Cours

C. LACOUTURE

Année scolaire 2024-2025, MPSI2, Lycée Carnot

Table des matières

Première partie

Algèbre

Chapitre 1

Structure de groupe

1.1 Présentation

1.1.1 Exemple préliminaire

L'ensemble $\mathbb{Z}$ pour l'addition + est tel que :

1. $\forall x, y \in \mathbb{Z}$
2. $\forall x, y, z \in \mathbb{Z}, (x + y) + z = x + (y + z)$
3. $\forall x \in \mathbb{Z}, x + 0 = 0 + x = x$
4. $\forall x \in \mathbb{Z}, x + (-x) = (-x) + x = 0$
5. et de plus $\forall x, y \in \mathbb{Z}, x + y = y + x$

Ainsi $(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe abélien / groupe commutatif.

1.1.2 Définition générale

Soit un ensemble G muni d'une loi $*$. Dès lors, $(G, *)$ a une structure de groupe si et seulement si :

1. $*$ est une Loi de Composition Interne (LCI) sur G. C'est-à-dire $\forall x, y \in G, x * y \in G$.
2. $*$ est associative. C'est-à-dire $\forall x, y, z \in G, (x * y) * z = x * (y * z)$.
3. G a un élément neutre e pour $*$. $\exists e \in G$ tel que $\forall x \in G, x*e = e*x = x$.
4. Tout élément de G a un symétrique dans G. $\forall x \in G, \exists x' \in G$ tel que $x * x' = x' * x = e$.

Si, de plus, $*$ est commutative sur G, c'est-à-dire $\forall x, y \in G, x * y = y * x$, alors G est un groupe commutatif (ou abélien).

Remarques concernant la définition :

a) attention à la place des quantificateurs : pour l'élément neutre (3.) c'est $\exists$ puis $\forall$ et pour le symétrique c'est $\forall$ puis $\exists$.

b) attention aux 2 égalités dans la définition de l'élément neutre et des symétriques d'un élément car * ne commute pas forcément.

1.1.3 Exemples usuels

Ensembles de nombres

$(\mathbb{Z},+),(\mathbb{Q},+),(\mathbb{R},+),(\mathbb{C},+),(\mathbb{Q}^*,+),(\mathbb{R}^*_+,\times),(\mathbb{R}^*,\times),(\mathbb{C}^*,\times)$ Sont tous des groupes commutatifs.

Ensemble des bijections

Soit E un ensemble et $\mathscr{B}(E)$ l'ensemble des bijections de E vers E.

$$\boxed{(\mathscr{B}(E),\circ) \text{ est un groupe } \underline{\text{non}} \text{ commutatif.}}$$

Le neutre pour $\circ$ est : Id_E et le symétrique de f pour $\circ$ est f^{-1}

Ensemble des parties

Soit E un ensemble et $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

$$\boxed{(\mathscr{P}(E),\Delta) \text{ est un groupe commutatif.}}$$

Le neutre pour Δ est : $\emptyset$ car $\forall A \subset E : A\Delta\emptyset = \emptyset\Delta A = A$ Et le symétrique de A pour Δ est A car $A\Delta A = \emptyset$

1.1.4 Compléments

Unicité

Sont uniques l'élément neutre et le symétrique de tout élément.

Formules concernant le symétrique

a) $\forall x, y \in G$ **:** $(x * y)' = y' * x'$ (avec ' pour symétrique) Attention à l'ordre car le groupe n'est pas forcément commutatif. **b)** $\forall x \in G (x')' = x$

Régularité de tout élément

$\forall x, y, z \in G :$ $\boxed{x * z = y * z \implies x = y \text{ et } z * x = z * y \implies x = y}$

Ainsi on traduit que tout élément z est régulier dans le groupe (G, *) c'est à dire dans un groupe, on peut "simplifier par tout élément".

Plus généralement : résolution d'équation

$\forall x, y, z \in G : x * y = z$

$\implies x' * (x * y) = x' * z$

$\implies (x' * x) * y = x' * z$ car * est associative

$\implies e * y = x' * z$ car x' est symétrique de x pour *

$\implies y = x' * z$ car e neutre pour *

Dans un groupe : tout élément peut, dans une égalité, "passer dans l'autre membre" sous la forme de son symétrique ... en tenant compte de l'ordre car * ne commute pas forcément.

1.1.5 Notations

En pratique, un groupe est noté : (G, +), même si + n'est pas l'addition classique (notation additive) ou (G, $\cdot$), même si $\cdot$ n'est pas la multiplication classique (notation multiplicative) On définit alors :

En notation additive

$\forall x \in G, \forall n \in \mathbb{Z}$

1. si $n = 0$: $0x = 0_G$ neutre de G pour +.
2. si $n \in \mathbb{N}^*$: $nx = x + x + \cdots + x$ (n fois).
3. si $n \in \mathbb{Z}^*_-$: $nx = (-x) + \cdots + (-x)$ (-n fois) où $-x$ est le symétrique de x pour +.

En notation multiplicative

Les puissances d'un selon : $\forall x \in G, \forall n \in \mathbb{Z}$

1. si $n = 0$: $x^0 = 1_G$ neutre de G pour $\cdot$.
2. si $n \in \mathbb{N}^*$: $x^n = x \cdot x \cdot \cdots \cdot x$ (n fois).
3. si $n \in \mathbb{Z}^*_-$: $x^n = (x^{-1}) \cdot \cdots \cdot (x^{-1})$ (-n fois) où x^{-1} est le symétrique de x pour $\cdot$.

Propriétés des multiples d'un élément

$\forall x \in G, \forall m, n \in \mathbb{Z}$

1. $(m+n)x = mx + nx$ (additivité classique dans $\mathbb{Z}$ qui devient une loi de groupe sur G)
2. $-(nx) = (-n)x = n(-x)$ (-n est l'opposé classique dans $\mathbb{Z}$ et $(-x)$ symétrique de x dans G)
3. $m(nx) = (m \times n)x$ ($\times$ produit classique dans $\mathbb{Z}$ et loi de groupe sur G)

Propriétés des puissances d'un élément

$\forall x \in G, \forall m, n \in \mathbb{Z}$

1. $x^{m+n} = x^m \cdot x^n$
2. $(x^m)^{-1} = (x^{-1})^m = x^{-m}$
3. $x^{mn} = (x^m)^n = (x^n)^m$

1.1.6 Autres remarques

Concernant les propriétés des puissances ou des multiples précédents

Parmis toute les propriétés citées, on a pas cité $(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$ car c'est faux si $\cdot$ ne commute pas forcément. $(x \cdot y)^n = (x \cdot y) \cdot (x \cdot y) \cdot$ ...(n fois) $\cdot (x \cdot y)$ $\neq x^n \cdot y^n = x \cdot$ ...(n fois) $\cdot x \cdot y \cdot$ ...(n fois) $\cdot y$

Concernant les produits cartésien de groupes

Soit (G, +) et (G', $\cdot$) 2 groupes. G $\times$ G' est un groupe pour * tel que (x, x')*(y, y') = (x + y, x' $\cdot$ y').

Le neutre de G $\times$ G' pour * est : $(0_G, 1_{G'})$.

Le symétrique de (x, x') dans G $\times$ G' pour * est : $(-x, x'^{-1})$

1.2 Sous-groupes

1.2.1 Définition

Soit $(G, \cdot)$ un groupe et $H \subset G$, H est un sous-groupe de G pour $\cdot$ si et seulement si la restriction de $\cdot$ avec les éléments de H est muni d'une structure de groupe

1.2.2 Caractérisations

H sous-groupe de G pour $\cdot$:

$$\Leftrightarrow$$

- $1_G \in H$
- $\forall x, y \in H, \quad x \cdot y \in H$
- $\forall x \in H, \quad x^{-1} \in H$

$$\Leftrightarrow$$

- $1_G \in H$
- $\forall x, y \in H, \quad x \cdot y^{-1} \in H$

Remarque : Dans la majorité des cas dans la suite on montrera que $(H, \cdot)$ est un groupe en montrant que c'est un sous-groupe d'un groupe usuel.

1.2.3 Exemples usuels

Exemple général

Les puissances d'un élément.

Soit $(G, \cdot)$ un groupe et $a \in G, \quad H = \{a^z \mid z \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe de G pour $\cdot$.

Les multiples d'un élément.

Soit $(G, +)$ un groupe et $a \in G, \quad H = \{za \mid z \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe de G pour $+$.

Exemples particuliers

$(\mathbb{U}, \times)$est un groupe. Car sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$

$(\mathbb{U}n, \times)$est un groupe. Car sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$

Sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$

Les sous-groupes de $\mathbb{Z}$ pour $+$ sont les ensembles de la forme $n\mathbb{Z} = nz \mid z \in \mathbb{Z}$

1.2.4 Propriétés

Intersection

"Toute intersection de sous-groupes est un sous-groupe."

Soit $(G, \cdot)$ un groupe. $(H_i)_{i \in \Delta}$ une famille de sous-groupes de G pour $\cdot$.
Alors $H = \bigcap_{i \in \Delta} H_i$ est un sous-groupe de G pour $\cdot$.

Faux pour la réunion $\cup$

a) contre-exemple : dans (Z, +)

Soit $H_1 = 2\mathbb{Z} = \{2z \mid z \in \mathbb{Z}\}$ et $H_2 = 3\mathbb{Z} = \{3z \mid z \in \mathbb{Z}\}$.

Mais H = $2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$ n'est pas un sous-groupe de $\not\models$ pour + car :

$2 \in 2\mathbb{Z} \subset 2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z} = H$ et $3 \in 3\mathbb{Z} \subset 2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z} = H$

Mais $2 + 3 = 5 \notin H$

b) "sous conditions"

Soit G_1, G_2 sous groupes de G pour $\cdot$.

$\boxed{G_1 \cup G_2 \text{ est un sous-groupe de G pour } \cdot \Leftrightarrow G_1 \subset G_2 \text{ ou } G_2 \subset G_1}$

1.3 Morphismes de groupes

1.3.1 Définition

1.3.2 Exemples usuels

1.3.3 Propriétés

Chapitre 2

Structure d'anneau et de corps

2.1 Structure d'anneau

2.1.1 Présentation

Exemple préliminaire

Définition générale

Notations

Intégrité

Exemples usuels

2.1.2 Propriétés

Élément absorbant

Ensemble des inversibles

"Opposé" d'un produit

Loi "soustraction"

Formule du binôme de Newton

Formule de factorisation

2.1.3 Sous-anneau

Caractérisation

Exemple usuel : sous-anneau des décimaux

2.2 Structure de corps

2.2.1 Définition

2.2.2 Exemples usuels

2.2.3 Propriétés

Intégrité

Commutativité

2.2.4 Sous-corps

Chapitre 3

Corps des nombres réels

3.1 Généralités

3.2 Borne supérieure ou inférieure d'une partie de $\mathbb{R}$

3.2.1 Définition

3.2.2 Existence-unicité

Existence

Unicité

3.2.3 Mise en garde

3.2.4 Caractérisation

3.3 Valeurs approchées d'un réel à α près (où $\alpha \in \mathbb{Q}^{*+}$)

3.3.1 Résultat et définition

3.3.2 Cas où $\alpha = 1$

3.3.3 Cas où $\alpha = \frac{1}{10^n}(n \in \mathbb{N})$

Énoncé

Convergence

3.4 Densité

3.4.1 Définitions

Intervalle

Densité

3.4.2 Caractérisation

Générale

Plus précisément

Remarques

Chapitre 4

Corps des nombres complexes

4.1 Conjugaison

4.1.1 Définition

4.1.2 Propriétés

Formules

$\forall z \in \mathbb{C},\ z + \bar{z} = 2\text{Re}(z),\ z - \bar{z} = 2i\text{Im}(z)$

Caractérisation

$$\begin{aligned} z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z} \\ z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z = -\bar{z} \end{aligned} \tag{4.1}$$

Pratique

Quand un nombre complexe est écrit au dénominateur, on le multiplie par son conjugué.

4.2 Module

4.2.1 Définition

$\forall z \in \mathbb{C}$, le module de z est $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$

Pratique

Pour $z = a + ib$, on a $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Lien avec la valeur absolue

Le module dans $\mathbb{C}$ prolonge la valeur absolue dans $\mathbb{R}$.

4.2.2 Propriétés

Diverses

$$\forall z \in \mathbb{C}, |z| \geqslant 0 \text{ et } |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$$
$$|z| = |\bar{z}|$$
$$\forall z, z' \in \mathbb{C}, |zz'| = |z|\,|z'|$$

(Double) inégalité triangulaire

$$\forall z, z' \in \mathbb{C},\ ||z| - |z'|| \leqslant |z + z'| \leqslant |z| + |z'|$$

4.2.3 Nombres complexes de module 1

Description

$U = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$. Les complexes de module 1 s'écrivent $z = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$, ce qu'on note : $e^{i\theta}$ où $\theta \in \mathbb{R} \cdot \backslash 2\pi\mathbb{Z}$

Remarque sur l'écriture $e^{i\theta}$

$\forall \theta,\ e^{-i\theta} = \bar{e^{i\theta}} = \frac{1}{e^{i\theta}}$

Produit

$\forall \theta, \theta',\ e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$

Formule de Moivre

$\forall n \in \mathbb{Z}, \theta \in \mathbb{R},\ (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

Formules à savoir

$\forall \theta \in \mathbb{R}\ ,\ \begin{cases} \cos(\theta) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} \end{cases}$

$\forall \theta \in \mathbb{R}\ ,\ \begin{cases} 1 + e^{i\theta} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}} \\ 1 - e^{i\theta} = -2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}} \end{cases}$

4.3 Forme trigonométrique

4.3.1 Définition

Résultat préliminaire

$\forall z \in \mathbb{C}^*, \exists! \rho > 0, \exists! u \in U$ tel que $z = \rho u$

Conséquence

$\forall z \in \mathbb{C}^*, \exists! \rho > 0, \exists! \theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ tel que $z = \rho e^{i\theta}$

4.3.2 Premiers exemples

Divers

$$\begin{aligned} 1+i &= \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \\ 1-i &= \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \\ -1+i &= \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} \\ -1-i &= \sqrt{2}e^{-i\frac{5\pi}{4}} \end{aligned}$$

Caractérisations

$$\begin{cases} z \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg z = 0(\pi) \\ z \in i\mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg z = \frac{\pi}{2}(\pi) \end{cases}$$

4.3.3 Relations entre forme algébrique et trigonométrique

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. $z = x + iy = \rho e^{i\theta}$.

Quelles relations a-t-on entre x, y, ρ, θ ?

Sens direct

$x = \rho\cos(\theta)$
$y = \rho\sin(\theta)$

Sens réciproque

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x = 0y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x = 0, y < 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ \pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

4.3.4 Formules diverses

Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$.

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$$

4.3.5 Interprétation géométrique

4.4 Équation $z^n = a$ (où $n \in \mathbb{N}^*, a \in \mathbb{C}^*$)

4.4.1 Résolution

$z = |a|^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\arg(a)}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}$ où $k \in [\![0, n-1]\!]$

4.4.2 1^er^ cas particulier : racines n^èmes^ de l'unité

Définition

Pour $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble des racines n$^{\text{èmes}}$ de l'unité est :

$$U_n = \{z \in \mathbb{C},\ z^n = 1\}$$

Description

$$U_n = \left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}},\ k \in [\![0, n-1]\!]\right\}$$

Propriétés

— Somme : la somme des n racines n$^{\text{èmes}}$ de l'unité vaut 0. Ainsi, penser aux racines n$^{\text{èmes}}$ de l'unité quand on a l'expression $1+x+x^2+...+x^{n-1}$.

— Conjugaison : les racines n$^{\text{èmes}}$ de l'unité sont conjuguées deux à deux.

Interprétation géométrique

Cas $n = 3$

Les 3 racines cubiques de 1 dans $\mathbb{C}$ sont 1, $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $j^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$
Penser donc à j quand on a l'expression $1 + x + x^2$.

4.4.3 Cas particulier des racines carrées d'un complexe

Énoncé

Obtention pratique

Équation de d°2 dans $\mathbb{C}$

4.5 Traduction complexe de transformations géométriques

4.5.1 Symétries

Par rapport à $O\overrightarrow{i}$

Centrale par rapport à O

Par rapport à $O\overrightarrow{j}$

4.5.2 Translations

4.5.3 Homothéties

Définition

Traduction complexe

4.5.4 Rotations

Définition

Traduction complexe

4.5.5 Similitudes directes

Définition

Traduction complexe

4.6 Exponentielle complexe

4.6.1 Définition

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$. L'exponentielle de z est :

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$$

4.6.2 Propriétés

Module - argument

L'écriture $e^x e^{iy}$ est une forme trigonométrique.

Formule fondamentale

$\forall z, z' \in \mathbb{C},\ e^{z+z'} = e^z e^{z'}$

Résolution de l'équation $e^z = a$

$e^z = a$ a une infinité de solutions :

$$z = \ln(|a|) + i(\arg(a) + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$$

Égalité

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}, e^z = e^{z'} \Leftrightarrow z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}$$

Chapitre 5

Anneau $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à une indéterminée à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$

5.1 Présentation

5.1.1 Définitions

5.1.2 Opérations sur les polynômes

Somme

Multiplication par un élément de $\mathbb{K}$

Multiplication

5.1.3 Propriétés

Pour la multiplication

Pour la somme

5.1.4 Structures

Neutres

Intégrité

Inversibles

5.1.5 Composée

Définition

Degré

5.2 Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$

5.2.1 Énoncé

Unicité

Existence

5.2.2 Exemples

5.2.3 Divisibilité

Chapitre 6

Fractions rationnelles

6.1 Présentation

6.1.1 Définition

6.1.2 Opérations

Somme

Produit

Structure

6.1.3 Forme irréductible

6.2 Décomposition en éléments simples de $F = \frac{A}{B}$ (irréductible)

6.2.1 Première étape : partie entière

Énoncé

Démonstration par Analyse-Synthèse

6.2.2 Deuxième étape : décomposition de $\frac{R}{B}$

Énoncé

Démonstration

6.2.3 Troisième étape : généralisation

6.2.4 Conséquence

6.2.5 Quatrième étape : décomposition de $\frac{R}{P^\alpha}$

Résultat général

Démonstration

6.2.6 Conclusion

6.3 Décomposition dans $\mathbb{C}(X)$

6.3.1 Forme a priori

6.3.2 Détermination pratique des λ, μ

Chapitre 7

Groupe symétrique

7.1 Présentation

7.1.1 Définitions

Permutation

Groupe symétrique

Cardinal

7.1.2 Exemples

Généraux

Particulier

7.2 Éléments générateurs

7.2.1 Transpositions

Énoncé

Exemples

7.2.2 Cycles à supports disjoints

Résultat admis

Exemple

Pratique

7.3 Signature d'une permutation

7.3.1 Inversions

7.3.2 Définitions

7.3.3 Cas d'une transposition

7.3.4 Cas d'un cycle

7.3.5 Morphisme signature