

# 太阳影子定位模型

## 摘要

本文通过建立太阳影子长度变化模型，太阳影子定位、定时整体模型，视频拍摄地点确定模型，研究太阳影子定位问题，为定位技术、视频分析等相关领域提供一定的理论依据。

针对问题一，首先借助直杆影子长度与太阳高度角的三角函数关系，联立太阳高度角、赤纬角、时角等参数之间的关系，建立太阳影子长度变化模型；其次利用控制变量法，对太阳影子长度变化模型进行分析，得出直杆影子长度与直杆长度、测量地点经度、纬度、赤纬角、北京时间之间的函数关系；再利用问题一中给定的条件，利用 MATLAB 编程求得直杆影子长度与时间的变化曲线，且当时间为 12:15 时，影子长度取得最小值  $3.75m$ 。

针对问题二，首先基于太阳方位角与太阳影子顶点坐标的相关关系，借助问题一中影子长度变化模型建立太阳影子定位、定时整体模型，并利用 MATLAB 编程求解得出  $C_{21}^2$  组经纬度值；再依据经纬度约束条件，利用 Excel 对求得的经纬度值筛选，并标记出筛选后的结果；然后通过建立聚类分析模型，将筛选结果进行聚类，并对元素较多的类中的经纬度均值化，进一步建立误差估计模型，对结果作误差分析；最后确定直杆所处的可能测量地为：贵州，海南，云南，越南。

针对问题三，首先对附件 2、附件 3 中的数据进行直杆影位分析，得出附件 2、附件 3 中太阳直射点与直杆分别位于同一半球、不同半球的结论；然后基于问题二中的太阳影子定时、定位整体模型，增加积日未知量，求解得到附件 2 和附件 3 中直杆所处的可能的测量地点及对应日期，并对结果进行误差分析。

针对问题四，根据附件 4 的视频，首先利用 MATLAB 以等时间间隔提取视频关键帧，再以视频帧的像素点建立直角坐标系，确定直杆顶端及底部坐标，划定直杆阴影区域，通过膨胀技术及边缘检测方法消除噪点影响，确定直杆阴影顶点坐标，并通过相似转换方法获得影子长度，且给出影子长度与时间的变化关系。进而利用问题二中太阳影子定位模型，建立视频拍摄地点确定模型，最后得出视频拍摄的可能地点：呼和浩特、清水河县。

**关键词** 太阳影子定位 控制变量法 聚类分析 膨胀技术 边缘检测

## 一、问题重述

### 1.1 问题的背景及要求

传统的导航定位技术需要在一定的速度下才能得以实施,本文研究太阳影子定位技术问题,对传统导航定位技术的这一不足进行很好的改进。

如何确定视频的拍摄地点和拍摄日期是视频数据分析的重要方面,太阳影子定位技术就是通过分析视频中物体的太阳影子变化,确定视频拍摄的地点和日期的一种方法。

### 1.2 问题的提出

(1) 建立影子长度变化的数学模型,分析影子长度关于各个参数的变化规律,并应用你们建立的模型画出 2015 年 10 月 22 日北京时间 9:00-15:00 之间天安门广场(北纬 39 度 54 分 26 秒,东经 116 度 23 分 29 秒)3 米高的直杆的太阳影子长度的变化曲线。

(2) 根据某固定直杆在水平地面上的太阳影子顶点坐标数据,建立数学模型确定直杆所处的地点。将你们的模型应用于附件 1 的影子顶点坐标数据,给出若干个可能的地点。

(3) 根据某固定直杆在水平地面上的太阳影子顶点坐标数据,建立数学模型确定直杆所处的地点和日期。将你们的模型分别应用于附件 2 和附件 3 的影子顶点坐标数据,给出若干个可能的地点与日期。

(4) 附件 4 为一根直杆在太阳下的影子变化的视频,并且已通过某种方式估计出直杆的高度为 2 米。请建立确定视频拍摄地点的数学模型,并应用你们的模型给出若干个可能的拍摄地点。

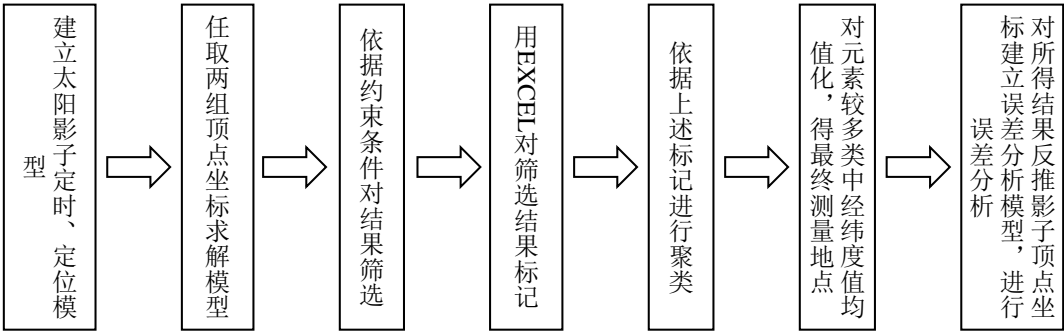
如果拍摄日期未知,你能否根据视频确定出拍摄地点与日期?

## 二、问题分析

问题一的分析,基于直杆在一天中某些时刻的影子长度变化情况,首先借助直杆影子长度与太阳高度角的三角函数关系,联立太阳高度角、赤纬角、时角等参数之间的关系,建立太阳影子长度变化模型;其次利用控制变量法,对太阳影

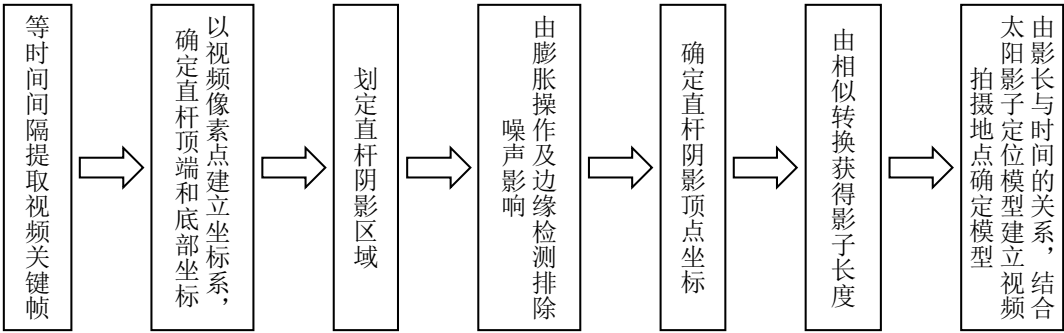
子长度变化模型进行分析，得出直杆影子长度与直杆长度、测量地点经度、纬度、赤纬角、北京时间之间的函数关系。

问题二的分析，根据某固定直杆在水平地面上的太阳影子顶点坐标数据，确定直杆所处的地点问题的分析过程中，具体流程图如下



问题三的分析，根据某固定直杆在水平地面上的太阳影子顶点坐标数据，确定直杆所处的地点和对应日期，即确定测量地点的经度、纬度和日期。首先对附件 2、附件 3 中的数据进行直杆影位分析，然后基于问题二中的太阳影子定时、定位整体模型，增加积日未知量，通过 MATLAB 编程求解得出  $C_{21}^3$  组经度、纬度、积日的值，再依据经度、纬度、积日的约束条件对所得结果进行筛选。然后建立聚类分析模型，将筛选后的结果进行聚类，并对元素较多的类别中经度、纬度值均值化，得到附件 2、附件 3 中直杆所处的可能测量地点与日期。最后，利用 Excel 软件，分别标记出三组经度、纬度的值所对应的地点。

问题四的分析，基于确定视频拍摄地点问题，根据附件 4 中直杆在太阳下影子的视频，按照如下流程图进行具体分析：



### 三、模型假设

1. 假设一天当中太阳高度角不变；
2. 假设大气层是均匀的；
3. 假设在计算时角时，所用的时间均为当地平均太阳时；
4. 假设视频中所统计的数据真实有效。

### 四、符号说明

序号	符号	符号说明
1	$h$	太阳高度角
2	$h'$	修正后太阳高度角
3	$l$	直杆长度
4	$\rho$	太阳影子长度
5	$\varphi$	纬度
6	$\psi$	经度
7	$\delta$	赤纬角
8	$A_h$	时角
9	$t$	真太阳时
10	$t_B$	北京时间
11	$N$	积日，即测量日期距离 1 月 1 日的天数
12	$A_s$	太阳方位角

## 五、模型的建立与求解

### 5.1 问题一

#### 5.1.1 影子长度变化模型的建立

在某一真太阳时时刻刻，直杆影子长度 $l$ 与太阳高度角 $h$ 关系如下图：

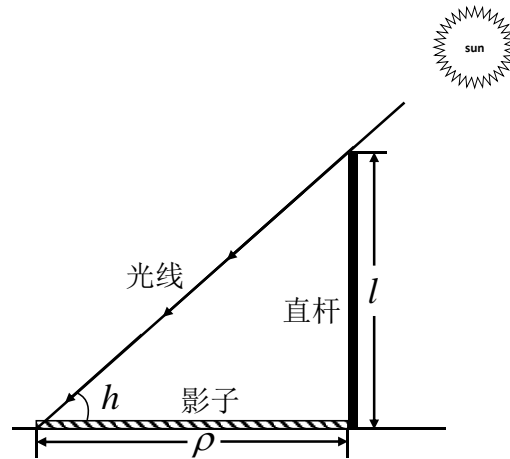


图 5.1 直杆影子长度与太阳高度角关系

由图 5.1 可得

$$\rho = \frac{l}{\tan h} \quad (5.1)$$

在地理学中，太阳高度角 $h$ 反映了太阳光线和地平面之间的夹角与真太阳时 $t$ （地方时）的关系<sup>[1]</sup>

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos A_h \quad (5.2)$$

其中赤纬角 $\delta$ 刻画了太阳光线在一年四季中直射点的纬度在南北回归线之间的变化规律

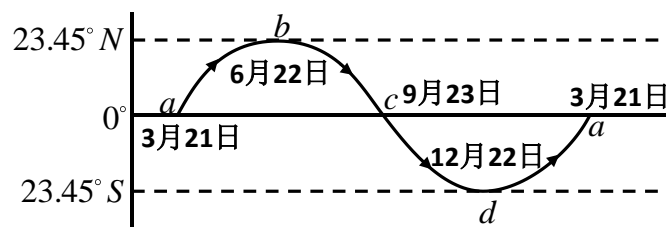


图 5.2 赤纬角年变化规律

由地理学中赤纬角计算公式， $\delta$ 满足

$$\delta = 23.45^\circ \cdot \sin(2\pi(284 + N) / 365) \quad (5.3)$$

其中  $N$  为测量日期距离 1 月 1 日的天数。

时角  $A_h$  表示地球与当地子午圈的角距离，并借用时间的单位，以小时来计量， $A_h$  满足

$$A_h = |t - 12| \times 15^\circ \quad (5.4)$$

在实际问题中，所用的时间均为当地平均太阳时，它与日常钟表所指示的标准时即北京时间之间往往有一定误差，需要加以修正。标准时间是指各个国家按所处地理位置的某一范围，划定所有地区的时间以某一中心子午线的时间为标准时。中国标准时间以东经  $120^\circ$  为依据作为北京时间的标准。中国各地真太阳时  $t$  与北京时间之间的转换关系为

$$t = t_B + \Delta t \quad (5.5)$$

其中  $t_B$  为北京时间， $\Delta t$  满足  $\Delta t = \psi - 120^\circ / 15$ ， $\psi$  为当地经度。

考虑到太阳光经由太空入射到大气层，由于两种介质的密度差，实际太阳高度角与式 (5.2) 的理论值会存在一定偏差。

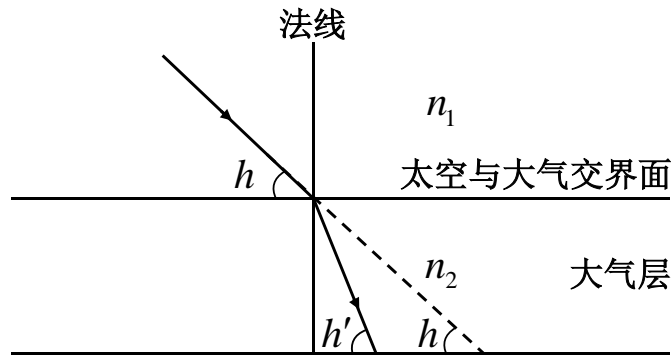


图 5.3 光在真空与大气中的折射关系

借助光线由光疏介质射入光密介质时的折射规律来校正角度偏差：

$$n_1 \sin \left( \frac{\pi}{2} - h \right) = n_2 \sin \left( \frac{\pi}{2} - h' \right) \quad (5.6)$$

其中  $n_1=1$  为太阳光线在太空（真空）中的折射率， $n_2=1.000277$  为太阳光线在大气中的折射率。

由式 5.1-5.6 得到影子长度变化模型

$$\begin{cases} \sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos A_h \\ \delta = 23.45^\circ \sin \frac{2\pi(284 + N)}{365} \\ A_h = |t - 12| \times 15^\circ \\ t = t_B + \psi - 120^\circ / 15^\circ \\ n_1 \sin \left( \frac{\pi}{2} - h \right) = n_2 \sin \left( \frac{\pi}{2} - h' \right) \\ \rho = \frac{l}{\tan h'} \end{cases} \quad (5.7)$$

### 5.1.2 模型的求解

#### 1. 影子长度关于各个参数的变化规律

根据 5.1.1 中太阳影子长度变化模型，可得

$$\rho = \frac{l \cdot \frac{n_1}{n_2} \sqrt{1 - (\sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos [t_B + (\psi - 120^\circ) / 15^\circ - 12] \times 15 \times \pi / 180)^2}}{\sqrt{1 - \frac{n_1^2}{n_2^2} \sqrt{1 - (\sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos [t_B + (\psi - 120^\circ) / 15^\circ - 12] \times 15 \times \pi / 180)^2}}} \quad (5.8)$$

由式 (5.8) 分析得到太阳影子长度  $\rho$  与直杆长度  $l$ 、测量地点经度  $\psi$ 、纬度  $\varphi$ 、赤纬角  $\delta$ 、北京时间  $t_B$  有关。

#### (1) 太阳影子长度 $\rho$ 与直杆长度 $l$ 的关系

在式 (5.8) 中，固定测量地点经度  $\psi$ 、纬度  $\varphi$ 、日期距离 1 月 1 日的天数  $N$ 、北京时间  $t_B$  的值，分别固定为测量地点经度  $\psi = 116^\circ 23' 29''$ ，纬度  $\varphi = 39^\circ 54' 26''$ ，测量日期距离 1 月 1 日的天数  $N=295$ ，北京时间  $t_B=12:00$ ，得到太阳影子长度  $\rho$  与直杆长度  $l$  的关系为

$$\rho = \frac{\sqrt{1 - (0.6415 \times (-0.2096) + 0.7672 \times 0.9778 \times 1)^2}}{\sqrt{1 - \sqrt{1 - (0.6415 \times (-0.2096) + 0.7672 \times 0.9778 \times 1)^2}}} \cdot l = 1.7116l \quad (5.9)$$

由式 (5.9) 可分析得到，太阳影子长度  $\rho$  与直杆长度  $l$  成正比例关系，即太

阳影子长度  $\rho$  随着直杆长度  $l$  的增大而增大。

## (2) 太阳影子长度 $\rho$ 与测量地点经度 $\psi$ 的关系

在式 (5.8) 中, 固定测量地点直杆长度  $l$ 、纬度  $\varphi$ 、日期距离 1 月 1 日的天数  $N$ 、北京时间  $t_B$  的值, 分别固定为直杆长度  $l = 3m$ , 纬度  $\varphi = 39^\circ 54' 26''$ , 测量日期距离 1 月 1 日的天数  $N=295$ 、北京时间  $t_B=12:00$ , 得到太阳影子长度  $\rho$  与测量地点经度  $\psi$  的关系为

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{3 \sqrt{1 - (0.6415 \times (-0.2096) + 0.7672 \times 0.9778 \cos \left[ \left| 12 + \frac{\psi - 120^\circ}{15^\circ} - 12 \right| \times 15 \times \frac{\pi}{180} \right])^2}}{\sqrt{1 - \sqrt{1 - (0.6415 \times (-0.2096) + 0.7672 \times 0.9778 \cos \left[ \left| 12 + \frac{\psi - 120^\circ}{15^\circ} - 12 \right| \times 15 \times \frac{\pi}{180} \right])^2}}} \\ &= \frac{3 \sqrt{1 - (-0.1345 + 0.7502 \cos \left[ \left| (\psi - 120^\circ) \times 15 \right| \times \frac{\pi}{180} \right])^2}}{\sqrt{1 - \sqrt{1 - (-0.1345 + 0.7502 \cos \left[ \left| (\psi - 120^\circ) \times 15 \right| \times \frac{\pi}{180} \right])^2}}} \end{aligned} \quad (5.10)$$

其中  $\psi \in [-\pi, \pi]$ 。

太阳影子长度  $\rho$  与测量地点经度  $\psi$  的关系图如下

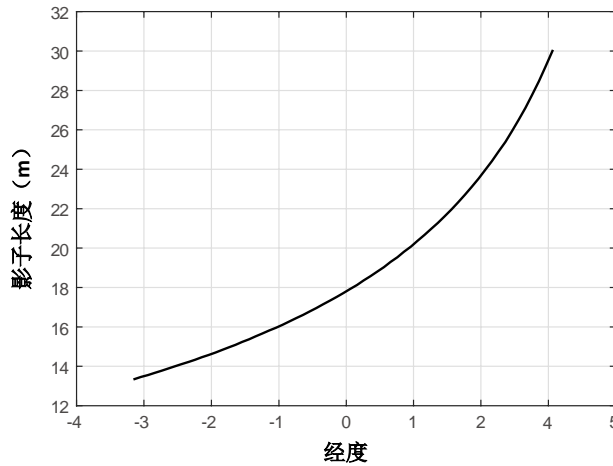


图 5.4 太阳影子长度  $\rho$  与测量地点经度  $\psi$  的关系



由太阳影子长度  $\rho$  与测量地点经度  $\psi$  的关系图可得，当测量地点位于东半球时，太阳影子长度  $\rho$  随着测量地点经度  $\psi$  的增大而增长，而当测量地点位于西半球时，太阳影子长度  $\rho$  随着测量地点经度  $\psi$  的增大而减短。

### (3) 太阳影子长度 $\rho$ 与纬度 $\varphi$ 的关系

在式 (5.8) 中，固定测量地点经度  $\psi$ 、直杆长度  $l$ 、日期距离 1 月 1 日的天数  $N$ 、北京时间  $t_B$  的值，分别固定为直杆长度  $l = 3m$ ，经度  $\psi = 116^\circ 23' 29''$ ，测量日期距离 1 月 1 日的天数  $N=295$ 、北京时间  $t_B = 12:00$ ，得到太阳影子长度  $\rho$  与纬度  $\varphi$  的关系为

$$\rho = \frac{3\sqrt{1 - ((-0.2096)\sin\varphi + 0.9778\cos\varphi)^2}}{\sqrt{1 - \sqrt{1 - ((-0.2096)\sin\varphi + 0.9778\cos\varphi)^2}}} \quad (5.11)$$

其中  $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$ 。

太阳影子长度  $\rho$  与纬度  $\varphi$  的关系图如下

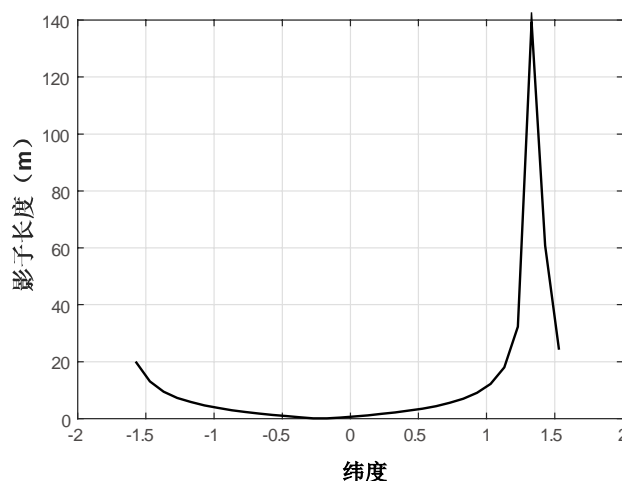


图 5.5 太阳影子长度  $\rho$  与测量地点纬度  $\varphi$  的关系

由太阳影子长度  $\rho$  与纬度  $\varphi$  的关系图可得，当测量地点位于南半球时，太阳影子长度  $\rho$  随着纬度  $\varphi$  的增加而增长，而当测量地点位于北半球时，太阳影子长度  $\rho$  先随着纬度  $\varphi$  的增加而增长，当到达极值点后，太阳影子长度  $\rho$  先随着纬度  $\varphi$

的增加而减短。

#### (4) 太阳影子长度 $\rho$ 与北京时间 $t_B$ 的关系

在式 (5.8) 中，固定测量地点直杆长度  $l$ 、经度  $\psi$ 、日期距离 1 月 1 日的天数  $N$ 、纬度  $\varphi$  的值，分别固定为直杆长度  $l = 3m$ ，经度  $\psi = 116^\circ 23' 29''$ ，测量日期距离 1 月 1 日的天数  $N=295$ 、纬度  $\varphi = 39^\circ 54' 26''$ ，得到太阳影子长度  $\rho$  与北京时间  $t_B$  的关系为

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{3 \sqrt{1 - (0.6415 \times (-0.2096) + 0.7672 \times 0.9778 \cos \left[ \left| t_B + \frac{\psi - 120^\circ}{15^\circ} - 12 \right| \times 15 \times \frac{\pi}{180} \right]^2}}{\sqrt{1 - \sqrt{1 - (0.6415 \times (-0.2096) + 0.7672 \times 0.9778 \cos \left[ \left| t_B + \frac{\psi - 120^\circ}{15^\circ} - 12 \right| \times 15 \times \frac{\pi}{180} \right]^2}}} \\ &= \frac{3 \sqrt{1 - (-0.1345 + 0.7502 \cos \left[ \left| t_B + \frac{\psi - 120^\circ}{15^\circ} - 12 \right| \times 15 \times \frac{\pi}{180} \right]^2}}{\sqrt{1 - \sqrt{1 - (-0.1345 + 0.7502 \cos \left[ \left| t_B + \frac{\psi - 120^\circ}{15^\circ} - 12 \right| \times 15 \times \frac{\pi}{180} \right]^2}}} \end{aligned} \quad (5.12)$$

其中  $t_B \in [8, 17]$ 。

太阳影子长度  $\rho$  与北京时间  $t_B$  的关系图如下

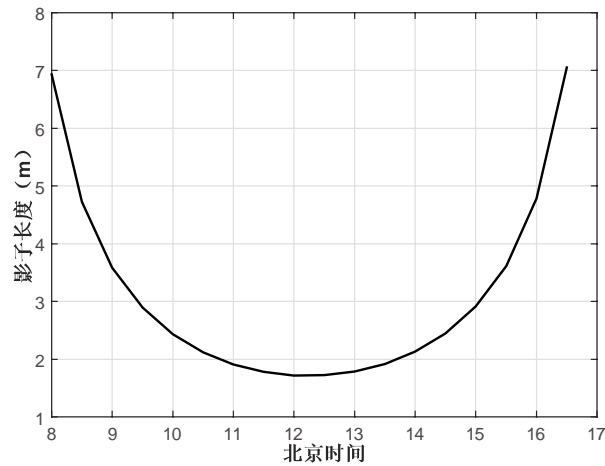


图 5.6 太阳影子长度  $\rho$  与北京时间  $t_B$  的关系

由太阳影子长度  $\rho$  与北京时间  $t_B$  的关系可得时间区间  $t_B \in [8, 12]$  时, 影子长度逐渐减短, 而当时间区间  $t_B \in [12, 17]$  时, 影子长度逐渐增长。

#### (5) 太阳影子长度 $\rho$ 与赤纬角 $\delta$ 的关系

在式 (5.8) 中, 固定测量地点直杆长度  $l$ 、经度  $\psi$ 、北京时间  $t_B$ 、纬度  $\varphi$  的值, 分别固定为直杆长度  $l = 3m$ 、经度  $\psi = 116^\circ 23' 29''$ 、北京时间  $t_B = 12:00$ 、纬度  $\varphi = 39^\circ 54' 26''$ , 得到太阳影子长度  $\rho$  与北京时间  $t_B$  的关系为

$$\rho = \frac{3\sqrt{1 - (0.6415 \sin \delta + 0.7672 \cos \delta)^2}}{\sqrt{1 - \sqrt{1 - (0.6415 \sin \delta + 0.7672 \cos \delta)^2}}} \quad (5.13)$$

其中  $\delta \in [-23.45^\circ, 23.45^\circ]$ 。

#### 2. 太阳影子长度的变化曲线

求解影子长度变化模型即影子长度随时间的变化关系, 需要固定直杆长度、直杆所在位置的经纬度、测量日期的赤纬角、时角、真太阳时等参数, 以 2015 年 10 月 22 日北京时间 9:00-15:00 之间天安门广场 (北纬 39 度 54 分 26 秒, 东经 116 度 23 分 29 秒) 3 米高的直杆为例, 有

$$\begin{cases} N=295 \\ t \in [9, 15] \\ \varphi = 39^\circ 54' 26'' \\ \psi = 116^\circ 23' 29'' \\ l = 3 \end{cases}$$

代入问题一中影子长度变化模型, 利用 MATLAB 编程 (程序见附录 1.4) 得到

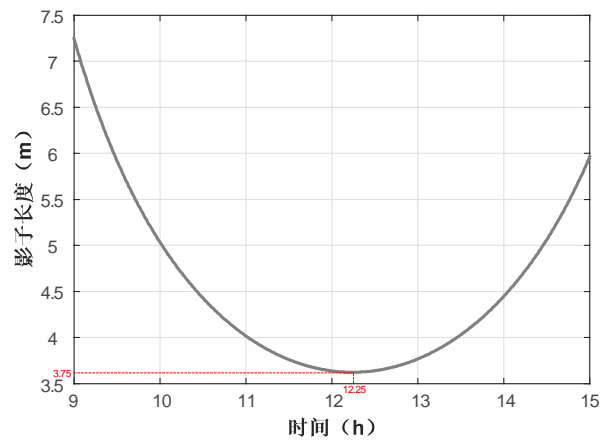


图 5.7 影子长度变化与时间关系

从图像可以看出，当时间为 12:15 时，影子长度取得最小值 3.75m。

## 5.2 问题二

### 5.2.1 太阳影子定位模型的建立

为了根据某固定直杆在水平地面上的太阳影子顶点坐标数据确定直杆所处的地点，结合太阳方位角的地理意义，建立太阳方位角  $A_s$  与影子顶点坐标  $x, y$  之间的关系

$$A_s = \arctan \frac{x}{y} + \Delta\theta \quad (5.14)$$

其中， $\Delta\theta$  为太阳方位角计算值与实际值的偏差。

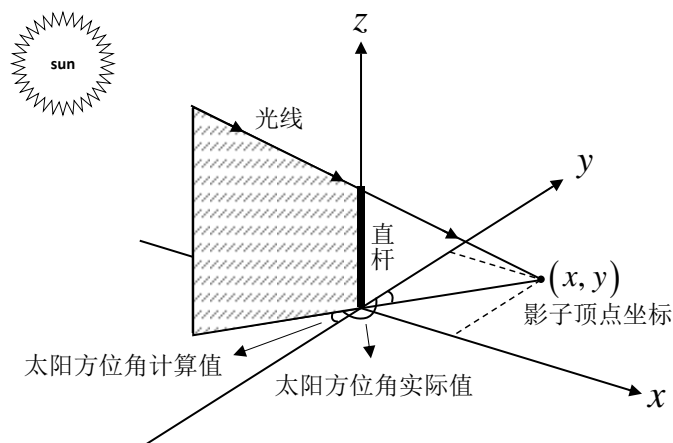


图 5.8 直杆影子顶点坐标与太阳高度角关系

建立太阳影子定位模型

$$\begin{cases} \cos A_s = \sin h \sin \varphi - \sin A_h / \cos h \cos \varphi \\ \sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos A_h \\ \delta = 23.45^\circ \sin \frac{2\pi(284 + N)}{365} \\ A_h = |t - 12| \times 15^\circ \\ t = t_B + \psi - 120^\circ / 15 \\ n_1 \sin \left( \frac{\pi}{2} - h \right) = n_2 \sin \left( \frac{\pi}{2} - h' \right) \end{cases} \quad (5.15)$$

其中， $N$  为 2015 年 1 月 1 日到所求测量日期的天数为 108， $\varphi, \psi$  为未知量。因此，根据其中任意两组数据均可得到一组  $\varphi, \psi$  的值，其中  $\varphi, \psi$  刻画了测量位置。

再对聚类分析模型求解的结果，对元素较多的类别中  $\varphi, \psi$  的值均值化，得到几组具有代表性的  $\varphi, \psi$  的值，即直杆所处的可能的测量地点。

最后，利用 Excel 中 Power Map 插件，在地图上标记出所得到的若干组  $\varphi, \psi$  的值所对应的地点，根据图可直观看出可能的测量地点，再将这一结果与上述利用聚类分析模型求解的结果进行分析比较，得出最终的测量地点。

### 5.2.2 模型的求解

首先根据附件 1 中北京时间和影子的顶点坐标，作出太阳影子长度随时间的轨迹变化图

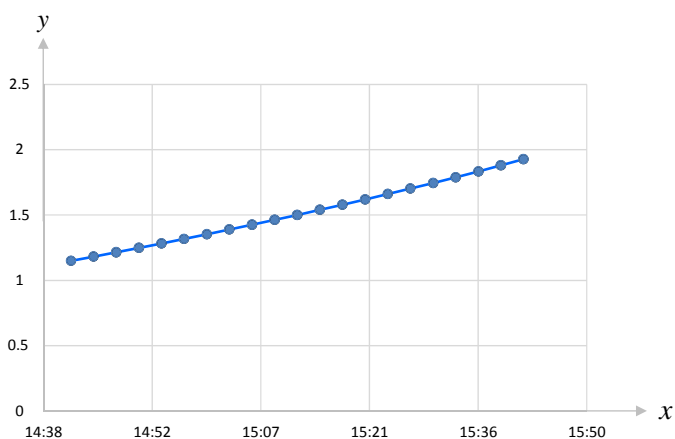


图 5.9 太阳影子长度随时间的轨迹变化

通过观察图 5.9，结合测量日期、影子长度的变化率即单位时间内影子长度的变化幅度较小，说明太阳直射点与直杆所处位置位于同一半球。由于测量日期

为 2015 年 4 月 18 号，此时太阳直射点位于北半球，故直杆所处位置也位于北半球。根据太阳影子定位模型（式 5.15），借助 MATLAB 编程（程序见附录 2.2）求解得出  $C_{21}^2$  组  $\varphi, \psi$  的值。再依据  $\varphi, \psi$  的取值范围，对所得结果进行筛选，利用 Excel 中 Power Map 插件，标记出所得到的若干组  $\varphi, \psi$  的值所对应的地点,如图

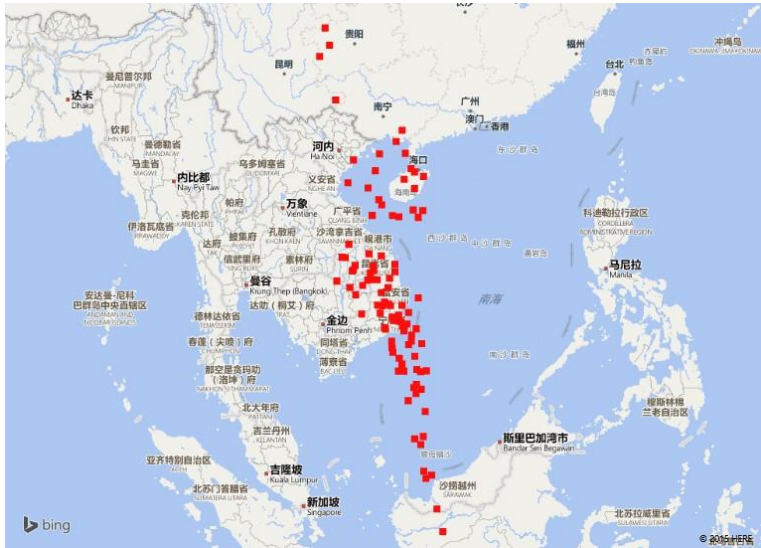


图 5.10 筛选后  $\varphi, \psi$  对应的地点示意图

再借助 MATLAB 软件，对筛选后的结果，建立聚类分析模型进行聚类，得到筛选结果的聚类结果

表 5.1 聚类结果表

纬度	经度	聚类类别	纬度	经度	聚类类别	纬度	经度	聚类类别
1.29	111.38	1	12.26	109.78	2	5.36	110.61	2
0.01	111.72	1	12.23	108.18	2	5.24	110.13	2
15.37	108.25	2	12.18	107.14	2	4.91	110.47	2
14.91	109.01	2	12.13	109.23	2	3.41	110.64	2
14.84	107.77	2	12.02	108.86	2	3.19	111.08	2
14.08	107.76	2	11.85	108.94	2	3.01	110.76	2
14.07	108.01	2	11.77	109.33	2	22.07	109.42	3
13.99	105.73	2	11.64	109.70	2	21.49	109.08	3
12.67	109.41	2	11.51	109.44	2	20.86	109.60	3
11.81	109.16	2	11.44	108.43	2	20.51	106.67	3
10.68	108.83	2	11.37	110.21	2	19.94	107.91	3
16.00	106.41	2	11.35	108.48	2	19.88	110.12	3
15.48	107.55	2	11.25	109.51	2	19.64	110.63	3

15.30	106.02	2	11.01	109.95	2	19.49	109.53	3
15.27	106.21	2	10.69	109.94	2	19.31	106.36	3
14.85	106.77	2	10.55	110.53	2	19.02	107.49	3
14.62	106.67	2	10.49	109.78	2	18.99	110.12	3
14.56	107.82	2	10.31	108.85	2	18.40	108.11	3
14.54	106.60	2	10.07	108.90	2	18.12	108.27	3
14.50	109.01	2	9.85	110.14	2	17.85	110.04	3
14.43	107.63	2	9.73	109.26	2	17.82	110.59	3
14.15	108.71	2	9.42	109.41	2	17.55	108.88	3
14.05	107.47	2	9.11	110.24	2	20.83	108.14	3
13.76	107.19	2	9.04	110.80	2	20.05	109.92	3
13.65	106.47	2	9.03	109.24	2	17.55	107.73	3
13.63	108.63	2	9.02	109.52	2	17.48	109.24	3
13.36	108.24	2	9.02	109.21	2	17.45	110.33	3
13.25	106.80	2	8.99	110.46	2	23.65	105.67	4
13.07	110.33	2	8.28	110.22	2	27.31	105.08	5
12.84	108.43	2	8.10	110.08	2	26.44	105.33	5
12.73	108.62	2	8.01	110.49	2	25.87	104.76	5
12.68	108.03	2	7.77	110.20	2	72.55	108.70	6
12.65	108.75	2	7.37	109.76	2	67.05	110.39	7
12.64	108.31	2	6.77	110.72	2	84.52	109.36	8

从而可将上述  $\varphi$ ,  $\psi$  的值聚成四类, 对每类取平均得四组可能的  $\varphi$ ,  $\psi$  的值, 如下表:

表 5.2 直杆所处地点经纬度表

纬度	经度
11.32	108.88
19.25	108.96
23.65	105.67
26.54	105.06

对应的地点大致分布在贵州、海南、云南、越南。

最后, 利用 Excel 中 Power Map 插件, 在地图上标记出所得到的四组  $\varphi$ ,  $\psi$  的值所对应的地点, 如图



图 5.11 直杆所处地示意图

### 5.2.3 模型的误差分析

对聚类分析得到的结果进行误差分析, 首先根据表 5.2 四组可能的  $\varphi$ ,  $\psi$  的值, 代入太阳影子定位模型反推可求出相应的影子顶点坐标  $(x_i, y_i)$ , 为  $(1.2438, 0.7311)$ ,  $(1.6545, 0.5864)$ ,  $(1.7522, 0.6523)$ ,  $(1.1896, 0.4369)$ 。

再建立相应的误差估计模型

$$\Delta = \sum_{i=1}^4 \sqrt{(x_i - x_{i_0})^2 + (y_i - y_{i_0})^2} \quad (5.16)$$

最后, 与相应的北京时间对应的影子顶点坐标  $(x_{i_0}, y_{i_0})$  代入误差估计模型 (式 5.16), 得  $\Delta = 4.3\%$ 。由此可下结论: 通过该聚类模型得到的结果在 4.3% 的误差范围内具有一定的合理性。

## 5.3 问题三

### 5.3.1 太阳影子定位、定时模型的建立

为了根据某固定直杆在水平地面上的太阳影子顶点坐标数据确定直杆所处的地点和日期, 建立太阳影子定位定时模型



$$\begin{cases} \cos A_s = \sin h \sin \varphi - \sin A_h / \cos h \cos \varphi \\ \sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos A_h \\ \delta = 23.45^\circ \sin \frac{2\pi(284 + N)}{365} \\ A_h = |t - 12| \times 15^\circ \\ t = t_B + \psi - 120^\circ / 15 \\ n_1 \sin \left( \frac{\pi}{2} - h \right) = n_2 \sin \left( \frac{\pi}{2} - h' \right) \end{cases} \quad (5.17)$$

其中  $N$  为 2015 年 1 月 1 日到所求测量日期的天数,  $\varphi, \psi, N$  为未知量。为此, 根据其中任意三组数据均可得到一组  $\varphi, \psi, N$  的值, 其中  $\varphi, \psi$  刻画了地点,  $N$  刻画了时间。

对附件 2 中的 21 组数据任取三组, 代入到太阳影子定位定时模型中即可得对应的  $C_{21}^3 = 1330$  组  $\varphi, \psi, N$  的值, 依据  $\varphi, \psi$  的取值范围, 对所得结果进行筛选。再利用 Excel 中 Power Map 插件, 标记出所得到的若干组  $\varphi, \psi$  的值所对应的地点。

再借助 MATLAB 软件, 利用聚类分析的思想, 建立聚类分析模型对上述 1330 组  $\varphi, \psi, N$  的值进行聚类, 从而可将上述 1330 组  $\varphi, \psi, N$  的值分为若干类。

最后, 利用 Excel 中 Power Map 插件, 在地图上标记出所得到的若干组  $\varphi, \psi, N$  的值所对应的地点, 根据图可直观看出可能的测量地点, 再将这一结果与上述利用聚类分析模型求解的结果进行分析比较, 得出最终的测量地点和日期。

### 5.3.2.模型的求解

#### 1. 对附件 2 数据的求解

首先根据附件 2 中北京时间和影子的顶点坐标, 作出太阳影子长度随时间的轨迹变化图

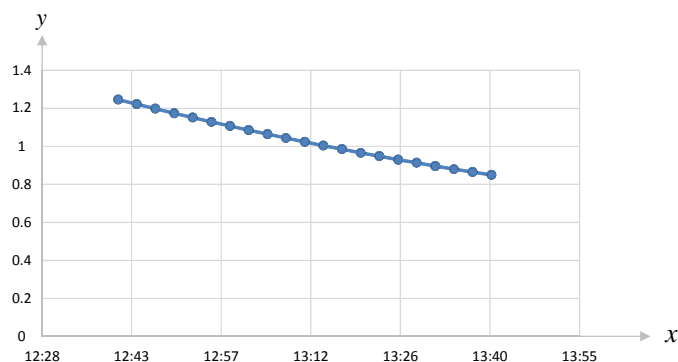


图 5.12 太阳影子长度随时间的轨迹变化

通过观察图 5.12 发现影子长度的变化率即单位时间内影子长度的变化幅度较大,说明太阳直射点与直杆所处位置位于同一半球。当太阳直射点与直杆所处位置均位于北半球时,即纬度  $\varphi \in [0, \pi/2]$ ,  $N \in [80, 265]$  或太阳直射点与直杆所处位置均位于南半球时,即纬度  $\varphi \in [-\pi/2, 0]$ ,  $N \in [0, 79] \cup [266, 365]$ , 根据太阳影子定位定时模型图 5.12, 利用 MATLAB 编程(程序见附录 3.1), 求解得出 1330 组  $\varphi, \psi, N$  的值。

(1) 当太阳直射点与直杆所处位置均位于北半球时, 即纬度  $\varphi \in [0, \pi/2]$ ,  $N \in [80, 265]$  时, 依据  $\varphi, \psi$  的取值范围, 对所得结果进行筛选, 利用 Excel 中 Power Map 插件, 标记出所得到的若干组  $\varphi, \psi$  的值所对应的地点, 如图



图 5.13 附件 2 北半球筛选后  $\varphi, \psi$  对应的地点示意图

再借助 MATLAB 软件，对筛选后的结果，建立聚类分析模型进行聚类，得到筛选结果的聚类结果

表 5.3 北半球聚类结果表

积日	纬度	经度	聚类结果	积日	纬度	经度	聚类结果
68.75	-26.44	104.33	1	68.75	-29.88	93.51	5
68.75	-28.97	103.73	1	68.75	-30.05	97.29	5
68.75	-34.22	103.39	2	68.75	-34.23	92.52	5
68.75	-37.72	100.80	2	68.75	-37.25	92.33	5
68.75	-40.37	98.52	2	68.75	-30.87	113.08	6
68.75	-43.43	98.31	2	68.75	-32.58	110.44	6
68.75	-24.06	99.15	3	68.75	-35.08	109.75	6
53.46	-31.74	86.64	4	68.75	-42.40	87.91	7
68.75	-32.08	87.22	4	68.75	-42.71	105.74	8

从而可将筛选后的  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $N$  的值聚成五类，对每类取平均得五组可能的  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $N$  的值，分别为

表 5.4 直杆所处地点、日期表

积日	纬度	经度	日期
256.86	38.99	89.61	2015.08.15
254.75	28.08	110.52	2015.08.12
254.75	33.35	119.13	2015.08.12

对应的地点大致分布在新疆、湖南、江苏，对应日期分别为 2015.08.15、2015.08.12、2015.08.12。

最后，利用 Excel 中 Power Map 插件，在地图上标记出所得到的四组  $\varphi$ ,  $\psi$  的值所对应的地点，如图



图 5.14 附件 2 北半球直杆所处地示意图

(2)当太阳直射点与直杆所处位置均位于南半球时,即纬度 $\varphi \in [-\pi / 2,0]$ ,  
 $N \in [0,79] \cup [266,365]$ 时, 依据 $\varphi, \psi$ 的取值范围, 对所得结果进行筛选, 利用  
Excel 中 Power Map 插件, 标记出所得到的若干组 $\varphi, \psi$ 的值所对应的地点,如图

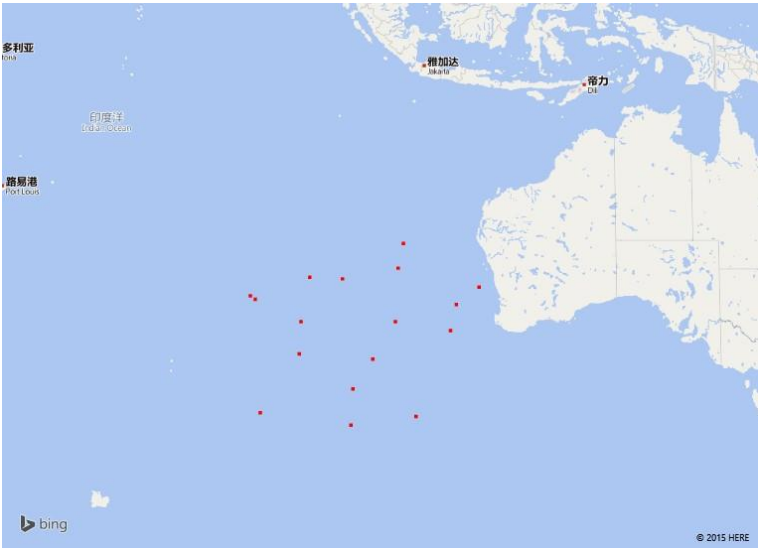


图 5.15 附件 2 南半球筛选后 $\varphi, \psi$ 对应的地点示意图

再借助 MATLAB 软件, 对筛选后的结果, 建立聚类分析模型进行聚类, 得到筛选结果的聚类结果

表 5.5 附件 2 南半球聚类结果表

积日	纬度	经度	聚类结果	积日	纬度	经度	聚类结果
346.54	43.15	98.94	1	269.52	36.57	87.63	4
254.75	40.86	104.63	2	254.75	28.16	109.90	5
254.75	29.45	87.78	3	254.75	28.01	111.14	5
254.75	41.46	91.30	4	254.75	36.56	117.62	6
254.75	41.40	85.54	4	254.75	32.57	120.69	6
254.75	40.44	92.01	4	254.75	32.37	120.22	6
254.75	39.85	92.08	4	254.75	31.90	117.98	6
254.75	36.65	85.06	4	254.75	23.34	103.59	7
254.75	36.57	93.65	4	254.75	36.95	74.34	8

从而可将筛选后的 $\varphi, \psi, N$ 的值聚成五类, 对每类取平均得五组可能的  
 $\varphi, \psi, N$ 的值, 分别为

表 5.6 直杆所处地点、日期表

积日	纬度	经度	日期
68.75	-27.70	104.03	2015.03.10
68.75	-38.94	100.26	2015.03.10
61.1038	-31.91	86.93	2015.03.03
68.75048	-32.85	93.92	2015.03.10
68.75093	-32.85	111.09	2015.03.10

对应的地点大致分布在印度洋内，日期为 2015.03.10 或 2015.03.03。

最后，利用 Excel 中 Power Map 插件，标记出所得到的五组  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $N$  的值所对应的地点，如图

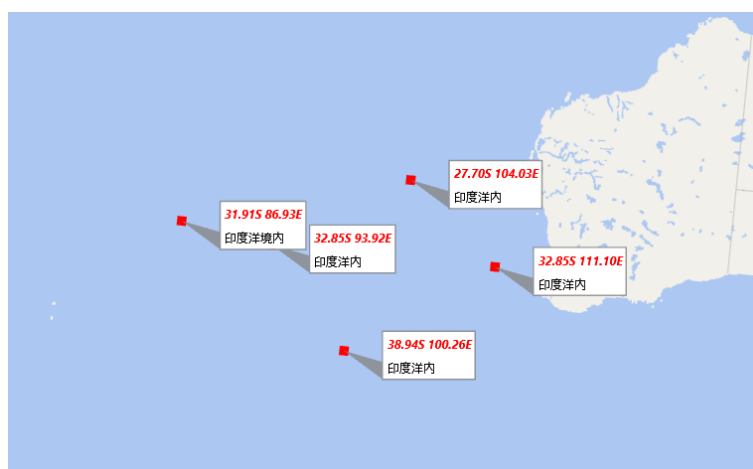


图 5.16 附件 2 南半球直杆所处地示意图

## 2. 对附件 3 数据的求解

首先根据附件 3 中北京时间和影子的顶点坐标，作出太阳影子长度随时间的轨迹变化图

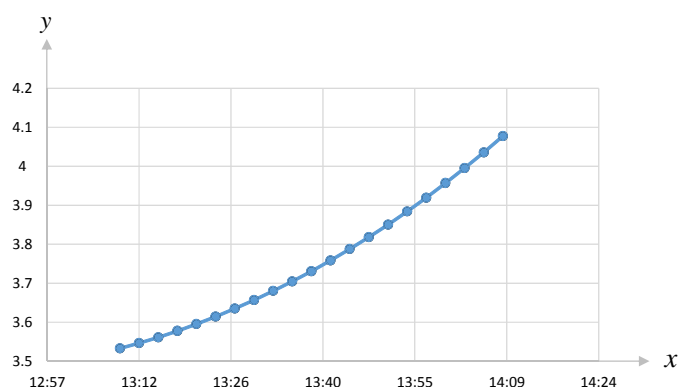


图 5.17 太阳影子长度随时间的轨迹变化

通过观察图 5.17 发现影子长度的变化率即单位时间内影子长度的变化幅度

较大，说明太阳直射点与直杆所处位置位于不同半球。当太阳直射点位于北半球时直杆所处位置位于南半球，即经度  $\varphi \in [0, \pi / 2]$ ， $N \in [0, 79] \cup [266, 365]$  或太阳直射点位于南半球时直杆所处位置位于北半球，即经度  $\varphi \in [-\pi / 2, 0]$ ， $N \in [80, 265]$ ，根据太阳影子定位定时模型（式 5.17），利用 MATLAB 编程（程序见附录 5）求解得出 1330 组  $\varphi, \psi, N$  的值。

（1）当太阳直射点位于北半球，直杆所处位置均位于南半球时，即纬度  $\varphi \in [0, \pi / 2]$ ， $N \in [0, 79] \cup [266, 365]$  时，依据  $\varphi, \psi$  的取值范围，对所得结果进行筛选，利用 Excel 中 Power Map 插件，标记出所得到的若干组  $\varphi, \psi$  的值所对应的地点，如图

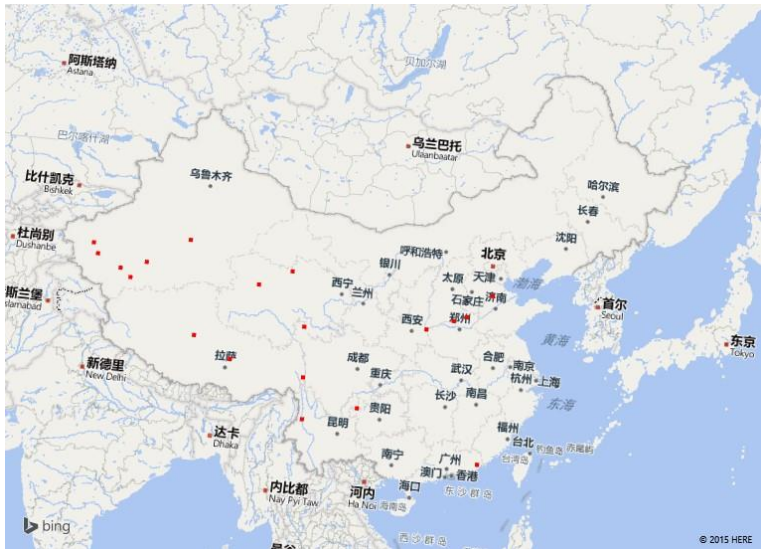


图 5.17 附件 3 北半球筛选后  $\varphi, \psi$  对应的地点示意图

再借助 MATLAB 软件，对筛选后的结果，建立聚类分析模型进行聚类，得到筛选结果的聚类结果

表 5.7 聚类结果表

积日	纬度	经度	聚类类别	积日	纬度	经度	聚类类别
68.57	40.67	85.66	1	10.11	29.57	98.94	4
62.61	39.64	86.46	1	68.75	26.03	99.26	4
12.51	38.72	76.98	2	68.75	27.43	104.46	5
77.95	37.91	77.52	2	78.54	32.16	87.89	6
68.75	37.62	82.42	2	68.75	30.48	91.65	6

76.49	36.97	79.92	2	68.75	37.64	116.61	7
68.75	36.30	81.00	2	70.63	35.80	114.27	7
74.97	38.01	96.80	3	3.53	35.38	113.02	7
68.75	36.73	93.66	3	8.29	34.51	110.45	7
8.61	33.73	98.53	4	68.27	23.64	116.54	8

从而可将筛选后的  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $N$  的值聚成三类, 对每类取平均得三组可能的  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $N$  的值, 如下表:

表 5.8 直杆所处地点、日期表

积日	纬度	经度	日期
60.88877	37.50	79.57	2015.03.02
29.15808	29.78	98.91	2015.01.30
37.80181	35.83	113.59	2015.02.07

对应的地点、日期大致为: 西藏 2015.03.10; 西藏 2015.01.30; 河南 2015.02.07。

最后, 利用 Excel 中 Power Map 插件, 标记出所得到的三组  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $N$  的值所对应的地点, 如图



图 5.18 附件 2 北半球直杆所处地示意图

根据图 5.18 可直观看出可能的测量地点, 再将这一结果与上述利用聚类分析模型求解的结果进行分析比较, 得出最终的可能测量地点和日期。

(2) 当太阳直射点位于南半球, 直杆所处位置均位于北半球时, 即纬度  $\varphi \in [-\pi/2, 0]$ ,  $N \in [80, 265]$  时, 依据  $\varphi$ ,  $\psi$  的取值范围, 对所得结果进行筛选, 利用 Excel 中 Power Map 插件, 标记出所得到的若干组  $\varphi$ ,  $\psi$  的值所对应的地点, 如图





图 5.19 附件 3 南半球筛选后  $\varphi, \psi$  对应的地点示意图

再借助 MATLAB 软件，对筛选后的结果，建立聚类分析模型进行聚类，得到筛选结果的聚类结果

表 5.9 聚类结果表

积日	纬度	经度	聚类类别	积日	纬度	经度	聚类类别
254.75	-36.13	104.39	1	254.75	-37.75	110.36	6
254.75	-35.36	100.93	1	81.40	-16.17	113.35	7
86.61	-31.69	96.37	2	263.72	-12.57	112.76	7
83.81	-36.79	90.96	2	87.99	-13.44	100.99	8
261.79	-35.11	93.92	2	86.99	-8.92	101.16	8
254.75	-31.67	92.70	2	86.53	-10.52	100.31	8
254.75	-35.56	96.91	2	81.43	-12.15	102.06	8
89.80	-20.76	86.21	3	262.89	-14.28	106.74	8
255.27	-22.82	89.83	4	256.12	-15.14	102.86	8
254.75	-37.09	86.66	5	254.66	-12.65	103.46	8

从而可将筛选后的  $\varphi, \psi, N$  的值聚成四类，对每类取平均得四组可能的  $\varphi, \psi, N$  的值，如下表：

表 5.10 直杆所处地点、日期表

积日	纬度	经度	日期
254.75	35.74	102.66	2015.08.12
188.34	34.16	94.17	2015.06.08
172.56	14.37	113.05	2015.05.22
159.52	12.44	102.51	2015.05.09



对应的地点、日期大致为：印度洋 2015.08.12；印度洋 2015.06.08；印度洋 2015.05.22；印度洋 2015.05.09。

最后，利用 Excel 中 Power Map 插件，标记出所得到的四组  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $N$  的值所对应的地点，如图



图 5.20 附件 3 南半球直杆所处地示意图

### 5.3.3 模型的误差分析

对附件 2、附件 3 聚类分析得到的结果进行误差分析，首先根据表 5.10 中可能的  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $N$  的值，代入太阳影子定位模型反推可求出相应的影子顶点坐标  $(x_i, y_i)$  及积日  $N_i$ ，再建立相应的误差估计模型

$$\begin{cases} \Delta_x = \frac{|x_i - x_{i_0}|}{x_i} \\ \Delta_y = \frac{|y_i - y_{i_0}|}{y_i} \\ N = \frac{|N_i - N_{i_0}|}{N_i} \end{cases} \quad (5.18)$$

最后，与相应的北京时间对应的影子顶点坐标  $(x_{i_0}, y_{i_0})$  及积日  $N_{i_0}$  代入误差估计模型（式 5.18），得

附件 2:  $\Delta_x = 2.3\%$ ,  $\Delta_y = 2.1\%$ ,  $N = 1.2\%$ ;

附件 3:  $\Delta_x = 1.2\%$ ,  $\Delta_y = 2.5\%$ ,  $N = 1.9\%$ 。

由此可下结论: 通过该聚类模型得到的结果在允许的误差范围内具有一定的合理性。

## 5.4 问题四—太阳影子定位模型

### 5.4.1 拍摄日期已知

根据附件 4 中直杆在太阳下影子的变化视频, 利用 MATLAB 以等时间间隔截取关键视频帧(程序见附录 4.1), 以视频帧左上角位置为坐标原点, 标记直杆顶点和底部端点, 确定直杆的顶部和底部坐标



图 5.21 直杆顶部和底部坐标

再利用 MATLAB 对关键视频帧二值化处理, 得到旗杆影子(程序见附录 4.1), 划定直杆阴影区域(如下图中的红色区域)

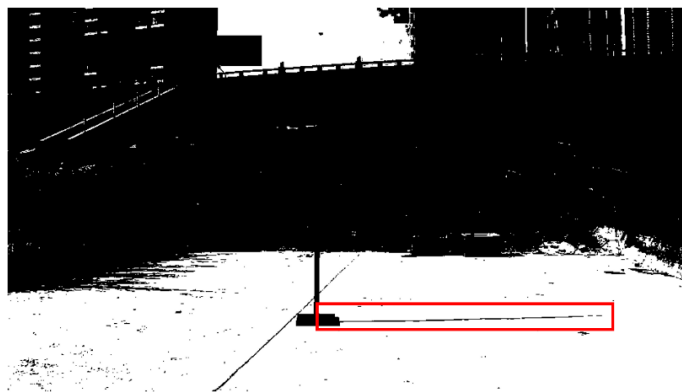


图 5.22 二值化视频帧划定阴影区域

通过膨胀操作保持影子的连续性，并利用联通区域检测，去除小的联通区域（噪点）的干扰。选择坐标值最大的影子位置作为影子的顶点，结合已知直杆长度及其对应于视频帧上坐标，利用相似得到影子实际长度 $\rho$ 。进一步根据直杆在太阳下的影子长度 $\rho$ 与北京时间 $t_B$ 之间的关系，作出直杆在太阳下的影子长度与北京时间的关系图如下

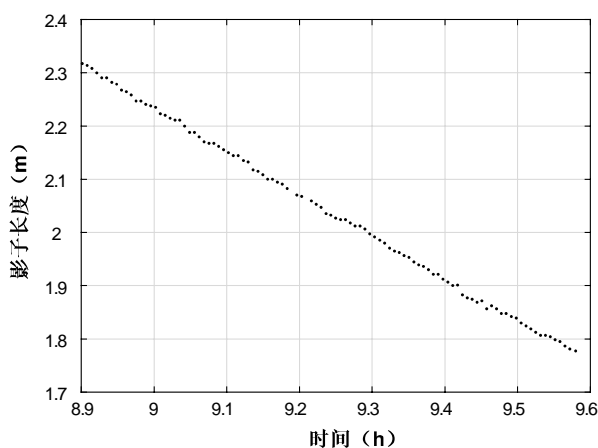


图 5.23 视频中影长与时间的关系

结合已知条件：直杆高度 $l = 2m$ 及从视频中读取直杆在太阳下的影子长度 $l$ 、北京时间 $t_B$ 及测量日期 2015 年 7 月 13 日（ $N = 181$ ）。

$$\delta = 23.45^\circ \sin \frac{2\pi(284 + N)}{365} = 23.1845^\circ$$

再利用问题二中太阳影子定位模型，建立视频拍摄地点确定模型如下

$$\begin{cases} \rho = \frac{2}{\tan h} \\ \sin h = 0.3937 \sin \varphi + 0.9192 \cos \varphi \cos \left[ \left| t_B + \psi - 120^\circ \right| / 15 - 12 \right] \times 15 \times \frac{\pi}{180^\circ} \end{cases}$$

借助 MATLAB 编程（程序见附录 4.2）求解得出相应的  $\varphi, \psi$  值，再利用聚类分析模型上述  $\varphi, \psi$  的值进行聚类，最终聚成四类，对每类取平均得四组可能的  $\varphi, \psi$  的值，如下表：

纬度	经度
39.98	111.52
40.88	111.47

对应的可能地点分别为：呼和浩特、清水河县。

最后，利用 Excel 中 Power Map 插件，标记出所得到的两组  $\varphi, \psi$  的值所对应的地点，如图



图 5.24 视频拍摄地点示意图

#### 5.4.2 拍摄日期未知

利用问题三中的太阳影子定位定时模型，有

$$\begin{cases} \rho = \frac{2}{\tan h} \\ \delta = 23.45^\circ \sin \frac{2\pi(284 + N)}{365} \\ \sin h = \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos \left[ \left| t_B + \psi - 120^\circ \right| / 15 - 12 \right] \times 15 \times \frac{\pi}{180^\circ} \end{cases}$$

其中  $N$ 、 $t_B$ 、 $\varphi$ 、 $\psi$  未知，影子长度  $\rho$  可以从视频中直接读出。进而利用问题三中太阳影子定时、定位模型，建立视频拍摄地点确定模型，最后可以得出若干个可能的视频拍摄地点。

## 六、模型的评价与改进

### 6.1 模型的评价

#### 6.1.1 模型的优点

(1) 在对问题二的讨论中，建立整体模型，是问题二及问题三的模型建立与求解具有系统性与连贯性。

(2) 在对问题二的讨论中，首先对附件 2、附件 3 的数据进行分析，得出太阳直射点与直杆的地理位置的分类，并作为数据筛选的依据，从而可有效缩小可能测量地点及测量日期。

(3) 对可能的测量地点，利用 Excel 中 Power Map 插件进行标记，并作为聚类分析模型分类的依据，直观有效。

(4) 问题四中，利用 MATLAB 软件从视频中获取视频中的信息，快速高效。

#### 6.1.2 模型的缺点

在对太阳高度角、太阳方位角计算中，采用的是传统算法，与实际结果上可能会产生一定的偏差并且计算复杂度较高。

## 6.2 模型的改进

### 1.对太阳高度角、太阳方位角计算方法的改进

本论文中结合地理学知识，采用传统算法计算太阳高度角及太阳方位角

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos A_h$$

$$\cos A_s = \sin h \sin \varphi - \sin A_h / \cos h \cos \varphi$$

使用该传统算法可以很精确地计算出太阳高度角及太阳方位角，但其公式复杂，运算量较大，需要系统具有较强的运算能力，在实际操作过程中，难以实现。为此，可以采用基于 T-S 模糊模型的太阳位置的算法<sup>[3]</sup>：根据在固定地点太阳高度角随时间变化的二元函数，建立高度角、方位角为输出的 T-S 模糊模型，通过该模型借助三角函数的隶属函数，将传统算法中的三角函数及除法运算转化为只有普通加法和乘法的运算，计算出太阳高度角及太阳方位角，从而使系统运算量降低，便于实现。

2. 问题三的模型中，在南半球的情形下，得到的结果大都处于海洋之中，这与实际情况偏差很大，通过适当加强对经纬度的约束（例如划定经纬度的可行域）来减少所得结果位于海洋之中的概率，同时减少无效解的数量。

## 七、模型的应用与推广

太阳影子定位在人类对定位技术、视频分析等相关领域的探索具有重要意义。

问题一中太阳影子长度变化模型可用于确定时间，应用该规律，可以帮助野外探险及航海航空人员在无法通过现有技术确定时间时，利用太阳影子准确确定时间。

问题二、三中太阳影子定时、定位模型为影子导航，确定方位等方面提供重要的理论依据，可推广应用于野外沙漠探险时对方向的判断，GPS 导航技术的改进中。

问题四中视频拍摄地点确定模型可应用与警方对刑事案件侦破过程中。警方可通过掌握的非常规视频，利用影子定位模型，从视频提取重要数据辅助破案，从而提高办案效率。

## 八、参考文献

- [1]陈晓宁,王怀,日照阴影三维可视化,长安大学学报(自然科学版)[J],第23卷第1期:108-110,2003。
- [2]陈华友,数学模型与数学建模[M],北京:科学出版社,2014。
- [3]彭海仔,基于 T-S 模糊模型的太阳位置算法,上海海事大学学报[J],第35卷第2期:81-84,2014。
- [4]杨桂元,数学建模[M],上海:上海财经大学出版社,2015。

## 附录

### 附录一: 问题一 MATLAB 求解程序

#### 1.1 测量点经度与影子长度关系 MATLAB 代码

```
functionjingdu
clear;
clc;
x=-pi:0.1:pi;
y1=sqrt(1-(-0.1345+0.7502*cos((x-120)*pi/180).^2));
y=3*y1./sqrt(1-y1);
plot(x,y),grid on;
xlabel('经度');ylabel('影子长度 (m) ');
end
```

#### 1.2 测量点纬度与影子长度关系 MATLAB 代码

```
function jingdu2
clear;
clc;
x=-pi/2:0.1:pi/2;
y1=sqrt(1-((-0.2096*sin(x)+0.9778*cos(x)).^2));
```

```

y=3*y1./sqrt(1-y1);
plot(x,y),grid on;
xlabel('纬度');ylabel('影子长度 (m) ');
end

```

### 1.3 北京时间与影子长度关系 MATLAB 代码

```

function jingdu3
clear;
clc;
x= 8:0.5:16.5;
m=116.39;
y1=sqrt(1-(-0.1345+0.7502*cos((x+(m-120)/15-12)*15*pi/180)).^2);
y=3*y1./sqrt(1-y1);
plot(x,y,'-'),grid on;
xlabel('北京时间');ylabel('影子长度 (m) ');
end

```

### 1.4 MATLAB 求解影子长度变化

```

% 影子长度变化模型
% tb=9:0.01:15; %北京时间
% phi=39.9007*pi/180; %直杆所在地的纬度
% psi=116.3914*pi/180; %直杆所在地的经度
% delta0=23.35.*sin(2.*pi(284+295)./365);
% delta=delta0*pi/180; %赤纬角弧度
% deltat=(psi-120)/15; %真太阳时与北京时时差
% t=tb+deltat; %真太阳时
% Ah0=abs(t-12)*15; %时角度数
% Ah=Ah0*pi/180; %Ah 为时角弧度
% h=asin(sin(phi).*sin(delta)+cos(phi).*cos(delta).*cos(Ah)); %太阳高度角

```



```

% h1=acos(cos(h)./1.000277); %修正后的太阳高度角
% rho=3./tan(h1); %直杆影子长度
tb=9:0.01:15;
h=asin(-0.6415*0.1822+0.7672*0.9833.*cos((tb-12.2406).*15*pi./180));
h1=acos(cos(h)./1.000277);
rho=3./tan(h1);
plot(tb,rho);

```

## 附录 2：问题二求解 MATLAB 程序

### 2.1 筛选结果 MATLAB 聚类

```

a=[需聚类数据]; % 筛选点的经纬度
d1=pdist(a);%各行之间的欧氏距离
z1=linkage(d1); %最短距离
S=tril(squareform(d1));%三角阵
h=dendrogram(z1)%谱系聚类图
T=cluster(z1,8)%分类结果

```

### 2.2 确定经纬度 MATLAB 程序

myAnswer 函数：

```

function solution=myAnswer(data)
t1=data(1);As1=data(2);
t2=data(3);As2=data(4);
x=[0;0];
options=optimset('Display','off');
[solution,fval] = fsolve(@answer,x,options);
function M=answer(z)
x=z(1);
y=z(2);
mm=(t1+(y-120)/15-12)*15*(pi/180);
n=sin(x)*sin(0.1833)+cos(x)*cos(0.1177)*cos(mm);
eq1=((n*sin(x)-sin(mm))/((sqrt(1-n.^2))*cos(x)))-cos(As1);
mm1=(t2+(y-120)/15-12)*15*(pi/180);
n1=sin(x)*sin(0.1833)+cos(x)*cos(0.1177)*cos(mm1);
eq2=((n1*sin(x)-sin(mm1))/((sqrt(1-n1.^2))*cos(x)))-cos(As2);
M=[eq1,eq2];
end
end

```

主程序：

```
clearall;clc;
data=[.....]; %.....为北京时间与太阳方位角数据
result=[];
fori=1:21
for j=i+1:21
        x=[data(i,1);data(i,2);data(j,1);data(j,2)];
        mySolution=myAnswer(x);
        result=[result;mySolution(1),mySolution(2)];
end
end
save result result
```

### 附录 3：问题三求解 MATLAB 程序

#### 3.1 确定经纬度、积日 MATLAB 代码

主程序：

```
clearall;clc;
data_2=[.....]; %为北京时间与太阳方位角余弦值数据，分别代入附件二、三中
数据求解
result_2=[];
fori=1:21
for j=i+1:21
for k=j+1:21
        x=[data_2(i,:);data_2(j,:);data_2(k,:)];
        mySolution=myAnswer(x);
        result_2=[result_2;mySolution'];
end
end
end
save result_2 result_2
```

myAnswer函数：

```
function solution=myAnswer(data)

%已知量：tB, cosAstB 为北京时间，cosAs 为太阳方位角余弦值

tB=data(1,1);As1=data(1,2);

tB2=data(2,1);As2=data(2,2);

tB3=data(3,1);As3=data(3,2);

        x=[0;0;0];

options=optimset('Display','off');
```

```

[solution,fval] = fsolve(@answer,x,options);

function M=answer(z)

    x=z(1);

    y=z(2);

    N=z(3);

    %% %

    Ah=abs(tB+(y-120)/15-12)*15;

xxx=sin(x)*sin(23.45*sin(2*pi*(284+N)/365))+cos(x)*cos(23.45*sin(2*pi*(284+N)/
365))*cos(Ah);

    eq1=(xxx*sin(x)-sin(Ah))/sqrt(1-xxx.^2)*cos(x)-cos(As1); %整个式子的未知量
分别是： x， y， N

    Ah2=abs(tB2+(y-120)/15-12)*15;

xxx2=sin(x)*sin(23.45*sin(2*pi*(284+N)/365))+cos(x)*cos(23.45*sin(2*pi*(284+N)
/365))*cos(Ah2);

    eq2=(xxx2*sin(x)-sin(Ah2))/sqrt(1-xxx2.^2)*cos(x)-cos(As2); %整个式子的未
知量分别是： x， phi， N

    Ah3=abs(tB3+(y-120)/15-12)*15;    %图片中第二个式子

xxx3=sin(x)*sin(23.45*sin(2*pi*(284+N)/365))+cos(x)*cos(23.45*sin(2*pi*(284+N)
/365))*cos(Ah3);

    eq3=(xxx3*sin(x)-sin(Ah3))/sqrt(1-xxx3.^2)*cos(x)-cos(As3); %整个式子的未
知量分别是： x， y， N

    M=[eq1,eq2,eq3];

end

end

```

#### 附录 4： 问题四求解 MATLAB 程序

##### 4.1 附件 4 视频处理 MATLAB 程序

主程序：

```
clearall;close all;
```

```

warning off
videoPath='C:\Users\.....\Desktop\appendix4'; % 视频
file=dir(videoPath);
pose=[871.25, 874.25];%直杆坐标;
roi=[];
shadow_length=[];
videoList= dir([videoPath,'*.avi']);
frames = VideoReader ([videoPath,videoList(1).name]);
framesPath=[videoPath,'frames\'];mkdir(framesPath);
numFrames =frames.NumberOfFrames;
params.thresh=0.83;
params.connectThresh=500;
params.pose=pose;
params.maxLength=20;
for k =1 : numFrames
    frame = read(frames,k);
        % figure; imshow(frame);
        % pose=ginput(1); %获取直杆点坐标
    imwrite(frame,[framesPath,sprintf('%08d.jpg',k)]); % 保存视频帧;
    roi=frame(pose(1)-20:pose(1)+20,pose(2):pose(2)+860); % 获取矩形窗口
        % imshow(roi);
    len=getLen(roi,params);
    shadow_length=[shadow_length,len];% 保存的影子长度;
end
saveshadow_lengthshadow_length

```

getLen 函数:

```

function len=getLen(image,params)

imgTmp=im2bw(image,params.thresh);

```

```

        SE=ones(3,3);
region=imdilate(~imgTmp,SE);
        region=deleteLitterRegion(region,params);%删除小的噪点;
        [m,~]=size(image);
        pose=find(region==1);%寻找得到旗杆影子的所有位置;
        B = sort(pose, 'descend');
len= B(20)/m;%取第二十个;
end

```

deleteLitterRegiongetLen 函数:

```

function deletedRegion=deleteLitterRegion(image,params)
connectThresh=params.connectThresh;
        [L,n]=bwlabeln(image,8);
for i=1:n
        F=find(L==i);
        if length(F)<connectThresh
                image(F)=0;
        end
end
deletedRegion=image;
%       [L,~]=bwboundaries(image,8);
%       rgNum=size(L,1);
%       for i=1:rgNum
%               rgSize= size(L{i},1);%每个区域含有多少像素点
%               if rgSize<connectThresh
%                       image(L{i}(1)*n+L{i}(2))=255;
%               end
%       end
%       deletedRegion=image;

```

```
end
```

## 4.2 确定视频拍摄点经纬度 MATLAB 程序

主程序：

```
clearall;clc;
data_4= data; %data 为视频提取帧之后的时间和影子长数据
result_4=[];
fori=1:100
for j=i+1:100
            x=[data_4(i,:);
data_4(j,:)];
mysolution=myAnswer(x);
            result_4=[result_4;mysolution'];
end
end
save result_4  result_4
```

myAnswer 函数：

```
function solution=myAnswer(data)
p1=data(1,1);tB=data(1,2);
p2=data(2,1);tB2=data(2,2);
    x=[0;0];
options=optimset('Display','off');
[solution,fval] = fsolve(@answer,x,options);
function M=answer(z)
    x=z(1);
    y=z(2);
    h=atan(2/p1);
    m=abs(tB+(y-120)/15-12)*15*pi/180;
```

```

eq1=sin(h)-0.3937*sin(x)+0.9192*cos(x)*cos(m);
h2=atan(2/p2);
m2=abs(tB2+(y-120)/15-12)*15*pi/180;
eq2=sin(h2)-0.3937*sin(x)+0.9192*cos(x)*cos(m2);
M=[eq1,eq2];
end
end

```