Cours

C. LACOUTURE

Année scolaire 2024-2025, MPSI2, Lycée Carnot

Table des matières

Première partie

Arithmétique

Chapitre 1

Récurrences, sommations

1.1 Récurrences

1.1.1 Principe général

Axiome

$$\boxed{\text{si}}\ A \text{ est une partie de } \mathbb{N} \text{ tq } \begin{cases} 0 \in A \\ \forall n \in A, n+1 \in A \end{cases} \ \boxed{\text{alors}}\ A = \mathbb{N}$$

Énoncé

Soit $\mathcal{P}(n)$ une propriété dépendante de $n \in N$. $\boxed{\text{si}}$ $\begin{cases} \mathcal{P}(0)\text{vraie} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1) \end{cases}$ $\boxed{\text{alors}}$ $\mathcal{P}(n)$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$

Applications à des expressions de sommes usuelles

- Somme d'entiers consécutifs :

$$\sum_{k=0}^{n} k = 0 + 1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

- Somme des carrés :

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Démonstration : soit $\mathcal{P}(n)$ l'égalité ci-dessus.

  — $\mathcal{P}(0)$ est vraie car $\sum_{k=0}^{0} k^2 = 0 = \frac{0(0+1)(2\cdot 0+1)}{6}$
  — $\boxed{\text{si}}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie $\boxed{\text{alors}}$ montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. En effet :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \text{ par hypothèse de récurrence} \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6} \\
&= \frac{(n+1)(n(2n+1)+6(n+1))}{6} \\
&= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \\
&= \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}
\end{aligned} \tag{1.1}$$

  donc $\mathcal{P}(n+1)$ est bien vraie.
— Sommes des cubes :

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = 0^3 + 1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2$$

— Somme géométrique : soit $a \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = 1 + a^1 + a^2 + ... + a^n = \begin{cases} \frac{1-a^{n+1}}{1-a} & \text{si } a \neq 1 \\ n+1 & \text{si } a = 1 \end{cases}$$

1.1.2 Utilisation la plus fréquente

1.1.3 Variantes

1.1.4 Originalités

1.2 Sommations

1.2.1 Somme simple

1.2.2 Sommes doubles

Chapitre 2

Coefficients binomiaux

2.1 Définitions

2.1.1 Factorielle

2.1.2 Coefficient binomial

Générale

Cas particulier

2.2 Formules du triangle de Pascal

2.2.1 Énoncé

2.2.2 Pratique

2.2.3 Expression des coefficients binomiaux

2.3 Applications

2.3.1 Symétrie des coefficients binomiaux

2.3.2 Formule du binôme de Newton

2.3.3 Linéarisation

2.3.4 Inversement

2.3.5 Nombre de parties d'un ensemble

Chapitre 3

PGCD, PPCM, nombres premiers

3.1 PPCM : Plus Petit Commun Multiple

3.1.1 Définition

3.1.2 Propriétés

3.1.3 Cas particulier

3.2 PGCD : Plus Grand Commun Diviseur

3.2.1 Définition

3.2.2 Propriétés

3.2.3 Cas particulier

3.2.4 Pratique

Résultat préliminaire

Algorithme

Notations

Concrètement

Exemple : pgcd(56,23)

Remarque

3.3 Nombres premiers entre eux

3.3.1 Définition

3.3.2 Caractérisation : théorème de Bézout

3.3.3 Propriétés

Chapitre 4

Dénombrements

4.1 Cardinal d'un ensemble fini

4.1.1 Définitions

4.1.2 Propriétés

Réunion disjointe

Sous-ensemble

Réunion quelconque

Produit cartésien

4.2 Applications entre deux ensembles finis

4.2.1 Remarque préliminaire

4.2.2 Dénombrement

4.2.3 Quand E et F sont de même cardinal (fini)

4.3 Parties d'un ensemble fini

4.3.1 p-liste d'éléments distincts

4.3.2 Autre démonstration de $\mathbf{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^{\mathbf{card}(E)}$

4.3.3 Retrouvons que $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$