# Cours

C. LACOUTURE

Année scolaire 2024-2025, MPSI2, Lycée Carnot

# Table des matières

# Première partie

# Géométrie

# Chapitre 1

# Produit scalaire

## 1.1 Généralités en dimensions quelconque

### 1.1.1 Définition

### 1.1.2 Exemples usuels

### 1.1.3 Inégalité de Cauchy Schwarz

#### Énoncé

#### Cas d'égalité

#### Illustrations

### 1.1.4 Norme associée à un produit scalaire

#### Définition

#### Propriétés caractéristiques

#### Autres propriétés

### 1.1.5 Orthogonalité de vecteurs

#### Définitions

#### Propriétés

### 1.1.6 Orthogonalité de sous-espaces

#### Définitions

#### Structure

#### Formules

### 1.1.7 Procédé d'orthogonalisation de Schmidt

#### Données du problème

#### Principe

#### Calculs

#### Conclusion

# Chapitre 2

# (Sous) espaces affines

## 2.1 Présentation théorique

### 2.1.1 Définition

### 2.1.2 Notations

### 2.1.3 Propriétés simples

### 2.1.4 Translations

## 2.2 Sous-espaces affines

### 2.2.1 Définition

### 2.2.2 Remarque

### 2.2.3 Dimension

### 2.2.4 Exemples usuels

#### Ensembles des solutions d'un système d'équations linéaires

Qui s'écrit (lorsqu'il est $\neq \emptyset$)

$$S = X_0 + \ker(A)$$

Solution particulière (origine) + noyau de la matrice associée (direction)

#### L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire

Qui s'écrit :

— Pour une équation d'ordre 1

$$y_0 + \{\lambda Y_0(x) \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Solution particulière de l'équation complète (origine) + Vect($Y_0$)
— Pour une équation d'ordre 2

### 2.2.5 Parallélisme

#### Définition

Soient $\mathcal{E}_1 = A_1 + F_1$, $\mathcal{E}_2 = A_2 + F_2$ deux sous-espaces affines de $\epsilon$.
— $\mathcal{E}_1$ est parallèle à $\mathcal{E}_2$ ($\mathcal{E}_1 \parallel$ à $\mathcal{E}_2$) ssi $F_1 \subset F_2$
— $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ sont parallèles ($\mathcal{E}_1 \parallel \mathcal{E}_2$) ssi $F_1 = F_2$

#### Propriétés

— Théorème d'Euclide
Soit $\mathcal{V}$ un sous-espace affine (d'origine $A$), de direction $F$. Soit $\Omega$ un point de $\mathcal{E}$. Il existe un unique sous-espace affine de $\mathcal{E}$ passant par $\Omega$, parallèle à $\mathcal{V}$.
C'est : $\mathcal{V}' = \Omega + F$ ($\Omega \in \mathcal{V}'$ donc $\Omega$ sert d'origine à $\mathcal{V}'.\mathcal{V}' \parallel \mathcal{V}$ donc $\mathcal{V}'$ a pour directi
et : un point origine et la direction définissent entièrement et de manière unique $\mathcal{V}'$)
— Soient $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$ 2 sous-espaces affines de $\mathcal{E}$
$\mathcal{V}_1 \parallel$ à $\mathcal{V}_2 \Rightarrow \mathcal{V}_1 = \emptyset$ ou $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_2$
Démonstration :
On a : $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$ de directions $F_1, F_2$ tel que $F_1 \subset F_2$
Dès lors : montrons que si $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 \neq \emptyset$ alors $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_2$ en effet : soit $\Omega \in \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2$. On a donc $\mathcal{V}_1 = \Omega + F_1, \mathcal{V}_1 = \Omega + F_2$. Puis : $M \in \mathcal{V}_1 \Leftrightarrow OM \in F_1 \Rightarrow OM \in F_2 \Leftrightarrow M \in \mathcal{V}_2$ d'où $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_2$.
— Ainsi :

$$\mathcal{V}_1 \parallel \mathcal{V}_2 \Rightarrow \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 \neq \emptyset \text{ ou } \mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_2$$

### 2.2.6 Intersection

On a 2 sous-espaces affines : $\mathcal{V}_1 = A_1 + F_1, \mathcal{V}_1 = A_2 + F_2$

#### CNS d'existence

$\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 \neq \emptyset \Leftrightarrow \overrightarrow{A_1A_2} \in F_1 + F_2$
Démonstration :

$\Rightarrow$
On a : $\Omega \in \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2$
Dès lors $\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{A_1\Omega} + \overrightarrow{\Omega A_2}$ donc $\overrightarrow{A_1A_2} \in F_2 + F_2$
$\Leftarrow$
On a : $\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}$ où $\overrightarrow{u_1} \in F_1, \overrightarrow{u_2} \in F_2$
Dès lors $\exists M_1 \in \mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{A_1M_1} = \overrightarrow{u_1}$, $\exists M_2 \in \mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{A_2M_2} = -\overrightarrow{u_2}$
donc $M_1 = A_1 + \overrightarrow{u_1} \in A_1 + F_1 = \mathcal{V}_1, M_2 = A_2 - \overrightarrow{u_2} \in A_2 + F_2 = \mathcal{V}_2$
donc $\overrightarrow{A_1A_1} = \overrightarrow{A_1M_1} - \overrightarrow{A_2M_2} = \overrightarrow{A_1M_1} + \overrightarrow{M_2A_2}$ donc $\overrightarrow{A_1M_1} + \overrightarrow{M_1A_2} = \overrightarrow{A_1M_1} + \overrightarrow{M_2A_2}$ c-à-d $\overrightarrow{M_1A_2} = \overrightarrow{M_2A_2}$ c-à-d $M_1 = M_2$ donc $M_1 = M_2 \in \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2$ donc $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2$ non vide.

#### Conséquence

Si $E = F_1 + F_2$ alors $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 \neq \emptyset$

#### Structure de $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2$ quand $\neq \emptyset$

$\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$, de direction $F_1 \cap F_2$.
On a : $\Omega \in \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2$ donc $\mathcal{V}_1 = \Omega + F1, \mathcal{V}_2 = \Omega + F2$
Dès lors : $M \in \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 \Leftrightarrow M \in \mathcal{V}_1$ et $M \in \mathcal{V}_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M} \in F_1$ et $\overrightarrow{\Omega M} \in F_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M} \in F_1 \cup F_2 \Leftrightarrow M \in \Omega + F_1 \cup F_2$
Donc $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 = \Omega + F_1 \cup F_2$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ de direction $F_1 \cup F_2$.

#### Conséquence immédiate

Si $E = F_1 \oplus F_2$ alors $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 = \{\text{un point}\}$
Car : on a $E = F_1 + F_2$ donc $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 \neq \emptyset$
Soit $\Omega \in \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2$
On a alors $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 = \Omega + F_1 \cup F_2 = \Omega + \{O_E\} = \{\Omega\}$

### 2.2.7 Pratique : positions relatives de droites et plans

#### En dimension 2 (dans un plan affine)

Deux droites sont parallèles ou sécantes en un point.

#### En dimension 3 (dans un "véritable" espace affine)

— Pour deux plans affines
    Deux plans $\mathcal{P}_1$,$\mathcal{P}_2$ sont parallèles ou sécants selon une droite

Démonstration : $\mathcal{P}_1 = A_1 + P_1, \mathcal{P}_2 = A_2 + P_2$ où $P_2, P_2$ plans vectoriels de $E = E_3$

— Soit $P_1 = P_2$ c-à-d $\mathcal{P}_2 \parallel \mathcal{P}_2$

— Soit $P_1 \neq P_2$

$\exists \overrightarrow{u_2} \in P_2$ tel que $\overrightarrow{u_2} \notin P_1$ On sait alors que $P_1 \oplus \text{Vect}(\overrightarrow{u_2}) = E_3$ (cf cours sur les hyperplans, $P_1$ en étant un) avec $\text{Vect}(\overrightarrow{u_2}) \subset P_2$ puis $E_3 = P_1 + \text{Vect}(\overrightarrow{u_2}) \subset P_1 + P_2$ donc $P_1 + P_2 = E_3$ donc $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \neq \emptyset$ donc $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ est un espace affine de direction $P_1 \cap P_2$ avec $\dim P_1 \cap P_2 = \dim P_1 + \dim P_2 - \dim P_1 + P_2 = 2 + 2 - 3 = 1$ donc $P_1 \cap P_2$ est une droite vectorielle bref $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants selon une droite affine.

— Pour une droite et un plan

$\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ sont tels que $\mathcal{P} \parallel$ à $\mathcal{P}$ ou $\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \{1 \text{ point}\}$

Démonstration : $\mathcal{D} = A + D$, $\mathcal{P} = B + P$

— Soit $D \subset P$ c-à-d $\mathcal{D} \parallel$ à $\mathcal{P}$

— Soit $D \not\subset P$

Alors $P \oplus D = E_3$ (cf cours sur les hyperplans) donc $\mathcal{P} \cap \mathcal{D} = 1 point$

— Pour deux droites : $\mathcal{D}_1 = A_1 + D_1$, $\mathcal{D}_2 = A_2 + D_2$

— Définition de la coplanarité $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont coplanaires ssi $\mathcal{D}_1 parr \mathcal{D}_2 ou \mathcal{D}_1 inter \mathcal{D}_2$ {un point}

— En notant $\mathcal{D}_1 = A_1 + \text{Vect}(\overrightarrow{u_1}), \mathcal{D}_2 = A_2 + \text{Vect}(\overrightarrow{u_2})$

On a : $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ coplanaires $\Leftrightarrow (\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$ lié.

Démonstration : (A1A2,u1,u2) lié signifie :

— $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont colinéaires, c-à-d $D_1 = \text{Vect}(\overrightarrow{u_1}) = D_2 = \text{Vect}(\overrightarrow{u_2})$ c-à-d $\mathcal{D}_1 \parallel \mathcal{D}_2$

— $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ non colinéaires, avec $\overrightarrow{A_1A_2} \in \text{Vect}(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$ c-à-d $\overrightarrow{A_1A_2} \in D_1 + D_2$ c-à-d $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 \neq \emptyset$ c-à-d $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \{\text{un point}\}$ car $D_1 \cap D_2 = \text{Vect}(\overrightarrow{u_1}) \cap \text{Vect}(\overrightarrow{u_2}) = \{O_E\}$

## 2.3 Étude analytique

### 2.3.1 Définitions générales

#### Repère cartésien (ou affine)

Un repère cartésien d'un espace affine $\mathcal{E}$ (de direction $E$) est : $\mathcal{R} = (O, e_1, e_2, ..., e_n)$ où :

— $O \in \mathcal{E}$ (origine du repère)

— $(e1, ..., en)$ base de $E$

**Coordonnées cartésiennes**

$\forall M \in \mathcal{E}, \exists!(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\overrightarrow{OM} = x_1\overrightarrow{e_1} + ... + x_n\overrightarrow{e_n}$$

car $\overrightarrow{OM} \in E$ et $(e_1, ..., e_n)$ base de $E$.

$(x_1, ..., x_n)$ ou $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ sont les coordonnées cartésiennes du point $M$, dans le repère cartésien $(O, e_1, ..., e_n)$.

**Équation cartésienne**

Soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ ($\mathcal{F}$ : partie de $\mathcal{E}$). On appelle équation cartésienne de $\mathcal{F}$, toute relation entre les coordonnées cartésiennes $x_1, ..., x_n$ d'un point $M$ de $\mathcal{E}$. Cette relation exprime une CNS pour que $M \in \mathcal{F}$.

**Repère orthonormé**

Dans le cas où $E$ est un $\mathbb{R}$ev euclidien et $(e_1, ..., e_n)$ est une BON de $E$ $(O, e_1, ..., e_n)$ est un RON (repère orthonormé) de $\mathcal{E}$

### 2.3.2 Exemples en dimension 2

$\mathcal{E}_2$ a pour repère cartésien $(O, i, j)$. Les droites $\mathcal{D}$ de $\mathcal{E}_2$ sont les parties de $\mathcal{E}_2$ d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ où $(a, b) \neq (0, 0)$

Démonstration :

$\boxed{\text{sens direct}}$ Soit $\mathcal{D}$ une droite de $\mathcal{E}_2$, passant par $\Omega \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ dans $(O, i, j)$, dirigée par $\overrightarrow{v} \left| \begin{array}{l} \alpha \\ \beta \end{array} \right.$ dans$(i, j)$ où $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$. On a alors :

$$\begin{aligned} M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{D} &\Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M} \in \mathcal{D} = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{v}) \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M} et \overrightarrow{v} \text{ sont liés} \\ &\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{v}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \beta(x - x_0) - \alpha(y - y_0) = 0 \\ &\Leftrightarrow \beta x - \alpha y + \alpha y_0 - \beta x_0 = 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

On a bien une équation de la forme : $ax+by+c = 0$ où $(a, b) = (\beta, -\alpha) \neq (0, 0)$

$\boxed{\text{sens réciproque}}$ Soit $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}_2$ d'équation cartésienne : $ax+by+c=0$ (où $(a,b) \neq (0,0)$) vu que $(a,b) \neq (0,0)$ : l'équation ci-dessus a des solutions (par exemple : si $a \neq 0$, $(\frac{-c}{a}, 0)$ est solution). Notons $(x_0, y_0)$ une de ces solutions. On a alors

$$\begin{aligned}
M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{D} &\Leftrightarrow ax+by+c = ax_0+by_0+c \\
&\Leftrightarrow a(x-x_0)+b(y-y_0)=0 \\
&\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-x_0 & -b \\ y-y_0 & a \end{vmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M} \text{ et } \overrightarrow{u} \text{ sont liés (où } \Omega \text{ est le point de coordonnées } \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\
&\text{dans } (O,i,j) \text{ et } \overrightarrow{u} \text{ est le vecteur de coordonnées } \left| \begin{matrix} -b \\ a \end{matrix} \right. \\
&\text{dans } (i,j) \text{ donc } \overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}) \\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M} \subset D = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}) \\
&\Leftrightarrow M \in \Omega + D
\end{aligned} \tag{2.2}$$

donc $\mathcal{D}$ est bien une droite affine, de direction $D = Vect(-ba)$

Remarques :

**Pour $\mathcal{D}$ d'équation cartésienne $ax+by+c=0$ dans $(O,i,j)$.**

Un vecteur de base de $D$ est $\overrightarrow{u} \left| \begin{matrix} -b \\ a \end{matrix} \right.$ dans $(i,j)$.

**Une équation de $D$ est : $ax+by=0$**

Vérifiée par $\left| \begin{matrix} -b \\ a \end{matrix} \right.$ et passant par $O_{E_2}$ de coordonnées (00) dans $(i,j)$.

**Dans le cas d'un espace euclidien et d'un RON $(O,i,j)$**

$D^\perp = \mathrm{Vect}(\left| \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \right.)$ car $D^\perp$ est de dimension 1 et $\left| \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \right. \cdot \left| \begin{matrix} -b \\ a \end{matrix} \right. = 0$ donc $\left| \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \right. \in D^\perp$

### 2.3.3 Exemples en dimension 3

**Les plans affines de $\mathcal{E}_3$**

Sont les parties de $\mathcal{E}_3$ d'équation cartésienne : $ax + by + cz + d = 0$ où $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$

Remarques :

— L'équation de la direction $P$ dans $(i, j, k)$ est alors $ax + by + cz = 0$

— Dans le cas d'un RON : $P^\perp = \text{Vect}(\left| \begin{array}{l} a \\ b \\ c \end{array} \right.)$

**Les droites affines de $\mathcal{E}_3$**

Sont les intersections de deux plans de $\mathcal{E}_3$ non parallèles c-à-d les parties de $\mathcal{E}_3$ définies par deux équations cartésiennes de la forme $\left\{ \begin{array}{ll} ax + by + cz + d & = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' & = 0 \end{array} \right.$

où $(a, b, c), (a', b', c') \neq (0, 0, 0)$ et sont non colinéaires (pour ne pas donner la même équation directionnelle)