

# Cours

C. LACOUTURE

Année scolaire 2024-2025, MPSI2, Lycée Carnot



# Table des matières

<b>I</b>	<b>Arithmétique</b>	<b>5</b>
<b>1</b>	<b>Réurrences, sommations</b>	<b>7</b>
1.1	Réurrences . . . . .	7
1.1.1	Principe général . . . . .	7
1.1.2	Utilisation la plus fréquente . . . . .	8
1.1.3	Variantes . . . . .	8
1.1.4	Originalités . . . . .	8
1.2	Sommations . . . . .	8
1.2.1	Somme simple . . . . .	8
1.2.2	Sommes doubles . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Coefficients binomiaux</b>	<b>9</b>
2.1	Définitions . . . . .	9
2.1.1	Factorielle . . . . .	9
2.1.2	Coefficient binomial . . . . .	9
2.2	Formules du triangle de Pascal . . . . .	9
2.2.1	Énoncé . . . . .	9
2.2.2	Pratique . . . . .	9
2.2.3	Expression des coefficients binomiaux . . . . .	9
2.3	Applications . . . . .	9
2.3.1	Symétrie des coefficients binomiaux . . . . .	9
2.3.2	Formule du binôme de Newton . . . . .	9
2.3.3	Linéarisation . . . . .	9
2.3.4	Inversement . . . . .	9
2.3.5	Nombre de parties d'un ensemble . . . . .	9
<b>3</b>	<b>PGCD, PPCM, nombres premiers</b>	<b>11</b>
3.1	PPCM : Plus Petit Commun Multiple . . . . .	12
3.1.1	Définition . . . . .	12
3.1.2	Propriétés . . . . .	12
3.1.3	Cas particulier . . . . .	12

3.2	PGCD : Plus Grand Commun Diviseur . . . . .	12
3.2.1	Définition . . . . .	12
3.2.2	Propriétés . . . . .	12
3.2.3	Cas particulier . . . . .	12
3.2.4	Pratique . . . . .	12
3.3	Nombres premiers entre eux . . . . .	12
3.3.1	Définition . . . . .	12
3.3.2	Caractérisation : théorème de Bézout . . . . .	12
3.3.3	Propriétés . . . . .	12
3.4	Généralisation . . . . .	12
3.4.1	pgcd,ppcm de $n$ entiers . . . . .	12
3.4.2	Pratique . . . . .	12
3.5	Nombres premiers . . . . .	12
3.5.1	Définition . . . . .	12
3.5.2	Premières propriétés . . . . .	12
3.5.3	Infinité . . . . .	12
3.5.4	Crible d'Eratosthène . . . . .	12
3.5.5	Décomposition en facteurs premiers . . . . .	12
3.6	Congruences . . . . .	12
3.6.1	Définition de la relation . . . . .	12
3.6.2	Opérations sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . . . . .	13
4	Dénombrements	15

# Première partie

## Arithmétique



# Chapitre 1

## Réurrences, sommations

### 1.1 Réurrences

#### 1.1.1 Principe général

Axiome

$$\boxed{\text{si}} \ A \text{ est une partie de } \mathbb{N} \text{ tq } \begin{cases} 0 \in A \\ \forall n \in A, n+1 \in A \end{cases} \quad \boxed{\text{alors}} \ A = \mathbb{N}$$

Énoncé

$$\begin{cases} \text{Soit } \mathcal{P}(n) \text{ une propriété dépendante de } n \in \mathbb{N}. \\ \mathcal{P}(0) \text{ vraie} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1) \end{cases} \quad \boxed{\text{alors}} \ \mathcal{P}(n) \text{ est vraie } \forall n \in \mathbb{N}$$

Applications à des expressions de sommes usuelles

— Somme d'entiers consécutifs :

$$\sum_{k=0}^n k = 0 + 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

— Somme des carrés :

$$\sum_{k=0}^n k^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Démonstration : soit  $\mathcal{P}(n)$  l'égalité ci-dessus.

- $\mathcal{P}(0)$  est vraie car  $\sum_{k=0}^0 k^2 = 0 = \frac{0(0+1)(2\cdot 0+1)}{6}$
- $\boxed{\text{si}}$  pour un certain  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{P}(n)$  est vraie  $\boxed{\text{alors}}$  montrons que  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie. En effet :

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=0}^n k^2 + (n+1)^2 \\
 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \text{ par hypothèse de récurrence} \\
 &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\
 &= \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6} \\
 &= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} \\
 &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \\
 &= \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

donc  $\mathcal{P}(n+1)$  est bien vraie.

- Sommes des cubes :

$$\sum_{k=0}^n k^3 = 0^3 + 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left( \frac{n(n+1)}{2} \right)^2 = \left( \sum_{k=0}^n k \right)^2$$

- Somme géométrique : soit  $a \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k=0}^n a^k = 1 + a^1 + a^2 + \dots + a^n = \begin{cases} \frac{1-a^{n+1}}{1-a} & \text{si } a \neq 1 \\ n+1 & \text{si } a = 1 \end{cases}$$

### 1.1.2 Utilisation la plus fréquente

### 1.1.3 Variantes

### 1.1.4 Originalités

## 1.2 Sommations

### 1.2.1 Somme simple

### 1.2.2 Sommes doubles



# Chapitre 2

## Coefficients binomiaux

### 2.1 Définitions

#### 2.1.1 Factorielle

#### 2.1.2 Coefficient binomial

Générale

Cas particulier

### 2.2 Formules du triangle de Pascal

#### 2.2.1 Énoncé

#### 2.2.2 Pratique

#### 2.2.3 Expression des coefficients binomiaux

### 2.3 Applications

#### 2.3.1 Symétrie des coefficients binomiaux

#### 2.3.2 Formule du binôme de Newton

#### 2.3.3 Linéarisation

#### 2.3.4 Inversement

#### 2.3.5 Nombre de parties d'un ensemble





## Chapitre 3

# PGCD, PPCM, nombres premiers

### 3.1 PPCM : Plus Petit Commun Multiple

#### 3.1.1 Définition

#### 3.1.2 Propriétés

#### 3.1.3 Cas particulier

### 3.2 PGCD : Plus Grand Commun Diviseur

#### 3.2.1 Définition

#### 3.2.2 Propriétés

#### 3.2.3 Cas particulier

#### 3.2.4 Pratique

Résultat préliminaire

Algorithme

Notations

Concrètement

Exemple :  $\text{pgcd}(56, 23)$

Remarque

### 3.3 Nombres premiers entre eux

#### 3.3.1 Définition

#### 3.3.2 Caractérisation : théorème de Bézout

#### 3.3.3 Propriétés

#### 3.4 Généralisation

# Chapitre 4

## Dénombrements