

Cours

C. LACOUTURE

Année scolaire 2024-2025, MPSI2, Lycée Carnot

Table des matières

| | | |
|----------|---------------------------------------|-----------|
| I | Algèbre | 9 |
| 1 | Structure de groupe | 11 |
| 1.1 | Présentation | 11 |
| 1.1.1 | Exemple préliminaire | 11 |
| 1.1.2 | Définition générale | 11 |
| 1.1.3 | Exemples usuels | 12 |
| 1.1.4 | Compléments | 12 |
| 1.1.5 | Notations | 13 |
| 1.1.6 | Autres remarques | 14 |
| 1.2 | Sous-groupes | 14 |
| 1.2.1 | Définition | 14 |
| 1.2.2 | Caractérisations | 15 |
| 1.2.3 | Exemples usuels | 15 |
| 1.2.4 | Propriétés | 15 |
| 1.3 | Morphismes de groupes | 16 |
| 1.3.1 | Définition | 16 |
| 1.3.2 | Exemples usuels | 16 |
| 1.3.3 | Propriétés | 16 |
| 2 | Structure d'anneau et de corps | 19 |
| 2.1 | Structure d'anneau | 19 |
| 2.1.1 | Présentation | 19 |
| 2.1.2 | Propriétés | 20 |
| 2.1.3 | Sous-anneau | 20 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 2.2 | Structure de corps | 20 |
| 2.2.1 | Définition | 20 |
| 2.2.2 | Exemples usuels | 20 |
| 2.2.3 | Propriétés | 20 |
| 2.2.4 | Sous-corps | 20 |
| 3 | Corps des nombres réels | 21 |
| 3.1 | Généralités | 22 |
| 3.2 | Borne supérieure ou inférieure d'une partie de \mathbb{R} | 22 |
| 3.2.1 | Définition | 22 |
| 3.2.2 | Existence-unicité | 22 |
| 3.2.3 | Mise en garde | 22 |
| 3.2.4 | Caractérisation | 22 |
| 3.3 | Valeurs approchées d'un réel à α près (où $\alpha \in \mathbb{Q}^{*+}$) | 22 |
| 3.3.1 | Résultat et définition | 22 |
| 3.3.2 | Cas où $\alpha = 1$ | 22 |
| 3.3.3 | Cas où $\alpha = \frac{1}{10^n}$ ($n \in \mathbb{N}$) | 22 |
| 3.4 | Densité | 22 |
| 3.4.1 | Définitions | 22 |
| 3.4.2 | Caractérisation | 22 |
| 3.4.3 | Compléments | 22 |
| 4 | Corps des nombres complexes | 23 |
| 4.1 | Conjugaison | 23 |
| 4.1.1 | Définition | 23 |
| 4.1.2 | Propriétés | 23 |
| 4.2 | Module | 23 |
| 4.2.1 | Définition | 23 |
| 4.2.2 | Propriétés | 24 |
| 4.2.3 | Nombres complexes de module 1 | 24 |
| 4.3 | Forme trigonométrique | 24 |
| 4.3.1 | Définition | 24 |
| 4.3.2 | Premiers exemples | 25 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 4.3.3 | Relations entre forme algébrique et trigonométrique . . | 25 |
| 4.3.4 | Formules diverses | 25 |
| 4.3.5 | Interprétation géométrique | 26 |
| 4.4 | Équation $z^n = a$ (où $n \in \mathbb{N}^*, a \in \mathbb{C}^*$) | 26 |
| 4.4.1 | Résolution | 26 |
| 4.4.2 | 1 ^{er} cas particulier : racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité | 26 |
| 4.4.3 | Cas particulier des racines carrées d'un complexe . . . | 27 |
| 4.5 | Traduction complexe de transformations géométriques | 27 |
| 4.5.1 | Symétries | 27 |
| 4.5.2 | Translations | 27 |
| 4.5.3 | Homothéties | 27 |
| 4.5.4 | Rotations | 27 |
| 4.5.5 | Similitudes directes | 27 |
| 4.6 | Exponentielle complexe | 27 |
| 4.6.1 | Définition | 27 |
| 4.6.2 | Propriétés | 27 |
| 5 | Anneau $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à une indéterminée à coefficients dans un corps \mathbb{K} | 29 |
| 5.1 | Présentation | 30 |
| 5.1.1 | Définitions | 30 |
| 5.1.2 | Opérations sur les polynômes | 30 |
| 5.1.3 | Propriétés | 30 |
| 5.1.4 | Structures | 30 |
| 5.1.5 | Composée | 30 |
| 5.2 | Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$ | 30 |
| 5.2.1 | Énoncé | 30 |
| 5.2.2 | Exemples | 30 |
| 5.2.3 | Divisibilité | 30 |
| 5.3 | PGCD, PPCM dans $\mathbb{K}[X]$ | 30 |
| 5.3.1 | Définition pour PGCD | 30 |
| 5.3.2 | Propriétés | 30 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 5.3.3 | Polynômes premiers entre eux | 30 |
| 5.3.4 | PPCM dans $\mathbb{K}[X]$ | 30 |
| 5.4 | Zéros (ou racines) d'un polynôme | 30 |
| 5.4.1 | Définitions | 30 |
| 5.4.2 | Relation entre les racines et le degré d'un polynôme . . | 30 |
| 5.4.3 | Polynôme dérivé | 30 |
| 5.4.4 | Caractérisation d'un zéro d'ordre n | 30 |
| 5.5 | Polynômes irréductibles | 30 |
| 5.5.1 | Présentation | 30 |
| 5.5.2 | Décomposition générale | 30 |
| 5.5.3 | Dans $\mathbb{C}[X]$ | 30 |
| 5.5.4 | Dans $\mathbb{R}[X]$ | 30 |
| 5.5.5 | Pratique de la décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ | 30 |
| 5.6 | Relations coefficients-racines | 30 |
| 5.6.1 | Données du problème | 30 |
| 5.6.2 | Résolution | 30 |
| 5.6.3 | Applications | 30 |
| 6 | Fractions rationnelles | 31 |
| 6.1 | Présentation | 32 |
| 6.1.1 | Définition | 32 |
| 6.1.2 | Opérations | 32 |
| 6.1.3 | Forme irréductible | 32 |
| 6.2 | Décomposition en éléments simples de $F = \frac{A}{B}$ (irréductible) . . | 32 |
| 6.2.1 | Première étape : partie entière | 32 |
| 6.2.2 | Deuxième étape : décomposition de $\frac{R}{B}$ | 32 |
| 6.2.3 | Troisième étape : généralisation | 32 |
| 6.2.4 | Conséquence | 32 |
| 6.2.5 | Quatrième étape : décomposition de $\frac{R}{Pa}$ | 32 |
| 6.2.6 | Conclusion | 32 |
| 6.3 | Décomposition dans $\mathbb{C}(X)$ | 32 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 6.3.1 | Forme a priori | 32 |
| 6.3.2 | Détermination pratique des λ, μ | 32 |
| 6.3.3 | Exemple usuel particulier | 32 |
| 6.3.4 | Exemple usuel général | 32 |
| 6.4 | Dans $\mathbb{R}(X)$ | 32 |
| 6.4.1 | Forme a priori | 32 |
| 6.4.2 | Détermination pratique des λ, α, β | 32 |
| 6.4.3 | Exemple usuel | 32 |
| 6.5 | Application principale : calculs de primitive de fonctions rationnelles | 32 |
| 6.5.1 | Définition | 32 |
| 6.5.2 | Méthode pour primitiver $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \in \mathbb{R}(x)$ | 32 |
| 7 | Groupe symétrique | 33 |
| 7.1 | Présentation | 34 |
| 7.1.1 | Définitions | 34 |
| 7.1.2 | Exemples | 34 |
| 7.2 | Éléments générateurs | 34 |
| 7.2.1 | Transpositions | 34 |
| 7.2.2 | Cycles à supports disjoints | 34 |
| 7.3 | Signature d'une permutation | 34 |
| 7.3.1 | Inversions | 34 |
| 7.3.2 | Définitions | 34 |
| 7.3.3 | Cas d'une transposition | 34 |
| 7.3.4 | Cas d'un cycle | 34 |
| 7.3.5 | Morphisme signature | 34 |

Première partie

Algèbre

Chapitre 1

Structure de groupe

1.1 Présentation

1.1.1 Exemple préliminaire

L'ensemble \mathbb{Z} pour l'addition $+$ est tel que :

1. $\forall x, y \in \mathbb{Z}$
2. $\forall x, y, z \in \mathbb{Z}, (x + y) + z = x + (y + z)$
3. $\forall x \in \mathbb{Z}, x + 0 = 0 + x = x$
4. $\forall x \in \mathbb{Z}, x + (-x) = (-x) + x = 0$
5. et de plus $\forall x, y \in \mathbb{Z}, x + y = y + x$

Ainsi $(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe abélien / groupe commutatif.

1.1.2 Définition générale

Soit un ensemble G muni d'une loi $*$. Dès lors, $(G, *)$ a une structure de groupe si et seulement si :

- | |
|--|
| <ol style="list-style-type: none">1. $*$ est une Loi de Composition Interne (LCI) sur G. C'est-à-dire $\forall x, y \in G, x * y \in G$.2. $*$ est associative. C'est-à-dire $\forall x, y, z \in G, (x * y) * z = x * (y * z)$.3. G a un élément neutre e pour $*$. $\exists e \in G$ tel que $\forall x \in G, x * e = e * x = x$.4. Tout élément de G a un symétrique dans G. $\forall x \in G, \exists x' \in G$ tel que $x * x' = x' * x = e$. |
|--|

Si, de plus, $*$ est commutative sur G , c'est-à-dire $\forall x, y \in G, x * y = y * x$, alors G est un groupe commutatif (ou abélien).

Remarques concernant la définition :

a) attention à la place des quantificateurs : pour l'élément neutre (3.) c'est \exists puis \forall et pour le symétrique c'est \forall puis \exists .

b) attention aux 2 égalités dans la définition de l'élément neutre et des symétriques d'un élément car $*$ ne commute pas forcément.

1.1.3 Exemples usuels**Ensembles de nombres**

$(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{C}, +), (\mathbb{Q}^*, +), (\mathbb{R}_+^*, \times), (\mathbb{R}^*, \times), (\mathbb{C}^*, \times)$ Sont tous des groupes commutatifs.

Ensemble des bijections

Soit E un ensemble et $\mathcal{B}(E)$ l'ensemble des bijections de E vers E .

$$(\mathcal{B}(E), \circ) \text{ est un groupe } \underline{\text{non}} \text{ commutatif.}$$

Le neutre pour \circ est : Id_E et le symétrique de f pour \circ est f^{-1}

Ensemble des parties

Soit E un ensemble et $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E .

$$(\mathcal{P}(E), \Delta) \text{ est un groupe commutatif.}$$

Le neutre pour Δ est : \emptyset car $\forall A \subset E : A \Delta \emptyset = \emptyset \Delta A = A$ Et le symétrique de A pour Δ est A car $A \Delta A = \emptyset$

1.1.4 Compléments**Unicité**

Sont uniques l'élément neutre et le symétrique de tout élément.

Formules concernant le symétrique

a) $\forall x, y \in G : (x * y)' = y' * x'$ (avec $'$ pour symétrique) Attention à l'ordre car le groupe n'est pas forcément commutatif. **b)** $\forall x \in G (x')' = x$

Régularité de tout élément

$$\forall x, y, z \in G : x * z = y * z \implies x = y \text{ et } z * x = z * y \implies x = y$$

Ainsi on traduit que tout élément z est régulier dans le groupe $(G, *)$ c'est à dire dans un groupe, on peut "simplifier par tout élément".

Plus généralement : résolution d'équation

$$\forall x, y, z \in G : x * y = z$$

$$\implies x' * (x * y) = x' * z$$

$$\implies (x' * x) * y = x' * z \text{ car } * \text{ est associative}$$

$$\implies e * y = x' * z \text{ car } x' \text{ est symétrique de } x \text{ pour } *$$

$$\implies y = x' * z \text{ car } e \text{ neutre pour } *$$

Dans un groupe : tout élément peut, dans une égalité, "passer dans l'autre membre" sous la forme de son symétrique ... en tenant compte de l'ordre car $*$ ne commute pas forcément.

1.1.5 Notations

En pratique, un groupe est noté : $(G, +)$, même si $+$ n'est pas l'addition classique (notation additive) ou (G, \cdot) , même si \cdot n'est pas la multiplication classique (notation multiplicative) On définit alors :

En notation additive

$$\forall x \in G, \forall n \in \mathbb{Z}$$

1. si $n = 0$: $0x = 0_G$ neutre de G pour $+$.
2. si $n \in \mathbb{N}^*$: $nx = x + x + \dots + x$ (n fois).
3. si $n \in \mathbb{Z}_-^*$: $nx = (-x) + \dots + (-x)$ (-n fois) où $-x$ est le symétrique de x pour $+$.

En notation multiplicative

$$\text{Les puissances d'un selon : } \forall x \in G, \forall n \in \mathbb{Z}$$

1. si $n = 0$: $x^0 = 1_G$ neutre de G pour \cdot .
2. si $n \in \mathbb{N}^*$: $x^n = x \cdot x \cdot \dots \cdot x$ (n fois).
3. si $n \in \mathbb{Z}_-^*$: $x^n = (x^{-1}) \cdot \dots \cdot (x^{-1})$ (-n fois) où x^{-1} est le symétrique de x pour \cdot .

Propriétés des multiples d'un élément

$$\forall x \in G, \forall m, n \in \mathbb{Z}$$

1. $(m+n)x = mx + nx$ (additivité classique dans \mathbb{Z} qui devient une loi de groupe sur G)
2. $-(nx) = (-n)x = n(-x)$ ($-n$ est l'opposé classique dans \mathbb{Z} et $(-x)$ symétrique de x dans G)
3. $m(nx) = (m \times n)x$ (\times produit classique dans \mathbb{Z} et loi de groupe sur G)

Propriétés des puissances d'un élément

$$\forall x \in G, \forall m, n \in \mathbb{Z}$$

1. $x^{m+n} = x^m \cdot x^n$
2. $(x^m)^{-1} = (x^{-1})^m = x^{-m}$
3. $x^{mn} = (x^m)^n = (x^n)^m$

1.1.6 Autres remarques

Concernant les propriétés des puissances ou des multiples précédents

Parmi toutes les propriétés citées, on a pas cité $(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$ car c'est faux si \cdot ne commute pas forcément. $(x \cdot y)^n = (x \cdot y) \cdot (x \cdot y) \cdot \dots (n \text{ fois}) \cdot (x \cdot y) \neq x^n \cdot y^n = x \cdot \dots (n \text{ fois}) \cdot x \cdot y \cdot \dots (n \text{ fois}) \cdot y$

Concernant les produits cartésien de groupes

Soit $(G, +)$ et (G', \cdot) 2 groupes. $G \times G'$ est un groupe pour $*$ tel que $(x, x') * (y, y') = (x + y, x' \cdot y')$.

Le neutre de $G \times G'$ pour $*$ est : $(0_G, 1_{G'})$.

Le symétrique de (x, x') dans $G \times G'$ pour $*$ est : $(-x, x'^{-1})$

1.2 Sous-groupes

1.2.1 Définition

Soit (G, \cdot) un groupe et $H \subset G$, H est un sous-groupe de G pour \cdot si et seulement si la restriction de \cdot avec les éléments de H est muni d'une structure de groupe

1.2.2 Caractérisations

H sous-groupe de G pour \cdot :

\Leftrightarrow

- $1_G \in H$
- $\forall x, y \in H, \quad x \cdot y \in H$
- $\forall x \in H, \quad x^{-1} \in H$

\Leftrightarrow

- $1_G \in H$
- $\forall x, y \in H, \quad x \cdot y^{-1} \in H$

Remarque : Dans la majorité des cas dans la suite on montrera que (H, \cdot) est un groupe en montrant que c'est un sous-groupe d'un groupe usuel.

1.2.3 Exemples usuels

Exemple général

Les puissances d'un élément.

Soit (G, \cdot) un groupe et $a \in G$, $H = \{a^z \mid z \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe de G pour \cdot .

Les multiples d'un élément.

Soit $(G, +)$ un groupe et $a \in G$, $H = \{za \mid z \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe de G pour $+$.

Exemples particuliers

(\mathbb{U}, \times) est un groupe. Car sous-groupe de (\mathbb{C}^*, \times)

(\mathbb{U}_n, \times) est un groupe. Car sous-groupe de (\mathbb{C}^*, \times)

Sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$

Les sous-groupes de \mathbb{Z} pour $+$ sont les ensembles de la forme $n\mathbb{Z} = \{nz \mid z \in \mathbb{Z}\}$

1.2.4 Propriétés

Intersection

"Toute intersection de sous-groupes est un sous-groupe."

Soit (G, \cdot) un groupe. $(H_i)_{i \in \Delta}$ une famille de sous-groupes de G pour \cdot .
Alors $H = \bigcap_{i \in \Delta} H_i$ est un sous-groupe de G pour \cdot .

Faux pour la réunion \cup

a) contre-exemple : dans $(\mathbb{Z}, +)$

Soit $H_1 = 2\mathbb{Z} = \{2z \mid z \in \mathbb{Z}\}$ et $H_2 = 3\mathbb{Z} = \{3z \mid z \in \mathbb{Z}\}$.

Mais $H = 2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$ n'est pas un sous-groupe de \mathbb{Z} pour $+$ car :

$2 \in 2\mathbb{Z} \subset 2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z} = H$ et $3 \in 3\mathbb{Z} \subset 2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z} = H$

Mais $2 + 3 = 5 \notin H$

b) "sous conditions"

Soit G_1, G_2 sous groupes de G pour \cdot .

$G_1 \cup G_2$ est un sous-groupe de G pour $\cdot \Leftrightarrow G_1 \subset G_2$ ou $G_2 \subset G_1$

1.3 Morphismes de groupes

1.3.1 Définition

Soit $(G, +)$ et (G', \cdot) 2 groupes, soit $f : G \rightarrow G'$.

f est un morphisme de groupes si et seulement si $\forall x, y \in G : f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$

De plus :

a) si $G = G'$ et $+$ et \cdot : f est un endomorphisme

b) si f est bijective : f est un isomorphisme

b) si $G = G'$ et $+$ et \cdot et f bijective : f est un automorphisme

1.3.2 Exemples usuels

\exp est un isomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ vers (\mathbb{R}_+^*, \cdot)

\ln est un isomorphisme de (\mathbb{R}_+^*, \cdot) vers $(\mathbb{R}, +)$

\exp est un morphisme de $(\mathbb{C}, +)$ vers (\mathbb{C}^*, \cdot) car \exp n'est pas injective sur \mathbb{C}

1.3.3 Propriétés

Soit $f : (G, +) \rightarrow (G', \cdot)$ un morphisme

Images du neutre et du symétrique de tout élément

a) $f(0_G) = 1_{G'}$

b) $\forall x \in G : f(-x) = (f(x))^{-1}$ Ainsi on retrouve : $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$

Caractérisation de l'injectivité

a) notations

le noyau de f est : $\boxed{Ker(f) = \{x \in G \mid f(x) = 1_{G'}\}}$

l'image de f est : $\boxed{Im(f) = \{f(x) \mid x \in G\}}$

b) caractérisation

$\boxed{f \text{ est injective} \Leftrightarrow Ker(f) = \{0_G\}}$

Image (réciproque) d'un sous-groupe

a) image :

$\boxed{\text{Soit } H \text{ un sous-groupe de } G \text{ pour } + \text{ alors } f(H) \text{ est un sous-groupe de } G' \text{ pour } \cdot}$

b) image réciproque :

$\boxed{\text{Soit } H \text{ un sous-groupe de } G' \text{ pour } \cdot \text{ alors } f^{-1}(H) \text{ est un sous-groupe de } G \text{ pour } +}$

c) conséquences :

$\boxed{Im(f) = f(G) \text{ est un sous-groupe de } G' \text{ pour } \cdot}$

$\boxed{Ker(f) = f^{-1}(\{1_{G'}\}) \text{ est un sous groupe de } G \text{ pour } +}$

Chapitre 2

Structure d'anneau et de corps

2.1 Structure d'anneau

2.1.1 Présentation

Exemple préliminaire

\mathbb{Z} , muni de $+$ et \times , est un anneau car il respecte la définition qui va suivre. Il est noté $(\mathbb{Z}, +, \times)$.

Définition générale

Soit A un ensemble muni de deux lois : $+$ et \times

$(A, +, \times)$ est un anneau si et seulement si :

- a) $(A, +)$ est un groupe abélien (commutatif),
- b) A un groupe pour \times (pas obligatoirement abélien)
- c) \times est distributive par rapport à $+$ à gauche et à droite :
 $\forall a, b, c \in A, a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ et $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

Notations

Intégrité

Exemples usuels

2.1.2 Propriétés

Élément absorbant

Ensemble des inversibles

”Opposé” d’un produit

Loi ”soustraction”

Formule du binôme de Newton

Formule de factorisation

2.1.3 Sous-anneau

Caractérisation

Exemple usuel : sous-anneau des décimaux

2.2 Structure de corps

2.2.1 Définition

2.2.2 Exemples usuels

2.2.3 Propriétés

Intégrité

Commutativité

2.2.4 Sous-corps

Chapitre 3

Corps des nombres réels

3.1 Généralités

3.2 Borne supérieure ou inférieure d'une partie de \mathbb{R}

3.2.1 Définition

3.2.2 Existence-unicité

Existence

Unicité

3.2.3 Mise en garde

3.2.4 Caractérisation

3.3 Valeurs approchées d'un réel à α près (où $\alpha \in \mathbb{Q}^{*+}$)

3.3.1 Résultat et définition

3.3.2 Cas où $\alpha = 1$

3.3.3 Cas où $\alpha = \frac{1}{10^n}$ ($n \in \mathbb{N}$)

Énoncé

Convergence

3.4 Densité

3.4.1 Définitions

Intervalle

Densité

3.4.2 Caractérisation

Générale

Plus précisément

Remarques

Chapitre 4

Corps des nombres complexes

4.1 Conjugaison

4.1.1 Définition

4.1.2 Propriétés

Formules

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z), \quad z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im}(z)$$

Caractérisation

$$\begin{aligned} z \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow z = \bar{z} \\ z \in i\mathbb{R} &\Leftrightarrow z = -\bar{z} \end{aligned} \tag{4.1}$$

Pratique

Quand un nombre complexe est écrit au dénominateur, on le multiplie par son conjugué.

4.2 Module

4.2.1 Définition

$$\forall z \in \mathbb{C}, \text{ le module de } z \text{ est } |z| = \sqrt{z\bar{z}}$$

Pratique

$$\text{Pour } z = a + ib, \text{ on a } |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Lien avec la valeur absolue

Le module dans \mathbb{C} prolonge la valeur absolue dans \mathbb{R} .

4.2.2 Propriétés

Diverses

$$\begin{aligned}\forall z \in \mathbb{C}, |z| \geq 0 \text{ et } |z| = 0 &\Leftrightarrow z = 0 \\ |z| &= |\bar{z}| \\ \forall z, z' \in \mathbb{C}, |zz'| &= |z| |z'|\end{aligned}$$

(Double) inégalité triangulaire

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}, ||z| - |z'|| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|$$

4.2.3 Nombres complexes de module 1

Description

$U = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$. Les complexes de module 1 s'écrivent $z = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$, ce qu'on note : $e^{i\theta}$ où $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$

Remarque sur l'écriture $e^{i\theta}$

$$\forall \theta, e^{-i\theta} = \bar{e^{i\theta}} = \frac{1}{e^{i\theta}}$$

Produit

$$\forall \theta, \theta', e^{i\theta} e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$$

Formule de Moivre

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \theta \in \mathbb{R}, (\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

Formules à savoir

$$\begin{aligned}\forall \theta \in \mathbb{R}, \begin{cases} \cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \end{cases} \\ \forall \theta \in \mathbb{R}, \begin{cases} 1 + e^{i\theta} = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}} \\ 1 - e^{i\theta} = -2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}} \end{cases}\end{aligned}$$

4.3 Forme trigonométrique

4.3.1 Définition

Résultat préliminaire

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \exists! \rho > 0, \exists! u \in U \text{ tel que } z = \rho u$$

Conséquence

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \exists! \rho > 0, \exists! \theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z} \text{ tel que } z = \rho e^{i\theta}$$

4.3.2 Premiers exemples

Divers

$$\begin{aligned} 1 + i &= \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \\ 1 - i &= \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \\ -1 + i &= \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} \\ -1 - i &= \sqrt{2}e^{-i\frac{5\pi}{4}} \end{aligned}$$

Caractérisations

$$\begin{cases} z \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg z = 0(\pi) \\ z \in i\mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg z = \frac{\pi}{2}(\pi) \end{cases}$$

4.3.3 Relations entre forme algébrique et trigonométrique

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. $z = x + iy = \rho e^{i\theta}$.

Quelles relations a-t-on entre x, y, ρ, θ ?

Sens direct

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos(\theta) \\ y &= \rho \sin(\theta) \end{aligned}$$

Sens réciproque

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta &= \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x = 0, y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x = 0, y < 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ \pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

4.3.4 Formules diverses

Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$.

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$$

4.3.5 Interprétation géométrique

4.4 Équation $z^n = a$ (où $n \in \mathbb{N}^*, a \in \mathbb{C}^*$)

4.4.1 Résolution

$$z = |a|^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\arg(a)}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} \text{ où } k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$$

4.4.2 1^{er} cas particulier : racines n^{èmes} de l'unité

Définition

Pour $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble des racines n^{èmes} de l'unité est :

$$U_n = \{z \in \mathbb{C}, z^n = 1\}$$

Description

$$U_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}$$

Propriétés

- Somme : la somme des n racines n^{èmes} de l'unité vaut 0. Ainsi, penser aux racines n^{èmes} de l'unité quand on a l'expression $1+x+x^2+\dots+x^{n-1}$.
- Conjugaison : les racines n^{èmes} de l'unité sont conjuguées deux à deux.

Interprétation géométrique

Cas $n = 3$

Les 3 racines cubiques de 1 dans \mathbb{C} sont 1, $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $j^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Penser donc à j quand on a l'expression $1+x+x^2$.

4.4.3 Cas particulier des racines carrées d'un complexe

Énoncé

Obtention pratique

Équation de d°2 dans \mathbb{C}

4.5 Traduction complexe de transformations géométriques

4.5.1 Symétries

Par rapport à $O \vec{i}$

Centrale par rapport à O

Par rapport à $O \vec{j}$

4.5.2 Translations

4.5.3 Homothéties

Définition

Traduction complexe

4.5.4 Rotations

Définition

Traduction complexe

4.5.5 Similitudes directes

Définition

Traduction complexe

4.6 Exponentielle complexe

4.6.1 Définition

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$. L'exponentielle de z est :

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x (\cos(y) + i \sin(y))$$

4.6.2 Propriétés

Module - argument

L'écriture $e^x e^{iy}$ est une forme trigonométrique.

Formule fondamentale

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}, e^{z+z'} = e^z e^{z'}$$

Résolution de l'équation $e^z = a$

$e^z = a$ a une infinité de solutions :

$$z = \ln(|a|) + i(\arg(a) + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$$

Égalité

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}, e^z = e^{z'} \Leftrightarrow z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}$$

Chapitre 5

Anneau $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à une indéterminée à coefficients dans un corps \mathbb{K}

5.1 Présentation

5.1.1 Définitions

5.1.2 Opérations sur les polynômes

Somme

Multiplication par un élément de \mathbb{K}

Multiplication

5.1.3 Propriétés

Pour la multiplication

Pour la somme

5.1.4 Structures

Neutres

Intégrité

Inversibles

5.1.5 Composée

Définition

Degré

5.2 Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$

5.2.1 Énoncé

Unicité

Existence

5.2.2 Exemples

5.2.3 Divisibilité

Chapitre 6

Fractions rationnelles

6.1 Présentation

6.1.1 Définition

6.1.2 Opérations

Somme

Produit

Structure

6.1.3 Forme irréductible

6.2 Décomposition en éléments simples de $F = \frac{A}{B}$ (irréductible)

6.2.1 Première étape : partie entière

Énoncé

Démonstration par Analyse-Synthèse

6.2.2 Deuxième étape : décomposition de $\frac{R}{B}$

Énoncé

Démonstration

6.2.3 Troisième étape : généralisation

6.2.4 Conséquence

6.2.5 Quatrième étape : décomposition de $\frac{R}{P^\alpha}$

Résultat général

Démonstration

6.2.6 Conclusion

6.3 Décomposition dans $\mathbb{C}(X)$

6.3.1 Forme a priori

6.3.2 Détermination pratique des λ, μ

Chapitre 7

Groupe symétrique

7.1 Présentation

7.1.1 Définitions

Permutation

Groupe symétrique

Cardinal

7.1.2 Exemples

Généraux

Particulier

7.2 Éléments générateurs

7.2.1 Transpositions

Énoncé

Exemples

7.2.2 Cycles à supports disjoints

Résultat admis

Exemple

Pratique

7.3 Signature d'une permutation

7.3.1 Inversions

7.3.2 Définitions

7.3.3 Cas d'une transposition

7.3.4 Cas d'un cycle

7.3.5 Morphisme signature