

# Cours

C. LACOUTURE

Année scolaire 2024-2025, MPSI2, Lycée Carnot



# Table des matières

<b>I</b>	<b>Analyse</b>	<b>11</b>
<b>1</b>	<b>Suites réelles (ou complexes)</b>	<b>13</b>
1.1	Majoration, minoration . . . . .	14
1.1.1	Définitions . . . . .	14
1.1.2	Caractérisation . . . . .	14
1.2	Limite . . . . .	14
1.2.1	Définition préliminaire : voisinage d'un point . . . . .	14
1.2.2	Définitions . . . . .	14
1.2.3	Théorèmes relatifs à la valeur absolue . . . . .	14
1.2.4	Théorèmes relatifs à la relation d'ordre $\leq$ . . . . .	14
1.2.5	Théorèmes opératoires . . . . .	14
1.3	Suites usuelles . . . . .	14
1.3.1	Suites arithmétiques . . . . .	14
1.3.2	Suites géométriques . . . . .	14
1.3.3	Suites arithmético-géométriques . . . . .	14
1.4	Monotonie . . . . .	14
1.4.1	Définitions . . . . .	14
1.4.2	Théorème fondamental . . . . .	14
1.4.3	À savoir . . . . .	14
1.5	Deux notions complémentaires . . . . .	14
1.5.1	Suites adjacentes . . . . .	14
1.5.2	Suites extraites . . . . .	14
1.5.3	Applications . . . . .	14
1.6	Théorème de la moyenne de Cesaro . . . . .	14
1.6.1	Énoncé . . . . .	14
1.6.2	Démonstration . . . . .	14
1.7	Suites récurrentes . . . . .	14
1.7.1	Définition . . . . .	14
1.7.2	Remarque . . . . .	14
1.7.3	Méthode générale . . . . .	14

<b>2 Fonctions numériques (ou à valeurs complexes) d'une variable réelle, limite, continuité</b>	<b>15</b>
2.1 Limite . . . . .	16
2.1.1 Définition générale . . . . .	16
2.1.2 Traductions . . . . .	16
2.1.3 Théorèmes . . . . .	16
2.1.4 Théorèmes de la limite monotone . . . . .	16
2.2 Continuité . . . . .	16
2.2.1 En un point . . . . .	16
2.2.2 Sur un intervalle . . . . .	16
2.3 Continuité et intervalle . . . . .	16
2.3.1 Résultat général . . . . .	16
2.3.2 Pour un segment . . . . .	16
2.3.3 Pour une fonction strictement monotone . . . . .	16
<b>3 Relations de comparaison</b>	<b>17</b>
3.1 Sur les suites . . . . .	18
3.1.1 Définitions . . . . .	18
3.1.2 Propriétés . . . . .	18
3.1.3 Relations de négligeabilité usuelles . . . . .	18
3.2 Sur les fonctions d'une variable réelle . . . . .	18
3.2.1 Définitions . . . . .	18
3.2.2 Propriétés . . . . .	18
3.2.3 Exemples usuels de négligeabilité . . . . .	18
3.2.4 Exemples usuels d'équivalence . . . . .	18
<b>4 Dérivabilité d'une fonction numérique (ou à valeurs complexes) définie sur un intervalle de <math>\mathbb{R}</math></b>	<b>19</b>
4.1 Présentation . . . . .	20
4.1.1 En un point . . . . .	20
4.1.2 Sur un intervalle . . . . .	20
4.1.3 Théorèmes . . . . .	20
4.2 Dérivées d'ordres supérieurs . . . . .	20
4.2.1 Définitions . . . . .	20
4.2.2 Théorèmes . . . . .	20
4.3 Théorèmes de Rolle et application . . . . .	20
4.3.1 Présentation . . . . .	20
4.3.2 Autres applications : le théorème des accroissements finis (TAF) . . . . .	20
4.3.3 "Applications d'applications" . . . . .	20
4.4 Monotonie et extrema . . . . .	20

4.4.1	Monotonie . . . . .	20
4.4.2	Extrema . . . . .	20
<b>5</b>	<b>Fonctions trigonométriques</b>	<b>21</b>
5.1	Rappel et compléments sur les fonctions sinus et cosinus . . .	21
5.1.1	Valeurs usuelles . . . . .	21
5.1.2	Formules élémentaires . . . . .	21
5.1.3	Parité, périodicité . . . . .	21
5.1.4	Égalités . . . . .	22
5.1.5	cosinus et sinus de sommes . . . . .	22
5.1.6	Produit de cosinus, sinus . . . . .	23
5.1.7	Sommes de cosinus, sinus . . . . .	23
5.1.8	Compléments . . . . .	23
5.2	Fonction tangente . . . . .	24
5.2.1	Étude de la fonction . . . . .	24
5.2.2	Compléments . . . . .	24
<b>6</b>	<b>Fonctions circulaires réciproques</b>	<b>27</b>
6.1	Fonction arcsinus . . . . .	28
6.1.1	Définition . . . . .	28
6.1.2	Variations et graphe . . . . .	28
6.1.3	Formules . . . . .	28
6.1.4	Dérivation . . . . .	28
6.2	Fonction arccosinus . . . . .	28
6.2.1	Définition . . . . .	28
6.2.2	Variations et graphe . . . . .	28
6.2.3	Formules . . . . .	28
6.2.4	Dérivation . . . . .	28
6.2.5	Égalités supplémentaires . . . . .	28
6.3	Fonction arctan . . . . .	28
6.3.1	Définition . . . . .	28
6.3.2	Variations et graphe . . . . .	28
6.3.3	Formules . . . . .	28
6.3.4	Dérivation . . . . .	28
6.3.5	Égalité supplémentaire . . . . .	28
<b>7</b>	<b>Fonctions logarithmes, exponentielles, puissances réelles</b>	<b>29</b>
7.1	Fonction logarithme . . . . .	30
7.1.1	Définition . . . . .	30
7.1.2	Formules . . . . .	30
7.1.3	Étude de la fonction $\ln$ . . . . .	30

7.2	Fonction exponentielle . . . . .	30
7.2.1	Définition . . . . .	30
7.2.2	Formule . . . . .	30
7.2.3	Graphiquement . . . . .	30
7.2.4	Dérivée . . . . .	30
7.3	Fonctions puissances réelles . . . . .	30
7.3.1	Définition . . . . .	30
7.3.2	Formules . . . . .	30
7.3.3	Étude de $x \mapsto x^\alpha = f_\alpha$ . . . . .	30
7.4	Relations de comparaisons (ou croissances comparées) . . . . .	30
7.5	Résultats généraux . . . . .	30
7.6	Autres situations . . . . .	30
<b>8</b>	<b>Fonctions hyperboliques</b>	<b>31</b>
8.1	Présentation . . . . .	32
8.1.1	Définitions . . . . .	32
8.1.2	Formules de base . . . . .	32
8.2	Étude de la fonction sh . . . . .	32
8.2.1	Domaine de définition . . . . .	32
8.2.2	Remarque de parité . . . . .	32
8.2.3	Continuité . . . . .	32
8.2.4	Dérivabilité . . . . .	32
8.2.5	Variations . . . . .	32
8.2.6	Branches infinies . . . . .	32
8.2.7	Graphe . . . . .	32
8.2.8	Limite usuelle . . . . .	32
8.3	Étude de la fonction ch . . . . .	32
8.3.1	Domaine de définition . . . . .	32
8.3.2	Remarque de parité . . . . .	32
8.3.3	Continuité . . . . .	32
8.3.4	Dérivabilité . . . . .	32
8.3.5	Variations . . . . .	32
8.3.6	Branches infinies . . . . .	32
8.3.7	Graphe . . . . .	32
8.3.8	Limite usuelle . . . . .	32
8.4	Étude de la fonction th . . . . .	32
8.4.1	Domaine de définition . . . . .	32
8.4.2	Remarque de parité . . . . .	32
8.4.3	Continuité . . . . .	32
8.4.4	Dérivabilité . . . . .	32
8.4.5	Variations . . . . .	32

8.4.6	Branches infinies . . . . .	32
8.4.7	Graphe . . . . .	32
8.4.8	Limite usuelle . . . . .	32
8.5	Petit formulaire hyperbolique . . . . .	32
<b>9</b>	<b>Fonctions convexes</b>	<b>33</b>
9.1	Présentation . . . . .	34
9.1.1	Définition . . . . .	34
9.2	Caractérisations géométriques . . . . .	34
9.2.1	Croissances des pentes dont on fixe une extrémité . . .	34
9.2.2	Convexité de la partie du plan située au dessus de la courbe . . . . .	34
9.3	Caractérisations analytiques à l'aide de dérivées . . . . .	34
9.3.1	Rapport entre convexité et dérivation . . . . .	34
9.4	Premières applications . . . . .	34
9.4.1	Inégalité usuelle . . . . .	34
9.4.2	Comparaison des moyennes arithmétiques et géométriques	34
<b>10</b>	<b>Intégration d'une fonction numérique (ou à valeurs com- plexes) sur un segment</b>	<b>35</b>
10.1	Fonctions uniformément continues . . . . .	36
10.1.1	Définition . . . . .	36
10.1.2	Caractérisation séquentielle de l'UC . . . . .	36
10.1.3	Premières propriétés . . . . .	36
10.1.4	Théorème de Heine . . . . .	36
10.2	Définitions . . . . .	36
10.2.1	Subdivision . . . . .	36
10.2.2	Fonctions en escalier . . . . .	36
10.2.3	Fonction continue par morceaux . . . . .	36
10.3	Premières propriétés . . . . .	36
10.4	Intégration des fonctions en escalier . . . . .	36
10.4.1	Définition . . . . .	36
10.4.2	Propriétés . . . . .	36
10.5	Définition générale de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux . . . . .	36
10.5.1	Approximation d'une fonction continue par morceaux par des fonctions en escaliers . . . . .	36
10.5.2	Définition de l'intégrale de $f \in \mathcal{C}_m([a, b])$ . . . . .	36
10.5.3	Propriétés . . . . .	36
10.6	Intégration sur un intervalle quelconque . . . . .	36
10.6.1	Définition . . . . .	36

10.6.2	Propriétés . . . . .	36
10.7	Compléments pour des fonctions continues . . . . .	36
10.7.1	Théorème fondamental . . . . .	36
10.7.2	Formule de la moyenne . . . . .	36
10.7.3	Théorème de positivité amélioré . . . . .	36
10.7.4	Sommes de Riemann . . . . .	36
10.7.5	IPP, changement de variables . . . . .	36
10.7.6	Autres formules de Taylor . . . . .	36
<b>11</b>	<b>Développements limités</b>	<b>37</b>
11.1	Formule de Taylor-Young . . . . .	38
11.1.1	Énoncé . . . . .	38
11.1.2	Démonstration . . . . .	38
11.1.3	Applications . . . . .	38
11.2	Définitions . . . . .	38
11.2.1	En 0 . . . . .	38
11.2.2	En $x_0$ . . . . .	38
11.2.3	En $\infty$ . . . . .	38
11.2.4	Dans la suite . . . . .	38
11.3	Premières propriétés . . . . .	38
11.3.1	DL et convergence, dérivabilité . . . . .	38
11.3.2	Ordre de DL . . . . .	38
11.3.3	Unicité . . . . .	38
11.3.4	Conséquence : remarque de parité . . . . .	38
11.4	DL usuels . . . . .	38
11.4.1	Obtention . . . . .	38
11.4.2	Énumération . . . . .	38
11.4.3	Remarques . . . . .	38
11.5	Opérations sur les DL . . . . .	38
11.5.1	Combinaison linéaire . . . . .	38
11.5.2	Produit . . . . .	38
11.5.3	Intégration . . . . .	38
11.5.4	Composée de DL . . . . .	38
11.5.5	Quotient . . . . .	38
<b>12</b>	<b>Primitives et équations différentielles</b>	<b>39</b>
12.1	Primitives . . . . .	39
12.1.1	Rappels . . . . .	39
12.1.2	Formules d'Intégration par parties (IPP) . . . . .	39
12.1.3	Calcul de $\int e^{\alpha x} P(x) dx$ . . . . .	40
12.1.4	Calcul de $\int e^{\alpha x} \cos(ax) dx, \int e^{\alpha x} \sin(ax) dx$ . . . . .	40



12.1.5	Calcul de $\int \frac{1}{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)} dx$	40
12.1.6	Calcul de $\int \frac{1}{ax^2+bx+c} dx$	40
12.2	Présentation des équations différentielles	40
12.3	Équations différentielles d'ordre 1	41
12.3.1	Définition	41
12.3.2	Résolution de l'équation différentielle homogène	42
12.3.3	Résolution de l'équation différentielle complète	42
12.4	Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants	42
12.4.1	Définition	42
12.4.2	Résolution de l'équation différentielle homogène	42
12.4.3	Résolution de l'équation différentielle complète	42
12.4.4	Existence-unicité	42
<b>13</b>	<b>Séries numériques</b>	<b>43</b>
13.1	Présentation générale	44
13.1.1	Définitions	44
13.1.2	Premières propriétés	44
13.1.3	Exemple usuel : série géométrique	44
13.2	Séries à termes positifs	44
13.2.1	Remarque générale	44
13.2.2	Théorème de comparaison par majoration	44
13.2.3	Théorème de comparaison par équivalence	44
13.2.4	Comparaison série-intégrale	44
13.3	Séries à termes quelconque	44
13.3.1	Cas des séries alternées	44
13.3.2	Séries à termes réels quelconques	44
13.3.3	Séries à termes complexes	44
<b>14</b>	<b>Familles sommables</b>	<b>45</b>
14.1	Dans le cas d'une famille de réels $\geq 0$	45
14.1.1	Définition	45
14.1.2	Remarques	45
14.1.3	Propriétés	45
14.1.4	À savoir en pratique	45
14.2	Pour une famille de réels quelconques	45
14.2.1	Définition	45
14.2.2	Caractérisation	45
14.2.3	À savoir en pratique	45
14.2.4	Contre-exemple	45
14.3	Pour une famille de termes complexes	45
14.3.1	Définition	45

14.3.2	Caractérisation . . . . .	45
14.3.3	À savoir . . . . .	45
<b>15</b>	<b>Fonctions de deux variables</b>	<b>47</b>
15.1	Premières notations . . . . .	48
15.1.1	Boule ouverte . . . . .	48
15.1.2	Partie ouverte . . . . .	48
15.1.3	Continuité . . . . .	48
15.2	Dérivabilité d'une fonction de deux variables . . . . .	48
15.2.1	Définition générale . . . . .	48
15.2.2	Dérivabilité selon les deux directions principales . . . . .	48
15.2.3	Fonction de classe $C^1$ sur $U$ . . . . .	48
15.2.4	Développement limité à l'ordre 1 pour une fonction $C^1$ au voisinage d'un point . . . . .	48
15.2.5	Dérivée composée . . . . .	48
15.2.6	Extrema d'une fonction de deux variables . . . . .	48

# Première partie

## Analyse





# Chapitre 1

## Suites réelles (ou complexes)

### 1.1 Majoration, minoration

#### 1.1.1 Définitions

#### 1.1.2 Caractérisation

### 1.2 Limite

#### 1.2.1 Définition préliminaire : voisinage d'un point

Voisinage d'un point  $a \in \mathbb{R}$

Voisinage de  $+\infty$

Voisinage de  $-\infty$

#### 1.2.2 Définitions

Générale

Ainsi :

Convergence, divergence

#### 1.2.3 Théorèmes relatifs à la valeur absolue

#### 1.2.4 Théorèmes relatifs à la relation d'ordre $\leq$

#### 1.2.5 Théorèmes opératoires

Relatifs à l'addition

Relatifs à la multiplication

Relatifs au quotient

### 1.3 Suites usuelles

#### 1.3.1 Suites arithmétiques

Définition, caractérisation



## Chapitre 2

# Fonctions numériques (ou à valeurs complexes) d'une variable réelle, limite, continuité

### 2.1 Limite

#### 2.1.1 Définition générale

#### 2.1.2 Traductions

#### 2.1.3 Théorèmes

Théorème de passages aux limites finies dans une inégalité

Théorème des limites finies par encadrement

#### 2.1.4 Théorèmes de la limite monotone

### 2.2 Continuité

#### 2.2.1 En un point

Définition

Continuité à gauche, à droite seulement

Prolongement par continuité

Caractérisation séquentielle

#### 2.2.2 Sur un intervalle

Définition

Théorèmes opératoires

Composée

Pratique





# Chapitre 3

## Relations de comparaison

### 3.1 Sur les suites

#### 3.1.1 Définitions

Domination

Négligeabilité

Équivalence

Traduction pratique

#### 3.1.2 Propriétés

Relation d'équivalence

Équivalence et limite

Équivalence et signe

Équivalence et opérations

Équivalence et somme

Équivalence et négligeabilité

Équivalence par encadrement

Mise en garde

#### 3.1.3 Relations de négligeabilité usuelles

### 3.2 Sur les fonctions d'une variable réelle

#### 3.2.1 Définitions

Domination

Négligeabilité

Équivalence

En pratique



## Chapitre 4

# Dérivabilité d'une fonction numérique (ou à valeurs complexes) définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$

### 4.1 Présentation

#### 4.1.1 En un point

Définition

Dérivabilité à gauche, à droite

Lien avec la continuité

Interprétation graphique

#### 4.1.2 Sur un intervalle

Définition

Précision

#### 4.1.3 Théorèmes

Combinaison linéaire

Produit

Quotient

Composée

Réciproque

### 4.2 Dérivées d'ordres supérieurs

#### 4.2.1 Définitions

Générale

Fonction dérivée d'ordre  $k$

# Chapitre 5

## Fonctions trigonométriques

### 5.1 Rappel et compléments sur les fonctions sinus et cosinus

#### 5.1.1 Valeurs usuelles

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \dots$$

#### 5.1.2 Formules élémentaires

$$\begin{aligned}\cos(x + \pi) &= -\cos(x) \\ \sin(x - \pi) &= -\sin(x) \\ \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= -\sin(x) \\ \cos(x - \pi) &= \sin(x) \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos(x)\end{aligned}\tag{5.1}$$

#### 5.1.3 Parité, périodicité

$\cos$  est paire,  $\sin$  est impaire, elles sont  $2\pi$ -périodiques.

### 5.1.4 Égalités

De cosinus

$$\cos(a) = \cos(b) \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \ (2\pi) \\ \boxed{\text{ou}} \\ a = -b \ (2\pi) \end{cases}$$

De sinus

$$\cos(a) = \cos(b) \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \ (2\pi) \\ \boxed{\text{ou}} \\ a = \pi - b \ (2\pi) \end{cases}$$

### 5.1.5 cosinus et sinus de sommes

Formules

$$\begin{aligned} \cos(a + b) &= \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b) \\ \cos(a - b) &= \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b) \\ \sin(a + b) &= \sin(a) \cos(b) + \sin(b) \cos(a) \\ \sin(a - b) &= \sin(a) \cos(b) - \sin(b) \cos(a) \end{aligned}$$

Conséquences

$$\begin{aligned} \cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x) \\ &= 2 \cos^2(x) - 1 \\ &= 1 - 2 \sin^2(x) \end{aligned}$$

$$\sin(2x) = 2 \cos(x) \sin(x)$$

$$\cos(3x) = 4 \cos^3(x) - 3 \cos(x)$$

$$\sin(3x) = -4 \sin^3(x) + 3 \sin(x)$$

**Écriture**

$$1 - \cos(x) = 2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$1 + \cos(x) = 2 \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

**5.1.6 Produit de cosinus, sinus**

$$\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$$

$$\sin(a) \sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$$

$$\sin(a) \cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$$

**5.1.7 Sommes de cosinus, sinus**

$$\cos(p) + \cos(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos(p) - \cos(q) = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin(p) + \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin(p) - \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

**5.1.8 Compléments****Limites usuelles**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{x^2}{2}} = 1$$

**Inégalité usuelles**

$$\forall x \in \mathbb{R}, |\sin x| \leq |x|$$

Transformation de  $a \cos + b \sin$

## 5.2 Fonction tangente

### 5.2.1 Étude de la fonction

Définition et domaine de définition

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}. \text{ tan est définie sur } \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2}(\pi) \right\}$$

Remarques de parités, périodicité

- tan est impaire
- tan est  $\pi$ -périodique
- On étudie donc tan sur  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$  car c'est identique à une étude sur tout son domaine de définition.

Continuité

tan est continue

Dérivabilité

$$\tan \text{ est dérivable avec } \tan' x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

Variations

$$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[ \quad \tan' x > 0$$

Branche infinie

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$$

Graphe

Limite usuelle

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

### 5.2.2 Compléments

Valeurs usuelles

$$\tan(0) = 0, \quad \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1, \quad \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$$



Égalité

$$\tan(a) = \tan(b) \Leftrightarrow a = b \ (\pi)$$

Formules immédiates

Tangente d'une somme

Expressions de cosinus et sinus à l'aide de la tangente de l'angle moitié

Interprétation graphique





# Chapitre 6

## Fonctions circulaires réciproques

### 6.1 Fonction arcsinus

#### 6.1.1 Définition

#### 6.1.2 Variations et graphe

#### 6.1.3 Formules

#### 6.1.4 Dérivation

### 6.2 Fonction arccosinus

#### 6.2.1 Définition

#### 6.2.2 Variations et graphe

#### 6.2.3 Formules

#### 6.2.4 Dérivation

#### 6.2.5 Égalités supplémentaires

### 6.3 Fonction arctan

#### 6.3.1 Définition

#### 6.3.2 Variations et graphe

#### 6.3.3 Formules

#### 6.3.4 Dérivation

#### 6.3.5 Égalité supplémentaire



## Chapitre 7

# Fonctions logarithmes, exponentielles, puissances réelles

### 7.1 Fonction logarithme

#### 7.1.1 Définition

#### 7.1.2 Formules

#### 7.1.3 Étude de la fonction $\ln$

Ensemble de définition

Continuité, dérivabilité

Variations

Branches infinies

Graphe

Compléments

### 7.2 Fonction exponentielle

#### 7.2.1 Définition

#### 7.2.2 Formule

#### 7.2.3 Graphiquement

#### 7.2.4 Dérivée

### 7.3 Fonctions puissances réelles

#### 7.3.1 Définition

Prolongement

Définition de la puissance rationnelle



# Chapitre 8

## Fonctions hyperboliques

### 8.1 Présentation

#### 8.1.1 Définitions

Fonction sinus hyperbolique :  $\text{sh}$

Fonction cosinus hyperbolique :  $\text{ch}$

Fonction tangente hyperbolique :  $\text{th}$

#### 8.1.2 Formules de base

### 8.2 Étude de la fonction $\text{sh}$

#### 8.2.1 Domaine de définition

#### 8.2.2 Remarque de parité

#### 8.2.3 Continuité

#### 8.2.4 Dérivabilité

#### 8.2.5 Variations

#### 8.2.6 Branches infinies

#### 8.2.7 Graphe

#### 8.2.8 Limite usuelle

### 8.3 Étude de la fonction $\text{ch}$

#### 8.3.1 Domaine de définition

#### 8.3.2 Remarque de parité

#### 8.3.3 Continuité

#### 8.3.4 Dérivabilité





# Chapitre 9

## Fonctions convexes

### 9.1 Présentation

#### 9.1.1 Définition

Générale

Remarques

Généralisation avec l'inégalité de Jensen

### 9.2 Caractérisations géométriques

#### 9.2.1 Croissances des pentes dont on fixe une extrémité

#### 9.2.2 Convexité de la partie du plan située au dessus de la courbe

Définition géométrique de la convexité

Énoncé

Démonstration

### 9.3 Caractérisations analytiques à l'aide de dérivées

#### 9.3.1 Rapport entre convexité et dérivation

Sens direct

Sens réciproque

Conséquence

### 9.4 Premières applications

#### 9.4.1 Inégalité usuelle

#### 9.4.2 Comparaison des moyennes arithmétiques et géométriques



## Chapitre 10

# Intégration d'une fonction numérique (ou à valeurs complexes) sur un segment

### 10.1 Fonctions uniformément continues

#### 10.1.1 Définition

#### 10.1.2 Caractérisation séquentielle de l'UC

#### 10.1.3 Premières propriétés

Combinaison linéaire

Implications

#### 10.1.4 Théorème de Heine

### 10.2 Définitions

#### 10.2.1 Subdivision

Définition générale

Subdivision à pas constant

#### 10.2.2 Fonctions en escalier

Définition

Exemple

#### 10.2.3 Fonction continue par morceaux

Définition

Graphiquement

### 10.3 Premières propriétés

#### 10.4 Intégration des fonctions en escalier



# Chapitre 11

## Développements limités

### 11.1 Formule de Taylor-Young

#### 11.1.1 Énoncé

#### 11.1.2 Démonstration

But

Résolution

#### 11.1.3 Applications

### 11.2 Définitions

#### 11.2.1 En 0

#### 11.2.2 En $x_0$

#### 11.2.3 En $\infty$

#### 11.2.4 Dans la suite

### 11.3 Premières propriétés

#### 11.3.1 DL et convergence, dérivabilité

Convergence

Dérivabilité

Contre-exemple

#### 11.3.2 Ordre de DL

#### 11.3.3 Unicité

#### 11.3.4 Conséquence : remarque de parité

### 11.4 DL usuels

# Chapitre 12

## Primitives et équations différentielles

### 12.1 Primitives

#### 12.1.1 Rappels

Définition

Propriété

Existence

Primitives usuelles

#### 12.1.2 Formules d'Intégration par parties (IPP)

Énoncé

Soient  $u$  et  $v$  dérivables, à dérivées continues sur un intervalle  $I$  :

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

Autre primitive usuelle

Avec une intégration par parties :

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - x$$

**12.1.3 Calcul de  $\int e^{\alpha x} P(x) dx$** **1<sup>ère</sup> méthode**

Par IPPs successives, en dérivant  $P(x)$  et primitivant  $e^{\alpha x}$ , jusqu'à abaisser à 0 le degré du polynôme.

**2<sup>ème</sup> méthode**

En posant une forme primitive à priori  $e^{\alpha x} Q(x)$  où  $Q$  polynôme tel que  $d^\circ Q = d^\circ P$ .

**12.1.4 Calcul de  $\int e^{\alpha x} \cos(ax) dx$ ,  $\int e^{\alpha x} \sin(ax) dx$** **1<sup>ère</sup> méthode**

À l'aide de deux IPPs.

**2<sup>ème</sup> méthode**

En utilisant les nombres complexes.

**12.1.5 Calcul de  $\int \frac{1}{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)} dx$** **Méthode**

On décompose la fraction en éléments simples.

**12.1.6 Calcul de  $\int \frac{1}{ax^2+bx+c} dx$** **Méthode****Exemple****12.2 Présentation des équations différentielles**

On appelle équation différentielle d'ordre  $n$  sur un intervalle  $I$  toute relation entre :

- une variable  $x$  (ou  $t$ ) décrivant  $I$
- une fonction  $f$   $n$  fois dérivable en  $I$
- ses dérivées  $f', f'', \dots, f^{(n)}$

$$\mathcal{R}(x, f, f', \dots, f^{(n)}) = 0$$

Intégrer l'équation différentielle, c'est :



- déterminer si elle a des solutions
- si oui, les trouver toutes.

## 12.3 Équations différentielles d'ordre 1

### 12.3.1 Définition

On appelle équation différentielle linéaire d'ordre 1 toute équation différentielle de la forme  $y' + a(x)y = b(x)$  où  $a, b$  sont deux fonctions continues sur un intervalle  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ ).

### 12.3.2 Résolution de l'équation différentielle homogène

### 12.3.3 Résolution de l'équation différentielle complète

À l'aide d'une solution particulière  $y_0$

Avec la méthode de "variation de la constante"

Coïncidence des 2 méthodes

Problème d'existence-unicité

## 12.4 Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

### 12.4.1 Définition

### 12.4.2 Résolution de l'équation différentielle homogène

Résultat admis en 1<sup>ère</sup> année

Cas où  $\Delta = b^2 - 4ac > 0$

Cas où  $\Delta = b^2 - 4ac = 0$

Cas où  $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

Remarques dans le cas complexe

### 12.4.3 Résolution de l'équation différentielle complète

Principe

Dans le cas où le second membre  $d(x)$  est de la forme  $e^{\gamma x} P(x) dx$

Dans le cas où le second membre  $d(x)$  est une somme d'expressions de la forme

### 12.4.4 Existence-unicité

Plus précisément

Démonstration par Analyse-Synthèse



# Chapitre 13

## Séries numériques

### 13.1 Présentation générale

#### 13.1.1 Définitions

Notations

Convergence

Divergence

Remarques

#### 13.1.2 Premières propriétés

Linéarité

Condition nécessaire

Relation suite-série

#### 13.1.3 Exemple usuel : série géométrique

### 13.2 Séries à termes positifs

#### 13.2.1 Remarque générale

#### 13.2.2 Théorème de comparaison par majoration

#### 13.2.3 Théorème de comparaison par équivalence

#### 13.2.4 Comparaison série-intégrale

Résultat

Exemple usuel des séries de Riemann

### 13.3 Séries à termes quelconque

#### 13.3.1 Cas des séries alternées

#### 13.3.2 Séries à termes réels quelconques

# Chapitre 14

## Familles sommables

### 14.1 Dans le cas d'une famille de réels $\geq 0$

#### 14.1.1 Définition

#### 14.1.2 Remarques

#### 14.1.3 Propriétés

#### 14.1.4 À savoir en pratique

### 14.2 Pour une famille de réels quelconques

#### 14.2.1 Définition

#### 14.2.2 Caractérisation

#### 14.2.3 À savoir en pratique

#### 14.2.4 Contre-exemple

### 14.3 Pour une famille de termes complexes

#### 14.3.1 Définition

#### 14.3.2 Caractérisation

#### 14.3.3 À savoir





# Chapitre 15

## Fonctions de deux variables

### 15.1 Premières notations

#### 15.1.1 Boule ouverte

#### 15.1.2 Partie ouverte

Définition

Illustration

Exemple

Remarques

#### 15.1.3 Continuité

Définition

Pratique

Premier exemple

### 15.2 Dérivabilité d'une fonction de deux variables

#### 15.2.1 Définition générale

#### 15.2.2 Dérivabilité selon les deux directions principales

#### 15.2.3 Fonction de classe $C^1$ sur $U$

#### 15.2.4 Développement limité à l'ordre 1 pour une fonction $C^1$ au voisinage d'un point

Énoncé

Notion complémentaire

Conséquence

Remarques