

# Satisfiability Checking

## 06 SAT solving examples

Prof. Dr. Erika Ábrahám

RWTH Aachen University  
Informatik 2  
LuFG Theory of Hybrid Systems

WS 22/23

# 06 SAT solving examples

## 1 Example 1

## 2 Example 2

# SAT solving: Example1

- We use DPLL+CDCL SAT solving combining enumeration, propagation and resolution.
- We use watched literals (underlined in formulas) to speed up propagation.
- We use VSIDS as variable ordering heuristics and assign the value *false* to decision variables.
- In VSIDS, to order variables with the same activity value, we use the lexicographic order; in our example this will be  $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ .

# Example 1

$$c_1 : (\underline{x_1} \vee \underline{x_2} \vee x_4) \wedge c_2 : (\underline{x_2} \vee \neg \underline{x_4}) \wedge c_3 : (\underline{x_1} \vee \neg \underline{x_2} \vee x_4) \wedge c_4 : (\underline{x_3} \vee \neg \underline{x_4})$$

Watch lists:

$x_1 :$   $c_1, c_3$   
 $\neg x_1 :$   
 $x_2 :$   $c_1, c_2$   
 $\neg x_2 :$   $c_3$   
 $x_3 :$   $c_4$   
 $\neg x_3 :$   
 $x_4 :$   
 $\neg x_4 :$   $c_2, c_4$

Activities

(increment=1):

$x_1$	0
$x_2$	0
$x_3$	0
$x_4$	0

Trail:

# Example 1

$$c_1 : (\underline{x_1} \vee \underline{x_2} \vee x_4) \wedge c_2 : (\underline{x_2} \vee \underline{\neg x_4}) \wedge c_3 : (\underline{x_1} \vee \underline{\neg x_2} \vee x_4) \wedge c_4 : (\underline{x_3} \vee \underline{\neg x_4})$$

Watch lists:

$x_1$  :  $c_1, c_3$   
 $\neg x_1$  :  
 $x_2$  :  $c_1, c_2$   
 $\neg x_2$  :  $c_3$   
 $x_3$  :  $c_4$   
 $\neg x_3$  :  
 $x_4$  :  
 $\neg x_4$  :  $c_2, c_4$

Activities

(increment=1):

$x_1$  0  
 $x_2$  0  
 $x_3$  0  
 $x_4$  0

Trail:

DL1:  $\neg x_1$  : NULL

Decide  $\neg x_1$

# Example 1

$$c_1 : (\underline{x_1} \vee \underline{x_2} \vee x_4) \wedge c_2 : (\underline{x_2} \vee \underline{\neg x_4}) \wedge c_3 : (\underline{x_1} \vee \underline{\neg x_2} \vee x_4) \wedge c_4 : (\underline{x_3} \vee \underline{\neg x_4})$$

Watch lists:

$x_1$  :  $c_1, c_3$   
 $\neg x_1$  :  
 $x_2$  :  $c_1, c_2$   
 $\neg x_2$  :  $c_3$   
 $x_3$  :  $c_4$   
 $\neg x_3$  :  
 $x_4$  :  
 $\neg x_4$  :  $c_2, c_4$

Propagate  $\neg x_1$  in

Activities

(increment=1):

$x_1$  0  
 $x_2$  0  
 $x_3$  0  
 $x_4$  0

Trail:

DL1:  $\neg x_1$  : NULL

# Example 1

$$c_1 : (\underline{x_1} \vee \underline{x_2} \vee x_4) \wedge c_2 : (\underline{x_2} \vee \underline{\neg x_4}) \wedge c_3 : (\underline{x_1} \vee \underline{\neg x_2} \vee x_4) \wedge c_4 : (\underline{x_3} \vee \underline{\neg x_4})$$

Watch lists:

$x_1$  :  $c_1, c_3$   
 $\neg x_1$  :  
 $x_2$  :  $c_1, c_2$   
 $\neg x_2$  :  $c_3$   
 $x_3$  :  $c_4$   
 $\neg x_3$  :  
 $x_4$  :  
 $\neg x_4$  :  $c_2, c_4$

Activities

(increment=1):

$x_1$  0  
 $x_2$  0  
 $x_3$  0  
 $x_4$  0

Trail:

DL1:  $\neg x_1$  : NULL

Propagate  $\neg x_1$  in  $c_1 : (\underline{x_1} \vee \underline{x_2} \vee x_4)$

# Example 1

$$c_1 : (x_1 \vee \underline{x_2} \vee \underline{x_4}) \wedge c_2 : (\underline{x_2} \vee \neg \underline{x_4}) \wedge c_3 : (\underline{x_1} \vee \neg \underline{x_2} \vee x_4) \wedge c_4 : (\underline{x_3} \vee \neg \underline{x_4})$$

Watch lists:

Activities

Trail:

(increment=1):

$x_1$  :  ~~$c_1$~~ ,  $c_3$

DL1:  $\neg x_1$  : NULL

$\neg x_1$  : *change watched literal*  $x_1$  0

$x_2$  :  $c_1, c_2$   $x_2$  0

$\neg x_2$  :  $c_3$   $x_3$  0

$x_3$  :  $c_4$   $x_4$  0

$\neg x_3$  :

$x_4$  :  $c_1$

$\neg x_4$  :  $c_2, c_4$

Propagate  $\neg x_1$  in  $c_1 : (\underline{x_1} \vee \underline{x_2} \vee \underline{x_4}) \rightarrow (\underline{x_1} \vee \underline{x_2} \vee \underline{x_4})$



# Example 1

$$c_1 : (x_1 \vee \underline{x_2} \vee \underline{x_4}) \wedge c_2 : (\underline{x_2} \vee \underline{\neg x_4}) \wedge c_3 : (\underline{x_1} \vee \underline{\neg x_2} \vee x_4) \wedge c_4 : (\underline{x_3} \vee \underline{\neg x_4})$$

Watch lists:

$x_1$  :  ~~$c_1$~~ ,  $c_3$

$\neg x_1$  :

$x_2$  :  $c_1, c_2$

$\neg x_2$  :  $c_3$

$x_3$  :  $c_4$

$\neg x_3$  :

$x_4$  :  $c_1$

$\neg x_4$  :  $c_2, c_4$

Propagate  $\neg x_1$  in  $c_3 : (\underline{x_1} \vee \underline{\neg x_2} \vee x_4)$

Activities

(increment=1):

$x_1$  0

$x_2$  0

$x_3$  0

$x_4$  0

Trail:

DL1:  $\neg x_1$  : NULL

# Example 1

$$c_1 : (x_1 \vee \underline{x_2} \vee \underline{x_4}) \wedge c_2 : (\underline{x_2} \vee \neg \underline{x_4}) \wedge c_3 : (x_1 \vee \neg \underline{x_2} \vee \underline{x_4}) \wedge c_4 : (\underline{x_3} \vee \neg \underline{x_4})$$

Watch lists:

$x_1$  :  ~~$c_1$~~ ,  $c_3$   
 $\neg x_1$  :  
 $x_2$  :  $c_1, c_2$   
 $\neg x_2$  :  $c_3$   
 $x_3$  :  $c_4$   
 $\neg x_3$  :  
 $x_4$  :  $c_1, c_3$   
 $\neg x_4$  :  $c_2, c_4$

Propagate  $\neg x_1$  in

Activities

(increment=1):

$x_1$  0  
 $x_2$  0  
 $x_3$  0  
 $x_4$  0

Trail:

DL1:  $\neg x_1$  : NULL

$$c_3 : (\underline{x_1} \vee \neg \underline{x_2} \vee \underline{x_4}) \rightarrow (x_1 \vee \neg \underline{x_2} \vee \underline{x_4})$$

# Example 1

$$c_1 : (x_1 \vee \underline{x_2} \vee \underline{x_4}) \wedge c_2 : (\underline{x_2} \vee \underline{\neg x_4}) \wedge c_3 : (x_1 \vee \underline{\neg x_2} \vee \underline{x_4}) \wedge c_4 : (\underline{x_3} \vee \underline{\neg x_4})$$

Watch lists:

$x_1$  :  
 $\neg x_1$  :  
 $x_2$  :  $c_1, c_2$   
 $\neg x_2$  :  $c_3$   
 $x_3$  :  $c_4$   
 $\neg x_3$  :  
 $x_4$  :  $c_1, c_3$   
 $\neg x_4$  :  $c_2, c_4$

Activities

(increment=1):

$x_1$  0  
 $x_2$  0  
 $x_3$  0  
 $x_4$  0

Trail:

DL1:  $\neg x_1$  : NULL

DL2:  $\neg x_2$  : NULL

Decide  $\neg x_2$

# Example 1

$$c_1 : (x_1 \vee \underline{x_2} \vee \underline{x_4}) \wedge c_2 : (\underline{x_2} \vee \underline{\neg x_4}) \wedge c_3 : (x_1 \vee \underline{\neg x_2} \vee \underline{x_4}) \wedge c_4 : (\underline{x_3} \vee \underline{\neg x_4})$$

Watch lists:

$x_1$  :  
 $\neg x_1$  :  
 $x_2$  :  $c_1, c_2$   
 $\neg x_2$  :  $c_3$   
 $x_3$  :  $c_4$   
 $\neg x_3$  :  
 $x_4$  :  $c_1, c_3$   
 $\neg x_4$  :  $c_2, c_4$

Activities

(increment=1):

$x_1$  0  
 $x_2$  0  
 $x_3$  0  
 $x_4$  0

Trail:

DL1:  $\neg x_1$  : NULL

DL2:  $\neg x_2$  : NULL

Propagate  $\neg x_2$  in

# Example 1

$$c_1 : (x_1 \vee \underline{x_2} \vee \underline{x_4}) \wedge c_2 : (\underline{x_2} \vee \neg \underline{x_4}) \wedge c_3 : (x_1 \vee \neg \underline{x_2} \vee \underline{x_4}) \wedge c_4 : (\underline{x_3} \vee \neg \underline{x_4})$$

Watch lists:

$x_1$  :  
 $\neg x_1$  :  
 $x_2$  :  $c_1, c_2$   
 $\neg x_2$  :  $c_3$   
 $x_3$  :  $c_4$   
 $\neg x_3$  :  
 $x_4$  :  $c_1, c_3$   
 $\neg x_4$  :  $c_2, c_4$

Activities

(increment=1):

$x_1$  0  
 $x_2$  0  
 $x_3$  0  
 $x_4$  0

Trail:

DL1:  $\neg x_1$  : NULL

DL2:  $\neg x_2$  : NULL

Propagate  $\neg x_2$  in  $c_1 : (x_1 \vee \underline{x_2} \vee \underline{x_4})$

# Example 1

$$c_1 : (x_1 \vee \underline{x_2} \vee \underline{x_4}) \wedge c_2 : (\underline{x_2} \vee \neg \underline{x_4}) \wedge c_3 : (x_1 \vee \neg \underline{x_2} \vee \underline{x_4}) \wedge c_4 : (\underline{x_3} \vee \neg \underline{x_4})$$

Watch lists:

$x_1$  :  
 $\neg x_1$  :  
 $x_2$  :  $c_1, c_2$   
 $\neg x_2$  :  $c_3$   
 $x_3$  :  $c_4$   
 $\neg x_3$  :  
 $x_4$  :  $c_1, c_3$   
 $\neg x_4$  :  $c_2, c_4$

Activities

(increment=1):

$x_1$  0  
 $x_2$  0  
 $x_3$  0  
 $x_4$  0

Trail:

DL1:  $\neg x_1$  : NULL

DL2:  $\neg x_2$  : NULL

$x_4$  :  $c_1$

Propagate  $\neg x_2$  in

$c_1 : (x_1 \vee \underline{x_2} \vee \underline{x_4}) \rightarrow$  *unit clause* Assign  $x_4$   $x_4 = \text{True}$

# Example 1

$$c_1 : (x_1 \vee \underline{x_2} \vee \underline{x_4}) \wedge c_2 : (\underline{x_2} \vee \neg \underline{x_4}) \wedge c_3 : (x_1 \vee \neg \underline{x_2} \vee \underline{x_4}) \wedge c_4 : (\underline{x_3} \vee \neg \underline{x_4})$$

Watch lists:

$x_1$  :  
 $\neg x_1$  :  
 $x_2$  :  $c_1, c_2$   
 $\neg x_2$  :  $c_3$   
 $x_3$  :  $c_4$   
 $\neg x_3$  :  
 $x_4$  :  $c_1, c_3$   
 $\neg x_4$  :  $c_2, c_4$

Propagate  $\neg x_2$  in

Activities

(increment=1):

$x_1$  0  
 $x_2$  0  
 $x_3$  0  
 $x_4$  0

Trail:

DL1:  $\neg x_1$  : NULL  
DL2:  $\neg x_2$  : NULL  
 $x_4$  :  $c_1$

代表不受约束  
↑

或 nil  
或 nil

$c_2 : (\underline{x_2} \vee \neg \underline{x_4})$

# Example 1

$$c_1 : (x_1 \vee \underline{x_2} \vee \underline{x_4}) \wedge c_2 : (\underline{x_2} \vee \neg \underline{x_4}) \wedge c_3 : (x_1 \vee \neg \underline{x_2} \vee \underline{x_4}) \wedge c_4 : (\underline{x_3} \vee \neg \underline{x_4})$$

Watch lists:

$x_1$  :  
 $\neg x_1$  :  
 $x_2$  :  $c_1, c_2$   
 $\neg x_2$  :  $c_3$   
 $x_3$  :  $c_4$   
 $\neg x_3$  :  
 $x_4$  :  $c_1, c_3$   
 $\neg x_4$  :  $c_2, c_4$

Activities

(increment=1):

$x_1$  0  
 $x_2$  0  
 $x_3$  0  
 $x_4$  0

Trail:

DL1:  $\neg x_1$  : NULL  
DL2:  $\neg x_2$  : NULL  
 $x_4$  :  $c_1$

Propagate  $\neg x_2$  in

$c_2 : (\underline{x_2} \vee \neg \underline{x_4}) \rightarrow \nexists \text{conflict!}$



# Example 1

$$c_1 : (x_1 \vee \underline{x_2} \vee \underline{x_4}) \wedge c_2 : (\underline{x_2} \vee \underline{\neg x_4}) \wedge c_3 : (x_1 \vee \underline{\neg x_2} \vee \underline{x_4}) \wedge c_4 : (\underline{x_3} \vee \underline{\neg x_4})$$

Watch lists:

$x_1$  :  
 $\neg x_1$  :  
 $x_2$  :  $c_1, c_2$   
 $\neg x_2$  :  $c_3$   
 $x_3$  :  $c_4$   
 $\neg x_3$  :  
 $x_4$  :  $c_1, c_3$   
 $\neg x_4$  :  $c_2, c_4$

Activities

(increment=1):

$x_1$  0  
 $x_2$  0  
 $x_3$  0  
 $x_4$  0

Trail:

DL1:  $\neg x_1$  : NULL  
DL2:  $\neg x_2$  : NULL  
 $x_4$  :  $c_1$

Conflict resolution:

# Example 1

$$c_1 : (\underline{x_1} \vee \underline{x_2} \vee \underline{x_4}) \wedge c_2 : (\underline{x_2} \vee \neg \underline{x_4}) \wedge c_3 : (\underline{x_1} \vee \neg \underline{x_2} \vee \underline{x_4}) \wedge c_4 : (\underline{x_3} \vee \neg \underline{x_4})$$

Watch lists:

$x_1$  :  
 $\neg x_1$  :  
 $x_2$  :  $c_1, c_2$   
 $\neg x_2$  :  $c_3$   
 $x_3$  :  $c_4$   
 $\neg x_3$  :  
 $x_4$  :  $c_1, c_3$   
 $\neg x_4$  :  $c_2, c_4$

*counter*

Activities

(increment=1):

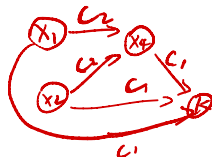
$x_1$	0
$x_2$	0
$x_3$	0
$x_4$	0

Trail:

DL1:  $\neg x_1$  : NULL

DL2:  $\neg x_2$  : NULL

$x_4$  :  $c_1$



Conflict resolution:

$$\frac{\overset{c_2}{(x_2 \vee \neg x_4)} \quad \overset{c_1}{(x_1 \vee x_2 \vee x_4)}}{\underbrace{(x_1 \vee x_2)}_{c_5}}$$

# Example 1

$$c_1 : (x_1 \vee \underline{x_2} \vee \underline{x_4}) \wedge c_2 : (\underline{x_2} \vee \neg \underline{x_4}) \wedge c_3 : (x_1 \vee \neg \underline{x_2} \vee \underline{x_4}) \wedge c_4 : (\underline{x_3} \vee \neg \underline{x_4}) \wedge c_5 : (x_1 \vee x_2)$$

↑  
该回到  $x_1$

Watch lists:

$x_1$  :  $c_5$   
 $\neg x_1$  :  
 $x_2$  :  $c_1, c_2, c_5$   
 $\neg x_2$  :  $c_3$   
 $x_3$  :  $c_4$   
 $\neg x_3$  :  
 $x_4$  :  $c_1, c_3$   
 $\neg x_4$  :  $c_2, c_4$

Add conflict clause

Activities

(increment=2): ← 这次冲突中出现为增加1, 在 conflict 中出现, 则增加 activities

$x_1$  1  
 $x_2$  1  
 $x_3$  0  
 $x_4$  1

Trail:

DL1:  $\neg x_1$  : NULL 下次出现为增加2  
DL2:  $\neg x_2$  : NULL 下次出现为增加2  
 $x_4$  :  $c_1$

# Example 1

回到  $x_1$  的 assignment 阶段

$$c_1 : (x_1 \vee \underline{x_2} \vee \underline{x_4}) \wedge c_2 : (\underline{x_2} \vee \neg \underline{x_4}) \wedge c_3 : (x_1 \vee \neg \underline{x_2} \vee \underline{x_4}) \wedge c_4 : (\underline{x_3} \vee \neg \underline{x_4}) \wedge c_5 : (x_1 \vee x_2)$$

Watch lists:

$x_1$  :  $c_5$   
 $\neg x_1$  :  
 $x_2$  :  $c_1, c_2, c_5$   
 $\neg x_2$  :  $c_3$   
 $x_3$  :  $c_4$   
 $\neg x_3$  :  
 $x_4$  :  $c_1, c_3$   
 $\neg x_4$  :  $c_2, c_4$

Activities

(increment=2):

$x_1$	1
$x_2$	1
$x_3$	0
$x_4$	1

Trail:

DL1:  $\neg x_1$  : NULL

Backtrack to DL1

# Example 1

$$c_1 : (x_1 \vee \underline{x_2} \vee \underline{x_4}) \wedge c_2 : (\underline{x_2} \vee \underline{\neg x_4}) \wedge c_3 : (x_1 \vee \underline{\neg x_2} \vee \underline{x_4}) \wedge c_4 : (\underline{x_3} \vee \underline{\neg x_4}) \wedge c_5 : (x_1 \vee x_2)$$

Watch lists:

$x_1$  :  $c_5$   
 $\neg x_1$  :  
 $x_2$  :  $c_1, c_2, c_5$   
 $\neg x_2$  :  $c_3$   
 $x_3$  :  $c_4$   
 $\neg x_3$  :  
 $x_4$  :  $c_1, c_3$   
 $\neg x_4$  :  $c_2, c_4$

Assign  $x_2$  at DL1 by  $c_5$

Activities

(increment=2):

$x_1$  1  
 $x_2$  1  
 $x_3$  0  
 $x_4$  1

Trail:

DL1:  $\neg x_1$  : NULL  
 $x_2$  :  $c_5$

# Example 1

$$c_1 : (x_1 \vee \underline{x_2} \vee \underline{x_4}) \wedge c_2 : (\underline{x_2} \vee \underline{\neg x_4}) \wedge c_3 : (x_1 \vee \underline{\neg x_2} \vee \underline{x_4}) \wedge c_4 : (\underline{x_3} \vee \underline{\neg x_4}) \wedge c_5 : (x_1 \vee x_2)$$

Watch lists:

$x_1 : c_5$   
 $\neg x_1 :$   
 $x_2 : c_1, c_2, c_5$   
 $\neg x_2 : c_3$   
 $x_3 : c_4$   
 $\neg x_3 :$   
 $x_4 : c_1, c_3$   
 $\neg x_4 : c_2, c_4$

Activities

(increment=2):

$x_1 \quad 1$   
 $x_2 \quad 1$   
 $x_3 \quad 0$   
 $x_4 \quad 1$

Trail:

DL1:  $\neg x_1 : \text{NULL}$   
 $x_2 : c_5$

Propagate  $x_2$  in

# Example 1

$$c_1 : (x_1 \vee \underline{x_2} \vee \underline{x_4}) \wedge c_2 : (\underline{x_2} \vee \underline{\neg x_4}) \wedge c_3 : (x_1 \vee \underline{\neg x_2} \vee \underline{x_4}) \wedge c_4 : (\underline{x_3} \vee \underline{\neg x_4}) \wedge c_5 : (x_1 \vee x_2)$$

Watch lists:

$x_1$  :  $c_5$   
 $\neg x_1$  :  
 $x_2$  :  $c_1, c_2, c_5$   
 $\neg x_2$  :  $c_3$   
 $x_3$  :  $c_4$   
 $\neg x_3$  :  
 $x_4$  :  $c_1, c_3$   
 $\neg x_4$  :  $c_2, c_4$

Activities

(increment=2):

$x_1$  1  
 $x_2$  1  
 $x_3$  0  
 $x_4$  1

Trail:

DL1:  $\neg x_1$  : NULL  
 $x_2$  :  $c_5$

Propagate  $x_2$  in  $c_3 : (x_1 \vee \underline{\neg x_2} \vee \underline{x_4})$

# Example 1

$$c_1 : (x_1 \vee \underline{x_2} \vee \underline{x_4}) \wedge c_2 : (\underline{x_2} \vee \underline{\neg x_4}) \wedge c_3 : (x_1 \vee \underline{\neg x_2} \vee \underline{x_4}) \wedge c_4 : (\underline{x_3} \vee \underline{\neg x_4}) \wedge c_5 : (x_1 \vee x_2)$$

Watch lists:

$x_1$  :  $c_5$   
 $\neg x_1$  :  
 $x_2$  :  $c_1, c_2, c_5$   
 $\neg x_2$  :  $c_3$   
 $x_3$  :  $c_4$   
 $\neg x_3$  :  
 $x_4$  :  $c_1, c_3$   
 $\neg x_4$  :  $c_2, c_4$

Activities

(increment=2):

$x_1$  1  
 $x_2$  1  
 $x_3$  0  
 $x_4$  1

Trail:

DL1:  $\neg x_1$  : NULL  
 $x_2$  :  $c_5$   
 $x_4$  :  $c_3$

Propagate  $x_2$  in  $c_3 : (x_1 \vee \underline{\neg x_2} \vee \underline{x_4}) \rightarrow$  Assign  $x_4$



# Example 1

$$c_1 : (x_1 \vee \underline{x_2} \vee \underline{x_4}) \wedge c_2 : (\underline{x_2} \vee \underline{\neg x_4}) \wedge c_3 : (x_1 \vee \underline{\neg x_2} \vee \underline{x_4}) \wedge c_4 : (\underline{x_3} \vee \underline{\neg x_4}) \wedge c_5 : (x_1 \vee x_2)$$

Watch lists:

$x_1 : c_5$   
 $\neg x_1 :$   
 $x_2 : c_1, c_2, c_5$   
 $\neg x_2 : c_3$   
 $x_3 : c_4$   
 $\neg x_3 :$   
 $x_4 : c_1, c_3$   
 $\neg x_4 : c_2, c_4$

Propagate  $x_4$  in

Activities

(increment=2):

$x_1 \quad 1$   
 $x_2 \quad 1$   
 $x_3 \quad 0$   
 $x_4 \quad 1$

Trail:

DL1:  $\neg x_1 : \text{NULL}$   
 $x_2 : c_5$   
 $x_4 : c_3$

# Example 1

$$c_1 : (x_1 \vee \underline{x_2} \vee \underline{x_4}) \wedge c_2 : (\underline{x_2} \vee \underline{\neg x_4}) \wedge c_3 : (x_1 \vee \underline{\neg x_2} \vee \underline{x_4}) \wedge c_4 : (\underline{x_3} \vee \underline{\neg x_4}) \wedge c_5 : (x_1 \vee x_2)$$

Watch lists:

$x_1$  :  $c_5$   
 $\neg x_1$  :  
 $x_2$  :  $c_1, c_2, c_5$   
 $\neg x_2$  :  $c_3$   
 $x_3$  :  $c_4$   
 $\neg x_3$  :  
 $x_4$  :  $c_1, c_3$   
 $\neg x_4$  :  $c_2, c_4$

Activities

(increment=2):

$x_1$  1  
 $x_2$  1  
 $x_3$  0  
 $x_4$  1

Trail:

DL1:  $\neg x_1$  : NULL  
 $x_2$  :  $c_5$   
 $x_4$  :  $c_3$

Propagate  $x_4$  in  $c_2 : (\underline{x_2} \vee \underline{\neg x_4})$

# Example 1

$$c_1 : (x_1 \vee \underline{x_2} \vee \underline{x_4}) \wedge c_2 : (\underline{x_2} \vee \underline{\neg x_4}) \wedge c_3 : (x_1 \vee \underline{\neg x_2} \vee \underline{x_4}) \wedge c_4 : (\underline{x_3} \vee \underline{\neg x_4}) \wedge c_5 : (x_1 \vee x_2)$$

Watch lists:

$x_1$  :  $c_5$   
 $\neg x_1$  :  
 $x_2$  :  $c_1, c_2, c_5$   
 $\neg x_2$  :  $c_3$   
 $x_3$  :  $c_4$   
 $\neg x_3$  :  
 $x_4$  :  $c_1, c_3$   
 $\neg x_4$  :  $c_2, c_4$

Activities

(increment=2):

$x_1$  1  
 $x_2$  1  
 $x_3$  0  
 $x_4$  1

Trail:

DL1:  $\neg x_1$  : NULL  
 $x_2$  :  $c_5$   
 $x_4$  :  $c_3$

Propagate  $x_4$  in  $c_2 : (\underline{x_2} \vee \underline{\neg x_4}) \rightarrow \text{O.K.}$

# Example 1

$$c_1 : (x_1 \vee \underline{x_2} \vee \underline{x_4}) \wedge c_2 : (\underline{x_2} \vee \underline{\neg x_4}) \wedge c_3 : (x_1 \vee \underline{\neg x_2} \vee \underline{x_4}) \wedge c_4 : (\underline{x_3} \vee \underline{\neg x_4}) \wedge c_5 : (x_1 \vee x_2)$$

Watch lists:

$x_1$  :  $c_5$   
 $\neg x_1$  :  
 $x_2$  :  $c_1, c_2, c_5$   
 $\neg x_2$  :  $c_3$   
 $x_3$  :  $c_4$   
 $\neg x_3$  :  
 $x_4$  :  $c_1, c_3$   
 $\neg x_4$  :  $c_2, c_4$

Activities

(increment=2):

$x_1$  1  
 $x_2$  1  
 $x_3$  0  
 $x_4$  1

Trail:

DL1:  $\neg x_1$  : NULL  
 $x_2$  :  $c_5$   
 $x_4$  :  $c_3$

Propagate  $x_4$  in  $c_4 : (\underline{x_3} \vee \underline{\neg x_4})$

# Example 1

$$c_1 : (x_1 \vee \underline{x_2} \vee \underline{x_4}) \wedge c_2 : (\underline{x_2} \vee \underline{\neg x_4}) \wedge c_3 : (x_1 \vee \underline{\neg x_2} \vee \underline{x_4}) \wedge c_4 : (\underline{x_3} \vee \underline{\neg x_4}) \wedge c_5 : (x_1 \vee x_2)$$

Watch lists:

$x_1$  :  $c_5$   
 $\neg x_1$  :  
 $x_2$  :  $c_1, c_2, c_5$   
 $\neg x_2$  :  $c_3$   
 $x_3$  :  $c_4$   
 $\neg x_3$  :  
 $x_4$  :  $c_1, c_3$   
 $\neg x_4$  :  $c_2, c_4$

Activities

(increment=2):

$x_1$  1  
 $x_2$  1  
 $x_3$  0  
 $x_4$  1

Trail:

DL1:  $\neg x_1$  : NULL  
 $x_2$  :  $c_5$   
 $x_4$  :  $c_3$   
 $x_3$  :  $c_4$

Propagate  $x_4$  in  $c_4 : (\underline{x_3} \vee \underline{\neg x_4}) \rightarrow$  Assign  $x_3$

# Example 1

$$c_1 : (x_1 \vee \underline{x_2} \vee \underline{x_4}) \wedge c_2 : (\underline{x_2} \vee \underline{\neg x_4}) \wedge c_3 : (x_1 \vee \underline{\neg x_2} \vee \underline{x_4}) \wedge c_4 : (\underline{x_3} \vee \underline{\neg x_4}) \wedge c_5 : (x_1 \vee x_2)$$

Watch lists:

$x_1 : c_5$   
 $\neg x_1 :$   
 $x_2 : c_1, c_2, c_5$   
 $\neg x_2 : c_3$   
 $x_3 : c_4$   
 $\neg x_3 :$   
 $x_4 : c_1, c_3$   
 $\neg x_4 : c_2,$

Activities

(increment=2):

$x_1 \quad 1$   
 $x_2 \quad 1$   
 $x_3 \quad 0$   
 $x_4 \quad 1$

Trail:

DL1:  $\neg x_1 : \text{NULL}$   
 $x_2 : c_5$   
 $x_4 : c_3$   
 $x_3 : c_4$

→ SAT

## Bonus exercise 8

Assume the following propositional logic formula in CNF:

$$\underbrace{(C \vee \neg D)}_{c_0} \wedge \underbrace{(A \vee \neg B \vee \neg D)}_{c_1} \wedge \underbrace{(\neg A \vee \neg B \vee \neg C \vee \neg D)}_{c_2} \wedge \underbrace{(A \vee D)}_{c_3}$$

Apply the DPLL+CDCL algorithm until it detects either a conflict or a complete solution. For a decision, always take the smallest unassigned variable in the order  $A < B < C < D$  and assign false to it.

At the first conflict or full solution, how many variables are assigned the value true?

DL0: — 没有只有1个 literal 的 clause

DL1:  $\neg A$ : NULL

D: C3

C: D0

$\neg B$ : C1

答案为 2

Assume the following propositional logic formula in CNF:

$$(\overset{0}{A} \vee \overset{1}{B} \vee \overset{1}{\neg D}) \wedge (\overset{1}{B} \vee \overset{0}{D}) \wedge (\overset{0}{A} \vee \overset{1}{\neg D}) \wedge (\overset{1}{\neg A} \vee \overset{1}{C} \vee \overset{1}{\neg D})$$

Apply the DPLL+CDCL algorithm until it detects either a conflict or all variables are assigned and the formula is satisfied. For a decision, always take the smallest unassigned variable in the order  $A < B < C < D$  and assign false to it.

At the first conflict or full solution, how many variables are assigned the value true? Please answer by writing the number using digits without whitespaces.

DLO: -

DL1:  $\neg A$ : NULL  $\neg D$ : C2 B: C1

Answer:

1

Finish attempt ...



# 06 SAT solving examples

## 1 Example 1

## 2 Example 2

## SAT solving: Example 2

- We use DPLL+CDCL SAT solving combining enumeration, propagation and resolution.
- We use watched literals (underlined in formulas) to speed up propagation.
- We use VSIDS as variable ordering heuristics and assign the value *false* to decision variables.
- In VSIDS, to order variables with the same activity value, we use the lexicographic order; in our example this will be  $a < b < c < d$ .

# Example

$$c_1 : (a \vee b \vee \neg c) \wedge c_2 : (b \vee c) \wedge c_3 : (\neg a \vee b \vee \neg c) \wedge c_4 : (a \vee \neg b \vee c) \wedge \\ c_5 : (a \vee \neg c \vee d) \wedge c_6 : (\neg c \vee \neg d)$$

## Example – Watchlists

$$c_1 : (a \vee b \vee \neg c) \wedge c_2 : (b \vee c) \wedge c_3 : (\neg a \vee b \vee \neg c) \wedge c_4 : (a \vee \neg b \vee c) \wedge \\ c_5 : (a \vee \neg c \vee d) \wedge c_6 : (\neg c \vee \neg d)$$

Watch lists:

$a :$

$\neg a :$

$b :$

$\neg b :$

$c :$

$\neg c :$

$d :$

$\neg d :$

## Example – Watchlists

$$c_1 : (\underline{a} \vee \underline{b} \vee \neg c) \wedge c_2 : (b \vee c) \wedge c_3 : (\neg a \vee b \vee \neg c) \wedge c_4 : (a \vee \neg b \vee c) \wedge \\ c_5 : (a \vee \neg c \vee d) \wedge c_6 : (\neg c \vee \neg d)$$

Watch lists:

$a : c_1$

$\neg a :$

$b : c_1$

$\neg b :$

$c :$

$\neg c :$

$d :$

$\neg d :$

## Example – Watchlists

$$c_1 : (\underline{a} \vee \underline{b} \vee \neg c) \wedge c_2 : (\underline{b} \vee \underline{c}) \wedge c_3 : (\neg a \vee b \vee \neg c) \wedge c_4 : (a \vee \neg b \vee c) \wedge \\ c_5 : (a \vee \neg c \vee d) \wedge c_6 : (\neg c \vee \neg d)$$

Watch lists:

$a : c_1$

$\neg a :$

$b : c_1, c_2$

$\neg b :$

$c : c_2$

$\neg c :$

$d :$

$\neg d :$

## Example – Watchlists

$$c_1 : (\underline{a} \vee \underline{b} \vee \neg c) \wedge c_2 : (\underline{b} \vee \underline{c}) \wedge c_3 : (\neg \underline{a} \vee \underline{b} \vee \neg c) \wedge c_4 : (a \vee \neg b \vee c) \wedge \\ c_5 : (a \vee \neg c \vee d) \wedge c_6 : (\neg c \vee \neg d)$$

Watch lists:

$a : c_1$

$\neg a : c_3$

$b : c_1, c_2, c_3$

$\neg b :$

$c : c_2$

$\neg c :$

$d :$

$\neg d :$

## Example – Watchlists

$$c_1 : (\underline{a} \vee \underline{b} \vee \neg c) \wedge c_2 : (\underline{b} \vee \underline{c}) \wedge c_3 : (\neg \underline{a} \vee \underline{b} \vee \neg c) \wedge c_4 : (\underline{a} \vee \neg \underline{b} \vee c) \wedge \\ c_5 : (a \vee \neg c \vee d) \wedge c_6 : (\neg c \vee \neg d)$$

Watch lists:

$$a : c_1, c_4$$

$$\neg a : c_3$$

$$b : c_1, c_2, c_3$$

$$\neg b : c_4$$

$$c : c_2$$

$$\neg c :$$

$$d :$$

$$\neg d :$$



## Example – Watchlists

$$c_1 : (\underline{a} \vee \underline{b} \vee \neg c) \wedge c_2 : (\underline{b} \vee \underline{c}) \wedge c_3 : (\neg \underline{a} \vee \underline{b} \vee \neg c) \wedge c_4 : (\underline{a} \vee \neg \underline{b} \vee c) \wedge \\ c_5 : (\underline{a} \vee \neg \underline{c} \vee d) \wedge c_6 : (\neg c \vee \neg d)$$

Watch lists:

$$a : c_1, c_4, c_5$$

$$\neg a : c_3$$

$$b : c_1, c_2, c_3$$

$$\neg b : c_4$$

$$c : c_2$$

$$\neg c : c_5$$

$$d :$$

$$\neg d :$$

## Example – Watchlists

$$\begin{aligned} c_1 : (\underline{a} \vee \underline{b} \vee \neg c) \wedge c_2 : (\underline{b} \vee \underline{c}) \wedge c_3 : (\neg \underline{a} \vee \underline{b} \vee \neg c) \wedge c_4 : (\underline{a} \vee \neg \underline{b} \vee c) \wedge \\ c_5 : (\underline{a} \vee \neg \underline{c} \vee d) \wedge c_6 : (\neg \underline{c} \vee \neg \underline{d}) \end{aligned}$$

Watch lists:

$$\begin{aligned} a : & c_1, c_4, c_5 \\ \neg a : & c_3 \\ b : & c_1, c_2, c_3 \\ \neg b : & c_4 \\ c : & c_2 \\ \neg c : & c_5, c_6 \\ d : & \\ \neg d : & c_6 \end{aligned}$$

## Example – Activities

$$c_1 : (\underline{a} \vee \underline{b} \vee \neg c) \wedge c_2 : (\underline{b} \vee \underline{c}) \wedge c_3 : (\neg \underline{a} \vee \underline{b} \vee \neg c) \wedge c_4 : (\underline{a} \vee \neg \underline{b} \vee c) \wedge \\ c_5 : (\underline{a} \vee \neg \underline{c} \vee d) \wedge c_6 : (\neg \underline{c} \vee \neg \underline{d})$$

Watch lists:

$a :$   $c_1, c_4, c_5$   
 $\neg a :$   $c_3$   
 $b :$   $c_1, c_2, c_3$   
 $\neg b :$   $c_4$   
 $c :$   $c_2$   
 $\neg c :$   $c_5, c_6$   
 $d :$   
 $\neg d :$   $c_6$

Activities

(increment=1):

$a$  0  
 $b$  0  
 $c$  0  
 $d$  0

## SAT solving: Example 2

$$c_1 : (\underline{a} \vee \underline{b} \vee \neg c) \wedge c_2 : (\underline{b} \vee \underline{c}) \wedge c_3 : (\neg \underline{a} \vee \underline{b} \vee \neg c) \wedge c_4 : (\underline{a} \vee \neg \underline{b} \vee c) \wedge \\ c_5 : (\underline{a} \vee \neg \underline{c} \vee d) \wedge c_6 : (\neg \underline{c} \vee \neg \underline{d})$$

Watch lists:

$a$  :  $c_1, c_4, c_5$   
 $\neg a$  :  $c_3$   
 $b$  :  $c_1, c_2, c_3$   
 $\neg b$  :  $c_4$   
 $c$  :  $c_2$   
 $\neg c$  :  $c_5, c_6$   
 $d$  :  
 $\neg d$  :  $c_6$

Activities

(increment=1):

$a$  0  
 $b$  0  
 $c$  0  
 $d$  0

Trail:

# SAT solving: Example 2

$$c_1 : (\underline{a} \vee \underline{b} \vee \neg c) \wedge c_2 : (\underline{b} \vee \underline{c}) \wedge c_3 : (\neg \underline{a} \vee \underline{b} \vee \neg c) \wedge c_4 : (\underline{a} \vee \neg \underline{b} \vee c) \wedge \\ c_5 : (\underline{a} \vee \neg \underline{c} \vee d) \wedge c_6 : (\neg \underline{c} \vee \neg \underline{d})$$

Watch lists:

$a$  :  $c_1, c_4, c_5$   
 $\neg a$  :  $c_3$   
 $b$  :  $c_1, c_2, c_3$   
 $\neg b$  :  $c_4$   
 $c$  :  $c_2$   
 $\neg c$  :  $c_5, c_6$   
 $d$  :  
 $\neg d$  :  $c_6$

Activities

(increment=1):

$a$  0  
 $b$  0  
 $c$  0  
 $d$  0

Trail:

DL1:  $\neg a$  : NULL

Decide  $\neg a$

# SAT solving: Example 2

$$c_1 : (\underline{a} \vee \underline{b} \vee \neg c) \wedge c_2 : (\underline{b} \vee \underline{c}) \wedge c_3 : (\neg \underline{a} \vee \underline{b} \vee \neg c) \wedge c_4 : (\underline{a} \vee \neg \underline{b} \vee c) \wedge \\ c_5 : (\underline{a} \vee \neg \underline{c} \vee d) \wedge c_6 : (\neg \underline{c} \vee \neg \underline{d})$$

Watch lists:

$\underline{a}$  :  $c_1, c_4, c_5$   
 $\neg \underline{a}$  :  $c_3$   
 $\underline{b}$  :  $c_1, c_2, c_3$   
 $\neg \underline{b}$  :  $c_4$   
 $\underline{c}$  :  $c_2$   
 $\neg \underline{c}$  :  $c_5, c_6$   
 $\underline{d}$  :  
 $\neg \underline{d}$  :  $c_6$

Propagate  $\neg \underline{a}$  in

Activities

(increment=1):

$\underline{a}$  0  
 $\underline{b}$  0  
 $\underline{c}$  0  
 $\underline{d}$  0

Trail:

DL1:  $\neg \underline{a}$  : NULL

# SAT solving: Example 2

$$c_1 : (\underline{a} \vee \underline{b} \vee \neg c) \wedge c_2 : (\underline{b} \vee \underline{c}) \wedge c_3 : (\neg \underline{a} \vee \underline{b} \vee \neg c) \wedge c_4 : (\underline{a} \vee \neg \underline{b} \vee c) \wedge \\ c_5 : (\underline{a} \vee \neg \underline{c} \vee d) \wedge c_6 : (\neg \underline{c} \vee \neg \underline{d})$$

Watch lists:

$a$  :  $c_1, c_4, c_5$

$\neg a$  :  $c_3$

$b$  :  $c_1, c_2, c_3$

$\neg b$  :  $c_4$

$c$  :  $c_2$

$\neg c$  :  $c_5, c_6$

$d$  :

$\neg d$  :  $c_6$

Propagate  $\neg a$  in  $c_1 : (\underline{a} \vee \underline{b} \vee \neg c)$

Activities

(increment=1):

$a$  0

$b$  0

$c$  0

$d$  0

Trail:

DL1:  $\neg a$  : NULL

# SAT solving: Example 2

$$c_1 : (a \vee \underline{b} \vee \neg c) \wedge c_2 : (\underline{b} \vee \underline{c}) \wedge c_3 : (\neg a \vee \underline{b} \vee \neg c) \wedge c_4 : (\underline{a} \vee \neg \underline{b} \vee c) \wedge \\ c_5 : (\underline{a} \vee \neg c \vee d) \wedge c_6 : (\neg c \vee \neg d)$$

Watch lists:

$a$  :  ~~$c_1$~~ ,  $c_4$ ,  $c_5$

$\neg a$  :  $c_3$

$b$  :  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$

$\neg b$  :  $c_4$

$c$  :  $c_2$

$\neg c$  :  $c_5$ ,  $c_6$ ,  $c_1$

$d$  :

$\neg d$  :  $c_6$

Activities

(increment=1):

$a$  0

$b$  0

$c$  0

$d$  0

Trail:

DL1:  $\neg a$  : NULL

Propagate  $\neg a$  in  $c_1 : (\underline{a} \vee \underline{b} \vee \neg c) \rightarrow (\underline{a} \vee \underline{b} \vee \neg c)$



# SAT solving: Example 2

$$c_1 : (a \vee \underline{b} \vee \neg c) \wedge c_2 : (\underline{b} \vee \underline{c}) \wedge c_3 : (\neg a \vee \underline{b} \vee \neg c) \wedge c_4 : (\underline{a} \vee \neg \underline{b} \vee c) \wedge \\ c_5 : (\underline{a} \vee \neg c \vee d) \wedge c_6 : (\neg c \vee \neg d)$$

Watch lists:

$a$  :  ~~$c_1$~~ ,  $c_4$ ,  $c_5$   
 $\neg a$  :  $c_3$   
 $b$  :  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$   
 $\neg b$  :  $c_4$   
 $c$  :  $c_2$   
 $\neg c$  :  $c_5$ ,  $c_6$ ,  $c_1$   
 $d$  :  
 $\neg d$  :  $c_6$

Propagate  $\neg a$  in  $c_4 : (\underline{a} \vee \neg \underline{b} \vee c)$

Activities

(increment=1):

$a$  0  
 $b$  0  
 $c$  0  
 $d$  0

Trail:

DL1:  $\neg a$  : NULL

# SAT solving: Example 2

$$c_1 : (a \vee \underline{b} \vee \underline{\neg c}) \wedge c_2 : (\underline{b} \vee \underline{c}) \wedge c_3 : (\underline{\neg a} \vee \underline{b} \vee \neg c) \wedge c_4 : (a \vee \underline{\neg b} \vee \underline{c}) \wedge \\ c_5 : (\underline{a} \vee \underline{\neg c} \vee d) \wedge c_6 : (\underline{\neg c} \vee \underline{\neg d})$$

Watch lists:

$a$  :  ~~$c_1$~~ ,  ~~$c_4$~~ ,  $c_5$

$\neg a$  :  $c_3$

$b$  :  $c_1, c_2, c_3$

$\neg b$  :  $c_4$

$c$  :  $c_2, c_4$

$\neg c$  :  $c_5, c_6, c_1$

$d$  :

$\neg d$  :  $c_6$

Propagate  $\neg a$  in

$$c_4 : (\underline{a} \vee \underline{\neg b} \vee c) \rightarrow (a \vee \underline{\neg b} \vee \underline{c})$$

Activities

(increment=1):

$a$  0

$b$  0

$c$  0

$d$  0

Trail:

DL1:  $\neg a$  : NULL

# SAT solving: Example 2

$$c_1 : (a \vee \underline{b} \vee \neg \underline{c}) \wedge c_2 : (\underline{b} \vee \underline{c}) \wedge c_3 : (\neg \underline{a} \vee \underline{b} \vee \neg c) \wedge c_4 : (a \vee \neg \underline{b} \vee \underline{c}) \wedge \\ c_5 : (\underline{a} \vee \neg \underline{c} \vee d) \wedge c_6 : (\neg \underline{c} \vee \neg \underline{d})$$

Watch lists:

$a$  :  ~~$c_1$~~ ,  ~~$c_4$~~ ,  $c_5$

$\neg a$  :  $c_3$

$b$  :  $c_1, c_2, c_3$

$\neg b$  :  $c_4$

$c$  :  $c_2, c_4$

$\neg c$  :  $c_5, c_6, c_1$

$d$  :

$\neg d$  :  $c_6$

Propagate  $\neg a$  in

$c_5 : (\underline{a} \vee \neg \underline{c} \vee d)$

Activities

(increment=1):

$a$  0

$b$  0

$c$  0

$d$  0

Trail:

DL1:  $\neg a$  : NULL

# SAT solving: Example 2

$$c_1 : (a \vee \underline{b} \vee \underline{\neg c}) \wedge c_2 : (\underline{b} \vee \underline{c}) \wedge c_3 : (\underline{\neg a} \vee \underline{b} \vee \neg c) \wedge c_4 : (a \vee \underline{\neg b} \vee \underline{c}) \wedge \\ c_5 : (a \vee \underline{\neg c} \vee \underline{d}) \wedge c_6 : (\underline{\neg c} \vee \underline{\neg d})$$

Watch lists:

$a$  :  ~~$c_1$~~ ,  ~~$c_4$~~ ,  ~~$c_5$~~   
 $\neg a$  :  $c_3$   
 $b$  :  $c_1, c_2, c_3$   
 $\neg b$  :  $c_4$   
 $c$  :  $c_2, c_4$   
 $\neg c$  :  $c_5, c_6, c_1$   
 $d$  :  $c_5$   
 $\neg d$  :  $c_6$

Propagate  $\neg a$  in

Activities

(increment=1):

$a$  0  
 $b$  0  
 $c$  0  
 $d$  0

Trail:

DL1:  $\neg a$  : NULL

$$c_5 : (\underline{a} \vee \underline{\neg c} \vee \underline{d}) \rightarrow (a \vee \underline{\neg c} \vee \underline{d})$$

## SAT solving: Example 2

$$\begin{aligned} c_1 : (a \vee \underline{b} \vee \neg \underline{c}) \wedge c_2 : (\underline{b} \vee \underline{c}) \wedge c_3 : (\neg \underline{a} \vee \underline{b} \vee \neg c) \wedge c_4 : (a \vee \neg \underline{b} \vee \underline{c}) \wedge \\ c_5 : (a \vee \neg \underline{c} \vee \underline{d}) \wedge c_6 : (\neg \underline{c} \vee \neg \underline{d}) \end{aligned}$$

Watch lists:

$a$  :  
 $\neg a$  :  $c_3$   
 $b$  :  $c_1, c_2, c_3$   
 $\neg b$  :  $c_4$   
 $c$  :  $c_2, c_4$   
 $\neg c$  :  $c_5, c_6, c_1$   
 $d$  :  $c_5$   
 $\neg d$  :  $c_6$

Activities

(increment=1):

$a$  0  
 $b$  0  
 $c$  0  
 $d$  0

Trail:

DL1:  $\neg a$  : NULL

DL2:  $\neg b$  : NULL

Decide  $\neg b$

## SAT solving: Example 2

$$\begin{aligned} c_1 : (a \vee \underline{b} \vee \neg \underline{c}) \wedge c_2 : (\underline{b} \vee \underline{c}) \wedge c_3 : (\neg \underline{a} \vee \underline{b} \vee \neg c) \wedge c_4 : (a \vee \neg \underline{b} \vee \underline{c}) \wedge \\ c_5 : (a \vee \neg \underline{c} \vee \underline{d}) \wedge c_6 : (\neg \underline{c} \vee \neg \underline{d}) \end{aligned}$$

Watch lists:

$a$  :  
 $\neg a$  :  $c_3$   
 $b$  :  $c_1, c_2, c_3$   
 $\neg b$  :  $c_4$   
 $c$  :  $c_2, c_4$   
 $\neg c$  :  $c_5, c_6, c_1$   
 $d$  :  $c_5$   
 $\neg d$  :  $c_6$

Propagate  $\neg b$  in

Activities

(increment=1):

$a$  0  
 $b$  0  
 $c$  0  
 $d$  0

Trail:

DL1:  $\neg a$  : NULL

DL2:  $\neg b$  : NULL

## SAT solving: Example 2

$$c_1 : (a \vee \underline{b} \vee \neg c) \wedge c_2 : (\underline{b} \vee \underline{c}) \wedge c_3 : (\neg a \vee \underline{b} \vee \neg c) \wedge c_4 : (a \vee \neg \underline{b} \vee \underline{c}) \wedge \\ c_5 : (a \vee \neg \underline{c} \vee \underline{d}) \wedge c_6 : (\neg \underline{c} \vee \neg \underline{d})$$

Watch lists:

$a$  :  
 $\neg a$  :  $c_3$   
 $\underline{b}$  :  $c_1, c_2, c_3$   
 $\neg b$  :  $c_4$   
 $c$  :  $c_2, c_4$   
 $\neg c$  :  $c_5, c_6, c_1$   
 $d$  :  $c_5$   
 $\neg d$  :  $c_6$

Activities

(increment=1):

$a$  0  
 $b$  0  
 $c$  0  
 $d$  0

Trail:

DL1:  $\neg a$  : NULL  
DL2:  $\neg \underline{b}$  : NULL

Propagate  $\neg \underline{b}$  in  $c_1 : (a \vee \underline{b} \vee \neg c)$

## SAT solving: Example 2

$$\begin{aligned} c_1 : (a \vee \underline{b} \vee \neg \underline{c}) \wedge c_2 : (\underline{b} \vee \underline{c}) \wedge c_3 : (\neg \underline{a} \vee \underline{b} \vee \neg c) \wedge c_4 : (a \vee \neg \underline{b} \vee \underline{c}) \wedge \\ c_5 : (a \vee \neg \underline{c} \vee \underline{d}) \wedge c_6 : (\neg \underline{c} \vee \neg \underline{d}) \end{aligned}$$

Watch lists:

$a$  :  
 $\neg a$  :  $c_3$   
 $\underline{b}$  :  $c_1, c_2, c_3$   
 $\neg b$  :  $c_4$   
 $c$  :  $c_2, c_4$   
 $\neg c$  :  $c_5, c_6, c_1$   
 $d$  :  $c_5$   
 $\neg d$  :  $c_6$

Activities

(increment=1):

$a$  0  
 $b$  0  
 $c$  0  
 $d$  0

Trail:

DL1:  $\neg a$  : NULL  
DL2:  $\neg \underline{b}$  : NULL  
 $\neg \underline{c}$  :  $c_1$

Propagate  $\neg \underline{b}$  in  $c_1 : (a \vee \underline{b} \vee \neg \underline{c}) \rightarrow$  assign  $\neg c$



## SAT solving: Example 2

$$c_1 : (a \vee \underline{b} \vee \neg \underline{c}) \wedge c_2 : (\underline{b} \vee \underline{c}) \wedge c_3 : (\neg \underline{a} \vee \underline{b} \vee \neg c) \wedge c_4 : (a \vee \neg \underline{b} \vee \underline{c}) \wedge \\ c_5 : (a \vee \neg \underline{c} \vee \underline{d}) \wedge c_6 : (\neg \underline{c} \vee \neg \underline{d})$$

Watch lists:

$a$  :  
 $\neg a$  :  $c_3$   
 $\underline{b}$  :  $c_1, \underline{c_2}, c_3$   
 $\neg b$  :  $c_4$   
 $c$  :  $c_2, c_4$   
 $\neg c$  :  $c_5, c_6, c_1$   
 $d$  :  $c_5$   
 $\neg d$  :  $c_6$

Propagate  $\neg \underline{b}$  in  $c_2 : (\underline{b} \vee \underline{c})$

Activities

(increment=1):

$a$  0  
 $b$  0  
 $c$  0  
 $d$  0

Trail:

DL1:  $\neg a$  : NULL  
DL2:  $\neg \underline{b}$  : NULL  
 $\neg c$  :  $c_1$

## SAT solving: Example 2

$$c_1 : (a \vee \underline{b} \vee \neg \underline{c}) \wedge c_2 : (\underline{b} \vee \underline{c}) \wedge c_3 : (\neg \underline{a} \vee \underline{b} \vee \neg c) \wedge c_4 : (a \vee \neg \underline{b} \vee \underline{c}) \wedge \\ c_5 : (a \vee \neg \underline{c} \vee \underline{d}) \wedge c_6 : (\neg \underline{c} \vee \neg \underline{d})$$

Watch lists:

$a$  :  
 $\neg a$  :  $c_3$   
 $\underline{b}$  :  $c_1, \underline{c_2}, c_3$   
 $\neg b$  :  $c_4$   
 $c$  :  $c_2, c_4$   
 $\neg c$  :  $c_5, c_6, c_1$   
 $d$  :  $c_5$   
 $\neg d$  :  $c_6$

Activities

(increment=1):

$a$  0  
 $b$  0  
 $c$  0  
 $d$  0

Trail:

DL1:  $\neg a$  : NULL  
DL2:  $\neg \underline{b}$  : NULL  
 $\neg c$  :  $c_1$

Propagate  $\neg \underline{b}$  in  $c_2 : (\underline{b} \vee \underline{c}) \rightarrow \not\downarrow$  conflict!

# SAT solving: Example 2

$$c_1 : (a \vee \underline{b} \vee \neg \underline{c}) \wedge c_2 : (\underline{b} \vee \underline{c}) \wedge c_3 : (\neg \underline{a} \vee \underline{b} \vee \neg c) \wedge c_4 : (a \vee \neg \underline{b} \vee \underline{c}) \wedge \\ c_5 : (a \vee \neg \underline{c} \vee \underline{d}) \wedge c_6 : (\neg \underline{c} \vee \neg \underline{d})$$

Watch lists:

$a$  :  
 $\neg a$  :  $c_3$   
 $\underline{b}$  :  $c_1, \underline{c_2}, c_3$   
 $\neg b$  :  $c_4$   
 $c$  :  $c_2, c_4$   
 $\neg c$  :  $c_5, c_6, c_1$   
 $d$  :  $c_5$   
 $\neg d$  :  $c_6$

Activities

(increment=1):

$a$  0  
 $b$  0  
 $c$  0  
 $d$  0

Trail:

DL1:  $\neg a$  : NULL  
DL2:  $\neg \underline{b}$  : NULL  
 $\neg c$  :  $c_1$

Conflict resolution:

# SAT solving: Example 2

$$c_1 : (a \vee \underline{b} \vee \neg \underline{c}) \wedge c_2 : (\underline{b} \vee \underline{c}) \wedge c_3 : (\neg \underline{a} \vee \underline{b} \vee \neg c) \wedge c_4 : (a \vee \neg \underline{b} \vee \underline{c}) \wedge \\ c_5 : (a \vee \neg \underline{c} \vee \underline{d}) \wedge c_6 : (\neg \underline{c} \vee \neg \underline{d})$$

Watch lists:

$a$  :  
 $\neg a$  :  $c_3$   
 $b$  :  $c_1, c_2, c_3$   
 $\neg b$  :  $c_4$   
 $c$  :  $c_2, c_4$   
 $\neg c$  :  $c_5, c_6, c_1$   
 $d$  :  $c_5$   
 $\neg d$  :  $c_6$

Activities

(increment=2):

$a$   $\emptyset$  1  
 $b$   $\emptyset$  1  
 $c$   $\emptyset$  1  
 $d$  0

Trail:

DL1:  $\neg a$  : NULL  
DL2:  $\neg b$  : NULL  
 $\neg c$  :  $c_1$

Conflict resolution: 
$$\frac{c_2:(b \vee \underline{c}) \quad c_1:(a \vee b \vee \neg \underline{c})}{c_7:(a \vee b)}$$

# SAT solving: Example 2

$$\begin{aligned} c_1 : (a \vee \underline{b} \vee \neg \underline{c}) \wedge c_2 : (\underline{b} \vee \underline{c}) \wedge c_3 : (\neg \underline{a} \vee \underline{b} \vee \neg c) \wedge c_4 : (a \vee \neg \underline{b} \vee \underline{c}) \wedge \\ c_5 : (a \vee \neg \underline{c} \vee \underline{d}) \wedge c_6 : (\neg \underline{c} \vee \neg \underline{d}) \wedge c_7 : (\underline{a} \vee \underline{b}) \end{aligned}$$

Watch lists:

$a$  :  $c_7$   
 $\neg a$  :  $c_3$   
 $b$  :  $c_1, c_2, c_3, c_7$   
 $\neg b$  :  $c_4$   
 $c$  :  $c_2, c_4$   
 $\neg c$  :  $c_5, c_6, c_1$   
 $d$  :  $c_5$   
 $\neg d$  :  $c_6$

Add conflict clause

Activities

(increment=2):

$a$  1  
 $b$  1  
 $c$  1  
 $d$  0

Trail:

DL1:  $\neg a$  : NULL  
DL2:  $\neg b$  : NULL  
 $\neg c$  :  $c_1$

# SAT solving: Example 2

$$\begin{aligned} c_1 : (a \vee \underline{b} \vee \neg c) \wedge c_2 : (\underline{b} \vee \underline{c}) \wedge c_3 : (\neg a \vee \underline{b} \vee \neg c) \wedge c_4 : (a \vee \neg \underline{b} \vee \underline{c}) \wedge \\ c_5 : (a \vee \neg c \vee \underline{d}) \wedge c_6 : (\neg c \vee \neg \underline{d}) \wedge c_7 : (\underline{a} \vee \underline{b}) \end{aligned}$$

Watch lists:

$a : c_7$   
 $\neg a : c_3$   
 $b : c_1, c_2, c_3, c_7$   
 $\neg b : c_4$   
 $c : c_2, c_4$   
 $\neg c : c_5, c_6, c_1$   
 $d : c_5$   
 $\neg d : c_6$

Activities

(increment=2):

$a \quad 1$   
 $b \quad 1$   
 $c \quad 1$   
 $d \quad 0$

Trail:

DL1:  $\neg a : \text{NULL}$   
~~DL2:  $\neg b : \text{NULL}$~~   
 ~~$\neg c : c_1$~~

Backtrack to DL1

## SAT solving: Example 2

$$\begin{aligned} c_1 : (a \vee \underline{b} \vee \neg \underline{c}) \wedge c_2 : (\underline{b} \vee \underline{c}) \wedge c_3 : (\neg \underline{a} \vee \underline{b} \vee \neg c) \wedge c_4 : (a \vee \neg \underline{b} \vee \underline{c}) \wedge \\ c_5 : (a \vee \neg \underline{c} \vee \underline{d}) \wedge c_6 : (\neg \underline{c} \vee \neg \underline{d}) \wedge c_7 : (\underline{a} \vee \underline{b}) \end{aligned}$$

Watch lists:

$a : c_7$   
 $\neg a : c_3$   
 $b : c_1, c_2, c_3, c_7$   
 $\neg b : c_4$   
 $c : c_2, c_4$   
 $\neg c : c_5, c_6, c_1$   
 $d : c_5$   
 $\neg d : c_6$

Activities

(increment=2):

$a \quad 1$   
 $b \quad 1$   
 $c \quad 1$   
 $d \quad 0$

Trail:

DL1:  $\neg a : \text{NULL}$   
 $b : c_7$

Assign  $b$  at DL1 by  $c_7$

## SAT solving: Example 2

$$\begin{aligned} c_1 : (a \vee \underline{b} \vee \neg \underline{c}) \wedge c_2 : (\underline{b} \vee \underline{c}) \wedge c_3 : (\neg \underline{a} \vee \underline{b} \vee \neg c) \wedge c_4 : (a \vee \neg \underline{b} \vee \underline{c}) \wedge \\ c_5 : (a \vee \neg \underline{c} \vee \underline{d}) \wedge c_6 : (\neg \underline{c} \vee \neg \underline{d}) \wedge c_7 : (\underline{a} \vee \underline{b}) \end{aligned}$$

Watch lists:

$a$  :  $c_7$   
 $\neg a$  :  $c_3$   
 $b$  :  $c_1, c_2, c_3, c_7$   
 $\neg b$  :  $c_4$   
 $c$  :  $c_2, c_4$   
 $\neg c$  :  $c_5, c_6, c_1$   
 $d$  :  $c_5$   
 $\neg d$  :  $c_6$

Propagate  $b$  in

Activities

(increment=2):

$a$  1  
 $b$  1  
 $c$  1  
 $d$  0

Trail:

DL1:  $\neg a$  : NULL  
 $b$  :  $c_7$



## SAT solving: Example 2

$$\begin{aligned} c_1 : (a \vee \underline{b} \vee \neg \underline{c}) \wedge c_2 : (\underline{b} \vee \underline{c}) \wedge c_3 : (\neg \underline{a} \vee \underline{b} \vee \neg c) \wedge c_4 : (a \vee \neg \underline{b} \vee \underline{c}) \wedge \\ c_5 : (a \vee \neg \underline{c} \vee \underline{d}) \wedge c_6 : (\neg \underline{c} \vee \neg \underline{d}) \wedge c_7 : (\underline{a} \vee \underline{b}) \end{aligned}$$

Watch lists:

$a : c_7$   
 $\neg a : c_3$   
 $b : c_1, c_2, c_3, c_7$   
 $\neg b : c_4$   
 $c : c_2, c_4$   
 $\neg c : c_5, c_6, c_1$   
 $d : c_5$   
 $\neg d : c_6$

Propagate  $b$  in  $c_4 : (a \vee \neg \underline{b} \vee \underline{c})$

Activities

(increment=2):

$a \quad 1$   
 $b \quad 1$   
 $c \quad 1$   
 $d \quad 0$

Trail:

DL1:  $\neg a : \text{NULL}$   
 $b : c_7$

# SAT solving: Example 2

$$c_1 : (a \vee \underline{b} \vee \neg \underline{c}) \wedge c_2 : (\underline{b} \vee \underline{c}) \wedge c_3 : (\neg \underline{a} \vee \underline{b} \vee \neg c) \wedge c_4 : (a \vee \neg \underline{b} \vee \underline{c}) \wedge \\ c_5 : (a \vee \neg \underline{c} \vee \underline{d}) \wedge c_6 : (\neg \underline{c} \vee \neg \underline{d}) \wedge c_7 : (\underline{a} \vee \underline{b})$$

Watch lists:

$a$  :  $c_7$   
 $\neg a$  :  $c_3$   
 $b$  :  $c_1, c_2, c_3, c_7$   
 $\neg b$  :  $c_4$   
 $c$  :  $c_2, c_4$   
 $\neg c$  :  $c_5, c_6, c_1$   
 $d$  :  $c_5$   
 $\neg d$  :  $c_6$

Activities

(increment=2):

$a$  1  
 $b$  1  
 $c$  1  
 $d$  0

Trail:

DL1:  $\neg a$  : NULL  
 $b$  :  $c_7$   
 $c$  :  $c_4$

Propagate  $b$  in  $c_4 : (a \vee \neg \underline{b} \vee \underline{c}) \rightarrow$  assign  $c$

## SAT solving: Example 2

$$\begin{aligned} c_1 : (a \vee \underline{b} \vee \neg \underline{c}) \wedge c_2 : (\underline{b} \vee \underline{c}) \wedge c_3 : (\neg \underline{a} \vee \underline{b} \vee \neg c) \wedge c_4 : (a \vee \neg \underline{b} \vee \underline{c}) \wedge \\ c_5 : (a \vee \neg \underline{c} \vee \underline{d}) \wedge c_6 : (\neg \underline{c} \vee \neg \underline{d}) \wedge c_7 : (\underline{a} \vee \underline{b}) \end{aligned}$$

Watch lists:

$a : c_7$   
 $\neg a : c_3$   
 $b : c_1, c_2, c_3, c_7$   
 $\neg b : c_4$   
 $c : c_2, c_4$   
 $\neg c : c_5, c_6, c_1$   
 $d : c_5$   
 $\neg d : c_6$

Propagate  $c$  in

Activities

(increment=2):

$a \quad 1$   
 $b \quad 1$   
 $c \quad 1$   
 $d \quad 0$

Trail:

DL1:  $\neg a : \text{NULL}$   
 $b : c_7$   
 $c : c_4$

## SAT solving: Example 2

$$c_1 : (a \vee \underline{b} \vee \neg \underline{c}) \wedge c_2 : (\underline{b} \vee \underline{c}) \wedge c_3 : (\neg \underline{a} \vee \underline{b} \vee \neg c) \wedge c_4 : (a \vee \neg \underline{b} \vee \underline{c}) \wedge \\ c_5 : (a \vee \neg \underline{c} \vee \underline{d}) \wedge c_6 : (\neg \underline{c} \vee \neg \underline{d}) \wedge c_7 : (\underline{a} \vee \underline{b})$$

Watch lists:

$a : c_7$   
 $\neg a : c_3$   
 $b : c_1, c_2, c_3, c_7$   
 $\neg b : c_4$   
 $c : c_2, c_4$   
 $\neg c : c_5, c_6, c_1$   
 $d : c_5$   
 $\neg d : c_6$

Propagate  $c$  in  $c_5 : (a \vee \neg \underline{c} \vee \underline{d})$

Activities

(increment=2):

$a \quad 1$   
 $b \quad 1$   
 $c \quad 1$   
 $d \quad 0$

Trail:

DL1:  $\neg a : \text{NULL}$   
 $b : c_7$   
 $c : c_4$

## SAT solving: Example 2

$$\begin{aligned} c_1 : (a \vee \underline{b} \vee \neg \underline{c}) \wedge c_2 : (\underline{b} \vee \underline{c}) \wedge c_3 : (\neg \underline{a} \vee \underline{b} \vee \neg c) \wedge c_4 : (a \vee \neg \underline{b} \vee \underline{c}) \wedge \\ c_5 : (a \vee \neg \underline{c} \vee \underline{d}) \wedge c_6 : (\neg \underline{c} \vee \neg \underline{d}) \wedge c_7 : (\underline{a} \vee \underline{b}) \end{aligned}$$

Watch lists:

$a : c_7$   
 $\neg a : c_3$   
 $b : c_1, c_2, c_3, c_7$   
 $\neg b : c_4$   
 $c : c_2, c_4$   
 $\neg c : c_5, c_6, c_1$   
 $d : c_5$   
 $\neg d : c_6$

Activities

(increment=2):

$a \quad 1$   
 $b \quad 1$   
 $c \quad 1$   
 $d \quad 0$

Trail:

DL1:  $\neg a : \text{NULL}$   
 $b : c_7$   
 $c : c_4$   
 $d : c_5$

Propagate  $c$  in  $c_5 : (a \vee \neg \underline{c} \vee \underline{d}) \rightarrow \text{assign } d$

# SAT solving: Example 2

$$\begin{aligned} c_1 : (a \vee \underline{b} \vee \neg \underline{c}) \wedge c_2 : (\underline{b} \vee \underline{c}) \wedge c_3 : (\neg \underline{a} \vee \underline{b} \vee \neg c) \wedge c_4 : (a \vee \neg \underline{b} \vee \underline{c}) \wedge \\ c_5 : (a \vee \neg \underline{c} \vee \underline{d}) \wedge c_6 : (\neg \underline{c} \vee \neg \underline{d}) \wedge c_7 : (\underline{a} \vee \underline{b}) \end{aligned}$$

Watch lists:

$a : c_7$   
 $\neg a : c_3$   
 $b : c_1, c_2, c_3, c_7$   
 $\neg b : c_4$   
 $c : c_2, c_4$   
 $\neg c : c_5, c_6, c_1$   
 $d : c_5$   
 $\neg d : c_6$

Propagate  $c$  in  $c_6 : (\neg \underline{c} \vee \neg \underline{d})$

Activities

(increment=2):

$a \quad 1$   
 $b \quad 1$   
 $c \quad 1$   
 $d \quad 0$

Trail:

DL1:  $\neg a : \text{NULL}$   
 $b : c_7$   
 $c : c_4$   
 $d : c_5$

## SAT solving: Example 2

$$\begin{aligned} c_1 : (a \vee \underline{b} \vee \neg c) \wedge c_2 : (\underline{b} \vee \underline{c}) \wedge c_3 : (\neg a \vee \underline{b} \vee \neg c) \wedge c_4 : (a \vee \neg \underline{b} \vee \underline{c}) \wedge \\ c_5 : (a \vee \neg c \vee \underline{d}) \wedge c_6 : (\neg \underline{c} \vee \neg \underline{d}) \wedge c_7 : (\underline{a} \vee \underline{b}) \end{aligned}$$

Watch lists:

$a : c_7$   
 $\neg a : c_3$   
 $b : c_1, c_2, c_3, c_7$   
 $\neg b : c_4$   
 $c : c_2, c_4$   
 $\neg c : c_5, c_6, c_1$   
 $d : c_5$   
 $\neg d : c_6$

Activities

(increment=2):

$a \quad 1$   
 $b \quad 1$   
 $c \quad 1$   
 $d \quad 0$

Trail:

DL1:  $\neg a : \text{NULL}$   
 $b : c_7$   
 $c : c_4$   
 $d : c_5$

Propagate  $c$  in  $c_6 : (\neg \underline{c} \vee \neg \underline{d}) \rightarrow \not\downarrow \text{conflict!}$

# SAT solving: Example 2

$$c_1 : (a \vee \underline{b} \vee \neg \underline{c}) \wedge c_2 : (\underline{b} \vee \underline{c}) \wedge c_3 : (\neg \underline{a} \vee \underline{b} \vee \neg c) \wedge c_4 : (a \vee \neg \underline{b} \vee \underline{c}) \wedge \\ c_5 : (a \vee \neg \underline{c} \vee \underline{d}) \wedge c_6 : (\neg \underline{c} \vee \neg \underline{d}) \wedge c_7 : (\underline{a} \vee \underline{b})$$

Watch lists:

$a : c_7$   
 $\neg a : c_3$   
 $b : c_1, c_2, c_3, c_7$   
 $\neg b : c_4$   
 $c : c_2, c_4$   
 $\neg c : c_5, c_6, c_1$   
 $d : c_5$   
 $\neg d : c_6$

Activities

(increment=2):

$a \quad 1$   
 $b \quad 1$   
 $c \quad 1$   
 $d \quad 0$

Trail:

DL1:  $\neg a : \text{NULL}$   
 $b : c_7$   
 $c : c_4$   
 $d : c_5$

Conflict resolution:



# SAT solving: Example 2

$$c_1 : (a \vee \underline{b} \vee \neg \underline{c}) \wedge c_2 : (\underline{b} \vee \underline{c}) \wedge c_3 : (\neg \underline{a} \vee \underline{b} \vee \neg c) \wedge c_4 : (a \vee \neg \underline{b} \vee \underline{c}) \wedge \\ c_5 : (a \vee \neg \underline{c} \vee \underline{d}) \wedge c_6 : (\neg \underline{c} \vee \neg \underline{d}) \wedge c_7 : (\underline{a} \vee \underline{b})$$

Watch lists:

$a : c_7$   
 $\neg a : c_3$   
 $b : c_1, c_2, c_3, c_7$   
 $\neg b : c_4$   
 $c : c_2, c_4$   
 $\neg c : c_5, \textcolor{green}{c_6}, c_1$   
 $d : c_5$   
 $\neg d : c_6$

Activities

(increment=3):

$a \text{ } \cancel{1} \text{ } 3$   
 $b \text{ } \cancel{1} \text{ } 3$   
 $c \text{ } \cancel{1} \text{ } 3$   
 $d \text{ } \emptyset \text{ } 2$

Trail:

DL1:  $\neg a : \text{NULL}$   
 $b : c_7$   
 $\textcolor{green}{c} : \textcolor{green}{c_4}$   
 $d : c_5$

Conflict resolution:

$$\begin{array}{c}
 \frac{c_6 : (\neg \underline{c} \vee \neg \underline{d}) \quad c_5 : (a \vee \neg \underline{c} \vee \underline{d})}{(a \vee \neg \underline{c}) \quad c_4 : (a \vee \neg \underline{b} \vee \underline{c})} \\
 \frac{(a \vee \neg \underline{b}) \quad c_7 : (a \vee \underline{b})}{c_8 : (a)}
 \end{array}$$

## SAT solving: Example 2

$$\begin{aligned} c_1 : (a \vee \underline{b} \vee \neg \underline{c}) \wedge c_2 : (\underline{b} \vee \underline{c}) \wedge c_3 : (\neg \underline{a} \vee \underline{b} \vee \neg c) \wedge c_4 : (a \vee \neg \underline{b} \vee \underline{c}) \wedge \\ c_5 : (a \vee \neg \underline{c} \vee \underline{d}) \wedge c_6 : (\neg \underline{c} \vee \neg \underline{d}) \wedge c_7 : (\underline{a} \vee \underline{b}) \wedge c_8 : (a) \end{aligned}$$

Watch lists:

$a : c_7$   
 $\neg a : c_3$   
 $b : c_1, c_2, c_3, c_7$   
 $\neg b : c_4$   
 $c : c_2, c_4$   
 $\neg c : c_5, c_6, c_1$   
 $d : c_5$   
 $\neg d : c_6$

Add conflict clause

Activities

(increment=3):

$a \quad 3$   
 $b \quad 3$   
 $c \quad 3$   
 $d \quad 2$

Trail:

DL1:  $\neg a : \text{NULL}$   
 $b : c_7$   
 $c : c_4$   
 $d : c_5$

# SAT solving: Example 2

$$\begin{aligned} c_1 : (a \vee \underline{b} \vee \neg c) \wedge c_2 : (\underline{b} \vee \underline{c}) \wedge c_3 : (\neg a \vee \underline{b} \vee \neg c) \wedge c_4 : (a \vee \neg \underline{b} \vee \underline{c}) \wedge \\ c_5 : (a \vee \neg \underline{c} \vee \underline{d}) \wedge c_6 : (\neg \underline{c} \vee \neg \underline{d}) \wedge c_7 : (\underline{a} \vee \underline{b}) \wedge c_8 : (\underline{a}) \end{aligned}$$

Watch lists:

$a : c_7$   
 $\neg a : c_3$   
 $b : c_1, c_2, c_3, c_7$   
 $\neg b : c_4$   
 $c : c_2, c_4$   
 $\neg c : c_5, c_6, c_1$   
 $d : c_5$   
 $\neg d : c_6$

Activities

(increment=3):

$a \quad 3$   
 $b \quad 3$   
 $c \quad 3$   
 $d \quad 2$

Trail:

~~DL1:  $\neg a : \text{NULL}$~~   
 ~~$b : c_7$~~   
 ~~$c : c_4$~~   
 ~~$d : c_5$~~

Backtrack to DL0

# SAT solving: Example 2

$$\begin{aligned} c_1 : (a \vee \underline{b} \vee \neg c) \wedge c_2 : (\underline{b} \vee \underline{c}) \wedge c_3 : (\neg a \vee \underline{b} \vee \neg c) \wedge c_4 : (a \vee \neg \underline{b} \vee \underline{c}) \wedge \\ c_5 : (a \vee \neg c \vee \underline{d}) \wedge c_6 : (\neg c \vee \neg \underline{d}) \wedge c_7 : (\underline{a} \vee \underline{b}) \wedge c_8 : (\underline{a}) \end{aligned}$$

Watch lists:

$a : c_7$   
 $\neg a : c_3$   
 $b : c_1, c_2, c_3, c_7$   
 $\neg b : c_4$   
 $c : c_2, c_4$   
 $\neg c : c_5, c_6, c_1$   
 $d : c_5$   
 $\neg d : c_6$

Activities

(increment=3):

$a \quad 3$   
 $b \quad 3$   
 $c \quad 3$   
 $d \quad 2$

Trail:

DL0:  $a : c_8$

Assign  $a$  at DL0 by  $c_8$

## SAT solving: Example 2

$$\begin{aligned} c_1 : (a \vee \underline{b} \vee \neg \underline{c}) \wedge c_2 : (\underline{b} \vee \underline{c}) \wedge c_3 : (\neg \underline{a} \vee \underline{b} \vee \neg c) \wedge c_4 : (a \vee \neg \underline{b} \vee \underline{c}) \wedge \\ c_5 : (a \vee \neg \underline{c} \vee \underline{d}) \wedge c_6 : (\neg \underline{c} \vee \neg \underline{d}) \wedge c_7 : (\underline{a} \vee \underline{b}) \wedge c_8 : (a) \end{aligned}$$

Watch lists:

$a : c_7$   
 $\neg a : c_3$   
 $b : c_1, c_2, c_3, c_7$   
 $\neg b : c_4$   
 $c : c_2, c_4$   
 $\neg c : c_5, c_6, c_1$   
 $d : c_5$   
 $\neg d : c_6$

Propagate  $a$  in

Activities

(increment=3):

$a \quad 3$   
 $b \quad 3$   
 $c \quad 3$   
 $d \quad 2$

Trail:

DL0:  $a : c_8$

## SAT solving: Example 2

$$\begin{aligned} c_1 : (a \vee \underline{b} \vee \neg c) \wedge c_2 : (\underline{b} \vee \underline{c}) \wedge c_3 : (\neg a \vee \underline{b} \vee \neg c) \wedge c_4 : (a \vee \neg \underline{b} \vee \underline{c}) \wedge \\ c_5 : (a \vee \neg c \vee \underline{d}) \wedge c_6 : (\neg c \vee \neg \underline{d}) \wedge c_7 : (\underline{a} \vee \underline{b}) \wedge c_8 : (a) \end{aligned}$$

Watch lists:

$a$  :  $c_7$   
 $\neg a$  :  $c_3$   
 $b$  :  $c_1, c_2, c_3, c_7$   
 $\neg b$  :  $c_4$   
 $c$  :  $c_2, c_4$   
 $\neg c$  :  $c_5, c_6, c_1$   
 $d$  :  $c_5$   
 $\neg d$  :  $c_6$

Activities

(increment=3):

$a$  3  
 $b$  3  
 $c$  3  
 $d$  2

Trail:

DL0:  $a : c_8$

Propagate  $a$  in  $c_3 : (\neg a \vee \underline{b} \vee \neg c)$

# SAT solving: Example 2

$$c_1 : (a \vee \underline{b} \vee \neg \underline{c}) \wedge c_2 : (\underline{b} \vee \underline{c}) \wedge c_3 : (\neg a \vee \underline{b} \vee \neg \underline{c}) \wedge c_4 : (a \vee \neg \underline{b} \vee \underline{c}) \wedge \\ c_5 : (a \vee \neg \underline{c} \vee \underline{d}) \wedge c_6 : (\neg \underline{c} \vee \neg \underline{d}) \wedge c_7 : (\underline{a} \vee \underline{b}) \wedge c_8 : (a)$$

Watch lists:

$a$  :  $c_7$   
 $\neg a$  :  ~~$c_3$~~   
 $b$  :  $c_1, c_2, c_3, c_7$   
 $\neg b$  :  $c_4$   
 $c$  :  $c_2, c_4$   
 $\neg c$  :  $c_5, c_6, c_1, c_3$   
 $d$  :  $c_5$   
 $\neg d$  :  $c_6$

Activities

(increment=3):

$a$  3  
 $b$  3  
 $c$  3  
 $d$  2

Trail:

DL0:  $a : c_8$

Propagate  $a$  in  $c_3 : (\neg \underline{a} \vee \underline{b} \vee \neg \underline{c}) \rightarrow (\neg a \vee \underline{b} \vee \neg \underline{c})$

## SAT solving: Example 2

$$\begin{aligned} c_1 : (a \vee \underline{b} \vee \underline{\neg c}) \wedge c_2 : (\underline{b} \vee \underline{c}) \wedge c_3 : (\neg a \vee \underline{b} \vee \underline{\neg c}) \wedge c_4 : (a \vee \underline{\neg b} \vee \underline{c}) \wedge \\ c_5 : (a \vee \underline{\neg c} \vee \underline{d}) \wedge c_6 : (\underline{\neg c} \vee \underline{\neg d}) \wedge c_7 : (\underline{a} \vee \underline{b}) \wedge c_8 : (a) \end{aligned}$$

Watch lists:

$a : c_7$   
 $\neg a :$   
 $b : c_1, c_2, c_3, c_7$   
 $\neg b : c_4$   
 $c : c_2, c_4$   
 $\neg c : c_5, c_6, c_1, c_3$   
 $d : c_5$   
 $\neg d : c_6$

Decide  $\neg b$

Activities

(increment=3):

$a \quad 3$   
 $\underline{b} \quad 3$   
 $c \quad 3$   
 $d \quad 2$

Trail:

DL0:  $a : c_8$

DL1:  $\neg \underline{b} : \text{NULL}$



## SAT solving: Example 2

$$\begin{aligned} c_1 : (a \vee \underline{b} \vee \neg \underline{c}) \wedge c_2 : (\underline{b} \vee \underline{c}) \wedge c_3 : (\neg a \vee \underline{b} \vee \neg \underline{c}) \wedge c_4 : (a \vee \neg \underline{b} \vee \underline{c}) \wedge \\ c_5 : (a \vee \neg \underline{c} \vee \underline{d}) \wedge c_6 : (\neg \underline{c} \vee \neg \underline{d}) \wedge c_7 : (\underline{a} \vee \underline{b}) \wedge c_8 : (a) \end{aligned}$$

Watch lists:

$a : c_7$   
 $\neg a :$   
 $\underline{b} : c_1, c_2, c_3, c_7$   
 $\neg \underline{b} : c_4$   
 $c : c_2, c_4$   
 $\neg c : c_5, c_6, c_1, c_3$   
 $d : c_5$   
 $\neg d : c_6$

Propagate  $\neg \underline{b}$  in

Activities

(increment=3):

$a \quad 3$   
 $\underline{b} \quad 3$   
 $c \quad 3$   
 $d \quad 2$

Trail:

DL0:  $a : c_8$

DL1:  $\neg \underline{b} : \text{NULL}$

# SAT solving: Example 2

$$\begin{aligned} c_1 : (a \vee \underline{b} \vee \underline{\neg c}) \wedge c_2 : (\underline{b} \vee \underline{c}) \wedge c_3 : (\neg a \vee \underline{b} \vee \underline{\neg c}) \wedge c_4 : (a \vee \underline{\neg b} \vee \underline{c}) \wedge \\ c_5 : (a \vee \underline{\neg c} \vee \underline{d}) \wedge c_6 : (\underline{\neg c} \vee \underline{\neg d}) \wedge c_7 : (\underline{a} \vee \underline{b}) \wedge c_8 : (a) \end{aligned}$$

Watch lists:

$a : c_7$   
 $\neg a :$   
 $\underline{b} : c_1, c_2, c_3, c_7$   
 $\neg b : c_4$   
 $c : c_2, c_4$   
 $\neg c : c_5, c_6, c_1, c_3$   
 $d : c_5$   
 $\neg d : c_6$

Activities

(increment=3):

$a \quad 3$   
 $b \quad 3$   
 $c \quad 3$   
 $d \quad 2$

Trail:

DL0:  $a : c_8$   
DL1:  $\neg \underline{b} : \text{NULL}$

Propagate  $\neg \underline{b}$  in  $c_1 : (a \vee \underline{b} \vee \underline{\neg c})$

## SAT solving: Example 2

$$\begin{aligned} c_1 : (\underline{a} \vee \underline{b} \vee \underline{\neg c}) \wedge c_2 : (\underline{b} \vee \underline{c}) \wedge c_3 : (\neg \underline{a} \vee \underline{b} \vee \underline{\neg c}) \wedge c_4 : (\underline{a} \vee \underline{\neg b} \vee \underline{c}) \wedge \\ c_5 : (\underline{a} \vee \underline{\neg c} \vee \underline{d}) \wedge c_6 : (\underline{\neg c} \vee \underline{\neg d}) \wedge c_7 : (\underline{a} \vee \underline{b}) \wedge c_8 : (\underline{a}) \end{aligned}$$

Watch lists:

$a$  :  $c_7, c_1$   
 $\neg a$  :  
 $b$  :  ~~$c_1$~~ ,  $c_2, c_3, c_7$   
 $\neg b$  :  $c_4$   
 $c$  :  $c_2, c_4$   
 $\neg c$  :  $c_5, c_6, c_1, c_3$   
 $d$  :  $c_5$   
 $\neg d$  :  $c_6$

Activities

(increment=3):

$a$  3  
 $b$  3  
 $c$  3  
 $d$  2

Trail:

DL0:  $a$  :  $c_8$   
DL1:  $\neg b$  : NULL

Propagate  $\neg b$  in  $c_1 : (\underline{a} \vee \underline{b} \vee \underline{\neg c}) \rightarrow (\underline{a} \vee \underline{b} \vee \underline{\neg c})$

## SAT solving: Example 2

$$\begin{aligned} c_1 : (\underline{a} \vee \underline{b} \vee \neg \underline{c}) \wedge c_2 : (\underline{b} \vee \underline{c}) \wedge c_3 : (\neg \underline{a} \vee \underline{b} \vee \neg \underline{c}) \wedge c_4 : (\underline{a} \vee \neg \underline{b} \vee \underline{c}) \wedge \\ c_5 : (\underline{a} \vee \neg \underline{c} \vee \underline{d}) \wedge c_6 : (\neg \underline{c} \vee \neg \underline{d}) \wedge c_7 : (\underline{a} \vee \underline{b}) \wedge c_8 : (\underline{a}) \end{aligned}$$

Watch lists:

$a$  :  $c_7, c_1$   
 $\neg a$  :  
 $b$  :  ~~$c_1$~~ ,  $c_2, c_3, c_7$   
 $\neg b$  :  $c_4$   
 $c$  :  $c_2, c_4$   
 $\neg c$  :  $c_5, c_6, c_1, c_3$   
 $d$  :  $c_5$   
 $\neg d$  :  $c_6$

Propagate  $\neg b$  in  $c_2 : (\underline{b} \vee \underline{c})$

Activities

(increment=3):

$a$  3  
 $b$  3  
 $c$  3  
 $d$  2

Trail:

DL0:  $a : c_8$

DL1:  $\neg b : \text{NULL}$

## SAT solving: Example 2

$$c_1 : (\underline{a} \vee \underline{b} \vee \neg \underline{c}) \wedge c_2 : (\underline{b} \vee \underline{c}) \wedge c_3 : (\neg \underline{a} \vee \underline{b} \vee \neg \underline{c}) \wedge c_4 : (\underline{a} \vee \neg \underline{b} \vee \underline{c}) \wedge \\ c_5 : (\underline{a} \vee \neg \underline{c} \vee \underline{d}) \wedge c_6 : (\neg \underline{c} \vee \neg \underline{d}) \wedge c_7 : (\underline{a} \vee \underline{b}) \wedge c_8 : (\underline{a})$$

Watch lists:

$a$  :  $c_7, c_1$   
 $\neg a$  :  
 $b$  :  ~~$c_1$~~ ,  $c_2, c_3, c_7$   
 $\neg b$  :  $c_4$   
 $c$  :  $c_2, c_4$   
 $\neg c$  :  $c_5, c_6, c_1, c_3$   
 $d$  :  $c_5$   
 $\neg d$  :  $c_6$

Activities

(increment=3):

$a$  3  
 $b$  3  
 $c$  3  
 $d$  2

Trail:

DL0:  $a : c_8$   
DL1:  $\neg b : \text{NULL}$   
 $c : c_2$

Propagate  $\neg b$  in  $c_2 : (\underline{b} \vee \underline{c}) \rightarrow \text{assign } c$

## SAT solving: Example 2

$$\begin{aligned} c_1 : (\underline{a} \vee \underline{b} \vee \underline{\neg c}) \wedge c_2 : (\underline{b} \vee \underline{c}) \wedge c_3 : (\neg \underline{a} \vee \underline{b} \vee \underline{\neg c}) \wedge c_4 : (\underline{a} \vee \underline{\neg b} \vee \underline{c}) \wedge \\ c_5 : (\underline{a} \vee \underline{\neg c} \vee \underline{d}) \wedge c_6 : (\underline{\neg c} \vee \underline{\neg d}) \wedge c_7 : (\underline{a} \vee \underline{b}) \wedge c_8 : (\underline{a}) \end{aligned}$$

Watch lists:

$a$  :  $c_7, c_1$   
 $\neg a$  :  
 $b$  :  ~~$c_1$~~ ,  $c_2$ ,  $c_3$ ,  $c_7$   
 $\neg b$  :  $c_4$   
 $c$  :  $c_2, c_4$   
 $\neg c$  :  $c_5, c_6, c_1, c_3$   
 $d$  :  $c_5$   
 $\neg d$  :  $c_6$

Propagate  $\neg b$  in

Activities

(increment=3):

$a$  3  
 $b$  3  
 $c$  3  
 $d$  2

Trail:

DL0:  $a$  :  $c_8$   
DL1:  $\neg b$  : NULL  
 $c$  :  $c_2$

$c_3 : (\neg \underline{a} \vee \underline{b} \vee \underline{\neg c})$

## SAT solving: Example 2

$$c_1 : (\underline{a} \vee \underline{b} \vee \underline{\neg c}) \wedge c_2 : (\underline{b} \vee \underline{c}) \wedge c_3 : (\neg \underline{a} \vee \underline{b} \vee \underline{\neg c}) \wedge c_4 : (\underline{a} \vee \underline{\neg b} \vee \underline{c}) \wedge \\ c_5 : (\underline{a} \vee \underline{\neg c} \vee \underline{d}) \wedge c_6 : (\underline{\neg c} \vee \underline{\neg d}) \wedge c_7 : (\underline{a} \vee \underline{b}) \wedge c_8 : (\underline{a})$$

Watch lists:

$a$  :  $c_7, c_1$   
 $\neg a$  :  
 $b$  :  ~~$c_1$~~ ,  $c_2$ ,  $c_3$ ,  $c_7$   
 $\neg b$  :  $c_4$   
 $c$  :  $c_2, c_4$   
 $\neg c$  :  $c_5, c_6, c_1, c_3$   
 $d$  :  $c_5$   
 $\neg d$  :  $c_6$

Propagate  $\neg b$  in

Activities

(increment=3):

$a$  3  
 $b$  3  
 $c$  3  
 $d$  2

Trail:

DL0:  $a : c_8$   
DL1:  $\neg b : \text{NULL}$   
 $c : c_2$

$c_3 : (\neg \underline{a} \vee \underline{b} \vee \underline{\neg c}) \rightarrow \text{⚡ conflict!}$

## SAT solving: Example 2

$$\begin{aligned} c_1 : (\underline{a} \vee \underline{b} \vee \underline{\neg c}) \wedge c_2 : (\underline{b} \vee \underline{c}) \wedge c_3 : (\neg \underline{a} \vee \underline{b} \vee \underline{\neg c}) \wedge c_4 : (\underline{a} \vee \underline{\neg b} \vee \underline{c}) \wedge \\ c_5 : (\underline{a} \vee \underline{\neg c} \vee \underline{d}) \wedge c_6 : (\underline{\neg c} \vee \underline{\neg d}) \wedge c_7 : (\underline{a} \vee \underline{b}) \wedge c_8 : (\underline{a}) \end{aligned}$$

Watch lists:

$a$  :  $c_7, c_1$   
 $\neg a$  :  
 $b$  :  ~~$c_1$~~ ,  $c_2$ ,  $c_3$ ,  $c_7$   
 $\neg b$  :  $c_4$   
 $c$  :  $c_2, c_4$   
 $\neg c$  :  $c_5, c_6, c_1, c_3$   
 $d$  :  $c_5$   
 $\neg d$  :  $c_6$

Activities

(increment=3):

$a$  3  
 $b$  3  
 $c$  3  
 $d$  2

Trail:

DL0:  $a : c_8$   
DL1:  $\neg b : \text{NULL}$   
 $c : c_2$

Conflict resolution:



# SAT solving: Example 2

$$c_1 : (\underline{a} \vee \underline{b} \vee \neg \underline{c}) \wedge c_2 : (\underline{b} \vee \underline{c}) \wedge c_3 : (\neg \underline{a} \vee \underline{b} \vee \neg \underline{c}) \wedge c_4 : (\underline{a} \vee \neg \underline{b} \vee \underline{c}) \wedge \\ c_5 : (\underline{a} \vee \neg \underline{c} \vee \underline{d}) \wedge c_6 : (\neg \underline{c} \vee \neg \underline{d}) \wedge c_7 : (\underline{a} \vee \underline{b}) \wedge c_8 : (\underline{a})$$

Watch lists:

$a : c_7, c_1$   
 $\neg a :$   
 $\underline{b} : \cancel{c_1}, c_2, \underline{c_3}, c_7$   
 $\neg b : c_4$   
 $c : c_2, c_4$   
 $\neg c : c_5, c_6, c_1, c_3$   
 $d : c_5$   
 $\neg d : c_6$

Activities

(increment=4):

$a \not\bowtie 6$   
 $b \not\bowtie 6$   
 $c \not\bowtie 6$   
 $d \quad 2$

Trail:

DL0:  $a : c_8$   
 DL1:  $\neg \underline{b} : \text{NULL}$   
 $c : c_2$

Conflict resolution:

$$\frac{c_3 : (\neg \underline{a} \vee \underline{b} \vee \neg \underline{c}) \quad c_2 : (\underline{b} \vee \underline{c})}{c_9 : (\neg \underline{a} \vee \underline{b})}$$

## SAT solving: Example 2

$$\begin{aligned} c_1 : (\underline{a} \vee \underline{b} \vee \underline{\neg c}) \wedge c_2 : (\underline{b} \vee \underline{c}) \wedge c_3 : (\neg \underline{a} \vee \underline{b} \vee \underline{\neg c}) \wedge c_4 : (\underline{a} \vee \underline{\neg b} \vee \underline{c}) \wedge \\ c_5 : (\underline{a} \vee \underline{\neg c} \vee \underline{d}) \wedge c_6 : (\underline{\neg c} \vee \underline{\neg d}) \wedge c_7 : (\underline{a} \vee \underline{b}) \wedge c_8 : (\underline{a}) \wedge c_9 : (\underline{\neg a} \vee \underline{b}) \end{aligned}$$

Watch lists:

$a$  :  $c_7, c_1$   
 $\neg a$  :  $c_9$   
 $b$  :  ~~$c_1$~~ ,  $c_2, c_3, c_7, c_9$   
 $\neg b$  :  $c_4$   
 $c$  :  $c_2, c_4$   
 $\neg c$  :  $c_5, c_6, c_1, c_3$   
 $d$  :  $c_5$   
 $\neg d$  :  $c_6$

Add conflict clause

Activities

(increment=4):

$a$  6  
 $b$  6  
 $c$  6  
 $d$  2

Trail:

DL0:  $a$  :  $c_8$   
DL1:  $\neg b$  : NULL  
 $c$  :  $c_2$

# SAT solving: Example 2

$$c_1 : (\underline{a} \vee \underline{b} \vee \underline{\neg c}) \wedge c_2 : (\underline{b} \vee \underline{c}) \wedge c_3 : (\neg \underline{a} \vee \underline{b} \vee \underline{\neg c}) \wedge c_4 : (\underline{a} \vee \underline{\neg b} \vee \underline{c}) \wedge \\ c_5 : (\underline{a} \vee \underline{\neg c} \vee \underline{d}) \wedge c_6 : (\underline{\neg c} \vee \underline{\neg d}) \wedge c_7 : (\underline{a} \vee \underline{b}) \wedge c_8 : (\underline{a}) \wedge c_9 : (\underline{\neg a} \vee \underline{b})$$

Watch lists:

$a$  :  $c_7, c_1$   
 $\neg a$  :  $c_9$   
 $b$  :  ~~$c_1$~~ ,  $c_2, c_3, c_7, c_9$   
 $\neg b$  :  $c_4$   
 $c$  :  $c_2, c_4$   
 $\neg c$  :  $c_5, c_6, c_1, c_3$   
 $d$  :  $c_5$   
 $\neg d$  :  $c_6$

Activities

(increment=4):

$a$  6  
 $b$  6  
 $c$  6  
 $d$  2

Trail:

DL0:  $a : c_8$

~~DL1:  $\neg b : \text{NULL}$~~

~~$c : c_2$~~

Backtrack to DL0

## SAT solving: Example 2

$$\begin{aligned} c_1 : (\underline{a} \vee \underline{b} \vee \underline{\neg c}) \wedge c_2 : (\underline{b} \vee \underline{c}) \wedge c_3 : (\neg \underline{a} \vee \underline{b} \vee \underline{\neg c}) \wedge c_4 : (\underline{a} \vee \underline{\neg b} \vee \underline{c}) \wedge \\ c_5 : (\underline{a} \vee \underline{\neg c} \vee \underline{d}) \wedge c_6 : (\underline{\neg c} \vee \underline{\neg d}) \wedge c_7 : (\underline{a} \vee \underline{b}) \wedge c_8 : (\underline{a}) \wedge c_9 : (\underline{\neg a} \vee \underline{b}) \end{aligned}$$

Watch lists:

$a$  :  $c_7, c_1$   
 $\neg a$  :  $c_9$   
 $b$  :  ~~$c_1$~~ ,  $c_2, c_3, c_7, c_9$   
 $\neg b$  :  $c_4$   
 $c$  :  $c_2, c_4$   
 $\neg c$  :  $c_5, c_6, c_1, c_3$   
 $d$  :  $c_5$   
 $\neg d$  :  $c_6$

Assign  $b$  by  $c_9$

Activities

(increment=4):

$a$  6  
 $b$  6  
 $c$  6  
 $d$  2

Trail:

DL0:  $a$  :  $c_8$   
 $b$  :  $c_9$

## SAT solving: Example 2

$$\begin{aligned} c_1 : (\underline{a} \vee \underline{b} \vee \underline{\neg c}) \wedge c_2 : (\underline{b} \vee \underline{c}) \wedge c_3 : (\neg \underline{a} \vee \underline{b} \vee \underline{\neg c}) \wedge c_4 : (\underline{a} \vee \underline{\neg b} \vee \underline{c}) \wedge \\ c_5 : (\underline{a} \vee \underline{\neg c} \vee \underline{d}) \wedge c_6 : (\underline{\neg c} \vee \underline{\neg d}) \wedge c_7 : (\underline{a} \vee \underline{b}) \wedge c_8 : (\underline{a}) \wedge c_9 : (\underline{\neg a} \vee \underline{b}) \end{aligned}$$

Watch lists:

$a$  :  $c_7, c_1$   
 $\neg a$  :  $c_9$   
 $b$  :  $c_2, c_3, c_7, c_9$   
 $\neg b$  :  $c_4$   
 $c$  :  $c_2, c_4$   
 $\neg c$  :  $c_5, c_6, c_1, c_3$   
 $d$  :  $c_5$   
 $\neg d$  :  $c_6$

Propagate  $b$  in

Activities

(increment=4):

$a$  6  
 $b$  6  
 $c$  6  
 $d$  2

Trail:

DL0:  $a$  :  $c_8$   
 $b$  :  $c_9$

# SAT solving: Example 2

$$\begin{aligned} c_1 : (\underline{a} \vee \underline{b} \vee \underline{\neg c}) \wedge c_2 : (\underline{b} \vee \underline{c}) \wedge c_3 : (\neg a \vee \underline{b} \vee \underline{\neg c}) \wedge c_4 : (\underline{a} \vee \underline{\neg b} \vee \underline{c}) \wedge \\ c_5 : (\underline{a} \vee \underline{\neg c} \vee \underline{d}) \wedge c_6 : (\underline{\neg c} \vee \underline{\neg d}) \wedge c_7 : (\underline{a} \vee \underline{b}) \wedge c_8 : (\underline{a}) \wedge c_9 : (\underline{\neg a} \vee \underline{b}) \end{aligned}$$

Watch lists:

$a$  :  $c_7, c_1$   
 $\neg a$  :  $c_9$   
 $b$  :  $c_2, c_3, c_7, c_9$   
 $\neg b$  :  $c_4$   
 $c$  :  $c_2, c_4$   
 $\neg c$  :  $c_5, c_6, c_1, c_3$   
 $d$  :  $c_5$   
 $\neg d$  :  $c_6$

Propagate  $b$  in  $c_4 : (\underline{a} \vee \underline{\neg b} \vee \underline{c})$

Activities

(increment=4):

$a$  6  
 $b$  6  
 $c$  6  
 $d$  2

Trail:

DL0:  $a$  :  $c_8$   
 $b$  :  $c_9$

## SAT solving: Example 2

$$\begin{aligned} c_1 : (\underline{a} \vee \underline{b} \vee \underline{\neg c}) \wedge c_2 : (\underline{b} \vee \underline{c}) \wedge c_3 : (\neg \underline{a} \vee \underline{b} \vee \underline{\neg c}) \wedge c_4 : (\underline{a} \vee \neg \underline{b} \vee \underline{c}) \wedge \\ c_5 : (\underline{a} \vee \underline{\neg c} \vee \underline{d}) \wedge c_6 : (\underline{\neg c} \vee \underline{\neg d}) \wedge c_7 : (\underline{a} \vee \underline{b}) \wedge c_8 : (\underline{a}) \wedge c_9 : (\underline{\neg a} \vee \underline{b}) \end{aligned}$$

Watch lists:

$a$  :  $c_7, c_1, c_4$   
 $\neg a$  :  $c_9$   
 $b$  :  $c_2, c_3, c_7, c_9$   
 $\neg b$  :  ~~$c_4$~~   
 $c$  :  $c_2, c_4$   
 $\neg c$  :  $c_5, c_6, c_1, c_3$   
 $d$  :  $c_5$   
 $\neg d$  :  $c_6$

Activities

(increment=4):

$a$  6  
 $b$  6  
 $c$  6  
 $d$  2

Trail:

DL0:  $a$  :  $c_8$   
 $b$  :  $c_9$

Propagate  $b$  in  $c_4 : (\underline{a} \vee \underline{\neg b} \vee \underline{c}) \rightarrow (\underline{a} \vee \neg \underline{b} \vee \underline{c})$

## SAT solving: Example 2

$$\begin{aligned} c_1 : (\underline{a} \vee \underline{b} \vee \underline{\neg c}) \wedge c_2 : (\underline{b} \vee \underline{c}) \wedge c_3 : (\neg \underline{a} \vee \underline{b} \vee \underline{\neg c}) \wedge c_4 : (\underline{a} \vee \neg \underline{b} \vee \underline{c}) \wedge \\ c_5 : (\underline{a} \vee \underline{\neg c} \vee \underline{d}) \wedge c_6 : (\underline{\neg c} \vee \underline{\neg d}) \wedge c_7 : (\underline{a} \vee \underline{b}) \wedge c_8 : (\underline{a}) \wedge c_9 : (\underline{\neg a} \vee \underline{b}) \end{aligned}$$

Watch lists:

$a$  :  $c_7, c_1, c_4$   
 $\neg a$  :  $c_9$   
 $b$  :  $c_2, c_3, c_7, c_9$   
 $\neg b$  :  
 $c$  :  $c_2, c_4$   
 $\neg c$  :  $c_5, c_6, c_1, c_3$   
 $d$  :  $c_5$   
 $\neg d$  :  $c_6$

Activities

(increment=4):

$a$  6  
 $b$  6  
 $c$  6  
 $d$  2

Trail:

DL0:  $a$  :  $c_8$

$b$  :  $c_9$

DL1:  $\neg c$  : **NULL**

Decide  $\neg c$



## SAT solving: Example 2

$$\begin{aligned} c_1 : (\underline{a} \vee \underline{b} \vee \underline{\neg c}) \wedge c_2 : (\underline{b} \vee \underline{c}) \wedge c_3 : (\neg \underline{a} \vee \underline{b} \vee \underline{\neg c}) \wedge c_4 : (\underline{a} \vee \neg \underline{b} \vee \underline{c}) \wedge \\ c_5 : (\underline{a} \vee \underline{\neg c} \vee \underline{d}) \wedge c_6 : (\underline{\neg c} \vee \underline{\neg d}) \wedge c_7 : (\underline{a} \vee \underline{b}) \wedge c_8 : (\underline{a}) \wedge c_9 : (\underline{\neg a} \vee \underline{b}) \end{aligned}$$

Watch lists:

$a$  :  $c_7, c_1, c_4$   
 $\neg a$  :  $c_9$   
 $b$  :  $c_2, c_3, c_7, c_9$   
 $\neg b$  :  
 $c$  :  $c_2, c_4$   
 $\neg c$  :  $c_5, c_6, c_1, c_3$   
 $d$  :  $c_5$   
 $\neg d$  :  $c_6$

Propagate  $\neg c$  in

Activities

(increment=4):

$a$  6  
 $b$  6  
 $c$  6  
 $d$  2

Trail:

DL0:  $a$  :  $c_8$

$b$  :  $c_9$

DL1:  $\neg c$  : **NULL**

## SAT solving: Example 2

$$\begin{aligned} c_1 : (\underline{a} \vee \underline{b} \vee \underline{\neg c}) \wedge c_2 : (\underline{b} \vee \underline{c}) \wedge c_3 : (\neg \underline{a} \vee \underline{b} \vee \underline{\neg c}) \wedge c_4 : (\underline{a} \vee \neg \underline{b} \vee \underline{c}) \wedge \\ c_5 : (\underline{a} \vee \underline{\neg c} \vee \underline{d}) \wedge c_6 : (\underline{\neg c} \vee \underline{\neg d}) \wedge c_7 : (\underline{a} \vee \underline{b}) \wedge c_8 : (\underline{a}) \wedge c_9 : (\underline{\neg a} \vee \underline{b}) \end{aligned}$$

Watch lists:

$a$  :  $c_7, c_1, c_4$   
 $\neg a$  :  $c_9$   
 $b$  :  $c_2, c_3, c_7, c_9$   
 $\neg b$  :  
 $c$  :  $c_2, c_4$   
 $\neg c$  :  $c_5, c_6, c_1, c_3$   
 $d$  :  $c_5$   
 $\neg d$  :  $c_6$

Activities

(increment=4):

$a$  6  
 $b$  6  
 $c$  6  
 $d$  2

Trail:

DL0:  $a$  :  $c_8$

$b$  :  $c_9$

DL1:  $\neg c$  : **NULL**

Propagate  $\neg c$  in  $c_2 : (\underline{b} \vee \underline{c})$

## SAT solving: Example 2

$$\begin{aligned} c_1 : (\underline{a} \vee \underline{b} \vee \underline{\neg c}) \wedge c_2 : (\underline{b} \vee \underline{c}) \wedge c_3 : (\neg \underline{a} \vee \underline{b} \vee \underline{\neg c}) \wedge c_4 : (\underline{a} \vee \neg \underline{b} \vee \underline{c}) \wedge \\ c_5 : (\underline{a} \vee \underline{\neg c} \vee \underline{d}) \wedge c_6 : (\underline{\neg c} \vee \underline{\neg d}) \wedge c_7 : (\underline{a} \vee \underline{b}) \wedge c_8 : (\underline{a}) \wedge c_9 : (\underline{\neg a} \vee \underline{b}) \end{aligned}$$

Watch lists:

$a$  :  $c_7, c_1, c_4$   
 $\neg a$  :  $c_9$   
 $b$  :  $c_2, c_3, c_7, c_9$   
 $\neg b$  :  
 $c$  :  $c_2, c_4$   
 $\neg c$  :  $c_5, c_6, c_1, c_3$   
 $d$  :  $c_5$   
 $\neg d$  :  $c_6$

Activities

(increment=4):

$a$  6  
 $b$  6  
 $c$  6  
 $d$  2

Trail:

DL0:  $a$  :  $c_8$

$b$  :  $c_9$

DL1:  $\neg c$  : **NULL**

Propagate  $\neg c$  in  $c_4 : (\underline{a} \vee \neg \underline{b} \vee \underline{c})$

## SAT solving: Example 2

$$\begin{aligned} c_1 : (\underline{a} \vee \underline{b} \vee \underline{\neg c}) \wedge c_2 : (\underline{b} \vee \underline{c}) \wedge c_3 : (\neg \underline{a} \vee \underline{b} \vee \underline{\neg c}) \wedge c_4 : (\underline{a} \vee \neg \underline{b} \vee \underline{c}) \wedge \\ c_5 : (\underline{a} \vee \underline{\neg c} \vee \underline{d}) \wedge c_6 : (\underline{\neg c} \vee \underline{\neg d}) \wedge c_7 : (\underline{a} \vee \underline{b}) \wedge c_8 : (\underline{a}) \wedge c_9 : (\underline{\neg a} \vee \underline{b}) \end{aligned}$$

Watch lists:

$a$  :  $c_7, c_1, c_4$   
 $\neg a$  :  $c_9$   
 $b$  :  $c_2, c_3, c_7, c_9$   
 $\neg b$  :  
 $c$  :  $c_2, c_4$   
 $\neg c$  :  $c_5, c_6, c_1, c_3$   
 $d$  :  $c_5$   
 $\neg d$  :  $c_6$

Decide  $\neg d$

Activities

(increment=4):

$a$  6  
 $b$  6  
 $c$  6  
 $d$  2

Trail:

DL0:  $a$  :  $c_8$   
 $b$  :  $c_9$   
DL1:  $\neg c$  : *NULL*  
DL2:  $\neg d$  : *NULL*

## SAT solving: Example 2

$$\begin{aligned} c_1 : (\underline{a} \vee \underline{b} \vee \underline{\neg c}) \wedge c_2 : (\underline{b} \vee \underline{c}) \wedge c_3 : (\neg \underline{a} \vee \underline{b} \vee \underline{\neg c}) \wedge c_4 : (\underline{a} \vee \neg \underline{b} \vee \underline{c}) \wedge \\ c_5 : (\underline{a} \vee \underline{\neg c} \vee \underline{d}) \wedge c_6 : (\underline{\neg c} \vee \underline{\neg d}) \wedge c_7 : (\underline{a} \vee \underline{b}) \wedge c_8 : (\underline{a}) \wedge c_9 : (\underline{\neg a} \vee \underline{b}) \end{aligned}$$

Watch lists:

$a$  :  $c_7, c_1, c_4$   
 $\neg a$  :  $c_9$   
 $b$  :  $c_2, c_3, c_7, c_9$   
 $\neg b$  :  
 $c$  :  $c_2, c_4$   
 $\neg c$  :  $c_5, c_6, c_1, c_3$   
 $d$  :  $c_5$   
 $\neg d$  :  $c_6$

Propagate  $\neg d$  in

Activities

(increment=4):

$a$  6  
 $b$  6  
 $c$  6  
 $d$  2

Trail:

DL0:  $a$  :  $c_8$   
 $b$  :  $c_9$   
DL1:  $\neg c$  : *NULL*  
DL2:  $\neg d$  : *NULL*

## SAT solving: Example 2

$$\begin{aligned} c_1 : (\underline{a} \vee \underline{b} \vee \underline{\neg c}) \wedge c_2 : (\underline{b} \vee \underline{c}) \wedge c_3 : (\neg \underline{a} \vee \underline{b} \vee \underline{\neg c}) \wedge c_4 : (\underline{a} \vee \neg \underline{b} \vee \underline{c}) \wedge \\ c_5 : (\underline{a} \vee \underline{\neg c} \vee \underline{d}) \wedge c_6 : (\underline{\neg c} \vee \underline{\neg d}) \wedge c_7 : (\underline{a} \vee \underline{b}) \wedge c_8 : (\underline{a}) \wedge c_9 : (\underline{\neg a} \vee \underline{b}) \end{aligned}$$

Watch lists:

$a$  :  $c_7, c_1, c_4$   
 $\neg a$  :  $c_9$   
 $b$  :  $c_2, c_3, c_7, c_9$   
 $\neg b$  :  
 $c$  :  $c_2, c_4$   
 $\neg c$  :  $c_5, c_6, c_1, c_3$   
 $d$  :  $c_5$   
 $\neg d$  :  $c_6$

Activities

(increment=4):

$a$  6  
 $b$  6  
 $c$  6  
 $d$  2

Trail:

DL0:  $a$  :  $c_8$   
 $b$  :  $c_9$   
DL1:  $\neg c$  : *NULL*  
DL2:  $\neg d$  : *NULL*

Propagate  $\neg d$  in  $c_5 : (\underline{a} \vee \underline{\neg c} \vee \underline{d})$

# SAT solving: Example 2

$$\begin{aligned} c_1 : (\underline{a} \vee \underline{b} \vee \underline{\neg c}) \wedge c_2 : (\underline{b} \vee \underline{c}) \wedge c_3 : (\neg \underline{a} \vee \underline{b} \vee \underline{\neg c}) \wedge c_4 : (\underline{a} \vee \neg \underline{b} \vee \underline{c}) \wedge \\ c_5 : (\underline{a} \vee \underline{\neg c} \vee \underline{d}) \wedge c_6 : (\underline{\neg c} \vee \underline{\neg d}) \wedge c_7 : (\underline{a} \vee \underline{b}) \wedge c_8 : (\underline{a}) \wedge c_9 : (\underline{\neg a} \vee \underline{b}) \end{aligned}$$

Watch lists:

$a$  :  $c_7, c_1, c_4$   
 $\neg a$  :  $c_9$   
 $b$  :  $c_2, c_3, c_7, c_9$   
 $\neg b$  :  
 $c$  :  $c_2, c_4$   
 $\neg c$  :  $c_5, c_6, c_1, c_3$   
 $d$  :  $c_5$   
 $\neg d$  :  $c_6$

$\Rightarrow$  SAT     $a$     $b$     $\neg c$     $\neg d$

Activities

(increment=4):

$a$    6  
 $b$    6  
 $c$    6  
 $d$    2

Trail:

DL0:     $a$  :  $c_8$   
           $b$  :  $c_9$   
DL1:     $\neg c$  : *NULL*  
DL2:     $\neg d$  : *NULL*

- How to compute with the DPLL+CDCL-based SAT solving algorithm?