Cours

C. LACOUTURE

Année scolaire 2024-2025, MPSI2, Lycée Carnot

Table des matières

Première partie

Analyse

Chapitre 1

Suites réelles (ou complexes)

1.1 Majoration, minoration

1.1.1 Définitions

1.1.2 Caractérisation

1.2 Limite

1.2.1 Définition préliminaire : voisinage d'un point

Voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}$

Voisinage de $+\infty$

Voisinage de $-\infty$

1.2.2 Définitions

Générale

Ainsi :

Convergence, divergence

1.2.3 Théorèmes relatifs à la valeur absolue

1.2.4 Théorèmes relatifs à la relation d'ordre $\leqslant$

1.2.5 Théorèmes opératoires

Relatifs à l'addition

Relatifs à la multiplication

Relatifs au quotient

1.3 Suites usuelles

1.3.1 Suites arithmétiques

Définition, caractérisation

Chapitre 2

Fonctions numériques (ou à valeurs complexes) d'une variable réelle, limite, continuité

2.1 Limite

2.1.1 Définition générale

2.1.2 Traductions

2.1.3 Théorèmes

Théorème de passages aux limites finies dans une inégalité

Théorème des limites finies par encadrement

2.1.4 Théorèmes de la limite monotone

2.2 Continuité

2.2.1 En un point

Définition

Continuité à gauche, à droite seulement

Prolongement par continuité

Caractérisation séquentielle

2.2.2 Sur un intervalle

Définition

Théorèmes opératoires

Composée

Pratique

Chapitre 3

Relations de comparaison

3.1 Sur les suites

3.1.1 Définitions

Domination

Négligeabilité

Équivalence

Traduction pratique

3.1.2 Propriétés

Relation d'équivalence

Équivalence et limite

Équivalence et signe

Équivalence et opérations

Équivalence et somme

Équivalence et négligeabilité

Équivalence par encadrement

Mise en garde

3.1.3 Relations de négligeabilité usuelles

3.2 Sur les fonctions d'une variable réelle

3.2.1 Définitions

Domination

Négligeabilité

Équivalence

En pratique

3.2.2 Propriétés

Chapitre 4

Dérivabilité d'une fonction numérique (ou à valeurs complexes) définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$

4.1 Présentation

4.1.1 En un point

Définition

Dérivabilité à gauche, à droite

Lien avec la continuité

Interprétation graphique

4.1.2 Sur un intervalle

Définition

Précision

4.1.3 Théorèmes

Combinaison linéaire

Produit

Quotient

Composée

Réciproque

4.2 Dérivées d'ordres supérieurs

4.2.1 Définitions

Générale

Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Chapitre 5

Fonctions trigonométriques

5.1 Rappel et compléments sur les fonctions sinus et cosinus

5.1.1 Valeurs usuelles

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}...$$

5.1.2 Formules élémentaires

$$\begin{aligned}
\cos(x+\pi) &= -\cos(x) \\
\sin(x-\pi) &= -\sin(x) \\
\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) &= -\sin(x) \\
\cos(x-\pi) &= \sin(x) \\
\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) &= \cos(x)
\end{aligned} \tag{5.1}$$

5.1.3 Parité, périodicité

cos est paire, sin est impaire, elles sont 2π-périodiques.

5.1.4 Égalités

De cosinus

$$\cos(a) = \cos(b) \Leftrightarrow \begin{cases} a = b\ (2\pi) \\ \boxed{\text{ou}} \\ a = -b\ (2\pi) \end{cases}$$

De sinus

$$\cos(a) = \cos(b) \Leftrightarrow \begin{cases} a = b\ (2\pi) \\ \boxed{\text{ou}} \\ a = \pi - b\ (2\pi) \end{cases}$$

5.1.5 cosinus et sinus de sommes

Formules

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\ \cos(a-b) &= \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \\ \sin(a+b) &= \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a) \\ \sin(a-b) &= \sin(a)\cos(b) - \sin(a)\cos(b) \end{aligned}$$

Conséquences

$$\begin{aligned} \cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2 \\ &= 2\cos^2(x) - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2(x) \end{aligned}$$

$$\sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x)$$

$$\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$$

$$\sin(3x) = -4\sin^3(x) + 3\sin(x)$$

Écriture

$$1-\cos(x) = 2\sin^2(\frac{x}{2})$$
$$1+\cos(x) = 2\cos^2(\frac{x}{2})$$

5.1.6 Produit de cosinus, sinus

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b)+\cos(a-b))$$
$$\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b)-\cos(a+b))$$
$$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b)+\sin(a-b))$$

5.1.7 Sommes de cosinus, sinus

$$\cos(p)+\cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\cos(p)-\cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\sin(p)+\sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\sin(p)+\sin(q) = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

5.1.8 Compléments

Limites usuelles

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}} = 1$$

Inégalité usuelles

$\forall x \in \mathbb{R}, |\sin x| \leqslant |x|$

Transformation de $a\cos + b\sin$

5.2 Fonction tangente

5.2.1 Étude de la fonction

Définition et domaine de définition

$\tan x = \frac{sinx}{cosx}$. tan est définie sur $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2}(\pi)\right\}$

Remarques de parités, périodicité

- tan est impaire
- tan est π-périodique
- On étudie donc tan sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ car c'est identique à une étude sur tout son domaine de définition.

Continuité

tan est continue

Dérivabilité

tan est dérivable avec $\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

Variations

$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[\ \tan' x > 0$

Branche infinie

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty, \ \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$

Graphe

Limite usuelle

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

5.2.2 Compléments

Valeurs usuelles

$\tan(0) = 0, \ \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1, \ \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}, \ \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$

Égalité

$$\tan(a) = \tan(b) \Leftrightarrow a = b\ (\pi)$$

Formules immédiates

Tangente d'une somme

Expressions de cosinus et sinus à l'aide de la tangente de l'angle moitié

Interprétation graphique

Chapitre 6

Fonctions circulaires réciproques

6.1 Fonction arcsinus

6.1.1 Définition

6.1.2 Variations et graphe

6.1.3 Formules

6.1.4 Dérivation

6.2 Fonction arccosinus

6.2.1 Définition

6.2.2 Variations et graphe

6.2.3 Formules

6.2.4 Dérivation

6.2.5 Égalités supplémentaires

6.3 Fonction arctan

6.3.1 Définition

6.3.2 Variations et graphe

6.3.3 Formules

6.3.4 Dérivation

6.3.5 Égalité supplémentaire

Chapitre 7

Fonctions logarithmes, exponentielles, puissances réelles

7.1 Fonction logarithme

7.1.1 Définition

7.1.2 Formules

7.1.3 Étude de la fonction ln

Ensemble de définition

Continuité, dériivabilité

Variations

Branches infinies

Graphe

Compléments

7.2 Fonction exponentielle

7.2.1 Définition

7.2.2 Formule

7.2.3 Graphiquement

7.2.4 Dérivée

7.3 Fonctions puissances réelles

7.3.1 Définition

Prolongement

Définition de la puissance rationnelle

Chapitre 8

Fonctions hyperboliques

8.1 Présentation

8.1.1 Définitions

Fonction sinus hyperbolique : sh

Fonction cosinus hyperbolique : ch

Fonction tangente hyperbolique : th

8.1.2 Formules de base

8.2 Étude de la fonction sh

8.2.1 Domaine de définition

8.2.2 Remarque de parité

8.2.3 Continuité

8.2.4 Dérivabilité

8.2.5 Variations

8.2.6 Branches infinies

8.2.7 Graphe

8.2.8 Limite usuelle

8.3 Étude de la fonction ch

8.3.1 Domaine de définition

8.3.2 Remarque de parité

8.3.3 Continuité

8.3.4 Dérivabilité

Chapitre 9

Fonctions convexes

9.1 Présentation

9.1.1 Définition

Générale

Remarques

Généralisation avec l'inégalité de Jensen

9.2 Caractérisations géométriques

9.2.1 Croissances des pentes dont on fixe une extrémité

9.2.2 Convexité de la partie du plan située au dessus de la courbe

Définition géométrique de la convexité

Énoncé

Démonstration

9.3 Caractérisations analytiques à l'aide de dérivées

9.3.1 Rapport entre convexité et dérivation

Sens direct

Sens réciproque

Conséquence

9.4 Premières applications

9.4.1 Inégalité usuelle

9.4.2 Comparaison des moyennes arithmétiques et géométriques

Chapitre 10

Intégration d'une fonction numérique (ou à valeurs complexes) sur un segment

10.1 Fonctions uniformément continues

10.1.1 Définition

10.1.2 Caractérisation séquentielle de l'UC

10.1.3 Premières propriétés

Combinaison linéaire

Implications

10.1.4 Théorème de Heine

10.2 Définitions

10.2.1 Subdivision

Définition générale

Subdivision à pas constant

10.2.2 Fonctions en escalier

Définition

Exemple

10.2.3 Fonction continue par morceaux

Définition

Graphiquement

10.3 Premières propriétés

10.4 Intégration des fonctions en escalier

Chapitre 11

Développements limités

11.1 Formule de Taylor-Young

11.1.1 Énoncé

11.1.2 Démonstration

But

Résolution

11.1.3 Applications

11.2 Définitions

11.2.1 En 0

11.2.2 En x_0

11.2.3 En ∞

11.2.4 Dans la suite

11.3 Premières propriétés

11.3.1 DL et convergence, dérivabilité

Convergence

Dérivabilité

Contre-exemple

11.3.2 Ordre de DL

11.3.3 Unicité

11.3.4 Conséquence : remarque de parité

11.4 DL usuels

Chapitre 12

Primitives et équations différentielles

12.1 Primitives

12.1.1 Rappels

Définition

Propriété

Existence

Primitives usuelles

12.1.2 Formules d'Intégration par parties (IPP)

Énoncé

Soient u et v dérivables, à dérivées continues sur un intervalle I :

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

Autre primitive usuelle

Avec une intégration par parties :

$$\int \ln x \; dx = x \ln x - x$$

12.1.3 Calcul de $\int e^{\alpha x} P(x) dx$

1ère méthode

Par IPPs successives, en dérivant $P(x)$ et primitivant $e^{\alpha x}$, jusqu'à abaisser à 0 le degré du polynôme.

2ème méthode

En posant une forme primitive à priori $e^{\alpha x} Q(x)$ où Q polynôme tel que d°Q = d°P.

12.1.4 Calcul de $\int e^{\alpha x} \cos(ax) dx$, $\int e^{\alpha x} \sin(ax) dx$

1ère méthode

À l'aide de deux IPPs.

2ème méthode

En utilisant les nombres complexes.

12.1.5 Calcul de $\int \frac{1}{(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n)} dx$

Méthode

On décompose la fraction en éléments simples.

12.1.6 Calcul de $\int \frac{1}{ax^2+bx+c} dx$

Méthode

Exemple

12.2 Présentation des équations différentielles

On appelle équation différentielle d'ordre n sur un intervalle I toute relation entre :

— une variable x (ou t) décrivant I
— une fonction f n fois dérivable en I
— ses dérivées f',f'',...,$f^{(n)}$

$$\mathcal{R}(x, f, f', ..., f^{(n)}) = 0$$

Intégrer l'équation différentielle, c'est :

— déterminer si elle a des solutions
— si oui, les trouver toutes.

12.3 Équations différentielles d'ordre 1

12.3.1 Définition

On appelle équation différentielle linéaire d'ordre 1 toute équation différentielle de la forme $y' + a(x)y = b(x)$ où a, b sont deux fonctions continues sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).

12.3.2 Résolution de l'équation différentielle homogène

12.3.3 Résolution de l'équation différentielle complète

À l'aide d'une solution particulière y_0

Avec la méthode de "variation de la constante"

Coïncidence des 2 méthodes

Problème d'existence-unicité

12.4 Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

12.4.1 Définition

12.4.2 Résolution de l'équation différentielle homogène

Résultat admis en 1ère année

Cas où $\Delta = b^2 - 4ac > 0$

Cas où $\Delta = b^2 - 4ac = 0$

Cas où $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

Remarques dans le cas complexe

12.4.3 Résolution de l'équation différentielle complète

Principe

Dans le cas où le second membre $d(x)$ est de la forme $e^{\gamma x} P(x) dx$

Dans le cas où le second membre $d(x)$ est une somme d'expressions de la forme

12.4.4 Existence-unicité

Plus précisément

Démonstration par Analyse-Synthèse

Chapitre 13

Séries numériques

13.1 Présentation générale

13.1.1 Définitions

Notations

Convergence

Divergence

Remarques

13.1.2 Premières propriétés

Linéarité

Condition nécessaire

Relation suite-série

13.1.3 Exemple usuel : série géométrique

13.2 Séries à termes positifs

13.2.1 Remarque générale

13.2.2 Théorème de comparaison par majoration

13.2.3 Théorème de comparaison par équivalence

13.2.4 Comparaison série-intégrale

Résultat

Exemple usuel des séries de Riemann

13.3 Séries à termes quelconque

13.3.1 Cas des séries alternées

13.3.2 Séries à termes réels quelconques

Chapitre 14

Familles sommables

14.1 Dans le cas d'une famille de réels $\geqslant 0$

14.1.1 Définition

14.1.2 Remarques

14.1.3 Propriétés

14.1.4 À savoir en pratique

14.2 Pour une famille de réels quelconques

14.2.1 Définition

14.2.2 Caractérisation

14.2.3 À savoir en pratique

14.2.4 Contre-exemple

14.3 Pour une famille de termes complexes

14.3.1 Définition

14.3.2 Caractérisation

14.3.3 À savoir

Chapitre 15

Fonctions de deux variables

15.1 Premières notations

15.1.1 Boule ouverte

15.1.2 Partie ouverte

Définition

Illustration

Exemple

Remarques

15.1.3 Continuité

Définition

Pratique

Premier exemple

15.2 Dérivabilité d'une fonction de deux variables

15.2.1 Définition générale

15.2.2 Dérivabilité selon les deux directions principales

15.2.3 Fonction de classe C^1 sur U

15.2.4 Développement limité à l'ordre 1 pour une fonction C^1 au voisinage d'un point

Énoncé

Notion complémentaire

Conséquence

Remarques