

Cours

C. LACOUTURE

Année scolaire 2024-2025, MPSI2, Lycée Carnot

Table des matières

I	Algèbre linéaire	7
1	Structure d'espace vectoriel sur un corps \mathbb{K}	9
1.1	Présentation	10
1.1.1	Exemple préliminaire	10
1.1.2	Définition générale	10
1.1.3	Propriétés élémentaires	10
1.1.4	Exemples	10
1.2	Sous-espaces vectoriels	10
1.2.1	Définition	10
1.2.2	Caractérisation	10
1.2.3	Exemples	10
1.2.4	Intersection de sous-espaces vectoriels	10
1.3	Familles libres ou liées	10
1.3.1	Définitions	10
1.3.2	Propriétés immédiates	10
1.3.3	Deux résultats	10
1.4	Sous-espace engendré par une partie	10
1.4.1	Présentation générale	10
1.4.2	Somme de sous- \mathbb{K} ev	10
1.4.3	Sommes directes	10
1.4.4	Sous-espaces supplémentaires	10
2	\mathbb{K}-espaces vectoriels de dimension finie	11
2.1	Présentation	12
2.1.1	Définition	12
2.1.2	Comparaison des cardinaux d'une partie libre et d'une partie génératrice	12
2.1.3	Bases	12
2.2	Dimension d'un \mathbb{K} ev de dimension finie	12
2.2.1	Définition	12
2.2.2	Exemples usuels	12

2.2.3	Caractérisation d'une base quand on connaît la dimension	12
2.2.4	Formules de dimensions	12
2.3	Rang d'un système de vecteurs	12
2.3.1	Définition	12
2.3.2	Deux résultats pratiques	12
2.3.3	Méthode	12
3	Applications linéaires	13
3.1	Présentation	14
3.1.1	Définitions	14
3.1.2	Exemples usuels	14
3.1.3	Propriétés simples	14
3.1.4	Structures	14
3.2	Précisions quand E est de dimension finie	14
3.2.1	Concernant $\text{Im}(f)$	14
3.2.2	Si de plus (e_1, \dots, e_n) est une base de E	14
3.2.3	Étude analytique quand E et F sont de dimension finie	14
3.3	Rang d'une AL	14
3.3.1	Définition	14
3.3.2	Théorème du rang	14
3.3.3	Conséquence lorsque $\dim(E) = \dim(F)$	14
3.3.4	Isomorphismes	14
3.4	Projecteurs et symétries	14
3.4.1	Définitions	14
3.4.2	Propriétés	14
3.4.3	Caractérisation	14
3.5	Formes linéaires et hyperplans	14
3.5.1	Formes linéaires	14
3.5.2	Hyperplans en dimension quelconque	14
3.5.3	Hyperplan en dimension finie	14
4	Matrices (structures)	15
4.1	Définitions	16
4.1.1	Générale	16
4.1.2	Matrice carrée	16
4.2	Opérations	16
4.2.1	Combinaison linéaire	16
4.2.2	Produit	16
4.3	Structures	16
4.3.1	Structure de groupe abélien pour $(M_{np}(\mathbb{K}), +)$	16

4.3.2	Structure d'anneau pour $(M_n(\mathbb{K}), +, \times)$	16
4.3.3	Structure de groupe pour $(GL_n(\mathbb{K}), \times)$	16
5	Matrices et applications linéaires	17
5.1	Définitions	18
5.1.1	Matrice d'un système de vecteurs	18
5.1.2	Matrice d'une application linéaire	18
5.1.3	Cas d'un endomorphisme	18
5.1.4	Étude analytique	18
5.2	Isomorphismes	18
5.2.1	Résultat général	18
5.2.2	Conséquence	18
5.2.3	Isomorphisme transposition	18
5.3	Produit matriciel et composition d'AL	18
5.3.1	Correspondance	18
5.3.2	Isomorphisme d'anneaux	18
5.3.3	Conséquence	18
5.4	Changements de base	18
5.4.1	Matrices de changement de base	18
5.4.2	Effet sur une AL	18
5.4.3	Cas d'un endomorphisme	18
5.4.4	Matrices équivalentes	18
5.4.5	Matrices semblables	18
5.5	Rang d'une matrice	18
5.5.1	Définition	18
5.5.2	Caractérisation	18
5.5.3	Application	18
5.6	Trace de matrice carrée	18
5.6.1	Définition	18
5.6.2	Propriétés	18
6	Applications multilinéaires	19
6.1	Présentation	19
6.1.1	Définition	19
6.1.2	Exemples usuels	19
6.1.3	Compléments de définition	19
6.1.4	Propriétés simples des formes n -linéaires antisymétriques (ou alternées)	19
6.2	Cas des formes n -linéaires antisymétriques sur E_n	19
6.2.1	Étude analytique	19
6.2.2	Rappel	19

6.2.3	Conséquence de structure	19
6.2.4	Condition nécessaire et suffisante d'indépendance linéaire	19
7	Déterminants	21
7.1	Présentation	21
7.1.1	Déterminant de n vecteurs dans un \mathbb{K} ev de dimension n	21
8	Systèmes d'équations linéaires	23
8.1	Présentation	23
8.1.1	Définition	23
8.1.2	Traductions	23
8.1.3	Traductions	24
8.1.4	Structure de l'ensemble des solutions	24
8.2	Méthode de résolution	24
8.3	Exemples	24
8.3.1	Cas où $n = p$ ($=3$)	24
8.3.2	Cas où $n > p$	24
8.3.3	Cas où $n < p$	24
8.3.4	Cas où $n = p$ (quelconque)	24
8.3.5	Autre exemple : classiquement par le pivot de Gauss .	24
8.3.6	Exemple résolu "en rusant"	24
9	Complément : opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice	25
9.1	Présentation	25
9.2	Traduction matricielle	25
9.3	Principe pour inverser une matrice	25
9.4	Exemple	25

Première partie

Algèbre linéaire

Chapitre 1

Structure d'espace vectoriel sur un corps \mathbb{K}

1.1 Présentation

1.1.1 Exemple préliminaire

1.1.2 Définition générale

1.1.3 Propriétés élémentaires

1.1.4 Exemples

Usuels

Théoriques

1.2 Sous-espaces vectoriels

1.2.1 Définition

1.2.2 Caractérisation

1.2.3 Exemples

Dans \mathbb{C} : $\mathbb{R}v$

Dans \mathbb{R}^2 , $\mathbb{R}v$

...

1.2.4 Intersection de sous-espaces vectoriels

Démonstration

Remarque

1.3 Familles libres ou liées

1.3.1 Définitions

Partie libre

Chapitre 2

\mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie

2.1 Présentation

2.1.1 Définition

2.1.2 Comparaison des cardinaux d'une partie libre et d'une partie génératrice

Démonstration

Illustration

2.1.3 Bases

Définition

Caractérisation

Exemples usuels

Existence de bases

Théorèmes de la base incomplète et de la base extraite

2.2 Dimension d'un \mathbb{K} ev de dimension finie

2.2.1 Définition

2.2.2 Exemples usuels

2.2.3 Caractérisation d'une base quand on connaît la dimension

Énoncé

Démonstration

Illustration

2.2.4 Formules de dimensions

Chapitre 3

Applications linéaires

3.1 Présentation

3.1.1 Définitions

Générale

Précisions

Compléments

3.1.2 Exemples usuels

3.1.3 Propriétés simples

Sous- \mathbb{K} evs

Caractérisation de l'injectivité

Composée

Réciproque

3.1.4 Structures

3.2 Précisions quand E est de dimension finie

3.2.1 Concernant $\text{Im}(f)$

3.2.2 Si de plus (e_1, \dots, e_n) est une base de E

3.2.3 Étude analytique quand E et F sont de dimension finie

Données

But

Résolution

Conclusion

3.3 Rang d'une AL

Chapitre 4

Matrices (structures)

4.1 Définitions

4.1.1 Générale

4.1.2 Matrice carrée

4.2 Opérations

4.2.1 Combinaison linéaire

4.2.2 Produit

Condition nécessaire d'existence

Pratique

Expression générale

Exemple

Exemple générale de AX

Propriétés diverses du produit de matrices

Transposée d'un produit

4.3 Structures

4.3.1 Structure de groupe abélien pour $(M_{np}(\mathbb{K}), +)$

Élément neutre

Symétrique

4.3.2 Structure d'anneau pour $(M_n(\mathbb{K}), +, \times)$

Explication

Compléments

Sous-anneau

4.3.3 Structure d'anneau pour $(GL_n(\mathbb{K}), \cdot)$

Chapitre 5

Matrices et applications linéaires

5.1 Définitions

5.1.1 Matrice d'un système de vecteurs

5.1.2 Matrice d'une application linéaire

5.1.3 Cas d'un endomorphisme

5.1.4 Étude analytique

5.2 Isomorphismes

5.2.1 Résultat général

5.2.2 Conséquence

5.2.3 Isomorphisme transposition

5.3 Produit matriciel et composition d'AL

5.3.1 Correspondance

5.3.2 Isomorphisme d'anneaux

5.3.3 Conséquence

5.4 Changements de base

5.4.1 Matrices de changement de base

Définition

Caractérisation

Étude analytique

5.4.2 Effet sur une AL

Chapitre 6

Applications multilinéaires

6.1 Présentation

6.1.1 Définition

6.1.2 Exemples usuels

6.1.3 Compléments de définition

6.1.4 Propriétés simples des formes n -linéaires anti-symétriques (ou alternées)

6.2 Cas des formes n -linéaires antisymétriques sur E_n

6.2.1 Étude analytique

6.2.2 Rappel

6.2.3 Conséquence de structure

6.2.4 Condition nécessaire et suffisante d'indépendance linéaire

Chapitre 7

Déterminants

7.1 Présentation

7.1.1 Déterminant de n vecteurs dans un \mathbb{K} ev de dimension n

Définition

Pratique

Critère d'indépendance linéaire

Effet d'un changement de base

7.1.2 Déterminant d'une matrice carrée

Définition

Chapitre 8

Systemes d'equations lineaires

8.1 Presentation

8.1.1 Definition

Un systeme d'equations lineaire dans $\mathbb{K}(\mathbb{R}\text{ou}\mathbb{C})$ est de la forme :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1p}x_p &= b_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{np}x_p &= b_n \end{cases}$$

où $\begin{cases} a_{ij}, b_i \in \mathbb{K} \text{ sont fixes} \\ n, p \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

8.1.2 Traductions

Matricielle

Vectorielle

En termes d'applications lineaires

On pose $A = \text{mat}_{\mathcal{B}_p, \mathcal{B}_n}(f)$ où $f \in L(E_p, E_n)$

8.1.3 Traductions

8.1.4 Structure de l'ensemble des solutions

8.2 Méthode de résolution

8.3 Exemples

8.3.1 Cas où $n = p$ ($=3$)

8.3.2 Cas où $n > p$

8.3.3 Cas où $n < p$

8.3.4 Cas où $n = p$ (quelconque)

8.3.5 Autre exemple : classiquement par le pivot de Gauss

8.3.6 Exemple résolu "en rusant"

Chapitre 9

Complément : opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice

9.1 Présentation

9.2 Traduction matricielle

9.3 Principe pour inverser une matrice

9.4 Exemple

TEST TEST GITHUB