5.0元 数 学 分 析

试题编号：

重庆邮电大学2013-14 学年上学期

数学分析（1）试卷（期末）（A 卷）（闭卷）

题　号	一	二	三	四	五	六	七	八	总 分
得　分									
评卷人									

一．计算题（本大题共 8 小题，每小题 7 分，共 56 分）

1. 计算极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n$。

2. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x}$。

3. 设 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\geq 3 \\ ax+b, & x<3 \end{cases}$，确定 a，b 的值，使 $f(x)$ 在 $x=3$ 处可导。

4. 设 $f(x)=x^3e^x$，求 $f^{(10)}(x)$。

5. 求 $\begin{cases} x=e^t\cos t \\ y=e^t\sin t \end{cases}$ 所确定函数 $y=f(x)$ 的二阶导数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$。

6. 求不定积分 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$，$(a>0)$。

7. 求不定积分 $\int \frac{x-2}{x^2-7x+12}dx$。

8. 求定积分 $\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x|\, dx$。

二. 设 $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$，应用柯西收敛原理证明数列 $\{a_n\}$ 收敛。（8 分）

三. 设函数 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上有二阶导数，且 $f(1) = f(2) = 0$，又 $F(x) = (x-1)^2 f(x)$，证明在 $(1,2)$ 内至少有一点 ξ，使 $F''(\xi) = 0$。（8 分）

四. 证明：(a,b) 上的连续函数为一致收敛的充要条件是 $f(a+0)$，$f(b-0)$ 存在。（10 分）

五. 求函数 $f(x)=\arctan x$ 在 $x=0$ 点到含 x^5 的项，带佩亚诺余项的泰勒公式。（8 分）

六. **应用题**（10 分）

某商厦电梯装在大楼外面。假定楼高 100m，你站在楼外高 50m，正对电梯距离 50m 处。电梯正以 10m/s 的速度匀速下降，记电梯在 100m 高处的时刻为 t=0。θ 为你的水平视线与看到电梯的视线之间的夹角。假如以 θ 的变化率来体现电梯相对于你的运动快慢程度，问电梯处于何种高度时你看上去它运动得最快？

数学分析（上）参考答案

一. 1. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{2}{n-1}\right)^{\left(\frac{n-1}{2}\right)\times2+1}=e^2$

2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{x^2}{2}}{\frac{x^2}{2}}=1$

3.由可导 $f'(3)=\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{ax+b-9}{x-3}=\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{x^2-9}{x-3}=6$ 可得 $a=6$，

又由连续 $\lim\limits_{x\to3^-}(6x+b)=18+b=\lim\limits_{x\to3^+}x^2=9$ 可得 $b=-9$。

4.由 $f^{(10)}(x)=\sum\limits_{k=0}^{10}C_{10}^k(x^3)^{(k)}(e^x)^{(10-k)}$，

$(e^x)^{(n)}=e^x$，$(x^3)'=3x^2$，$(x^3)''=6x$，$(x^3)'''=6$，

$(x^3)^{(4)}=(x^3)^{(5)}=\cdots(x^3)^{(10)}=0$，

可得 $f^{(10)}(x)=e^x(x^3+30x^2+270x+720)$。

5. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\sin t+\cos t}{\cos t-\sin t}$，

$\dfrac{d}{dt}(\dfrac{dy}{dx})=\dfrac{(\cos t-\sin t)^2+(\cos t+\sin t)^2}{(\cos t-\sin t)^2}=\dfrac{2}{(\cos t-\sin t)^2}$，

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{2}{e^t(\cos t-\sin t)^3}$。

6.令$x=a\tan t, t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，$dx=a\sec^2 tdt$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\int\frac{a\sec^2 t}{a\sec t}dt=\int\sec tdt=\ln|\sec t+\tan t|+c_1=\ln|\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}+\frac{x}{a}|+c_1$$

$$=\ln|\sqrt{x^2+a^2}+x|+c$$

7. $$\int\frac{x-2}{x^2-7x+12}dx=2\int\frac{1}{x-4}dx-\int\frac{1}{x-3}dx=\ln|\frac{(x-4)^2}{x-3}|+c$$

8. $$\int_{\frac{1}{e}}^{e}|\ln x|dx=\int_{\frac{1}{e}}^{1}(-\ln x)dx+\int_{1}^{e}\ln xdx=-(x\ln x-x)\Big|_{1/e}^{1}+(x\ln x-x)\Big|_{1}^{e}$$

$$=2(1-e^1)$$

二． 对$\forall\varepsilon>0$，设正整数$m>n$，

$$|a_m-a_n|=\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{m^2}$$

$$<\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{1}{(m-1)m}$$

$$=\frac{1}{n}-\frac{1}{m}<\frac{1}{n}$$

取$N=[\frac{1}{\varepsilon}]$，当$m>n>N$时，$|a_m-a_n|<\varepsilon$总成立

由柯西收敛原理知数列收敛。

三． 根据题意，$F(x)$在在$(1,2)$内连续，$[1,2]$上可导，且$F(1)=F(2)=0$，则有罗尔中值定理知

$\exists c\in(1,2)$，使得$F'(c)=0$。

又$F'(x)=2(x-1)f(x)+(x-1)^2f'(x)$在$(1,c)$内连续，$[1,c]$上可导，且$F'(1)=F'(c)=0$

则有罗尔中值定理知$\exists\xi\in(1,c)\subset(1,2)$，使得$F''(\xi)=0$。

四. $\Leftarrow$设 $f(a+0), f(b+0)$ 存在，

补充定义：$f(a)=f(a+0), f(b)=f(b+0)$，

则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，由康托定理知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续

从而 $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续。

$\Rightarrow$设 $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续，则对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $x_1,x_2\in(a,b)$ 且 $|x_1-x_2|<\delta$ 时，有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$。

对 a，当 $0<x_1-a<\dfrac{\delta}{2}, 0<x_2-a<\dfrac{\delta}{2}$ 时，$|x_1-x_2|=|(x_1-a)-(x_2-a)|\le|x_1-a|+|x_2-a|<\delta$，

有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$

由柯西收敛原理知，$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ 存在；同理可证 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ 存在。

五. 由

$$
\begin{aligned}
&f(0)=0,\\
&f'(x)=(1+x^2)^{-1}, f'(0)=1,\\
&f''(x)=-2x(1+x^2)^{-2}, f''(0)=0,\\
&f'''(x)=-2(1+x^2)^{-2}+8x^2(1+x^2)^{-3}, f'''(0)=-2,\\
&f^{(4)}(x)=24x(1+x^2)^{-3}-288x^2(1+x^2)^{-4}, f^{(4)}(0)=0,\\
&f^{(5)}(x)=24(1+x^2)^{-3}-288x^2(1+x^2)^{-4}+384x^4(1+x^2)^{-5}, f^{(5)}(0)=24
\end{aligned}
$$

有 $f(x)=x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{24x^5}{5}+o(x^5)$。

六. 设视线角速度为 w，$w=\dfrac{d\theta}{dt}$

$\tan\theta=\dfrac{50-10t}{50}=1-\dfrac{t}{5},\theta\in[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}]$，两边对 t 求导得

$\sec^2\theta\dfrac{d\theta}{dt}=-\dfrac{1}{5}$

$w=\dfrac{d\theta}{dt}=-\dfrac{1}{5}\cos^2\theta$

$\dfrac{dw}{dt}=-\dfrac{2}{5}\cos\theta(-\sin\theta)\dfrac{d\theta}{dt}=\dfrac{w}{5}\sin 2\theta=0$，解得 $\theta=0$，$\theta=\pm\dfrac{\pi}{2}$（不符题意，舍去）

故电梯与人处于同一高度即 50m 处，看上去运动得最快。

试题编号：

重庆邮电大学 2011-2012 学年 2 学期

数学分析试卷（期末）（A 卷）（闭卷）

题　号	一	二	三	四	五	六	七	总 分
得　分								
评卷人								

一、计算题（本大题共 7 小题，每小题 6 分，共 42 分）

1. 计算由曲线 $y = x^2 + 2x + 2$ 和 $y = -x^2 + 6$ 所围成的封闭图形的面积.

2. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{(n+1)^2}$ 的敛散性（包含条件收敛和绝对收敛）.

3. 确定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+1}$ 的收敛域，并求其和函数.

4. 设 $u = x\cos y + y\sin x$, 求 du , $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

5. 求球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ 在点 $(1,2,3)$ 处的切平面及法线方程.

6. 求函数 $u = x^2 + y^2 + z^2$ 在点 $(a,2a,a)$ 处沿方向 $(1,2,1)$ 的方向导数和梯度.

7. 将函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 展开成 $(x-3)$ 的幂级数.

二、(9 分) 讨论广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1 + x^2 \cos^2 x} dx$ 的敛散性.

三、(9 分)设 $f(x,y,x+y+z)=0$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

四、(10 分)将函数 $f(x)=\begin{cases}-x, & (-\pi<x\le 0)\\ x, & (0<x\le\pi)\end{cases}$ 展开成傅里叶级数.

五、(10 分))设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x=y=0\end{cases}$

证明：$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续且偏导数存在，但不可微分.

六、(10 分)设 $f_1(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，且 $f_{n+1}(x)=\int_a^x f_n(x)dx(n=1,2,\cdots)$.

证明函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 0.

七、(10 分)生产某种产品需要投入甲、乙两种原料，x_1和x_2（单位：吨）分别是它们各自的投入量，则该产品的产出量为$Q=2x_1^{\alpha}x_2^{\beta}$（单位：吨），其中常数$\alpha>0,\beta>0$且$\alpha+\beta=1$。如果两种原料的价格分别为$p_1,p_2$（单位：万元/吨）。试问，当投入两种原料的总费用为P（单位：万元）时，两种原料各投入多少可使该产品的产出量最大？

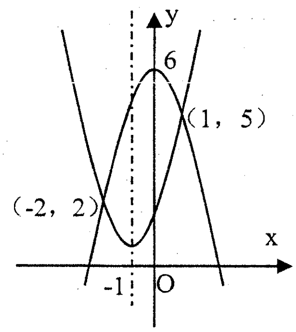
数学分析（2）参考答案与评分标准

一、计算题（本大题共 7 小题，每小题 6 分，共 42 分）

1. 计算由曲线 $y=x^2+2x+2$ 和 $y=-x^2+6$ 所围成的封闭图形的面积.

解：由方程组 $\begin{cases} y=x^2+2x+2 \\ y=-x^2+6 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=1 \\ y=5 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=-2 \\ y=2 \end{cases}$. ——————————（2 分）

如右图，所求面积为：



$$S=\int_{-2}^{1}[(-x^2+6)-(x^2+2x+2)]dx$$

$$=\int_{-2}^{1}(-2x^2-2x+4)dx$$

$$=(-\frac{2}{3}x^3-x^2+4x)\Big|_{-2}^{1}$$

=9. ————————————————————————————————（4 分）

2. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{(n+1)^2}$ 的敛散性（包含条件收敛和绝对收敛）.

解：因为 $|\mu_n|=\left|(-1)^n\frac{n}{(n+1)^2}\right|=\frac{n}{(n+1)^2}\to 0,(n\to\infty)$，且

$$|\mu_{n+1}|-|\mu_n|=\frac{n+1}{(n+2)^2}-\frac{n}{(n+1)^2}=\frac{(n+1)^3-n(n+2)^2}{(n+2)^2(n+1)^2}=-\frac{n^2+n-1}{(n+2)^2(n+1)^2}<0,(n\ge 1)$$

所以，原级数为莱布尼兹型级数，因而收敛。 ——————————————（4 分）

而 $\frac{|\mu_n|}{\frac{1}{n}}=\frac{\left|(-1)^n\frac{n}{(n+1)^2}\right|}{\frac{1}{n}}=\frac{n^2}{(n+1)^2}\to 1,(n\to\infty)$，且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}|\mu_n|$ 发散。

所以原级数条件收敛。 ————————————————————————（2 分）

3. 确定级数$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+1}$的收敛域，并求其和函数.

解：因为$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$，所以收敛半径为$R=1$；

又当$x=\pm 1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}(\pm)^{n+1}n$发散，

所以，收敛域为$(-1,1)$ ------------------------------ --------（3 分）

令$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+1}=x^2(1+2x+3x^2+\ldots)=x^2(x+x^2+x^3+\ldots)'$

$$=x^2(\frac{1}{1-x}-1)'=\frac{x^2}{(1-x)^2}.(-1<x<1).$$

所以，和函数为：$s(x)=\frac{x^2}{(1-x)^2}.(-1<x<1).$ ----------- --------（3 分）

4. 设$u=x\cos y+y\sin x$, 求du，$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

解：因为$\frac{\partial u}{\partial x}=\cos y+y\cos x,\frac{\partial u}{\partial y}=-x\sin y+\sin x,$

所以$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=(\cos y+y\cos x)dx+(-x\sin y+\sin x)dy,$ ---（4 分）

所以$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial y})=\frac{\partial}{\partial x}(-x\sin y+\sin x)=-\sin y+\cos x.$ ---------（2 分）

5. 求球面$x^2+y^2+z^2=14$在点$(1,2,3)$处的切平面及法线方程.
解：令$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-14$，
则$F_x=2x,\ F_y=2y,\ F_z=2z$. --------（2 分）

所以切平面的法向量为：$(F_x,F_y,F_z)|_{(1,2,3)}=(2,4,6)=(1,2,3)$.

所以切平面方程为：$(x-1)+2(y-2)+3(z-3)=0$， -------- (2 分)

即 $(x-1)+2(y-2)+3(z-3)=0$.

法线方程为：$\dfrac{(x-1)}{1}=\dfrac{(y-2)}{2}=\dfrac{(z-3)}{3}$. -------- (2 分)

6. 求函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在点 $(a,2a,a)$ 处沿方向 $(1,2,1)$ 的方向导数和梯度.

解：$gradu\,|_{(a,2a,a)}=(2x,2y,2z)\,|_{(a,2a,a)}=(2a,4a,2a)$. --------- (2 分)

方向 $(1,2,1)$ 的单位向量为：

$$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)=(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}).$$ --------- (2 分)

所以方向导数为：

$$\frac{\partial u}{\partial l}=gradu\bullet(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$$

$$=(2a,4a,2a)\bullet(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}})\ .$$

$$=2\sqrt{6a}$$

--------- (2 分)

7. 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 展开成 $(x-3)$ 的幂级数.

解：因为 $\dfrac{1}{1+x}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^n$，　$(-1<x<1)$ --------- (2 分)

所以 $f(x)=\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{3+x-3}=\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{1+\dfrac{x-3}{3}}=\dfrac{1}{3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(\dfrac{x-3}{3})^n$，-------- (3 分)

其中 $-1<\dfrac{x-3}{3}<1$，即 $0<x<6$. --------- (1 分)

二、(9 分) 讨论广义积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{x}{1+x^2\cos^2x}dx$ 的敛散性.

解：因为 $\cos^2x\le 1$，所以 $\left|\dfrac{x}{1+x^2\cos^2x}\right|\ge\dfrac{x}{1+x^2}$　$(x\ge 0)$. ----- (3 分)

而

$$\lim_{A\to+\infty}\int_0^A\frac{x}{1+x^2}dx=\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{2}\int_0^A\frac{1}{1+x^2}dx^2=\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{2}\arctan(1+x^2)\Big|_0^A=+\infty$$

所以无穷积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx$ 发散， --------（4 分）

所以 $\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^2\cos^2 x}dx$ 也发散. --------（2 分）

三、(9 分)设 $f(x,y,x+y+z)=0$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解：由 $f(x,y,x+y+z)=0$ 两边对 x 求导，得

$$f_1'+f_3'(1+\frac{\partial z}{\partial x})=0 \qquad (*)$$ --------（3 分）

解得，$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{f_1'+f_3'}{f_3'}$； --------（2 分）

由方程（*）对 x 再求偏导数，得

$$f_{11}''+f_{13}''(1+\frac{\partial z}{\partial x})+[f_{31}''+f_{33}''(1+\frac{\partial z}{\partial x})](1+\frac{\partial z}{\partial x})+f_3'\frac{\partial^2 z}{\partial x^2})=0$$

则

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{f_{11}''+f_{13}''(1+\frac{\partial z}{\partial x})+[f_{31}''+f_{33}''(1+\frac{\partial z}{\partial x})](1+\frac{\partial z}{\partial x})}{f_3'}$$

$$=-\frac{f_{11}''-f_{13}''\frac{f_1'}{f_3'}-[f_{31}''-f_{33}''\frac{f_1'}{f_3'}]\frac{f_1'}{f_3'}}{f_3'}$$

$$=-\frac{f_{11}''(f_3')^2-f_{13}''f_1'f_3'-f_{31}''f_3'f_1'+f_{33}''(f_1')^2}{(f_3')^3}$$

--------（4 分）

四、(10 分)将函数 $f(x)=\begin{cases}-x, & (-\pi<x\le 0)\\ x, & (0<x\le\pi)\end{cases}$ 展开成傅里叶级数.

解：因为 $f(x)$ 为偶函数，所以 $b_k = 0$ $(k = 1,2,\ldots)$ --------- （2 分）

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x dx = \pi \ .$$ --------- （2 分）

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos kx dx = \frac{2}{k^2\pi}[(-1)^k - 1]$$

$$= \begin{cases} 0, & k = 2n(n=1,2,\ldots) \\ -\dfrac{4}{\pi(2n-1)^2}, & k = 2n-1(n=1,2,\ldots) \end{cases}$$ --------- （4 分）

所以，

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \ldots + \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} + \ldots)$$

$(-\pi < x \le \pi)$. -------- （2 分）

五、（10 分））设函数 $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, & x^2+y^2 \ne 0 \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}$

证明：$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续且偏导数存在，但不可微分.

证明：因为 $|f(x,y) - f(0,0)| = \dfrac{x^2y^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} \le \dfrac{\frac{(x^2+y^2)^2}{4}}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{(x^2+y^2)} \to 0 \ (\rho = \sqrt{(x^2+y^2)} \to 0)$$

所以，$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续； ---------------------------- （3 分）

因为 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(\Delta x,0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{0}{\Delta x} = 0$,

$\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{f(0,\Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{0}{\Delta y} = 0$,

所以 $\dfrac{\partial f}{\partial x}|_{(0,0)} = 0$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}|_{(0,0)} = 0$. ---------------------------- （4 分）

因为 $\dfrac{\Delta z - f_x\Delta x - f_y\Delta y}{\rho} = \dfrac{\dfrac{\Delta x^2\Delta y^2}{\sqrt{(\Delta x^2+\Delta y^2)^3}} - 0\Delta x - 0\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$

$$= \frac{\Delta x^2\Delta y^2}{(\Delta x^2+\Delta y^2)^2}$$

$$\overset{\Delta y=k\Delta x}{=} \frac{k^2}{(1+k^2)^2},$$

由于 k 得变化，因此极限 $\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\Delta z - f_x\Delta x - f_y\Delta y}{\rho}$ 不存在，

所以，$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不可微分. ---------------------------（3 分）

六、(10 分) 设 $f_1(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，且 $f_{n+1}(x) = \int_a^x f_n(x)dx\ (n=1,2,\cdots)$.

证明函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 0.

证明：因为 $f_1(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，

所以存在 $M>0$，使得 $|f_1(x)|\le M$，$x\in[a,b]$. --------------（2 分）

所以，当 $x\in[a,b]$ 时，

$$|f_2(x)| = \left|\int_a^x f_1(x)dx\right| \le \int_a^x |f_1(x)|dx \le M(x-a),$$

$$|f_3(x)| = \left|\int_a^x f_2(x)dx\right| \le \int_a^x |f_2(x)|dx \le \int_a^x M(x-a)dx = \frac{M}{2!}(x-a)^2$$

$|f_n(x)| = \left|\int_a^x f_{n-1}(x)dx\right| \le \ldots \le \dfrac{M}{n!}(x-a)^n \le \dfrac{M}{n!}(b-a)^n$, ----------（6 分）

即 $\sup\limits_{x\in[a,b]}|f_n(x)-0| == \dfrac{M}{n!}(b-a)^n \to 0, (n\to+\infty)$,

所以，$\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 0. ------------------（2 分）

七、(10 分) 生产某种产品需要投入甲、乙两种原料，x_1 和 x_2（单位：吨）分别是它们

各自的投入量，则该产品的产出量为 $Q=2x_1^{\alpha}x_2^{\beta}$（单位：吨），其中常数 $\alpha>0,\beta>0$ 且 $\alpha+\beta=1$。如果两种原料的价格分别为 p_1，p_2（单位：万元/吨）。试问，当投入两种原料的总费用为 P（单位：万元）时，两种原料各投入多少可使该产品的产出量最大？

解： 由已知，有 $p_1x_1+p_2x_2-P=0$，且 $x_1>0,x_2>0$.

由 $Q=2x_1^{\alpha}x_2^{\beta}$ 得，$\ln Q=\ln 2+\alpha\ln x_1+\beta\ln x_2$. --------（2 分）

做拉格朗日函数：

$L(x_1,x_2)=\ln 2+\alpha\ln x_1+\beta\ln x_2+\lambda(p_1x_1+p_2x_2-P)$ --------（2 分）

则有 $\begin{cases} L_{x_1}=\alpha/x_1+\lambda p_1=0 \\ L_{x_2}=\beta/x_2+\lambda p_2=0 \\ p_1x_1+p_2x_2-P=0 \end{cases}$.

解得 $x_1=\dfrac{\alpha P}{p_1},x_2=\dfrac{\beta P}{p_2}$. --------（4 分）

由问题的实际意义，产品得最大产量必然存在，

所以，当 $x_1=\dfrac{\alpha P}{p_1},x_2=\dfrac{\beta P}{p_2}$ 时，有最大产量为 $Q=2(\dfrac{\alpha P}{p_1})^{\alpha}(\dfrac{\beta P}{p_2})^{\beta}$.

答：略. --------（2 分）

3.0 数学分析

《数学分析》期末考试试题

一、叙述题：（每小题 6 分，共 18 分）

1、牛顿-莱不尼兹公式

2、$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛的 cauchy 收敛原理

3、全微分

二、　计算题：（每小题 8 分，共 32 分）

1、$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\sin t^2dt}{x^4}$

2、求由曲线 $y=x^2$ 和 $x=y^2$ 围成的图形的面积和该图形绕 x 轴旋转而成的几何体的体积。

3、求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$ 的收敛半径和收敛域，并求和

4、已知 $u=x^{\frac{y}{z}}$ ，求 $\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}$

三、（每小题 10 分，共 30 分）

1、写出判别正项级数敛散性常用的三种方法并判别级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$$

2、讨论反常积分 $\int_0^{+\infty}x^{p-1}e^{-x}dx$ 的敛散性

3、讨论函数列 $S_n(x)=\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}$　$x\in(-\infty,+\infty)$ 的一致收敛性

四、证明题（每小题 10 分，共 20 分）

1、设 $x_n > 0, \dfrac{x_{n+1}}{x_n} > 1 - \dfrac{1}{n} (n = 1,2\cdots)$，证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散

2、证明函数 $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$ 在（0，0）点连续且可偏导，但它在该点不可微。，

参考答案

一、1、设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，$F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数，则成立 $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

2、$\forall \varepsilon > 0.\exists N > 0$, 使得 $\forall m > n > N$，成立 $|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m| < \varepsilon$

3、设 $D \subset R^2$ 为开集，$z = f(x,y), (x,y) \in D$ 是定义在 D 上的二元函数，$P_0(x_0, y_0)$ 为 D 中的一定点，若存在只与点有关而与 $\Delta x, \Delta y$ 无关的常数 A 和 B，使得 $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})$ 则称函数 f 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处是可微的，并称 $A\Delta x + B\Delta y$ 为在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处的全微分

二、1、分子和分母同时求导

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int_0^{x^2} \sin t^2 dt}{x^6} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x\sin x^4}{6x^5} = \dfrac{1}{3}$ （8 分）

2、、两曲线的交点为（0，0），（1，1）（2 分）

所求的面积为：$\int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \dfrac{1}{3}$ （3 分）

所求的体积为：$\pi \int_0^1 (x - x^5)dx = \dfrac{3\pi}{10}$ （3 分）

3、解：设 $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n(n+1)}$，$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{n(n+1)}} = 1$，收敛半径为 1，收敛域 [-1，1]（2 分）

$f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{n-1}}{(n+1)} = -\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}\ln(1-x), (0 < |x| < 1),$

$f(x)=\int_0^x f'(t)dt=1+\frac{1-x}{x}\ln(1-x),(0<|x|<1)$ (3 分)

x=0 级数为 0，x=1，级数为 1，x=-1，级数为 1-2ln2（3 分）

4、解：$\frac{\partial u}{\partial y}=x^{\frac{y}{z}}\frac{\ln x}{z}$（3 分）$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=x^{\frac{y}{z}-1}\ln x+x^{\frac{y}{z}}\frac{1}{zx}$(5 分)

三、1、解、有比较判别法，Cauchy,D'Alembert,Raabe 判别法等（应写出具体的内容 4 分）

$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1})^n=e^{-1}$（4 分）由 D'Alembert 判别法知级数收敛（1 分）

2、解：$\int_0^{+\infty}x^{p-1}e^{-x}dx=\int_0^1 x^{p-1}e^{-x}dx+\int_1^{+\infty}x^{p-1}e^{-x}dx$（2 分），对 $\int_0^1 x^{p-1}e^{-x}dx$，由于 $x^{1-p}x^{p-1}e^{-x}\to 1(x\to +0)$ 故 $p>0$ 时 $\int_0^1 x^{p-1}e^{-x}dx$ 收敛（4 分）；$\int_1^{+\infty}x^{p-1}e^{-x}dx$，由于 $x^2x^{p-1}e^{-x}\to 0(x\to +\infty)$（4 分）故对一切的 p $\int_1^{+\infty}x^{p-1}e^{-x}dx$ 收敛，综上所述 $p>0$，积分收敛

3、解：$S_n(x)=\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}$ 收敛于 $|x|$（4 分）$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(-\infty,+\infty)}\left|S_n(x)-|x|\right|=0$ 所以函数列一致收敛性（6 分）

四、证明题（每小题 10 分，共 20 分）

1、证明：$\frac{x_3}{x_2}\frac{x_4}{x_3}\cdots\frac{x_n}{x_{n-1}}=\frac{x_n}{x_2}>\frac{1}{2}\frac{2}{3}\cdots\frac{n-2}{n-1}=\frac{1}{n-1}$ $x_n>\frac{1}{n-1}x_2,(n>2)$（6 分）

$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}$ 发散，由比较判别法知级数发散（4 分）

2、证明：$0\le\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\le\sqrt{|xy|}$（4 分）$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$=0 所以函数在（0，0）点连续，（3 分）又 $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0$，$f_x(0,0),f_y(0,0)$ 存在切等于 0，（4 分）但 $\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2}$ 不存在，故函数在（0，0）点不可微（3 分）

数学分析模拟试题

一、填空题（每小题 3 分，共 18 分）

1. 集合 X 中的关系 R 同时为反身的，对称的，传递的，则该关系 R 为 ________.

2. 设 E 是非空数集，若存在实数 β，满足 1）$\forall x \in E$，有 $x \geq \beta$；2）________，则称 β 是数集 E 的下确界。

3. 函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，若 ________ 存在，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 可导。

4. 若 $y = f(x)$ 是对数函数，则 $f(x)$ 满足函数方程 $f(xy) =$ ________。

5. 若非零连续函数 $f(x)$ 满足方程 $f(x+y) = f(x) + f(y)$，则函数 $f(x)$ 是 ________ 函数。

6. 设函数 $f(x)$ 定义在区间 (a,b) 上，对于任意的 $x_1, x_2 \in (a,b)$，$\forall \alpha \in (0,1)$，有 ________ 成立，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 上为下凸函数。

二、单项选择题（每小题 3 分，共 18 分）

1. 设 f：$X \to Y$，$\forall A \subset X$，则 A（　　）$f^{-1}(f(A))$

A. = 　　B. $\neq$ 　　C. $\supset$ 　　D. $\subset$

2. 已知函数 $y = f(x)$ 在区间 (a,b) 上可导，$\forall x \in (a,b)$，有 $0 < f(x) < 1$，则（　　）。

A. $f'(x)$ 有界　　B. $f'(x)$ 无界

C. $f(x)$ 可积　　D. $f(x)$ 不可积

3. 已知函数 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 在[a,b]上可导，且 $f(x) < \varphi(x)$，则（　　）。

A. $f'(x) \neq \varphi'(x)$　　B. $f'(x) < \varphi'(x)$　　C $f'(x) > \varphi'(x)$　　D. 前三个结论都不对

4. 已知 $f(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0,1] \\ 2 & t \in (1,2] \end{cases}$，对于 $x \in [0,2]$，定义 $F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则 $F(x)$ 在区间[0, 2]上（　　）。

A. 连续　　B. 不连续　　C. 可导　　D. 前三个结论都不对

5. 已知 $f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的严格下凸函数，则（　　）。

A. $f''(x)>0$　　B. 最小值唯一　　C. $f''(x)<0$　　D. 最大值唯一

6. $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 定义在（0，1）上，则 $f(x)$ 在（0，1）上是(　　　)函数

A. 有界　　B. 无界　　C. 周期　　D. 偶

三、计算题（每小题 8 分，共 32 分）

1. 已知 $f(x)=\tan\cos x^2$，求 $f'(x)$

2. 求定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\mathrm{d}x$

3. 已知 $f(x+1)=x^2-4x+3$，求 $f(x)$。

4. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$

四、证明题（每小题 8 分，共 32 分）

1. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n>0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=r<1$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛

2. 已知函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内存在二阶导数，且 $f(a)=f(b)=0$，存在 $c\in(a,b),f(c)>0$。则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f''(\xi)<0$。

3. 已知 $x>0,y>0,x+y=\dfrac{\pi}{2}$，证明 $\sin x+\sin y\le\sqrt{2}$

4. 已知函数在 $[a,b]$ 上连续非负，且存在一点 $x_0\in(a,b)$，使 $f(x_0)>0$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$。

模拟试卷参考答案

一、填空题（每小题 3 分，共 18 分）

1. 等价关系

2. $\forall\varepsilon>0,\exists x_0\in E$，使得 $x_0<\beta+\varepsilon$

3. $\lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

4. $f(xy)=f(x)+f(y)$

5. 线性

6. $f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)\le \alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)$

二、单项选择题（每小题 3 分，共 18 分）

1. D　2. C　3. D　4. A　5. B　6. A

三、计算题（每小题 8 分，共 32 分）

1、解：$f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2(\cos x^2)}\cdot \sin x^2 \cdot 2x$

2.解 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\mathrm{d}x = x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\mathrm{d}x$

$$=\frac{\pi}{2}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi}{2}+\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-1$$

3. 解 $f(x+1)=x^2-4x+3$

$$=(x+1)^2-6(x+1)+8$$

故 $f(x)=x^2-6x+8$

4. 解 $\lim_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{x-\cos x}{x^2}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{6}$$

四、证明题（每小题 8 分，共 32 分）

1. 证明：因 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=r<1$，故存在N，当 $n\ge N$ 时，$\sqrt[n]{a_n}\le r_0=\dfrac{1+r}{2}<1$

2. 即$n \geq N$时，有$a_n < r_0^n$　（4 分）　因为级数$\sum_{n=N+1}^{\infty} r_0^n$收敛。

故有$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{N} a_n + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$。因$\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$收敛（7 分），故$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛。

2. 证明：已知 f(x)在（a,b）内存在二阶导数，故 f′(x)在（a,b）内连续，由拉格朗日定理，存在$\xi_1 \in (a,c)$，使得

$$f'(\xi_1) = \frac{f(a)-f(c)}{a-c} > 0$$

存在$\xi_2 \in (c,b)$，使得

$$f'(\xi_2) = \frac{f(b)-f(c)}{b-c} < 0$$

故存在$\xi \in (\xi_1, \xi_2)$，使得

$$f''(\xi) = \frac{f'(\xi_2)-f'(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1} < 0$$

3. 证明：已知$f(x) = \sin x$在$[0, \frac{\pi}{2}]$上是上凸函数（2 分），故对于$x, y \in (0, \frac{\pi}{2}), \frac{1}{2} \in (0,1)$有

$$\sin\frac{x+y}{2} \geq \frac{1}{2}(\sin x + \sin y)$$

故

$$\sin x + \sin y \leq 2\sin\frac{x+y}{2} = 2\sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$$

4. 证明：已知 f(x)在[a,b]上连续且存在$x_0 \in (a,b)$使$f(x_0) > 0$，故存在$\delta > 0$，使得$(x_0-\delta, x_0+\delta) \subset (a,b)$且当$x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$时，$f(x) \geq \frac{1}{2} f(x_0)$（4 分），因 f(x)非负，故

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_0-\delta} f(x)dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx + \int_{x_0+\delta}^{b} f(x)dx$$
$$\geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx \geq \frac{1}{2} f(x_0) \cdot 2\delta = f(x_0)\delta > 0$$

《数学分析》Ⅰ期末考试试题

学号＿＿＿＿＿＿＿　　姓名＿＿＿＿＿＿

一、叙述题

1、　叙述闭区间套定理；

2、　用肯定的形式叙述函数 $f(x)$ 在数集 D 上无上阶；

3、　叙述 Rolle 微分中值定理；

二、计算题

4、　求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x+1}{x-1})^x$；

5、　求摆线 $\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t \end{cases}$　$0\le t\le 2\pi$，　在 $t=\pi$ 处的二阶导数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ 的值；

6、　设 $f(x^2)=e^{\sqrt{x}}$，求不定积分 $\int\dfrac{f(x)}{\sqrt{x}}dx$；

7、　求不定积分 $\int e^{x+2}\arctan\sqrt{e^x-1}dx$；

三、讨论题

8、　讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\succ 0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 点处的左、右导数；

9、　设 $f_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^2x^2}$，$x\in[e.A]$，$(0\prec e\prec A\prec +\infty)$　$(n=1、2、\cdots)$，讨论 $f_n(x)$ 在 $[e.A]$ 上的单调性的最大值点；

四、证明题

10、　用定义证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{2x-1}=\dfrac{1}{2}$；

11、　证明：方程 $x^3-3x+c=0$，（其中 c 为常数）在 $[0,1]$ 上可能有两个不同的实根；

12、　若数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a（有限数），它的任何子列 $\{x_{n_k}\}$ 也收敛于 a。

数学分析期末试题

一、　填空题（每小题 3 分，共 18 分）

1.若 $A\subset B, A\subset C$，则 A ______ $B\cap C$.

2.若 $A=\{甲,乙\}$，则 $2^A=$ __________.

3.设 $f:X\to Y$，若 $\forall x_1,x_2\in X, x_1\neq x_2$，有 $f(x_1)\neq f(x_2)$,则称 f 为从 X 到 Y 上的______.

4.含有_____的等式叫做函数方程.

5.设 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1}$，则 $f(\frac{\pi}{2})=$ _____.

6. 设函数 $f(x)$ 定义在开区间 (a,b) 内，对于 $\forall x_1,x_2\in(a,b),\forall\alpha\in(0,1)$，有 $f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)\geq \alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)$，则称 $f(x)$ 是 (a,b) 内的______函数.

二、　单项选择题（每小题 3 分，共 18 分）

1.设 $f:X\to Y$，$\forall B\subset Y$，有 $B(\quad)f(f^{-1}(B))$.

A. $=$　B. $\neq$　C. $\subset$　D. $\supset$

2.自然数集 N，是（　）

A. 有限集　B. 可列集　C. 不可列集　D. 空集

3.设 $f(x)$ 定义在 (a,b) 上，$x_0\in(a,b)$ 是 $f(x)$ 的极小值点，则（　）

A. $f'(x_0)=0$

B. $\forall x\in(a,b)$ 有 $f(x)\geq f(x_0)$

C. $\exists\delta>0$, 当 $|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)\geq f(x_0)$

D. $f(x_0)=0$

4.设 $P(x,y)$ 是二元函数，且 $y=f(x)$ 使得 $P(x,f(x))\equiv 0$，则函数 $f(x)$ 是（　）

A.有理函数　B. 无理函数　C. 代数函数　D. 超越函数

5.设 $f(x)$ 是 (a,b) 内的严格上凸函数，则（　）

A. $f(x)$ 在 (a,b) 内必取到最大值　B. $f(x)$ 在 (a,b) 内必取到最小值

C. $f(x)$ 在 (a,b) 内有 $f''(x)<0$　D. 前三个结论都不对

6. $f(x)$在(a,b)内连续可导，且$\exists x_0\in(a,b)$，使得$f'(x_0)=0$，则x_0是（ ）

A. 稳定点 B. 极值点 C. 拐点 D. 临界点

三、 计算题（每小题6分，共24分）

1.设$a_1>0,a_2>0,a_3>0$，求$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+a_3^n}$.

2.已知$y=f(x)$的曲线经过点(2,3)，且曲线上任意点的切线的斜率是该点横坐标的2倍，求$f(x)$.

3.已知$x+2\sqrt{x-y}+4y=2$，求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

4.已知$2f(2-x)+f(x)=3x+6$，求$f(x)$.

四、 证明题（每小题8分，共32分）

1.设$f(x)$定义在R上，对于任意的x_1,x_2，有

$$|f(x_1)-f(x_2)|\le(x_1-x_2)^2,$$

则$f(x)$是常值函数.

2.证明（1） $A-(B-C)=(A-B)\cup(A\cap C)$ (4分)

(2) $(A-B)\cup(C-B)=(A\cup C)-B$ （4分）

3.若函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且$x_1,x_2,\cdots,x_n$皆属于$[a,b]$，则至少存在一点$\xi\in[a,b]$，使得$f(\xi)=\dfrac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)]$

4.设$x>0,y>0,x\ne y$,证明$(x+y)\ln\dfrac{x+y}{2}<x\ln x+y\ln y$

答 案:

一、 填空题（每小题3分，共18分）

1、$\subset$；2、{$\varnothing$,{甲}，{乙}，{甲，乙}}；3、单射；4、未知函数；5、$f(\frac{\pi}{2})=1$；6、上凸。

二、 单项选择题（每小题3分，共18分）

1.D;2.B;3.C;4.C;5.D;6. A.

三、计算题（每小题8分，共32分）

1.解 因为$\max\{a_1,a_2,a_3\}<\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+a_3^n}\le\sqrt[n]{3}\max\{a_1,a_2,a_3\}$,故有

$$\max\{a_1,a_2,a_3\} \le \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + a_3^n} \le \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}\max\{a_1,a_2,a_3\}$$ 5 分

所以有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + a_3^n} = \max\{a_1,a_2,a_3\}$$ 8 分

2.解 $\begin{cases} y'(x) = 2x \\ y(2) = 3 \end{cases}$

由方程可得，$y = x^2 + c$，由 $y(2) = 3$ 得 $c = -1$，即 $y = x^2 - 1$ 8 分

3.解 已知 $x + 2\sqrt{x-y} + 4y = 2$，对两端关于 x 求导，得

$$1 + \frac{1}{\sqrt{x-y}}(x - y_x') + 4y_x' = 0$$ 4 分

由 $y_x' = \dfrac{1 + \dfrac{1}{\sqrt{x-y}}}{\dfrac{1}{\sqrt{x-y}} - 4} = \dfrac{\sqrt{x-y}+1}{1-4\sqrt{x-y}}$ 8 分

4、解 已知 $2f(2-x) + f(x) = 3x + 6$ （1）

令 $2 - x = t$，即 $x = 2 - t$，得

$$2f(x) + f(2-x) = 12 - 3x$$ （2）

（2）$\times 2 - (1)$ 得

$$4f(x) + 2f(2-x) - 2f(2-x) - f(x) = 24 - 6x - 3x - 6$$ 6 分

即 $3f(x) = 18 - 9x$，$f(x) = 6 - 3x$ 8 分

四、证明题（每小题 8 分，共 32 分）

1、证明：对于 $\forall x_1, x_2 \in R$，有

$$\left|\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}\right| \le |x_1 - x_2|$$

令 $x_2 \to x_1$，则得 $f'(x_1) = 0$， 6 分

由 x_1 的任意性知，$f(x) = c$。 8 分

2、证明：用 C^C 表示 C 的补集，则

（1） $A-(B-C)=A-(B\cap C^C) = A\cap(B\cap C^C)^C = A\cap(B^C\cup C)$

$=(A\cap B^C)\cup(A\cap C)=(A-B)\cup(A\cap C)$ 4 分

（2） $(A-B)\cup(C-B)=A\cap(B\cap C^C)^C=(A\cap B^C)\cup(C\cap B^C)$

$=(A\cup C)\cap B^C)=(A\cup C)-B$ 8 分

3、已知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，故 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 有最大值 M 与最小值 m，从而有

$m\le\frac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)]\le M$ 4 分

由介值定理，存在 $\xi\in[a,b]$，使

$f(\xi)=\frac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)]$ 8 分

4．设 $f(x)=x\ln x$，对于 $x>0$，我们有 $f'(x)=\ln x+1, f''(x)=\frac{1}{x}>0$，即在 $(0,\infty)$ 内是严格下凸函数，故对于 $x>0,y>0,x\ne y$ 有

$$f(\frac{x+y}{2})<\frac{1}{2}[f(x)+f(y)]$$ 6 分

代入得 $(x+y)\ln\frac{x+y}{2}<(x\ln x+y\ln y)$ 8 分

数学分析期末试题 1

一 叙述题（每小题 10 分，共 30 分）

1 叙述含参变量反常积分 $\int_a^{+\infty}f(x,y)dx$ 一致收敛的 Cauchy 收敛原理。

2 叙述 Green 公式的内容及意义。

3 叙述 n 重积分的概念。

二 计算题（每小题 10 分，共 50 分）

1．计算积分 $I=\oint\limits_C\frac{xdy-ydx}{3x^2+4y^2}$，其中 C 为椭圆 $2x^2+3y^2=1$，沿逆时针方向。

2．已知 $z=f(xz,z-y)$，其中 $f(u,v)$ 存在着关于两个变元的二阶连续偏导数，求 z 关于 x,y 的二阶偏导数。

3．求椭球体 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的体积。

4．若 l 为右半单位圆周，求 $\int_l|y|ds$。

5. 计算含参变量积分 $I(a)=\int_0^{\pi}\ln(1-2a\cos x+a^2)dx$（$|a|<1$）的值。

三 讨论题（每小题 10 分，共 20 分）

1 若积分在参数的已知值的某邻域内一致收敛，则称此积分对参数的已知值一致收敛。试讨论积分

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{adx}{1+a^2x^2}$$

在每一个固定的 a 处的一致收敛性。

2 讨论函数 $F(y)=\int_0^1\frac{yf(x)}{x^2+y^2}dx$ 的连续性，其中 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上是正的连续函数。

数学分析试题 1 答案

一 叙述题（每小题 10 分，共 30 分）

1 含参变量反常积分 $\int_a^{+\infty}f(x,y)dx$ 关于 y 在 $[c,d]$ 上一致收敛的充要条件为：对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在与 y 无关的正数 A_0，使得对于任意的 $A',A>A_0$，

$\left|\int_A^{A'}f(x,y)dx\right|<\varepsilon,\ y\in[c,d]$ 成立。

2 Green 公式：设 D 为平面上由光滑或分段光滑的简单闭曲线所围的单连通区域。如果函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 在 D 上具有连续偏导数，那么

$$\int_{\partial D}Pdx+Qdy=\int_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial x})dxdy,$$

其中 ∂D 取正向，即诱导正向。

Green 公式说明了有界闭区域上的二重积分与沿区域边界的第二类曲线积分的关系。

3. 设 Ω 为 R^n 上的零边界区域，函数 $u=f(x)$ 在 Ω 上有界。将 Ω 用曲面网分成 n 个小区域 $\Delta\Omega_1,\Delta\Omega_2,\ldots,\Delta\Omega_n$（称为 Ω 的一个分划），记 ΔV_i 为 $\Delta\Omega_i$ 的体积，并记所有的小区域 $\Delta\Omega_i$ 的最大直径为 λ。在每个 $\Delta\Omega_i$ 上任取一点 x_i，若 λ 趋于零时，和式

$$I=\sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta V_i$$

的极限存在且与区域的分法和点 x_i 的取法无关，则称 $f(x)$ 在 Ω 上可积，并称此极限为 $f(x)$ 在有界闭区域 Ω 上的 n 重积分，记为

$$I=\int_\Omega fdV=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(P_i)\Delta V_i\text{。}$$

二 计算题（每小题 10 分，共 50 分）

1 解 令l：$x=\frac{\sqrt{3}}{3}\cos t$，$y=\frac{1}{2}\sin t$，则

$$I=\oint_{C}\frac{xdy-ydx}{3x^2+4y^2}=\oint_{l}\frac{xdy-ydx}{3x^2+4y^2}=\int_0^{2\pi}\frac{\sqrt{3}}{6}(\cos^2 t+\sin^2 t)dt=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi .$$

2 解 令$u=xz$，$v=z-y$，则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=z+x\frac{\partial z}{\partial x},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial x},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=x\frac{\partial z}{\partial y},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial y}-1.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

故

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right),$$

即

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}&=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\\&=\frac{\partial f}{\partial u}\left(2\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)+\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(z+x\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}&=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\\&=\frac{\partial f}{\partial u}\left(x\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(x\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}-1\right)^2.\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$=\frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial y}+x\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)+\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(z+x\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(x\frac{\partial z}{\partial y}\right)+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$$

$$+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}-1\right).$$

3 解 由于对称性，只需求出椭球在第一卦限的体积，然后再乘以 8 即可。作广义极坐标变换

$$x=ar\cos\theta, y=br\sin\theta \quad（a>0,b>0,0<r<\infty,0\le\theta\le 2\pi）。$$

这时椭球面化为

$$z=c\sqrt{1-[\frac{(ar\cos\theta)^2}{a^2}+\frac{(br\sin\theta)^2}{b^2}]}=c\sqrt{1-r^2}\text{。}$$

又

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\theta)}=\begin{vmatrix}x_r & x_\theta\\ y_r & y_\theta\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a\cos\theta & -ar\sin\theta\\ b\sin\theta & br\cos\theta\end{vmatrix}=abr,$$

于是

$$\frac{1}{8}V=\iint_{\sigma_{xy}}z(x,y)d\sigma_{xy}=\iint_{\sigma_{xy}}z(r,\theta)\left|\frac{D(x,y)}{D(r,\theta)}\right|drd\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 c\sqrt{1-r^2}\cdot abrdr=\frac{\pi}{2}abc\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}dr$$

$$=\frac{\pi}{2}abc\int_0^1(-\frac{1}{2}\sqrt{1-r^2})d(1-r^2)$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}abc[\frac{2}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1]=\frac{\pi}{6}abc\text{。}$$

所以椭球体积

$$V=\frac{4}{3}\pi abc\text{。}$$

4 解 l 的方程为：$x^2+y^2=1,x\ge 0$。由 $y'=-\frac{x}{y}$，

$$ds=\pm\sqrt{1+y'^2}dx=\pm\sqrt{\frac{x^2+y^2}{y^2}}dx=\pm\frac{dx}{|y|}$$

符号的选取应保证 $ds\ge 0$，在圆弧段 AC 上，由于 $dx>0$，故

$$ds=\frac{dx}{|y|}$$

而在圆弧段 CB 上，由于 $dx<0$，故

$$ds = -\frac{dx}{|y|}$$

所以
$$I = \int |y| ds = \int_{AC} |y| \cdot \frac{dx}{|y|} + \int_{CB} |y| \cdot \left(-\frac{1}{|y|}\right) dx$$

$$= \int_0^1 dx - \int_1^0 dx = 2。$$

5 解 $I(a) = \int_0^{\pi} \ln(1 - 2a\cos x + a^2) dx$。当 $|a| < 1$ 时，由于

$$1 - 2a\cos x + a^2 \geq 1 - 2|a| + a^2 = (1 - |a|)^2 > 0,$$

故 $\ln(1 - 2a\cos x + a^2)$ 为连续函数且具有连续导数，从而可在积分号下求导。

$$I'(a) = \int_0^{\pi} \frac{-2\cos x + 2a}{1 - 2a\cos x + a^2} dx$$

$$= \frac{1}{a} \int_0^{\pi} \left(1 + \frac{a^2 - 1}{1 - 2a\cos x + a^2}\right) dx$$

$$= \frac{\pi}{a} - \frac{1 - a^2}{a} \int_0^{\pi} \frac{dx}{(1 + a^2) - 2a\cos x}$$

$$= \frac{\pi}{a} - \frac{1 - a^2}{a(1 + a^2)} \int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + \left(\frac{-2a}{1 + a^2}\right)\cos x}$$

$$= \frac{\pi}{a} - \frac{2}{a} arctg\left(\frac{1 + a}{1 - a} tg\frac{x}{2}\right)\Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{\pi}{a} - \frac{2}{a} \cdot \frac{\pi}{2} = 0。$$

于是，当 $|a| < 1$ 时，$I(a) = C$（常数）。但是，$I(0) = 0$，故 $C = 0$，从而 $I(a) = 0$。

三 讨论题（每小题 10 分，共 20 分）

1 解 设 a_0 为任一不为零的数，不妨设 $a_0 > 0$。取 $\delta > 0$，使 $a_0 - \delta > 0$。下面证明积分 I 在 $(a_0 - \delta, a_0 + \delta)$ 内一致收敛。事实上，当 $a \in (a_0 - \delta, a_0 + \delta)$ 时，由于

$$0 < \frac{a}{1 + a^2 x^2} < \frac{a_0 + \delta}{1 + (a_0 - \delta)^2 x^2},$$

且积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{a_0 + \delta}{1 + (a_0 - \delta)^2 x^2} dx$$

收敛，故由 Weierstrass 判别法知积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{a}{1+a^2x^2}dx$$

在$(a_0-\delta,a_0+\delta)$内一致收敛，从而在a_0点一致收敛。由a_0的任意性知积分I在每一个$a\neq 0$处一致收敛。

下面说明积分I在$a=0$非一致收敛。事实上，对原点的任何邻域$(-\delta,\delta)$有：$\forall A>0$，有

$$\int_A^{+\infty}\frac{a}{1+a^2x^2}dx=\int_{aA}^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}(a>0)。$$

由于

$$\lim_{a\to+0}\int_{aA}^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}=\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}=\frac{\pi}{2},$$

故取$0<\varepsilon<\frac{\pi}{2}$，在$(-\delta,\delta)$中必存在某一个$a_0>0$，使有

$$|\int_{aA}^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}|>\varepsilon,$$

即

$$|\int_A^{+\infty}\frac{a_0dx}{1+a_0{}^2x^2}|>\varepsilon$$

因此，积分I在$a=0$点的任何邻域$(-\delta,\delta)$内非一致收敛，从而积分I在$a=0$时非一致收敛。

2. 解 当$y\neq 0$时，被积函数是连续的。因此，$F(y)$为连续函数。

当$y=0$时，显然有$F(0)=0$。

当$y>0$时，设m为$f(x)$在$[0,1]$上的最小值，则$m>0$。由于

$$F(y)\geq m\int_0^1\frac{y}{x^2+y^2}dx=m\cdot arctg\frac{1}{y}$$

及

$$\lim_{y\to+0}arctg\frac{1}{y}=\frac{\pi}{2},$$

故有

$$\varliminf_{y\to+0}F(y)\geq\frac{m\pi}{2}>0。$$

所以，$F(y)$当$y=0$时不连续。

数学分析期末试题 2

一 **叙述题**（每小题 10 分，共 30 分）

1 叙述二重积分的概念。

2 叙述 Gauss 公式的内容。

3 叙述 Riemann 引理。

二 **计算题**（每小题 10 分，共 50 分）

1. 求球面 $x^2+y^2+z^2=50$ 与锥面 $x^2+y^2=z^2$ 所截出的曲线的点 $(3,4,5)$ 处的切线与法平面方程。

2. 求平面 $z=0$，圆柱面 $x^2+y^2=2x$，锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围成的曲顶柱体的体积。

3. 计算三重积分

$$I=\iiint_V (x+y+z)dxdydz 。$$

其中 $V:0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1, 0\le z\le 1$。

4 利用含参变量积分的方法计算下列积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx 。$$

5 计算 $\iint_M x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$，其中 M 为上半椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, z\ge 0(a,b,c>0),$$

定向取上侧.

三 **证明题**（每小题 10 分，共 20 分）

1. 若 $n\ge 1$ 及 $x\ge 0,\ y\ge 0$，证明不等式 $\dfrac{x^n+y^n}{2}\ge\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^n$.

2. 证明 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin xy}{x}dx$ 关于 y 在 $[a,\ b](0<a<b<+\infty)$ 上一致收敛，但在 $(0,\ +\infty)$ 上非一致收敛.

数学分析期末试题 2 答案

一 **叙述题**（每小题 10 分，共 30 分）

1. 设 Ω 为 R^2 上的零边界区域，函数 $z=f(x,y)$ 在 Ω 上有界。将 Ω 用曲线网分成 n 个小区域 $\Delta\Omega_1,\Delta\Omega_2,\ldots,\Delta\Omega_n$（称为 Ω 的一个分划），记 $\Delta\sigma_i$ 为 $\Delta\Omega_i$ 的面积，并记所有的小区域 $\Delta\Omega_i$ 的最大直径为 λ。在每个 $\Delta\Omega_i$ 上任取一点 (ξ_i,η_i)，若 λ 趋于零时，和式

$$I=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

的极限存在且与区域的分法和点(ξ_i,η_i)的取法无关，则称$f(x)$在Ω上可积，并称此极限为$f(x,y)$在有界闭区域Ω上的二重积分，记为

$$I=\iint_{\Omega} f(x,y)d\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i \text{。}$$

2．设Ω是R^3中由光滑或分片光滑的封闭曲面所围成的二维单连通闭区域，函数$P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$和$R(x,y,z)$在Ω上具有连续偏导数。则成立等式

$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz=\iint_{\partial\Omega} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy\text{，}$$

这里$\partial\Omega$的定向为外侧。

3．设函数$\psi(x)$在$[a,b]$可积且绝对可积，则成立

$$\lim_{p\to+\infty}\int_a^b \psi(x)\sin pxdx=\lim_{p\to+\infty}\int_a^b \psi(x)\cos pxdx=0\text{。}$$

二 计算题（每小题 10 分，共 50 分）

1 求球面$x^2+y^2+z^2=50$与锥面$x^2+y^2=z^2$所截出的曲线的点$(3,4,5)$处的切线与法平面方程。

解 设 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-50$，$G(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$。它们在$(3,4,5)$处的偏导数和雅可比行列式之值为：

$$\frac{\partial F}{\partial x}=6,\quad \frac{\partial F}{\partial y}=8,\quad \frac{\partial F}{\partial z}=10,$$

$$\frac{\partial G}{\partial x}=6,\quad \frac{\partial G}{\partial y}=8,\quad \frac{\partial G}{\partial z}=-10,$$

和

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}=-160\text{，}\quad \frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}=-120\text{，}\quad \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}=0\text{。}$$

所以曲线在$(3,4,5)$处的切线方程为：

$$\frac{x-3}{-160}=\frac{y-4}{120}=\frac{z-5}{0}\text{，}$$

即

$$\begin{cases} 3(x-3)+4(y-4)=0, \\ z=5. \end{cases}$$

法平面方程为

$$-4(x-3)+3(y-4)+0(z-5)=0,$$

即

$$4x-3y=0。$$

2 求平面 $z=0$，圆柱面 $x^2+y^2=2x$，锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围成的曲顶柱体的体积。

解 其体积 $V=\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$，其中 $D: x^2+y^2 \le 2x$。设 $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$。$D: r \le 2\cos\varphi, -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$。故

$$V=\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r^2 dr$$
$$=\frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi d\varphi$$
$$=\frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2\varphi)d\sin\varphi=\frac{32}{9}.$$

3 解

$$\iiint\limits_V (x+y+z)dxdydz=\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^1 (x+y+z)dz=\int_0^1 dx\int_0^1 [(x+y)z+\frac{z^2}{2}]\Big|_0^1 dy$$
$$=\int_0^1 dx\int_0^1 (\frac{1}{2}+x+y)dy=\int_0^1 [(\frac{1}{2}+x)y+\frac{y^2}{2}]\Big|_0^1 dx=\int_0^1 (1+x)dx=\frac{3}{2}.$$

4 解：首先，令 $I=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx$，则 $I=2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$，在积分 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ 中，再令 $x=ut$，其中 u 为任意正数，即得 $I=2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx=u\int_0^{+\infty} e^{-u^2t^2}dx$. 再对上式两端乘以 $e^{-u^2}du$，然后对 u 从 0 到 $+\infty$ 积分，得

$$I^2=4\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du\int_0^{+\infty} ue^{-u^2t^2}dt.$$

注意到积分次序可换，即得

$$I^2=4\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du\int_0^{+\infty} ue^{-u^2t^2}dt$$
$$=4\int_0^{+\infty} dt\int_0^{+\infty} e^{-(1+t^2)u^2}udu$$
$$=2\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}=\pi.$$

由于 $I>0$，故 $I=\sqrt{\pi}$.

5 利用广义球面坐标代入曲面方程就可得曲面的参数方程为

$$x = a\sin\varphi\cos\theta, y = b\sin\varphi\cos\theta, z = c\cos\varphi, 0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}.$$

易得

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(\varphi,\theta)} = bc\sin^2\varphi\cos\theta,$$

$$\frac{\partial(z,x)}{\partial(\varphi,\theta)} = ac\sin^2\varphi\sin\theta,$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\varphi,\theta)} = ba\sin^2\varphi\cos\theta,$$

因此

$$\iint_M x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy$$
$$= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\pi} (a^3bc\sin^5\varphi\cos^4\theta + b^3ac\sin^5\varphi\sin^4\theta + c^3ab\sin\varphi\cos\varphi)d\theta$$
$$= \frac{2}{5}\pi abc(a^2 + b^2 + c^2).$$

三 证明题（每小题 10 分，共 20 分）

1．证明 考虑函数 $z = \dfrac{x^n + y^n}{2}$ 在条件 $x + y = a$ $(a > 0, x \ge 0,\ y \ge 0)$ 下的极值问题，设

$$F(x,y) = \frac{1}{2}(x^n + y^n) + \lambda(x + y - a).$$

解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{n}{2}x^{n-1} + \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{n}{2}y^{n-1} + \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = x + y - a = 0 \end{cases}$$

可得 $x = y = \dfrac{a}{2}$. 从而 $\dfrac{x^n + y^n}{2} \ge \left(\dfrac{a}{2}\right)^n = \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^n$. 如果 $x = y = 0$ 时，则结论显然成立.

2．证明 首先证 $\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin xy}{x}dx$ 在 $[a,\ b]$ 上一致收敛. 由于

$$\left|\int_0^A \sin xydx\right| = \left|\frac{1-\cos(Ay)}{y}\right| \le \frac{2}{y} \le \frac{2}{a},\quad A \ge 0,\ y \in [a,\ b],$$

因而一致有界，而 $1/x$ 是 x 的单调减少函数且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x} = 0$，由于 $1/x$ 与 y 无关，因此这个极

限关于y是一致的，于是由 Dirichlet 判别法知$\int_0^{+\infty}\frac{\sin xy}{x}dx$在$y\in[a,\ b]$上一致收敛.

再证$\int_0^{+\infty}\frac{\sin xy}{x}dx$在$(0,\ +\infty)$上非一致收敛. 对于正整数$n$，取$y=1/n$，这时

$$\left|\int_{n\pi}^{3/2n\pi}\frac{\sin xy}{x}dx\right|=\left|\int_{n\pi}^{3/2n\pi}\frac{\sin x/n}{x}dx\right|>\frac{2}{3n\pi}\left|\int_{n\pi}^{3/2n\pi}\sin\frac{x}{n}dx\right|=\frac{2}{3\pi}.$$

只要取$\varepsilon_0=\frac{2}{3\pi}$，则对于任意$A_0$，总存在正整数$n$满足$n\pi>A_0$，取$y=1/n$，这时成立

$$\left|\int_{n\pi}^{3/2n\pi}\frac{\sin xy}{x}dx\right|>\frac{2}{3\pi}=\varepsilon_0.$$

由 Chauchy 收敛原理知$\int_0^{+\infty}\frac{\sin xy}{x}dx$在$(0,\ +\infty)$上非一致收敛.

数学分析（I）期末试题答案

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

得分	阅卷人

一、选择题（每小题 3 分，共 15 分 ）

1）对函数 $y = x\sin x$ 以下叙述正确的是（　A　）

A、在 $(-\infty,\infty)$ 内无界；　　B、在 $(-\infty,\infty)$ 内有界；

C、当 $x\to\infty$ 时是无穷大；　　D、当 $x\to\infty$ 时极限存在。

2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{|x|} =$（　D　）

A、1；　B、-1；　C、0；　D、不存在。

3）若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且不存在 $\xi\in[a,b]$，使得 $f(\xi)=0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上（　C　）

A 恒正　B 恒负　C 恒正或恒负　D 单调

4）下列函数在 $(0,+\infty)$ 上一致连续的是（　D　）

A $\dfrac{1}{x}$　B x^2　C x^3-1　D $\cos x$

5）设 E 是数轴上一点集，下列叙述正确的是（　D　）

A 若 E 有界，则 E 必有聚点。

B 若 E 为无穷点集，则 E 必有聚点。

C 若存在一个收敛数列 $\{x_n\}\subset E$，则 E 必有聚点。

D 若点 ξ 的任何邻域内都含有 E 中的不同两点，则 ξ 为 E 的一个聚点。

得分	阅卷人

二、填空题（每小题 2 分，共 10 分 ）

1）设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x-2}{x-1} & x\neq 1\\ Ax+1 & x=1\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，则 $A=$ __2__ 。

2）设函数 $f(x)$ 满足：$f^{(m)}(x_0)=0\ (m=1,2,\cdots,2k-1;\ k\in N_+)$ 且 $f^{(2k)}(x_0)<0$，则 x_0 为 f 的极__大__值点。？

3）曲线 $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+2x-3}$ 的斜渐进线方程为：$y=x-2$。

4）设$a>0,b>0$，则$\lim\limits_{x\to 0}(\frac{a^x+b^x}{2})^{\frac{1}{x}}=\sqrt{ab}$。

5）曲线$y=\frac{\pi}{2}+\sin x$在$x=0$处的切线倾角为：$\frac{\pi}{4}$。

得分	阅卷人

三、判断题（每小题2分，共10分）

1）有界性只是数列收敛的必要条件，而非充分条件。（ √ ）

2）$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\Leftrightarrow\forall k\in N_+,\exists N>0,s.t.\forall n>N,$有$|a_n-a|<\frac{1}{k}$.　（ √ ）

3）若f和g都是$x\to x_0$时的无穷大量，则$f+g$是$x\to x_0$时的无穷大量.（ × ）

4）若$\{a_{4k-1}\}$，$\{a_{4k-3}\}$和$\{a_{2k}\}$都收敛，则$\{a_n\}$收敛。（ × ）

5）数列的聚点必为数列的极限.（ × ）

得分	阅卷人

四、叙述题（共10分）

1、叙述$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$的定义.（3分）

解：$\forall M>0,\exists X>0,$当$x>X$时，有$f(x)<-M$成立。

2、正面陈述$f(x)$在区间I上非一致连续定义.（3分）

解：存在某$\varepsilon_0>0,$对任何正数δ（不论δ多么小），总存在两点$x',x''\in I$，尽管$|x'-x''|<\delta,$但有$|f(x')-f(x'')|\geq\varepsilon_0$。

3、正面叙述数列发散的Cauchy准则。（4分）

解：极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在的充要条件是：存在$\varepsilon_0>0,\varepsilon_0>0,$对任何正数$\delta$（不论$\delta$多么小），总存在两点$x',x''\in U^\circ(x_0;\delta)$，使得$|f(x')-f(x'')|\geq\varepsilon_0$。

得分	阅卷人

五、求解题（每小题5分，共20分）

1、$\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x^2-2}{x^2+3})^{x^2}$

解：$\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x^2-2}{x^2+3})^{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{-5}{x^2+3})^{x^2}$

$= \lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{-5}{x^2+3})^{\frac{x^2+3}{-5}\cdot\frac{-5}{x^2+3}\cdot x^2} = e^{-5}$

2、求 $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}} + \frac{1}{12}x^4}{x^6})$

解：$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+o(x^7)$ ，$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2^2 2!}-\frac{x^6}{2^3 3!}+o(x^7)$

所以原式$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}-1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+\frac{x^6}{48}+\frac{x^4}{12}+o(x^7)}{x^6}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{7x^6}{360}+o(x^7)}{x^6}$

$= \frac{7}{360}$

3、设 $f(x)=\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$,求 $f'(x)$

解：$f(x)=\frac{1}{2}(\ln(1+x)-\ln(1-x))$ ，

$f'(x)=\frac{1}{2}(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x})=\frac{1}{x^2-1}$

4、求由参数方程 $\begin{cases} x=\frac{t^2}{2} \\ y=1-t \end{cases}$ 所表示的函数的二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$；

解：$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-1}{t}$ ，$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})=\frac{\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dt})}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{1}{t^2}}{t}=\frac{1}{t^3}$

得分	阅卷人

六、求解题（共 15 分 ）

1、设 $f(x)=\begin{cases} a+e^{\frac{-1}{x}} & x>0 \\ b & x=0 \\ \dfrac{\sin x}{e^x-1} & x<0 \end{cases}$ ，试问

（i）a，b 为何值时 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续?

（ii） $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是否可导?（7 分）

解：$\because \lim\limits_{x\to 0^-} = \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin x}{e^x-1} = \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\cos x}{e^x} = 1$ ，又 $f(x)$ 连续，

$\therefore f(0)=b=1=\lim\limits_{x\to 0^+}(a+e^{\frac{-1}{x}})=a$

又因为 $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1+e^{\frac{-1}{x}}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^{\frac{-1}{x}}}{x^2}=+\infty$ ，

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导，在 $(-\infty,+\infty)$ 也不可导。

2、讨论函数 $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$ 的单调性，凹凸性，拐点及、极值点及极值.（8 分）

解：$f'(x)=\dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}, f''(x)=\dfrac{4x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$ 。

$\therefore f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上单调递增，在 $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ 上单调递减。

在区间 $(-\sqrt{3},0)\cup(\sqrt{3},+\infty)$ 上是凸的，在 $(-\infty,-\sqrt{3})\cup(0,\sqrt{3})$ 上是凹的。

拐点为 $(0,0),(\sqrt{3},\dfrac{\sqrt{3}}{2}),(-\sqrt{3},\dfrac{-\sqrt{3}}{2})$

极值点为（1，1），(-1，-1）

极大值为 1；极小值为-1

得分	阅卷人

七、证明题（共 20 分 ）

1、按定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2}{n^2-4}=3$ （6 分）

证明：不妨设 $n>2$，$\because \left|\dfrac{3n^2}{n^2-4}-3\right|=\left|\dfrac{12}{n^2-4}\right|=\dfrac{12}{n^2-4}$

$\therefore \forall\varepsilon>0,$ 取 $N=[\sqrt{\dfrac{12}{\varepsilon}+4}]+1$ ，则当 $n>N$ 时，有

$$\left|\frac{3n^2}{n^2-4}-3\right|<\varepsilon$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2}{n^2-4}=3$

2、证明：如果 $f(x)$在$[a,+\infty)$上连续，并且$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A,$ 则 $f(x)$ 在$[a,+\infty)$上有界.（6分）

证明：因为$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A,$ 所以取$\varepsilon=1,\exists X>0,$当$x>X$时，有$|f(x)-A|<1$

又 $|f(x)|-|A|<|f(x)-A|<1$，得$|f(x)|<|A|+1$

$f(x)$在$[a,+\infty)$上连续，所以$f(x)$在$[a,X]$上连续，故$f(x)$在$[a,X]$有界。也即：

$\exists M>0'$，使得$|f(x)|<M'$

取$M=\max\{|A|+1,M'\}$，对$\forall x\in[a,+\infty)$，有

$|f(x)|<M$。

3、叙述并证明数列的 Cauchy 收敛准则.（8分）

解:数列$\{a_n\}$收敛的充要条件是：$\forall\varepsilon>0,\exists N>0,$使得对$m,n>N$，有$|a_n-a_m|<\varepsilon$。

证明：[必要性] 设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，由数列收敛定义,

$\forall\varepsilon>0,\exists N>0,$当$m,n>N$时有

$$|a_n-A|<\frac{\varepsilon}{2},\quad |a_m-A|<\frac{\varepsilon}{2}$$

因而 $|a_m-a_n|<|a_m-A|+|a_n-A|<\varepsilon$

[充分性] 按假设$\forall\varepsilon>0,\exists N>0,$使得对一切$n>N,$有$|a_n-a_N|\le\varepsilon$。即在区间$[a_N-\varepsilon,a_N+\varepsilon]$内含有$\{a_n\}$中几乎所有的项。

据此，令$\varepsilon=\frac{1}{2}$，则存在N_1，在区间$[a_{N_1}-\frac{1}{2},a_{N_1}+\frac{1}{2}]$内，含有$\{a_n\}$中几乎所有的项。记这个区间为$[\alpha_1,\beta_1]$。

再令$\varepsilon=\frac{1}{2^2}$，则存在$N_2(>N_1)$，在区间$[a_{N_2}-\frac{1}{2^2},a_{N_2}+\frac{1}{2^2}]$内，含有$\{a_n\}$中几乎所有的项。记$[\alpha_2,\beta_2]$=$[a_{N_2}-\frac{1}{2^2},a_{N_2}+\frac{1}{2^2}]\cap[\alpha_1,\beta_1]$。

它也含有$\{a_n\}$中几乎所有的项，且满足$[\alpha_1,\beta_1]\supset[\alpha_2,\beta_2],\beta_2-\alpha_2\le\frac{1}{2}$。

继续依次令$\varepsilon=\frac{1}{2^3},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots,$照以上方法能得到一闭区间列$\{[\alpha_n,\beta_n]\}$，

其中每一个区间都含有$\{a_n\}$中几乎所有的项，且满足

$$[\alpha_n,\beta_n]\supset[\alpha_{n+1},\beta_{n+1}],n=1,2,\cdots,$$

$$\beta_n-\alpha_n\le\frac{1}{2^{n-1}}\to 0,(n\to\infty)$$
。

即 $\{[\alpha_n,\beta_n]\}$ 是区间套。由区间套定理，存在唯一的一个数 $\xi\in[\alpha_n,\beta_n],n=1,2,\cdots,$

现在证明数ξ就是数列$\{a_n\}$的极限。

事实上，对$\forall\varepsilon>0,\exists N>0$，使得当$n>N$时有

$$[\alpha_n,\beta_n]\subset U(\xi;\varepsilon)$$

因此在$U(\xi;\varepsilon)$内含有$\{a_n\}$中除有限项外的所有项，这就证的$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\xi.$