# Cours

C. LACOUTURE

Année scolaire 2024-2025, MPSI2, Lycée Carnot

# Table des matières

# Première partie

# Analyse

# Chapitre 1

# Suites réelles (ou complexes)

## 1.1 Majoration, minoration

### 1.1.1 Définitions

### 1.1.2 Caractérisation

## 1.2 Limite

### 1.2.1 Définition préliminaire : voisinage d'un point

#### Voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}$

#### Voisinage de $+\infty$

#### Voisinage de $-\infty$

### 1.2.2 Définitions

#### Générale

#### Ainsi :

#### Convergence, divergence

### 1.2.3 Théorèmes relatifs à la valeur absolue

### 1.2.4 Théorèmes relatifs à la relation d'ordre $\leqslant$

### 1.2.5 Théorèmes opératoires

#### Relatifs à l'addition

#### Relatifs à la multiplication

#### Relatifs au quotient

## 1.3 Suites usuelles

### 1.3.1 Suites arithmétiques

#### Définition, caractérisation

# Chapitre 2

# Fonctions numériques (ou à valeurs complexes) d'une variable réelle, limite, continuité

## 2.1 Limite

### 2.1.1 Définition générale

### 2.1.2 Traductions

### 2.1.3 Théorèmes

#### Théorème de passages aux limites finies dans une inégalité

#### Théorème des limites finies par encadrement

### 2.1.4 Théorèmes de la limite monotone

## 2.2 Continuité

### 2.2.1 En un point

#### Définition

#### Continuité à gauche, à droite seulement

#### Prolongement par continuité

#### Caractérisation séquentielle

### 2.2.2 Sur un intervalle

#### Définition

#### Théorèmes opératoires

#### Composée

#### Pratique

# Chapitre 3

# Relations de comparaison

## 3.1 Sur les suites

### 3.1.1 Définitions

#### Domination

#### Négligeabilité

#### Équivalence

#### Traduction pratique

### 3.1.2 Propriétés

#### Relation d'équivalence

#### Équivalence et limite

#### Équivalence et signe

#### Équivalence et opérations

#### Équivalence et somme

#### Équivalence et négligeabilité

#### Équivalence par encadrement

#### Mise en garde

### 3.1.3 Relations de négligeabilité usuelles

## 3.2 Sur les fonctions d'une variable réelle

### 3.2.1 Définitions

#### Domination

#### Négligeabilité

#### Équivalence

#### En pratique

### 3.2.2 Propriétés

# Chapitre 4

# Dérivabilité d'une fonction numérique (ou à valeurs complexes) définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$

## 4.1 Présentation

### 4.1.1 En un point

#### Définition

#### Dérivabilité à gauche, à droite

#### Lien avec la continuité

#### Interprétation graphique

### 4.1.2 Sur un intervalle

#### Définition

#### Précision

### 4.1.3 Théorèmes

#### Combinaison linéaire

#### Produit

#### Quotient

#### Composée

#### Réciproque

## 4.2 Dérivées d'ordres supérieurs

### 4.2.1 Définitions

#### Générale

#### Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

# Chapitre 5

# Fonctions trigonométriques

## 5.1 Rappel et compléments sur les fonctions sinus et cosinus

### 5.1.1 Valeurs usuelles

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}, \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}, \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}...$$

### 5.1.2 Formules élémentaires

$$\begin{aligned}
\cos(x+\pi) &= -\cos(x)\\
\sin(x-\pi) &= -\sin(x)\\
\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) &= -\sin(x)\\
\cos(x-\pi) &= \sin(x)\\
\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) &= \cos(x)
\end{aligned} \tag{5.1}$$

### 5.1.3 Parité, périodicité

cos est paire, sin est impaire, elles sont $2\pi$-périodiques.

### 5.1.4 Égalités

#### De cosinus

$$\cos(a) = \cos(b) \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \ (2\pi) \\ \boxed{\text{ou}} \\ a = -b \ (2\pi) \end{cases}$$

#### De sinus

$$\cos(a) = \cos(b) \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \ (2\pi) \\ \boxed{\text{ou}} \\ a = \pi - b \ (2\pi) \end{cases}$$

### 5.1.5 cosinus et sinus de sommes

#### Formules

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\ \cos(a-b) &= \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \\ \sin(a+b) &= \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a) \\ \sin(a-b) &= \sin(a)\cos(b) - \sin(a)\cos(b) \end{aligned}$$

#### Conséquences

$$\begin{aligned} \cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2 \\ &= 2\cos^2(x) - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2(x) \end{aligned}$$

$$\sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x)$$

$$\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$$

$$\sin(3x) = -4\sin^3(x) + 3\sin(x)$$

**Écriture**

$$1-\cos(x)=2\sin^2(\frac{x}{2})$$
$$1+\cos(x)=2\cos^2(\frac{x}{2})$$

### 5.1.6 Produit de cosinus, sinus

$$\cos(a)\cos(b)=\frac{1}{2}(\cos(a+b)+\cos(a-b))$$
$$\sin(a)\sin(b)=\frac{1}{2}(\cos(a-b)-\cos(a+b))$$
$$\sin(a)\cos(b)=\frac{1}{2}(\sin(a+b)+\sin(a-b))$$

### 5.1.7 Sommes de cosinus, sinus

$$\cos(p)+\cos(q)=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\cos(p)-\cos(q)=-2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\sin(p)+\sin(q)=2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\sin(p)+\sin(q)=2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

### 5.1.8 Compléments

**Limites usuelles**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}}=1$$

**Inégalité usuelles**

$\forall x\in\mathbb{R}, |\sin x|\leqslant |x|$

#### Transformation de $a\cos + b\sin$

## 5.2 Fonction tangente

### 5.2.1 Étude de la fonction

#### Définition et domaine de définition

$\tan x = \frac{sinx}{cosx}$. tan est définie sur $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2}(\pi)\right\}$

#### Remarques de parités, périodicité

- tan est impaire
- tan est $\pi$-périodique
- On étudie donc tan sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ car c'est identique à une étude sur tout son domaine de définition.

#### Continuité

tan est continue

#### Dérivabilité

tan est dérivable avec $\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

#### Variations

$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[ \ \tan' x > 0$

#### Branche infinie

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty, \ \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$

#### Graphe

#### Limite usuelle

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

### 5.2.2 Compléments

#### Valeurs usuelles

$\tan(0) = 0, \ \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1, \ \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}, \ \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$

### Égalité

$$\tan(a) = \tan(b) \Leftrightarrow a = b \ (\pi)$$

### Formules immédiates

### Tangente d'une somme

### Expressions de cosinus et sinus à l'aide de la tangente de l'angle moitié

### Interprétation graphique

# Chapitre 6

# Fonctions circulaires réciproques

## 6.1 Fonction arcsinus

### 6.1.1 Définition

### 6.1.2 Variations et graphe

### 6.1.3 Formules

### 6.1.4 Dérivation

## 6.2 Fonction arccosinus

### 6.2.1 Définition

### 6.2.2 Variations et graphe

### 6.2.3 Formules

### 6.2.4 Dérivation

### 6.2.5 Égalités supplémentaires

## 6.3 Fonction arctan

### 6.3.1 Définition

### 6.3.2 Variations et graphe

### 6.3.3 Formules

### 6.3.4 Dérivation

### 6.3.5 Égalité supplémentaire

29

# Chapitre 7

# Fonctions logarithmes, exponentielles, puissances réelles

## 7.1 Fonction logarithme

### 7.1.1 Définition

### 7.1.2 Formules

### 7.1.3 Étude de la fonction ln

#### Ensemble de définition

#### Continuité, dériivabilité

#### Variations

#### Branches infinies

#### Graphe

#### Compléments

## 7.2 Fonction exponentielle

### 7.2.1 Définition

### 7.2.2 Formule

### 7.2.3 Graphiquement

### 7.2.4 Dérivée

## 7.3 Fonctions puissances réelles

### 7.3.1 Définition

#### Prolongement

#### Définition de la puissance rationnelle

# Chapitre 8

# Fonctions hyperboliques

## 8.1 Présentation

### 8.1.1 Définitions

#### Fonction sinus hyperbolique : sh

#### Fonction cosinus hyperbolique : ch

#### Fonction tangente hyperbolique : th

### 8.1.2 Formules de base

## 8.2 Étude de la fonction sh

### 8.2.1 Domaine de définition

### 8.2.2 Remarque de parité

### 8.2.3 Continuité

### 8.2.4 Dérivabilité

### 8.2.5 Variations

### 8.2.6 Branches infinies

### 8.2.7 Graphe

### 8.2.8 Limite usuelle

## 8.3 Étude de la fonction ch

### 8.3.1 Domaine de définition

### 8.3.2 Remarque de parité

### 8.3.3 Continuité

### 8.3.4 Dérivabilité

# Chapitre 9

# Fonctions convexes

## 9.1 Présentation

### 9.1.1 Définition

#### Générale

#### Remarques

#### Généralisation avec l'inégalité de Jensen

## 9.2 Caractérisations géométriques

### 9.2.1 Croissances des pentes dont on fixe une extrémité

### 9.2.2 Convexité de la partie du plan située au dessus de la courbe

#### Définition géométrique de la convexité

#### Énoncé

#### Démonstration

## 9.3 Caractérisations analytiques à l'aide de dérivées

### 9.3.1 Rapport entre convexité et dérivation

#### Sens direct

#### Sens réciproque

#### Conséquence

## 9.4 Premières applications

### 9.4.1 Inégalité usuelle

### 9.4.2 Comparaison des moyennes arithmétiques et géométriques

# Chapitre 10

# Intégration d'une fonction numérique (ou à valeurs complexes) sur un segment

## 10.1 Fonctions uniformément continues

### 10.1.1 Définition

### 10.1.2 Caractérisation séquentielle de l'UC

### 10.1.3 Premières propriétés

#### Combinaison linéaire

#### Implications

### 10.1.4 Théorème de Heine

## 10.2 Définitions

### 10.2.1 Subdivision

#### Définition générale

#### Subdivision à pas constant

### 10.2.2 Fonctions en escalier

#### Définition

#### Exemple

### 10.2.3 Fonction continue par morceaux

#### Définition

#### Graphiquement

## 10.3 Premières propriétés

## 10.4 Intégration des fonctions en escalier

# Chapitre 11

# Développements limités

## 11.1 Formule de Taylor-Young

### 11.1.1 Énoncé

### 11.1.2 Démonstration

#### But

#### Résolution

### 11.1.3 Applications

## 11.2 Définitions

### 11.2.1 En 0

### 11.2.2 En $x_0$

### 11.2.3 En $\infty$

### 11.2.4 Dans la suite

## 11.3 Premières propriétés

### 11.3.1 DL et convergence, dérivabilité

#### Convergence

#### Dérivabilité

#### Contre-exemple

### 11.3.2 Ordre de DL

### 11.3.3 Unicité

### 11.3.4 Conséquence : remarque de parité

## 11.4 DL usuels

# Chapitre 12

# Primitives et équations différentielles

## 12.1 Primitives

### 12.1.1 Rappels

**Définition**

**Propriété**

**Existence**

**Primitives usuelles**

### 12.1.2 Formules d'Intégration par parties (IPP)

**Énoncé**

Soient $u$ et $v$ dérivables, à dérivées continues sur un intervalle $I$ :

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

**Autre primitive usuelle**

Avec une intégration par parties :

$$\int \ln x \ dx = x \ln x - x$$

### 12.1.3 Calcul de $\int e^{\alpha x} P(x) dx$

**1ère méthode**

Par IPPs successives, en dérivant $P(x)$ et primitivant $e^{\alpha x}$, jusqu'à abaisser à 0 le degré du polynôme.

**2ème méthode**

En posant une forme primitive à priori $e^{\alpha x}Q(x)$ où $Q$ polynôme tel que d°$Q$ = d°$P$.

### 12.1.4 Calcul de $\int e^{\alpha x} \cos(ax) dx$, $\int e^{\alpha x} \sin(ax) dx$

**1ère méthode**

À l'aide de deux IPPs.

**2ème méthode**

En utilisant les nombres complexes.

### 12.1.5 Calcul de $\int \frac{1}{(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n)} dx$

**Méthode**

On décompose la fraction en éléments simples.

### 12.1.6 Calcul de $\int \frac{1}{ax^2+bx+c} dx$

**Méthode**

**Exemple**

## 12.2 Présentation des équations différentielles

On appelle équation différentielle d'ordre $n$ sur un intervalle $I$ toute relation entre :

- une variable $x$ (ou $t$) décrivant $I$
- une fonction $f$ $n$ fois dérivable en $I$
- ses dérivées $f'$,$f''$,...,$f^{(n)}$

$$\mathcal{R}(x, f, f', ..., f^{(n)}) = 0$$

Intégrer l'équation différentielle, c'est :

— déterminer si elle a des solutions
— si oui, les trouver toutes.

## 12.3 Équations différentielles d'ordre 1

### 12.3.1 Définition

On appelle équation différentielle linéaire d'ordre 1 toute équation différentielle de la forme $y' + a(x)y = b(x)$ où $a, b$ sont deux fonctions continues sur un intervalle $I$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).

### 12.3.2 Résolution de l'équation différentielle homogène

### 12.3.3 Résolution de l'équation différentielle complète

#### À l'aide d'une solution particulière $y_0$

#### Avec la méthode de "variation de la constante"

#### Coïncidence des 2 méthodes

#### Problème d'existence-unicité

## 12.4 Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

### 12.4.1 Définition

### 12.4.2 Résolution de l'équation différentielle homogène

#### Résultat admis en 1ère année

#### Cas où $\Delta = b^2 - 4ac > 0$

#### Cas où $\Delta = b^2 - 4ac = 0$

#### Cas où $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

#### Remarques dans le cas complexe

### 12.4.3 Résolution de l'équation différentielle complète

#### Principe

#### Dans le cas où le second membre $d(x)$ est de la forme $e^{\gamma x}P(x)dx$

#### Dans le cas où le second membre $d(x)$ est une somme d'expressions de la forme

### 12.4.4 Existence-unicité

#### Plus précisément

#### Démonstration par Analyse-Synthèse

# Chapitre 13

# Séries numériques

## 13.1 Présentation générale

### 13.1.1 Définitions

#### Notations

#### Convergence

#### Divergence

#### Remarques

### 13.1.2 Premières propriétés

#### Linéarité

#### Condition nécessaire

#### Relation suite-série

### 13.1.3 Exemple usuel : série géométrique

## 13.2 Séries à termes positifs

### 13.2.1 Remarque générale

### 13.2.2 Théorème de comparaison par majoration

### 13.2.3 Théorème de comparaison par équivalence

### 13.2.4 Comparaison série-intégrale

#### Résultat

#### Exemple usuel des séries de Riemann

## 13.3 Séries à termes quelconque

### 13.3.1 Cas des séries alternées

### 13.3.2 Séries à termes réels quelconques

# Chapitre 14

# Familles sommables

## 14.1 Dans le cas d'une famille de réels $\geqslant 0$

### 14.1.1 Définition

### 14.1.2 Remarques

### 14.1.3 Propriétés

### 14.1.4 À savoir en pratique

## 14.2 Pour une famille de réels quelconques

### 14.2.1 Définition

### 14.2.2 Caractérisation

### 14.2.3 À savoir en pratique

### 14.2.4 Contre-exemple

## 14.3 Pour une famille de termes complexes

### 14.3.1 Définition

### 14.3.2 Caractérisation

### 14.3.3 À savoir

# Chapitre 15

# Fonctions de deux variables

## 15.1 Premières notations

### 15.1.1 Boule ouverte

### 15.1.2 Partie ouverte

#### Définition

#### Illustration

#### Exemple

#### Remarques

### 15.1.3 Continuité

#### Définition

#### Pratique

#### Premier exemple

## 15.2 Dérivabilité d'une fonction de deux variables

### 15.2.1 Définition générale

### 15.2.2 Dérivabilité selon les deux directions principales

### 15.2.3 Fonction de classe $C^1$ sur $U$

### 15.2.4 Développement limité à l'ordre 1 pour une fonction $C^1$ au voisinage d'un point

#### Énoncé

#### Notion complémentaire

#### Conséquence

#### Remarques