7元

高数

重庆邮电大学 2017-18 学年 第一学期

高等数学 （上） 考试题（半期卷）

年级

专业

班级

姓名

学号

密 封 线

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
分数								
评卷人								

得分	评卷人

一、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）。

1.A反例：sin x　C. $x_n=(-1)^{n+1}$

1. 下列断言正确的是（　　）。

（A）有界数列必有极限　（B）无界数列必发散

（C）发散数列必无界 1,-1,1,-1…　（D）单调数列必有极限

2. 设 $f(x)=2^x+3^x-2$，则当 $x\to 0$ 时，有（　　）。

（A）$f(x)$ 与 x 是等价无穷小　（B）$f(x)$ 与 x 同阶但非等价无穷小

（C）$f(x)$ 是比 x 高阶的无穷小　（D）$f(x)$ 是比 x 低阶的无穷小

2. $\lim\limits_{x\to0}\frac{2^x+3^x-2}{x}$
$=\lim\limits_{x\to0}\frac{2^x-1+3^x-1}{x}$
$=\lim\limits_{x\to0}\frac{2^x-1}{x}+\lim\limits_{x\to0}\frac{3^x-1}{x}$
又 $a^x-1\sim\ln a\cdot x$
原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln2\,x}{x}+\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln3\,x}{x}$
$=\ln6\neq0$
由定义：如果 $\lim\frac{\beta}{\alpha}\neq0$，那么就说β与α是同阶无穷小。

3. $x=1$ 是函数 $f(x)=\dfrac{x-1}{\sin(\pi x)}$ 的（　　）

(A) 可去间断点　(B) 跳跃间断点

(C) 无穷间断点　(D) 振荡间断点

但 $f(x)$ 在 $x=1$ 处无意义，若补上当 $x=1$ 时 $f(x)=0$，那么所给函数在 $x=1$ 处成为连续，所以 $x=1$ 称为该函数的可去间断点。

4. 设 $f'(a)=1$，则极限 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a-2h)-f(a)}{h}=$（　　）。

(A) 1　(B) -1　(C) 2　(D) -2

4. $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(a-2h)-f(a)}{h}$
$=-2\lim\limits_{h\to0}\frac{f(a)-f(a-2h)}{2h}$
$=-2f'(a)=-2$

5. 当 $x>0$ 时，下面不等式正确的为（　　）。

(A) $\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$　(B) $\dfrac{x}{1+x}>x>\ln(1+x)$

(C) $\dfrac{x}{1+x}>\ln(1+x)>x$　(D) $\dfrac{x}{1+x}<x<\ln(1+x)$

5 $f(x)=x-\ln(1+x)$　$f'(x)=1-\frac{1}{x+1}=\frac{x}{x+1}$，由 $x>0$，$f'(x)>0$ 故 $f(x)>f(0)$ $(x>0)$，$f(x)>0$ 即 $x-\ln(1+x)>0$，$x>\ln(1+x)$；同理可证 $x>\ln\frac{x}{(1+x)}$ $\ln(1+x)>\frac{x}{1+x}$

6. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^{2x}-1}{kx} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{2x}{kx} = \frac{2}{k}$ $(e^{2x}-1 \sim 2x)$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(1-x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(1-x) = 1$ 且 $f(0)=1$，由连续定义 $\frac{2}{k}=1$

$k=2$

得 分	评卷人

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

6. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{2x}-1}{kx} & ,x>0\\ 1-x & ,x\le 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 点连续，则 $k=$________。

7. $f'(0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{(e^h-1)\varphi(h)-0}{h}$ 等价无穷小 $e^x-1 \sim x$ 故原式 $=\lim\limits_{h\to 0}\varphi(h) = \varphi(0)$

7. 设 $f(x)=(e^x-1)\varphi(x)$，其中 $\varphi(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则 $f'(0)=$________。

8. 设 $y=\ln(1+e^{2x})$ 时，则微分 $dy=$________。 8. $\frac{dy}{dx} = \frac{2e^{2x}}{1+e^{2x}}$

9. $f(x) = e^x \lim\limits_{n\to\infty}(2^n \sin\frac{x}{2^n})$

9. 设 $f(x)=e^x\lim\limits_{n\to\infty}(2^n\sin\dfrac{x}{2^n})$，则 $f^{(n)}(x)=$________。

$\sin x \sim x$

$f(x) = e^x \cdot \lim\limits_{n\to\infty}(2^n \cdot \frac{x}{2^n})$

$= x \cdot e^x$

$f'(x) = e^x + x\cdot e^x$

$f^{(n)}(x) = e^x(n+x)$

10. 已知函数 $f(x)=a\sin x+\dfrac{\sin 3x}{3}$ 在 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 处取极值，则 $a=$________。

10. $f'(\frac{\pi}{3}) = a\cos\frac{\pi}{3} + \frac{3}{3}\cos 3\cdot\frac{\pi}{3} = \frac{a}{2} - 1 = 0 \Rightarrow a=2$

得 分	评卷人

三、求极限（每小题 6 分，共 18 分）

11. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{3n^3-2n^2+9n}{8n^3-5n^2+3}-\dfrac{4^n+3^n}{4^{n+1}-3^{n+1}})$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3-2\cdot\frac{1}{n}+9\cdot\frac{1}{n^2}}{8-5\cdot\frac{1}{n}+3\cdot\frac{1}{n^3}}\right) - \lim\limits_{n\to\infty}\frac{4^n+3^n}{4^{n+1}-3^{n+1}}$

$= \frac{3}{8} - \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+(\frac{3}{4})^n}{4-3\cdot(\frac{3}{4})^n}$ 无穷小乘以有界量极限为0

$= \frac{3}{8} - \frac{1}{4}$

$= \frac{1}{8}$

12. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$。

洛必达法则

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^{x}+e^{x}-2}{1-\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2e^{x}}{\sin x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2e^{x}}{\cos x} = 2$$

13. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\sin x-\ln x}{x^2}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}}{2x}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{2x^2\sin x}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{2x^3}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{6x^2}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-x^2}{6x^2}} = e^{-\frac{1}{6}}$$

得 分	评卷人

四、求导数与微分（每小题 6 分，共 18 分）

14. 设 $f''(x)$ 存在，函数 $y=f(x^3)$，求 y''。

解：

$$y' = f'(x^3)\cdot 3x^2$$

$$y'' = 6x\cdot f'(x^3) + 6x f''(x^3)\cdot 3x^2$$

$$= 6x\cdot f'(x^3) + 18x^3 f''(x^3)$$

15. 求曲线 $y=1-xe^{y}$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程。

PS: $y'=-xe^{y}\cdot y'-e^{y}$

$y'=-\frac{e^{y}}{1+xe^{y}}$　$y'|_{(0,1)}=-\frac{e}{1}=-e$

切线方程：$y=-ex-1$

16. 已知函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t-\ln(1+t)\\ y=t^3+t^2\end{cases}$ 所确定，求 $\frac{dy}{dx}$，$\frac{d^2y}{dx^2}$。

PS: $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=(3t^2+2t)/(1-\frac{1}{1+t})$

$=3t^2+5t+2$

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{dt}{dx}$

$=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{(6t+5)(t+1)}{t}$

得 分	评卷人

五．解答题(每小题 8 分，共 16 分)

17. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{a}{x^2}(1-\cos x) & x<0\\ x^2+bx+1 & x\geq 0\end{cases}$，应当如何选择 a、b 的值，使函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导。

PS: 要使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，首先 $f(x)$ 要满足在 $x=0$ 处连续的条件；

$\lim\limits_{x\to0^-}\frac{a(1-\cos x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0^+}(x^2+bx+1)$

$\lim\limits_{x\to0^-}\frac{a\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^2}=1\Rightarrow a=\cancel{\tfrac{1}{2}}2$

还需满足左导数 $f'_-(x_0)$ 和右导数 $f'_+(x_0)$ $(x_0=0)$ 存在且相等

$f'_-(0)=\lim\limits_{h\to0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to0^-}\frac{f(h)-1}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0^-}\frac{\frac{2}{h^2}(1-\cos h)-1}{h}=0$

$f'_+(0)=\lim\limits_{h\to0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to0^+}\frac{f(h)-1}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0^+}\frac{h^2+hb+1-1}{h}=\lim\limits_{h\to0^+}(h+b)=b$

故 $b=0$，综上 $a=2$，$b=0$

18. 求曲线 $y=(2x-5)\sqrt[3]{x^2}$ 的凹、凸区间及拐点。

解：$y' = 2\sqrt[3]{x^2} + \frac{2}{3}(2x-5)\,x^{-\frac{1}{3}}$

$y'' = \frac{4}{3}\cdot x^{-\frac{1}{3}} + \frac{4}{3}x^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}\times\frac{2}{3}(2x-5)\cdot x^{-\frac{4}{3}}$

$= \frac{8}{3}x^{-\frac{1}{3}} - \frac{2}{9}(2x-5)\cdot x^{-\frac{4}{3}}$

令 $y''=0$，得 $x=-\frac{1}{2}$，$x=0$

当 $(-\infty,-\frac{1}{2})$，$y''<0$，故 $(-\infty,-\frac{1}{2})$ 为凸区间；

当 $(-\frac{1}{2},0)$，$y''>0$ 故 $(-\frac{1}{2},0)$ 为凹区间；

~~当 $(0,\frac{1}{2})$ 当 $(\frac{1}{2},+\infty)$~~ 当 $(0,+\infty)$，$y''>0$，

故 $(0,+\infty)$ 为凹区间

y在 $x=-\frac{1}{2}$ 时，凹凸性发生了改变，故拐点为 $(-\frac{1}{2},-6\sqrt[3]{\frac{1}{4}})$.

得 分	评卷人

六．证明题(每小题 5 分，共 10 分)

19. 证明：方程 $x^5+x-1=0$ 只有一个实根

解：令 $f(x)=x^5+x-1$　$f(x)=5x^4+1>0$ 则 $f(x)$ 在R上单增

又 $f(0)=-1$，$f(1)=1$，则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 之间必存在一正实根

又 $f(x)$ 在R上单调递增，$f(x)=0$ 必只有一解

即得 $x^5+x-1=0$ 只有一个正实根

20. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，证明：存在点 $\xi\in(0,1)$，

使得　$\xi f'(\xi)+f(\xi)=f'(\xi)$。

解：引入一个辅助函数 $F(x)=xf(x)-f(x)=(x-1)f(x)$

由 $f(0)=0$，故 $F(0)=0$，且 $F(1)=0$

由罗尔定理

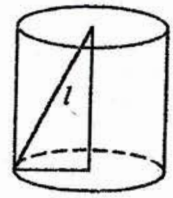
$F'(\xi)=\xi\cdot f'(\xi)+f(\xi)-f'(\xi)=0$

即　$\xi\cdot f'(\xi)+f(\xi)=f'(\xi)$

得 分	评卷人

七. 应用题(本题 8 分)

21. 如图所示，圆柱体上底的中心到下底的边沿的距离为 l，问当圆柱体高 h 与底半径 r 分别为多少时，圆柱体的体积最大？



解：由直角三角形 $l^2=h^2+r^2 \Rightarrow r^2=l^2-h^2$

圆柱体体积 $V=\pi r^2 h$

$=\pi h\cdot(l^2-h^2)$

$=\pi l^2 h-\pi h^3$

$V'=\pi l^2-3\pi h^2$

令 $V'=0$ $\pi l^2=3\pi h^2 \Rightarrow h=\frac{\sqrt{3}}{3}l$

则 $r=\frac{\sqrt{6}}{3}l$

综上：当圆柱体高 $h=\frac{\sqrt{3}}{3}l$，底半径 $r=\frac{\sqrt{6}}{3}l$，圆柱体体积最大。