

# Cours

C. LACOUTURE

Année scolaire 2024-2025, MPSI2, Lycée Carnot



# Table des matières

<b>I</b>	<b>Algèbre</b>	<b>7</b>
<b>1</b>	<b>Structure de groupe</b>	<b>9</b>
1.1	Présentation . . . . .	10
1.1.1	Exemple préliminaire . . . . .	10
1.1.2	Définition générale . . . . .	10
1.1.3	Exemples usuels . . . . .	10
1.1.4	Compléments . . . . .	10
1.1.5	Notations . . . . .	10
1.1.6	Autres remarques . . . . .	10
1.2	Sous-groupes . . . . .	10
1.2.1	Définition . . . . .	10
1.2.2	Caractérisations . . . . .	10
1.2.3	Exemples usuels . . . . .	10
1.2.4	Propriétés . . . . .	10
1.3	Morphismes de groupes . . . . .	10
1.3.1	Définition . . . . .	10
1.3.2	Exemples usuels . . . . .	10
1.3.3	Propriétés . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Structure d'anneau et de corps</b>	<b>11</b>
2.1	Structure d'anneau . . . . .	12
2.1.1	Présentation . . . . .	12
2.1.2	Propriétés . . . . .	12
2.1.3	Sous-anneau . . . . .	12
2.2	Structure de corps . . . . .	12
2.2.1	Définition . . . . .	12
2.2.2	Exemples usuels . . . . .	12
2.2.3	Propriétés . . . . .	12
2.2.4	Sous-corps . . . . .	12

<b>3</b>	<b>Corps des nombres réels</b>	<b>13</b>
3.1	Généralités . . . . .	14
3.2	Borne supérieure ou inférieure d'une partie de $\mathbb{R}$ . . . . .	14
3.2.1	Définition . . . . .	14
3.2.2	Existence-unicité . . . . .	14
3.2.3	Mise en garde . . . . .	14
3.2.4	Caractérisation . . . . .	14
3.3	Valeurs approchées d'un réel à $\alpha$ près (où $\alpha \in \mathbb{Q}^{*+}$ ) . . . . .	14
3.3.1	Résultat et définition . . . . .	14
3.3.2	Cas où $\alpha = 1$ . . . . .	14
3.3.3	Cas où $\alpha = \frac{1}{10^n}$ ( $n \in \mathbb{N}$ ) . . . . .	14
3.4	Densité . . . . .	14
3.4.1	Définitions . . . . .	14
3.4.2	Caractérisation . . . . .	14
3.4.3	Compléments . . . . .	14
<b>4</b>	<b>Corps des nombres complexes</b>	<b>15</b>
4.1	Conjugaison . . . . .	15
4.1.1	Définition . . . . .	15
4.1.2	Propriétés . . . . .	16
4.2	Module . . . . .	16
4.2.1	Définition . . . . .	16
4.2.2	Propriétés . . . . .	16
4.2.3	Nombres complexes de module 1 . . . . .	16
4.3	Forme trigonométrique . . . . .	16
4.3.1	Définition . . . . .	16
4.3.2	Premiers exemples . . . . .	16
4.3.3	Relations entre forme algébrique et trigonométrique . . . . .	16
4.3.4	Formules diverses . . . . .	16
4.3.5	Interprétation géométrique . . . . .	16
4.4	Équation $z^n = a$ (où $n \in \mathbb{N}^*$ , $a \in \mathbb{C}^*$ ) . . . . .	16
4.4.1	Résolution . . . . .	16
4.4.2	1 <sup>er</sup> cas particulier : racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité . . . . .	16
4.4.3	Cas particulier des racines carrées d'un complexe . . . . .	16
4.5	Traduction complexe de transformations géométriques . . . . .	16
4.5.1	Symétries . . . . .	16
4.5.2	Translations . . . . .	16
4.5.3	Homothéties . . . . .	16
4.5.4	Rotations . . . . .	16
4.5.5	Similitudes directes . . . . .	16
4.6	Exponentielle complexe . . . . .	16

4.6.1	Définition . . . . .	16
4.6.2	Propriétés . . . . .	16
<b>5</b>	<b>Anneau <math>\mathbb{K}[X]</math> des polynômes à une indéterminée à coefficients dans un corps <math>\mathbb{K}</math></b>	<b>17</b>
5.1	Présentation . . . . .	18
5.1.1	Définitions . . . . .	18
5.1.2	Opérations sur les polynômes . . . . .	18
5.1.3	Propriétés . . . . .	18
5.1.4	Structures . . . . .	18
5.1.5	Composée . . . . .	18
5.2	Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$ . . . . .	18
5.2.1	Énoncé . . . . .	18
5.2.2	Exemples . . . . .	18
5.2.3	Divisibilité . . . . .	18
5.3	PGCD, PPCM dans $\mathbb{K}[X]$ . . . . .	18
5.3.1	Définition pour PGCD . . . . .	18
5.3.2	Propriétés . . . . .	18
5.3.3	Polynômes premiers entre eux . . . . .	18
5.3.4	PPCM dans $\mathbb{K}[X]$ . . . . .	18
5.4	Zéros (ou racines) d'un polynôme . . . . .	18
5.4.1	Définitions . . . . .	18
5.4.2	Relation entre les racines et le degré d'un polynôme . . . . .	18
5.4.3	Polynôme dérivé . . . . .	18
5.4.4	Caractérisation d'un zéro d'ordre $n$ . . . . .	18
5.5	Polynômes irréductibles . . . . .	18
5.5.1	Présentation . . . . .	18
5.5.2	Décomposition générale . . . . .	18
5.5.3	Dans $\mathbb{C}[X]$ . . . . .	18
5.5.4	Dans $\mathbb{R}[X]$ . . . . .	18
5.5.5	Pratique de la décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ . . . . .	18
5.6	Relations coefficients-racines . . . . .	18
5.6.1	Données du problème . . . . .	18
5.6.2	Résolution . . . . .	18
5.6.3	Applications . . . . .	18
<b>6</b>	<b>Fractions rationnelles</b>	<b>19</b>
6.1	Présentation . . . . .	20
6.1.1	Définition . . . . .	20
6.1.2	Opérations . . . . .	20

6.1.3	Forme irréductible . . . . .	20
6.2	Décomposition en éléments simples de $F = \frac{A}{B}$ (irréductible) . .	20
6.2.1	Première étape : partie entière . . . . .	20
6.2.2	Deuxième étape : décomposition de $\frac{R}{B}$ . . . . .	20
6.2.3	Troisième étape : généralisation . . . . .	20
6.2.4	Conséquence . . . . .	20
6.2.5	Quatrième étape : décomposition de $\frac{R}{P^\alpha}$ . . . . .	20
6.2.6	Conclusion . . . . .	20
6.3	Décomposition dans $\mathbb{C}(X)$ . . . . .	20
6.3.1	Forme a priori . . . . .	20
6.3.2	Détermination pratique des $\lambda, \mu$ . . . . .	20
6.3.3	Exemple usuel particulier . . . . .	20
6.3.4	Exemple usuel général . . . . .	20
6.4	Dans $\mathbb{R}(X)$ . . . . .	20
6.4.1	Forme a priori . . . . .	20
6.4.2	Détermination pratique des $\lambda, \alpha, \beta$ . . . . .	20
6.4.3	Exemple usuel . . . . .	20
6.5	Application principale : calculs de primitive de fonctions ra- tionnelles . . . . .	20
6.5.1	Définition . . . . .	20
6.5.2	Méthode pour primitiver $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \in \mathbb{R}(x)$ . . . . .	20
<b>7</b>	<b>Groupe symétrique</b>	<b>21</b>
7.1	Présentation . . . . .	22
7.1.1	Définitions . . . . .	22
7.1.2	Exemples . . . . .	22
7.2	Éléments générateurs . . . . .	22
7.2.1	Transpositions . . . . .	22
7.2.2	Cycles à supports disjoints . . . . .	22
7.3	Signature d'une permutation . . . . .	22
7.3.1	Inversions . . . . .	22
7.3.2	Définitions . . . . .	22
7.3.3	Cas d'une transposition . . . . .	22
7.3.4	Cas d'un cycle . . . . .	22
7.3.5	Morphisme signature . . . . .	22

# Première partie

## Algèbre







# Chapitre 1

## Structure de groupe

### 1.1 Présentation

#### 1.1.1 Exemple préliminaire

#### 1.1.2 Définition générale

#### 1.1.3 Exemples usuels

Ensembles de nombres

Ensemble des bijections

Ensemble des parties

#### 1.1.4 Compléments

Unicité

Formules concernant le symétrique

Régularité de tout élément

Plus généralement

#### 1.1.5 Notations

En notation multiplicative

En notation additive

Propriétés

#### 1.1.6 Autres remarques

### 1.2 Sous-groupes

#### 1.2.1 Définition

#### 1.2.2 Caractérisations

#### 1.2.3 Exemples usuels

Exemple général



# Chapitre 2

## Structure d'anneau et de corps

### 2.1 Structure d'anneau

#### 2.1.1 Présentation

Exemple préliminaire

Définition générale

Notations

Intégrité

Exemples usuels

#### 2.1.2 Propriétés

Élément absorbant

Ensemble des inversibles

"Opposé" d'un produit

Loi "soustraction"

Formule du binôme de Newton

Formule de factorisation

#### 2.1.3 Sous-anneau

Caractérisation

Exemple usuel : sous-anneau des décimaux

### 2.2 Structure de corps

#### 2.2.1 Définition

#### 2.2.2 Exemples usuels

#### 2.2.3 Propriétés

Intégrité



## Chapitre 3

# Corps des nombres réels

### 3.1 Généralités

### 3.2 Borne supérieure ou inférieure d'une partie de $\mathbb{R}$

#### 3.2.1 Définition

#### 3.2.2 Existence-unicité

Existence

Unicité

#### 3.2.3 Mise en garde

#### 3.2.4 Caractérisation

### 3.3 Valeurs approchées d'un réel à $\alpha$ près (où $\alpha \in \mathbb{Q}^{*+}$ )

#### 3.3.1 Résultat et définition

#### 3.3.2 Cas où $\alpha = 1$

#### 3.3.3 Cas où $\alpha = \frac{1}{10^n}$ ( $n \in \mathbb{N}$ )

Énoncé

Convergence

### 3.4 Densité

#### 3.4.1 Définitions

Intervalle

Densité

#### 3.4.2 Caractérisation

# Chapitre 4

## Corps des nombres complexes

### 4.1 Conjugaison

#### 4.1.1 Définition

Soit  $z = a + ib \in \mathbb{C}$ . Son conjugué est :  $\bar{z} = a - ib$

#### 4.1.2 Propriétés

##### Formules

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z), \quad z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im}(z)$$

Caractérisation

Pratique

## 4.2 Module

### 4.2.1 Définition

Pratique

Lien avec la valeur absolue

### 4.2.2 Propriétés

Diverses

(Double) inégalité triangulaire

### 4.2.3 Nombres complexes de module 1

Description

Remarque sur l'écriture  $e^{i\theta}$

Produit

Formule de Moivre

Formules à savoir

## 4.3 Forme trigonométrique

### 4.3.1 Définition

Résultat préliminaire

Conséquence

### 4.3.2 Premiers exemples

Divers

Caractérisations

### 4.3.3 Relations entre forme algébrique et trigonométrique

Sens direct

Sens réciproque

### 4.3.4 Formules diverses

### 4.3.5 Interprétation géométrique

## 4.4 Équation $z^n = a$ (où $n \in \mathbb{N}^*$ , $a \in \mathbb{C}^*$ )

### 4.4.1 Résolution

Solution fondamentale





## Chapitre 5

# Anneau $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à une indéterminée à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$

### 5.1 Présentation

#### 5.1.1 Définitions

#### 5.1.2 Opérations sur les polynômes

Somme

Multiplication par un élément de  $\mathbb{K}$

Multiplication

#### 5.1.3 Propriétés

Pour la multiplication

Pour la somme

#### 5.1.4 Structures

Neutres

Intégrité

Inversibles

#### 5.1.5 Composée

Définition

Degré

### 5.2 Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$

#### 5.2.1 Énoncé

Unicité

Finité



# Chapitre 6

## Fractions rationnelles

### 6.1 Présentation

#### 6.1.1 Définition

#### 6.1.2 Opérations

Somme

Produit

Structure

#### 6.1.3 Forme irréductible

### 6.2 Décomposition en éléments simples de $F = \frac{A}{B}$ (irréductible)

#### 6.2.1 Première étape : partie entière

Énoncé

Démonstration par Analyse-Synthèse

#### 6.2.2 Deuxième étape : décomposition de $\frac{R}{B}$

Énoncé

Démonstration

#### 6.2.3 Troisième étape : généralisation

#### 6.2.4 Conséquence

#### 6.2.5 Quatrième étape : décomposition de $\frac{R}{P^\alpha}$

Résultat général

Démonstration

#### 6.2.6 Conclusion



# Chapitre 7

## Groupe symétrique

### 7.1 Présentation

#### 7.1.1 Définitions

Permutation

Groupe symétrique

Cardinal

#### 7.1.2 Exemples

Généraux

Particulier

### 7.2 Éléments générateurs

#### 7.2.1 Transpositions

Énoncé

Exemples

#### 7.2.2 Cycles à supports disjoints

Résultat admis

Exemple

Pratique

### 7.3 Signature d'une permutation

#### 7.3.1 Inversions

#### 7.3.2 Définitions

#### 7.3.3 Cas d'une transposition

#### 7.3.4 Cas d'un cycle