

Cours

C. LACOUTURE

Année scolaire 2024-2025, MPSI2, Lycée Carnot

Table des matières

I	Géométrie	5
1	Produit scalaire	7
1.1	Généralités en dimensions quelconque	8
1.1.1	Définition	8
1.1.2	Exemples usuels	8
1.1.3	Inégalité de Cauchy-Schwarz	8
1.1.4	Norme associée à un produit scalaire	8
1.1.5	Orthogonalité de vecteurs	8
1.1.6	Orthogonalité de sous-espaces	8
1.1.7	Procédé d'orthogonalisation de Schmidt	8
1.2	Compléments dans un espace vectoriel euclidien	8
1.2.1	Existence de base orthonormée	8
1.2.2	Supplémentaire orthogonal	8
1.2.3	Projecteur orthogonal	8
1.2.4	À savoir en pratique	8
2	(Sous) espaces affines	9
2.1	Présentation théorique	9
2.1.1	Définition	9
2.1.2	Notations	9
2.1.3	Propriétés simples	9
2.1.4	Translations	9
2.2	Sous-espaces affines	9
2.2.1	Définition	9
2.2.2	Remarque	9
2.2.3	Dimension	9
2.2.4	Exemples usuels	9
2.2.5	Parallélisme	10
2.2.6	Intersection	10
2.2.7	Pratique : positions relatives de droites et plans	11
2.3	Étude analytique	12

2.3.1	Définitions générales	12
2.3.2	Exemples en dimension 2	13
2.3.3	Exemples en dimension 3	15

Première partie

Géométrie

Chapitre 1

Produit scalaire

1.1 Généralités en dimensions quelconque

1.1.1 Définition

1.1.2 Exemples usuels

1.1.3 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Énoncé

Cas d'égalité

Illustrations

1.1.4 Norme associée à un produit scalaire

Définition

Propriétés caractéristiques

Autres propriétés

1.1.5 Orthogonalité de vecteurs

Définitions

Propriétés

1.1.6 Orthogonalité de sous-espaces

Définitions

Structure

Formules

1.1.7 Procédé d'orthogonalisation de Schmidt

Données du problème

Principe

Calculs

Conclusion

Chapitre 2

(Sous) espaces affines

2.1 Présentation théorique

2.1.1 Définition

2.1.2 Notations

2.1.3 Propriétés simples

2.1.4 Translations

2.2 Sous-espaces affines

2.2.1 Définition

2.2.2 Remarque

2.2.3 Dimension

2.2.4 Exemples usuels

Ensembles des solutions d'un système d'équations linéaires

Qui s'écrit (lorsqu'il est $\neq \emptyset$)

$$S = X_0 + \ker(A)$$

Solution particulière (origine) + noyau de la matrice associée (direction)

L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire

Qui s'écrit :

- Pour une équation d'ordre 1

$$y_0 + \{\lambda Y_0(x) \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Solution particulière de l'équation complète (origine) + Vect(Y_0)

- Pour une équation d'ordre 2

2.2.5 Parallélisme

Définition

Soient $\mathcal{E}_1 = A_1 + F_1$, $\mathcal{E}_2 = A_2 + F_2$ deux sous-espaces affines de ϵ .

- \mathcal{E}_1 est parallèle à \mathcal{E}_2 ($\mathcal{E}_1 \parallel \mathcal{E}_2$) ssi $F_1 \subset F_2$
- \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 sont parallèles ($\mathcal{E}_1 \parallel \mathcal{E}_2$) ssi $F_1 = F_2$

Propriétés

- Théorème d'Euclide

Soit \mathcal{V} un sous-espace affine (d'origine A), de direction F . Soit Ω un point de \mathcal{E} . Il existe un unique sous-espace affine de \mathcal{E} passant par Ω , parallèle à \mathcal{V} .

C'est : $\mathcal{V}' = \Omega + F$ ($\Omega \in \mathcal{V}'$ donc Ω sert d'origine à \mathcal{V}' . $\mathcal{V}' \parallel \mathcal{V}$ donc \mathcal{V}' a pour direction F et : un point origine et la direction définissent entièrement et de manière unique \mathcal{V}')

- Soient $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$ 2 sous-espaces affines de \mathcal{E}

$$\mathcal{V}_1 \parallel \mathcal{V}_2 \Rightarrow \mathcal{V}_1 = \emptyset \text{ ou } \mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_2$$

Démonstration :

On a : $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$ de directions F_1, F_2 tel que $F_1 \subset F_2$

Dès lors : montrons que si $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 \neq \emptyset$ alors $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_2$ en effet : soit $\Omega \in \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2$. On a donc $\mathcal{V}_1 = \Omega + F_1, \mathcal{V}_2 = \Omega + F_2$. Puis : $M \in \mathcal{V}_1 \Leftrightarrow OM \in F_1 \Rightarrow OM \in F_2 \Leftrightarrow M \in \mathcal{V}_2$ d'où $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_2$.

- Ainsi :

$$\mathcal{V}_1 \parallel \mathcal{V}_2 \Rightarrow \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 \neq \emptyset \text{ ou } \mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_2$$

2.2.6 Intersection

On a 2 sous-espaces affines : $\mathcal{V}_1 = A_1 + F_1, \mathcal{V}_2 = A_2 + F_2$

CNS d'existence

$$\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 \neq \emptyset \Leftrightarrow \overrightarrow{A_1 A_2} \in F_1 + F_2$$

Démonstration :

\Rightarrow
 On a : $\Omega \in \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2$
 Dès lors $\overrightarrow{A_1 A_2} = \overrightarrow{A_1 \Omega} + \overrightarrow{\Omega A_2}$ donc $\overrightarrow{A_1 A_2} \in F_1 + F_2$
 \Leftarrow
 On a : $\overrightarrow{A_1 A_2} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}$ où $\overrightarrow{u_1} \in F_1, \overrightarrow{u_2} \in F_2$
 Dès lors $\exists M_1 \in \mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{A_1 M_1} = \overrightarrow{u_1}$, $\exists M_2 \in \mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{A_2 M_2} = -\overrightarrow{u_2}$
 donc $M_1 = A_1 + \overrightarrow{u_1} \in A_1 + F_1 = \mathcal{V}_1$, $M_2 = A_2 - \overrightarrow{u_2} \in A_2 + F_2 = \mathcal{V}_2$
 donc $\overrightarrow{A_1 A_1} = \overrightarrow{A_1 M_1} - \overrightarrow{A_2 M_2} = \overrightarrow{A_1 M_1} + \overrightarrow{M_2 A_2}$ donc $\overrightarrow{A_1 M_1} + \overrightarrow{M_1 A_2} = \overrightarrow{A_1 M_1} + \overrightarrow{M_2 A_2}$ c-à-d $\overrightarrow{M_1 A_2} = \overrightarrow{M_2 A_2}$ c-à-d $M_1 = M_2$ donc $M_1 = M_2 \in \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2$
 donc $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2$ non vide.

Conséquence

Si $E = F_1 + F_2$ alors $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 \neq \emptyset$

Structure de $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2$ quand $\neq \emptyset$

$\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2$ est un sous-espace affine de \mathcal{E} , de direction $F_1 \cap F_2$.
 On a : $\Omega \in \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2$ donc $\mathcal{V}_1 = \Omega + F_1, \mathcal{V}_2 = \Omega + F_2$
 Dès lors : $M \in \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 \Leftrightarrow M \in \mathcal{V}_1$ et $M \in \mathcal{V}_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M} \in F_1$ et $\overrightarrow{\Omega M} \in F_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M} \in F_1 \cup F_2 \Leftrightarrow M \in \Omega + F_1 \cup F_2$
 Donc $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 = \Omega + F_1 \cup F_2$ est un sous-espace affine de \mathcal{E} de direction $F_1 \cup F_2$.

Conséquence immédiate

Si $E = F_1 \oplus F_2$ alors $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 = \{\text{un point}\}$
 Car : on a $E = F_1 + F_2$ donc $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 \neq \emptyset$
 Soit $\Omega \in \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2$
 On a alors $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 = \Omega + F_1 \cup F_2 = \Omega + \{O_E\} = \{\Omega\}$

2.2.7 Pratique : positions relatives de droites et plans

En dimension 2 (dans un plan affine)

Deux droites sont parallèles ou sécantes en un point.

En dimension 3 (dans un "véritable" espace affine)

- Pour deux plans affines
 Deux plans $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ sont parallèles ou sécants selon une droite

Démonstration : $\mathcal{P}_1 = A_1 + P_1, \mathcal{P}_2 = A_2 + P_2$ où P_1, P_2 plans vectoriels de $E = E_3$

— Soit $P_1 = P_2$ c-à-d $\mathcal{P}_2 \parallel \mathcal{P}_1$

— Soit $P_1 \neq P_2$

$\exists \vec{u}_2 \in P_2$ tel que $\vec{u}_2 \notin P_1$ On sait alors que $P_1 \oplus \text{Vect}(\vec{u}_2) = E_3$ (cf cours sur les hyperplans, P_1 en étant un) avec $\text{Vect}(\vec{u}_2) \subset P_2$ puis $E_3 = P_1 + \text{Vect}(\vec{u}_2) \subset P_1 + P_2$ donc $P_1 + P_2 = E_3$ donc $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \neq \emptyset$ donc $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ est un espace affine de direction $P_1 \cap P_2$ avec $\dim P_1 \cap P_2 = \dim P_1 + \dim P_2 - \dim P_1 + P_2 = 2 + 2 - 3 = 1$ donc $P_1 \cap P_2$ est une droite vectorielle bref \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 sont sécants selon une droite affine.

— Pour une droite et un plan

\mathcal{D} et \mathcal{P} sont tels que $\mathcal{P} \parallel \mathcal{D}$ ou $\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \{1 \text{ point}\}$

Démonstration : $\mathcal{D} = A + D, \mathcal{P} = B + P$

— Soit $D \subset P$ c-à-d $\mathcal{D} \parallel \mathcal{P}$

— Soit $D \not\subset P$

Alors $P \oplus D = E_3$ (cf cours sur les hyperplans) donc $\mathcal{P} \cap \mathcal{D} = 1 \text{ point}$

— Pour deux droites : $\mathcal{D}_1 = A_1 + D_1, \mathcal{D}_2 = A_2 + D_2$

— Définition de la coplanarité \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 sont coplanaires ssi $\mathcal{D}_1 \text{ parr } \mathcal{D}_2$ ou $\mathcal{D}_1 \text{ inter } \mathcal{D}_2$ {un point}

— En notant $\mathcal{D}_1 = A_1 + \text{Vect}(\vec{u}_1), \mathcal{D}_2 = A_2 + \text{Vect}(\vec{u}_2)$

On a : \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 coplanaires $\Leftrightarrow (\overrightarrow{A_1 A_2}, \vec{u}_1, \vec{u}_2)$ lié.

Démonstration : $(A_1 A_2, u_1, u_2)$ lié signifie :

— \vec{u}_1 et \vec{u}_2 sont colinéaires, c-à-d $D_1 = \text{Vect}(\vec{u}_1) = D_2 = \text{Vect}(\vec{u}_2)$ c-à-d $\mathcal{D}_1 \parallel \mathcal{D}_2$

— \vec{u}_1 et \vec{u}_2 non colinéaires, avec $\overrightarrow{A_1 A_2} \in \text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ c-à-d $\overrightarrow{A_1 A_2} \in D_1 + D_2$ c-à-d $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 \neq \emptyset$ c-à-d $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \{un \ point\}$ car $D_1 \cap D_2 = \text{Vect}(\vec{u}_1) \cap \text{Vect}(\vec{u}_2) = \{O_E\}$

2.3 Étude analytique

2.3.1 Définitions générales

Repère cartésien (ou affine)

Un repère cartésien d'un espace affine \mathcal{E} (de direction E) est : $\mathcal{R} = (O, e_1, e_2, \dots, e_n)$ où :

— $O \in \mathcal{E}$ (origine du repère)

— (e_1, \dots, e_n) base de E

Coordonnées cartésiennes

$\forall M \in \mathcal{E}, \exists! (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\overrightarrow{OM} = x_1 \overrightarrow{e_1} + \dots + x_n \overrightarrow{e_n}$$

car $\overrightarrow{OM} \in E$ et (e_1, \dots, e_n) base de E .

(x_1, \dots, x_n) ou $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ sont les coordonnées cartésiennes du point M , dans le repère cartésien (O, e_1, \dots, e_n) .

Équation cartésienne

Soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ (\mathcal{F} : partie de \mathcal{E}). On appelle équation cartésienne de \mathcal{F} , toute relation entre les coordonnées cartésiennes x_1, \dots, x_n d'un point M de \mathcal{E} . Cette relation exprime une CNS pour que $M \in \mathcal{F}$.

Repère orthonormé

Dans le cas où E est un \mathbb{R} ev euclidien et (e_1, \dots, e_n) est une BON de E (O, e_1, \dots, e_n) est un RON (repère orthonormé) de \mathcal{E}

2.3.2 Exemples en dimension 2

\mathcal{E}_2 a pour repère cartésien (O, i, j) . Les droites \mathcal{D} de \mathcal{E}_2 sont les parties de \mathcal{E}_2 d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ où $(a, b) \neq (0, 0)$

Démonstration :

sens direct Soit \mathcal{D} une droite de \mathcal{E}_2 , passant par $\Omega \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ dans (O, i, j) ,

dirigée par $\overrightarrow{v} \left| \begin{array}{l} \alpha \\ \beta \end{array} \right.$ dans (i, j) où $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$. On a alors :

$$\begin{aligned} M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{D} &\Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M} \in \mathcal{D} = \text{Vect}(\overrightarrow{v}) \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ sont liés} \\ &\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{v}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \beta(x - x_0) - \alpha(y - y_0) = 0 \\ &\Leftrightarrow \beta x - \alpha y + \alpha y_0 - \beta x_0 = 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

On a bien une équation de la forme : $ax + by + c = 0$ où $(a, b) = (\beta, -\alpha) \neq (0, 0)$

sens réciproque Soit $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}_2$ d'équation cartésienne : $ax + by + c = 0$ (où $(a, b) \neq (0, 0)$) vu que $(a, b) \neq (0, 0)$: l'équation ci-dessus a des solutions (par exemple : si $a \neq 0$, $(-\frac{c}{a}, 0)$ est solution). Notons (x_0, y_0) une de ces solutions. On a alors

$$\begin{aligned}
 M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{D} &\Leftrightarrow ax + by + c = ax_0 + by_0 + c \\
 &\Leftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_0 & -b \\ y - y_0 & a \end{vmatrix} = 0 \\
 &\Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M} \text{ et } \vec{u} \text{ sont liés (où } \Omega \text{ est le point de coordonnées } \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\
 &\text{ dans } (O, i, j) \text{ et } \vec{u} \text{ est le vecteur de coordonnées } \begin{vmatrix} -b \\ a \end{vmatrix} \\
 &\text{ dans } (i, j) \text{ donc } \vec{u} \neq \vec{0}) \\
 &\Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M} \subset D = \text{Vect}(\vec{u}) \\
 &\Leftrightarrow M \in \Omega + D
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

donc \mathcal{D} est bien une droite affine, de direction $D = \text{Vect}(-ba)$

Remarques :

Pour \mathcal{D} d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ dans (O, i, j) .

Un vecteur de base de D est $\vec{u} \begin{vmatrix} -b \\ a \end{vmatrix}$ dans (i, j) .

Une équation de D est : $ax + by = 0$

Vérifiée par $\begin{vmatrix} -b \\ a \end{vmatrix}$ et passant par O_{E_2} de coordonnées (00) dans (i, j) .

Dans le cas d'un espace euclidien et d'un RON (O, i, j)

$D^\perp = \text{Vect}\left(\begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix}\right)$ car D^\perp est de dimension 1 et $\begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -b \\ a \end{vmatrix} = 0$ donc $\begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix} \in D^\perp$

2.3.3 Exemples en dimension 3

Les plans affines de \mathcal{E}_3

Sont les parties de \mathcal{E}_3 d'équation cartésienne : $ax + by + cz + d = 0$ où $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$

Remarques :

— L'équation de la direction P dans (i, j, k) est alors $ax + by + cz = 0$

— Dans le cas d'un RON : $P^\perp = \text{Vect}\left(\begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array}\right)$

Les droites affines de \mathcal{E}_3

Sont les intersections de deux plans de \mathcal{E}_3 non parallèles c-à-d les parties de \mathcal{E}_3 définies par deux équations cartésiennes de la forme $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$

où $(a, b, c), (a', b', c') \neq (0, 0, 0)$ et sont non colinéaires (pour ne pas donner la même équation directionnelle)

$$blabla = tructruc \quad (2.3)$$