Cours

C. LACOUTURE

Année scolaire 2024-2025, MPSI2, Lycée Carnot

Table des matières

Première partie

Algèbre

Chapitre 1

Structure de groupe

1.1 Présentation

1.1.1 Exemple préliminaire

L'ensemble $\mathbb{Z}$ pour l'addition $+$ est tel que :

1. $\forall x, y \in \mathbb{Z}$
2. $\forall x, y, z \in \mathbb{Z}, (x+y)+z = x+(y+z)$
3. $\forall x \in \mathbb{Z}, x+0 = 0+x = x$
4. $\forall x \in \mathbb{Z}, x+(-x) = (-x)+x = 0$
5. et de plus $\forall x, y \in \mathbb{Z}, x+y = y+x$

Ainsi $(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe abélien / groupe commutatif.

1.1.2 Définition générale

Soit un ensemble G muni d'une loi $*$. Dès lors, $(G, *)$ a une structure de groupe si et seulement si :

1. $*$ est une Loi de Composition Interne (LCI) sur G. C'est-à-dire $\forall x, y \in G, x * y \in G$.
2. $*$ est associative. C'est-à-dire $\forall x, y, z \in G, (x * y) * z = x * (y * z)$.
3. G a un élément neutre e pour $*$. $\exists e \in G$ tel que $\forall x \in G, x*e = e*x = x$.
4. Tout élément de G a un symétrique dans G. $\forall x \in G, \exists x' \in G$ tel que $x * x' = x' * x = e$.

Si, de plus, $*$ est commutative sur G, c'est-à-dire $\forall x, y \in G, x * y = y * x$, alors G est un groupe commutatif (ou abélien).

Remarques concernant la définition :

a) attention à la place des quantificateurs : pour l'élément neutre (3.) c'est $\exists$ puis $\forall$ et pour le symétrique c'est $\forall$ puis $\exists$.

b) attention aux 2 égalités dans la définition de l'élément neutre et des symétriques d'un élément car * ne commute pas forcément.

1.1.3 Exemples usuels

Ensembles de nombres

$(\mathbb{Z},+),(\mathbb{Q},+),(\mathbb{R},+),(\mathbb{C},+),(\mathbb{Q}^*,+),(\mathbb{R}_+^*,\times),(\mathbb{R}^*,\times),(\mathbb{C}^*,\times)$ Sont tous des groupes commutatifs.

Ensemble des bijections

Soit E un ensemble et $\mathscr{B}(E)$ l'ensemble des bijections de E vers E.

$$\boxed{(\mathscr{B}(E),\circ) \text{ est un groupe \underline{non} commutatif.}}$$

Le neutre pour $\circ$ est : Id_E et le symétrique de f pour $\circ$ est f^{-1}

Ensemble des parties

Soit E un ensemble et $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

$$\boxed{(\mathscr{P}(E),\Delta) \text{ est un groupe commutatif.}}$$

Le neutre pour Δ est : $\emptyset$ car $\forall A \subset E : A\Delta\emptyset = \emptyset\Delta A = A$ Et le symétrique de A pour Δ est A car $A\Delta A = \emptyset$

1.1.4 Compléments

Unicité

Sont uniques l'élément neutre et le symétrique de tout élément.

Formules concernant le symétrique

a) $\forall x, y \in G$ **:** $(x*y)' = y' * x'$ (avec ' pour symétrique) Attention à l'ordre car le groupe n'est pas forcément commutatif. **b)** $\forall x \in G (x')' = x$

Régularité de tout élément

$\forall x, y, z \in G : \boxed{x*z = y*z \implies x = y \text{ et } z*x = z*y \implies x = y}$

Ainsi on traduit que tout élément z est régulier dans le groupe (G, *) c'est à dire dans un groupe, on peut "simplifier par tout élément".

Plus généralement : résolution d'équation

$\forall x, y, z \in G : x * y = z$

$\Longrightarrow x' * (x * y) = x' * z$

$\Longrightarrow (x' * x) * y = x' * z$ car * est associative

$\Longrightarrow e * y = x' * z$ car x' est symétrique de x pour *

$\Longrightarrow y = x' * z$ car e neutre pour *

Dans un groupe : tout élément peut, dans une égalité, "passer dans l'autre membre" sous la forme de son symétrique ... en tenant compte de l'ordre car * ne commute pas forcément.

1.1.5 Notations

En pratique, un groupe est noté : (G, +), même si + n'est pas l'addition classique (notation additive) ou (G, ·), même si · n'est pas la multiplication classique (notation multiplicative) On définit alors :

En notation additive

$\forall x \in G, \forall n \in \mathbb{Z}$

1. si $n = 0$: $0x = 0_G$ neutre de G pour $+$.
2. si $n \in \mathbb{N}^*$: $nx = x + x + \cdots + x$ (n fois).
3. si $n \in \mathbb{Z}^*_-$: $nx = (-x) + \cdots + (-x)$ (-n fois) où $-x$ est le symétrique de x pour $+$.

En notation multiplicative

Les puissances d'un selon : $\forall x \in G, \forall n \in \mathbb{Z}$

1. si $n = 0$: $x^0 = 1_G$ neutre de G pour $\cdot$.
2. si $n \in \mathbb{N}^*$: $x^n = x \cdot x \cdot \cdots \cdot x$ (n fois).
3. si $n \in \mathbb{Z}^*_-$: $x^n = (x^{-1}) \cdot \cdots \cdot (x^{-1})$ (-n fois) où x^{-1} est le symétrique de x pour $\cdot$.

Propriétés des multiples d'un élément

$\forall x \in G, \forall m, n \in \mathbb{Z}$

1. $(m+n)x = mx + nx$ (additivité classique dans $\mathbb{Z}$ qui devient une loi de groupe sur G)
2. $-(nx) = (-n)x = n(-x)$ (-n est l'opposé classique dans $\mathbb{Z}$ et $(-x)$ symétrique de x dans G)
3. $m(nx) = (m \times n)x$ ($\times$ produit classique dans $\mathbb{Z}$ et loi de groupe sur G)

Propriétés des puissances d'un élément

$\forall x \in G, \forall m, n \in \mathbb{Z}$

1. $x^{m+n} = x^m \cdot x^n$
2. $(x^m)^{-1} = (x^{-1})^m = x^{-m}$
3. $x^{mn} = (x^m)^n = (x^n)^m$

1.1.6 Autres remarques

Concernant les propriétés des puissances ou des multiples précédents

Parmis toute les propriétés citées, on a pas cité $(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$ car c'est faux si $\cdot$ ne commute pas forcément. $(x \cdot y)^n = (x \cdot y) \cdot (x \cdot y) \cdot$ ...(n fois) $\cdot (x \cdot y)$ $\neq x^n \cdot y^n = x \cdot$ ...(n fois) $\cdot x \cdot y \cdot$ ...(n fois) $\cdot y$

Concernant les produits cartésien de groupes

Soit (G, +) et (G', $\cdot$) 2 groupes. G $\times$ G' est un groupe pour * tel que (x, x')*(y, y') = (x + y, x' $\cdot$ y').

Le neutre de G $\times$ G' pour * est : $(0_G, 1_{G'})$.

Le symétrique de (x, x') dans G $\times$ G' pour * est : $(-x, x'^{-1})$

1.2 Sous-groupes

1.2.1 Définition

Soit $(G, \cdot)$ un groupe et $H \subset G$, H est un sous-groupe de G pour $\cdot$ si et seulement si la restriction de $\cdot$ avec les éléments de H est muni d'une structure de groupe

1.2.2 Caractérisations

H sous-groupe de G pour $\cdot$:

$$\Leftrightarrow$$

- $1_G \in H$
- $\forall x, y \in H, \quad x \cdot y \in H$
- $\forall x \in H, \quad x^{-1} \in H$

$$\Leftrightarrow$$

- $1_G \in H$
- $\forall x, y \in H, \quad x \cdot y^{-1} \in H$

Remarque : Dans la majorité des cas dans la suite on montrera que $(H, \cdot)$ est un groupe en montrant que c'est un sous-groupe d'un groupe usuel.

1.2.3 Exemples usuels

Exemple général

Les puissances d'un élément.

Soit $(G, \cdot)$ un groupe et $a \in G, \quad H = \{a^z \mid z \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe de G pour $\cdot$.

Les multiples d'un élément.

Soit $(G, +)$ un groupe et $a \in G, \quad H = \{za \mid z \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe de G pour $+$.

Exemples particuliers

$(\mathbb{U}, \times)$est un groupe. Car sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$

$(\mathbb{U}n, \times)$est un groupe. Car sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$

Sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$

Les sous-groupes de $\mathbb{Z}$ pour $+$ sont les ensembles de la forme $n\mathbb{Z} = nz \mid z \in \mathbb{Z}$

1.2.4 Propriétés

Intersection

"Toute intersection de sous-groupes est un sous-groupe."

Soit $(G, \cdot)$ un groupe. $(H_i)_{i\in\Delta}$ une famille de sous-groupes de G pour $\cdot$.
Alors $H = \bigcap_{i\in\Delta} H_i$ est un sous-groupe de G pour $\cdot$.

Faux pour la réunion $\cup$

a) contre-exemple : dans (Z, +)

Soit $H_1 = 2\mathbb{Z} = \{2z \mid z \in \mathbb{Z}\}$ et $H_2 = 3\mathbb{Z} = \{3z \mid z \in \mathbb{Z}\}$.

Mais H = $2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$ n'est pas un sous-groupe de $\nvDash$ pour + car :

$2 \in 2\mathbb{Z} \subset 2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z} = H$ et $3 \in 3\mathbb{Z} \subset 2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z} = H$

Mais $2 + 3 = 5 \notin H$

b) "sous conditions"

Soit G_1, G_2 sous groupes de G pour $\cdot$.

$\boxed{G_1 \cup G_2 \text{ est un sous-groupe de G pour } \cdot \Leftrightarrow G_1 \subset G_2 \text{ ou } G_2 \subset G_1}$

1.3 Morphismes de groupes

1.3.1 Définition

Soit (G, +) et (G', $\cdot$) 2 groupes, soit f : G $\to$ G'.

$\boxed{\text{f est un } \underline{\textit{morphisme}} \text{ de groupes si et seulement si } \forall x, y \in G : f(x+y) = f(x) \cdot f(y)}$

De plus :

a) si G = G' et + = $\cdot$: f est un endomorphisme

b) si f est bijective : f est un isomorphisme

b) si G = G' et + = $\cdot$ et f bijective : f est un automorphisme

1.3.2 Exemples usuels

exp est un isomorphisme de ($\mathbb{R}$, +) vers ($\mathbb{R}_+^*$, +)

ln est un isomorphisme de ($\mathbb{R}_+^*$, +) vers ($\mathbb{R}$, +)

exp est un morphisme de ($\mathbb{C}$, +) vers ($\mathbb{C}^*$, $\times$) car exp n'est pas injective sur $\mathbb{C}$

1.3.3 Propriétés

Soit $f : (G, +) \to (G', \cdot)$ un morphisme

Images du neutre et du symétrique de tout élément

a) $\boxed{f(0_G) = 1_{G'}}$

b) $\boxed{\forall x \in G : f(-x) = (f(x))^{-1}}$ Ainsi on retrouve : $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$

Caractérisation de l'injectivité

a) notations

le noyau de f est : $\boxed{Ker(f) = x \in G \mid f(x) = 1_{G'}}$

l'image de f est : $\boxed{Im(f) = f(x) \mid x \in G}$

b) caractérisation

$\boxed{\text{f est injectivite} \Leftrightarrow Ker(f) = \{0_G\}}$

Image (réciproque) d'un sous-groupe

a) image :

$\boxed{\text{Soit H un sous-groupe de G pour + alors f(H) est un sous-groupe de G' pour } \cdot}$

b) image réciproque :

$\boxed{\text{Soit H un sous-groupe de G' pour } \cdot \text{ alors f(H) est un sous-groupe de G' pour +}}$

c) conséquences :

$\boxed{Im(f) = f(G) \text{ est un sous-groupe de G' pour } \cdot}$

$\boxed{Ker(f) = f_{rec}(\{1_{G'}\}) \text{ est un sous groupe de G pour +}}$

Chapitre 2

Structure d'anneau et de corps

2.1 Structure d'anneau

2.1.1 Présentation

Exemple préliminaire

$\mathbb{Z}$, muni de $+$ et $\times$, est un anneau car il respecte la définition qui va suivre. Il est noté $(\mathbb{Z}, +, \times)$.

Définition générale

Soit A un ensemble muni de deux lois : $+$ et $\times$

> $(A, +, \times)$ est un anneau si et seulement si :
>
> a) $(A, +)$ est un groupe abélien (commutatif),
>
> b) A un groupe pour $\times$ (pas obligatoirement abélien)
>
> c) $\times$ est distributive par rapport à $+$ à gauche et à droite : $\forall a, b, c \in A,\ a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ et $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

Notations

Intégrité

Exemples usuels

2.1.2 Propriétés

Élément absorbant

Ensemble des inversibles

"Opposé" d'un produit

Loi "soustraction"

Formule du binôme de Newton

Formule de factorisation

2.1.3 Sous-anneau

Caractérisation

Exemple usuel : sous-anneau des décimaux

2.2 Structure de corps

2.2.1 Définition

2.2.2 Exemples usuels

2.2.3 Propriétés

Intégrité

Commutativité

2.2.4 Sous-corps

Chapitre 3

Corps des nombres réels

3.1 Généralités

3.2 Borne supérieure ou inférieure d'une partie de $\mathbb{R}$

3.2.1 Définition

3.2.2 Existence-unicité

Existence

Unicité

3.2.3 Mise en garde

3.2.4 Caractérisation

3.3 Valeurs approchées d'un réel à α près (où $\alpha \in \mathbb{Q}^{*+}$)

3.3.1 Résultat et définition

3.3.2 Cas où $\alpha = 1$

3.3.3 Cas où $\alpha = \frac{1}{10^n}(n \in \mathbb{N})$

Énoncé

Convergence

3.4 Densité

3.4.1 Définitions

Intervalle

Densité

3.4.2 Caractérisation

Générale

Plus précisément

Remarques

Chapitre 4

Corps des nombres complexes

4.1 Conjugaison

4.1.1 Définition

4.1.2 Propriétés

Formules

$\forall z \in \mathbb{C},\ z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}(z),\ z - \bar{z} = 2i\mathrm{Im}(z)$

Caractérisation

$$\begin{aligned} z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z} \\ z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z = -\bar{z} \end{aligned} \tag{4.1}$$

Pratique

Quand un nombre complexe est écrit au dénominateur, on le multiplie par son conjugué.

4.2 Module

4.2.1 Définition

$\forall z \in \mathbb{C}$, le module de z est $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$

Pratique

Pour $z = a + ib$, on a $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Lien avec la valeur absolue

Le module dans $\mathbb{C}$ prolonge la valeur absolue dans $\mathbb{R}$.

4.2.2 Propriétés

Diverses

$$\forall z \in \mathbb{C}, |z| \geqslant 0 \text{ et } |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$$
$$|z| = |\bar{z}|$$
$$\forall z, z' \in \mathbb{C}, |zz'| = |z|\,|z'|$$

(Double) inégalité triangulaire

$$\forall z, z' \in \mathbb{C},\ ||z| - |z'|| \leqslant |z + z'| \leqslant |z| + |z'|$$

4.2.3 Nombres complexes de module 1

Description

$U = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$. Les complexes de module 1 s'écrivent $z = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$, ce qu'on note : $e^{i\theta}$ où $\theta \in \mathbb{R} \cdot \backslash 2\pi\mathbb{Z}$

Remarque sur l'écriture $e^{i\theta}$

$\forall \theta,\ e^{-i\theta} = \bar{e^{i\theta}} = \frac{1}{e^{i\theta}}$

Produit

$\forall \theta, \theta',\ e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$

Formule de Moivre

$\forall n \in \mathbb{Z}, \theta \in \mathbb{R},\ (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

Formules à savoir

$$\forall \theta \in \mathbb{R}\ ,\ \begin{cases} \cos(\theta) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} \end{cases}$$

$$\forall \theta \in \mathbb{R}\ ,\ \begin{cases} 1 + e^{i\theta} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}} \\ 1 - e^{i\theta} = -2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}} \end{cases}$$

4.3 Forme trigonométrique

4.3.1 Définition

Résultat préliminaire

$\forall z \in \mathbb{C}^*, \exists! \rho > 0, \exists! u \in U$ tel que $z = \rho u$

Conséquence

$\forall z \in \mathbb{C}^*, \exists! \rho > 0, \exists! \theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ tel que $z = \rho e^{i\theta}$

4.3.2 Premiers exemples

Divers

$$\begin{aligned}
1+i &= \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \\
1-i &= \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \\
-1+i &= \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} \\
-1-i &= \sqrt{2}e^{-i\frac{5\pi}{4}}
\end{aligned}$$

Caractérisations

$$\begin{cases} z \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg z = 0(\pi) \\ z \in i\mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg z = \frac{\pi}{2}(\pi) \end{cases}$$

4.3.3 Relations entre forme algébrique et trigonométrique

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. $z = x + iy = \rho e^{i\theta}$.

Quelles relations a-t-on entre x, y, ρ, θ ?

Sens direct

$x = \rho\cos(\theta)$
$y = \rho\sin(\theta)$

Sens réciproque

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\theta = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x = 0 y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x = 0, y < 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ \pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

4.3.4 Formules diverses

Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$.

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$$

4.3.5 Interprétation géométrique

4.4 Équation $z^n = a$ (où $n \in \mathbb{N}^*, a \in \mathbb{C}^*$)

4.4.1 Résolution

$z = |a|^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\arg(a)}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}$ où $k \in [\![0, n-1]\!]$

4.4.2 1$^{\text{er}}$ cas particulier : racines n$^{\text{èmes}}$ de l'unité

Définition

Pour $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble des racines n$^{\text{èmes}}$ de l'unité est :

$$U_n = \{z \in \mathbb{C},\ z^n = 1\}$$

Description

$$U_n = \left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}},\ k \in [\![0, n-1]\!]\right\}$$

Propriétés

- Somme : la somme des n racines n$^{\text{èmes}}$ de l'unité vaut 0. Ainsi, penser aux racines n$^{\text{èmes}}$ de l'unité quand on a l'expression $1+x+x^2+...+x^{n-1}$.
- Conjugaison : les racines n$^{\text{èmes}}$ de l'unité sont conjuguées deux à deux.

Interprétation géométrique

Cas $n = 3$

Les 3 racines cubiques de 1 dans $\mathbb{C}$ sont 1, $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $j^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$
Penser donc à j quand on a l'expression $1 + x + x^2$.

4.4.3 Cas particulier des racines carrées d'un complexe

Énoncé

Obtention pratique

Équation de d°2 dans $\mathbb{C}$

4.5 Traduction complexe de transformations géométriques

4.5.1 Symétries

Par rapport à $O\vec{i}$

Centrale par rapport à O

Par rapport à $O\vec{j}$

4.5.2 Translations

4.5.3 Homothéties

Définition

Traduction complexe

4.5.4 Rotations

Définition

Traduction complexe

4.5.5 Similitudes directes

Définition

Traduction complexe

4.6 Exponentielle complexe

4.6.1 Définition

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$. L'exponentielle de z est :

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$$

4.6.2 Propriétés

Module - argument

L'écriture $e^x e^{iy}$ est une forme trigonométrique.

Formule fondamentale

$\forall z, z' \in \mathbb{C},\ e^{z+z'} = e^z e^{z'}$

Résolution de l'équation $e^z = a$

$e^z = a$ a une infinité de solutions :

$$z = \ln(|a|) + i(\arg(a) + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$$

Égalité

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}, e^z = e^{z'} \Leftrightarrow z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}$$

Chapitre 5

Anneau $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à une indéterminée à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$

5.1 Présentation

5.1.1 Définitions

5.1.2 Opérations sur les polynômes

Somme

Multiplication par un élément de $\mathbb{K}$

Multiplication

5.1.3 Propriétés

Pour la multiplication

Pour la somme

5.1.4 Structures

Neutres

Intégrité

Inversibles

5.1.5 Composée

Définition

Degré

5.2 Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$

5.2.1 Énoncé

Unicité

Existence

5.2.2 Exemples

5.2.3 Divisibilité

Chapitre 6

Fractions rationnelles

6.1 Présentation

6.1.1 Définition

6.1.2 Opérations

Somme

Produit

Structure

6.1.3 Forme irréductible

6.2 Décomposition en éléments simples de $F = \frac{A}{B}$ (irréductible)

6.2.1 Première étape : partie entière

Énoncé

Démonstration par Analyse-Synthèse

6.2.2 Deuxième étape : décomposition de $\frac{R}{B}$

Énoncé

Démonstration

6.2.3 Troisième étape : généralisation

6.2.4 Conséquence

6.2.5 Quatrième étape : décomposition de $\frac{R}{P^\alpha}$

Résultat général

Démonstration

6.2.6 Conclusion

6.3 Décomposition dans $\mathbb{C}(X)$

6.3.1 Forme a priori

6.3.2 Détermination pratique des λ, μ

Chapitre 7

Groupe symétrique

7.1 Présentation

7.1.1 Définitions

Permutation

Groupe symétrique

Cardinal

7.1.2 Exemples

Généraux

Particulier

7.2 Éléments générateurs

7.2.1 Transpositions

Énoncé

Exemples

7.2.2 Cycles à supports disjoints

Résultat admis

Exemple

Pratique

7.3 Signature d'une permutation

7.3.1 Inversions

7.3.2 Définitions

7.3.3 Cas d'une transposition

7.3.4 Cas d'un cycle

7.3.5 Morphisme signature