

# 太阳影子定位

## 摘要

本文主要研究利用太阳影子定位技术确定视频拍摄地点和拍摄日期问题。

问题一：根据题目所给已知条件，以及查阅资料得到的地方时和太阳高度角的计算公式，运用控制变量法分析出了影子长度与各参数之间的关系。随后建立了太阳影子变化曲线模型，运用 *MATLAB* 编程分别画出太阳高度角和太阳影子随时间变化的曲线（见图 3、4），下表为整点时刻太阳高度角和影子长度数据：

时间	9:00	10:00	11:00	12:00	13:00	14:00	15:00
太阳高度角（度）	0.4616	0.5885	0.6672	0.6843	0.6363	0.5325	0.388
影子长度（米）	6.0304	4.4953	3.8085	3.6773	4.0604	5.0912	7.3402

问题二：首先逆向思考问题一中的模型思路，在影子坐标已知的情况下去求解出直杆的所处地点，根据各参数的代数关系，构造了多元非线性方程组，建立了基于影子坐标反求地点模型。由于多元非线性方程组较难求解，将其转化为多目标函数优化问题：

$$\begin{cases} \min \sum |f - L| \\ \min \sum |(g_1 - g_2) - (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)| \end{cases}$$

利用模拟退火算法编程，根据附录 1 中所给数据运用模型进行求解，得到直杆的可能地点：（1） $18^{\circ}12'0"N$   $109^{\circ}42'0"E$ ，地处海南三亚附近；（2） $18^{\circ}42'0"N$   $109^{\circ}06'0"E$ ，地处海南三亚附近；（3） $20^{\circ}18'0"N$   $110^{\circ}0'0"E$ ，地处广东湛江附近。

问题三：在问题二的基础上增加了日期的求解，即把日期由已知条件变为了未知条件。由于整体思路与问题二中的模型不变，我们将基于影子坐标反求地点模型进行了改进，使得其在求解时运用模拟退火算法进一步将多元非线性方程组进行处理，转化为求解其最小值的比率问题，即求解：

$$\begin{cases} \min \sum |(f - L) / L| \\ \min \sum |[(g_1 - g_2) - (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)] / (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)| \end{cases}$$

其目的是使结果更为精确，最后，根据附录 2 和附录 3 的数据运用模型进行求解，得到直杆的可能地点和日期：（1） $28.5^{\circ}N$   $109.8^{\circ}E$ ，1 月 18 日；（2） $29.2^{\circ}N$   $110.2^{\circ}E$ ，1 月 21 日。

问题四：首先获取自然图像序列或者视频帧，利用 *rgb2gray* 函数将其转化为灰度图像，运用几何透视的原理建立空间直角坐标系，提取出影子末端的数据和直杆顶端数据，以直杆长度为标尺，将图像中直杆影子长度转化为实际影子长度，然后运用问题二中建立的基于影子坐标反求地点模型，即可得到拍摄视频的可能地点：

$$33.1^{\circ}N115.2^{\circ}E$$

如果拍摄日期未知，则运用问题三中建立的基于改进的影子坐标反求地点模型，即可得到拍摄视频的可能日期：6 月 28 日

**关键词：** 太阳高度角 多元非线性方程组 模拟退火算法 太阳方位角 几何透视原理

## 一、 问题重述

如何确定视频的拍摄地点和拍摄日期是视频数据分析的重要方面，太阳影子定位技术就是通过分析视频中物体的太阳影子变化，确定视频拍摄的地点和日期的一种方法。

1. 建立影子长度变化的数学模型，分析影子长度关于各个参数的变化规律，并应用你们建立的模型画出 2015 年 10 月 22 日北京时间 9:00-15:00 之间天安门广场(北纬 39 度 54 分 26 秒, 东经 116 度 23 分 29 秒) 3 米高的直杆的太阳影子长度的变化曲线。

2. 根据某固定直杆在水平地面上的太阳影子顶点坐标数据，建立数学模型确定直杆所处的地点。将你们的模型应用于附件 1 的影子顶点坐标数据，给出若干个可能的地点。

3. 根据某固定直杆在水平地面上的太阳影子顶点坐标数据，建立数学模型确定直杆所处的地点和日期。将你们的模型分别应用于附件 2 和附件 3 的影子顶点坐标数据，给出若干个可能的地点与日期。

4. 附件 4 为一根直杆在太阳下的影子变化的视频，并且已通过某种方式估计出直杆的高度为 2 米。请建立确定视频拍摄地点的数学模型，并应用你们的模型给出若干个可能的拍摄地点。

如果拍摄日期未知，你能否根据视频确定出拍摄地点与日期？

## 二、 问题分析

当今，怎样确定视频的拍摄地点和拍摄日期是视频数据分析的重要方面，在众多的方法中，太阳影子定位技术较为传统，其通过分析视频中物体的太阳影子变化，确定视频拍摄的地点和日期。本题目就是要求我们运用太阳影子定位技术建立模型，求解出视频或的拍摄地点和日期。

对于问题一，首先我们需要明确影响影子长度的因素包括直杆长度、日期、本地地方时、经纬度。并根据查阅的资料计算出阳高度角、地方时、时角和天数等数据，建立太阳影子变化曲线模型，并根据已知的经纬度、直杆长度、天数、等条件建立方程，最终求解出各个时间点对应的影子长度，从而得出太阳影子的变化曲线。

对于问题二，其求解过程与问题一截然相反，题目相当于已知影子的实际长度，需要我们求解出直杆所处的地点，因此必须建立起基于影子坐标反求地点模型，根据相关地理和数学知识，得出多元非线性方程组，再利用模拟退火算法将其转化为函数的规划问题，求解出的数据进行误差分析，取某一地点不同时间的误差和，求其最小值，当误差和最小时，该地点即为直杆所在地。我们可以从高度角和方位角两个方面出发，分别利用高度角和方位角为评判标准，那么可以求解出两个不同的解，最终求解出两个可能的直杆所在地点的经纬度。

对于问题三，在问题二的基础上加上了日期的求解，同时直杆的长度变成了未知量。考虑到本问怎加了其复杂性，但是解题思路不变，因此我们需要对问题二中的模型进行改进，建立基于改进的影子坐标反求地点模型。

对于问题四，题目给出了一段拍摄视频，我们首先需要获取自然图像序列或者视频帧，并且对每一帧图象进行处理、简化，并建立空间直角坐标系。利用 `rgb2gray` 函数将其转化为灰度图像，运用 `MATLAB` 编程提取出影子末端和直杆顶端的数据。然后将数据运用到问题二和问题三建立的模型中，即可求解出拍摄的地点和日期。

## 三、 模型假设

- 1、假设除文中给出的影响影子长度的因素外，其余因素均不对影子长度产生影响。
- 2、假设太阳影子变化期间不会被其他不良因素影响。

3、假设视频图像提取准确无误，不存在外在因素使其改变。

#### 四、 符号说明

符号	意义	符号	意义
$\delta$	太阳赤纬	$t$	地方时
$\phi$	地理纬度	$\alpha$	时角
$\beta$	经度	$T$	北京时间
$H$	太阳高度角	$L$	影子长度
$h$	固定直杆长度	$N$	天数，为本年的第 $N$ 天
$\varepsilon$	太阳方位角	$\eta$	相对误差

#### 五、 模型的建立与求解

##### 5.1 问题一

###### 5.1.1 问题一的分析

问题一需要分析固定直杆的影子长度关于各个参数的变化规律，并画出 2015 年 10 月 22 日北京时间 09:00–15:00 之间天安门广场（北纬 39 度 54 分 26 秒，东经 116 度 23 分 29 秒）3 米高的直杆的太阳影子长度的变化曲线。首先我们要确定直杆长度、经度、纬度、当天的日期、一天之内的地方时变化这 4 个参数，然后根据控制变量法对其进行规律分析，建立太阳影子变化曲线模型并应用于本题的案例中，结合题中所给各项数据，绘制出太阳高度角的变化曲线，进一步得到固定直杆的影子长度变化曲线。

###### 5.1.2 问题一的解答

对于问题一的解答，首先要弄清楚地方时、时角、和太阳高度角的定义，再根据相关地理知识，列出公式对其进行求解分析，分析得出影子长度与各项参数之间的关系，建立通用模型，进而结合题目所给数据求解答案并使用 *MATLAB* 编程画出影子长度变化曲线。

###### 5.1.2.1 理论准备

下面对所建模型中需要用到的专有名词进行解释：

###### (1) 地方时

以一个地方太阳升到最高的地方的时间为正午 12 时，将连续两个正午 12 时之间等分为 24 个小时，所成的时间系统，称为地方时，恒星时、真太阳时和平太阳时（见世界时和时差），都是用天球上某些真实的或假想的参考点的时角来计量的，它们与观测者的子午线有关，地球上位于不同经度的观测者，在同一瞬间测得的参考点的时角是不同的。因此，每个观测者都有自己的与他人不同的时间，称为地方时，它是观测者所在的子午线的时间<sup>[1]</sup>。

## (2) 时角

时角 (HA) 是一个天文学名词, 一个天体的时角被定义为天体的赤经, 与当地的恒星时的差值, 即时角=恒星时-赤经, 因此一个天体的时角表示是否通过了当地的子午圈。其数值则表示了该天体与当地子午圈的角距离并用时间单位小时来计量 ( $1HA=15^\circ$ )<sup>[1]</sup>。

## (2) 太阳高度角

对于地球上的某个地点, 太阳高度角是指太阳光的入射方向和地平面之间的夹角。太阳高度角是决定地球表面获得太阳热能数量的最重要的因素, 我们用  $H$  来表示这个角度, 它在数值上等于太阳在天球地平坐标系中的地平高度。太阳高度角随着地方时和太阳的赤纬的变化而变化<sup>[1]</sup>。

### 5.1.2.2 太阳影子变化曲线模型的建立

首先, 我们需要根据已知条件计算出地方时, 随后根据相关公式计算出太阳高度角的数值, 为模型的解答奠定理论基础。

#### (1) 地方时计算的步骤:

Step1 计算两地的经度差:

①如果已知地和所求地同在东经或同在西经, 则: 经度差=经度大的度数-经度小的度数。

②如果已知地和所求地一个在东经另一个在西经, 则: 经度差=两地经度相加。

Step2 把经度差转化为两地的地方时差, 即: 地方时差=经度差 $\div 15^\circ$  /小时; 或经度差 $\times 4$  分钟每度 (1 小时=15 度, 1 度=4 分钟)。

Step3 东西位置关系的判断:

①同是东经, 度数大的在东, 小的在西; 同是西经, 度数大的在西, 小的在东。

②一个是东经另一个是西经时, 东经在东, 西经在西 (仅对计算时间是对的)。

Step4 计算地方时: 根据所求地在已知地的东西位置关系, 加减地方时差, 即: 所求地已知地的东边, 则所求地方时=已知地的地方时+地方时差; 如所求地在已知地的西边, 则所求地方时=已知地的地方时-地方时差<sup>[1]</sup>。

#### (2) 太阳高度角计算步骤:

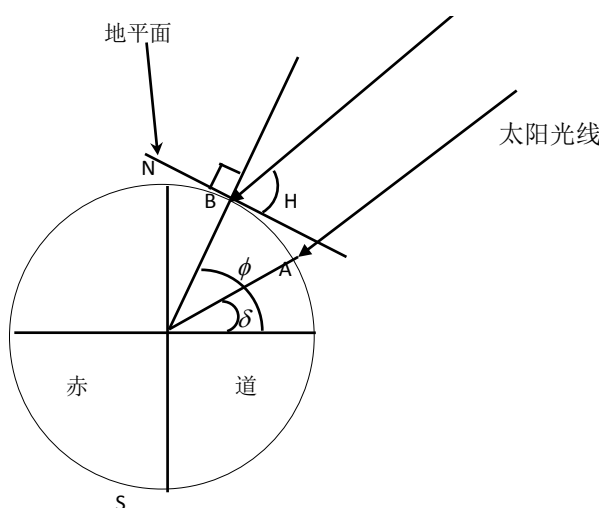


图 1 太阳高度角观测图

如图 1 所示, 太阳赤纬以  $\delta$  表示, 观测地地理纬度用  $\phi$  表示, 经度用  $\beta$  表示, 地方时用  $t$  表示, 时角以  $\alpha$  表示,  $T$  为北京时间。

因为东 (西) 经  $180^\circ$  为国际日期变更线, 所以我们取其为地方时参考点, 设西经某度为负度数, 则地方时为:

$$t = \left( \frac{\beta - 120^\circ}{15^\circ} \right) + T$$

则时角为：

$$\alpha = (t - 12) \times 15^\circ$$

同时，我们设  $N$  为本年的第  $N$  天，由该天的月份和日期可得：赤纬  $\delta$  与天数的关系为<sup>[1]</sup>：

$$\sin \delta = 0.39795 \cos[0.98563(N - 173)]$$

（ $N$  表示天数，从 1 月 1 日开始计算）。

根据查阅资料，我们又可知太阳高度角的计算公式如下<sup>[1]</sup>：

$$\sin H = \sin \phi \sin \delta + \cos \phi \cos \delta \cos \alpha$$

由此可以得出： $H = \arcsin(\sin \beta \sin \delta + \cos \beta \cos \delta \cos \alpha)$ 。

### 5.1.2.3 太阳影子变化曲线模型的解答

根据相关地理知识可以分析得到影子长度关于各参数的变化规律，如下结论：

- （1）当经纬度、日期、本地地方时一定时，直杆长度越长，则影子长度越长。
- （2）当直杆长度、经度、日期、本地地方时一定时，即太阳直射点一定，纬度越靠近太阳直射点则影子长度越长。
- （3）当直杆长度、经纬度、日期一定时，本地地方时越接近中午 12 时则太阳高度角越大，即影子长度越短。
- （4）当直杆长度、经纬度、本地地方时一定时，北半球日期越接近北回归日（6 月 22 日）则太阳高度角越大，即影子长度越短，越接近南回归日（12 月 22 日），则太阳高度角越小，即影子长度越长；南半球日期越接近北回归日则太阳高度角越小，即影子长度越长，越接近南回归日，则太阳高度角越大，即影子长度越短。

我们设水平面上， $h$  为固定直杆的长度， $H$  为太阳高度角（如图 2 所示），根据建立的模型求出太阳高度角  $H$  的数值，运用几何知识得出影子长度  $L$  的计算公式为：

$$L = h / \tan H$$

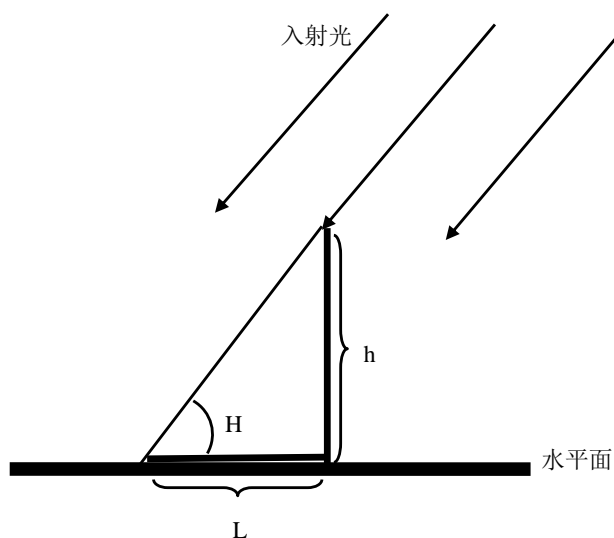


图 2 固定直杆示意图

问题一中给出了固定直杆长度  $h = 3m$ 。因此可以算出 2015 年 10 月 22 日北京时间 09:00-15:00 之间天安门广场（北纬 39 度 54 分 26 秒，东经 116 度 23 分 29 秒）3 米高的直杆的太阳高度角和影子长度。

下面我们选取 1 个小时为时间间隔，以 9:00 开始计数，直到 15:00。部分数据结果如表 1 所示。

表 1 整点时的太阳高度角和影子长度

时间	9:00	10:00	11:00	12:00	13:00	14:00	15:00
太阳高度角（度）	0.4616	0.5885	0.6672	0.6843	0.6363	0.5325	0.388
影子长度（米）	6.0304	4.4953	3.8085	3.6773	4.0604	5.0912	7.3402

根据表中所给数据，我们利用 *MATLAB* 编程求出太阳高度角随时间的变化曲线（如图 2 所示）。

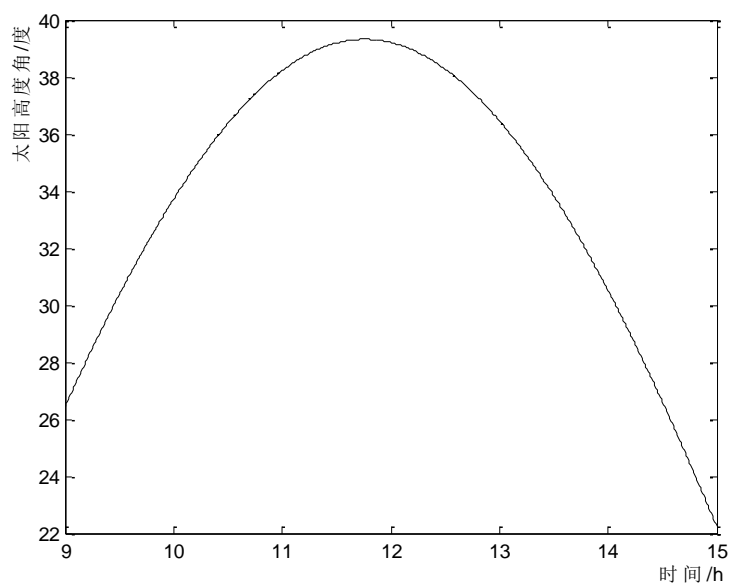


图 3 太阳高度角变化曲线

由图 3 可知，2015 年 10 月 22 日北京时间 09:00–15:00 之间天安门广场（北纬 39 度 54 分 26 秒，东经 116 度 23 分 29 秒）的太阳高度角随着时间的改变，先增大再减小，在约 11:40 处出现最大值。

同理，结合表 1 中所给数据，再由 *MATLAB* 软件可得影子长度随时间的变化曲线（如图 4 所示）。

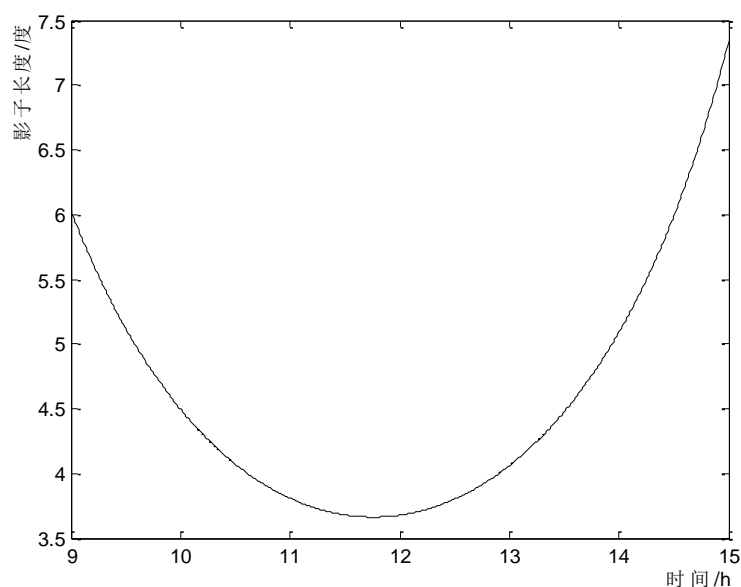


图 4 影子长度变化曲线

由图 4 可知, 2015 年 10 月 22 日北京时间 09:00-15:00 之间天安门广场(北纬 39 度 54 分 26 秒, 东经 116 度 23 分 29 秒) 3 米高的直杆的太阳影子长度的变化规律为: 随着时间的增加, 影子长度先是变短, 然后变长, 大约在 11:40 处取得最小值。

## 5.2 问题二

### 5.2.1 问题二的分析

问题二首先需要建立一个通用的数学模型, 其功能是根据某固定直杆在水平地面上的太阳影子顶点坐标数据, 确定直杆所处的地点, 也可以看成太阳影子变化曲线模型的逆向推理。因此我们可以建立基于影子坐标反求地点模型, 以固定直杆与地面的接触点为原点建立平面直角坐标系, 分析出影子长度和太阳方位角随时间的变化, 列出非线性方程组, 因为多元非线性方程组求解艰难或者无精确解, 因此将方程和方程组问题转化为函数优化问题, 利用模拟退火算法对其进行求解。最后, 将题目中附件数据代入模型进行精确求解, 给出直杆可能的地点。

### 5.2.2 基于影子坐标反求地点模型的准备与建立

#### 5.2.2.1 理论准备

##### 太阳方位角

太阳方位角即太阳所在的方位, 指太阳光线在地平面上的投影与当地子午线的夹角, 可近似地看作是竖立在地面上的直线在阳光下的阴影与正南方的夹角。方位角以目标物正北方向为零, 顺时针方向逐渐变大, 其取值范围是  $0^{\circ}$ — $360^{\circ}$ 。因此太阳方位角一般是以目标物的北方向为起始方向, 以太阳光的入射方向为终止方向, 按顺时针方向所测量的角度(如图 5 所示)<sup>[1]</sup>。

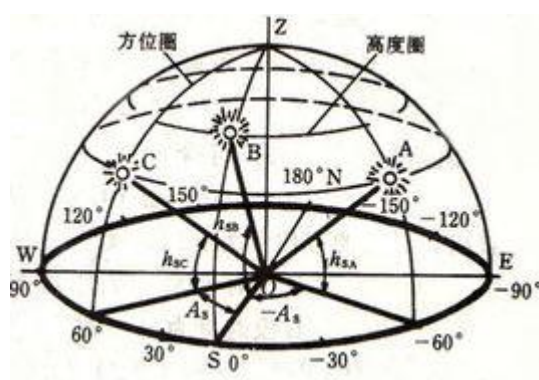


图 5 太阳方位角示意图

经查阅资料可知太阳方位角计算公式为:  $\cos \varepsilon = \sin H \sin \phi - \sin \delta / (\cos H \cos \phi)$

#### 5.2.2.2 数据处理

以固定直杆在阳光下的影子顶点移动的轨迹, 代替太阳运行轨迹, 运用相对运动原理, 将地球自转及绕太阳公转的运动简化为地球不动, 太阳绕地球转动, 将太阳系假设为一个近似球体, 地球与近似球体为同一球心, 太阳绕地球在近圆形的椭圆轨道上运行(如图 6 所示)。

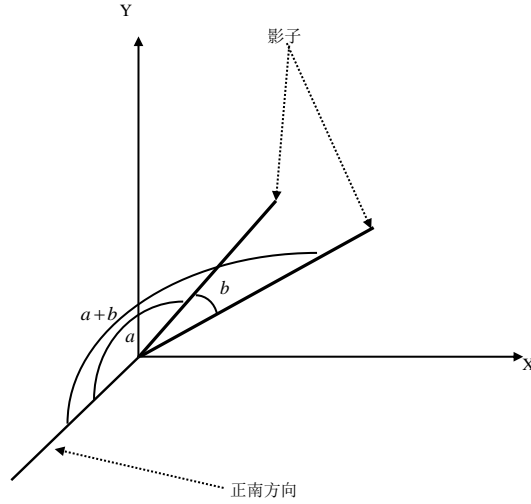


图 6 太阳方位角求解图

因为  $xoy$  坐标系的  $x$  轴与  $y$  轴方向未知，所以无法通过影子顶点坐标来确定太阳方位角。但我们由图中几何关系可以看出， $a$  与  $a+b$  为太阳方位角。太阳方位角的变化量  $\Delta\varepsilon$  和影子顶点坐标夹角的变化量相等，即  $b$  为太阳方位角的变化量  $\Delta\varepsilon$ 。

由前文可知，影子长度为：

$$L = h / \tan(\arcsin(\sin \beta \sin \delta + \cos \beta \cos \delta \cos \alpha))$$

太阳方位角为：

$$\varepsilon = \arcsin(\sin H \sin \phi - \sin \delta / (\cos H \cos \phi))$$

### 5.2.2.3 模型建立

#### (1) 问题转化

为了方便求解，我们将上述方程和方程组求解问题转化为函数优化问题，从而把模拟退火算法推广到解非线性方程及方程组问题上来。

为表述方便，我们可以设  $f = L$ ， $g = \varepsilon$ 。

即组成多元非线性方程组：

$$\begin{cases} f - L = 0 \\ (g_1 - g_2) - (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = 0 \end{cases}$$

#### (2) 模拟退火算法

模拟退火算法 (Simulated Annealing, SA) 是 20 世纪 80 年代初期发展起来的一种用来求解大规模组合优化问题的随机性优化算法，其出发点是优化问题的求解与物理系统退火过程的相似性，从而达到求解全局优化问题的目的<sup>[2]</sup>。

算法步骤：

**Step1** 给定模型中的每一个参数的变化范围，在范围内随机选择一个初始模型  $m_0$ ，并计算对应地目标函数值  $E(m_0)$ 。

**Step2** 对当前模型进行扰动从而产生一个新模型  $m$ ，计算相应地目标函数值  $E(m)$ ，得到  $\Delta E = E(m) - E(m_0)$ 。

**Step3** 若  $\Delta E < 0$ ，那么新模型被接受；若  $\Delta E > 0$ ，那么新模型  $m$  按概率  $P = \exp(-\Delta E / T)$  进行接受， $T$  为温度。当模型被接受时，置  $m_0 = m, E(m_0) = E(m)$ 。

**Step4** 在温度  $T$  下，重复一定次数的扰动和接受过程，即重复步骤 2、3。

**Step5** 缓慢地降低温度  $T$ 。

**Step6** 重复步骤 2、5，直至收敛条件满足为止<sup>[2]</sup>。



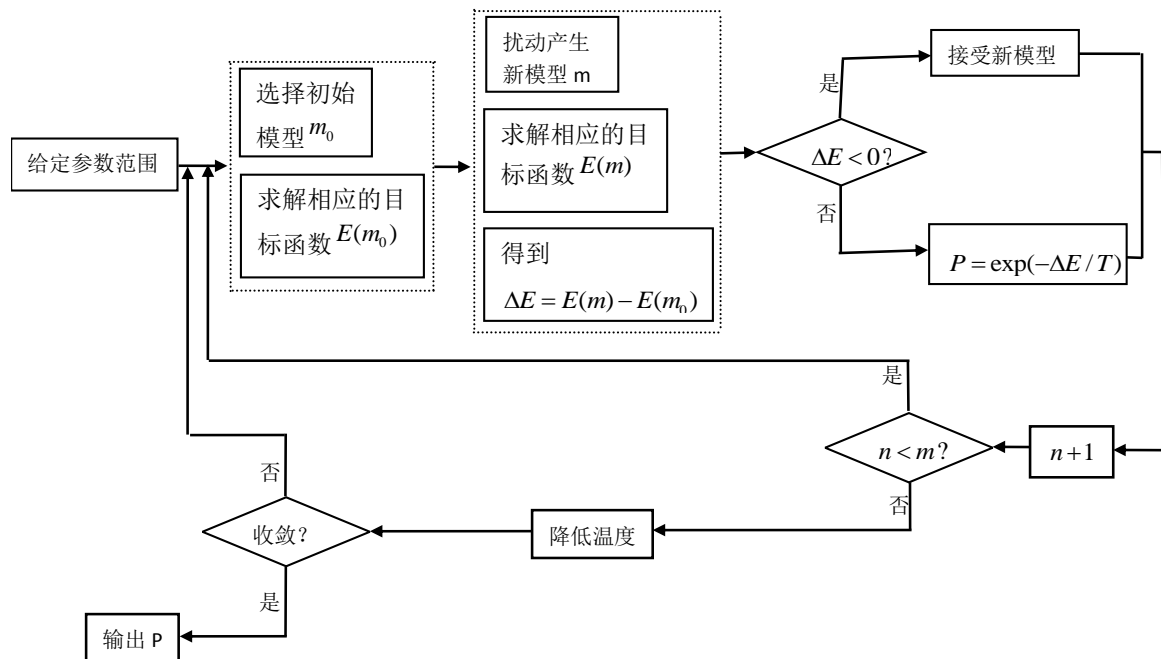


图 6 模拟退火算法流程图

算法的实质分为两层循环，随即扰动产生新模型并计算目标函数值的变化，决定是否被接受。由于算法初始温度设计在高温条件，这使得  $E$  增大的模型可能被接受，因而能舍去局部极小值，通过缓慢地降低温度，算法最终能收敛到全局最优点<sup>[3]</sup>。

由于多元非线性方程组的解很难求出，或者无精确解，所以我们利用模拟退火算法对其进行进一步处理，转化为求解：

$$\begin{cases} \min \sum |f - L| \\ \min \sum |(g_1 - g_2) - (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)| \end{cases}$$

### 5.2.3 模型的解答

根据题目要求，将基于影子坐标反求地点模型应用于附件 1。并在附件中的坐标系中设太阳影子顶点坐标为  $(x_0, y_0)$ ，则实际影长为：

$$L = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$$

附件 1 给出了 2015 年 4 月 18 日测量的固定直杆影子的坐标，我们运用前文推导出的公式及 **MATLAB** 软件可以分别计算出太阳高度角、理论影长、偏方位角、方位角、以及相对误差等结果（编程见附录 I）。

运用 **MATLAB** 计算得出的误差具体数据如表 2-1、表 2-2。

表 2-1 关于影子长度误差的各参数数据表

北京时间	x 坐标 (米)	y 坐标 (米)	实际影长	高度角 (弧)	高度角 (度)	理论影长	误差
14:42	1.0365	0.4973	1.149626	1.048798	60.09169	1.150437	0.000705
14:45	1.0699	0.5029	1.182199	1.036691	59.398	1.182891	0.000585
14:48	1.1038	0.5085	1.215297	1.024561	58.70301	1.215875	0.000476
14:51	1.1383	0.5142	1.249051	1.01241	58.00682	1.249408	0.000286
14:54	1.1732	0.5198	1.283195	1.00024	57.30951	1.283509	0.000244

14:57	1.2087	0.5255	1.317993	0.988051	56.61116	1.318198	0.000156
15:00	1.2448	0.5311	1.353364	0.975846	55.91184	1.353499	1E-04
15:03	1.2815	0.5368	1.389387	0.963624	55.21162	1.389435	3.44E-05
15:06	1.3189	0.5426	1.426153	0.951389	54.51056	1.42603	-8.6E-05
15:09	1.3568	0.5483	1.4634	0.939139	53.80872	1.463311	-6E-05
15:12	1.3955	0.5541	1.501482	0.926877	53.10615	1.501307	-0.00012
15:15	1.4349	0.5598	1.540232	0.914603	52.40291	1.540046	-0.00012
15:18	1.4751	0.5657	1.579853	0.902318	51.69903	1.57956	-0.00019
15:21	1.516	0.5715	1.620145	0.890023	50.99456	1.619882	-0.00016
15:24	1.5577	0.5774	1.661271	0.877718	50.28955	1.661049	-0.00013
15:27	1.6003	0.5833	1.703291	0.865404	49.58402	1.703096	-0.00011
15:30	1.6438	0.5892	1.746206	0.853082	48.87802	1.746063	-8.2E-05
15:33	1.6882	0.5952	1.790051	0.840753	48.17158	1.789993	-3.3E-05
15:36	1.7337	0.6013	1.835014	0.828416	47.46472	1.834929	-4.6E-05
15:39	1.7801	0.6074	1.880875	0.816072	46.75749	1.880919	2.36E-05
15:42	1.8277	0.6135	1.927918	0.803722	46.04991	1.928014	4.95E-05

表 2-2 关于方位角误差的各参数数据表

北京 时间	x 坐标 (米)	y 坐标 (米)	x/y	偏方位 角	方位角 差	理论方位 角	理论方 位角差	误差
14:42	1.0365	0.4973	2.0843	64.3689	0.0000	259.2490	0.0000	0.0000
14:45	1.0699	0.5029	2.1275	64.8244	0.4555	259.7100	0.4610	0.0119
14:48	1.1038	0.5085	2.1707	65.2654	0.8965	260.1560	0.9070	0.0116
14:51	1.1383	0.5142	2.2137	65.6901	1.3212	260.5880	1.3390	0.0133
14:54	1.1732	0.5198	2.2570	66.1037	1.7348	261.0070	1.7580	0.0132
14:57	1.2087	0.5255	2.3001	66.5023	2.1334	261.4130	2.1640	0.0141
15:00	1.2448	0.5311	2.3438	66.8942	2.5254	261.8100	2.5610	0.0139
15:03	1.2815	0.5368	2.3873	67.2720	2.9031	262.1940	2.9450	0.0142
15:06	1.3189	0.5426	2.4307	67.6376	3.2687	262.5670	3.3180	0.0149
15:09	1.3568	0.5483	2.4746	67.9957	3.6269	262.9310	3.6820	0.0150
15:12	1.3955	0.5541	2.5185	68.3439	3.9750	263.2860	4.0370	0.0154
15:15	1.4349	0.5598	2.5632	68.6877	4.3188	263.6320	4.3830	0.0147
15:18	1.4751	0.5657	2.6076	69.0182	4.6493	263.9700	4.7210	0.0152
15:21	1.5160	0.5715	2.6527	69.3446	4.9757	264.3010	5.0520	0.0151
15:24	1.5577	0.5774	2.6978	69.6615	5.2927	264.6240	5.3750	0.0153
15:27	1.6003	0.5833	2.7435	69.9735	5.6046	264.9410	5.6920	0.0154
15:30	1.6438	0.5892	2.7899	70.2804	5.9115	265.2510	6.0020	0.0151
15:33	1.6882	0.5952	2.8364	70.5791	6.2103	265.5560	6.3070	0.0153
15:36	1.7337	0.6013	2.8833	70.8719	6.5030	265.8550	6.6060	0.0156
15:39	1.7801	0.6074	2.9307	71.1595	6.7906	266.1480	6.8990	0.0157
15:42	1.8277	0.6135	2.9791	71.4448	7.0759	266.4350	7.1860	0.0153

由表 2-1 和表 2-2 可知，实际影长与方位角的相对误差都非常小，表明所求得的地点经纬度与实际地点相差无几，从而验证了模型的正确性。

我们设相对误差为 $\eta$ ，将每个地点不同时间的相对误差的绝对值相加，并求其最小值，即求：

$$\min \sum_{i=1}^{21} \eta_i$$

其值最小时对应的地点为固定直杆的可能地点。

则影长和方位角的相对误差可分别求出一个解。运用基于影子坐标反求地点模型，将两个解对应的经纬度计算出来，即可得到最终结果。

最终求出结果：

固定直杆高 2m，所处地点可能为（如图 7 红色标记处）：

- 1、 $18^{\circ}12'00.0''N 109^{\circ}42'00.0''E$ ，地处海南三亚附近。
- 2、 $18^{\circ}42'00.0''N 109^{\circ}06'00.0''E$ ，地处海南三亚附近。
- 3、 $20^{\circ}18'00.0''N 110^{\circ}00'00.0''E$ ，地处广东湛江附近。



图 7 固定直杆可能的地点

## 5.3 问题三

### 5.3.1 问题三的分析

本节在问题二的基础上，将固定直杆地点的日期由已知条件变为了未知条件，并要求求解。事实上此条件的改变对于通用模型无较大影响，仅仅增加了结果的精度，求出了日期。我们仍能建立起多元非线性方程组，转化为模拟退火算法进行求解，其不同之处在于：

- (1) 未知量不同，天数 $N$ 为未知量，需要最终求解；
- (2) 求解结果不同，需同时求出日期；

因此我们仅需要对问题二中的模型进行改进，建立起基于改进的影子坐标反求地点模型就能很好地解决本节的问题。为了更精确地得到最优解，我们可以对最终模型做进

一步处理，将方程组转化为比率问题求解，再结合附件 2 和附件 3 的数据解出固定直杆的具体地点及日期。

- 基于此，解答部分共分如下小节：
- 理论分析补充；
- 模型的改进与转化；
- 具体地点与日期的求解；
- 误差与结果分析；

### 5.3.2 问题三的解答

#### ● 理论分析补充

模拟退火算法的基本思想是从一给定解开始，从领域中随即产生另一个解，接受 *Metropolis* 准则允许目标函数在有限范围内变坏，它由一控制参数  $t$  决定，其作用类似于物理过程中的温度  $T$ ，对于控制参数的每一取值，算法持续进行“产生-判断-接受或舍去”的迭代过程，对应着固体在某一恒定温度下的趋于热平衡的过程，当控制参数逐渐减小并趋于零时，系统越来越趋于平衡状态，最后系统状态对英语优化问题的全局最优解。由于固体退火必须缓慢降温，才能使得固体在每一温度下都达到热平衡，最终趋于平衡状态，因此控制参数  $t$  经缓慢衰减，才能确保模拟退火算法最终优化问题的整体最优解。<sup>[4]</sup>

#### ● 模型的改进与转化

本节的模型需要将模拟退火算法加以改进，将其转化为同时求解两个结果的最优化问题。根据题目要求，我们仍然能够得到多元非线性方程组：

$$\begin{cases} f - L = 0 \\ (g_1 - g_2) - (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = 0 \end{cases}$$

并且利用模拟退火算法的思想，将其转化为函数的规划问题，即求最小值：

$$\begin{cases} \min \sum |f - L| \\ \min \sum |(g_1 - g_2) - (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)| \end{cases}$$

唯一不同的是结果需要同时求出地点和日期两个解，因此我们需要将上式转化为比率的求解，其结果更加精确。即建立如下方程组：

$$\begin{cases} \min \sum |(f - L) / L| \\ \min \sum |[(g_1 - g_2) - (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)] / (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)| \end{cases}$$

若此方程组的两组解相差不大，则我们认为固定直杆的地点和日期数据都在解的范围之内。

其中日期可由天数  $N$ （从 1 月 1 日开始计数）计算得出。

#### ● 具体地点与日期的求解

根据题目要求，先将模型运用于附录 2，将所给时间坐标等数据代入模型中解出理论影长、方位角。运用基于改进的影子坐标反求地点模型，分别以影长和方位角为评判标准，并相互代入检验其合理性，最终得出两组解。下表 3-1、表 3-2 和表 4-1、表 4-2 分别为影长和方位角的误差分析表。

表 3-1 以影长为标准的理论影长误差表

北京时间	x 坐标(米)	y 坐标(米)	实际影长	高度角	理论影长	误差
12:41	-1.2352	0.173	1.247256	0.964681	1.247674	0.000335

12:44	-1.2081	0.189	1.222795	0.973969	1.22308	0.000233
12:47	-1.1813	0.2048	1.198921	0.983179	1.198999	6.5E-05
12:50	-1.1546	0.2203	1.175429	0.992305	1.175426	2.89E-06
12:53	-1.1281	0.2356	1.15244	1.001344	1.152353	7.55E-05
12:56	-1.1018	0.2505	1.129917	1.010291	1.129775	0.000126
12:59	-1.0756	0.2653	1.107835	1.019142	1.10769	0.000131
13:02	-1.0496	0.2798	1.086254	1.027891	1.086094	0.000147
13:05	-1.0237	0.294	1.065081	1.036533	1.064985	8.98E-05
13:08	-0.998	0.308	1.044446	1.045062	1.044362	8.05E-05
13:11	-0.9724	0.3218	1.024264	1.053473	1.024225	3.87E-05
13:14	-0.947	0.3354	1.00464	1.061759	1.004573	6.69E-05
13:17	-0.9217	0.3488	0.985491	1.069913	0.98541	8.26E-05
13:20	-0.8965	0.3619	0.96679	1.07793	0.966736	5.59E-05
13:23	-0.8714	0.3748	0.948585	1.085801	0.948557	2.89E-05
13:26	-0.8464	0.3876	0.930928	1.09352	0.930877	5.51E-05
13:29	-0.8215	0.4001	0.913752	1.101079	0.9137	5.7E-05
13:32	-0.7967	0.4124	0.897109	1.108468	0.897033	8.5E-05
13:35	-0.7719	0.4246	0.880974	1.115681	0.880883	0.000103
13:38	-0.7473	0.4366	0.865492	1.122708	0.865259	0.000269
13:41	-0.7227	0.4484	0.850504	1.12954	0.850169	0.000394

表 3-2 以影长为标准的方位角误差表

北京 时间	x 坐标 (米)	y 坐标 (米)	x/y	夹角	差值	方位角	差值	误差
12:41	-1.2352	0.1730	-7.1399	-82.0272	0.0000	120.6405	0.0000	0.0000
12:44	-1.2081	0.1890	-6.3921	-81.1086	0.9186	121.5604	0.9200	0.0015
12:47	-1.1813	0.2048	-5.7681	-80.1646	1.8626	122.5033	1.8628	0.0001
12:50	-1.1546	0.2203	-5.2410	-79.1978	2.8294	123.4699	2.8294	0.0000
12:53	-1.1281	0.2356	-4.7882	-78.2036	3.8236	124.4612	3.8207	-0.0008
12:56	-1.1018	0.2505	-4.3984	-77.1913	4.8359	125.4781	4.8377	0.0004
12:59	-1.0756	0.2653	-4.0543	-76.1444	5.8827	126.5217	5.8812	-0.0003
13:02	-1.0496	0.2798	-3.7513	-75.0734	6.9538	127.5928	6.9523	-0.0002
13:05	-1.0237	0.2940	-3.4820	-73.9763	8.0508	128.6925	8.0520	0.0001
13:08	-0.9980	0.3080	-3.2403	-72.8489	9.1782	129.8217	9.1813	0.0003
13:11	-0.9724	0.3218	-3.0218	-71.6889	10.3382	130.9815	10.3411	0.0003
13:14	-0.9470	0.3354	-2.8235	-70.4974	11.5298	132.1729	11.5325	0.0002
13:17	-0.9217	0.3488	-2.6425	-69.2719	12.7553	133.3969	12.7564	0.0001
13:20	-0.8965	0.3619	-2.4772	-68.0171	14.0101	134.6543	14.0138	0.0003
13:23	-0.8714	0.3748	-2.3250	-66.7269	15.3003	135.9462	15.3057	0.0004
13:26	-0.8464	0.3876	-2.1837	-65.3951	16.6320	137.2734	16.6330	0.0001
13:29	-0.8215	0.4001	-2.0532	-64.0323	17.9949	138.6368	17.9964	0.0001
13:32	-0.7967	0.4124	-1.9319	-62.6324	19.3948	140.0372	19.3967	0.0001

13:35	-0.7719	0.4246	-1.8179	-61.1861	20.8411	141.4752	20.8347	-0.0003
13:38	-0.7473	0.4366	-1.7116	-59.7050	22.3222	142.9514	22.3109	-0.0005
13:41	-0.7227	0.4484	-1.6117	-58.1825	23.8447	144.4663	23.8258	-0.0008

表 4-1 以方位角为标准的理论影长误差表

北京时间	x 坐标(米)	y 坐标(米)	实际影长	高度角	理论影长	误差
12:41	-1.2352	0.1730	1.2473	0.9883	1.2517	0.0036
12:44	-1.2081	0.1890	1.2228	0.9974	1.2271	0.0035
12:47	-1.1813	0.2048	1.1989	1.0064	1.2030	0.0034
12:50	-1.1546	0.2203	1.1754	1.0153	1.1794	0.0033
12:53	-1.1281	0.2356	1.1524	1.0241	1.1563	0.0033
12:56	-1.1018	0.2505	1.1299	1.0328	1.1337	0.0034
12:59	-1.0756	0.2653	1.1078	1.0414	1.1117	0.0035
13:02	-1.0496	0.2798	1.0863	1.0499	1.0901	0.0036
13:05	-1.0237	0.2940	1.0651	1.0583	1.0691	0.0038
13:08	-0.9980	0.3080	1.0444	1.0665	1.0486	0.0040
13:11	-0.9724	0.3218	1.0243	1.0746	1.0287	0.0043
13:14	-0.9470	0.3354	1.0046	1.0825	1.0092	0.0045
13:17	-0.9217	0.3488	0.9855	1.0903	0.9903	0.0049
13:20	-0.8965	0.3619	0.9668	1.0980	0.9719	0.0053
13:23	-0.8714	0.3748	0.9486	1.1055	0.9540	0.0057
13:26	-0.8464	0.3876	0.9309	1.1128	0.9367	0.0062
13:29	-0.8215	0.4001	0.9138	1.1199	0.9200	0.0068
13:32	-0.7967	0.4124	0.8971	1.1268	0.9038	0.0074
13:35	-0.7719	0.4246	0.8810	1.1335	0.8881	0.0081
13:38	-0.7473	0.4366	0.8655	1.1400	0.8731	0.0088
13:41	-0.7227	0.4484	0.8505	1.1463	0.8587	0.0096

表 4-2 以方位角为标准的方位角误差表

北京 时间	x 坐标 (米)	y 坐标 (米)	x/y	夹角	差值	方位角	差值	误差
12:41	-1.2352	0.1730	-7.1399	-82.0272	0.0000	120.6405	0.0000	0.0000
12:44	-1.2081	0.1890	-6.3921	-81.1086	0.9186	121.5604	0.9200	0.0015
12:47	-1.1813	0.2048	-5.7681	-80.1646	1.8626	122.5033	1.8628	0.0001
12:50	-1.1546	0.2203	-5.2410	-79.1978	2.8294	123.4699	2.8294	0.0000
12:53	-1.1281	0.2356	-4.7882	-78.2036	3.8236	124.4612	3.8207	-0.0008
12:56	-1.1018	0.2505	-4.3984	-77.1913	4.8359	125.4781	4.8377	0.0004
12:59	-1.0756	0.2653	-4.0543	-76.1444	5.8827	126.5217	5.8812	-0.0003
13:02	-1.0496	0.2798	-3.7513	-75.0734	6.9538	127.5928	6.9523	-0.0002
13:05	-1.0237	0.2940	-3.4820	-73.9763	8.0508	128.6925	8.0520	0.0001
13:08	-0.9980	0.3080	-3.2403	-72.8489	9.1782	129.8217	9.1813	0.0003
13:11	-0.9724	0.3218	-3.0218	-71.6889	10.3382	130.9815	10.3411	0.0003

13:14	-0.9470	0.3354	-2.8235	-70.4974	11.5298	132.1729	11.5325	0.0002
13:17	-0.9217	0.3488	-2.6425	-69.2719	12.7553	133.3969	12.7564	0.0001
13:20	-0.8965	0.3619	-2.4772	-68.0171	14.0101	134.6543	14.0138	0.0003
13:23	-0.8714	0.3748	-2.3250	-66.7269	15.3003	135.9462	15.3057	0.0004
13:26	-0.8464	0.3876	-2.1837	-65.3951	16.6320	137.2734	16.6330	0.0001
13:29	-0.8215	0.4001	-2.0532	-64.0323	17.9949	138.6368	17.9964	0.0001
13:32	-0.7967	0.4124	-1.9319	-62.6324	19.3948	140.0372	19.3967	0.0001
13:35	-0.7719	0.4246	-1.8179	-61.1861	20.8411	141.4752	20.8347	-0.0003
13:38	-0.7473	0.4366	-1.7116	-59.7050	22.3222	142.9514	22.3109	-0.0005
13:41	-0.7227	0.4484	-1.6117	-58.1825	23.8447	144.4663	23.8258	-0.0008

### ● 误差与结果分析

由上面 4 个表可以看出，无论是理论影长还是方位角都与真实数据误差较小，验证了基于改进的影子坐标反求地点模型的准确性与可靠性。

综合以上分析，我们运用基于改进的影子坐标反求地点模型可以解出附录 I 中固定直杆的地点和日期为：

(1)  $36.0^{\circ}N78.4^{\circ}E$ ，4 月 4 日。

(2)  $35.7^{\circ}N80.4^{\circ}E$ ，4 月 3 日。

这两个地点大约都位于新疆西南部。

同理，附件 3 的数据运用到模型中，以同样的方法求解，也能得到最终结果，这里不加赘述。（影长和方位角的误差表详见附录 II）。

则附录 II 中固定直杆的地点和日期为：

(1)  $28.5^{\circ}N109.8^{\circ}E$ ，1 月 18 日。

(2)  $29.2^{\circ}N110.2^{\circ}E$ ，1 月 21 日。

这两个地方大约都位于湖南张家界。

## 5.4 问题四

### 5.4.1 问题四的分析

针对问题四，我们首先需要获取自然图像序列或者视频帧<sup>[5]</sup>，并且对每一帧图像进行 *photoshop* 处理，将其简化为只有直杆存在于视频图像中。利用 *MATLAB* 将其转化为灰度图像，提取出影子末端的数据和直杆顶端数据，运用几何透视的原理建立空间直角坐标系，求得影子末端的坐标。然后将所得数据运用到问题二中建立的基于影子坐标反求地点模型中，求解出视频拍摄的地点。如果将所得数据运用到问题三中建立的基于改进的影子坐标反求地点模型中，可以求解出拍摄的日期。

### 5.4.2 视频画面提取相关分析

根据附件 4 提供的视频，我们利用截图软件以 3 分钟为间隔截取视频帧，下图为其中某一帧经过 *rgb2gray* 函数转化后的灰度图像（如图 8 所示）。



图 8 空间直角坐标系

如图 8 所示，我们在图中运用几何透视的原理建立了空间直角坐标系，由图片中的两条平行线（左侧台阶和中间的切割线）我们可知他们必交于一点，且该点位于中间的切割线上，我们作该点与影子末端点  $c$  的连线， $ox$  垂直于中间切割线，我们可知  $ox \perp yc$ ，则我们以固定杆底端为原点，根据  $ox$  建立  $x$  轴，以交点与固定杆底端连线建立  $y$  轴，以固定杆所在直线作为  $z$  轴，从而建立一个完整的空间直角坐标系如图 8 所示，由于考虑到解题的难易程度与画面的清晰度，我们利用 *photoshop* 对其进行抠图操作，得到简图如图 9 所示。

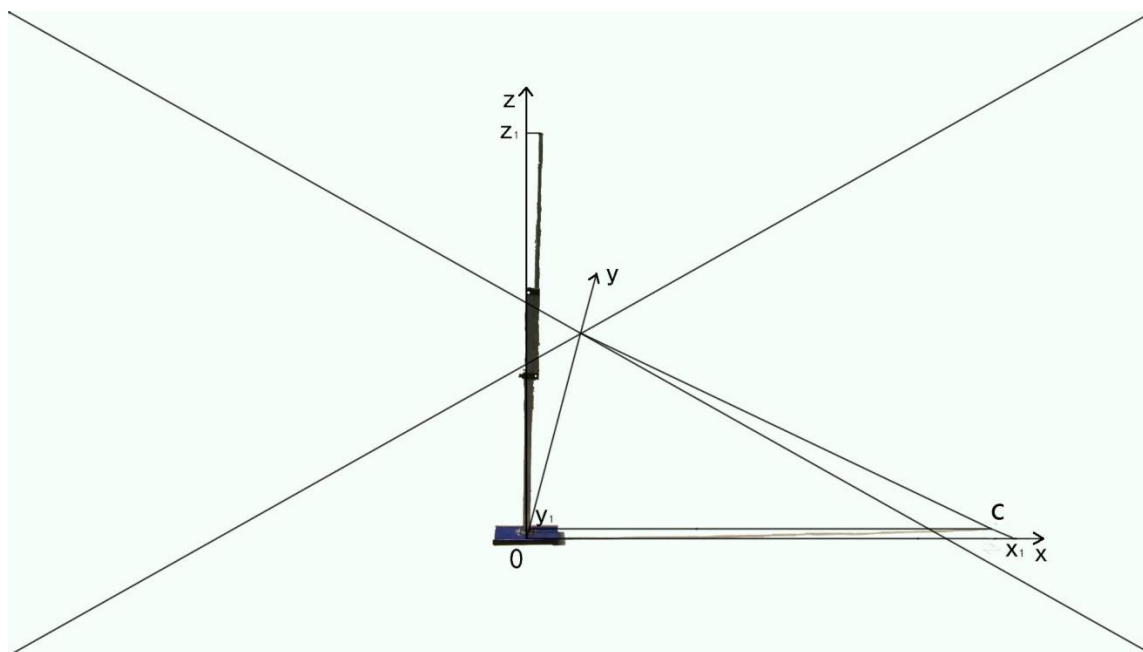


图 9 空间直角坐标系简化图

随后利用 *MATLAB* 软件将其转化为灰度图像，并且运用 *MATLAB* 编程提取出现实中直杆影子坐标和长度的数据（编程见附录III），如表 5 所示。



表 5 提取出的自然图像数据表

北京时间	x 坐标(米)	y 坐标(米)	影长
8:55	2.4928	0.1793	2.49924
8:58	2.4455	0.1643	2.451013
9:01	2.3898	0.1407	2.393938
9:04	2.3438	0.1284	2.347314
9:07	2.2954	0.1067	2.297879
9:10	2.2352	0.0851	2.236819
9:13	2.1934	0.0744	2.194661
9:16	2.1465	0.0547	2.147197
9:19	2.0955	0.0534	2.09618
9:22	2.0506	0.0523	2.051267
9:25	2.0157	0.0429	2.016156
9:28	1.9616	0.0251	1.961761
9:31	1.9212	0.0213	1.921318
9:34	1.8914	0.0403	1.891829

由表 5 可知，由于 y 坐标的数值较小，所以其在操作中易引起误差。我们这里为了减少 y 坐标数值误差的影响，采取计算影长与太阳高度角的关系进行方程的运算求解，减少 y 坐标的直接运算量，即舍弃方位角的运算检验，只用太阳高度角来进行求解检验。

5.4.3 运用基于改进的影子坐标反求地点模型进行解答

通过视频中数据的提取，本问已经正确获悉了直杆影子的坐标数据，此外原题目中给出了直杆长度为 2m，我们将其运用于问题二所建立的基于影子坐标反求地点模型，即可求解出相对误差表（如表 6 所示），进而求解出拍摄地点。

表 6 相对误差表

北京时间	x 坐标(米)	y 坐标(米)	影长	太阳高度角 (弧度)	理论影长	误差
0.3715	2.4928	0.1793	2.4992	0.7644	2.5032	0.0016
0.3736	2.4455	0.1643	2.4510	0.7753	2.4489	-0.0009
0.3757	2.3898	0.1407	2.3939	0.7863	2.3958	0.0008
0.3778	2.3438	0.1284	2.3473	0.7972	2.3438	-0.0015
0.3799	2.2954	0.1067	2.2979	0.8082	2.2930	-0.0021
0.3819	2.2352	0.0851	2.2368	0.8192	2.2432	0.0029
0.3840	2.1934	0.0744	2.1947	0.8301	2.1944	-0.0001
0.3861	2.1465	0.0547	2.1472	0.8411	2.1467	-0.0002
0.3882	2.0955	0.0534	2.0962	0.8520	2.0999	0.0018
0.3903	2.0506	0.0523	2.0513	0.8629	2.0540	0.0013
0.3924	2.0157	0.0429	2.0162	0.8739	2.0090	-0.0036
0.3944	1.9616	0.0251	1.9618	0.8848	1.9648	0.0015
0.3965	1.9212	0.0213	1.9213	0.8957	1.9214	0.0001
0.3986	1.8914	0.0403	1.8918	0.9066	1.8789	-0.0069

综合以上叙述，将本问中提取的影子坐标运用到基于影子坐标反求地点模型，得到拍摄地点为：

$$33.1^{\circ}N115.2^{\circ}E$$

大约位于安徽阜阳。

如果拍摄日期未知，则将数据运用于问题三所建立的基于改进的影子坐标反求地点模型，得到拍摄日期为：6月28日

## 六、 模型评价

### 6.1 模型优点

- 1、问题二的模型运用模拟退火算法，巧妙地将多元非线性方程组的求解转化为了多目标函数优化问题。
- 2、在解经纬度的过程中，先对高度角和方位角的相对误差进行处理，利用最优化理论通过求解误差的绝对值最小的地点，得到最优答案。
- 3、问题四中运用 *rgb2gray* 函数将自然图像转化为灰度图像。

### 6.2 改进之处

- 1、问题一建立的模型过于简单，即按照传统的计算方法求解问题。
- 2、问题三得到的可能地点和日期太少，不具确定性。

## 七、 参考文献

- [1] 百度百科；“时角”；“地方时”；“地方时计算步骤”；“太阳高度角”；“太阳高度角公式”；“太阳方位角”；“太阳方位角计算公式”；<http://baike.baidu.com>；2015年9月11日。
- [2] 钟太勇，许小勇；模糊退火算法求一维非线性方程的根；《阜阳高等师范专科学校学报》；26卷6期；第28页；2006。
- [3] 许小勇，宋昔芳；一种求解非线性方程全部实根的算法与实现；《科技广场》；第1页；2007年。
- [4] 钟太勇，许小勇，张海芳；求解非线性方程以及方程组得模拟退火算法；《航空计算技术》；37卷1期；第45页；2007。
- [5] 武琳，郭晓杰；基于视频中太阳影子轨迹的经纬度估计方法；《发明专利申请公布说明书》；第1-2页；2009。

## 程序：

### 第一问

```
function T1(a,b,n,h1,t)
% a 纬度    b 经度    n 天数    h1 杆高度    t 北京时间
%求太阳高度角并画出影长
d=2*pi*(n-1)/365;
c=0.006918-0.399912*cos(d)+0.070257*sin(d)-0.006758*cos(2*d)+0.000907*sin(2*d)-0.002697*cos(3*d)+0.00148*sin(3*d);%asin(0.39795*cos(0.98563*(n-173)/180*pi));    %求赤纬
t1=abs(b-120)/15+t;    %求地方时
t2=(t1-12)*15/180*pi;    %求时角
h=asin(sin(a/180*pi)*sin(c)+cos(a/180*pi)*cos(c)*cos(t2));%求太阳高度角
h2=h1./tan(h);    %求影长
plot(t,h2);
figure(2);plot(t,180/pi*h);
end
```

### 第二问

%附件一

```
clear
h2=[1.149625826,1.182198976,1.215296955,1.249051052,1.28319534...
    ,1.317993149,1.353364049,1.389387091,1.426152856,1.463399853...
    ,1.501481622,1.540231817,1.579853316,1.620144515,1.661270613...
    ,1.703290633,1.74620591,1.790050915,1.835014272,1.880875001,1.927918447
];%影长
a=[2.084254977,2.127460728,2.170698132,2.213730066,2.257021932,2.300095147.
..
    ,2.343814724,2.387295082,2.430704018,2.474557724,2.518498466,2.56323687
...
    ,2.607565848,2.652668416,2.697783166,2.743528202,2.789884589,2.83635752
7...
    ,2.883252952,2.930688179,2.979136104];    %影子与坐标轴
夹角正切值
c=asin(0.39795*cos(0.98563*(108-173)/180*pi));    %求赤纬
ms2=1000;
for x1=1:0.1:60
    for x2=80:0.1:150
        for x3=0.9:0.1:3
            t1=(x2-120)/15+[14.7:0.05:15.7];    %求地方时
            t2=(t1-12)*15/180*pi;    %求时角
            h=asin(sin(x1/180*pi)*sin(c)+cos(x1/180*pi)*cos(c)*cos(t2));%求太阳高度角
            as=acos(sin(h)*sin(x1)-sin(c)./(cos(h)*cos(x1)));    %求太阳方位角
```

```

ma=6*(as(1)-as-(atan(2.084254977)-atan(a)))./atan(a);           %求太阳方
位角差
ms=(h2.*tan(h)-x3)/x3;                                         %求太阳高度角差
ml=abs(ms)+abs(ma);%控制这个标准 得到不同的解
mst=sum(ml(:));
if ms2>mst
    ms2=mst;
    x=ms;
    y=ma;
    p=h;
    q=as;
    i=x1;
    j=x2;
    k=x3;
end
    end
end
end

```

### 第三问

```

%附件 2
clear
h2=[1.247256205, 1.22279459, 1.198921486, 1.175428964, 1.152439573, 1.12991747..
.
    , 1.10783548, 1.086254206, 1.065081072, 1.044446265, 1.024264126, 1.004640314
...
    , 0.985490908, 0.966790494, 0.948584735, 0.930927881, 0.91375175, 0.897109051
...
    , 0.880973762, 0.865492259, 0.850504468];
a=[-7.139884393, -6.392063492, -5.768066406, -5.241034952, -4.78820034, -4.39840
3194...
    , -4.054278176, -3.751250893, -3.481972789, -3.24025974, -3.021752641, -2.823
494335...
    , -2.642488532, -2.477203647, -2.324973319, -2.18369453, -2.053236691, -1.931
86227...
    , -1.817946302, -1.711635364, -1.611730598];

ms2=1000;
for x1=33:0.1:40
    for x2=70:0.1:82
        for x3=0.5:0.1:2
            for x4=100:150

```

```

c=asin(0.39795*cos(0.98563*(x4-173)/180*pi)); %求赤纬
t1=(x2-120)/15+[12+41/60:0.05:13+41/60]; %求地方
时
t2=(t1-12)*15/180*pi; %求时角
h=asin(sin(x1/180*pi)*sin(c)+cos(x1/180*pi)*cos(c)*cos(t2)); %求太阳高度角
as=asin(cos(c).*sin(t2)./cos(h)); %as=acos((sin(h)*sin(x1)-sin(c))./(cos(h)*
cos(x1))); %求太阳方位角
ma=(abs(as(1)-as)-abs(atan(-7.139884393)-atan(a)))./((as(1)-as)+1e-6);
%求太阳方位角差
ms=(h2.*tan(h)-x3)/x3; %求太阳高度角差
m1=abs(ms)+abs(ma); %控制这个标准 得到不同的解
mst=sum(m1(:));
if ms2>mst
    ms2=mst;
    x=ms;
    y=ma;
    p=h;
    q=as;
    i=x1;
    j=x2;
    k=x3;
    l=x4;
end
end
end
end
end
%附件 3
clear
h2=[3.533142184 3.546768029 3.561797643 3.578100715 3.595750783 3.61493428...
3.635425983 3.657218272 3.680541115 3.705167836 3.731278025 3.758917911...
3.788087888
3.818701015, 3.850809619, 3.88458522, 3.919911828, 3.956875992...
3.99553479 4.035750835 4.077863059];
a=[0.348830935 0.36673774 0.384784309 0.402946848 0.421281347 0.439757034...
0.458363592 0.477171509 0.496102636 0.515226038 0.534506336 0.553967337...
0.573602362 0.593422655 0.613453571 0.633651297 0.654077122 0.674705039...
0.695558062 0.716619924 0.737931245];

ms2=1000;
for x1=25:0.1:33
    for x2=105:0.1:115
        for x3=0.5:0.1:4

```

```

        for x4=0:100
c=asin(0.39795*cos(0.98563*(x4-173)/180*pi));           %求赤纬
t1=(x2-120)/15+[13.15:0.05:14.15];                     %求地方时
t2=(t1-12)*15/180*pi;                                   %求时角
h=asin(sin(x1/180*pi)*sin(c)+cos(x1/180*pi)*cos(c)*cos(t2));%求太阳高度角
as=asin(cos(c).*sin(t2)./cos(h));%as=acos((sin(h)*sin(x1)-sin(c))./(cos(h)*
cos(x1)));        %求太阳方位角
ma=(abs(as(1)-as)-abs(atan(0.348830935)-atan(a)))./((as(1)-as)+1e-6);
        %求太阳方位角差
ms=(h2.*tan(h)-x3)/x3;                                   %求太阳高度角差
m1=abs(ms);%+abs(ms);%控制这个标准 得到不同的解
mst=sum(m1(:));
if ms2>mst
    ms2=mst;
    x=ms;
    y=ma;
    p=h;
    q=as;
    i=x1;
    j=x2;
    k=x3;
    l=x4;
end
        end
    end
end
end

```

#### 第四问

%运行此程序前，先将图片灰度化处理，然后导入  
%提取数据

```

pic1=rgb2gray(pic);
[i,j]=find(pic1<250);
g1=min(i);
yx=max(j);
yy=i(find(j==max(j),1,'last'));
m=max(i);
n=min(j);
yx1=(m-yy)*(yx-960)/(yy-540)+yx;
yy1=1.5*sqrt((yy-m)^2+(yx1-yx)^2);
Lx1=(yx1-n)/(g1-m)*2;
Ly1=(yy1)/(g1-m)*2;
L=sqrt(Lx1^2+Ly1^2);

```

```

%求解
clear
h2=[2.49923995
2.451013003, 2.393938289, 2.347314423, 2.297878598, 2.236819405...
, 2.194661459, 2.147196856, 2.09618029, 2.05126684, 2.016156467, 1.961760579.
..
, 1.921318071, 1.891829287];
ms2=1000;
for x1=10:0.1:60
    for x2=10:0.1:150
        for x3=0.5:0.1:2
            for x4=194
c=asin(0.39795*cos(0.98563*(x4-173)/180*pi)); %求赤纬
t1=(x2-120)/15+[8+55/60:0.05:9+34/60]; %求地方时
t2=(t1-12)*15/180*pi; %求时角
h=asin(sin(x1/180*pi)*sin(c)+cos(x1/180*pi)*cos(c)*cos(t2)); %求太阳高度角
%as=asin(cos(c).*sin(t2)./cos(h)); %as=acos((sin(h)*sin(x1)-sin(c))./(cos(h)
*cos(x1))); %求太阳方位角
%ma=(abs(as(1)-as)-abs(atan(-7.139884393)-atan(a)))./((as(1)-as)+1e-6);
%求太阳方位角差
ms=(h2.*tan(h)-x3)/x3; %求太阳高度角差
m1=abs(ms); %+abs(ma); %控制这个标准 得到不同的解
mst=sum(m1(:));
if ms2>mst
    ms2=mst;
    x=ms;
    %y=ma;
    p=h;
    %q=as;
    i=x1;
    j=x2;
    k=x3;
    l=x4;
end
end
end
end
end
end

```

表格

说明：坐标系以直杆底端为原点，水平地面为 xy 平面。直杆垂直于地面。						
杆长	1.8			36 n	78.4 e	124 天
北京时 间	x 坐标(米)	y 坐标(米)	影长	高度角	理论影 长	误差
12:41	-1.2352	0.173	1.247256	0.964681	1.247674	0.000335
12:44	-1.2081	0.189	1.222795	0.973969	1.22308	0.000233
12:47	-1.1813	0.2048	1.198921	0.983179	1.198999	6.5E-05
12:50	-1.1546	0.2203	1.175429	0.992305	1.175426	2.89E-06
12:53	-1.1281	0.2356	1.15244	1.001344	1.152353	7.55E-05
12:56	-1.1018	0.2505	1.129917	1.010291	1.129775	0.000126
12:59	-1.0756	0.2653	1.107835	1.019142	1.10769	0.000131
13:02	-1.0496	0.2798	1.086254	1.027891	1.086094	0.000147
13:05	-1.0237	0.294	1.065081	1.036533	1.064985	8.98E-05
13:08	-0.998	0.308	1.044446	1.045062	1.044362	8.05E-05
13:11	-0.9724	0.3218	1.024264	1.053473	1.024225	3.87E-05
13:14	-0.947	0.3354	1.00464	1.061759	1.004573	6.69E-05
13:17	-0.9217	0.3488	0.985491	1.069913	0.98541	8.26E-05
13:20	-0.8965	0.3619	0.96679	1.07793	0.966736	5.59E-05
13:23	-0.8714	0.3748	0.948585	1.085801	0.948557	2.89E-05
13:26	-0.8464	0.3876	0.930928	1.09352	0.930877	5.51E-05
13:29	-0.8215	0.4001	0.913752	1.101079	0.9137	5.7E-05
13:32	-0.7967	0.4124	0.897109	1.108468	0.897033	8.5E-05
13:35	-0.7719	0.4246	0.880974	1.115681	0.880883	0.000103
13:38	-0.7473	0.4366	0.865492	1.122708	0.865259	0.000269
13:41	-0.7227	0.4484	0.850504	1.12954	0.850169	0.000394

说明：坐标系以直杆底端为原点，水平地面为 xy 平面。直杆垂直于地面。						
杆长	1.8			36 n	78.4 e	124 天



北京时间	x 坐标 (米)	y 坐标 (米)	x/y	夹角(度)	差值	方位角	差值	误差
12:41	-1.2352	0.1730	-7.139 9	-82.0272	0.0000	120.64 05	0.0000	0.0000
12:44	-1.2081	0.1890	-6.392 1	-81.1086	0.9186	121.56 04	0.9200	0.0015
12:47	-1.1813	0.2048	-5.768 1	-80.1646	1.8626	122.50 33	1.8628	0.0001
12:50	-1.1546	0.2203	-5.241 0	-79.1978	2.8294	123.46 99	2.8294	0.0000
12:53	-1.1281	0.2356	-4.788 2	-78.2036	3.8236	124.46 12	3.8207	-0.000 8
12:56	-1.1018	0.2505	-4.398 4	-77.1913	4.8359	125.47 81	4.8377	0.0004
12:59	-1.0756	0.2653	-4.054 3	-76.1444	5.8827	126.52 17	5.8812	-0.000 3
13:02	-1.0496	0.2798	-3.751 3	-75.0734	6.9538	127.59 28	6.9523	-0.000 2
13:05	-1.0237	0.2940	-3.482 0	-73.9763	8.0508	128.69 25	8.0520	0.0001
13:08	-0.9980	0.3080	-3.240 3	-72.8489	9.1782	129.82 17	9.1813	0.0003
13:11	-0.9724	0.3218	-3.021 8	-71.6889	10.338 2	130.98 15	10.341 1	0.0003
13:14	-0.9470	0.3354	-2.823 5	-70.4974	11.529 8	132.17 29	11.532 5	0.0002
13:17	-0.9217	0.3488	-2.642 5	-69.2719	12.755 3	133.39 69	12.756 4	0.0001
13:20	-0.8965	0.3619	-2.477 2	-68.0171	14.010 1	134.65 43	14.013 8	0.0003
13:23	-0.8714	0.3748	-2.325 0	-66.7269	15.300 3	135.94 62	15.305 7	0.0004
13:26	-0.8464	0.3876	-2.183 7	-65.3951	16.632 0	137.27 34	16.633 0	0.0001
13:29	-0.8215	0.4001	-2.053 2	-64.0323	17.994 9	138.63 68	17.996 4	0.0001
13:32	-0.7967	0.4124	-1.931 9	-62.6324	19.394 8	140.03 72	19.396 7	0.0001
13:35	-0.7719	0.4246	-1.817 9	-61.1861	20.841 1	141.47 52	20.834 7	-0.000 3
13:38	-0.7473	0.4366	-1.711 6	-59.7050	22.322 2	142.95 14	22.310 9	-0.000 5
13:41	-0.7227	0.4484	-1.611 7	-58.1825	23.844 7	144.46 63	23.825 8	-0.000 8

说明：坐标系以直杆底端为原点，水平地面为 xy 平面。直杆垂直于地面。						
杆长	1.9		35.7 n	80.4 e	123 天	
北京时 间	x 坐标(米)	y 坐标(米)	影长	高度角	理论影 长	误差
12:41	-1.2352	0.173	1.247256	0.988252	1.251741	0.003595
12:44	-1.2081	0.189	1.222795	0.997354	1.227087	0.00351
12:47	-1.1813	0.2048	1.198921	1.006366	1.202963	0.003371
12:50	-1.1546	0.2203	1.175429	1.015283	1.179362	0.003346
12:53	-1.1281	0.2356	1.15244	1.024099	1.156283	0.003335
12:56	-1.1018	0.2505	1.129917	1.03281	1.133721	0.003366
12:59	-1.0756	0.2653	1.107835	1.041411	1.111675	0.003466
13:02	-1.0496	0.2798	1.086254	1.049894	1.090145	0.003582
13:05	-1.0237	0.294	1.065081	1.058254	1.069131	0.003803
13:08	-0.998	0.308	1.044446	1.066486	1.048635	0.00401
13:11	-0.9724	0.3218	1.024264	1.074581	1.028657	0.004289
13:14	-0.947	0.3354	1.00464	1.082533	1.009203	0.004542
13:17	-0.9217	0.3488	0.985491	1.090335	0.990276	0.004855
13:20	-0.8965	0.3619	0.96679	1.097978	0.971881	0.005265
13:23	-0.8714	0.3748	0.948585	1.105456	0.954024	0.005734
13:26	-0.8464	0.3876	0.930928	1.112758	0.936714	0.006215
13:29	-0.8215	0.4001	0.913752	1.119878	0.919958	0.006792
13:32	-0.7967	0.4124	0.897109	1.126805	0.903765	0.007419
13:35	-0.7719	0.4246	0.880974	1.13353	0.888146	0.008141
13:38	-0.7473	0.4366	0.865492	1.140044	0.873112	0.008803
13:41	-0.7227	0.4484	0.850504	1.146336	0.858673	0.009605

说明：坐标系以直杆底端为原点，水平地面为 xy 平面。直杆垂直于地面。								
杆长	1.9		35.7 n	80.4 e	123 天			

北京时间	x 坐标 (米)	y 坐标 (米)	x/y	夹角(度)	差值	方位角	差值	误差
12:41	-1.2352	0.1730	-7.139 9	-82.0272	0.0000	120.64 05	0.0000	0.0000
12:44	-1.2081	0.1890	-6.392 1	-81.1086	0.9186	121.56 04	0.9200	0.0015
12:47	-1.1813	0.2048	-5.768 1	-80.1646	1.8626	122.50 33	1.8628	0.0001
12:50	-1.1546	0.2203	-5.241 0	-79.1978	2.8294	123.46 99	2.8294	0.0000
12:53	-1.1281	0.2356	-4.788 2	-78.2036	3.8236	124.46 12	3.8207	-0.000 8
12:56	-1.1018	0.2505	-4.398 4	-77.1913	4.8359	125.47 81	4.8377	0.0004
12:59	-1.0756	0.2653	-4.054 3	-76.1444	5.8827	126.52 17	5.8812	-0.000 3
13:02	-1.0496	0.2798	-3.751 3	-75.0734	6.9538	127.59 28	6.9523	-0.000 2
13:05	-1.0237	0.2940	-3.482 0	-73.9763	8.0508	128.69 25	8.0520	0.0001
13:08	-0.9980	0.3080	-3.240 3	-72.8489	9.1782	129.82 17	9.1813	0.0003
13:11	-0.9724	0.3218	-3.021 8	-71.6889	10.338 2	130.98 15	10.341 1	0.0003
13:14	-0.9470	0.3354	-2.823 5	-70.4974	11.529 8	132.17 29	11.532 5	0.0002
13:17	-0.9217	0.3488	-2.642 5	-69.2719	12.755 3	133.39 69	12.756 4	0.0001
13:20	-0.8965	0.3619	-2.477 2	-68.0171	14.010 1	134.65 43	14.013 8	0.0003
13:23	-0.8714	0.3748	-2.325 0	-66.7269	15.300 3	135.94 62	15.305 7	0.0004
13:26	-0.8464	0.3876	-2.183 7	-65.3951	16.632 0	137.27 34	16.633 0	0.0001
13:29	-0.8215	0.4001	-2.053 2	-64.0323	17.994 9	138.63 68	17.996 4	0.0001
13:32	-0.7967	0.4124	-1.931 9	-62.6324	19.394 8	140.03 72	19.396 7	0.0001
13:35	-0.7719	0.4246	-1.817 9	-61.1861	20.841 1	141.47 52	20.834 7	-0.000 3
13:38	-0.7473	0.4366	-1.711 6	-59.7050	22.322 2	142.95 14	22.310 9	-0.000 5
13:41	-0.7227	0.4484	-1.611 7	-58.1825	23.844 7	144.46 63	23.825 8	-0.000 8

北京 时间	x 坐标(米)	y 坐标(米)	影长	高度角	理论影长	误差
13:09	1.1637	3.336	3.533142184	0.634463593	3.532735546	0.000115092
13:12	1.2212	3.3299	3.546768029	0.632599375	3.546565963	5.69717E-05
13:15	1.2791	3.3242	3.561797643	0.630571453	3.561690987	2.99445E-05
13:18	1.3373	3.3188	3.578100715	0.628380891	3.57812374	6.4349E-06
13:21	1.396	3.3137	3.595750783	0.62602883	3.595878665	3.55649E-05
13:24	1.4552	3.3091	3.61493428	0.623516483	3.614971578	1.03176E-05
13:27	1.5148	3.3048	3.635425983	0.620845131	3.635419733	1.71927E-06
13:30	1.575	3.3007	3.657218272	0.618016124	3.657241895	6.45926E-06
13:33	1.6357	3.2971	3.680541115	0.615030872	3.680458413	2.24702E-05
13:36	1.697	3.2937	3.705167836	0.611890848	3.705091302	2.06559E-05
13:39	1.7589	3.2907	3.731278025	0.608597579	3.731164337	3.04688E-05
13:42	1.8215	3.2881	3.758917911	0.605152647	3.758703149	5.7134E-05
13:45	1.8848	3.2859	3.788087888	0.601557684	3.787735327	9.30711E-05
13:48	1.9488	3.284	3.818701015	0.597814368	3.818290539	0.000107491
13:51	2.0136	3.2824	3.850809619	0.59392442	3.850400652	0.000106203
13:54	2.0792	3.2813	3.88458522	0.5898896	3.88409987	0.000124942
13:57	2.1457	3.2805	3.919911828	0.585711705	3.919424877	0.000124225
14:00	2.2131	3.2801	3.956875992	0.581392566	3.956414996	0.000116505
14:03	2.2815	3.2801	3.99553479	0.576934042	3.995112362	0.000105725
14:06	2.3508	3.2804	4.035750835	0.57233802	4.035562108	4.67638E-05
14:09	2.4213	3.2812	4.077863059	0.567606408	4.077812564	1.23829E-05

北京 时间	x 坐标(米)	y 坐标(米)	x/y	夹角	角度 差	方位 角	差	误差
0.5479	1.1637	3.3360	0.348 8	0.335 6	0.0000	0.1604	0.000 0	0.000 0
0.5500	1.2212	3.3299	0.366 7	0.351 5	0.0159	0.1753	0.014 9	0.060 0

0. 5521	1. 2791	3. 3242	0. 384 8	0. 367 3	0. 0317	0. 1901	0. 029 8	0. 059 9
0. 5542	1. 3373	3. 3188	0. 402 9	0. 383 0	0. 0474	0. 2050	0. 044 6	0. 059 3
0. 5563	1. 3960	3. 3137	0. 421 3	0. 398 7	0. 0631	0. 2197	0. 059 3	0. 059 2
0. 5583	1. 4552	3. 3091	0. 439 8	0. 414 3	0. 0787	0. 2344	0. 074 0	0. 059 0
0. 5604	1. 5148	3. 3048	0. 458 4	0. 429 8	0. 0942	0. 2490	0. 088 6	0. 058 5
0. 5625	1. 5750	3. 3007	0. 477 2	0. 445 2	0. 1096	0. 2635	0. 103 2	0. 058 4
0. 5646	1. 6357	3. 2971	0. 496 1	0. 460 5	0. 1249	0. 2780	0. 117 6	0. 058 0
0. 5667	1. 6970	3. 2937	0. 515 2	0. 475 8	0. 1401	0. 2924	0. 132 0	0. 057 8
0. 5688	1. 7589	3. 2907	0. 534 5	0. 490 9	0. 1552	0. 3067	0. 146 3	0. 057 4
0. 5708	1. 8215	3. 2881	0. 554 0	0. 505 9	0. 1703	0. 3209	0. 160 5	0. 057 1
0. 5729	1. 8848	3. 2859	0. 573 6	0. 520 8	0. 1852	0. 3350	0. 174 7	0. 056 7
0. 5750	1. 9488	3. 2840	0. 593 4	0. 535 6	0. 1999	0. 3490	0. 188 7	0. 056 3
0. 5771	2. 0136	3. 2824	0. 613 5	0. 550 3	0. 2146	0. 3630	0. 202 6	0. 056 0
0. 5792	2. 0792	3. 2813	0. 633 7	0. 564 8	0. 2292	0. 3768	0. 216 4	0. 055 5
0. 5813	2. 1457	3. 2805	0. 654 1	0. 579 2	0. 2436	0. 3905	0. 230 2	0. 055 1
0. 5833	2. 2131	3. 2801	0. 674 7	0. 593 5	0. 2579	0. 4042	0. 243 8	0. 054 7
0. 5854	2. 2815	3. 2801	0. 695 6	0. 607 7	0. 2721	0. 4177	0. 257 3	0. 054 2
0. 5875	2. 3508	3. 2804	0. 716 6	0. 621 8	0. 2862	0. 4311	0. 270 8	0. 053 8
0. 5896	2. 4213	3. 2812	0. 737 9	0. 635 7	0. 3001	0. 4444	0. 284 1	0. 053 3