

# Cours

C. LACOUTURE

Année scolaire 2024-2025, MPSI2, Lycée Carnot



# Table des matières

<b>I</b>	<b>Algèbre</b>	<b>9</b>
<b>1</b>	<b>Structure de groupe</b>	<b>11</b>
1.1	Présentation . . . . .	11
1.1.1	Exemple préliminaire . . . . .	11
1.1.2	Définition générale . . . . .	11
1.1.3	Exemples usuels . . . . .	12
1.1.4	Compléments . . . . .	12
1.1.5	Notations . . . . .	13
1.1.6	Autres remarques . . . . .	14
1.2	Sous-groupes . . . . .	14
1.2.1	Définition . . . . .	14
1.2.2	Caractérisations . . . . .	15
1.2.3	Exemples usuels . . . . .	15
1.2.4	Propriétés . . . . .	15
1.3	Morphismes de groupes . . . . .	16
1.3.1	Définition . . . . .	16
1.3.2	Exemples usuels . . . . .	16
1.3.3	Propriétés . . . . .	16
<b>2</b>	<b>Structure d'anneau et de corps</b>	<b>17</b>
2.1	Structure d'anneau . . . . .	18
2.1.1	Présentation . . . . .	18
2.1.2	Propriétés . . . . .	18
2.1.3	Sous-anneau . . . . .	18

2.2	Structure de corps . . . . .	18
2.2.1	Définition . . . . .	18
2.2.2	Exemples usuels . . . . .	18
2.2.3	Propriétés . . . . .	18
2.2.4	Sous-corps . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Corps des nombres réels</b>	<b>19</b>
3.1	Généralités . . . . .	20
3.2	Borne supérieure ou inférieure d'une partie de $\mathbb{R}$ . . . . .	20
3.2.1	Définition . . . . .	20
3.2.2	Existence-unicité . . . . .	20
3.2.3	Mise en garde . . . . .	20
3.2.4	Caractérisation . . . . .	20
3.3	Valeurs approchées d'un réel à $\alpha$ près (où $\alpha \in \mathbb{Q}^{*+}$ ) . . . . .	20
3.3.1	Résultat et définition . . . . .	20
3.3.2	Cas où $\alpha = 1$ . . . . .	20
3.3.3	Cas où $\alpha = \frac{1}{10^n}$ ( $n \in \mathbb{N}$ ) . . . . .	20
3.4	Densité . . . . .	20
3.4.1	Définitions . . . . .	20
3.4.2	Caractérisation . . . . .	20
3.4.3	Compléments . . . . .	20
<b>4</b>	<b>Corps des nombres complexes</b>	<b>21</b>
4.1	Conjugaison . . . . .	21
4.1.1	Définition . . . . .	21
4.1.2	Propriétés . . . . .	21
4.2	Module . . . . .	21
4.2.1	Définition . . . . .	21
4.2.2	Propriétés . . . . .	22
4.2.3	Nombres complexes de module 1 . . . . .	22
4.3	Forme trigonométrique . . . . .	23
4.3.1	Définition . . . . .	23
4.3.2	Premiers exemples . . . . .	23

4.3.3	Relations entre forme algébrique et trigonométrique . .	23
4.3.4	Formules diverses . . . . .	23
4.3.5	Interprétation géométrique . . . . .	23
4.4	Équation $z^n = a$ (où $n \in \mathbb{N}^*, a \in \mathbb{C}^*$ ) . . . . .	23
4.4.1	Résolution . . . . .	23
4.4.2	1 <sup>er</sup> cas particulier : racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité . . . . .	23
4.4.3	Cas particulier des racines carrées d'un complexe . . .	23
4.5	Traduction complexe de transformations géométriques . . . .	23
4.5.1	Symétries . . . . .	23
4.5.2	Translations . . . . .	23
4.5.3	Homothéties . . . . .	23
4.5.4	Rotations . . . . .	23
4.5.5	Similitudes directes . . . . .	23
4.6	Exponentielle complexe . . . . .	23
4.6.1	Définition . . . . .	23
4.6.2	Propriétés . . . . .	23
<b>5</b>	<b>Anneau <math>\mathbb{K}[X]</math> des polynômes à une indéterminée à coefficients dans un corps <math>\mathbb{K}</math></b>	<b>25</b>
5.1	Présentation . . . . .	26
5.1.1	Définitions . . . . .	26
5.1.2	Opérations sur les polynômes . . . . .	26
5.1.3	Propriétés . . . . .	26
5.1.4	Structures . . . . .	26
5.1.5	Composée . . . . .	26
5.2	Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$ . . . . .	26
5.2.1	Énoncé . . . . .	26
5.2.2	Exemples . . . . .	26
5.2.3	Divisibilité . . . . .	26
5.3	PGCD, PPCM dans $\mathbb{K}[X]$ . . . . .	26
5.3.1	Définition pour PGCD . . . . .	26
5.3.2	Propriétés . . . . .	26

5.3.3	Polynômes premiers entre eux . . . . .	26
5.3.4	PPCM dans $\mathbb{K}[X]$ . . . . .	26
5.4	Zéros (ou racines) d'un polynôme . . . . .	26
5.4.1	Définitions . . . . .	26
5.4.2	Relation entre les racines et le degré d'un polynôme . .	26
5.4.3	Polynôme dérivé . . . . .	26
5.4.4	Caractérisation d'un zéro d'ordre $n$ . . . . .	26
5.5	Polynômes irréductibles . . . . .	26
5.5.1	Présentation . . . . .	26
5.5.2	Décomposition générale . . . . .	26
5.5.3	Dans $\mathbb{C}[X]$ . . . . .	26
5.5.4	Dans $\mathbb{R}[X]$ . . . . .	26
5.5.5	Pratique de la décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ . . . . .	26
5.6	Relations coefficients-racines . . . . .	26
5.6.1	Données du problème . . . . .	26
5.6.2	Résolution . . . . .	26
5.6.3	Applications . . . . .	26
<b>6</b>	<b>Fractions rationnelles</b>	<b>27</b>
6.1	Présentation . . . . .	28
6.1.1	Définition . . . . .	28
6.1.2	Opérations . . . . .	28
6.1.3	Forme irréductible . . . . .	28
6.2	Décomposition en éléments simples de $F = \frac{A}{B}$ (irréductible) . .	28
6.2.1	Première étape : partie entière . . . . .	28
6.2.2	Deuxième étape : décomposition de $\frac{R}{B}$ . . . . .	28
6.2.3	Troisième étape : généralisation . . . . .	28
6.2.4	Conséquence . . . . .	28
6.2.5	Quatrième étape : décomposition de $\frac{R}{Pa}$ . . . . .	28
6.2.6	Conclusion . . . . .	28
6.3	Décomposition dans $\mathbb{C}(X)$ . . . . .	28

6.3.1	Forme a priori . . . . .	28
6.3.2	Détermination pratique des $\lambda, \mu$ . . . . .	28
6.3.3	Exemple usuel particulier . . . . .	28
6.3.4	Exemple usuel général . . . . .	28
6.4	Dans $\mathbb{R}(X)$ . . . . .	28
6.4.1	Forme a priori . . . . .	28
6.4.2	Détermination pratique des $\lambda, \alpha, \beta$ . . . . .	28
6.4.3	Exemple usuel . . . . .	28
6.5	Application principale : calculs de primitive de fonctions rationnelles . . . . .	28
6.5.1	Définition . . . . .	28
6.5.2	Méthode pour primitiver $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \in \mathbb{R}(x)$ . . . . .	28
<b>7</b>	<b>Groupe symétrique</b>	<b>29</b>
7.1	Présentation . . . . .	30
7.1.1	Définitions . . . . .	30
7.1.2	Exemples . . . . .	30
7.2	Éléments générateurs . . . . .	30
7.2.1	Transpositions . . . . .	30
7.2.2	Cycles à supports disjoints . . . . .	30
7.3	Signature d'une permutation . . . . .	30
7.3.1	Inversions . . . . .	30
7.3.2	Définitions . . . . .	30
7.3.3	Cas d'une transposition . . . . .	30
7.3.4	Cas d'un cycle . . . . .	30
7.3.5	Morphisme signature . . . . .	30





# Première partie

## Algèbre



# Chapitre 1

## Structure de groupe

### 1.1 Présentation

#### 1.1.1 Exemple préliminaire

L'ensemble  $\mathbb{Z}$  pour l'addition  $+$  est tel que :

1.  $\forall x, y \in \mathbb{Z}$
2.  $\forall x, y, z \in \mathbb{Z}, (x + y) + z = x + (y + z)$
3.  $\forall x \in \mathbb{Z}, x + 0 = 0 + x = x$
4.  $\forall x \in \mathbb{Z}, x + (-x) = (-x) + x = 0$
5. et de plus  $\forall x, y \in \mathbb{Z}, x + y = y + x$

Ainsi  $(\mathbb{Z}, +)$  est un groupe abélien / groupe commutatif.

#### 1.1.2 Définition générale

Soit un ensemble  $G$  muni d'une loi  $*$ . Dès lors,  $(G, *)$  a une structure de groupe si et seulement si :

- |  |
|--|
| <ol style="list-style-type: none"><li>1. <math>*</math> est une Loi de Composition Interne (LCI) sur <math>G</math>. C'est-à-dire <math>\forall x, y \in G, x * y \in G</math>.</li><li>2. <math>*</math> est associative. C'est-à-dire <math>\forall x, y, z \in G, (x * y) * z = x * (y * z)</math>.</li><li>3. <math>G</math> a un élément neutre <math>e</math> pour <math>*</math>. <math>\exists e \in G</math> tel que <math>\forall x \in G, x * e = e * x = x</math>.</li><li>4. Tout élément de <math>G</math> a un symétrique dans <math>G</math>. <math>\forall x \in G, \exists x' \in G</math> tel que <math>x * x' = x' * x = e</math>.</li></ol> |
|--|

Si, de plus,  $*$  est commutative sur  $G$ , c'est-à-dire  $\forall x, y \in G, x * y = y * x$ , alors  $G$  est un groupe commutatif (ou abélien).

**Remarques concernant la définition :**

a) attention à la place des quantificateurs : pour l'élément neutre (3.) c'est  $\exists$  puis  $\forall$  et pour le symétrique c'est  $\forall$  puis  $\exists$ .

b) attention aux 2 égalités dans la définition de l'élément neutre et des symétriques d'un élément car  $*$  ne commute pas forcément.

**1.1.3 Exemples usuels****Ensembles de nombres**

$(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{C}, +), (\mathbb{Q}^*, +), (\mathbb{R}_+^*, \times), (\mathbb{R}^*, \times), (\mathbb{C}^*, \times)$  Sont tous des groupes commutatifs.

**Ensemble des bijections**

Soit  $E$  un ensemble et  $\mathcal{B}(E)$  l'ensemble des bijections de  $E$  vers  $E$ .

$$(\mathcal{B}(E), \circ) \text{ est un groupe } \underline{\text{non}} \text{ commutatif.}$$

Le neutre pour  $\circ$  est :  $\text{Id}_E$  et le symétrique de  $f$  pour  $\circ$  est  $f^{-1}$

**Ensemble des parties**

Soit  $E$  un ensemble et  $\mathcal{P}(E)$  l'ensemble des parties de  $E$ .

$$(\mathcal{P}(E), \Delta) \text{ est un groupe commutatif.}$$

Le neutre pour  $\Delta$  est :  $\emptyset$  car  $\forall A \subset E : A \Delta \emptyset = \emptyset \Delta A = A$  Et le symétrique de  $A$  pour  $\Delta$  est  $A$  car  $A \Delta A = \emptyset$

**1.1.4 Compléments****Unicité**

Sont uniques l'élément neutre et le symétrique de tout élément.

**Formules concernant le symétrique**

**a)**  $\forall x, y \in G : (x * y)' = y' * x'$  (avec ' pour symétrique) Attention à l'ordre car le groupe n'est pas forcément commutatif. **b)**  $\forall x \in G (x')' = x$

**Régularité de tout élément**

$$\forall x, y, z \in G : x * z = y * z \implies x = y \text{ et } z * x = z * y \implies x = y$$

Ainsi on traduit que tout élément  $z$  est régulier dans le groupe  $(G, *)$  c'est à dire dans un groupe, on peut "simplifier par tout élément".

**Plus généralement : résolution d'équation**

$$\forall x, y, z \in G : x * y = z$$

$$\implies x' * (x * y) = x' * z$$

$$\implies (x' * x) * y = x' * z \text{ car } * \text{ est associative}$$

$$\implies e * y = x' * z \text{ car } x' \text{ est symétrique de } x \text{ pour } *$$

$$\implies y = x' * z \text{ car } e \text{ neutre pour } *$$

Dans un groupe : tout élément peut, dans une égalité, "passer dans l'autre membre" sous la forme de son symétrique ... en tenant compte de l'ordre car  $*$  ne commute pas forcément.

**1.1.5 Notations**

En pratique, un groupe est noté :  $(G, +)$ , même si  $+$  n'est pas l'addition classique (notation additive) ou  $(G, \cdot)$ , même si  $\cdot$  n'est pas la multiplication classique (notation multiplicative) On définit alors :

**En notation additive**

$$\forall x \in G, \forall n \in \mathbb{Z}$$

1. si  $n = 0$  :  $0x = 0_G$  neutre de  $G$  pour  $+$ .
2. si  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $nx = x + x + \dots + x$  (n fois).
3. si  $n \in \mathbb{Z}_-^*$  :  $nx = (-x) + \dots + (-x)$  (-n fois) où  $-x$  est le symétrique de  $x$  pour  $+$ .

**En notation multiplicative**

$$\text{Les puissances d'un selon : } \forall x \in G, \forall n \in \mathbb{Z}$$

1. si  $n = 0$  :  $x^0 = 1_G$  neutre de  $G$  pour  $\cdot$ .
2. si  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $x^n = x \cdot x \cdot \dots \cdot x$  (n fois).
3. si  $n \in \mathbb{Z}_-^*$  :  $x^n = (x^{-1}) \cdot \dots \cdot (x^{-1})$  (-n fois) où  $x^{-1}$  est le symétrique de  $x$  pour  $\cdot$ .

**Propriétés des multiples d'un élément**

$$\forall x \in G, \forall m, n \in \mathbb{Z}$$

1.  $(m+n)x = mx + nx$  (additivité classique dans  $\mathbb{Z}$  qui devient une loi de groupe sur  $G$ )
2.  $-(nx) = (-n)x = n(-x)$  ( $-n$  est l'opposé classique dans  $\mathbb{Z}$  et  $(-x)$  symétrique de  $x$  dans  $G$ )
3.  $m(nx) = (m \times n)x$  ( $\times$  produit classique dans  $\mathbb{Z}$  et loi de groupe sur  $G$ )

### Propriétés des puissances d'un élément

$$\forall x \in G, \forall m, n \in \mathbb{Z}$$

1.  $x^{m+n} = x^m \cdot x^n$
2.  $(x^m)^{-1} = (x^{-1})^m = x^{-m}$
3.  $x^{mn} = (x^m)^n = (x^n)^m$

### 1.1.6 Autres remarques

#### Concernant les propriétés des puissances ou des multiples précédents

Parmi toutes les propriétés citées, on a pas cité  $(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$  car c'est faux si  $\cdot$  ne commute pas forcément.  $(x \cdot y)^n = (x \cdot y) \cdot (x \cdot y) \cdot \dots (n \text{ fois}) \cdot (x \cdot y) \neq x^n \cdot y^n = x \cdot \dots (n \text{ fois}) \cdot x \cdot y \cdot \dots (n \text{ fois}) \cdot y$

#### Concernant les produits cartésien de groupes

Soit  $(G, +)$  et  $(G', \cdot)$  2 groupes.  $G \times G'$  est un groupe pour  $*$  tel que  $(x, x') * (y, y') = (x + y, x' \cdot y')$ .

Le neutre de  $G \times G'$  pour  $*$  est :  $(0_G, 1_{G'})$ .

Le symétrique de  $(x, x')$  dans  $G \times G'$  pour  $*$  est :  $(-x, x'^{-1})$

## 1.2 Sous-groupes

### 1.2.1 Définition

Soit  $(G, \cdot)$  un groupe et  $H \subset G$ ,  $H$  est un sous-groupe de  $G$  pour  $\cdot$  si et seulement si la restriction de  $\cdot$  avec les éléments de  $H$  est muni d'une structure de groupe

### 1.2.2 Caractérisations

$H$  sous-groupe de  $G$  pour  $\cdot$  :

$\Leftrightarrow$

- $1_G \in H$
- $\forall x, y \in H, \quad x \cdot y \in H$
- $\forall x \in H, \quad x^{-1} \in H$

$\Leftrightarrow$

- $1_G \in H$
- $\forall x, y \in H, \quad x \cdot y^{-1} \in H$

**Remarque :** Dans la majorité des cas dans la suite on montrera que  $(H, \cdot)$  est un groupe en montrant que c'est un sous-groupe d'un groupe usuel.

### 1.2.3 Exemples usuels

#### Exemple général

Les puissances d'un élément.

Soit  $(G, \cdot)$  un groupe et  $a \in G$ ,  $H = \{a^z \mid z \in \mathbb{Z}\}$  est un sous-groupe de  $G$  pour  $\cdot$ .

Les multiples d'un élément.

Soit  $(G, +)$  un groupe et  $a \in G$ ,  $H = \{za \mid z \in \mathbb{Z}\}$  est un sous-groupe de  $G$  pour  $+$ .

#### Exemples particuliers

$(\mathbb{U}, \times)$  est un groupe. Car sous-groupe de  $(\mathbb{C}^*, \times)$

$(\mathbb{U}_n, \times)$  est un groupe. Car sous-groupe de  $(\mathbb{C}^*, \times)$

#### Sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$

Les sous-groupes de  $\mathbb{Z}$  pour  $+$  sont les ensembles de la forme  $n\mathbb{Z} = \{nz \mid z \in \mathbb{Z}\}$

### 1.2.4 Propriétés

#### Intersection

"Toute intersection de sous-groupes est un sous-groupe."

Soit  $(G, \cdot)$  un groupe.  $(H_i)_{i \in \Delta}$  une famille de sous-groupes de  $G$  pour  $\cdot$ .  
Alors  $H = \bigcap_{i \in \Delta} H_i$  est un sous-groupe de  $G$  pour  $\cdot$ .

**Faux pour la réunion  $\cup$**

**a) contre-exemple : dans  $(\mathbb{Z}, +)$**

Soit  $H_1 = 2\mathbb{Z} = \{2z \mid z \in \mathbb{Z}\}$  et  $H_2 = 3\mathbb{Z} = \{3z \mid z \in \mathbb{Z}\}$ .

Mais  $H = 2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$  n'est pas un sous-groupe de  $\mathbb{Z}$  pour  $+$  car :

$2 \in 2\mathbb{Z} \subset 2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z} = H$  et  $3 \in 3\mathbb{Z} \subset 2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z} = H$

Mais  $2 + 3 = 5 \notin H$

**b) "sous conditions"**

Soit  $G_1, G_2$  sous groupes de  $G$  pour  $\cdot$ .

$G_1 \cup G_2$  est un sous-groupe de  $G$  pour  $\cdot \Leftrightarrow G_1 \subset G_2$  ou  $G_2 \subset G_1$

## 1.3 Morphismes de groupes

### 1.3.1 Définition

### 1.3.2 Exemples usuels

### 1.3.3 Propriétés





# Chapitre 2

## Structure d'anneau et de corps

### 2.1 Structure d'anneau

#### 2.1.1 Présentation

Exemple préliminaire

Définition générale

Notations

Intégrité

Exemples usuels

#### 2.1.2 Propriétés

Élément absorbant

Ensemble des inversibles

”Opposé” d’un produit

Loi ”soustraction”

Formule du binôme de Newton

Formule de factorisation

#### 2.1.3 Sous-anneau

Caractérisation

Exemple usuel : sous-anneau des décimaux

### 2.2 Structure de corps

#### 2.2.1 Définition

#### 2.2.2 Exemples usuels

#### 2.2.3 Propriétés

Intégrité

Commutativité

#### 2.2.4 Sous-corps



## Chapitre 3

# Corps des nombres réels

### 3.1 Généralités

### 3.2 Borne supérieure ou inférieure d'une partie de $\mathbb{R}$

#### 3.2.1 Définition

#### 3.2.2 Existence-unicité

Existence

Unicité

#### 3.2.3 Mise en garde

#### 3.2.4 Caractérisation

### 3.3 Valeurs approchées d'un réel à $\alpha$ près (où $\alpha \in \mathbb{Q}^{*+}$ )

#### 3.3.1 Résultat et définition

#### 3.3.2 Cas où $\alpha = 1$

#### 3.3.3 Cas où $\alpha = \frac{1}{10^n}$ ( $n \in \mathbb{N}$ )

Énoncé

Convergence

### 3.4 Densité

#### 3.4.1 Définitions

Intervalle

Densité

#### 3.4.2 Caractérisation

Générale

Plus précisément

Remarques

# Chapitre 4

## Corps des nombres complexes

### 4.1 Conjugaison

#### 4.1.1 Définition

#### 4.1.2 Propriétés

Formules

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z), \quad z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im}(z)$$

Caractérisation

$$\begin{aligned} z \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow z = \bar{z} \\ z \in i\mathbb{R} &\Leftrightarrow z = -\bar{z} \end{aligned} \tag{4.1}$$

=====

Caractérisation

$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$$

Pratique

Quand un nombre complexe est écrit au dénominateur, on le multiplie par son conjugué.

### 4.2 Module

#### 4.2.1 Définition

$$\forall z \in \mathbb{C}, \text{ le module de } z \text{ est } |z| = \sqrt{z\bar{z}}$$

**Pratique**

Pour  $z = a + ib$ , on a  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

**Lien avec la valeur absolue**

Le module dans  $\mathbb{C}$  prolonge la valeur absolue dans  $\mathbb{R}$ .

**4.2.2 Propriétés****Diverses**

$$\begin{aligned} \forall z \in \mathbb{C}, |z| \geq 0 \text{ et } |z| = 0 &\Leftrightarrow z = 0 \\ |z| &= |\bar{z}| \\ \forall z, z' \in \mathbb{C}, |zz'| &= |z| |z'| \end{aligned}$$

**(Double) inégalité triangulaire**

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}, ||z| - |z'|| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|$$

**4.2.3 Nombres complexes de module 1****Description**

$U = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ . Les complexes de module 1 s'écrivent  $z = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$ , ce qu'on note :  $e^{i\theta}$  où  $\theta \in \mathbb{R} \cdot \setminus 2\pi\mathbb{Z}$

**Remarque sur l'écriture  $e^{i\theta}$** 

$$\forall \theta, e^{-i\theta} = e^{\bar{i}\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$$

**Produit**

$$\forall \theta, \theta', e^{i\theta} e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$$

Formule de Moivre

Formules à savoir

## 4.3 Forme trigonométrique

### 4.3.1 Définition

Résultat préliminaire

Conséquence

### 4.3.2 Premiers exemples

Divers

Caractérisations

### 4.3.3 Relations entre forme algébrique et trigonométrique

Sens direct

Sens réciproque

### 4.3.4 Formules diverses

### 4.3.5 Interprétation géométrique

## 4.4 Équation $z^n = a$ (où $n \in \mathbb{N}^*$ , $a \in \mathbb{C}^*$ )

### 4.4.1 Résolution

Solutions confondues

Plus précisément

Ces  $n$  solutions sont bien distinctes

Conclusion

Géométriquement

### 4.4.2 1<sup>er</sup> cas particulier : racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité

Définition

Description

Propriétés

Interprétation géométrique

Cas  $n = 3$

### 4.4.3 Cas particulier des racines carrées d'un complexe

Énoncé

Obtention pratique

Équation de  $d^2$  dans  $\mathbb{C}$

## 4.5 Traduction complexe de transformations géométriques

### 4.5.1 Symétries







## Chapitre 5

# Anneau $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à une indéterminée à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$

### 5.1 Présentation

#### 5.1.1 Définitions

#### 5.1.2 Opérations sur les polynômes

Somme

Multiplication par un élément de  $\mathbb{K}$

Multiplication

#### 5.1.3 Propriétés

Pour la multiplication

Pour la somme

#### 5.1.4 Structures

Neutres

Intégrité

Inversibles

#### 5.1.5 Composée

Définition

Degré

### 5.2 Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$

#### 5.2.1 Énoncé

Unicité

Existence

#### 5.2.2 Exemples

#### 5.2.3 Divisibilité



# Chapitre 6

## Fractions rationnelles

### 6.1 Présentation

#### 6.1.1 Définition

#### 6.1.2 Opérations

Somme

Produit

Structure

#### 6.1.3 Forme irréductible

### 6.2 Décomposition en éléments simples de $F = \frac{A}{B}$ (irréductible)

#### 6.2.1 Première étape : partie entière

Énoncé

Démonstration par Analyse-Synthèse

#### 6.2.2 Deuxième étape : décomposition de $\frac{R}{B}$

Énoncé

Démonstration

#### 6.2.3 Troisième étape : généralisation

#### 6.2.4 Conséquence

#### 6.2.5 Quatrième étape : décomposition de $\frac{R}{P^\alpha}$

Résultat général

Démonstration

#### 6.2.6 Conclusion

### 6.3 Décomposition dans $\mathbb{C}(X)$

#### 6.3.1 Forme a priori

#### 6.3.2 Détermination pratique des $\lambda, \mu$



# Chapitre 7

## Groupe symétrique

### 7.1 Présentation

#### 7.1.1 Définitions

Permutation

Groupe symétrique

Cardinal

#### 7.1.2 Exemples

Généraux

Particulier

### 7.2 Éléments générateurs

#### 7.2.1 Transpositions

Énoncé

Exemples

#### 7.2.2 Cycles à supports disjoints

Résultat admis

Exemple

Pratique

### 7.3 Signature d'une permutation

#### 7.3.1 Inversions

#### 7.3.2 Définitions

#### 7.3.3 Cas d'une transposition

#### 7.3.4 Cas d'un cycle

#### 7.3.5 Morphisme signature