重庆邮电大学 2018-19 学年 第一学期

高等数学 A（上）（半期）参考解答

一．选择题（本题共 5 个小题，每小题 3 分，共 15 分）

1.A 2.B 3.A 4.D 5.B

二．填空题（本大题共 5 个小题，每小题 3 分，共 15 分）

6. $\frac{1}{3}$，7. 4，8. $-4x\,f'(1-2x^2)dx$，9. $(x+n)e^x$，10. 2，

三. 计算题（本大题共 3 个小题，每小题 6 分，满分 18 分）

11. 解：原式= $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2(x-1)}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x})(x-1)(x+1)}$ 3 分

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{2}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x})(x+1)}=\frac{\sqrt{2}}{4}$ 6 分

12. 解：原式= $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^2\tan x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^3}$ 2 分

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{3x^2} = \frac{1}{3}$ 6 分

13. 解：原式= $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}\ln(\cos x)} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln(\cos x)}$ 3 分

$\overset{\frac{0}{0}}{=} e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2x}\cdot\frac{-\sin x}{\cos x}} = e^{-\frac{1}{2}}$ 6 分

四. **解答题（本大题共 3 个小题，每小题 6 分，满分 18 分）**

14. 解:将 $y=(\frac{x}{x+1})^{x}$ 取对数, 得

$\ln y=x\ln\frac{x}{x+1}=x\ln x-x\ln(x+1)$ 2 分

将上述方程两边对 x 求导, 得

$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=\ln x+1-\ln(x+1)-\frac{x}{x+1}$ 5 分

$\frac{dy}{dx}=(\frac{x}{1+x})^{x}(\ln x+1-\ln(x+1)-\frac{x}{x+1})=(\frac{x}{1+x})^{x}(\ln\frac{x}{x+1}+\frac{1}{x+1})$ 6 分

15.解. $\frac{dy}{dt}=3t^{2}+2t$ $\frac{dx}{dt}=1-\frac{1}{t+1}=\frac{t}{1+t}$ 2 分

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3t^{2}+2t}{t/(t+1)}=3t^{2}+5t+2$ 4 分

$\frac{d^{2}y}{dx^{2}}=\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})=\frac{(3t^{2}+5t+2)'}{(t-\ln(t+1))'}=\frac{6t+5}{t/(t+1)}=6t+11+\frac{5}{t}$ 6 分

16. 解：将 $x=0$ 代入方程 $e^{y}+xy=e$ 得 $y=1$ 1 分

将方程 $e^{y}+xy=e$ 两边对 x 求导：$e^{y}\frac{dy}{dx}+y+x\frac{dy}{dx}=0$， 3 分

$\frac{dy}{dx}=\frac{-y}{e^{y}+x}$，　$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=-\frac{1}{e}$ 5 分

曲线 $y=y(x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程为: $y-1=-\frac{1}{e}x$ 6 分

五、应用题（本大题共 2 个小题，每小题 8 分，满分 16 分）

17. 解: $f(x)=\begin{cases}1 & |x|<1\\ 0 & |x|=1\\ -1 & |x|>1\end{cases}$ 2 分

$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(-1)=-1\neq f(1)=0$,$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}1=1\neq f(1)=0$

函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 不连续 ，$x=1$ 为函数 $f(x)$ 在的第一类跳跃间断点. 4 分

$\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}(1)=1\neq f(-1)=0$ ，$\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(-1)=-1\neq f(-1)=0$

函数 $f(x)$ 在 $x=-1$ 不连续 ，$x=-1$ 为函数 $f(x)$ 在的第一类跳跃间断点. 7 分

函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1),(-1,1),(1,+\infty)$ 内连续 . 8 分

18.解. $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续， $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=a+b=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)=1$ 得 $a+b=1$ 2 分

$f'_-(1)=\lim\limits_{x\to1-0}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1-0}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$ 4 分

$f'_+(1)=\lim\limits_{x\to1+0}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1+0}\dfrac{ax+b-1}{x-1}=a$ 6 分

$f(x)$ 在 $x=1$ 处可导, 即 $f'_+(1)=f'_-(1)$ 得 $a=2$ 从而 $b=-1$ 7 分

当 $a=2,b=-1$ 时， $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续且可导. 8 分

六、综合题（本大题共 3 个小题，每小题 6 分，满分 18 分）

19. 证 由于 $\frac{n^2}{n^2+n} \le x_n = n(\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n}) \le \frac{n^2}{n^2+1}$ 3 分

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+n}=1, \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1}=1$ 4 分

由夹逼准则, 知 $\lim\limits_{n\to\infty} n(\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n})=1$ 6 分

20. 证 由于 $f(x)=\ln x$ 在区间 $[b,a]$ 上连续, 在区间 (b,a) 上内可导

由拉格朗日中值定理知, 存在 $\xi\in(b,a)$, 使得

$\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=\frac{\ln a-\ln b}{a-b}=f'(\xi)=\frac{1}{\xi}$ 4 分

由于 $\xi\in(b,a)$， $0<b<\xi<a$, 得: $\frac{1}{a}<\frac{1}{\xi}<\frac{1}{b}$.

从而有 $\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b}$ 6 分

21. 解. 由于 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$,

$\lim\limits_{x\to a}(f(x)-f(a))=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}(x-a)^2=0$

$\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$, 故 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处的连续 2 分

$f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}(x-a)=0$

故 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处的可导 4 分

由于 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$, 故由函数极限的保号性知, 存在点 $x=a$ 的的去心邻

域 $U(\hat{a},\delta)$, 则对 $\forall x\in U(\hat{a},\delta)$, 有 $\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}<0$, 即 $f(x)<f(a)$

函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处取得极大值. 6 分