

# Cours

C. LACOUTURE

Année scolaire 2024-2025, MPSI2, Lycée Carnot



# Table des matières

<b>I</b>	<b>Analyse</b>	<b>11</b>
<b>1</b>	<b>Suites réelles (ou complexes)</b>	<b>13</b>
1.1	Majoration, minoration . . . . .	14
1.1.1	Définitions . . . . .	14
1.1.2	Caractérisation . . . . .	14
1.2	Limite . . . . .	14
1.2.1	Définition préliminaire : voisinage d'un point . . . . .	14
1.2.2	Définitions . . . . .	14
1.2.3	Théorèmes relatifs à la valeur absolue . . . . .	14
1.2.4	Théorèmes relatifs à la relation d'ordre $\leq$ . . . . .	14
1.2.5	Théorèmes opératoires . . . . .	14
1.3	Suites usuelles . . . . .	14
1.3.1	Suites arithmétiques . . . . .	14
1.3.2	Suites géométriques . . . . .	14
1.3.3	Suites arithmético-géométriques . . . . .	14
1.4	Monotonie . . . . .	14
1.4.1	Définitions . . . . .	14
1.4.2	Théorème fondamental . . . . .	14
1.4.3	À savoir . . . . .	14
1.5	Deux notions complémentaires . . . . .	14
1.5.1	Suites adjacentes . . . . .	14
1.5.2	Suites extraites . . . . .	14
1.5.3	Applications . . . . .	14
1.6	Théorème de la moyenne de Cesaro . . . . .	14
1.6.1	Énoncé . . . . .	14
1.6.2	Démonstration . . . . .	14
1.7	Suites récurrentes . . . . .	14
1.7.1	Définition . . . . .	14
1.7.2	Remarque . . . . .	14
1.7.3	Méthode générale . . . . .	14

<b>2</b>	<b>Fonctions numériques (ou à valeurs complexes) d'une variable réelle, limite, continuité</b>	<b>15</b>
2.1	Limite . . . . .	16
2.1.1	Définition générale . . . . .	16
2.1.2	Traductions . . . . .	16
2.1.3	Théorèmes . . . . .	16
2.1.4	Théorèmes de la limite monotone . . . . .	16
2.2	Continuité . . . . .	16
2.2.1	En un point . . . . .	16
2.2.2	Sur un intervalle . . . . .	16
2.3	Continuité et intervalle . . . . .	16
2.3.1	Résultat général . . . . .	16
2.3.2	Pour un segment . . . . .	16
2.3.3	Pour une fonction strictement monotone . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Relations de comparaison</b>	<b>17</b>
3.1	Sur les suites . . . . .	18
3.1.1	Définitions . . . . .	18
3.1.2	Propriétés . . . . .	18
3.1.3	Relations de négligeabilité usuelles . . . . .	18
3.2	Sur les fonctions d'une variable réelle . . . . .	18
3.2.1	Définitions . . . . .	18
3.2.2	Propriétés . . . . .	18
3.2.3	Exemples usuels de négligeabilité . . . . .	18
3.2.4	Exemples usuels d'équivalence . . . . .	18
<b>4</b>	<b>Dérivabilité d'une fonction numérique (ou à valeurs complexes) définie sur un intervalle de <math>\mathbb{R}</math></b>	<b>19</b>
4.1	Présentation . . . . .	20
4.1.1	En un point . . . . .	20
4.1.2	Sur un intervalle . . . . .	20
4.1.3	Théorèmes . . . . .	20
4.2	Dérivées d'ordres supérieurs . . . . .	20
4.2.1	Définitions . . . . .	20
4.2.2	Théorèmes . . . . .	20
4.3	Théorèmes de Rolle et application . . . . .	20
4.3.1	Présentation . . . . .	20
4.3.2	Autres applications : le théorème des accroissements finis (TAF) . . . . .	20
4.3.3	"Applications d'applications" . . . . .	20
4.4	Monotonie et extrema . . . . .	20

4.4.1	Monotonie . . . . .	20
4.4.2	Extrema . . . . .	20
<b>5</b>	<b>Fonctions trigonométriques</b>	<b>21</b>
5.1	Rappel et compléments sur les fonctions sinus et cosinus . . .	22
5.1.1	Valeurs usuelles . . . . .	22
5.1.2	Formules élémentaires . . . . .	22
5.1.3	Parité, périodicité . . . . .	22
5.1.4	Égalités . . . . .	22
5.1.5	cosinus et sinus de sommes . . . . .	22
5.1.6	Produit de cosinus, sinus . . . . .	22
5.1.7	Sommes de cosinus, sinus . . . . .	22
5.1.8	Compléments . . . . .	22
5.2	Fonction tangente . . . . .	22
5.2.1	Étude de la fonction . . . . .	22
5.2.2	Compléments . . . . .	22
<b>6</b>	<b>Fonctions circulaires réciproques</b>	<b>23</b>
6.1	Fonction arcsinus . . . . .	24
6.1.1	Définition . . . . .	24
6.1.2	Variations et graphe . . . . .	24
6.1.3	Formules . . . . .	24
6.1.4	Dérivation . . . . .	24
6.2	Fonction arccosinus . . . . .	24
6.2.1	Définition . . . . .	24
6.2.2	Variations et graphe . . . . .	24
6.2.3	Formules . . . . .	24
6.2.4	Dérivation . . . . .	24
6.2.5	Égalités supplémentaires . . . . .	24
6.3	Fonction arctan . . . . .	24
6.3.1	Définition . . . . .	24
6.3.2	Variations et graphe . . . . .	24
6.3.3	Formules . . . . .	24
6.3.4	Dérivation . . . . .	24
6.3.5	Égalité supplémentaire . . . . .	24
<b>7</b>	<b>Fonctions logarithmes, exponentielles, puissances réelles</b>	<b>25</b>
7.1	Fonction logarithme . . . . .	26
7.1.1	Définition . . . . .	26
7.1.2	Formules . . . . .	26
7.1.3	Étude de la fonction $\ln$ . . . . .	26

7.2	Fonction exponentielle . . . . .	26
7.2.1	Définition . . . . .	26
7.2.2	Formule . . . . .	26
7.2.3	Graphiquement . . . . .	26
7.2.4	Dérivée . . . . .	26
7.3	Fonctions puissances réelles . . . . .	26
7.3.1	Définition . . . . .	26
7.3.2	Formules . . . . .	26
7.3.3	Étude de $x \mapsto x^\alpha = f_\alpha$ . . . . .	26
7.4	Relations de comparaisons (ou croissances comparées) . . . . .	26
7.5	Résultats généraux . . . . .	26
7.6	Autres situations . . . . .	26
<b>8</b>	<b>Fonctions hyperboliques</b>	<b>27</b>
8.1	Présentation . . . . .	28
8.1.1	Définitions . . . . .	28
8.1.2	Formules de base . . . . .	28
8.2	Étude de la fonction sh . . . . .	28
8.2.1	Domaine de définition . . . . .	28
8.2.2	Remarque de parité . . . . .	28
8.2.3	Continuité . . . . .	28
8.2.4	Dérivabilité . . . . .	28
8.2.5	Variations . . . . .	28
8.2.6	Branches infinies . . . . .	28
8.2.7	Graphe . . . . .	28
8.2.8	Limite usuelle . . . . .	28
8.3	Étude de la fonction ch . . . . .	28
8.3.1	Domaine de définition . . . . .	28
8.3.2	Remarque de parité . . . . .	28
8.3.3	Continuité . . . . .	28
8.3.4	Dérivabilité . . . . .	28
8.3.5	Variations . . . . .	28
8.3.6	Branches infinies . . . . .	28
8.3.7	Graphe . . . . .	28
8.3.8	Limite usuelle . . . . .	28
8.4	Étude de la fonction th . . . . .	28
8.4.1	Domaine de définition . . . . .	28
8.4.2	Remarque de parité . . . . .	28
8.4.3	Continuité . . . . .	28
8.4.4	Dérivabilité . . . . .	28
8.4.5	Variations . . . . .	28

8.4.6	Branches infinies . . . . .	28
8.4.7	Graphe . . . . .	28
8.4.8	Limite usuelle . . . . .	28
8.5	Petit formulaire hyperbolique . . . . .	28
<b>9</b>	<b>Fonctions convexes</b>	<b>29</b>
9.1	Présentation . . . . .	30
9.1.1	Définition . . . . .	30
9.2	Caractérisations géométriques . . . . .	30
9.2.1	Croissances des pentes dont on fixe une extrémité . . .	30
9.2.2	Convexité de la partie du plan située au dessus de la courbe . . . . .	30
9.3	Caractérisations analytiques à l'aide de dérivées . . . . .	30
9.3.1	Rapport entre convexité et dérivation . . . . .	30
9.4	Premières applications . . . . .	30
9.4.1	Inégalité usuelle . . . . .	30
9.4.2	Comparaison des moyennes arithmétiques et géométriques	30
<b>10</b>	<b>Intégration d'une fonction numérique (ou à valeurs com- plexes) sur un segment</b>	<b>31</b>
10.1	Fonctions uniformément continues . . . . .	32
10.1.1	Définition . . . . .	32
10.1.2	Caractérisation séquentielle de l'UC . . . . .	32
10.1.3	Premières propriétés . . . . .	32
10.1.4	Théorème de Heine . . . . .	32
10.2	Définitions . . . . .	32
10.2.1	Subdivision . . . . .	32
10.2.2	Fonctions en escalier . . . . .	32
10.2.3	Fonction continue par morceaux . . . . .	32
10.3	Premières propriétés . . . . .	32
10.4	Intégration des fonctions en escalier . . . . .	32
10.4.1	Définition . . . . .	32
10.4.2	Propriétés . . . . .	32
10.5	Définition générale de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux . . . . .	32
10.5.1	Approximation d'une fonction continue par morceaux par des fonctions en escaliers . . . . .	32
10.5.2	Définition de l'intégrale de $f \in \mathcal{C}_m([a, b])$ . . . . .	32
10.5.3	Propriétés . . . . .	32
10.6	Intégration sur un intervalle quelconque . . . . .	32
10.6.1	Définition . . . . .	32

10.6.2	Propriétés . . . . .	32
10.7	Compléments pour des fonctions continues . . . . .	32
10.7.1	Théorème fondamental . . . . .	32
10.7.2	Formule de la moyenne . . . . .	32
10.7.3	Théorème de positivité amélioré . . . . .	32
10.7.4	Sommes de Riemann . . . . .	32
10.7.5	IPP, changement de variables . . . . .	32
10.7.6	Autres formules de Taylor . . . . .	32
<b>11</b>	<b>Développements limités</b>	<b>33</b>
11.1	Formule de Taylor-Young . . . . .	34
11.1.1	Énoncé . . . . .	34
11.1.2	Démonstration . . . . .	34
11.1.3	Applications . . . . .	34
11.2	Définitions . . . . .	34
11.2.1	En 0 . . . . .	34
11.2.2	En $x_0$ . . . . .	34
11.2.3	En $\infty$ . . . . .	34
11.2.4	Dans la suite . . . . .	34
11.3	Premières propriétés . . . . .	34
11.3.1	DL et convergence, dérivabilité . . . . .	34
11.3.2	Ordre de DL . . . . .	34
11.3.3	Unicité . . . . .	34
11.3.4	Conséquence : remarque de parité . . . . .	34
11.4	DL usuels . . . . .	34
11.4.1	Obtention . . . . .	34
11.4.2	Énumération . . . . .	34
11.4.3	Remarques . . . . .	34
11.5	Opérations sur les DL . . . . .	34
11.5.1	Combinaison linéaire . . . . .	34
11.5.2	Produit . . . . .	34
11.5.3	Intégration . . . . .	34
11.5.4	Composée de DL . . . . .	34
11.5.5	Quotient . . . . .	34
<b>12</b>	<b>Primitives et équations différentielles</b>	<b>35</b>
12.1	Primitives . . . . .	36
12.1.1	Rappels . . . . .	36
12.1.2	Formules d'Intégration par parties (IPP) . . . . .	36
12.1.3	Calcul de $\int e^{\alpha x} P(x) dx$ . . . . .	36
12.1.4	Calcul de $\int e^{\alpha x} \cos(ax) dx, \int e^{\alpha x} \sin(ax) dx$ . . . . .	36



12.1.5	Calcul de $\int \frac{1}{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)} dx$ . . . . .	36
12.1.6	Calcul de $\int \frac{1}{ax^2+bx+c} dx$ . . . . .	36
12.2	Présentation des équations différentielles . . . . .	36
12.3	Équations différentielles d'ordre 1 . . . . .	36
12.3.1	Définition . . . . .	36
12.3.2	Résolution de l'équation différentielle homogène . . . . .	36
12.3.3	Résolution de l'équation différentielle complète . . . . .	36
12.4	Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants . . . . .	36
12.4.1	Définition . . . . .	36
12.4.2	Résolution de l'équation différentielle homogène . . . . .	36
12.4.3	Résolution de l'équation différentielle complète . . . . .	36
12.4.4	Existence-unicité . . . . .	36
<b>13</b>	<b>Séries numériques</b>	<b>37</b>
<b>14</b>	<b>Familles sommables</b>	<b>39</b>
<b>15</b>	<b>Fonctions de deux variables</b>	<b>41</b>



# Première partie

## Analyse





# Chapitre 1

## Suites réelles (ou complexes)

### 1.1 Majoration, minoration

#### 1.1.1 Définitions

#### 1.1.2 Caractérisation

### 1.2 Limite

#### 1.2.1 Définition préliminaire : voisinage d'un point

Voisinage d'un point  $a \in \mathbb{R}$

Voisinage de  $+\infty$

Voisinage de  $-\infty$

#### 1.2.2 Définitions

Générale

Ainsi :

Convergence, divergence

#### 1.2.3 Théorèmes relatifs à la valeur absolue

#### 1.2.4 Théorèmes relatifs à la relation d'ordre $\leq$

#### 1.2.5 Théorèmes opératoires

Relatifs à l'addition

Relatifs à la multiplication

Relatifs au quotient

### 1.3 Suites usuelles

#### 1.3.1 Suites arithmétiques

Définition, caractérisation



## Chapitre 2

# Fonctions numériques (ou à valeurs complexes) d'une variable réelle, limite, continuité

### 2.1 Limite

#### 2.1.1 Définition générale

#### 2.1.2 Traductions

#### 2.1.3 Théorèmes

Théorème de passages aux limites finies dans une inégalité

Théorème des limites finies par encadrement

#### 2.1.4 Théorèmes de la limite monotone

### 2.2 Continuité

#### 2.2.1 En un point

Définition

Continuité à gauche, à droite seulement

Prolongement par continuité

Caractérisation séquentielle

#### 2.2.2 Sur un intervalle

Définition

Théorèmes opératoires

Composée

Pratique





# Chapitre 3

## Relations de comparaison

### 3.1 Sur les suites

#### 3.1.1 Définitions

Domination

Négligeabilité

Équivalence

Traduction pratique

#### 3.1.2 Propriétés

Relation d'équivalence

Équivalence et limite

Équivalence et signe

Équivalence et opérations

Équivalence et somme

Équivalence et négligeabilité

Équivalence par encadrement

Mise en garde

#### 3.1.3 Relations de négligeabilité usuelles

### 3.2 Sur les fonctions d'une variable réelle

#### 3.2.1 Définitions

Domination

Négligeabilité

Équivalence

En pratique



## Chapitre 4

# Dérivabilité d'une fonction numérique (ou à valeurs complexes) définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$

### 4.1 Présentation

#### 4.1.1 En un point

Définition

Dérivabilité à gauche, à droite

Lien avec la continuité

Interprétation graphique

#### 4.1.2 Sur un intervalle

Définition

Précision

#### 4.1.3 Théorèmes

Combinaison linéaire

Produit

Quotient

Composée

Réciproque

### 4.2 Dérivées d'ordres supérieurs

#### 4.2.1 Définitions

Générale

Fonctionnelle  $a^k$



# Chapitre 5

## Fonctions trigonométriques

### 5.1 Rappel et compléments sur les fonctions sinus et cosinus

#### 5.1.1 Valeurs usuelles

#### 5.1.2 Formules élémentaires

#### 5.1.3 Parité, périodicité

#### 5.1.4 Égalités

De cosinus

De sinus

#### 5.1.5 cosinus et sinus de sommes

Formules

Conséquences

Écriture

#### 5.1.6 Produit de cosinus, sinus

#### 5.1.7 Sommes de cosinus, sinus

#### 5.1.8 Compléments

Limites usuelles

Inégalités usuelles

Transformation de  $a \cos + b \sin$

### 5.2 Fonction tangente

#### 5.2.1 Étude de la fonction

Définition et domaine de définition

Remarques de parités, périodicité

# Chapitre 6

## Fonctions circulaires réciproques

subsection

## 6.1 Fonction arcsinus

### 6.1.1 Définition

### 6.1.2 Variations et graphe

### 6.1.3 Formules

### 6.1.4 Dérivation

## 6.2 Fonction arccosinus

### 6.2.1 Définition

### 6.2.2 Variations et graphe

### 6.2.3 Formules

### 6.2.4 Dérivation

### 6.2.5 Égalités supplémentaires

## 6.3 Fonction arctan

### 6.3.1 Définition

### 6.3.2 Variations et graphe

### 6.3.3 Formules

### 6.3.4 Dérivation

### 6.3.5 Égalité supplémentaire





## Chapitre 7

# Fonctions logarithmes, exponentielles, puissances réelles

### 7.1 Fonction logarithme

#### 7.1.1 Définition

#### 7.1.2 Formules

#### 7.1.3 Étude de la fonction $\ln$

Ensemble de définition

Continuité, dérivabilité

Variations

Branches infinies

Graphe

Compléments

### 7.2 Fonction exponentielle

#### 7.2.1 Définition

#### 7.2.2 Formule

#### 7.2.3 Graphiquement

#### 7.2.4 Dérivée

### 7.3 Fonctions puissances réelles

#### 7.3.1 Définition

Prolongement

Définition de la puissance rationnelle



# Chapitre 8

## Fonctions hyperboliques

### 8.1 Présentation

#### 8.1.1 Définitions

Fonction sinus hyperbolique :  $\text{sh}$

Fonction cosinus hyperbolique :  $\text{ch}$

Fonction tangente hyperbolique :  $\text{th}$

#### 8.1.2 Formules de base

### 8.2 Étude de la fonction $\text{sh}$

#### 8.2.1 Domaine de définition

#### 8.2.2 Remarque de parité

#### 8.2.3 Continuité

#### 8.2.4 Dérivabilité

#### 8.2.5 Variations

#### 8.2.6 Branches infinies

#### 8.2.7 Graphe

#### 8.2.8 Limite usuelle

### 8.3 Étude de la fonction $\text{ch}$

#### 8.3.1 Domaine de définition

#### 8.3.2 Remarque de parité

#### 8.3.3 Continuité

#### 8.3.4 Dérivabilité



# Chapitre 9

## Fonctions convexes

### 9.1 Présentation

#### 9.1.1 Définition

Générale

Remarques

Généralisation avec l'inégalité de Jensen

### 9.2 Caractérisations géométriques

#### 9.2.1 Croissances des pentes dont on fixe une extrémité

#### 9.2.2 Convexité de la partie du plan située au dessus de la courbe

Définition géométrique de la convexité

Énoncé

Démonstration

### 9.3 Caractérisations analytiques à l'aide de dérivées

#### 9.3.1 Rapport entre convexité et dérivation

Sens direct

Sens réciproque

Conséquence

### 9.4 Premières applications

#### 9.4.1 Inégalité usuelle

#### 9.4.2 Comparaison des moyennes arithmétiques et géométriques



## Chapitre 10

# Intégration d'une fonction numérique (ou à valeurs complexes) sur un segment

### 10.1 Fonctions uniformément continues

#### 10.1.1 Définition

#### 10.1.2 Caractérisation séquentielle de l'UC

#### 10.1.3 Premières propriétés

Combinaison linéaire

Implications

#### 10.1.4 Théorème de Heine

### 10.2 Définitions

#### 10.2.1 Subdivision

Définition générale

Subdivision à pas constant

#### 10.2.2 Fonctions en escalier

Définition

Exemple

#### 10.2.3 Fonction continue par morceaux

Définition

Graphiquement

### 10.3 Premières propriétés

#### 10.4 Intégration des fonctions en escalier





# Chapitre 11

## Développements limités

### 11.1 Formule de Taylor-Young

#### 11.1.1 Énoncé

#### 11.1.2 Démonstration

But

Résolution

#### 11.1.3 Applications

### 11.2 Définitions

#### 11.2.1 En 0

#### 11.2.2 En $x_0$

#### 11.2.3 En $\infty$

#### 11.2.4 Dans la suite

### 11.3 Premières propriétés

#### 11.3.1 DL et convergence, dérivabilité

Convergence

Dérivabilité

Contre-exemple

#### 11.3.2 Ordre de DL

#### 11.3.3 Unicité

#### 11.3.4 Conséquence : remarque de parité

### 11.4 DL usuels



## Chapitre 12

# Primitives et équations différentielles

### 12.1 Primitives

#### 12.1.1 Rappels

Définition

Propriété

Existence

Primitives usuelles

#### 12.1.2 Formules d'Intégration par parties (IPP)

Énoncé

Autre primitive usuelle

#### 12.1.3 Calcul de $\int e^{\alpha x} P(x) dx$

1<sup>ère</sup> méthode

2<sup>ème</sup> méthode

#### 12.1.4 Calcul de $\int e^{\alpha x} \cos(ax) dx$ , $\int e^{\alpha x} \sin(ax) dx$

1<sup>ère</sup> méthode

2<sup>ème</sup> méthode

#### 12.1.5 Calcul de $\int \frac{1}{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)} dx$

1<sup>ère</sup> méthode

2<sup>ème</sup> méthode

#### 12.1.6 Calcul de $\int \frac{1}{ax^2+bx+c} dx$

Méthode

Exemple



# Chapitre 13

## Séries numériques

### 13.1 Présentation générale

#### 13.1.1 Définitions

Notations

Convergence

Divergence

Remarques

#### 13.1.2 Premières propriétés

Linéarité

Condition nécessaire

Relation suite-série

#### 13.1.3 Exemple usuel : série géométrique

### 13.2 Séries à termes positifs

#### 13.2.1 Remarque générale

#### 13.2.2 Théorème de comparaison par majoration

#### 13.2.3 Théorème de comparaison par équivalence

#### 13.2.4 Comparaison série-intégrale

Résultat

Exemple usuel des séries de Riemann

### 13.3 Séries à termes quelconque

#### 13.3.1 Cas des séries alternées

#### 13.3.2 Séries à termes réels quelconques

# Chapitre 14

## Familles sommables

### 14.1 Dans le cas d'une famille de réels $\geq 0$

#### 14.1.1 Définition

#### 14.1.2 Remarques

#### 14.1.3 Propriétés

#### 14.1.4 À savoir en pratique

### 14.2 Pour une famille de réels quelconques

#### 14.2.1 Définition

#### 14.2.2 Caractérisation

#### 14.2.3 À savoir en pratique

#### 14.2.4 Contre-exemple

### 14.3 Pour une famille de termes complexes

#### 14.3.1 Définition

#### 14.3.2 Caractérisation

#### 14.3.3 À savoir





# Chapitre 15

## Fonctions de deux variables