

Cours

C. LACOUTURE

Année scolaire 2024-2025, MPSI2, Lycée Carnot

Table des matières

I	Algèbre	9
1	Structure de groupe	11
1.1	Présentation	11
1.1.1	Exemple préliminaire	11
1.1.2	Définition générale	11
1.1.3	Exemples usuels	12
1.1.4	Compléments	12
1.1.5	Notations	13
1.1.6	Autres remarques	14
1.2	Sous-groupes	14
1.2.1	Définition	14
1.2.2	Caractérisations	15
1.2.3	Exemples usuels	15
1.2.4	Propriétés	15
1.3	Morphismes de groupes	16
1.3.1	Définition	16
1.3.2	Exemples usuels	16
1.3.3	Propriétés	16
2	Structure d'anneau et de corps	17
2.1	Structure d'anneau	18
2.1.1	Présentation	18
2.1.2	Propriétés	18
2.1.3	Sous-anneau	18

2.2	Structure de corps	18
2.2.1	Définition	18
2.2.2	Exemples usuels	18
2.2.3	Propriétés	18
2.2.4	Sous-corps	18
3	Corps des nombres réels	19
3.1	Généralités	20
3.2	Borne supérieure ou inférieure d'une partie de \mathbb{R}	20
3.2.1	Définition	20
3.2.2	Existence-unicité	20
3.2.3	Mise en garde	20
3.2.4	Caractérisation	20
3.3	Valeurs approchées d'un réel à α près (où $\alpha \in \mathbb{Q}^{*+}$)	20
3.3.1	Résultat et définition	20
3.3.2	Cas où $\alpha = 1$	20
3.3.3	Cas où $\alpha = \frac{1}{10^n}$ ($n \in \mathbb{N}$)	20
3.4	Densité	20
3.4.1	Définitions	20
3.4.2	Caractérisation	20
3.4.3	Compléments	20
4	Corps des nombres complexes	21
4.1	Conjugaison	22
4.1.1	Définition	22
4.1.2	Propriétés	22
4.2	Module	22
4.2.1	Définition	22
4.2.2	Propriétés	22
4.2.3	Nombres complexes de module 1	22
4.3	Forme trigonométrique	22
4.3.1	Définition	22
4.3.2	Premiers exemples	22

4.3.3	Relations entre forme algébrique et trigonométrique . .	22
4.3.4	Formules diverses	22
4.3.5	Interprétation géométrique	22
4.4	Équation $z^n = a$ (où $n \in \mathbb{N}^*, a \in \mathbb{C}^*$)	22
4.4.1	Résolution	22
4.4.2	1 ^{er} cas particulier : racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité	22
4.4.3	Cas particulier des racines carrées d'un complexe . . .	22
4.5	Traduction complexe de transformations géométriques	22
4.5.1	Symétries	22
4.5.2	Translations	22
4.5.3	Homothéties	22
4.5.4	Rotations	22
4.5.5	Similitudes directes	22
4.6	Exponentielle complexe	22
4.6.1	Définition	22
4.6.2	Propriétés	22
5	Anneau $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à une indéterminée à coefficients dans un corps \mathbb{K}	23
5.1	Présentation	24
5.1.1	Définitions	24
5.1.2	Opérations sur les polynômes	24
5.1.3	Propriétés	24
5.1.4	Structures	24
5.1.5	Composée	24
5.2	Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$	24
5.2.1	Énoncé	24
5.2.2	Exemples	24
5.2.3	Divisibilité	24
5.3	PGCD, PPCM dans $\mathbb{K}[X]$	24
5.3.1	Définition pour PGCD	24
5.3.2	Propriétés	24

5.3.3	Polynômes premiers entre eux	24
5.3.4	PPCM dans $\mathbb{K}[X]$	24
5.4	Zéros (ou racines) d'un polynôme	24
5.4.1	Définitions	24
5.4.2	Relation entre les racines et le degré d'un polynôme . .	24
5.4.3	Polynôme dérivé	24
5.4.4	Caractérisation d'un zéro d'ordre n	24
5.5	Polynômes irréductibles	24
5.5.1	Présentation	24
5.5.2	Décomposition générale	24
5.5.3	Dans $\mathbb{C}[X]$	24
5.5.4	Dans $\mathbb{R}[X]$	24
5.5.5	Pratique de la décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$	24
5.6	Relations coefficients-racines	24
5.6.1	Données du problème	24
5.6.2	Résolution	24
5.6.3	Applications	24
6	Fractions rationnelles	25
6.1	Présentation	26
6.1.1	Définition	26
6.1.2	Opérations	26
6.1.3	Forme irréductible	26
6.2	Décomposition en éléments simples de $F = \frac{A}{B}$ (irréductible) . .	26
6.2.1	Première étape : partie entière	26
6.2.2	Deuxième étape : décomposition de $\frac{R}{B}$	26
6.2.3	Troisième étape : généralisation	26
6.2.4	Conséquence	26
6.2.5	Quatrième étape : décomposition de $\frac{R}{Pa}$	26
6.2.6	Conclusion	26
6.3	Décomposition dans $\mathbb{C}(X)$	26

6.3.1	Forme a priori	26
6.3.2	Détermination pratique des λ, μ	26
6.3.3	Exemple usuel particulier	26
6.3.4	Exemple usuel général	26
6.4	Dans $\mathbb{R}(X)$	26
6.4.1	Forme a priori	26
6.4.2	Détermination pratique des λ, α, β	26
6.4.3	Exemple usuel	26
6.5	Application principale : calculs de primitive de fonctions rationnelles	26
6.5.1	Définition	26
6.5.2	Méthode pour primitiver $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \in \mathbb{R}(x)$	26
7	Groupe symétrique	27
7.1	Présentation	28
7.1.1	Définitions	28
7.1.2	Exemples	28
7.2	Éléments générateurs	28
7.2.1	Transpositions	28
7.2.2	Cycles à supports disjoints	28
7.3	Signature d'une permutation	28
7.3.1	Inversions	28
7.3.2	Définitions	28
7.3.3	Cas d'une transposition	28
7.3.4	Cas d'un cycle	28
7.3.5	Morphisme signature	28

Première partie

Algèbre

Chapitre 1

Structure de groupe

1.1 Présentation

1.1.1 Exemple préliminaire

L'ensemble \mathbb{Z} pour l'addition $+$ est tel que :

1. $\forall x, y \in \mathbb{Z}$
2. $\forall x, y, z \in \mathbb{Z}, (x + y) + z = x + (y + z)$
3. $\forall x \in \mathbb{Z}, x + 0 = 0 + x = x$
4. $\forall x \in \mathbb{Z}, x + (-x) = (-x) + x = 0$
5. et de plus $\forall x, y \in \mathbb{Z}, x + y = y + x$

Ainsi $(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe abélien / groupe commutatif.

1.1.2 Définition générale

Soit un ensemble G muni d'une loi $*$. Dès lors, $(G, *)$ a une structure de groupe si et seulement si :

- | |
|--|
| <ol style="list-style-type: none">1. $*$ est une Loi de Composition Interne (LCI) sur G. C'est-à-dire $\forall x, y \in G, x * y \in G$.2. $*$ est associative. C'est-à-dire $\forall x, y, z \in G, (x * y) * z = x * (y * z)$.3. G a un élément neutre e pour $*$. $\exists e \in G$ tel que $\forall x \in G, x * e = e * x = x$.4. Tout élément de G a un symétrique dans G. $\forall x \in G, \exists x' \in G$ tel que $x * x' = x' * x = e$. |
|--|

Si, de plus, $*$ est commutative sur G , c'est-à-dire $\forall x, y \in G, x * y = y * x$, alors G est un groupe commutatif (ou abélien).

Remarques concernant la définition :

a) attention à la place des quantificateurs : pour l'élément neutre (3.) c'est \exists puis \forall et pour le symétrique c'est \forall puis \exists .

b) attention aux 2 égalités dans la définition de l'élément neutre et des symétriques d'un élément car $*$ ne commute pas forcément.

1.1.3 Exemples usuels**Ensembles de nombres**

$(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{C}, +), (\mathbb{Q}^*, +), (\mathbb{R}_+^*, x), (\mathbb{R}^*, x), (\mathbb{C}^*, x)$ Sont tous des groupes commutatifs.

Ensemble des bijections

Soit E un ensemble et $\mathcal{B}(E)$ l'ensemble des bijections de E vers E .

$$(\mathcal{B}(E), \circ) \text{ est un groupe } \underline{\text{non}} \text{ commutatif.}$$

Le neutre pour \circ est : Id_E et le symétrique de f pour \circ est f^{-1}

Ensemble des parties

Soit E un ensemble et $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E .

$$(\mathcal{P}(E), \Delta) \text{ est un groupe commutatif.}$$

Le neutre pour Δ est : \emptyset car $\forall A \subset E : A \Delta \emptyset = \emptyset \Delta A = A$ Et le symétrique de A pour Δ est A car $A \Delta A = \emptyset$

1.1.4 Compléments**Unicité**

Sont uniques l'élément neutre et le symétrique de tout élément.

Formules concernant le symétrique

a) $\forall x, y \in G : (x * y)' = y' * x'$ (avec ' pour symétrique) Attention à l'ordre car le groupe n'est pas forcément commutatif. **b)** $\forall x \in G (x')' = x$

Régularité de tout élément

$$\forall x, y, z \in G : x * z = y * z \implies x = y \text{ et } z * x = z * y \implies x = y$$

Ainsi on traduit que tout élément z est régulier dans le groupe $(G, *)$ c'est à dire dans un groupe, on peut "simplifier par tout élément".

Plus généralement : résolution d'équation

$$\forall x, y, z \in G : x * y = z$$

$$\implies x' * (x * y) = x' * z$$

$$\implies (x' * x) * y = x' * z \text{ car } * \text{ est associative}$$

$$\implies e * y = x' * z \text{ car } x' \text{ est symétrique de } x \text{ pour } *$$

$$\implies y = x' * z \text{ car } e \text{ neutre pour } *$$

Dans un groupe : tout élément peut, dans une égalité, "passer dans l'autre membre" sous la forme de son symétrique ... en tenant compte de l'ordre car $*$ ne commute pas forcément.

1.1.5 Notations

En pratique, un groupe est noté : $(G, +)$, même si $+$ n'est pas l'addition classique (notation additive) ou (G, \cdot) , même si \cdot n'est pas la multiplication classique (notation multiplicative) On définit alors :

En notation additive

$$\forall x \in G, \forall n \in \mathbb{Z}$$

1. si $n = 0$: $0_x = 0_G$ neutre de G pour $+$.
2. si $n \in \mathbb{N}^*$: $nx = x + x + \dots + x$ (n fois).
3. si $n \in \mathbb{Z}_-^*$: $nx = (-x) + \dots + (-x)$ ($-n$ fois) où $-x$ est le symétrique de x pour $+$.

En notation multiplicative

$$\text{Les puissances d'un selon : } \forall x \in G, \forall n \in \mathbb{Z}$$

1. si $n = 0$: $x^0 = 1_G$ neutre de G pour \cdot .
2. si $n \in \mathbb{N}^*$: $x^n = x \cdot x \cdot \dots \cdot x$ (n fois).
3. si $n \in \mathbb{Z}_-^*$: $x^n = (x^{-1}) \cdot \dots \cdot (x^{-1})$ ($-n$ fois) où x^{-1} est le symétrique de x pour \cdot .

Propriétés des multiples d'un élément

$$\forall x \in G, \forall m, n \in \mathbb{Z}$$

1. $(m+n)x = mx + nx$ (additivité classique dans \mathbb{Z} qui devient une loi de groupe sur G)
2. $-(nx) = (-n)x = n(-x)$ ($-n$ est l'opposé classique dans \mathbb{Z} et $(-x)$ symétrique de x dans G)
3. $m(nx) = (m \times n)x$ (\times produit classique dans \mathbb{Z} et loi de groupe sur G)

Propriétés des puissances d'un élément

$$\forall x \in G, \forall m, n \in \mathbb{Z}$$

1. $x^{m+n} = x^m \cdot x^n$
2. $(x^m)^{-1} = (x^{-1})^m = x^{-m}$
3. $x^{mn} = (x^m)^n = (x^n)^m$

1.1.6 Autres remarques

Concernant les propriétés des puissances ou des multiples précédents

Parmi toutes les propriétés citées, on a pas cité $(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$ car c'est faux si \cdot ne commute pas forcément. $(x \cdot y)^n = (x \cdot y) \cdot (x \cdot y) \cdot \dots (n \text{ fois}) \cdot (x \cdot y) \neq x^n \cdot y^n = x \cdot \dots (n \text{ fois}) \cdot x \cdot y \cdot \dots (n \text{ fois}) \cdot y$

Concernant les produits cartésien de groupes

Soit $(G, +)$ et (G', \cdot) 2 groupes. $G \times G'$ est un groupe pour $*$ tel que $(x, x') * (y, y') = (x + y, x' \cdot y')$.

Le neutre de $G \times G'$ pour $*$ est : $(0_G, 1_{G'})$.

Le symétrique de (x, x') dans $G \times G'$ pour $*$ est : $(-x, x'^{-1})$

1.2 Sous-groupes

1.2.1 Définition

Soit (G, \cdot) un groupe et $H \subset G$, H est un sous-groupe de G pour \cdot si et seulement si la restriction de \cdot avec les éléments de H est muni d'une structure de groupe

1.2.2 Caractérisations

H sous-groupe de G pour \cdot :

$$\Leftrightarrow$$

- $1_G \in H$
- $\forall x, y \in H, \quad x \cdot y \in H$
- $\forall x \in H, \quad x^{-1} \in H$

$$\Leftrightarrow$$

- $1_G \in H$
- $\forall x, y \in H, \quad x \cdot y^{-1} \in H$

Remarque : Dans la majorité des cas dans la suite on montrera que (H, \cdot) est un groupe en montrant que c'est un sous-groupe d'un groupe usuel.

1.2.3 Exemples usuels

Exemple général

Les puissances d'un élément.

Soit (G, \cdot) un groupe et $a \in G$, $H = \{a^z \mid z \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe de G pour \cdot .

Les multiples d'un élément.

Soit $(G, +)$ un groupe et $a \in G$, $H = \{za \mid z \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe de G pour $+$.

Exemples particuliers

(\mathbb{U}, \times) est un groupe. Car sous-groupe de (\mathbb{C}^*, \times)

(\mathbb{U}_n, \times) est un groupe. Car sous-groupe de (\mathbb{C}^*, \times)

Sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$

Les sous-groupes de \mathbb{Z} pour $+$ sont les ensembles de la forme $n\mathbb{Z} = \{nz \mid z \in \mathbb{Z}\}$

1.2.4 Propriétés

Intersection

"Toute intersection de sous-groupes est un sous-groupe."

Soit (G, \cdot) un groupe. $(H_i)_{i \in \Delta}$ une famille de sous-groupes de G pour \cdot .
Alors $H = \bigcap_{i \in \Delta} H_i$ est un sous-groupe de G pour \cdot .

Faux pour la réunion \cup

a) contre-exemple : dans $(\mathbb{Z}, +)$

Soit $H_1 = 2\mathbb{Z} = \{2z \mid z \in \mathbb{Z}\}$ et $H_2 = 3\mathbb{Z} = \{3z \mid z \in \mathbb{Z}\}$.

Mais $H = 2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$ n'est pas un sous-groupe de \mathbb{Z} pour $+$ car :

$2 \in 2\mathbb{Z} \subset 2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z} = H$ et $3 \in 3\mathbb{Z} \subset 2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z} = H$

Mais $2 + 3 = 5 \notin H$

b) "sous conditions"

Soit G_1, G_2 sous groupes de G pour \cdot .

$G_1 \cup G_2$ est un sous-groupe de G pour $\cdot \Leftrightarrow G_1 \subset G_2$ ou $G_2 \subset G_1$

1.3 Morphismes de groupes

1.3.1 Définition

1.3.2 Exemples usuels

1.3.3 Propriétés

Chapitre 2

Structure d'anneau et de corps

2.1 Structure d'anneau

2.1.1 Présentation

Exemple préliminaire

Définition générale

Notations

Intégrité

Exemples usuels

2.1.2 Propriétés

Élément absorbant

Ensemble des inversibles

”Opposé” d’un produit

Loi ”soustraction”

Formule du binôme de Newton

Formule de factorisation

2.1.3 Sous-anneau

Caractérisation

Exemple usuel : sous-anneau des décimaux

2.2 Structure de corps

2.2.1 Définition

2.2.2 Exemples usuels

2.2.3 Propriétés

Intégrité

Commutativité

2.2.4 Sous-corps

Chapitre 3

Corps des nombres réels

3.1 Généralités

3.2 Borne supérieure ou inférieure d'une partie de \mathbb{R}

3.2.1 Définition

3.2.2 Existence-unicité

Existence

Unicité

3.2.3 Mise en garde

3.2.4 Caractérisation

3.3 Valeurs approchées d'un réel à α près (où $\alpha \in \mathbb{Q}^{*+}$)

3.3.1 Résultat et définition

3.3.2 Cas où $\alpha = 1$

3.3.3 Cas où $\alpha = \frac{1}{10^n}$ ($n \in \mathbb{N}$)

Énoncé

Convergence

3.4 Densité

3.4.1 Définitions

Intervalle

Densité

3.4.2 Caractérisation

Générale

Plus précisément

Remarques

Chapitre 4

Corps des nombres complexes

4.1 Conjugaison

4.1.1 Définition

4.1.2 Propriétés

Formules

Caractérisation

Pratique

4.2 Module

4.2.1 Définition

Pratique

Lien avec la valeur absolue

4.2.2 Propriétés

Diverses

(Double) inégalité triangulaire

4.2.3 Nombres complexes de module 1

Description

Remarque sur l'écriture $e^{i\theta}$

Produit

Formule de Moivre

Formules à savoir

4.3 Forme trigonométrique

4.3.1 Définition

Résultat préliminaire

Conséquence

4.3.2 Premiers exemples

Divers

Chapitre 5

Anneau $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à une indéterminée à coefficients dans un corps \mathbb{K}

5.1 Présentation

5.1.1 Définitions

5.1.2 Opérations sur les polynômes

Somme

Multiplication par un élément de \mathbb{K}

Multiplication

5.1.3 Propriétés

Pour la multiplication

Pour la somme

5.1.4 Structures

Neutres

Intégrité

Inversibles

5.1.5 Composée

Définition

Degré

5.2 Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$

5.2.1 Énoncé

Unicité

Existence

5.2.2 Exemples

5.2.3 Divisibilité

Chapitre 6

Fractions rationnelles

6.1 Présentation

6.1.1 Définition

6.1.2 Opérations

Somme

Produit

Structure

6.1.3 Forme irréductible

6.2 Décomposition en éléments simples de $F = \frac{A}{B}$ (irréductible)

6.2.1 Première étape : partie entière

Énoncé

Démonstration par Analyse-Synthèse

6.2.2 Deuxième étape : décomposition de $\frac{R}{B}$

Énoncé

Démonstration

6.2.3 Troisième étape : généralisation

6.2.4 Conséquence

6.2.5 Quatrième étape : décomposition de $\frac{R}{P^\alpha}$

Résultat général

Démonstration

6.2.6 Conclusion

6.3 Décomposition dans $\mathbb{C}(X)$

6.3.1 Forme a priori

6.3.2 Détermination pratique des λ, μ

Chapitre 7

Groupe symétrique

7.1 Présentation

7.1.1 Définitions

Permutation

Groupe symétrique

Cardinal

7.1.2 Exemples

Généraux

Particulier

7.2 Éléments générateurs

7.2.1 Transpositions

Énoncé

Exemples

7.2.2 Cycles à supports disjoints

Résultat admis

Exemple

Pratique

7.3 Signature d'une permutation

7.3.1 Inversions

7.3.2 Définitions

7.3.3 Cas d'une transposition

7.3.4 Cas d'un cycle

7.3.5 Morphisme signature