}$为 **Cauchy** 数列。

12. 设$a_n=3\left(1-\frac{5}{n}\right)+2(-1)^n$，则数列$\{a_n\}$的极限点是______________。

13. $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1+2+3+...+n}{2+n}-\frac{n}{2})=$______________。

14. 设函数$f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & ,x>0 \\ a+x^2 & ,x\le 0 \end{cases}$在$x=0$处连续，则$a=$______________。

15. 函数极限$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2x-1)^{20}(3x-2)^{40}}{(3x+100)^{60}}=$______________。

16. 设$y=\ln(1+e^{x^2})$，则$dy=$______________。

17. 曲线$\begin{cases} x=\sin t \\ y=\cos 2t \end{cases}$在$t=\frac{\pi}{4}$处的切线方程为______________。

18. 设$y=xe^{2x}$，则$y^{(n)}=$______________。

19. 设方程 $y=1+xe^y$ 确定了函数 $y=y(x)$，则 $\dfrac{dy}{dx}=$______________。

20. 函数 $f(x)=x^2-2x$ 在 $[0,4]$ 上满足拉格朗日中值定理的 $\xi=$______________。

21. 已知点(1,3)是曲线 $y=ax^3+bx^2+x$ 的拐点，则 $a=$_____，$b=$______。

22. 曲线 $y=\dfrac{4(x+1)}{x^2}-2$ 的渐近线是________________________。

计算题(每小题 6 分，共 24 分)

23. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\cos x-1-x}{x^2}$

24. 确定函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$ 的间断点，并指出其类型

25. 求 a、b 为何值时，函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{a}{x^2}(1-\cos x) & ,x<0\\ x^2+bx+1 & ,x\geq 0\end{cases}$ 在（$-\infty,+\infty$）内处处可导。

26. 设$\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$，求$\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2}$

证明题(每小题 5 分，共 10 分)（0190901-2、0290901、0490901-2 班的同学做 27、29 题，其它班级的同学做 28、29 题）

27. 用极限定义证明 $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}\sin\dfrac{1}{x}=0$.

28. 证明：当$0<x_1<x_2<\dfrac{\pi}{2}$时，$\dfrac{\tan x_2}{\tan x_1}>\dfrac{x_2}{x_1}$

29. 设函数在$[1,2]$上具有二阶导数$f''(x)$，且$f(1)=f(2)=0$，若$F(x)=(x-1)f(x)$，

证明：至少存在一点$\xi\in(1,2)$，使得$F''(\xi)=0$

应用题(6 分)

30．若直角三角形的一直角边与斜边之和为a(常数)，求有最大面积的直角三角形.

重庆邮电大学 2009/2010 学年第一学期

《高等数学》(《工科数学分析》)(上)　考试题

参考解答

三. 单项选择题(每小题 3 分，共 30 分)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	B	C	B	C	D	A	A	B	D

二. 填空题(每小题 3 分，共 30 分)

13. $-\dfrac{1}{2}$，14. 0，15. $(\dfrac{2}{3})^{20}$，16. $\dfrac{2xe^{x^2}}{1+e^{x^2}}dx$，17. $2\sqrt{2}x+y-2=0$，

18. $2^{n-1}e^{2x}(2x+n)$，19. $\dfrac{e^y}{1-xe^y}$（或$\dfrac{e^y}{2-y}$），20. 2，21. -1，3；.

22. $x=0, y=-2$

三. 计算题(每小题 6 分，共 24 分)

23. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x\cos x-1-x}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x(\cos x-\sin x)-1}{2x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-2e^x\sin x}{2}=0$

24. 解：当 $x=0,x=1$时，$f(x)$无定义，$x=0,x=1$为$f(x)$的间断点，(2 分)

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\infty$，$x=0$为$f(x)$的第二类无穷间断点，　　(4 分)

$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=1$，$x=1$为$f(x)$的第一类跳跃间断点。(6 分)

25. 解：要使函数$f(x)$在（$-\infty,+\infty$）内处处可导，只要$f(x)$在$x=0$处可导，

要$f(x)$在$x=0$处可导，必须使$f(x)$在$x=0$处连续，

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=f(0)$，$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\dfrac{a}{2}=f(0)=1$，$a=2$（3 分）

$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\frac{2}{x^2}(1-\cos x)-1}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{2(1-\cos x)-x^2}{x^3}\overset{\frac{0}{0}}{=}$　　（4 分）

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2\sin-2x}{3x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2(\cos x-1)}{6x}=0$，$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2+bx}{x}=b$，（5 分）

由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，所以 $f'_+(0)=f'_-(0)$，$b=0$　（6 分）

26．解：$\dfrac{dy}{dt}=a\sin t$，$\dfrac{dx}{dt}=a(1-\cos t)$，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{\sin t}{1-\cos t}=\cot\dfrac{t}{2}$　（3 分）

设，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dt}(\cot\dfrac{t}{2})\cdot\dfrac{1}{\frac{dx}{dt}}=-2\csc^2\dfrac{t}{2}\cdot\dfrac{1}{a(1-\cos t)}=\dfrac{-1}{a(1-\cos t)^2}$　（6 分）

四．证明题(每小题 5 分，共 10 分)

27．用极限定义证明 $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}\sin\dfrac{1}{x}=0$．

28．证：设 $f(x)=\dfrac{\tan x}{x}$，$0<x<\dfrac{\pi}{2}$，$f'(x)=\dfrac{x\cdot\sec^2x-\tan x}{x^2}=\dfrac{x-\sin x\cos x}{x^2\cos^2 x}$（3 分）

当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$，$x>\sin x$，$x-\sin x\cdot\cos x>0$，$f'(x)>0$　（4 分）

故 $f(x)=\dfrac{\tan x}{x}$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 内单调增加，

当 $0<x_1<x_2<\dfrac{\pi}{2}$，$f(x_2)=\dfrac{\tan x_2}{x_2}>f(x_1)=\dfrac{\tan x_1}{x_1}$，即 $\dfrac{\tan x_2}{\tan x_1}>\dfrac{x_2}{x_1}$　（5 分）

29．解：$F(x)=(x-1)f(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续，在 $(1,2)$ 内可导，$F(1)=F(2)=0$，

由罗尔定理，至少存在一点 $\eta\in(1,2)$，使得 $F'(\eta)=0$。　（3 分）

$F'(x)=f(x)+(x-1)f'(x)$ 在 $[1,\eta]$ 上连续，在 $(1,\eta)$ 内可导，$F'(1)=F'(\eta)=0$，

由罗尔定理，至少存在一点 $\xi\in(1,\eta)$（$\xi\in(1,2)$），使得 $F''(\xi)=0$。（5 分）

五 应用题(6 分)

30．解：设三角形一直角边为 x，斜边为 $a-x$，则另一直角边为

$\sqrt{(a-x)^2-x^2}=\sqrt{a^2-2ax}$，　（1 分）

则 $S=\dfrac{1}{2}x\sqrt{a^2-2ax}$　（$0<x<a$），$\dfrac{dS}{dx}=\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2-2ax}-\dfrac{1}{2}\dfrac{xa}{\sqrt{a^2-2ax}}$，（3 分）

令 $\dfrac{dS}{dx}=0$，则 $x=\dfrac{a}{3}$，　（4 分）

$\left.\frac{d^2S}{dx^2}\right|_{x=\frac{a}{3}}<0$， $x=\frac{a}{3}$是$S=\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-2ax}$ 在$(0,a)$ 内的唯一极大值点，（5 分）

当$x=\frac{a}{3}$时$S=\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-2ax}$有最大值，最大面积为$S(\frac{a}{3})=\frac{\sqrt{3}}{18}a^2$ （6 分）

工科数学分析(上)　期末考试试题　　答案

2010 年 1 月 7 日

一、　**填空题（每小题 4 分，共 20 分）。　　得分[　　　　]**

1、$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+7}-\sqrt{n-1})=$ ____4____ ；

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+7}-\sqrt{n-1})=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\dfrac{8}{\sqrt{n+7}+\sqrt{n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8}{\sqrt{1+\frac{7}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=4$ ；

2、设数列 $x_n=\dfrac{(2n)!}{n^n\cdot n!}$，（$n=1,2,3,\cdots$），则有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=$ ____$\dfrac{4}{e}$____ ；

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)(n+1)}\dfrac{n^n}{(n+1)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2+\frac{1}{n})(2+\frac{2}{n})}{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n})}\dfrac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}=\dfrac{4}{e}$；

3、$\lim\limits_{x\to0}(1-\dfrac{x}{3})^{\frac{\sin 2x}{x^2}}=$ ____$e^{-\frac{2}{3}}$____ ；

解 $\lim\limits_{x\to0}(1-\dfrac{x}{3})^{\frac{\sin 2x}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0}(1-\dfrac{x}{3})^{\frac{1}{\frac{x}{3}}(-\frac{2}{3})\frac{\sin 2x}{2x}}=e^{-\frac{2}{3}}$ ；

4、设 $f(x)=\arccos x$，$|x|<1$，则有 $f''(x)=$ _$-x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}=-\dfrac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$__ ；

解 $f'(x)=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=-(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$，$f''(x)=-x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}=-\dfrac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$；

5、$\lim\limits_{x\to+\infty}x(x^{\frac{1}{x}}-1)=$ __$+\infty$______ ；

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}x(x^{\frac{1}{x}}-1)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{x}\ln x}-1}{\frac{1}{x}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}\ln x}\dfrac{1-\ln x}{x^2}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}(\ln x-1)=+\infty$$ 。

二、选择题(每小题 4 分, 共 20 分)将代表答案的字母填入右边括号内。

得分[　　　]

1、设数列$\{x_n\}$，与$\{x_n\}$不是基列不等价的一个命题是　　　　【 D 】

（A）$\exists\varepsilon_0>0$， 对任意大的正整数N，总存在正整数$m_N,n_N>N$，使得

$$|x_{m_N}-x_{n_N}|\ge 2\varepsilon_0;$$

（B）$\exists\varepsilon_0>0$，无论正整数N多么大，总存在正整数$n_N>N$和正整数p_N，使得

$$|x_{n_N+p_N}-x_{n_N}|\ge 3\varepsilon_0;$$

（C）$\exists\varepsilon_0>0$， 存在两个子列$\{x_{n_k}\}$和$\{x_{m_k}\}$，满足$|x_{n_k}-x_{m_k}|\ge\varepsilon_0$，$k=1,2,\cdots$;

（D）$\exists\varepsilon_0>0$，$\forall N\in\mathrm{N}^*$，对于所有满足$m,n>N$的$m,n\in\mathrm{N}^*$，都有$|x_m-x_n|\ge\varepsilon_0$。

2. 设函数$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\ne 0\\ 0\ , & x=0\end{cases}$，则既正确又最好的结果是　　　　【 C 】

（A）f 在 $[0,1]$ 上不一致连续；　　　　（B）f在$x=0$处连续可导；

（C）$f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界，$x=0$是$f'(x)$的第二类间断点；

（D）f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续 ，且f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导。

3. 设$f(x)$在(a,b)上可导，且$f'(x)\ne 0$，$\forall x\in(a,b)$。则下列结论正确的是　　　【 A 】

（A）$f'(x)$在(a,b)上恒为正或恒为负，且$f(x)$在(a,b)上严格单调；

（B）$f(x)$在(a,b)上恒为正或恒为负 ；（C）$f(x)$在(a,b)上有最小值和最大值；

（D）$f(x)$在(a,b)上连续，且$f'(x)$在(a,b)上连续。

4. 设$f(x)$在$x_0\in(a,b)$处可导，且$f'(x_0)>0$，则在下列结论正确的一个是　【 B 】

（A）$f(x)$在x_0处达到极小值；　　（B）$f(x)$在x_0处达不到极值。

（C）$f(x)$在x_0的某个邻域内严格单调递增；（D）$f(x)$在x_0处达到极大值；

5. 下列命题中正确的一个是　　　　【 D 】

（A）设β是数集E的上确界，则必有β是数集E中最大的数；

（B）从覆盖区间I的任一族开区间覆盖中，必可选出有限个开区间就能覆盖区间I；

（C）若有界的数列$\{a_n\}$中有一个子列收敛，则$\{a_n\}$必是收敛的数列；

（D）设数列$\{a_n\}$单调递增，$\{b_n\}$单调递减，且$a_n \le b_n$，$n \in N^*$，

则对$\forall m,n \in N^*$，成立$a_m \le b_n$ 。

三、（本题共 16 分）。得分[ ]

设$p>1$，函数$g(x)=\dfrac{(1+x)^p}{1+x^p}$，$x\in[0,+\infty)$，

求（1）$g(0),g(1)$，$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$；（2）$g'(x)$；

（3）求函数$g(x)$的单调区间；（4）求数$g(x)$在$[0,+\infty)$上的最大值和最小值。

解（1）$g(0)=1, g(1)=2^{p-1}$，$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(1+\frac{1}{x})^p}{1+(\frac{1}{x})^p}=1$；

（2）$g'(x)=\dfrac{p(1+x)^{p-1}(1+x^p)-(1+x)^p px^{p-1}}{(1+x^p)^2}=\dfrac{(1+x)^{p-1}p(1-x^{p-1})}{(1+x^p)^2}$；

$g'(1)=0$，

（3）由$g'(x)=\dfrac{(1+x)^{p-1}p(1-x^{p-1})}{(1+x^p)^2}$可知，$g'(1)=0$，

当$0<x<1$时，$g'(x)>0$，g在$[0,1]$上严格递增，$g(0)<g(x)<g(1)$；

当$x>1$时，$g'(x)<0$，g在$[1,+\infty)$上严格递减，

（4）由（3）得，当$0<x<1$时，有$g(0)<g(x)<g(1)$；

由（3）和（1）得，当$x>1$时， g在$[1,+\infty)$上严格递减，又$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$，

所以 $1<g(x)<g(1)$；

故 $g(0)\le g(x)\le g(1)$，$x\ge 0$，

从而得$g(0)=1$是最小值，$g(1)=2^{p-1}$是最大值。

四、计算下列各题（每小题 6 分，共 18 分）。得分[ ]

（1）设$f(x)=(1+a^x)^{\frac{1}{x}}$，$x\neq 0$，（$a$为常数，$a>0$且$a\neq 1$），求$f'(x)$

解 $f(x)=(1+a^x)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}\ln(1+a^x)}$， $f'(x)=e^{\frac{1}{x}\ln(1+a^x)}[\frac{1}{x}\ln(1+a^x)]'$

$$=(1+a^x)^{\frac{1}{x}}\frac{x\cdot\frac{1}{1+a^x}a^x\ln a-\ln(1+a^x)}{x^2},$$

$$f'(x)=(1+a^x)^{\frac{1}{x}}\frac{a^x\ln a^x-(1+a^x)\ln(1+a^x)}{(1+a^x)x^2}\quad;$$

或者令 $y=(1+a^x)^{\frac{1}{x}}$， $\ln y=\frac{1}{x}\ln(1+a^x)$，

$$\frac{1}{y}y'=-\frac{1}{x^2}\ln(1+a^x)+\frac{1}{x}\frac{1}{1+a^x}a^x\ln a,$$

$$y'=(1+a^x)^{\frac{1}{x}}[-\frac{1}{x^2}\ln(1+a^x)+\frac{1}{x}\frac{1}{1+a^x}a^x\ln a]\quad。$$

（2）设 $x=t+e^t$， $y=e^{-t^2}\sin(\cos t)$，求 $\frac{dy}{dx}$ ；

解 $\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{-2te^{-t^2}\sin(\cos t)+e^{-t^2}\cos(\cos t)\cdot(-\sin t)}{1+e^t}$ ；

（3）求 $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2\sin\frac{1}{x}-x)$ 。

解 方法一 $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2\sin\frac{1}{x}-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\sin\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\sin\frac{1}{x}}{\frac{2}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}(-\frac{1}{2}\sin\frac{1}{x})=0\,;$$

方法二 $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2\sin\frac{1}{x}-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x\to\infty}\frac{-\cos\frac{1}{x}+1}{-\frac{2}{x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}}{\frac{2}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}(-\frac{1}{2}\sin\frac{1}{x}) = 0；$$

方法三：令 $t=\frac{1}{x}$，则原式 $=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t - t}{t^2} = \lim_{t\to 0}\frac{\cos t - 1}{2t} = \lim_{t\to 0}\frac{-\sin t}{2} = 0$；

方法四：$\sin\frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{3!}\frac{1}{x^3} + o(\frac{1}{x^4})$，

$$\lim_{x\to\infty}(x^2\sin\frac{1}{x} - x) = \lim_{x\to\infty}(-\frac{1}{6}\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\frac{o(\frac{1}{x^4})}{\frac{1}{x^4}}) = 0 \text{ 。}$$

五、（本题满分 16 分）

设 $a>0$，$x_1>0$，$x_{n+1}=\frac{1}{3}(2x_n+\frac{a}{x_n{}^2})$，$n=1,2,\cdots$ ；

试证明：（1）成立 $x_{n+1}\ge\sqrt[3]{a}$，$n=1,2,\cdots$；（2）$\{x_{n+1}\}$ 是单调递减的；

（3）$\lim_{n\to\infty}x_n$ 存在；（4）求出 $\lim_{n\to\infty}x_n$ 。

证明（1）$x_{n+1}=\frac{1}{3}(2x_n+\frac{a}{x_n{}^2})$ $x_{n+1}=\frac{1}{3}(x_n+x_n+\frac{a}{x_n{}^2})\ge(x_n\cdot x_n\cdot\frac{a}{x_n{}^2})^{1/3}=\sqrt[3]{a}$，$n=1,2,\cdots$

（2）因为 $x_{n+2}-x_{n+1}=\frac{1}{3}(2x_{n+1}+\frac{a}{x_{n+1}{}^2})-x_{n+1}=\frac{1}{3}\frac{a-x_{n+1}{}^3}{x_{n+1}{}^2}\le 0$，

所以 $\{x_{n+1}\}$ 是单调递减的；

（3）由于 $\{x_{n+1}\}$ 是单调递减且有下界，所以 $\lim_{n\to\infty}x_n$ 存在；

（4）设 $\lim_{n\to\infty}x_n=A$，显然 $A\ge\sqrt[3]{a}$，在 $x_{n+1}=\frac{1}{3}(2x_n+\frac{a}{x_n{}^2})$ 两边，令 $n\to\infty$ 取极限，

得，$A=\frac{1}{3}(2A+\frac{a}{A^2})$，$A^3=a$，$A=\sqrt[3]{a}$ ，故 $\lim_{n\to\infty}x_n=\sqrt[3]{a}$ 。

六、证明题（10 分）

设函数 f 在 $[a,b]$ 上可导，$f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 f' 为非常值函数。

证明：必存在$\xi\in(a,b)$，使得$|f'(\xi)|>|\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}|$。

证明　方法一：用反证法。假若结论不真，则对所有$x\in[a,b]$，都有$|f'(x)|\le|\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}|$，

因为$f'(x)$在$[a,b]$上连续，且f既非常值函数又非线性函数，

必有$x_0\in[a,b]$，使得$|f'(x_0)|<|\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}|$，（否则，若对所有$x\in[a,b]$，都有$|f'(x)|=|\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}|$，又$f'$连续，必有$f'$为常值函数）。

因为$f'(x)$在$x_0\in[a,b]$处连续，$\lim\limits_{x\to x_0}|f'(x)|=|f'(x_0)|<|\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}|$，

由极限的保号性，存在$a_1,b_1\in[a,b]$，$a_1<b_1$，使得$x_0\in[a_1,b_1]$，

且当$x\in[a_1,b_1]$时，有$|f'(x)|<|\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}|$；

利用拉格朗日中值定理，得

$$|f(b)-f(a)|=|f(b)-f(b_1)+f(b_1)-f(a_1)+f(a_1)-f(a)|$$

$$\le|f(b)-f(b_1)|+|f(b_1)-f(a_1)|+|f(a_1)-f(a)|$$

$$=|f'(\xi_1)|(b-b_1)+|f'(\xi_2)|(b_1-a_1)+|f'(\xi_3)|(a_1-a)$$

$$<|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}|[(b-b_1)+(b_1-a_1)+(a_1-a)]=|f(b)-f(a)|,$$

这是矛盾的，所以假设不成立，原命题成立。

方法二：设$F(x)=f(x)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$，

易知，$f(a)=F(b)=0$，且当$a<x<b$时，$F(x)$不恒为0（因为f'为非常值函数）；

存在$c_1\in(a,b)$，使得$F(c_1)\neq0$，不妨设$F(c_1)>0$；

在区间$[a,c_1]$与$[c_1,b]$上分别应用拉格朗日中值定理，可知

存在$\xi_1\in(a,c_1)$，使$F'(\xi_1)=\dfrac{F(c_1)-F(a)}{c_1-a}=\dfrac{F(c_1)}{c_1-a}>0$；

存在$\xi_2\in(c_1,b)$，使$F'(\xi_2)=\dfrac{F(b)-F(c_1)}{b-c_1}=-\dfrac{F(c_1)}{b-c_1}<0$

于是有 $f'(\xi_1)>\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$，（1）

$f'(\xi_2)<\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$，（2）

当 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\geq 0$ 时，由（1），得 $|f'(\xi_1)|>|\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}|$，

当 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}<0$ 时，由（2），得 $|f'(\xi_2)|>|\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}|$，

故必存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $|f'(\xi)|>|\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}|$。（方法二的证明，不要求 f' 连续。）

年级：　　专业：　　班级：　　姓名：　　学号：

密　　封　　线

重庆邮电大学 06-07 学年度第一学期

工科数学分析基础（上）考试试题（A）

（时间 120 分钟）

题　号	一	二	三	四	五	总分
分　数						
评卷人						

一、选择题（15 分，3 分/小题）

1. 设 $f(x)=\sqrt{1+x}-1,\ g(x)=\arctan x, x\in R$，则当 $x\to 0$ 时（　）

（A）$f(x)$ 与 $g(x)$ 为等价无穷小；

（B）$f(x)$ 与 $g(x)$ 为同阶无穷小但不等价；

（C）$f(x)$ 是 $g(x)$ 的高阶无穷小；

（D）$f(x)$ 是 $g(x)$ 的低阶无穷小；

2. 当 $x\to+\infty$ 时，下列关于幂函数 x^n $(n\in N_+)$，指数函数 $e^{\beta x}$ $(\beta>0)$，对数函数 $\ln x$ 增大的"速度"的排序，正确的是（　　）；

（A）幂函数 x^n 最快，指数函数 $e^{\beta x}$ 次之，对数函数 $\ln x$ 最慢；

（B）幂函数 x^n 最快，对数函数 $\ln x$ 次之，指数函数 $e^{\beta x}$ 最慢；

（C）指数函数 $e^{\beta x}$ 最快，对数函数 $\ln x$ 次之，幂函数 x^n 最慢；

（D）指数函数 $e^{\beta x}$ 最快，幂函数 x^n 次之，对数函数 $\ln x$ 最慢。

3. 下列运算正确的是（　　）

（A） $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x}=\ln|x|\Big|_{-1}^{1}=0$；

（B） $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{2}{n^2})=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}+\cdots+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^2}=0$；

（C） $\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos^2 x}dx=\int_0^{2\pi}\sin xdx=-\cos x\Big|_0^{2\pi}=0$

（D） $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(x+1)}dx=\int_1^{+\infty}(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1})dx=\lim\limits_{b\to+\infty}\ln\frac{x}{x+1}\Big|_1^b=\ln 2$

4. 在下列四个论断中，正确的是（　　）。

（A） 数列$\{x_n\}$和$\{y_n\}$收敛，并且$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=A$，$\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=B$，则$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{A}{B}$；

（B）非基本初等函数在它们的定义域内是连续函数；

（C）求不定积分就是求被积函数的原函数族；

（D）在求函数的极限时，凡是无穷小量都可以用与其等价的无穷小量进行替换。

5. 设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{x-1}}}, & x\neq 1,\\ 1, & x=1,\end{cases}$ 在$x=1$处（　　）。

(A) 连续且可导；　　(B) 连续不可导；

(C) 间断并且$x=1$是跳跃间断点；　　(D) 间断并且$x=1$是无穷间断点。

二、填空题（15 分， 3 分/小题）

1. 数集$A=\{x_n\,|\,x_n=\frac{n}{n+1},n\in N_+\}$的上确界是______，下确界是______；

2. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=$ $\lim\limits_{x\to 0}(1+\cos x-1)^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}}\right]^{\frac{\cos x-1}{x^2}}$；

$=e^{-\frac{1}{2}}$

年级：　密

专业：

封

班级：

线

姓名：

学号：

3. 设 $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$，则 $y'=$ $\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

4. 反常积分 $\int_0^1\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=$ $-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{1-x^2}\Big|_0^1=-\frac{1}{2}\cdot(-2)=1$

5. 微分方程 $xdy-y\ln ydx=0$ 的通解为________________。

三、计算题(共 48 分， 6 分/小题)

1.求极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n+4}$ $=e$

2.函数 $y=f(x)$ 由方程 $yx+e^y=e$ 确定,求 $x=0$ 时 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 的值

3.设函数的参数方程为$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$，求$\dfrac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a\sin t}{a(1-\cos t)} = \frac{\sin t}{1-\cos t}$$

4.求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x}$；

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x^2}{1} = 1$$

5.求不定积分：$\int\dfrac{\ln\ln x}{x\ln x}dx$

$$= \frac{1}{2}(\ln\ln x)^2 + C$$

年级： 专业： 班级： 姓名： 学号：

密 封 线

6.求定积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,de^x = e^x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin x\,dx$$

$$= -1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,de^x$$

$$= -1 + e^x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos x\,dx$$

$$= -1 + e^{\frac{\pi}{2}} - I \quad\Rightarrow\quad I = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}}-1\right)$$

7.设$f(0)=0, f'(0)=1, f''(0)=2$，求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-x}{x^2}$；

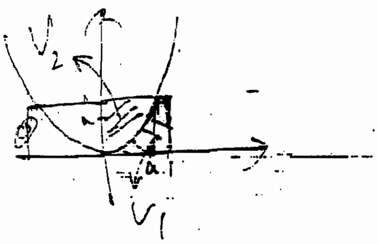
$$=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-1}{2x}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1$$

8.求方程$(1+x^2)y''=2xy'$的通解。

四、综合题（14 分，7 分/小题）

1．曲线 $a^2y = x^2(0 < a < 1)$ 将一个边长为 1 的正方形（该正方形有两个边在坐标轴上）分为两个部分，试求这两个部分分别绕与其邻近的轴旋转一周所成的旋转体的体积。



$y = \left(\frac{x}{a}\right)^2$

$V_2 = \pi\int_0^1 \cancel{x^2}\,dy = \pi\int_0^1 a^2 y\,dy$

$V_1 = \pi\int_0^a y^2\,dx + \pi(1-a)$

$= \pi\int_0^a \left(\frac{x}{a}\right)^4 dx + \pi(1-a)$

2．求函数 $f(x) = x^3(1-x)$ 的凸凹区间与单调区间，并指出极值点与拐点。

$f(x) = x^3 - x^4$

$f'(x) = 3x^2 - 4x^3 = x^2(3-4x) \Rightarrow x_1 = 0.\ \ x_2 = \frac{3}{4}$

$f''(x) = 6x - 12x^2 = 6x(1-2x) \qquad x_3 = \frac{1}{2}$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$	$(\frac{3}{4}, +\infty)$
$f'(x)$	+	+	+	−
$f''(x)$	−	+	−	−
$f(x)$	拐	拐		极值点

年级： 专业： 班级： 姓名： 学号：

密 封 线

五、证明题（8 分，4 分/小题）

1. 如果 $f(x)\in C(a,b)$，并且 $f(a+0)$ 与 $f(b-0)$ 存在且异号，证明：在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=0$。

$$令\ g(x)=\begin{cases} f(a+0) & x=a \\ f(x) & a<x<b \\ f(b-0) & x=b \end{cases}$$

~~$g(x)$ 在 $[a,b]$ 连续 且 $g(a)g(b)<0$~~

$\exists\ \xi\in(a,b)$，使 $g(\xi)=0$. i.e. $g(\xi)=f(\xi)=0$

2. 设 $f(x)$ 为连续的周期函数，其周期为 T，证明：

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx,$$

其中 a 为常数。

$$\int_a^{a+T} = \left(\int_a^0 + \int_0^T + \int_T^{a+T}\right) f(x)dx$$

$$\int_T^{a+T} f(x)dx \overset{x=t+T}{=\!=} \int_0^a f(t+T)dt = \int_0^a f(t)dt = \int_0^a f(x)dx$$

$$\text{So } \int_a^{a+T} = \left(\int_a^0 + \int_0^T + \int_0^a\right) f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$$

工科数学分析练习题

一 、选择填空题：

1、函数 $f(x)=\begin{cases} x\arctan\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处（　　　　）

（1）极限不存在　　（2）不连续　　（3）连续　　（4）可导

2、设 $f(x)$ 在 $x=1$ 的某邻域内可导，且 $f'(1)=0$，若 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f'(x)}{(x-1)^3}=\frac{1}{2}$，则 $f(1)$（　）

（1）必为极小值　　（2）必为极大值　　（3）不是极值　　（4）不能确定

3、若 $\int df(x)=\int dg(x)$，则在下列式子中不正确的是（　　　　）

（1）$f(x)=g(x)$　（2）$f'(x)=g'(x)$　（3）$df(x)=dg(x)$　（4）$d\int f'(x)dx=d\int g'(x)dx$

4、$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-2})=$（　　　）。（1）$\infty$　（2）0　（3）1（4）5/2

5、函数 $f(x)=3+2\sin x$ 的值域是__________。

6、设 $f(x)=\begin{cases} x^a\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$，要使 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 在 $x=0$ 点连续，则 a 应满足的条件为____________。

7、$\lim\limits_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right]=$ ______________。

8、设 $\exists M>0, \forall x\in(-\infty,+\infty)\Rightarrow|f(x)|\le M$，则

36. 设点$(0,1)$为曲线$y=ax^3+bx^2+c$的拐点，则有则（　　）.

（A）$a=1,b=-3,c=1$　　　　（B）a为任意值，$b=0,c=1$

（C）$a=1,b=0$，c为任意值　（D）a、b为任意值，$c=1$

设$M=\int_{-1}^{1}x\ln(1+\sqrt{1+x^2})dx,N=\int_{-1}^{1}\frac{x^3+|x|}{\sqrt{1+x^2}}dx,P=\int_{-1}^{1}\frac{x-1}{(1+x^2)^2}dx$，则（　）。

（A）$P<M<N$　（B）$M<N<P$　（C）$M<P<N$　（D）$N<P<M$

二、计算题：讨论$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$在$x=0$处的可导性。

1、　设方程$y=1+xe^y$确定y是x的函数，求$y'|_{x=0}$。

2、　设$y=f(x^2)+x^x$，其中$x>0,f(x)$是可导函数，求dy

3、　已知$f(x)$的一个原函数是e^{-x^2}，求$\int xf'(x)dx$

4、　求微分方程$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{y^3+x}$的通解。

5、　讨论级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln(1+\frac{1}{n})$的敛散性。若收敛，是条件收敛还是绝对收敛？

6、　计算$\int_1^0 e^{\sqrt{t}}dt$，　8、$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$

9、　设$f(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x-1}}, & x>1\\ \ln(1+x), & -1<x\leq 1\end{cases}$　求$f(x)$的间断点并说明其类型。

10、设$y=x^2e^{2x}$，求$y^{(50)}$。

11、求$ye^x+\ln y=1$在点$(0,1)$切线和法线方程。

数。

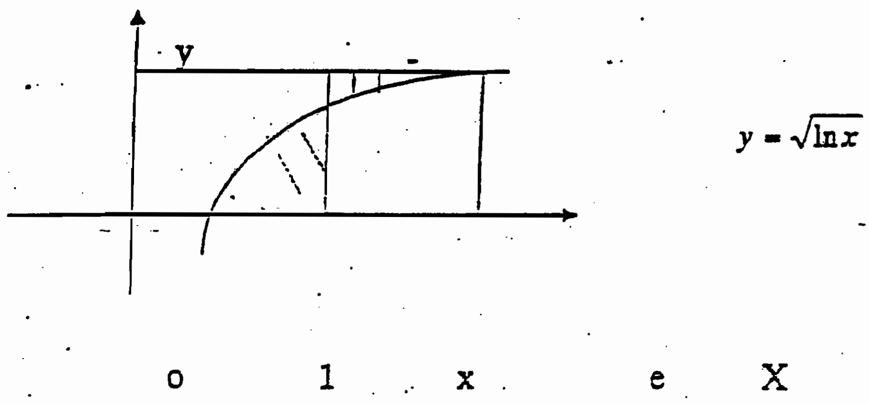
4、当$x>1$时，$e^{x}>ex$。

5. $2\int_0^a t^3 f(t^2)dt=\int_0^{a^2} xf(x)dx$，其中$f$为连续函数。

五、综合题

1、求由曲线设$y=x^2$和$x=y^2$围成图形绕y轴旋转一周所生成旋转体的体积V。

2、在区间内求一点，使图中两块阴影的面积之和最小。



中心设定
永存

密

年级：

专业： 封

班级： 线

姓名：

学号：

重庆邮电学院 05-06 学年度第一学期
工科数学分析基础（上）考试试题（A）

（时间 120 分钟）

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
分数										
评卷人										

一、选择题（12 分，2 分/小题）

1.设 $f(x)=x^4+\sin 2x,\ g(x)=\dfrac{2}{\pi}\cos\dfrac{\pi}{2}(1-x),x\in R$,则当 $x\to 0$ 时(　)

（A） $f(x)$ 与 $g(x)$ 为等价无穷小；

（B） $f(x)$ 与 $g(x)$ 为同阶无穷小但不等价；

（C） $f(x)$ 是 $g(x)$ 的高阶无穷小；

（D） $f(x)$ 是 $g(x)$ 的低阶无穷小；

2.. 当 $n\to\infty$ 时 a_n 不以 a 为极限的定义是（　　　）

（A）; $\forall\varepsilon>0,\exists N\in N_+$, $\forall n\ge N,\ |a_n-a|<\varepsilon.$;

（B） $\forall\varepsilon>0,\exists N\in N_+$, $\forall n>N,\ |a_n-a|\le\varepsilon.$;

（C） $\exists\ \varepsilon_0>0,\ \forall N\in N_+,\ \exists\ n>N,\ |a_n-a|\ge\varepsilon_0$ ；

（D）． $\forall\varepsilon>0,\exists N\in N_+$, $\forall n>N,\ |a_n-a|<k\varepsilon,k$ 为正常数.

3. 设 $f(x)$ 在 $x=1$ 处二阶可导, $f'(1)=0$ 且 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f'(x)}{x-1}=1$,则(　　)

（A） $x=1$ 是 $f(x)$ 的极小值点；（B） $x=1$ 是 $f(x)$ 的极大值点；

（C） $(1,f(1))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点；（D）．以上都不是。

4.设函数 $f(x)$ 在有限区间 I 上连续，$F(x)$ 为 $f(x)$ 在 I 上一个原函数，则下列正确的是（　　　）:

(A) $\dfrac{d}{dx}\int f(t)dt=F'(x)$;

(B); $\int_a^x f(t)dt=F(x)+C$ (其中 a 为 I 中一点，C 为一个常数)

(C) $F(x)=\int_a^x F'(x)dx$； (D) $\int_a^x F'(x)dx=\int f(x)dx$.

5. 设 $f(x)$ 是周期为 T 的连续函数，则下列函数为周期函数的是（ ）.

(A) $F(x)=\int_0^x f(t)dt$； (B) $F(x)=\int_0^{x+T} f(t)dt$；

(C) $F(x)=\int_0^x f(t+T)dt$； (D) $F(x)=\int_x^{x+T} f(t)dt$.

6.设 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$ 在 $x=0$ 处（ ）

(A)连续且可导；(B)连续不可导； (C)不连续； (D)导数存在且导函数连续。

二、填空题（12 分， 2 分/小题）

1. 数集 $\left\{(-1)^n-\frac{n}{n+1}, n\in N_+\right\}$ 的上确界是________，下确界是________；

2.数列 $\left\{a_n=\frac{n+(-1)^n n}{2}+\frac{1}{n}, n\in N_+\right\}$ 的极限点是________；

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin x}{x-n\pi}(n\in N_+)=$ ________；

4. 设 $\begin{cases} x=e^t\sin t \\ y=e^t\cos t \end{cases}$，则 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{3}}=$ ________；

5. 反常积分 $\int_e^{\infty}\frac{2}{x(\ln x)^3}dx=$ ________；

6. 微分方程 $y''=\frac{y'}{x}$ 的通解为________.

三、计算题(共 48 分， 6 分/小题)

1.求极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)^{2^n}$；

2.函数 $y=f(x)$ 由方程 $y=2+xe^y$ 确定,求 $\frac{d^2y}{dx^2}$；

3.设 $y=(2x)^{\sin 3x}$，求 dy；

4.求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\int_{\cos x}^{1} t\ln t dt}{x^4}$；

5.求不定积分: $\int \frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x}}dx$；　　211、7.6.

6. 设 $1+\sin^2 x$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，求 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x f'(2x)\, dx$ 。

7.设 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 0, \\ \sin x, & x>0. \end{cases}$,求 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$,并讨论函数 $F(x)$ 的连续性和可导性.

8.求方程 $(1+x^2)y'-2xy=(1+x^2)^2$ 的通解.

四、综合题（16 分，8 分/小题）

1. 设抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 过原点，当 $0\le x\le 1$ 时，$y\ge 0$，又已知该抛物线与 x 轴及直线 $x=1$ 所围成图形的面积为 $\frac{1}{3}$，试确定 a,b,c，是图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积最小。

2. 求函数 $y=f(x)=\int_0^x \sqrt{t}(t-1)^3 dt$ 的定义域，单调区间和极值点。

五、证明题（12 分，4 分/小题）

1. $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right]=1$，[ ]表示取整。

2. $\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b}(a>b>0)$ 。

3. $2\int_0^a t^3 f(t^2)dt=\int_0^{a^2} xf(x)dx$，其中 f 为连续函数。