

# 太阳影子定位研究

## 摘 要

本文针对太阳影子定位问题，运用最小二乘法等，分别建立影子长度变化模型、最小方差等模型，使用 Matlab、KMPlayer、Photoshop 等软件，得到不同条件下可能的地理位置和日期。

针对问题一：分析影子长度关于各个参数的变化规律并画图。以太阳高度角为桥梁，建立影子长度与杆高、日期、时间、经度、纬度之间的函数关系式。分别应用已有的太阳高度角表达式和建立的“空间法向量-太阳高度角模型”进行求解，并证明了以太阳直射点为圆心的地球表面的同心圆上的点的影长相等，此定理可用于求解不同地点；而后，将北京天安门广场的各个参数信息处理后代入模型中，最终运用 MATLAB 软件编程绘制出 2015 年 10 月 22 日该地点太阳影子长度的变化曲线。

针对问题二：依某固定直杆的太阳影子顶点坐标数据，求杆地点。由于杆高未知，且有一系列的影长的观测值，带入变量间的表达式，可得地球上每点都有一系列的杆高的估计值，借鉴最小二乘的思想，构建最小方差优化模型，并用粗劣搜索算法结合 GA 算法进行求解。得到粗劣解为 19N,109E，精确解为  $17^{\circ}24'4.7975''\text{N}$ ,  $110^{\circ}51'35.1037''\text{E}$ ，在海南、三亚附近。

针对问题三：依某固定直杆的太阳影子顶点坐标数据，求杆所处的地点和日期。首先，给出杆高与经度纬度之间的关系，从图像分析，数值分析，现实情况得到“一年中北极点的方差最小，赤道附近点的方差最大”的结论；其次，以地球个点的平均杆高为实际杆高，建立最小二乘、最小一乘优化模型，并用多种群 GA 进行求解。得到附件 2 的地区为 41N, 79E，精确解为  $40^{\circ}1'45.1023''\text{N}$ ,  $77^{\circ}42'58.1478''\text{E}$ ，在新疆塔里木河附近，日期为 6 月 12 日；附件 3 对应最优解为  $23^{\circ}22'39.2670''\text{N}$ ,  $109^{\circ}31'0.1559''\text{E}$ ，在湖南湘西怀化附近，日期为 11 月 7 日。

针对问题四，建立确定附件 4 中视频拍摄地点的数学模型，并应用所建立的模型给出若干个可能的拍摄地点。针对拍摄日期已知的情况，提取视频中直杆在 40 分钟内影子长度等有效数据，建立基于最小二乘法，最终，确定地点为  $40^{\circ}5'17.6018''\text{N}$ ,  $121^{\circ}14'41.5836''\text{E}$ ，在长春、哈尔滨附近。针对拍摄日期未知的情况，我们建立以  $h$  为常量，以  $l, t$  的值作为观测值，以  $\varphi, \theta, n$  为未知参数的基于最小二乘法的影子定位模型，最后，确定的地点为  $40^{\circ}32'59.9198''\text{N}$ ,  $123^{\circ}40'51.8331''\text{E}$ ，在鞍山市、沈阳附近，精确日期为 7 月 20 日。

本文后续对模型进行了误差分析与灵敏度分析，分析了不同纬度对杆高估计量的影响，进而我们对模型进行了评价与推广，并针对问题二、问题三与问题四的求解结果，对求解模型做出了一定改进。

**关键词：**太阳影子定位；多种群 GA 算法；最小二乘法；等太阳高度线；MATLAB

## §1 问题的重述

### 一、背景知识

#### 1. 总背景介绍

21 世纪是数据信息大发展的时代，随着计算机技术逐渐全面融入社会生活，电子信息逐渐成为人们获取信息的重要来源之一。视频资料作为电子信息，是最直观、最生动形象的信息，在现实生活中的应用也越来越广泛，因而视频数据分析技术在大数据时代也越发重要，运用视频数据分析技术将视频内容中的信息进行分析处理，并获得有用的数据，无疑给人们的生活带来了极大便利。

#### 2. 问题的产生

在视频数据分析技术中，如何确定视频的拍摄地点和拍摄日期是非常重要的方面，太阳影子定位技术就是通过分析视频中物体的太阳影子变化，由此来确定拍摄的地点和日期。为了更加精确、更加便利地确定视频的拍摄地点和日期，利用数学思想，建立数学模型来解决这个问题。

### 二、相关资料

1. KMPlayer 软件“抓帧”得出 25 张不同时刻的视频截图（详见附件 1）
2. 附件 1-3 各个观测时间点下直杆的影子长度数据（详见附录附表 1）；
3. 问题一中直杆的太阳影子长度的变化曲线绘制程序（详见附录程序 1）；
4. 不同经纬度下影子长度变化的函数图绘制程序（详见附录程序 2）；
5. 附件一对应的可能地点求解程序（详见附录程序 3）
6. 附件二与附件三对应的可能地点与日期求解程序（详见附录程序 4）；
7. 附件四对应的可能拍摄地点与日期求解程序（详见附录程序 5）；
8. 问题一到问题四的具体详细程序（详见附件 2）

### 三、要解决的问题

#### 1. 问题一：

建立影子长度变化的数学模型，分析影子长度关于各个参数的变化规律，并应用所建立的模型画出 2015 年 10 月 22 日北京时间 9:00-15:00 之间天安门广场（北纬 39 度 54 分 26 秒，东经 116 度 23 分 29 秒）3 米高的直杆的太阳影子长度的变化曲线。

#### 2. 问题二：

根据某固定直杆在水平地面上的太阳影子顶点坐标数据，建立数学模型确定直杆所处的地点，并将模型应用于原题附件 1 的影子顶点坐标数据，给出若干个可能的地点。

#### 3. 问题三：

根据某固定直杆在水平地面上的太阳影子顶点坐标数据，建立数学模型确定直杆所处的地点和日期，然后将模型分别应用于原题附件 2 和原题附件 3 的影子顶点坐标数据，给出若干个可能的地点与日期。

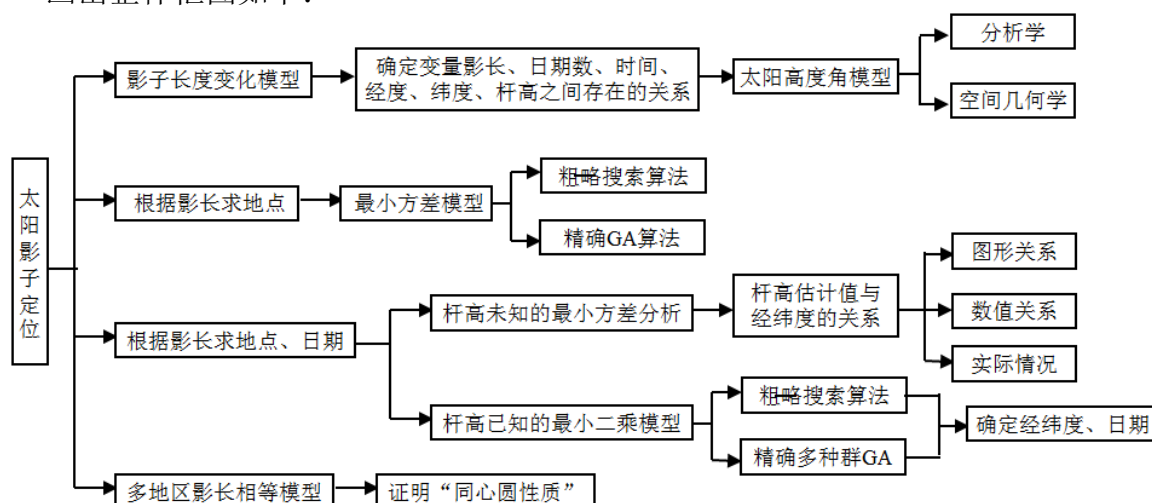
#### 4. 问题四：

原题附件 4 为一根直杆在太阳下的影子变化的视频，并且已通过某种方式估计出直杆的高度为 2 米；建立确定视频拍摄地点的数学模型，并应用所建立模型给出若干个可能的拍摄地点。此外，如果拍摄日期未知，能否根据视频确定出拍摄地点与日期？

## §2 问题的分析

## 一、问题的总分析

画出整体框图如下：



## 二、对具体问题的分析

### 1. 对问题一的分析

问题要求我们建立影子长度变化的数学模型，分析影子长度关于各个参数的变化规律，并应用所建立的模型画出 2015 年 10 月 22 日北京时间 9:00-15:00 之间天安门广场（北纬 39 度 54 分 26 秒，东经 116 度 23 分 29 秒）3 米高的直杆的太阳影子长度的变化曲线。

首先，我们确定影响影子长度的变量主要为太阳高度角  $\rho$  与固定直杆的高度  $h$ ；其次，通过查阅相关文献写出决定太阳高度角的参数表达式（影响参数主要有：地理纬度  $\varphi$ 、太阳赤纬  $\delta$  及太阳时角  $\omega$ ）；最后，写出影子长度与太阳高度角以及固定直杆高度之间的表达式，建立影子长度变化的数学模型。将 2015 年 10 月 22 日、北京时间 9:00-15:00 之间、天安门广场（北纬 39 度 54 分 26 秒，东经 116 度 23 分 29 秒）、直杆 3 米高等各个参数信息通过一定的处理后代入模型中，最终运用 MATLAB 软件编程绘制出太阳影子长度的变化曲线。

### 2. 对问题二的分析

问题要求我们根据某固定直杆在水平地面上的太阳影子顶点坐标数据，建立确定直杆所地点的数学模型，并将模型应用于附件 1 的影子顶点坐标数据，给出若干个可能的地点。

首先，我们根据附件 1 分析可知，已知的参数数据有：测量日期 2015 年 4 月 18 日、14:42-15:42 时间段内每隔三分钟读取的 21 组固定直杆影子长度  $l_i$  与观测时间点  $t_i$ ，未知的参数数据有：直杆的高度  $h$ 、及其所处地点的经度  $\theta$  与纬度  $\varphi$ ；其次，将问题一中的影子长度表达式转化为以经度  $\theta$ 、纬度  $\varphi$  作为自变量，长杆影子长度  $l$ 、日期  $n$  以及时间  $t$  作为已知参数，而长杆高度  $h$  作为因变量的表达式；最后，我们定义一个经纬度的取值范围，用 GA 算法进行遍历搜索与精确求解，最终得到使  $\text{Var}(h_i)$  达到最小的最优  $(\varphi, \theta)$  解。

### 3. 对问题三的分析

问题要求我们根据某固定直杆在水平地面上的太阳影子顶点坐标数据，建立确定直杆所处的地点和日期的数学模型，并模型分别应用于附件 2 和附件 3 的影子顶点坐标数据，给出若干个可能的地点与日期。

首先，我们根据附件 2 和附件 3 分析可知，已知的参数数据有：12:41-13:41 以及

13:09-14:09 时间段内每隔三分钟读取的 21 组固定直杆影子长度  $l_i$  与观测时间点  $h_i$ ，未知的参数数据有：直杆的高度  $h$ 、直杆所处地点的经度  $\theta$  与纬度  $\varphi$ 、及观测日期  $n$ ；其次，将问题二中的杆高表达式转化为以经度  $\theta$ 、纬度  $\varphi$  和日期  $n$  作为自变量，长杆影子长度  $l$ 、以及时间  $t$  作为已知参数，而长杆高度  $h$  作为因变量的表达式；最后，我们定义一个经纬度的取值范围和目标函数，用 GA 算法进行遍历搜索与精确求解，最终得到使目标函数达到最优的纬度  $\varphi$  和经度  $\theta$  解。

#### 4. 对问题四的分析

问题要求我们建立确定附件 4 中视频拍摄地点的数学模型，并应用所建立的模型给出若干个可能的拍摄地点。

针对拍摄日期已知的情况，首先，我们要提取视频中直杆在 40 分钟内影子长度变化的数据，及视频中含有的有关影响直杆影子长度的参数信息；其次，我们建立以  $n, h$  为常量，以  $l, t$  的值作为观测值，以  $\varphi, \theta$  为未知参数的基于最小二乘法的影子定位模型  $f(\varphi, \theta) = l$ ；最后，求以  $\varphi$  和  $\theta$  为自变量的二元函数的最小值以此确定最优的  $\varphi$  和  $\theta$  取值。针对拍摄日期未知的情况，提取出视频中的有效信息后，我们建立以  $h$  为常量，以  $l, t$  的值作为观测值，以  $\varphi, \theta, n$  为未知参数的基于最小二乘法的影子定位模型  $f(\varphi, \theta, n) = l$ ；最后，求以  $\varphi, \theta, n$  为自变量的多元函数的最小值以此确定最优的  $\varphi, \theta, n$  取值。

### §3 模型的假设

1. 假地球是一个标准球体，且其半径为  $R$ ；
2. 假设当物体的高度  $h$  很大时，才考虑地球面的弧度，否则，将物体影子投射的面视作平面，不考虑地球面的弧度；
3. 由于太阳直射点所在的经线的地方时为正午 12 时，且由于一天内太阳直射点的纬度变化很小，所以我们假设某一天太阳直射点的纬度是不变的；
4. 假设在本文研究物体影子长时，物体都是垂直于地球表面的；
5. 假设问题四在读取视频中直杆影子长度时，视影子为直杆底端与影子顶端之间的线段，忽略直杆底座导致的误差。

### §4 名词解释与符号说明

#### 一、名词解释

**1. 太阳高度角：**对于地球上的某个地点，太阳高度角是指太阳光的入射方向和地平面之间的夹角，专业上讲太阳高度角是指某地太阳光线与通过该地与地心相连的地表切线的夹角。太阳高度角简称高度角。当太阳高度角为  $90^\circ$  时，此时太阳辐射强度最大；当太阳斜射地面时，太阳辐射强度就小。

**2. 太阳赤纬：**是指地球赤道平面与太阳和地球中心的连线之间的夹角；赤纬角以年为周期，在  $+23^\circ 26'$  与  $-23^\circ 26'$  的范围内移动，成为季节的标志。

**3. 最小二乘法：**最小二乘法又称最小平方方法，是一种数学优化技术，它通过最小化误差的平方和寻找数据的最佳函数匹配；利用最小二乘法可以简便地求得未知的数据，并使得这些求得的数据与实际数据之间误差的平方和为最小；最小二乘法还可用于曲线拟合。其他一些优化问题也可通过最小化能量或最大化熵，用最小二乘法来表达。

**4. 太阳直射点：**太阳直射点是地球表面太阳光射入角度（即太阳高度角）为  $90^\circ$  的地点，它是地心与日心连线和地球球面的交点。太阳直射点所在的经线的地方时为正午 12 时，且由于一天内太阳直射点的纬度变化很小，我们可以认为某一天太阳直射点的纬度是不变的。

5. **等太阳高度线**：等太阳高度线属于等值线的一种，把太阳高度相等的各点连接成线叫做等太阳高度线。

6. **同心圆性质**：指物体在等太阳高度线上任意点处的影子长度是相等的性质。

## 二、主要符号说明

序号	符号	符号说明
1	$R$	地球半径
2	$h$	物体的高度
3	$l$	物体的影子长度
4	$\varphi$	物体所在地点的纬度
5	$\theta$	物体所在地点的经度
6	$\rho$	太阳高度角
7	$\delta$	太阳赤纬
8	$n$	由日期转化的天数
9	$\omega$	太阳时角
10	$t$	观测点的时间

## §5 模型的建立与求解

### 一、问题一的分析与求解

#### 1. 问题的分析

问题要求我们建立影子长度变化的数学模型，分析影子长度关于各个参数的变化规律，并应用所建立的模型画出 2015 年 10 月 22 日北京时间 9:00-15:00 之间天安门广场（北纬 39 度 54 分 26 秒，东经 116 度 23 分 29 秒）3 米高的直杆的太阳影子长度的变化曲线。

首先，我们确定影响影子长度的变量主要为太阳高度角  $\rho$  与固定直杆的高度  $h$ ；其次，通过查阅相关文献写出决定太阳高度角的参数表达式（影响参数主要有：地理纬度  $\varphi$ 、太阳赤纬  $\delta$  及太阳时角  $\omega$ ）；最后，写出影子长度与太阳高度角以及固定直杆高度之间的表达式，建立影子长度变化的数学模型。将 2015 年 10 月 22 日、北京时间 9:00-15:00 之间、天安门广场（北纬 39 度 54 分 26 秒，东经 116 度 23 分 29 秒）、直杆 3 米高等各个参数信息通过一定的处理后代入模型中，最终运用 MATLAB 软件编程绘制出太阳影子长度的变化曲线。

#### 2. 问题的求解

##### 方法一：影子长度变化模型

##### （1）模型的准备

天文年历中，太阳高度角  $\rho$ 、地理纬度  $\varphi$ 、太阳赤纬  $\delta$  及太阳时角  $\omega$  之间的关系式<sup>[1]</sup>为：

$$\sin \rho = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \omega \cos \delta$$

1971 年，Spencer 给出了太阳赤纬<sup>[2]</sup> $\delta$  的精细计算公式：

$$\delta = 0.006918 - 0.399912 \cos(\Gamma) + 0.070257 \sin(\Gamma) - 0.006758 \cos(2\Gamma) + 0.00907 \sin(2\Gamma) - 0.002697 \cos(3\Gamma) + 0.00148 \sin(3\Gamma)$$

其中， $\Gamma = 2\pi(n - 1)/365$ ， $n$  为一年中的第  $n$  天，即 1 月 1 日为  $n=1$ ，12 月 31 日为  $n=365$ 。

定义太阳时角  $\omega$  正午时为  $0^\circ$ ，每隔一小时增加  $15^\circ$ ，上午为正，下午为负。但是我们需要考虑时差对时角的影响，中国各个地区以北京时间为标准计时时间，实际上两地

之间存在一个时差，即 120。北京所在时区为东 8 区，经度为东经 120°，因此某个地区以北京时间为依据的时角<sup>[3]</sup> $\omega$ 的计算公式为：

$$\omega = \frac{\pi \times (120^\circ - t)15^\circ}{180^\circ} + \frac{\pi}{180^\circ} \times \begin{cases} (120^\circ - \theta) & \theta: 0 - 180^\circ E \\ (120^\circ + \theta) & \theta: 0 - 60^\circ W \\ (240^\circ - \theta) & \theta: 60 - 180^\circ W \end{cases} \text{ (rad)}$$

依据上式，可计算 180°E—180°W 全球各经度的时角，在编程时，为了方便计算，仅考虑 0°E—180°E。

## (2) 模型的建立

一天中，固定直杆影子的长度随着太阳位置的改变而不断地变化。假设某天某一时刻的太阳位置如图 1 所示：

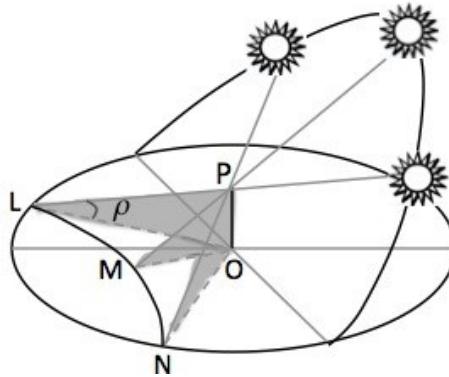


图 1 太阳影子顶点轨迹图

图 1 中，固定直杆高为  $h$ ，太阳光线穿过固定直杆顶点  $P$  在平面上形成一个影子点  $L$ ，影子长度  $OL$  为  $l$ ，太阳光线与地面的夹角为太阳高度角<sup>[4]</sup> $\rho$ 。因此，太阳直射长杆得到的影子长度  $l$  表达式为：

$$l = \frac{h}{\tan \rho} = \frac{h \cos \rho}{\sin \rho} = \frac{h \sqrt{1 - \sin^2 \rho}}{\sin \rho} = f(\varphi, \theta, n, h, t)$$

其中  $\varphi$  为所在地的纬度、 $\theta$  为所在地的经度， $h$  为长杆的高度， $t$  为时间， $n$  为一年中的第  $n$  天，由于太阳高度角  $\rho$  是  $\varphi, \theta, n, t$  的函数，所以， $l$  为  $\varphi, \theta, n, h, t$  的函数。

## (3) 模型的求解

我们将  $h = 3$ ， $\varphi = 39^\circ 54' 26'' N$ ， $\theta = 116^\circ 23' 29'' E$ ，日期为 10 月 22 日即  $n = 295$ ，时间为 9:15 即  $t = 9.25$  时代入公式中，运用 MATLAB 编程绘制出直杆的太阳影子长度的变化曲线如图 2 所示（程序详见附录程序 1），并且，由于程序中取点太少，仅有 7 个数据点，影子长度不够光滑，不能显示每刻的长度，为此，对 9—15 的数据点进行插值处理，处理后的结果如图 2 所示：

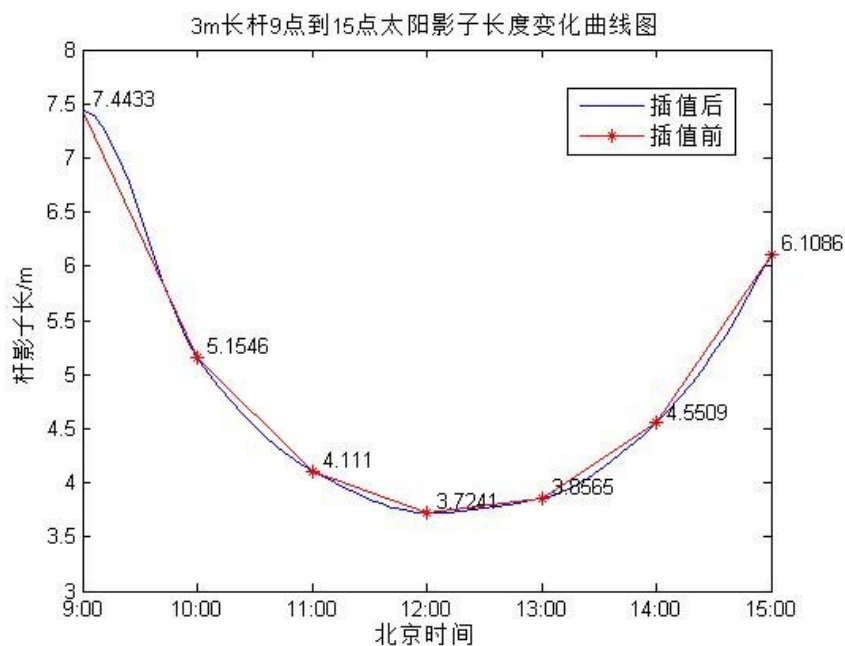


图2 直杆9点到15点太阳影子长度变化曲线图

## 方法二：空间法向量—太阳高度角 $\rho$ 模型

由于太阳直射点的位置没有确定，所以，此方法仅可以求得具体的地点，即影长 $l$ 和经度纬度之间的关系，而不能确定影长 $l$ 与日期时间之间的关系。因此，这里仅给出建模的步骤，而不做详细求解。

设：1. 地球为一标准球体，半径为  $R=6371\text{km}$

2. 纬度设为 $\varphi$ ：某点  $P$  与地心的连线和赤道面的夹角取值范围是  $0^\circ \sim 90^\circ$ ，将地球放在直角坐标系  $o-xyz$  中，地心与坐标轴原点重合。

3. 经度为 $\theta$ ，以 $x$ 轴所在的球线为  $0^\circ$  经线， $\theta$  为点  $P$  所在经线与  $0^\circ$  经线的角度差。

4. 假设太阳光从  $y$  轴反方向射入，且平行于  $y$  轴，如图3所示：

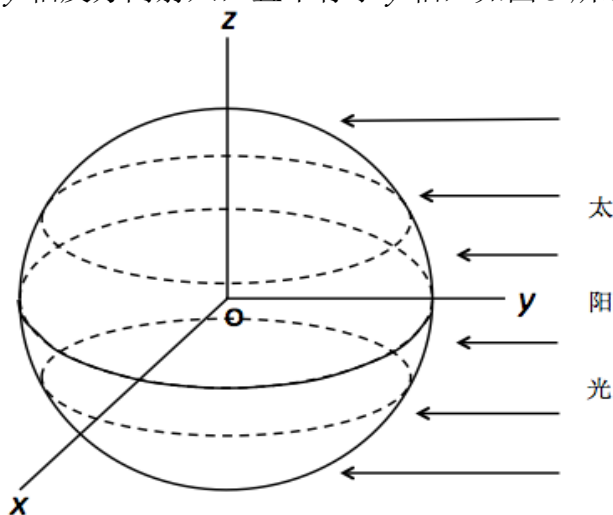


图3 太阳直射地球模拟图

5. 球面上一点  $P$  的坐标可以表示为  $P(\varphi, \theta)$ ，或者表示为  $P(x, y, z)$ ，其中

$$x = R \cos \varphi \cos \theta$$

$$y = R \cos \varphi \sin \theta$$

$$z = R \sin \varphi$$



6. 计算物体的影子长度  $l$  时, 由于物体的高度  $h$  相对于地球来说很小, 于是将物体影子的长度  $l$  视作是太阳光在点  $P$  切平面上的投影, 而不是地球弧面, 即忽略地球的弧度, 于是关键是要求出  $\rho$

$$l = \frac{h}{\tan \rho}$$

7. 球面上任意一点  $P(\varphi, \theta)$  的法向量为  $\vec{n}_1$ , 切平面为  $\pi_1$

$$\pi_1: x \cos \varphi \cos \theta + y \cos \varphi \sin \theta + z \sin \varphi = R$$

法线为:

$$\frac{x - R \cos \varphi \cos \theta}{\cos \varphi \cos \theta} = \frac{y - R \cos \varphi \sin \theta}{\cos \varphi \sin \theta} = \frac{z - R \sin \varphi}{\sin \varphi}$$

8. 要求的  $\rho$  即求: 切平面  $\pi_1$  与  $x-o-y$  面之间的夹角

9. 根据  $l = \frac{h}{\tan \rho}$  可得: 球面上任意一点  $P(\varphi, \theta)$  上高度为  $h$  的物体的影子长度标记为

$l(\varphi, \theta)$ 。

10. 求任意一点  $P$  处物体影子长度随时间变化的曲线图, 即求: 在同一纬度下不同经度的点的影子长度  $l(\varphi, \theta, h)$ 。

11. 证明: 球面上的以太阳直射点为圆心的同心圆上所有点的太阳高度角是相等的。(此定理在论文最后有给出, 同时, 也可以证明球面上的圆的切平面围成圆锥, 且圆锥顶点与圆心球心共线)。下面给出证明过程:

在某一时刻, 以太阳直射点为中心的圆上所有点的太阳高度都相等, 且球面上与太阳直射点距离相等的所有点上高度相同的物体的影子长度是相同的。下面给出几何证明, 某以太阳直射点为中心的圆上物体投影如图 4 所示:

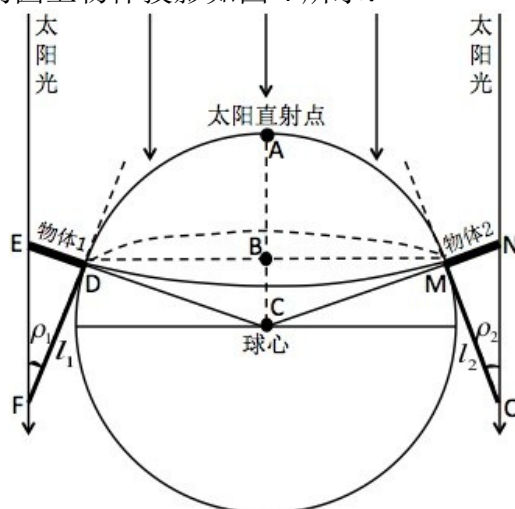


图 4 物体投影平面图

如图 4 所示, 太阳直射点的位置为  $A$ , 太阳光线穿过球心  $C$  且与点  $A$  所在的切平面垂直, 连接  $AC$ , 过  $AC$  上任意一点  $B$ , 做平行于点  $A$  所在切平面的切面  $DBM$ ,  $D$  点与  $M$  点分别垂直放置两个高度  $h$  相同的物体 1 与物体 2。

我们将球体视为一个圆形来看, 即过  $D$  点的切线为  $l_1$ , 过  $M$  点的切线为  $l_2$ , 太阳光平行经过物体 1 顶点  $E$  与  $l_1$  相交于点  $F$ , 经过物体 2 顶点  $N$  与  $l_2$  相交于点  $O$ , 连接  $CD$ 、 $CM$ , 显然  $CD \perp DF$ 、 $CM \perp MO$ 、 $\angle DCB = \angle MCB$ 。

$$\because ED \perp DF \quad CD \perp DF$$

$\therefore E$ 、 $D$ 、 $F$  三点在同一条直线上



∴ 同理可得，点 C、M、N 也在同一条直线上

∴ 太阳光线是平行的

∴  $EF \parallel AC \parallel NO$

∴  $\angle FEC = \angle ACE$   $\angle ACN = \angle CNO$

$\angle \rho_1 = 90^\circ - \angle FEC = 90^\circ - \angle CNO = \angle \rho_2$

∴  $\triangle DEF \sim \triangle MNO$

又 ∵  $ED = MN = h$

∴  $\triangle DEF \cong \triangle MNO$  即  $DF = MO$

因此，我们可以得出以下结论：在某一时刻，地球球面上与太阳直射点距离相等的所有点上高度相同的物体的影子长度是相同的。

同理：当地球是不标准球体而是椭球体时，查询有关资料得知，地球为一椭球，有长半轴  $a=6378.1366km$ ，极半径  $b=6356.7519km$ ，离心率  $e=0.0579$ ，依据上述步骤，可求得，椭球上各点  $P(x, y, z)$  处物体的影子长度  $l_2$ 、切平面  $\pi_2$  以及太阳高度角  $\rho_2$ 。

## 二、问题二的分析与求解

### 1. 问题的分析

问题要求我们根据某固定直杆在水平地面上的太阳影子顶点坐标数据，建立确定直杆所地点的数学模型，并将模型应用于附件 1 的影子顶点坐标数据，给出若干个可能的地点。

首先，我们根据附件 1 分析可知，已知的参数数据有：测量日期 2015 年 4 月 18 日、14:42-15:42 时间段内每隔三分钟读取的 21 组固定直杆影子长度  $l_i$  与观测时间点  $t_i$ ，未知的参数数据有：直杆的高度  $h$ 、及其所处地点的经度  $\theta$  与纬度  $\varphi$ ；其次，将问题一中的影子长度表达式转化为以经度  $\theta$ 、纬度  $\varphi$  作为自变量，长杆影子长度  $l$ 、日期  $n$  以及时间  $t$  作为已知参数，而长杆高度  $h$  作为因变量的表达式；最后，我们先用粗劣搜索算法找到 0-90N，0-180E 的一个经纬度的粗劣范围，然后用 GA 算法进行精确求解，最终得到使  $\text{Var}(h_i)$  达到最小的最优  $(\varphi, \theta)$  解。

将定量日期  $n$  代入，将观测到的 21 个长杆影子长度  $l$ 、时间  $t$  代入关系式，可得到杆高  $h$  的 21 个估计值  $h_i$ ，优良的经纬度使得估计值  $\text{Var}(h_i)$  的方差很小，而实际观测点的方差为 0。

### 2. 问题的求解

#### (1) 模型的准备

##### 算法 I 遗传算法

遗传算法，是一种通过模拟自然进化过程以搜索最优解为目标的方法，它是于 1975 年由美国 Michigan 大学的 J. Holland 教授首先提出的。遗传算法是一种并行式算法，从一个种群开始，种群是由一群个体组成。每个个体都相当于一个染色体，带有实体的基本特征，它是由多个基因经过一定地规则组合而成，染色体作为遗传物质的主要载体，它决定了个体参数的外部表现形式。

遗传算法在产生初代种群之后，按照一定的原理（如优胜劣汰原理），在每一代中都要根据适应度值的大小选择出较好的个体，同时在每一代中都进行交叉操作和变异操作，这样就产生了一个全新的种群，如此反复的操作，产生的新的种群解则会比其父代解要更加优良，使新的种群解越来越接近于最优解，直到达到收敛条件以后，将最后的末代最优个体经过解码操作，得到的解即可看作所求优化问题的最优解。其过程如下：

① 初始化设置：主要设置一些基本参数，如迭代次数归零并设置最大迭代次数；设置遗传算法中的几个主要参数，如交叉概率、变异概率和种群规模等并随机产生初始

种群。

② 个体评价：主要是根据适应度函数评价群体中的每个个体的适应度值，适应度值必须为非负数，适应度值的高低代表着个体的优劣，适应度值较大的个体，人们认为是优良的个体，需要保存，适应度值较小的个体，人们认为是较差的个体，需要淘汰。

③ 选择运算：在此选择运算采用比例选择算子，比例选择因子是利用比例于各个个体适应度的概率决定其子孙的遗传可能性，对群体运用选择算子进行操作，即按照一定的方法或规则，如优胜劣汰等，根据每个个体的适应度值，保留一些适应度值较高的个体，使这些优良的个体能遗传到下一代群体中。

④ 交叉运算：将当前群体的个体随机搭配成对，以固定的初始设置的交叉概率，对每个个体交换它们的部分染色体。一般情况下，在交叉操作中，都使用单点交叉算子进行操作，即经过选择操作后的种群中选择两个需要进行交叉操作的个体，随机产生一个交叉点位置，这两个个体在交叉点位置互换部分基因码，从而形成两个新的子个体，这就是单点交叉。

⑤ 变异运算：将当前群体中的每个个体，以设置的一定的变异概率改变该染色体上的基因值，群体经过选择运算、交叉运算和变异运算操作之后会得到下一代的群体，通常称下一代的群体为子代，而上一代的群体为父代，为了避免问题过早的出现收敛现象，对于二进制的基因码组成的个体种群，以小概率将基因码翻转，即将 0 转变为 1，与此相反将 1 变成 0。

⑥ 终止条件判断：如果当前的迭代次数小于初始化设置中的最大迭代次数，那么转向步骤②，继续循环操作运算，直到达到最大迭代次数为止；否则，将当前群体中的性能最优的个体，即具有最大适应度值的个体作为最优解输出，并终止计算。

本次 GA 算法流程如图 5 所示：

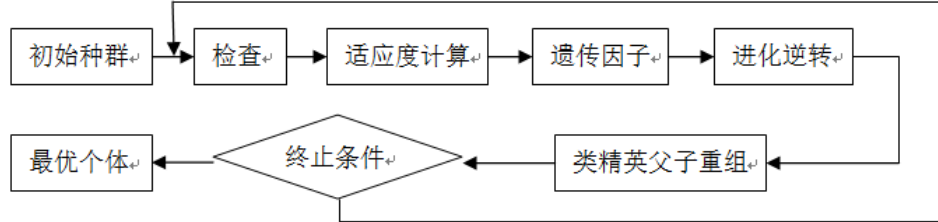


图 5 遗传算法一般流程图

## (2) 模型的建立

杆高 $h$ 与经纬度模型

附件一中给出 $(x, y)$ 的坐标，则影子长度 $l$ 即为 $\sqrt{x^2 + y^2}$ （求解后的影子长度数据详见附录附表 1），影子长度 $l$ 、日期 $n$ 与时间 $t$ 已知，而长杆高度 $h$ 以及所在位置的经纬度皆未知，因此将影子长度表达式转化为以经度 $\theta$ 、纬度 $\varphi$ 作为因变量，长杆影子长度 $l$ 、日期 $n$ 以及时间 $t$ 作为参数，而长杆高度 $h$ 作为因变量的表达式，整理后得：

$$f(\varphi, \theta) = h = l * \tan \rho = l \frac{\sin \rho}{\sqrt{1 - \sin^2 \rho}}$$

我们取附件 1 中 15:12 时刻即 $t = 15.2$ 时，此时的影子长度为 1.501482m，日期为 2015 年 4 月 18 日即 $n = 108$ ，此时，长杆高度 $h$ 为：

$$h = l \frac{\sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \left[ \left( \frac{2\pi}{3} - t \right) \pi / 12 + \left( \frac{2\pi}{3} - \theta \right) \right] \cos \delta}{\sqrt{1 - (\sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \left[ \left( \frac{2\pi}{3} - t \right) \pi / 12 + \left( \frac{2\pi}{3} - \theta \right) \right] \cos \delta)^2}}$$

式中， $\varphi \in [0, \pi/2]$ ， $\theta \in [0, \pi]$ ， $\Gamma = 2\pi(n - 1)/365 = 1.8419$ ， $\delta = 0.006918 -$

$$0.399912 \cos(\Gamma) + 0.070257 \sin(\Gamma) - 0.006758 \cos(2\Gamma) + 0.00907 \sin(2\Gamma) - 0.002697 \cos(3\Gamma) + 0.00148 \sin(3\Gamma)。$$

运用 MATLAB 编程画出函数拟合图如图 6 所示（具体程序详见附录程序 2）：

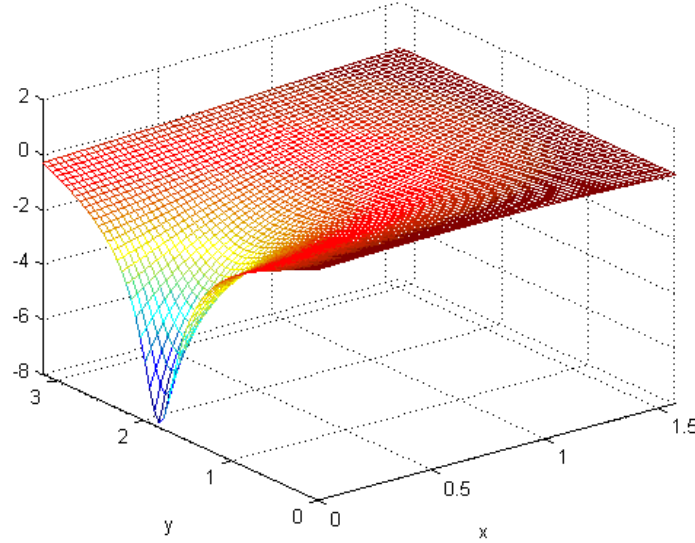


图 6 不同经纬度下影子长度的变化

图 6 中,  $x$  轴对应地理纬度,  $y$  轴对应地理经度。由图可以看出, 随着纬度的增加, 杆高估计量  $\hat{h}_i$  的方差减小, 图中最低点即是太阳直射点所在的位置, 此刻的杆高估计值的方差是最大的, 这是因为一天中不同的时间对应不同的经度, 不同时间的杆高估计值就是同一纬度不同经度上杆高的估计值。

我们定义经度和纬度的取值范围分别为: 经度  $\varphi \in [0, \pi/2]$ , 纬度  $\theta \in [0, \pi]$ , 日期  $n$  为定值, 将 21 组固定直杆影子长度  $l_i$ 、观测时间点  $t_i$  带入表达式中, 则可得出到 21 个  $h$  与  $\varphi$ 、 $\theta$  之间的表达式。因此, 每带入一组经度和纬度的数据, 都会得到 21 个不同的  $\hat{h}$ , 但是由于  $h$  的实际值未知, 因此我们需要找到最优组合  $(\varphi, \theta)$ , 使  $\text{Var}(h_i)$  达到最小。

$$\min \text{Var}(h_i) = \min \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_i$$

### (3) 模型的求解

粗劣搜索算法+GA=精确求解经纬度

算法的基本思想是: 设置粗劣遍历搜索算法, 求得搜索范围内的某些粗糙的点, 然后, 将这些粗糙点作为部分种群添加一些随机种群作为遗传算法的初始种群, 这样, 可以理由粗劣点提高算法的收敛速度, 同时又可以用随机种群防止过早收敛, 扩大搜索范围。

#### ① 粗劣搜索算法（具体程序详见附录程序 3）

用遍历搜索的思想, 在经度  $\varphi \in [0, \pi/2]$ , 纬度  $\theta \in [0, \pi]$  之间进行 1 度搜索, 我们可以大致确定最优解是在  $19^\circ\text{N}, 109^\circ\text{E}$  附近, 大致在海南、三亚附近。

#### ② GA 算法精确求解（具体程序详见附录程序 3）

在粗劣搜索后, 我们只是得到了一个大致的经纬度的度数, 而没有精确到分、秒, 因此, 我们继续运用 GA 算法进行精确求解, GA 进化图如图 7 所示:

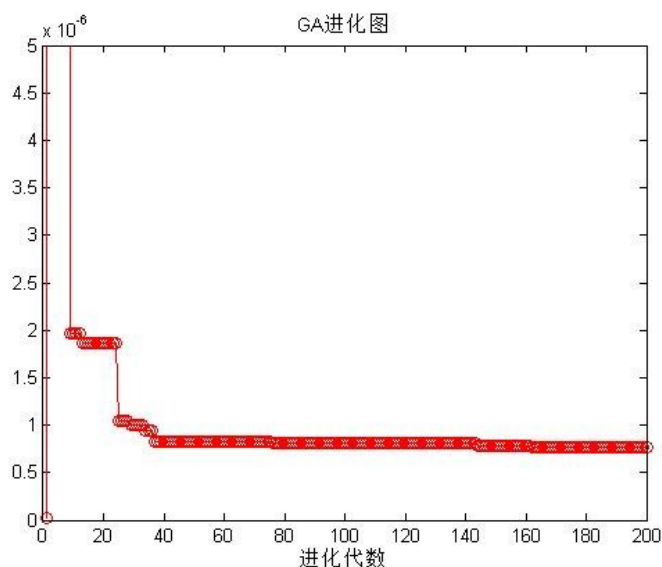


图 7 GA 进化图

最终得到结果汇总成表如表 1:

表 1 第二问地点求解数值

量	粗略解	精确解	地名
纬度	19° N	17° 24' 4.7975" N	海南、三亚
经度	109° E	110° 51' 35.1037" E	

注: 杆高  $h$ 、日期  $n=109$  天 (2015 年 4 月 18 日), 影长  $l$  和时间  $t$  已知

### 三、问题三的分析与求解

#### 1. 问题的分析

问题要求我们根据某固定直杆在水平地面上的太阳影子顶点坐标数据, 建立确定直杆所处的地点和日期的数学模型, 并模型分别应用于附件 2 和附件 3 的影子顶点坐标数据, 给出若干个可能的地点与日期。

首先, 我们根据附件 2 和附件 3 分析可知, 已知的参数数据有: 12:41-13:41 以及 13:09-14:09 时间段内每隔三分钟读取的 21 组固定直杆影子长度  $l_i$  与观测时间点  $h_i$ , 未知的参数数据有: 直杆的高度  $h$ 、直杆所处地点的经度  $\theta$  与纬度  $\varphi$ 、及观测日期  $n$ ; 其次, 将问题二中的杆高表达式转化为以经度  $\theta$ 、纬度  $\varphi$  和日期  $n$  作为自变量, 长杆影子长度  $l$ 、以及时间  $t$  作为已知参数, 而长杆高度  $h$  作为因变量的表达式; 最后, 我们定义一个经纬度的取值范围和目标函数, 用 GA 算法进行遍历搜索与精确求解, 最终得到使目标函数达到最优的纬度  $\varphi$  和经度  $\theta$  解。

#### 2. 问题的求解

##### (1) 模型的准备

首先, 由于杆高  $h$  未知, 给出长杆影子长度  $l$ 、以及时间  $t$  的观测值, 求经度  $\theta$  与纬度  $\varphi$ 、及观测日期  $n$ , 我们仍然可以考虑沿用上面的算法进行求解, 最优解使得杆高  $h$  的观测值  $h_i$  的方差最小。但是, 由于增加了变量日期  $n$ , 遍历搜索经度  $\theta$  与纬度  $\varphi$ 、及观测日期  $n$ , 总有最小的方差处在北极点附近, 这也与杆高  $h$  与经纬度的关系有关, 正如上面分析的, 随着纬度的升高, 同经度的杆高的方差变小, 北极点杆高方差总是最小的。

下面, 我们考虑给定一个杆高  $h$ , 依据杆高与经纬度的关系图可得到, 除赤道和北极点附近地区外, 其他地区的杆高的均值为 2, 因此在实际的编程过程中, 第一个地点

用的杆高为杆高均值（除赤道与北极点附近地区的北半球上的其他地区）2，第二个地点的杆高为杆高均值（除赤道与北极点附近地区的北半球上的其他地区）3。

最后，在设置玩杆高后，可设置相应的最小二乘和最小一乘的优化模型。

综上，有

$$\min \begin{cases} \sum (h_i - E h_i)^2 & h \text{ 未知} \\ \sum |h_i - h| & h \text{ 已知} \\ \sum (h_i - h)^2 & h \text{ 已知} \end{cases}$$

## （2）模型的建立

附件 2 和附件 3 中给出 $(x, y)$ 的坐标，则影子长度 $l$ 即为 $\sqrt{x^2 + y^2}$ （求解后的影子长度数据详见附录附表 1），影子长度 $l$ 与时间 $t$ 已知，而长杆高度 $h$ 、以及所在位置的经纬度皆未知，因此将影子长度表达式转化为以经度 $\theta$ 、纬度 $\varphi$ 、日期 $n$ 作为因变量，长杆影子长度 $l$ 及时间 $t$ 作为已知参数，而长杆高度 $h$ 作为因变量的表达式，整理后得：

$$f(\varphi, \theta, n) = h = l * \tan \rho = l \frac{\sin \rho}{\sqrt{1 - \sin^2 \rho}}$$

我们定义经度、纬度和日期的取值范围分别为：经度 $\varphi \in [0, \pi/2]$ ，纬度 $\theta \in [0, \pi]$ ，日期 $n \in [1, 365]$ 为定值，分别将附件 2 与附件 3 中的 21 组固定直杆影子长度 $l_i$ 、观测时间点 $t_i$ 带入表达式中，则可得到 21 个 $h$ 与 $\varphi$ 、 $\theta$ 之间的表达式。因此，每带入一组经度和纬度的数据，都会得到对应固定直杆影子长度 $l_i$ 、观测时间点 $t_i$ 下的 $\hat{h}_i$ ，我们需要求解经度 $\theta$ 、纬度 $\varphi$ 、日期 $n$ ，使得

$$\min \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (h_i - h)^2$$

成立。

## （3）模型的求解

粗劣搜索算法结合多种群 GA 求解上述优化问题，多种群 GA 算法流程图如图 8 所示：

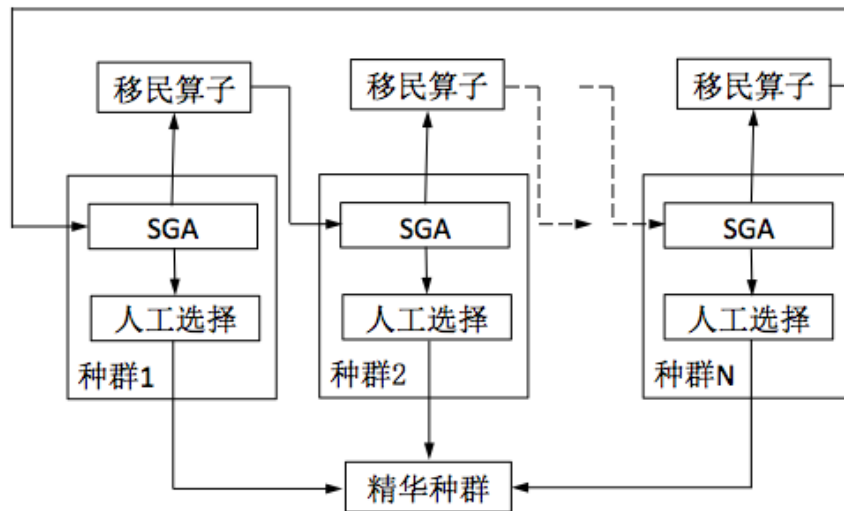


图 8 多种群 GA 算法流程图

### ① 多种群 GA 算法遍历搜索（具体程序详见附录程序 4）

通过在 MATLAB 中运用 GA 算法进行遍历搜索，在经度 $\varphi \in [0, \pi/2]$ ，纬度 $\theta \in [0, \pi]$ 之间，我们可以大致确定最优解是在 19°N, 109°E 附近。

### ② 多种群 GA 算法精确求解（具体程序详见附录程序 4）



在运用 GA 算法进行遍历搜索后，我们只是得到了一个大致的经纬度的度数，而没有精确到分、秒，因此，我们继续运用 GA 算法进行精确求解。

首先，求解杆高 $h$ 未知的优化模型。

当假设杆高 $h$ 未知时，以方差最小为目标，求得的地点是 $89^{\circ}\text{N}$ ， $111^{\circ}\text{E}$ ，且多次求解的结果都在北极点附近。此方法不够精确，出现的问题如同问题二中图 5 的分析结果，即杆高估计值 $\hat{h}_i$ 的方差会随着纬度的增加而变小，这与实际情况相违和。太阳直射点的杆高估计变化最大，极点的杆高估计变化最小，之所以会产生估计是因为时间是随经度变化而变化的，不同时间导致了杆高的估计值不同。

再者，求解平均杆高模型(即用平均主要地区的杆高的平均值为杆高的实际值 $h$ )。

第一个地点的杆高平均值  $h = 2m$ ，结果如表 2 所示：

表 2 第三问第一个地点求解数值

量	粗略解	精确解	地名
纬度	$41^{\circ}\text{N}$	$40^{\circ} 1' 45.1023''\text{N}$	新疆喀什、塔里木河
经度	$79^{\circ}\text{E}$	$77^{\circ} 42' 58.1478''\text{E}$	
日期 n	154	163	

注：杆高 $h$ 、日期以及地点是未知的，有影长 $l$ 和时间的观测值

第二个地点的杆高平均值  $h = 2m$ ，结果如表 3 所示：

表 3 第三问第二个地点求解数值

量	粗略解	精确解	地名
纬度	$28^{\circ}\text{N}$	$23^{\circ} 22' 39.2670''\text{N}$	湖南湘西州、湖南怀化
经度	$110^{\circ}\text{E}$	$109^{\circ} 31' 0.1559''\text{E}$	
日期 n	332	311	

注：杆高 $h$ 、日期以及地点是未知的，有影长 $l$ 和时间的观测值

多次运行程序得到的多种群遗传算法的进程图分别如图 9 和图 10 所示：

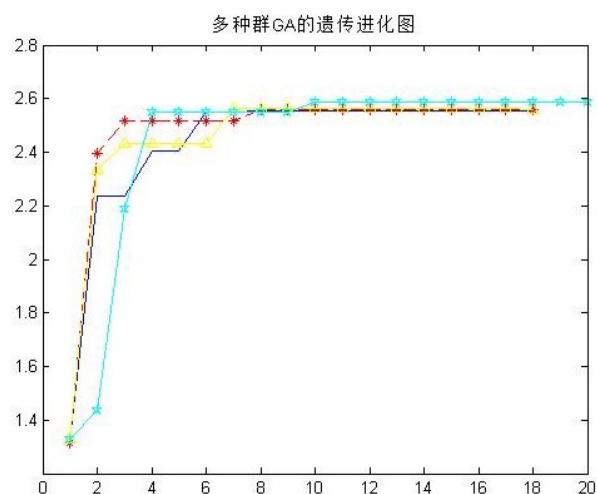


图 9 多种群 GA 求解第一个地点进化过程图

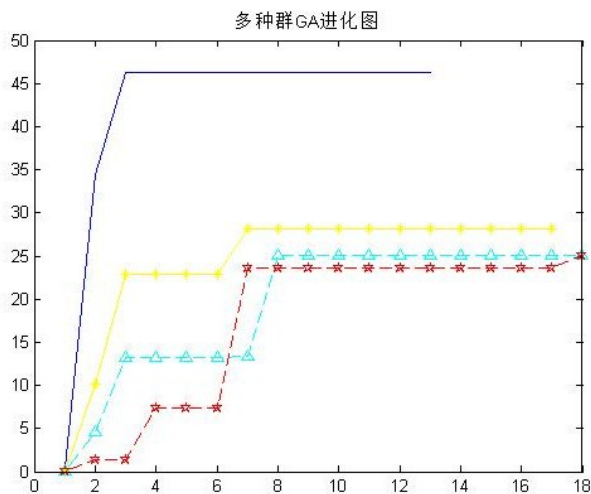


图 10 多种群 GA 求解第二个地点进化过程图

#### 四、问题四的分析与求解

问题要求我们建立确定附件 4 中视频拍摄地点的数学模型，并应用所建立的模型给出若干个可能的拍摄地点。

针对拍摄日期已知的情况，首先，我们要提取视频中直杆在 40 分钟内影子长度变

化的数据, 及视频中含有的有关影响直杆影子长度的参数信息; 其次, 我们建立以  $n, h$  为常量, 以  $l, t$  的值作为观测值, 以  $\varphi, \theta$  为未知参数的基于最小二乘法的影子定位模型  $f(\varphi, \theta) = l$ ; 最后, 求以  $\varphi$  和  $\theta$  为自变量的二元函数的最小值以此确定最优的  $\varphi$  和  $\theta$  取值。针对拍摄日期未知的情况, 提取出视频中的有效信息后, 我们建立以  $h$  为常量, 以  $l, t$  的值作为观测值, 以  $\varphi, \theta, n$  为未知参数的基于最小二乘法的影子定位模型  $f(\varphi, \theta, n) = l$ ; 最后, 求以  $\varphi, \theta, n$  为自变量的多元函数的最小值以此确定最优的  $\varphi, \theta, n$  取值。

## 2. 问题的求解

### (1) 模型的准备

附件 4 为一根直杆在太阳下的影子变化的视频, 且该直杆的高度为 2 米。首先, 我们要提取视频中杆在 40 分钟内影子长度变化的数据, 及视频中含有的有关影响直杆影子长度的参数信息。

① 读取视频中含有的有关影响直杆影子长度的参数信息

由题目可得, 该直杆的高度  $h$  为 2 米, 在视频上可以直接看出, 拍摄日期为 2015 年 7 月 13 日即  $n = 194$ , 时间  $t$  为 8:54:06-9:34:46。

② 读取直杆的影子长度

首先, 我们运用 KMPlayer 软件对视频进行“抓帧”, 即“捕获帧”, 提前设定每 100 秒捕获一次, 最终得到 25 张不同时刻的视频截图, 其中一张截图如图 11 所示 (其余图片详见附件 1):



图 11 KMPlayer 抓帧截图

其次, 我们运用 Photoshop 软件对 25 幅图进行分析, 运用标尺工具对每幅图中直杆的高度及影子长度进行像素测量, 并计算出二者之间的比例关系。由于直杆的实际高度已知是 2 米, 则根据直杆在图中高度与实际高度得出的比例, 可求得 25 个时刻下影子长度  $l$  的实际值, 具体数据如表 4 所示:

表 4 25 个时刻下的影子长度

时间	杆子(像素)	影子(像素)	杆高(米)	影子(米)
8:54:06	296.11	268.01	2	1.810205667
8:55:46	296.08	265.01	2	1.790124291
8:57:26	297	262	2	1.764309764
8:59:06	297	258	2	1.737373737
9:00:46	297	257	2	1.730639731
9:02:26	296	255	2	1.722972973
9:04:06	296	252.02	2	1.702837838
9:05:46	296.11	250.01	2	1.688629226
9:07:26	296.08	246	2	1.661713051



9:09:06	296.11	243	2	1.641281956
9:10:46	296	242.01	2	1.635202703
9:12:26	296	239.1	2	1.615540541
9:14:06	296	236.03	2	1.594797297
9:15:46	296	234.02	2	1.581216216
9:17:26	295	230.03	2	1.559525424
9:19:06	297	229.03	2	1.542289562
9:20:46	297	227.08	2	1.529158249
9:22:26	297	224.06	2	1.508821549
9:24:06	296	221.04	2	1.493513514
9:25:46	295	219.08	2	1.485288136
9:27:26	297	217.06	2	1.461683502
9:29:06	297	215.06	2	1.448215488
9:30:46	296	213.04	2	1.439459459
9:32:26	295	210.06	2	1.424135593
9:34:06	295.11	207.09	2	1.40347667

## (2) 模型的建立

最小二乘法（又称最小平方法）是一种数学优化技术。它通过最小化误差的平方和寻找数据的最佳函数匹配。利用最小二乘法可以简便地求得未知的数据，并使得这些求得的数据与实际数据之间误差的平方和为最小。

由问题一建立的模型，我们可得太阳直射长杆得到的影子长度 $l$ 表达式为：

$$f(\varphi, \theta, n, h, t) = l = \frac{h}{\tan \rho} = \frac{h \cos \rho}{\sin \rho} = \frac{h \sqrt{1 - \sin^2 \rho}}{\sin \rho}$$

### ① 拍摄日期已知

以 $l, t$ 的值作为一系列观测值，以 $\varphi, \theta$ 为未知参数，日期为2015年7月13日即取 $n = 194$ ， $h = 2$ 。通过读取视频，得到 $l$ 与 $t$ 对应的24组数据。将这25组数据 $(l_i, t_i)$ 代入方程式中，设 $\varepsilon_i = (h \sqrt{1 - \sin^2 \rho}) / \sin \rho - l_i$ ，称 $\varepsilon_i$ 是点 $(l_i, t_i)$ 到曲线 $(h \sqrt{1 - \sin^2 \rho}) / \sin \rho$ 的偏差。因此，离差平方和的大小，即

$$\sum_{i=1}^{n=25} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n=25} (\hat{l}_i - l_i)^2 = \sum_{i=1}^{n=25} \left( \frac{h \sqrt{1 - \sin^2 \rho}}{\sin \rho} - l_i \right)^2$$

的大小在总体上刻画了这25个点与曲线的接近程度，为了使其接近程度最好，也就是求以 $\varphi$ 和 $\theta$ 为自变量的二元函数

$$w(\varphi, \theta) = \sum_{i=1}^{n=25} \left( \frac{h \sqrt{1 - \sin^2 \rho}}{\sin \rho} - l_i \right)^2$$

的最小值。

上式中， $\sin \rho = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \omega \cos \delta$ ， $\omega = (120^\circ - t)15^\circ + (120^\circ - \theta)$ ， $\varphi \in [0, \pi/2]$ ， $\theta \in [0, \pi]$ ， $\delta = 0.006918 - 0.399912 \cos(\Gamma) + 0.070257 \sin(\Gamma) - 0.006758 \cos(2\Gamma) + 0.00907 \sin(2\Gamma) - 0.002697 \cos(3\Gamma) + 0.00148 \sin(3\Gamma)$ ，式中 $\Gamma = 2\pi(n - 1)/365$ ，代入 $n = 194$ ， $h = 2$ 后可得：

$$f(\varphi, \theta, n, h, t) = \frac{h\sqrt{1 - \sin^2 \rho}}{\sin \rho}$$

$$= \frac{2\sqrt{1 - (\sin \varphi \sin(0.4016) + \cos \varphi \cos[(\frac{2\pi}{3} - t)\pi/12 + (\frac{2\pi}{3} - \theta)]\cos(0.4016))^2}}{\sin \varphi \sin(0.4016) + \cos \varphi \cos[(\frac{2\pi}{3} - t)\pi/12 + (\frac{2\pi}{3} - \theta)]\cos(0.4016)}$$

② 拍摄日期未知

同拍摄日期已知情况相同，以  $h = 2$  为定量，以  $l, t$  的值作为一系列观测值，以  $\varphi, \theta, n$  为未知参数，最终得到以  $\varphi, \theta, n$  为自变量的多元函数

$$w(\varphi, \theta, n) = \sum_{i=1}^{n=25} \left( \frac{h\sqrt{1 - \sin^2 \rho}}{\sin \rho} - l_i \right)^2$$

求使  $w(\varphi, \theta, n)$  取得最小值时对应的  $\varphi, \theta, n$  即为最优解。

### (3) 模型的求解

分别对  $\varphi$  和  $\theta$  进行求导，令

$$\begin{cases} w'_{\varphi}(\varphi, \theta) = 0 \\ w'_{\theta}(\varphi, \theta) = 0 \end{cases}$$

可以求出  $w(\varphi, \theta)$  值最小的情况下  $\varphi$  和  $\theta$  的取值，即为最可能的拍摄地点。

由于此处的函数比较复杂，求导过程过于繁杂，因此这里对求导过程不作详细描述，我们仍然使用 MATLAB 进行编程，分别求出拍摄日期已知与拍摄日期未知的情况下可能的拍摄地点与日期（程序详见附录程序 5）。

多次运行程序得到的多种群遗传算法的进程图分别如图 12 和图 13 所示：

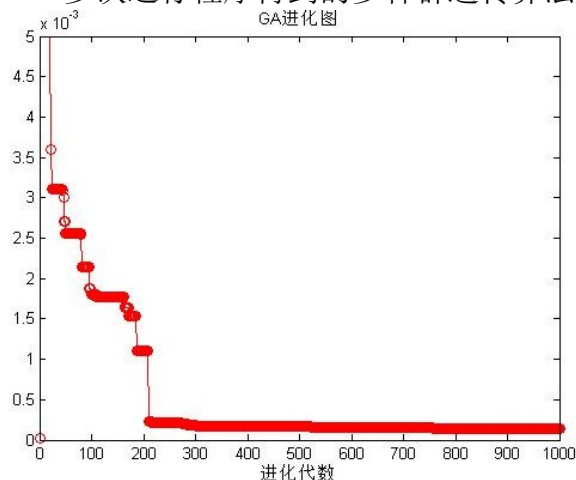


图 12 GA 进化图

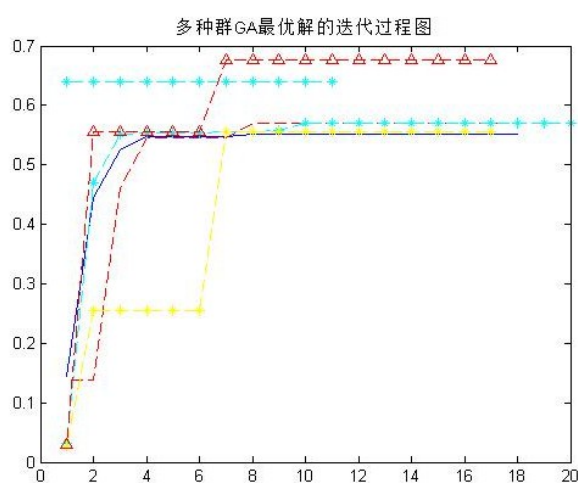


图 13 多种群最优解的迭代进化图

第一个地点的杆高平均值  $h = 2m$ ，结果如表 4 所示：

表 4 第四问第一个地点求解数值

量	粗略解	精确解	地名
纬度	42° N	40° 5' 17.6018" N	长春、哈尔滨
经度	122° E	121° 14' 41.5836" E	

注：杆高  $h=2m$ 、日期  $n=194$  天（2015 年 7 月 13 日），影长  $l$  和时间  $t$  已知

第二个地点的杆高平均值  $h = 2m$ ，结果如表 5 所示：

表 5 第四问第二个地点求解数值

量	粗略解	精确解	地名
纬度	41° N	40° 32' 59.9198" N	鞍山市、沈阳

经度	123° E	123° 40' 51.8331" E	
日期 n	143	203	
注：杆高 $h=2m$ 、日期 $n=194$ 天（2015 年 7 月 13 日），影长 $l$ 和时间 $t$ 已知			

## §6 误差分析与灵敏度分析

### 一、误差分析

1. 在本文的问题研究是基于地球是一个标准球体的理想化条件下，但在现在生活中，地球呈椭球体状，则本文太阳高度角的计算公式不适用与实际情况，且当地球为椭球体时，同心圆性质也将不存在，因此本文的研究结果与实际情况存在一定的偏差。

2. 在问题四读取视频数据的过程中，为了研究的可操作性和便捷性，从 40 分钟的视频资料中只读取 25 组数据，没有读取全部数据，模型结果的精确性存在一定的偏差。

3. 选择建模方法的过程中，可能会有方法选取不当而造成的误差，从而对结果造成影响。

### 二、灵敏度分析

关于经纬度对杆长  $h$  的影响，我们分别从图像分析，数值分析，现实情况分析三个角度分析纬度对杆长的影响：

#### 1. 图像分析

日期、时间、影长取固定值，绘制  $h$  与经度、纬度的二维图像如图 14 所示：

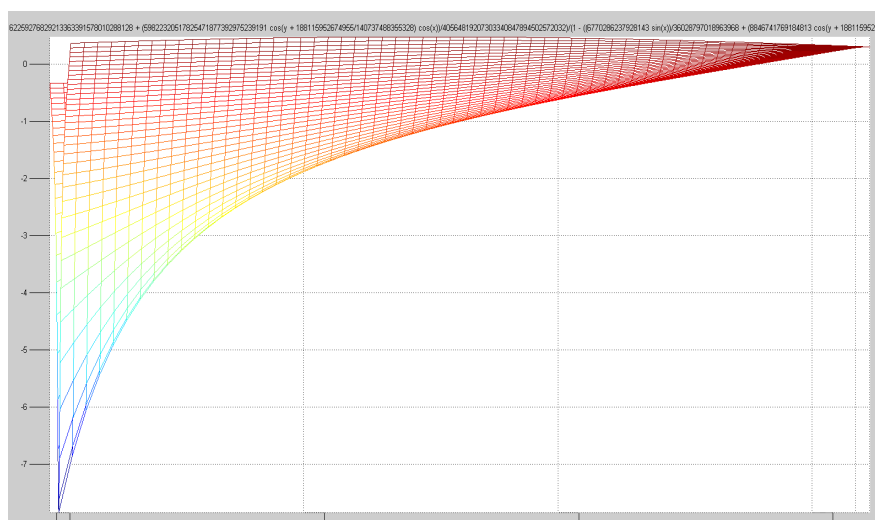


图 14  $h$  与经度、纬度的二维图像

其中，横轴为纬度，从 0-90 取值，纵轴为杆高，可以看到，杆高的变化随着纬度的提高渐渐变小，赤道附近的杆高的估计值的方差最大，北极点杆高的估计值的方差最小。

#### 2. 数值分析

在第三问的计算中，当假设杆高  $h$  未知时，以方差最小为目标，求得的地点是  $89^\circ N$ ， $111^\circ E$ ，且多次求解的结果都在北极点附近。这说明，一年当中，北极点的杆高估计值的方差小。

#### 3. 现实情况

太阳直射点一年中大多在赤道附近徘徊，且太阳直射点的正午太阳高度角为 0，杆

高为 0，随着时间的推移，经度变化，影长开始变化，且逐渐趋近与无穷；而北极点附近的太阳高度角为 0，且时间推移其变化不大。

因此，可得到“一年中北极点的方差最小，赤道附近点的方差最大”的对算法编程有价值的结论。

## §7 模型的评价与推广

### 一、模型的优点

1. 本文对问题有合理的猜想、假设，建立合理的模型并进行计算求解；
2. 灵活运用 MATLAB 软件，编写程序求解模型的结果，较为方便快捷，结果也相对精确；
3. 本文所建立的模型较为合理，也具有一定的创新性，模型的结果也比较有说服力；
4. 在数据处理方面，问题四中运用软件 KMPlayer、Photoshop 对原题附件长达 40 分钟的视频进行处理分析，读取出 25 组不同时刻影子长度的数据，规范了数据的格式，增加其可用性，为下一步解题提供了简洁的数据资料。

### 二、模型的缺点

1. 本文求解问题时，所建立的模型是基于一定的假设条件下的，有些影响因素不予考虑，与实际情况存在一定的偏差；
2. 在视频数据采样上，运用 Photoshop 采用的是人工拖放标尺工具，虽然大大提高了灵活性，但也容易使数据出现人为的偏差和不精确。

### 三、模型的推广

本文运用最小二乘法、GA 算法等方法建立了影子长度变化模型、太阳高度角模型、最小方差模型以及最小二乘模型。结合太阳影子定位技术并利用数学思想建立模型，得出物体影子长度与日期、时间以及当地经纬度之间的关系，可以更加精确快捷地根据视频中物体的太阳影子变化确定拍摄的地点和日期；这在现实生活中的作用非常重要，人们将可以实现从视频中获得更多的信息，对视频监测业也将产生比较大的影响。

此外，最小二乘模型、GA 算法不仅仅可以运用在本文中，在其他领域也被广泛地运用；模型中分析问题、解决问题的一些独到方法和思想，对其他数学问题及一般模型仍可使用。

## §8 模型的改进

如果太阳直射在某条纬线上，且该纬线上存在一点，其地方时为 12 时，那么我们就说该点的太阳高度角为 90 度（但该纬线上的其他点的太阳高度角不为 90 度，而正午太阳高度角为 90 度）。以这个点为圆心向外不断画同心圆，可以得知圆上任意一点的太阳高度角。其规律是，纬度差=太阳高度角差，譬如与圆心相隔 10 纬度，合 1110 公里，那么以该点圆心，1110 公里为半径的圆上的所有点的太阳高度角都等于 80 度。

### 1. 等太阳高度线的绘制原理

等太阳高度线的产生原因在于地球是一个球体，且太阳光为平行光。由于全球某一时刻太阳直射在地球上某一点，其他地区因离直射点的远近而太阳高度发生变化，距离

越远太阳高度越小，相同太阳高度的点连成的线呈同心圆分布，这种同心圆就是等太阳高度线，其中 0°等太阳高度线为晨昏线。等太阳高度变化的立体图如图 15 所示：

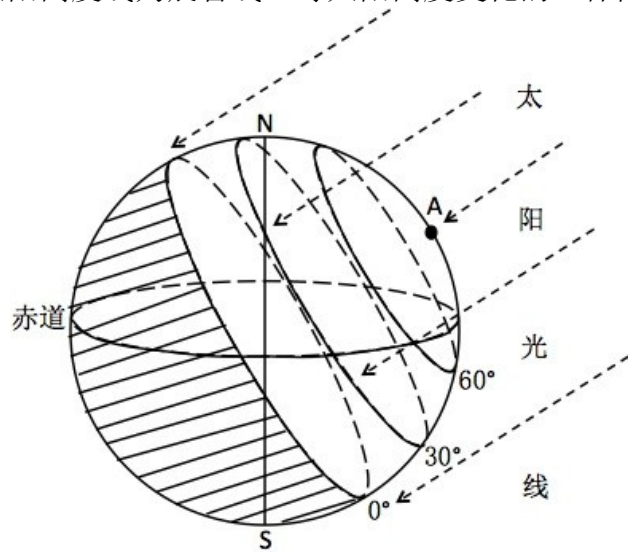


图 15 等太阳高度变化立体图

此时刻太阳直射点 A 的太阳高度角为 90°，从直射点向四周随着球面的弯曲，直射点距离不断扩大的地方，其太阳高度角也不断减小。相同太阳高度的点连成的线呈同心圆分布，0°等太阳高度线为晨昏线。然后根据立体图的等太阳高度变化规律绘制成平面图，如图 16 所示：

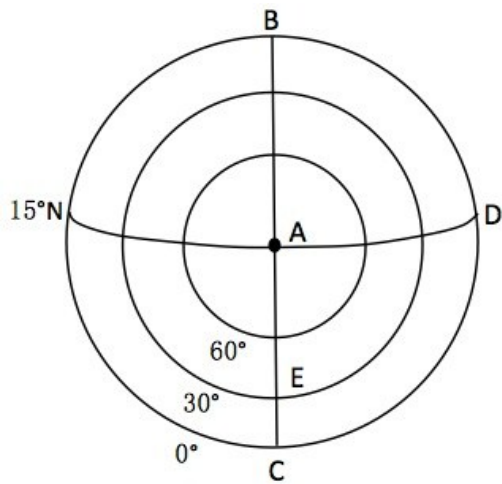


图 16 等太阳高度变化平面图

图 16 中的中心点就是直射点 A，其太阳高度是 90°，3 条等值线分别表示 60°、30°、0°，其中最外圈 0°等值线就是这一时刻的晨昏线。

2. 某时刻太阳直射点位置的推导

当已知某个地点的当地经纬度，以及某个日期的具体时刻，根据地理学原理可以推出此时太阳直射点的经纬度。

就南北方向而言，在太阳直射的经线上，太阳高度角相差多少度，纬度就相差多少度；就东西方向而言，如果太阳直射赤道，则赤道上太阳高度相差多少度，经度就相差多少度；如果太阳直射其他纬线，此纬线上太阳高度相差多少度，经度的差值一定大于太阳高度的差值。

①经度：若已知当地时间为 p 时 q 分（忽略秒），且当地经纬度为  $(\alpha,\beta)$ ，其中东经为正，西经为负；北纬为正，南纬为负，可推导此刻太阳直射点的经度

$$\beta = \begin{cases} \alpha + (11 - p) \times 15^\circ + (60 - q) \times 0.25^\circ & p \leq 12 \\ \alpha + (12 - p) \times 15^\circ - (60 - q) \times 0.25^\circ & p > 12 \end{cases}$$

例如，北京 6 月 22 日上午 11 点整时太阳镜纬度的确定，由于北京的经纬度为北纬  $39^\circ 26'$  至  $41^\circ 03'$ ，东经  $115^\circ 25'$  至  $117^\circ 30'$ ，为了计算简便取其经纬度为北纬  $40^\circ$ ，东经  $120^\circ$ 。由于太阳直射的位置是正午 12 点，根据北京当地时刻以及“东加西减”、“ $15^\circ/\text{h}$ ”的原则，可求得：

太阳直射点经度 = 北京经度 +  $(12 - 11) \times 15^\circ = 135^\circ$

②纬度：例如，求 2015 年 4 月 18 日的太阳直射点的纬度。

由太阳直射点在南北回归线的移动规律我们可以得出，由 3 月 21 日—6 月 22 日：太阳高度角变化了  $23^\circ 26'$ ，用时 93 天。则有从 3 月 21 日—4 月 18 日：太阳高度角变化了  $23^\circ 26' \times (28/93)$ ，此刻的纬度为  $23^\circ 26' - 23^\circ 26' \times (28/93) = 23^\circ 26' - 6^\circ 53' = 16^\circ 33'$ 。因此，2015 年 4 月 18 日的太阳直射点的纬度为  $16^\circ 33'$ 。所以，以 2015 年 4 月 18 日的太阳直射点为圆心，以同纬度差为半径的圆上所有点的太阳高度角大小都相等，因此，在圆上相同高度的物体在太阳下的影子长度都相同。

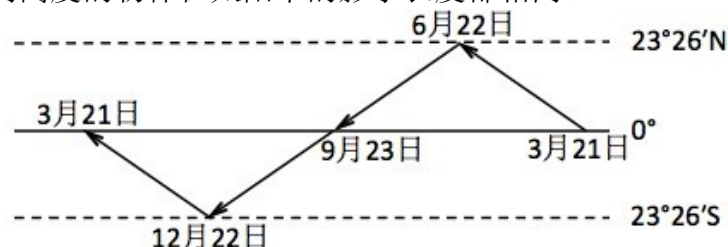


图 17 太阳直射点在南北回归线的移动规律

因此，综上所述，在解决问题二、问题三以及问题四时，当我们运用已知条件直杆影子的长度等求解得出一个可能性较大的地理位置后，我们可以根据该点的经纬度以及测量时间、日期，推导出该时刻太阳直射点的地理位置，以太阳直射点为中心，以观测点与太阳直射点之间的纬度差为半径的圆上所有点的太阳高度角都相等，即每个点上相同高度物体的影子长度都相等，所以符合题目条件的点有无数个，分布在同一个圆上。

## 参考文献

- [1] 林根石.利用太阳视坐标的计算进行物高测量与定位[J] 南京林业大学学报：研究简报，1991,15（3）：89-93.
- [2] 苑中显，辛凤，杜春旭.日照时长随地理纬度及季节的变化关系[J] Hans汉斯网，Sustainable Energy可持续能源，2014.6：41-50.
- [3] 杨婧，刘志璋，孟斌，李娜.基于MATLAB的太阳辐射资源计算[J] 能源工程报：新能源及工艺，2011,35（1）：35-38.
- [4] 郑鹏飞，林大钧，刘小羊，吴志庭.基于影子轨迹线反求采光效果的技术研究[J] 华东理工大学学报：自然科学版，2010,36（3）：458-463.
- [5] Spencer, J.W. (1971) Fourier series representation of the position of the sun. Search, 5, 172.
- [6] 高建中，应合理.一天内日地距离的[J] 陕西师大学报，1995.28（增刊）：44-45.
- [7] 孙汉群.任意坡面的可照时间随坡度变化的规律[J] 南京大学学报：自然科学版,2005.41（6）：612-619.
- [8] 丹容.球面天文学和天体力学引论[M] 北京：科学出版社，1985.
- [9] 孙汉群.墙面可照时间的纬度分布规律[J] 南京大学学报：自然科学版,2007.43（3）：293-299.

## 附录

### 程序 1 问题一中直杆的太阳影子长度的变化曲线绘制程序

```
%% 参数
fin=rad2deg(39,54,26);%纬度（角度转化为弧度）
theta=rad2deg(116,23,29);%经度
h=3;%杆高
n=numdate(2015,10,22);%天数 n
for t=9:15
    tao=2*pi*(n-1)/365;%弧度
    sita=0.006918-0.399912*cos(tao)+0.070257*sin(tao)...
        -0.006758*cos(2*tao)+0.000907*sin(2*tao)-0.002697*cos(3*tao)+0.00148*sin(3*tao);%弧度
    timerad=(12-t)*15*pi/180+rad2deg(3,36,31); %弧度
    sin_ro=sin(fin)*sin(sita)+cos(fin)*cos(timerad)*cos(sita);
    l(t)=h*sqrt(1-sin_ro^2)/sin_ro;
end
%% 绘图
figure(1)
m=length(l);
x=9:0.1:15;
l_cubic=interp1(1:m,l,x,'cubic');
plot(x,l_cubic)
for i=9:15
    text(i+0.1,l(i)+0.1,num2str(l(i)))
end
axis([9 15 3 8])
set(gca,'XTick',[9:15])
set(gca,'XTickLabel',{'9:00','10:00','11:00','12:00','13:00','14:00','15:00'})
xlabel('北京时间')
ylabel('杆影子长/m')
title('3m 长杆 9 点到 15 点太阳影子长度变化曲线图')
hold on
plot(1:m,l,'r*-')
legend('插值后','插值前')
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function n=numdate(year,month,date)
%计算某天在一年当中是第几天
%输入年月日
%输出 n 天

a=[31 28 31 30 31 30 31 31 30 31 30 31];

if rem(year,4)==0
    disp('闰年')
    a(2)=28;
else
    disp('平年')
    a(2)=29;
end
n=sum(a(1:month-1))+date;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function y=rad2deg(d,m,s)
%此函数可用于角度转化为弧度
```



```

y=(d+m/60+s/3600)/180*pi;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function y=time2h(h,m)
%此函数可以将时间转化为以 h 为单位
y=h+m/60;

```

### 程序 2 不同经纬度下影子长度变化的函数图绘制程序

```

n=108;
t=2*pi*(n-1)/365;
sita=0.006918-0.399912*cos(t)+0.070257*sin(t)-0.006758*cos(2*t)+0.00907*sin(2*t)-0.002697*cos(3*t)
+0.00148*(3*t);
syms x y;
z=1.501482*(sin(x)*sin(sita)+cos(x)*cos((2*pi/3-15.2)*pi/12+2*pi/3-y)*cos(sita))/(sqrt(1-(sin(x)*sin(sita)
+cos(x)*cos((2*pi/3-15.2)*pi/12+2*pi/3-y)*cos(sita))^2));
ezmesh(z,[0,pi/2],[0,pi])

```

### 程序 3 附件一中直杆的太阳影子长度的变化曲线绘制程序

```

%% 问题 2: 根据某固定直杆在水平地面上的太阳影子顶点坐标数据, 确定直杆的可能位置。
%思路: 已有时间 t 和影子长度 l 的一系列观测数据, 依据量之间的关系式,
%可得到 h 的对应的估测值, 其中, 日期 n 已知, 但杆高 h 未知, 为此, 需要分情况讨论,
%对于地球上正确的点 fin 和 theta, h 的估计值的 var 应该最小, 其中, h 均值: 1 种情况 h 固定, 可
由画图确定
%另一种情况, 取估计值的均值; 还可以用最小 1 乘法计算。
%在进行 GA 求解之前, 由于 ga 的初始种群是随机生成的, 将导致收敛速度慢, 结果不精确, 为此,
先进行 fin 和 theta 的大致范围
%搜索, 先考虑东经 0-180 和北纬 0-90 的范围, 计算每个 1 度点的 h 的方差。
%而后, 将确定的 90 个方差较小的点作为初始种群的一部分, 用 GA 精确求解

```

```

clc,clear
%部分量输入
n=numdate(2015,4,18);%日期
for i=1:6
    t(i)=time2h(14,42+3*(i-1));
end
for i=7:21
    t(i)=time2h(15,0+3*(i-7));
end
l=[1.149625826
1.182198976
1.215296955
1.249051052
1.28319534
1.317993149
1.353364049
1.389387091
1.426152856
1.463399853
1.501481622
1.540231817
1.579853316
1.620144515
1.661270613
1.703290633
1.74620591
1.790050915
1.835014272

```

```

1.880875001
1.927918447
];
a=[t,l];
m=size(a,1);
%遍历式粗搜索
var_h=zeros(90,180);
for fin=1:1:90
    for theta=1:1:180
        for i=1:m
            t=a(i,1);
            l=a(i,2);
            tao=2*pi*(n-1)/365;%弧度
            sita=0.006918-0.399912*cos(tao)+0.070257*sin(tao)...
            -0.006758*cos(2*tao)+0.000907*sin(2*tao)-0.002697*cos(3*tao)+0.00148*sin(3*tao);%弧度
            timerad=((12-t)*15+(120-theta))*pi/180;%弧度
            sin_ro=sin(rad2deg(fin,0,0))*sin(sita)+cos(rad2deg(fin,0,0))*cos(timerad)*cos(sita);
            h(i)=l*sin_ro/sqrt(1-sin_ro^2);
        end
        h;
        var_h(fin,theta)=var(h);
    end
end
best_h=min(min(var_h));
disp('粗糙区域的经纬度为: ')
[cbest_fin,cbest_theta]=find(var_h==best_h)
disp('粗糙区域的弧度为: ')
cbestx=rad2deg(cbest_fin,0,0)
cbesty=rad2deg(cbest_theta,0,0)

%% GA 精确查找
%产生初始种群，十进制，由上面程序产生的一些粗劣的区域和一些随机生成的种群组成
%fin 的取值为 0-90，theta 的取值为 0-180，随机生成点。
%构建十进制初始种群
PRECI=20;%二进制编码长度*变量个数=个体染色体长度
N1=90;%种群大小为 100=90+10
n1=2;%变量个数
for i=1:N1
    Chrom01(i,1)=rad2deg(cbest_fin+round((rand*2-1)*5),rand*60,rand*60);% 角 度 弧 度 化
    +round((rand*2-1)*1)
    Chrom01(i,2)=rad2deg(cbest_theta+round((rand*2-1)*5),rand*60,rand*60);% 角 度 弧 度 化
    +round((rand*2-1)*1)
end
N2=10;%添加的种群的大小
Chrom02=zeros(N2,2);
for i=1:N2
    Chrom02(i,1)=cbestx*rand;
    Chrom02(i,2)=cbesty*rand;
end
Chrom0=[Chrom01;Chrom02];%100 行 2 列
%产生二进制的初始种群
Chrom=zeros(N1+N2,2*PRECI);
for i=1:N1+N2
    a1=dectobin1(Chrom0(i,1),PRECI-3);
    b1=dectobin1(Chrom0(i,2),PRECI-3);

```

```

    Chrom(i,1:size(a1,2)+size(b1,2))=[a1,b1];
end

%十进制小数转化为二进制，二进制长度为 20，100 行 40 列
%% GA 主程序
%自变量取值范围：fin=0-pi/2; theta=0-pi
%输入参数
MaxGen=200;
FieldD=[PRECI,PRECI;0.27 1.89;0.35 2;1 1;0 0;1 1;1 1];%查找此函数(是一个量)
GGAP=0.75;
Pc=0.7;
Pm=0.01;
gen=0;
%记录最优，方便画图
best=zeros(MaxGen,4);%第一列记录每代的最优适应度，第二列为每代个体的适应度均值,第三 4 列记录最优个体，（弧度）
while gen<MaxGen
    fitv=fitness1(Chrom0,a,n);
    %选择，交叉，变异，在二进制种群中进行，而后进行转换，计算新种群的适应度
    Selch=Select(Chrom,fitv,GGAP);
    Selch=Recombin(Selch,Pc);
    Selch=Mutate(Selch,Pm);
    Chrom=Reins(Chrom,Selch,fitv);
    %新种群二进制转化为十进制
    Chrom0=bs2rv(Chrom,FieldD);
    gen=gen+1;
    [min_f,index]=min(fitv);
    mean_f=mean(fitv);
    best(gen,1)=min_f;
    best(gen,2)=mean_f;
    best(gen,3:4)=Chrom0(index,:);
end
figure(1)
plot(1:size(best),best(:,1),'ro-');
% legend('最优值','平均值')
ylim([0 0.000005])
xlabel('进化代数')
title('GA 进化图')
%显示数值结果
disp('最优地点的经纬度弧度制为： ')
best(end,3:4)
disp('最优地点的经纬度为： ')
[best_N_1, best_N_2, best_N_3]=deg2rad(best(end,3))
[best_E_1, best_E_2, best_E_3]=deg2rad(best(end,4))
%%
save GA2
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function fitv=fitness1(Chrom0,a,n)
% 计算种群适应度 用十进制种群计算
%a 为观测值 l, t
%n 为日期
[m,~]=size(Chrom0);

for i=1:m
    fin=Chrom0(i,1);%弧度

```

```

theta=Chrom0(i,2);%弧度
for j=1:size(a)
    t=a(j,1);
    l=a(j,2);
    tao=2*pi*(n-1)/365;%弧度
    sita=0.006918-0.399912*cos(tao)+0.070257*sin(tao)...
-0.006758*cos(2*tao)+0.000907*sin(2*tao)-0.002697*cos(3*tao)+0.00148*sin(3*tao);%弧度
    %角度化
    [x,y,z]=deg2rad(theta);%经度：精确到秒
    if x>=120
        x1=x-120;
        y1=y;
        z1=z;
        tx=rad2deg(x1,y1,z1);%弧度
        timerad=(12-t)*15*pi/180-tx;%弧度
    else
        x1=119-x;
        y1=59-y;
        z1=60-z;
        tx=rad2deg(x1,y1,z1);%弧度
        timerad=(12-t)*15*pi/180+tx;%弧度
    end
    %时差
    sin_ro=sin(fin)*sin(sita)+cos(fin)*cos(timerad)*cos(sita);
    h(j)=1*sin_ro/sqrt(1-sin_ro^2);
end
h;

var_h(i)=var(h);%种群中每个个体都有一个 varh
%还可以有其他的扩展，比如，定义一个通用高度 h=3，计算偏差 e 的绝对值最小（最小一乘法），
计算偏差平方和最小（最小二乘法）

end
fitv=var_h;%种群个体的适应度（向量）
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function n=numdate(year,month,date)
%计算某天在一年当中是第几天
%输入年月日
%输出 n 天

a=[31 28 31 30 31 30 31 31 30 31 30 31];

if rem(year,4)==0
    disp('闰年')
    a(2)=29;
else
    disp('平年')
    a(2)=28;
end
n=sum(a(1:month-1))+date;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

```

function [h,m,s]=deg2rad(deg)
%输入为弧度
%输出为角度，分，秒
a=deg*180/pi;
h=fix(a);
b=a-h;
c=b*60;
m=fix(c);
s=(c-m)*60;

```

#### 程序 4 附件二与附件三对应的可能地点与日期求解程序

```

%% 第三问第一地点，遍历搜索 n, fin, theta
clc,clear
for i=1:7
    t(i)=time2h(12,41+3*(i-1));
end
for i=8:21
    t(i)=time2h(13,2+3*(i-8));
end
l=[1.247256205
1.22279459
1.198921486
1.175428964
1.152439573
1.12991747
1.10783548
1.086254206
1.065081072
1.044446265
1.024264126
1.004640314
0.985490908
0.966790494
0.948584735
0.930927881
0.91375175
0.897109051
0.880973762
0.865492259
0.850504468
];
a=[t',l'];
m=size(a,1);
var_h=zeros(90,180,365);
h=zeros(1,m);
best_h=zeros(1,m);
for n=1:365
    for fin=1:90
        for theta=1:180
            for i=1:m
                t=a(i,1);
                l=a(i,2);
                tao=2*pi*(n-1)/365;%弧度
                sita=0.006918-0.399912*cos(tao)+0.070257*sin(tao)...
-0.006758*cos(2*tao)+0.000907*sin(2*tao)-0.002697*cos(3*tao)+0.00148*sin(3*tao);%弧度
                timerad=((12-t)*15+(120-theta))*pi/180;%弧度
            end
        end
    end
end

```

```

        sin_ro=sin(rad2deg(fin,0,0))*sin(sita)+cos(rad2deg(fin,0,0))*cos(timerad)*cos(sita);
        h(i)=1*sin_ro/sqrt(1-sin_ro^2);
    end
    h;
    if mean(h)<=0
        var_h(fin,theta,n)=500;
    else
        var_h(fin,theta,n)=1/m*sum((h-2).^2);
    end
end
end
end
for i=1:365
    best_h(i)=min(min(var_h(:,i)));%向量 365
end
disp(['最优方差为： ‘,’ 最优天数为：'])
[best_h_1,best_n]=min(best_h)

var_h1=var_h(:,best_n);
best_h=min(min(var_h1));
disp('粗糙区域的经纬度为： ')
[cbest_fin,cbest_theta]=find(var_h1==best_h)
disp('粗糙区域的弧度为： ')
cbestx=rad2deg(cbest_fin,0,0)
cbesty=rad2deg(cbest_theta,0,0)
save h2

%%

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%-----

%% 多种群 GA 精确求解
clc,clear
load h2.mat
% 遗传算法主程序
NIND=100;
n_var=3;%3 个变量
PRECI=10;%i 进制位数 3*10
GGAP=0.9;
MP=10;%产生 10 个种群
FieldD=[PRECI PRECI;0.69 1.3;0.73 1.4;1 1;0 0;1 1;1 1];

for i=1:MP
    Chrom0{i}=InitPop(NIND,n_var,cbest_fin,cbest_theta,best_n); %产生 10 个初始种群
    %十进制转化为二进制
    Chrom{i}=zeros(NIND,n_var*PRECI);
    for j=1:NIND
        a1=dectobin1(Chrom0{i}(j,1),PRECI-3);
        b1=dectobin1(Chrom0{i}(j,2),PRECI-3);
        c1=dec2bin(Chrom0{i}(j,3),PRECI);
        c1=double(c1)-48;
        Chrom{i}(j,1:size(a1,2)+size(b1,2)+size(c1,2))=[a1,b1,c1];
    end
end
end

```

```

Pc=0.7+(0.9-0.7)*rand(MP,1);
Pm=0.001+(0.05-0.001)*rand(MP,1);
gen=0;
gen0=0;
MaxGen=10;
maxY=0;

for i=1:MP
    FitV{i}=fitness3(Chrom0{i},a);
end

MaxFitV=zeros(MP,1);
MaxChrom=zeros(MP,PREC1*n_var);
while gen0<MaxGen
    gen=gen+1;
    for i=1:MP
        FitV{i}=fitness3(Chrom0{i},a);%计算十进制下的种群的适应度值
        %将十进制种群转化为二进制种群 Chrom
        %
        %         for j=1:NIND
        %             a1=dectobin1(Chrom0{i}(j,1),PREC1-3);%正数部分 2 位， 小数部分 10-2 位
        %             b1=dectobin1(Chrom0{i}(j,2),PREC1-3);
        %             c1=dec2bin(Chrom0{i}(j,3),PREC1);
        %             c1=double(c1)-48;
        %             Chrom{i}(j,1:size(a1,2)+size(b1,2)+size(c1,2))=[a1,b1,c1];
        %         end
        %选择，交叉，变异，重组，移民，选取等操作都是在二进制种群下进行的；选取最优个体以及求解种群适应度是在十进制种群下进行的。

        Selch{i}=Select(Chrom{i},FitV{i},GGAP); %选择
        Selch{i}=Recombin(Selch{i},Pc(i)); %交叉
        Selch{i}=Mutate(Selch{i},Pm(i)); %变异
        Chrom{i}=Reins(Chrom{i},Selch{i},FitV{i});%重组
        %计算新种群的适应度先进行转码为 10 进制
        for j=1:NIND
            Chrom0{i}(j,1:2)=bs2rv(Chrom{i}(j,1:20),FieldD);
            Chrom0{i}(j,3)=bin2dec(num2str(Chrom{i}(j,21:30)));
        end
    end

    %移民和选取操作
    [Chrom,FitV]=immigrant(Chrom,FitV);
    [MaxFitV,MaxChrom]=EliteInduvidual(Chrom,FitV,MaxFitV,MaxChrom);

    YY(gen)=max(MaxFitV);
    if YY(gen)>maxY
        maxY=YY(gen);
        gen0=0;
    else
        gen0=gen0+1;
    end
end
%% 进化过程
figure(1)
hold on
plot(1:gen,YY,'cp-');

```



```

title('多种群 GA 的遗传进化图')
%% 输出量
[Y,I]=max(MaxFitV);
%对 MaxChrom(I,:) 进行 2 到 10 的转码
X(1,1:2)=bs2rv(MaxChrom(I,1:20),FieldD);
X(1,3)=bin2dec(num2str(MaxChrom(I,21:30)));
disp(['最优值为: ',num2str(Y)]);
disp(['对应的自变量取值: ',num2str(X)]);
disp('最优纬度')
[best_fin_1,best_fin_2,best_fin_3]=deg2rad(X(1))
disp('最优经度')
[best_theta_1,best_theta_2,best_theta_3]=deg2rad(X(2))
disp('最佳时间')
X(3)
%%
save t3h1

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% 第三问第二地点，遍历搜索 n，fin，thet

clc,clear
for i=1:17
    t(i)=time2h(13,9+3*(i-1));
end
for i=18:21
    t(i)=time2h(14,0+3*(i-18));
end
l=[3.533142184
3.546768029
3.561797643
3.578100715
3.595750783
3.61493428
3.635425983
3.657218272
3.680541115
3.705167836
3.731278025
3.758917911
3.788087888
3.818701015
3.850809619
3.88458522
3.919911828

```

```

3.956875992
3.99553479
4.035750835
4.077863059
];
a=[t,l];
m=size(a,1);
var_h=zeros(90,180,365);
h=zeros(1,m);
best_h=zeros(1,m);
for n=1:365
    for fin=1:90
        for theta=1:180
            for i=1:m
                t=a(i,1);
                l=a(i,2);
                tao=2*pi*(n-1)/365;%弧度
                sita=0.006918-0.399912*cos(tao)+0.070257*sin(tao)...
-0.006758*cos(2*tao)+0.000907*sin(2*tao)-0.002697*cos(3*tao)+0.00148*sin(3*tao);%弧度
                timerad=((12-t)*15+(120-theta))*pi/180; %弧度
                sin_ro=sin(rad2deg(fin,0,0))*sin(sita)+cos(rad2deg(fin,0,0))*cos(timerad)*cos(sita);
                h(i)=l*sin_ro/sqrt(1-sin_ro^2);
            end
        end
        h;
        if mean(h)<=0
            var_h(fin,theta,n)=500;
        else
            var_h(fin,theta,n)=var(h);%1/m*sum((h-3).^2)
        end
    end
end
end
for i=1:365
    best_h(i)=min(min(var_h(:, :, i)));%向量 365
end
disp(['最优方差为： ‘,’ 最优天数为： '])
[best_h_1,best_n]=min(best_h)
var_h1=var_h(:, :, best_n);

```

```

best_h=min(min(var_h1));
disp('粗糙区域的经纬度为: ')
[cbest_fin,cbest_theta]=find(var_h1==best_h)
disp('粗糙区域的弧度为: ')
cbestx=rad2deg(cbest_fin,0,0)
cbesty=rad2deg(cbest_theta,0,0)

%%

save f3

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%% 多种群 GA 精确求解
clc,clear
load f3.mat
% 遗传算法主程序
NIND=100;
n_var=3; %3 个变量
PRECI=10; %i 进制位数 3*10
GGAP=0.9;
MP=10; %产生 10 个种群
FieldD=[PRECI PRECI;0.4 1.87;0.5 2;1 1;0 0;1 1;1 1];

for i=1:MP
    Chrom0{i}=InitPop(NIND,n_var,cbest_fin,cbest_theta,best_n); %产生 10 个初始种群
    %十进制转化为二进制
    Chrom{i}=zeros(NIND,n_var*PRECI);
    for j=1:NIND
        a1=dectobin1(Chrom0{i}(j,1),PRECI-3);
        b1=dectobin1(Chrom0{i}(j,2),PRECI-3);
        c1=dec2bin(Chrom0{i}(j,3),PRECI);
        c1=double(c1)-48;
        Chrom{i}(j,1:size(a1,2)+size(b1,2)+size(c1,2))=[a1,b1,c1];
    end
end

```

```

    end
end

Pc=0.7+(0.9-0.7)*rand(MP,1);
Pm=0.001+(0.05-0.001)*rand(MP,1);
gen=0;
gen0=0;
MaxGen=10;
maxY=0;

for i=1:MP
    FitV{i}=fitness3(Chrom0{i},a);
end

MaxFitV=zeros(MP,1);
MaxChrom=zeros(MP,PRECI*n_var);
while gen0<MaxGen
    gen=gen+1;
    for i=1:MP
        FitV{i}=fitness3(Chrom0{i},a);%计算十进制下的种群的适应度值
%将十进制种群转化为二进制种群 Chrom
%
%           for j=1:NIND
%               a1=dectobin1(Chrom0{i}(j,1),PRECI-3);%正数部分 2 位， 小数部分 10-2 位
%               b1=dectobin1(Chrom0{i}(j,2),PRECI-3);
%               c1=dec2bin(Chrom0{i}(j,3),PRECI);
%               c1=double(c1)-48;
%               Chrom{i}(j,1:size(a1,2)+size(b1,2)+size(c1,2))=[a1,b1,c1];
%           end
%选择，交叉，变异，重组，移民，选取等操作都是在二进制种群下进行的；选取最优个体以及求
解种群适应度是在十进制种群下进行的。

Selch{i}=Select(Chrom{i},FitV{i},GGAP); %选择
Selch{i}=Recombin(Selch{i},Pc(i)); %交叉
Selch{i}=Mutate(Selch{i},Pm(i)); %变异
Chrom{i}=Reins(Chrom{i},Selch{i},FitV{i});%重组
%计算新种群的适应度先进行转码

```

```

        for j=1:NIND
            Chrom0{i}(j,1:2)=bs2rv(Chrom{i}(j,1:20),FieldD);
            Chrom0{i}(j,3)=bin2dec(num2str(Chrom{i}(j,21:30)));
        end
    end

    %移民和选取操作
    [Chrom,FitV]=immigrant(Chrom,FitV);
    [MaxFitV,MaxChrom]=EliteInduvidual(Chrom,FitV,MaxFitV,MaxChrom);

    YY(gen)=max(MaxFitV);
    if YY(gen)>maxY
        maxY=YY(gen);
        gen0=0;
    else
        gen0=gen0+1;
    end
end

%% 进化过程
figure(1)
plot(1:size(YY,2),YY,'rp--');
hold on
title('多种群 GA 进化图')

%% 输出量
[Y,I]=max(MaxFitV);
%对 MaxChrom(I,:) 进行 2 到 10 的转码
X(1,1:2)=bs2rv(MaxChrom(I,1:20),FieldD);
X(1,3)=bin2dec(num2str(MaxChrom(I,21:30)));
disp(['最优值为: ',num2str(Y)]);
disp(['对应的自变量取值: ',num2str(X)]);
disp('最优纬度')
[best_fin_1,best_fin_2,best_fin_3]=deg2rad(X(1))
disp('最优经度')
[best_theta_1,best_theta_2,best_theta_3]=deg2rad(X(2))
disp('最佳时间')
X(3)
%%

```

```

save t3f3
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function Chrom0=InitPop(NIND,n_var,cbest_fin,cbest_theta,best_n)
%产生十进制种群
%n_var:变量个数
NIND=100;
n_var=3;
Chrom0=zeros(NIND,n_var);
for i=1:NIND
    Chrom0(i,1)=rad2deg(cbest_fin+round((rand*2-1)*2),rand*60,rand*60);%
    Chrom0(i,2)=rad2deg(cbest_theta+round((rand*2-1)*2),rand*60,rand*60);%
    Chrom0(i,3)=best_n+round((rand*2-1)*30);
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function fitv=fitness3(Chrom0,a)
%a 时间 t 和影长 l
[m,~]=size(Chrom0);
var_h=zeros(1,m);
h=zeros(1,size(a,1));
for i=1:m
    fin=Chrom0(i,1);
    theta=Chrom0(i,2);
    n=Chrom0(i,3);
    for j=1:size(a,1)
        t=a(j,1);
        l=a(j,2);
        tao=2*pi*(n-1)/365;%弧度
        sita=0.006918-0.399912*cos(tao)+0.070257*sin(tao)...
        -0.006758*cos(2*tao)+0.000907*sin(2*tao)-0.002697*cos(3*tao)+0.00148*sin(3*tao);%弧度
        %角度化
        [x,y,z]=deg2rad(theta);%经度：精确到秒
        if x>=120
            x1=x-120;
            y1=y;
            z1=z;
            tx=rad2deg(x1,y1,z1);%弧度
            timerad=(12-t)*15*pi/180-tx;%弧度

```

```

else
    x1=119-x;
    y1=59-y;
    z1=60-z;
    tx=rad2deg(x1,y1,z1);%弧度
    timerad=(12-t)*15*pi/180+tx;%弧度
end
%时差
sin_ro=sin(fin)*sin(sita)+cos(fin)*cos(timerad)*cos(sita);
h(j)=l*sin_ro/sqrt(1-sin_ro^2);
end
var_h(i)=var(h);%设定杆长为 1, 2, 3 (由图 1 可观测出) 1/m*sum((h-4).^2)
end
fitv=var_h;

```

#### 程序 5 附件四对应的可能拍摄地点与日期求解程序

```

%% 问题 4.1: 根据某固定直杆在水平地面上的太阳影子顶点坐标数据, 确定直杆的可能位置。
%思路: 已有时间 t 和影子长度 l 的一系列观测数据, 依据量之间的关系式,
%可得到 h 的对应的估测值, 其中, 日期 n 已知, 但杆高 h 未知, 为此, 需要分情况讨论,
%对于地球上正确的点 fin 和 theta, h 的估计值的 var 应该最小, 其中, h 均值: 1 种情况 h 固定, 可
由画图确定
%另一种情况, 取估计值的均值; 还可以用最小 1 乘法计算。
%在进行 GA 求解之前, 由于 ga 的初始种群是随机生成的, 将导致收敛速度慢, 结果不精确, 为此,
先进行 fin 和 theta 的大致范围
%搜索, 先考虑东经 0-180 和北纬 0-90 的范围, 计算每个 1 度点的 h 的方差。
%而后, 将确定的 90 个方差较小的点作为初始种群的一部分, 用 GA 精确求解
%%
clc,clear
%部分量输入
n=numdate(2015,7,13);%日期
t=zeros(1,25);
t(1)=time2h(8,54);
t(2)=time2h(8,56);
t(3)=time2h(8,57);
t(4)=time2h(8,59);
t(5)=time2h(9,0);
t(6)=time2h(9,2);

```



t(7)=time2h(9,4);  
t(8)=time2h(9,5);  
t(9)=time2h(9,7);  
t(10)=time2h(9,9);  
t(11)=time2h(9,10);  
t(12)=time2h(9,12);  
t(13)=time2h(9,14);  
t(14)=time2h(9,15);  
t(15)=time2h(9,17);  
t(16)=time2h(9,19);  
t(17)=time2h(9,20);  
t(18)=time2h(9,22);  
t(19)=time2h(9,24);  
t(20)=time2h(9,25);  
t(21)=time2h(9,27);  
t(22)=time2h(9,29);  
t(23)=time2h(9,30);  
t(24)=time2h(9,32);  
t(25)=time2h(9,34);  
l=[1.8102  
1.7901  
1.7643  
1.7374  
1.7306  
1.7230  
1.7028  
1.6886  
1.6617  
1.6413  
1.6352  
1.6155  
1.5948  
1.5812  
1.5595  
1.5423  
1.5292  
1.5088  
1.4935

```

1.4853
1.4617
1.4482
1.4395
1.4241
1.4035
];
a=[t,l];
m=size(a,1);
%遍历式粗搜索
var_h=zeros(90,180);
for fin=1:1:90
    for theta=1:1:180
        for i=1:m
            t=a(i,1);
            l=a(i,2);
            tao=2*pi*(n-1)/365;%弧度
            sita=0.006918-0.399912*cos(tao)+0.070257*sin(tao)...
-0.006758*cos(2*tao)+0.000907*sin(2*tao)-0.002697*cos(3*tao)+0.00148*sin(3*tao);%弧度
            timerad=((12-t)*15+(120-theta))*pi/180;%弧度
            sin_ro=sin(rad2deg(fin,0,0))*sin(sita)+cos(rad2deg(fin,0,0))*cos(timerad)*cos(sita);
            h(i)=l*sin_ro/sqrt(1-sin_ro^2);
        end
        h;
        var_h(fin,theta)=1/m*sum((h-2).^2);
    end
end
best_h=min(min(var_h));
disp('粗糙区域的经纬度为: ')
[cbest_fin,cbest_theta]=find(var_h==best_h)
disp('粗糙区域的弧度为: ')
cbestx=rad2deg(cbest_fin,0,0)
cbesty=rad2deg(cbest_theta,0,0)

```

%% GA 精确查找

%产生初始种群，十进制，由上面程序产生的一些粗劣的区域和一些随机生成的种群组成

%fin 的取值为 0-90，theta 的取值为 0-180，随机生成点。

```

%构建十进制初始种群
PRECI=20;%二进制编码长度*变量个数=个体染色体长度
N1=90;%种群大小为 100=90+10
n1=2;%变量个数
for i=1:N1
    Chrom01(i,1)=rad2deg(cbest_fin+round((rand*2-1)*5),rand*60,rand*60);% 角 度 弧 度 化
    +round((rand*2-1)*1)
    Chrom01(i,2)=rad2deg(cbest_theta+round((rand*2-1)*5),rand*60,rand*60);% 角 度 弧 度 化
    +round((rand*2-1)*1)
end
N2=10;%添加的种群的大小
Chrom02=zeros(N2,2);
for i=1:N2
    Chrom02(i,1)=cbestx*rand;
    Chrom02(i,2)=cbesty*rand;
end
Chrom0=[Chrom01;Chrom02];%100 行 2 列
%产生二进制的初始种群
Chrom=zeros(N1+N2,2*PRECI);
for i=1:N1+N2
    a1=dectobin1(Chrom0(i,1),PRECI-3);
    b1=dectobin1(Chrom0(i,2),PRECI-3);
    Chrom(i,1:size(a1,2)+size(b1,2))=[a1,b1];
end

%十进制小数转化为二进制，二进制长度为 20，100 行 40 列
%% GA 主程序
%自变量取值范围：fin=0-pi/2; theta=0-pi
%输入参数
MaxGen=500;
FieldD=[PRECI,PRECI;0.67 2.06;0.8 2.2;1 1;0 0;1 1;1 1];%查找此函数(是一个量)
GGAP=0.75;
Pc=0.7;
Pm=0.01;
gen=0;
%记录最优，方便画图

```

```
best=zeros(MaxGen,4);%第一列记录每代的最优适应度，第二列为每代个体的适应度均值,第三 4 列记录最优个体，（弧度）
```

```
while gen<MaxGen
```

```
    fitv=fitness4(Chrom0,a,n);
```

```
    %选择，交叉，变异，在二进制种群中进行，而后进行转换，计算新种群的适应度
```

```
    Selch=Select(Chrom,fitv,GGAP);
```

```
    Selch=Recombin(Selch,Pc);
```

```
    Selch=Mutate(Selch,Pm);
```

```
    Chrom=Reins(Chrom,Selch,fitv);
```

```
    %新种群二进制转化为十进制
```

```
    Chrom0=bs2rv(Chrom,FieldD);
```

```
    gen=gen+1;
```

```
    [min_f,index]=min(fitv);
```

```
    mean_f=mean(fitv);
```

```
    best(gen,1)=min_f;
```

```
    best(gen,2)=mean_f;
```

```
    best(gen,3:4)=Chrom0(index,:);
```

```
end
```

```
figure(1)
```

```
plot(1:size(best),best(:,1),'ro-');
```

```
ylim([0,0.0005])
```

```
% legend('最优值','平均值')
```

```
xlabel('进化代数')
```

```
title('GA 进化图')
```

```
%显示数值结果
```

```
disp('最优地点的经纬度弧度制为: ')
```

```
best(end,3:4)
```

```
disp('最优地点的经纬度为: ')
```

```
[best_N_1, best_N_2, best_N_3]=deg2rad(best(end,3))
```

```
[best_E_1, best_E_2, best_E_3]=deg2rad(best(end,4))
```

```
%%
```

```
save GA4&1
```

```
%%%%%%%%%
```

```
%
```

```
function fitv=fitness4(Chrom0,a,n)
```

```
% 计算种群适应度 用十进制种群计算
```

```

%a 为观测值 l, t
%n 为日期
[m,~]=size(Chrom0);

for i=1:m
    fin=Chrom0(i,1);%弧度
    theta=Chrom0(i,2);%弧度
    for j=1:size(a)
        t=a(j,1);
        l=a(j,2);
        tao=2*pi*(n-1)/365;%弧度
        sita=0.006918-0.399912*cos(tao)+0.070257*sin(tao)...
        -0.006758*cos(2*tao)+0.000907*sin(2*tao)-0.002697*cos(3*tao)+0.00148*sin(3*tao);%弧度
        %角度化
        [x,y,z]=deg2rad(theta);%经度：精确到秒
        if x>=120
            x1=x-120;
            y1=y;
            z1=z;
            tx=rad2deg(x1,y1,z1);%弧度
            timerad=(12-t)*15*pi/180-tx;%弧度
        else
            x1=119-x;
            y1=59-y;
            z1=60-z;
            tx=rad2deg(x1,y1,z1);%弧度
            timerad=(12-t)*15*pi/180+tx;%弧度
        end
        %时差
        sin_ro=sin(fin)*sin(sita)+cos(fin)*cos(timerad)*cos(sita);
        h(j)=l*sin_ro/sqrt(1-sin_ro^2);
    end
end
h;

var_h(i)=1/m*sum((h-2).^2);%种群中每个个体都有一个 varh
%还可以有其他的扩展，比如，定义一个通用高度 h=2，计算偏差 e 的绝对值最小(最小一乘法)，

```

计算偏差平方和最小（最小二乘法）

```
end
fitv=var_h;%种群个体的适应度（向量）
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
n=108;
t=2*pi*(n-1)/365;
sita=0.006918-0.399912*cos(t)+0.070257*sin(t)-0.006758*cos(2*t)+0.00907*sin(2*t)-0.002697*cos(3*t)
+0.00148*(3*t);
syms x y;
z=1.501482*(sin(x)*sin(sita)+cos(x)*cos((2*pi/3-15.2)*pi/12+2*pi/3-y)*cos(sita))/(sqrt(1-(sin(x)*sin(sita)
+cos(x)*cos((2*pi/3-15.2)*pi/12+2*pi/3-y)*cos(sita))^2));
ezmesh(z,[0,pi/2],[0,pi])
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

结合谢菲尔德大学的 GA 工具箱，部分函数为贴出，详见附件程序

附表 1 附件 1-3 各个观测时间点直杆的影子长度

附件 1		附件 2		附件 3	
北京时间	影子长度	北京时间	影子长度	北京时间	影子长度
14:42	1.149626	12:41	1.247256	13:09	3.533142
14:45	1.182199	12:44	1.222795	13:12	3.546768
14:48	1.215297	12:47	1.198921	13:15	3.561798
14:51	1.249051	12:50	1.175429	13:18	3.578101
14:54	1.283195	12:53	1.15244	13:21	3.595751
14:57	1.317993	12:56	1.129917	13:24	3.614934
15:00	1.353364	12:59	1.107835	13:27	3.635426
15:03	1.389387	13:02	1.086254	13:30	3.657218
15:06	1.426153	13:05	1.065081	13:33	3.680541
15:09	1.4634	13:08	1.044446	13:36	3.705168
15:12	1.501482	13:11	1.024264	13:39	3.731278
15:15	1.540232	13:14	1.00464	13:42	3.758918
15:18	1.579853	13:17	0.985491	13:45	3.788088
15:21	1.620145	13:20	0.96679	13:48	3.818701
15:24	1.661271	13:23	0.948585	13:51	3.85081
15:27	1.703291	13:26	0.930928	13:54	3.884585
15:30	1.746206	13:29	0.913752	13:57	3.919912
15:33	1.790051	13:32	0.897109	14:00	3.956876
15:36	1.835014	13:35	0.880974	14:03	3.995535
15:39	1.880875	13:38	0.865492	14:06	4.035751
15:42	1.927918	13:41	0.850504	14:09	4.077863

