

Cours

C. LACOUTURE

Année scolaire 2024-2025, MPSI2, Lycée Carnot

Table des matières

I	Algèbre	7
1	Structure de groupe	9
1.1	Présentation	10
1.1.1	Exemple préliminaire	10
1.1.2	Définition générale	10
1.1.3	Exemples usuels	10
1.1.4	Compléments	10
1.1.5	Notations	10
1.1.6	Autres remarques	10
1.2	Sous-groupes	10
1.2.1	Définition	10
1.2.2	Caractérisations	10
1.2.3	Exemples usuels	10
1.2.4	Propriétés	10
1.3	Morphismes de groupes	10
1.3.1	Définition	10
1.3.2	Exemples usuels	10
1.3.3	Propriétés	10
2	Structure d'anneau et de corps	11
2.1	Structure d'anneau	12
2.1.1	Présentation	12
2.1.2	Propriétés	12
2.1.3	Sous-anneau	12
2.2	Structure de corps	12
2.2.1	Définition	12
2.2.2	Exemples usuels	12
2.2.3	Propriétés	12
2.2.4	Sous-corps	12

3	Corps des nombres réels	13
3.1	Généralités	14
3.2	Borne supérieure ou inférieure d'une partie de \mathbb{R}	14
3.2.1	Définition	14
3.2.2	Existence-unicité	14
3.2.3	Mise en garde	14
3.2.4	Caractérisation	14
3.3	Valeurs approchées d'un réel à α près (où $\alpha \in \mathbb{Q}^{*+}$)	14
3.3.1	Résultat et définition	14
3.3.2	Cas où $\alpha = 1$	14
3.3.3	Cas où $\alpha = \frac{1}{10^n}$ ($n \in \mathbb{N}$)	14
3.4	Densité	14
3.4.1	Définitions	14
3.4.2	Caractérisation	14
3.4.3	Compléments	14
4	Corps des nombres complexes	15
4.1	Conjugaison	15
4.1.1	Définition	15
4.1.2	Propriétés	15
4.2	Module	15
4.2.1	Définition	15
4.2.2	Propriétés	16
4.2.3	Nombres complexes de module 1	16
4.3	Forme trigonométrique	17
4.3.1	Définition	17
4.3.2	Premiers exemples	17
4.3.3	Relations entre forme algébrique et trigonométrique	17
4.3.4	Formules diverses	17
4.3.5	Interprétation géométrique	17
4.4	Équation $z^n = a$ (où $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{C}^*$)	17
4.4.1	Résolution	17
4.4.2	1 ^{er} cas particulier : racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité	17
4.4.3	Cas particulier des racines carrées d'un complexe	17
4.5	Traduction complexe de transformations géométriques	17
4.5.1	Symétries	17
4.5.2	Translations	17
4.5.3	Homothéties	17
4.5.4	Rotations	17
4.5.5	Similitudes directes	17
4.6	Exponentielle complexe	17

4.6.1	Définition	17
4.6.2	Propriétés	17
5	Anneau $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à une indéterminée à coefficients dans un corps \mathbb{K}	19
5.1	Présentation	20
5.1.1	Définitions	20
5.1.2	Opérations sur les polynômes	20
5.1.3	Propriétés	20
5.1.4	Structures	20
5.1.5	Composée	20
5.2	Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$	20
5.2.1	Énoncé	20
5.2.2	Exemples	20
5.2.3	Divisibilité	20
5.3	PGCD, PPCM dans $\mathbb{K}[X]$	20
5.3.1	Définition pour PGCD	20
5.3.2	Propriétés	20
5.3.3	Polynômes premiers entre eux	20
5.3.4	PPCM dans $\mathbb{K}[X]$	20
5.4	Zéros (ou racines) d'un polynôme	20
5.4.1	Définitions	20
5.4.2	Relation entre les racines et le degré d'un polynôme	20
5.4.3	Polynôme dérivé	20
5.4.4	Caractérisation d'un zéro d'ordre n	20
5.5	Polynômes irréductibles	20
5.5.1	Présentation	20
5.5.2	Décomposition générale	20
5.5.3	Dans $\mathbb{C}[X]$	20
5.5.4	Dans $\mathbb{R}[X]$	20
5.5.5	Pratique de la décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$	20
5.6	Relations coefficients-racines	20
5.6.1	Données du problème	20
5.6.2	Résolution	20
5.6.3	Applications	20
6	Fractions rationnelles	21
6.1	Présentation	22
6.1.1	Définition	22
6.1.2	Opérations	22

6.1.3	Forme irréductible	22
6.2	Décomposition en éléments simples de $F = \frac{A}{B}$ (irréductible) . .	22
6.2.1	Première étape : partie entière	22
6.2.2	Deuxième étape : décomposition de $\frac{R}{B}$	22
6.2.3	Troisième étape : généralisation	22
6.2.4	Conséquence	22
6.2.5	Quatrième étape : décomposition de $\frac{R}{P^\alpha}$	22
6.2.6	Conclusion	22
6.3	Décomposition dans $\mathbb{C}(X)$	22
6.3.1	Forme a priori	22
6.3.2	Détermination pratique des λ, μ	22
6.3.3	Exemple usuel particulier	22
6.3.4	Exemple usuel général	22
6.4	Dans $\mathbb{R}(X)$	22
6.4.1	Forme a priori	22
6.4.2	Détermination pratique des λ, α, β	22
6.4.3	Exemple usuel	22
6.5	Application principale : calculs de primitive de fonctions ra- tionnelles	22
6.5.1	Définition	22
6.5.2	Méthode pour primitiver $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \in \mathbb{R}(x)$	22
7	Groupe symétrique	23
7.1	Présentation	24
7.1.1	Définitions	24
7.1.2	Exemples	24
7.2	Éléments générateurs	24
7.2.1	Transpositions	24
7.2.2	Cycles à supports disjoints	24
7.3	Signature d'une permutation	24
7.3.1	Inversions	24
7.3.2	Définitions	24
7.3.3	Cas d'une transposition	24
7.3.4	Cas d'un cycle	24
7.3.5	Morphisme signature	24

Première partie

Algèbre

Chapitre 1

Structure de groupe

1.1 Présentation

1.1.1 Exemple préliminaire

1.1.2 Définition générale

1.1.3 Exemples usuels

Ensembles de nombres

Ensemble des bijections

Ensemble des parties

1.1.4 Compléments

Unicité

Formules concernant le symétrique

Régularité de tout élément

Plus généralement

1.1.5 Notations

En notation multiplicative

En notation additive

Propriétés

1.1.6 Autres remarques

1.2 Sous-groupes

1.2.1 Définition

1.2.2 Caractérisations

1.2.3 Exemples usuels

Exemple général

Chapitre 2

Structure d'anneau et de corps

2.1 Structure d'anneau

2.1.1 Présentation

Exemple préliminaire

Définition générale

Notations

Intégrité

Exemples usuels

2.1.2 Propriétés

Élément absorbant

Ensemble des inversibles

"Opposé" d'un produit

Loi "soustraction"

Formule du binôme de Newton

Formule de factorisation

2.1.3 Sous-anneau

Caractérisation

Exemple usuel : sous-anneau des décimaux

2.2 Structure de corps

2.2.1 Définition

2.2.2 Exemples usuels

2.2.3 Propriétés

Intégrité

Chapitre 3

Corps des nombres réels

3.1 Généralités

3.2 Borne supérieure ou inférieure d'une partie de \mathbb{R}

3.2.1 Définition

3.2.2 Existence-unicité

Existence

Unicité

3.2.3 Mise en garde

3.2.4 Caractérisation

3.3 Valeurs approchées d'un réel à α près (où $\alpha \in \mathbb{Q}^{*+}$)

3.3.1 Résultat et définition

3.3.2 Cas où $\alpha = 1$

3.3.3 Cas où $\alpha = \frac{1}{10^n}$ ($n \in \mathbb{N}$)

Énoncé

Convergence

3.4 Densité

3.4.1 Définitions

Intervalle

Densité

3.4.2 Caractérisation

Chapitre 4

Corps des nombres complexes

4.1 Conjugaison

4.1.1 Définition

Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$. Son conjugué est : $\bar{z} = a - ib$

4.1.2 Propriétés

Formules

$$\forall z \in \mathbb{C}, z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z), z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im}(z)$$

Caractérisation

$$\begin{aligned} z \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow z = \bar{z} \\ z \in i\mathbb{R} &\Leftrightarrow z = -\bar{z} \end{aligned} \tag{4.1}$$

Pratique

Quand un nombre complexe est écrit au dénominateur, on le multiplie par son conjugué.

4.2 Module

4.2.1 Définition

$\forall z \in \mathbb{C}$, le module de z est $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$

Pratique

Pour $z = a + ib$, on a $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Lien avec la valeur absolue

Le module dans \mathbb{C} prolonge la valeur absolue dans \mathbb{R} .

4.2.2 Propriétés**Diverses**

$$\begin{aligned} \forall z \in \mathbb{C}, |z| \geq 0 \text{ et } |z| = 0 &\Leftrightarrow z = 0 \\ |z| &= |\bar{z}| \\ \forall z, z' \in \mathbb{C}, |zz'| &= |z| |z'| \end{aligned}$$

(Double) inégalité triangulaire

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}, ||z| - |z'|| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|$$

4.2.3 Nombres complexes de module 1**Description**

$U = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$. Les complexes de module 1 s'écrivent $z = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$, ce qu'on note : $e^{i\theta}$ où $\theta \in \mathbb{R} \cdot \setminus 2\pi\mathbb{Z}$

Remarque sur l'écriture $e^{i\theta}$

$$\forall \theta, e^{-i\theta} = e^{\bar{i}\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$$

Produit

$$\forall \theta, \theta', e^{i\theta} e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$$

Formule de Moivre

Formules à savoir

4.3 Forme trigonométrique

4.3.1 Définition

Résultat préliminaire

Conséquence

4.3.2 Premiers exemples

Divers

Caractérisations

4.3.3 Relations entre forme algébrique et trigonométrique

Sens direct

Sens réciproque

4.3.4 Formules diverses

4.3.5 Interprétation géométrique

4.4 Équation $z^n = a$ (où $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{C}^*$)

4.4.1 Résolution

Solutions confondues

Plus précisément

Ces n solutions sont bien distinctes

Conclusion

Géométriquement

4.4.2 1^{er} cas particulier : racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité

Définition

Description

Propriétés

Interprétation géométrique

Cas $n = 3$

4.4.3 Cas particulier des racines carrées d'un complexe

Énoncé

Obtention pratique

Chapitre 5

Anneau $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à une indéterminée à coefficients dans un corps \mathbb{K}

5.1 Présentation

5.1.1 Définitions

5.1.2 Opérations sur les polynômes

Somme

Multiplication par un élément de \mathbb{K}

Multiplication

5.1.3 Propriétés

Pour la multiplication

Pour la somme

5.1.4 Structures

Neutres

Intégrité

Inversibles

5.1.5 Composée

Définition

Degré

5.2 Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$

5.2.1 Énoncé

Unicité

Finité

Chapitre 6

Fractions rationnelles

6.1 Présentation

6.1.1 Définition

6.1.2 Opérations

Somme

Produit

Structure

6.1.3 Forme irréductible

6.2 Décomposition en éléments simples de $F = \frac{A}{B}$ (irréductible)

6.2.1 Première étape : partie entière

Énoncé

Démonstration par Analyse-Synthèse

6.2.2 Deuxième étape : décomposition de $\frac{R}{B}$

Énoncé

Démonstration

6.2.3 Troisième étape : généralisation

6.2.4 Conséquence

6.2.5 Quatrième étape : décomposition de $\frac{R}{P^\alpha}$

Résultat général

Démonstration

6.2.6 Conclusion

Chapitre 7

Groupe symétrique

7.1 Présentation

7.1.1 Définitions

Permutation

Groupe symétrique

Cardinal

7.1.2 Exemples

Généraux

Particulier

7.2 Éléments générateurs

7.2.1 Transpositions

Énoncé

Exemples

7.2.2 Cycles à supports disjoints

Résultat admis

Exemple

Pratique

7.3 Signature d'une permutation

7.3.1 Inversions

7.3.2 Définitions

7.3.3 Cas d'une transposition

7.3.4 Cas d'un cycle