

Cours

C. LACOUTURE

Année scolaire 2024-2025, MPSI2, Lycée Carnot

Table des matières

I	Algèbre	7
1	Structure de groupe	9
1.1	Présentation	10
1.1.1	Exemple préliminaire	10
1.1.2	Définition générale	10
1.1.3	Exemples usuels	10
1.1.4	Compléments	10
1.1.5	Notations	10
1.1.6	Autres remarques	10
1.2	Sous-groupes	10
1.2.1	Définition	10
1.2.2	Caractérisations	10
1.2.3	Exemples usuels	10
1.2.4	Propriétés	10
1.3	Morphismes de groupes	10
1.3.1	Définition	10
1.3.2	Exemples usuels	10
1.3.3	Propriétés	10
2	Structure d'anneau et de corps	11
2.1	Structure d'anneau	12
2.1.1	Présentation	12
2.1.2	Propriétés	12
2.1.3	Sous-anneau	12
2.2	Structure de corps	12
2.2.1	Définition	12
2.2.2	Exemples usuels	12
2.2.3	Propriétés	12
2.2.4	Sous-corps	12

3	Corps des nombres réels	13
3.1	Généralités	14
3.2	Borne supérieure ou inférieure d'une partie de \mathbb{R}	14
3.2.1	Définition	14
3.2.2	Existence-unicité	14
3.2.3	Mise en garde	14
3.2.4	Caractérisation	14
3.3	Valeurs approchées d'un réel à α près (où $\alpha \in \mathbb{Q}^{*+}$)	14
3.3.1	Résultat et définition	14
3.3.2	Cas où $\alpha = 1$	14
3.3.3	Cas où $\alpha = \frac{1}{10^n}$ ($n \in \mathbb{N}$)	14
3.4	Densité	14
3.4.1	Définitions	14
3.4.2	Caractérisation	14
3.4.3	Compléments	14
4	Corps des nombres complexes	15
4.1	Conjugaison	16
4.1.1	Définition	16
4.1.2	Propriétés	16
4.2	Module	16
4.2.1	Définition	16
4.2.2	Propriétés	16
4.2.3	Nombres complexes de module 1	16
4.3	Forme trigonométrique	16
4.3.1	Définition	16
4.3.2	Premiers exemples	16
4.3.3	Relations entre forme algébrique et trigonométrique	16
4.3.4	Formules diverses	16
4.3.5	Interprétation géométrique	16
4.4	Équation $z^n = a$ (où $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{C}^*$)	16
4.4.1	Résolution	16
4.4.2	1 ^{er} cas particulier : racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité	16
4.4.3	Cas particulier des racines carrées d'un complexe	16
4.5	Traduction complexe de transformations géométriques	16
4.5.1	Symétries	16
4.5.2	Translations	16
4.5.3	Homothéties	16
4.5.4	Rotations	16
4.5.5	Similitudes directes	16
4.6	Exponentielle complexe	16

4.6.1	Définition	16
4.6.2	Propriétés	16
5	Anneau $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à une indéterminée à coefficients dans un corps \mathbb{K}	17
5.1	Présentation	18
5.1.1	Définitions	18
5.1.2	Opérations sur les polynômes	18
5.1.3	Propriétés	18
5.1.4	Structures	18
5.1.5	Composée	18
5.2	Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$	18
5.2.1	Énoncé	18
5.2.2	Exemples	18
5.2.3	Divisibilité	18
5.3	PGCD, PPCM dans $\mathbb{K}[X]$	18
5.3.1	Définition pour PGCD	18
5.3.2	Propriétés	18
5.3.3	Polynômes premiers entre eux	18
5.3.4	PPCM dans $\mathbb{K}[X]$	18
5.4	Zéros (ou racines) d'un polynôme	18
5.4.1	Définitions	18
5.4.2	Relation entre les racines et le degré d'un polynôme	18
5.4.3	Polynôme dérivé	18
5.4.4	Caractérisation d'un zéro d'ordre n	18
5.5	Polynômes irréductibles	18
5.5.1	Présentation	18
5.5.2	Décomposition générale	18
5.5.3	Dans $\mathbb{C}[X]$	18
5.5.4	Dans $\mathbb{R}[X]$	18
5.5.5	Pratique de la décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$	18
5.6	Relations coefficients-racines	18
5.6.1	Données du problème	18
5.6.2	Résolution	18
5.6.3	Applications	18
6	Fractions rationnelles	19
6.1	Présentation	20
6.1.1	Définition	20
6.1.2	Opérations	20

6.1.3	Forme irréductible	20
6.2	Décomposition en éléments simples de $F = \frac{A}{B}$ (irréductible) . .	20
6.2.1	Première étape : partie entière	20
6.2.2	Deuxième étape : décomposition de $\frac{R}{B}$	20
6.2.3	Troisième étape : généralisation	20
6.2.4	Conséquence	20
6.2.5	Quatrième étape : décomposition de $\frac{R}{P^\alpha}$	20
6.2.6	Conclusion	20
6.3	Décomposition dans $\mathbb{C}(X)$	20
6.3.1	Forme a priori	20
6.3.2	Détermination pratique des λ, μ	21
7	Groupe symétrique	23

Première partie

Algèbre

Chapitre 1

Structure de groupe

1.1 Présentation

1.1.1 Exemple préliminaire

1.1.2 Définition générale

1.1.3 Exemples usuels

Ensembles de nombres

Ensemble des bijections

Ensemble des parties

1.1.4 Compléments

Unicité

Formules concernant le symétrique

Régularité de tout élément

Plus généralement

1.1.5 Notations

En notation multiplicative

En notation additive

Propriétés

1.1.6 Autres remarques

1.2 Sous-groupes

1.2.1 Définition

1.2.2 Caractérisations

1.2.3 Exemples usuels

Exemple général

Chapitre 2

Structure d'anneau et de corps

2.1 Structure d'anneau

2.1.1 Présentation

Exemple préliminaire

Définition générale

Notations

Intégrité

Exemples usuels

2.1.2 Propriétés

Élément absorbant

Ensemble des inversibles

"Opposé" d'un produit

Loi "soustraction"

Formule du binôme de Newton

Formule de factorisation

2.1.3 Sous-anneau

Caractérisation

Exemple usuel : sous-anneau des décimaux

2.2 Structure de corps

2.2.1 Définition

2.2.2 Exemples usuels

2.2.3 Propriétés

Intégrité

Chapitre 3

Corps des nombres réels

3.1 Généralités

3.2 Borne supérieure ou inférieure d'une partie de \mathbb{R}

3.2.1 Définition

3.2.2 Existence-unicité

Existence

Unicité

3.2.3 Mise en garde

3.2.4 Caractérisation

3.3 Valeurs approchées d'un réel à α près (où $\alpha \in \mathbb{Q}^{*+}$)

3.3.1 Résultat et définition

3.3.2 Cas où $\alpha = 1$

3.3.3 Cas où $\alpha = \frac{1}{10^n}$ ($n \in \mathbb{N}$)

Énoncé

Convergence

3.4 Densité

3.4.1 Définitions

Intervalle

Densité

3.4.2 Caractérisation

Chapitre 4

Corps des nombres complexes

4.1 Conjugaison

4.1.1 Définition

4.1.2 Propriétés

Formules

Caractérisation

Pratique

4.2 Module

4.2.1 Définition

Pratique

Lien avec la valeur absolue

4.2.2 Propriétés

Diverses

(Double) inégalité triangulaire

4.2.3 Nombres complexes de module 1

Description

Remarque sur l'écriture $e^{i\theta}$

Produit

Formule de Moivre

Formules à savoir

4.3 Forme trigonométrique

4.3.1 Définition

Résultat préliminaire

Chapitre 5

Anneau $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à une indéterminée à coefficients dans un corps \mathbb{K}

5.1 Présentation

5.1.1 Définitions

5.1.2 Opérations sur les polynômes

Somme

Multiplication par un élément de \mathbb{K}

Multiplication

5.1.3 Propriétés

Pour la multiplication

Pour la somme

5.1.4 Structures

Neutres

Intégrité

Inversibles

5.1.5 Composée

Définition

Degré

5.2 Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$

5.2.1 Énoncé

Unicité

Finité

Chapitre 6

Fractions rationnelles

6.1 Présentation

6.1.1 Définition

6.1.2 Opérations

Somme

Produit

Structure

6.1.3 Forme irréductible

6.2 Décomposition en éléments simples de $F = \frac{A}{B}$ (irréductible)

6.2.1 Première étape : partie entière

Énoncé

Démonstration par Analyse-Synthèse

6.2.2 Deuxième étape : décomposition de $\frac{R}{B}$

Énoncé

Démonstration

6.2.3 Troisième étape : généralisation

6.2.4 Conséquence

6.2.5 Quatrième étape : décomposition de $\frac{R}{P^\alpha}$

Résultat général

Démonstration

6.2.6 Conclusion

6.5. APPLICATION PRINCIPALE : CALCULS DE PRIMITIVE DE FONCTIONS RATIONNELLES

6.5.2 Méthode pour primitiver $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \in \mathbb{R}(x)$

Chapitre 7

Groupe symétrique