

Cours

C. LACOUTURE

Année scolaire 2024-2025, MPSI2, Lycée Carnot

Table des matières

I	Analyse	11
1	Suites réelles (ou complexes)	13
1.1	Majoration, minoration	14
1.1.1	Définitions	14
1.1.2	Caractérisation	14
1.2	Limite	14
1.2.1	Définition préliminaire : voisinage d'un point	14
1.2.2	Définitions	14
1.2.3	Théorèmes relatifs à la valeur absolue	14
1.2.4	Théorèmes relatifs à la relation d'ordre \leq	14
1.2.5	Théorèmes opératoires	14
1.3	Suites usuelles	14
1.3.1	Suites arithmétiques	14
1.3.2	Suites géométriques	14
1.3.3	Suites arithmético-géométriques	14
1.4	Monotonie	14
1.4.1	Définitions	14
1.4.2	Théorème fondamental	14
1.4.3	À savoir	14
1.5	Deux notions complémentaires	14
1.5.1	Suites adjacentes	14
1.5.2	Suites extraites	14
1.5.3	Applications	14
1.6	Théorème de la moyenne de Cesaro	14
1.6.1	Énoncé	14
1.6.2	Démonstration	14
1.7	Suites récurrentes	14
1.7.1	Définition	14
1.7.2	Remarque	14
1.7.3	Méthode générale	14

2	Fonctions numériques (ou à valeurs complexes) d'une variable réelle, limite, continuité	15
2.1	Limite	16
2.1.1	Définition générale	16
2.1.2	Traductions	16
2.1.3	Théorèmes	16
2.1.4	Théorèmes de la limite monotone	16
2.2	Continuité	16
2.2.1	En un point	16
2.2.2	Sur un intervalle	16
2.3	Continuité et intervalle	16
2.3.1	Résultat général	16
2.3.2	Pour un segment	16
2.3.3	Pour une fonction strictement monotone	16
3	Relations de comparaison	17
3.1	Sur les suites	18
3.1.1	Définitions	18
3.1.2	Propriétés	18
3.1.3	Relations de négligeabilité usuelles	18
3.2	Sur les fonctions d'une variable réelle	18
3.2.1	Définitions	18
3.2.2	Propriétés	18
3.2.3	Exemples usuels de négligeabilité	18
3.2.4	Exemples usuels d'équivalence	18
4	Dérivabilité d'une fonction numérique (ou à valeurs complexes) définie sur un intervalle de \mathbb{R}	19
4.1	Présentation	20
4.1.1	En un point	20
4.1.2	Sur un intervalle	20
4.1.3	Théorèmes	20
4.2	Dérivées d'ordres supérieurs	20
4.2.1	Définitions	20
4.2.2	Théorèmes	20
4.3	Théorèmes de Rolle et application	20
4.3.1	Présentation	20
4.3.2	Autres applications : le théorème des accroissements finis (TAF)	20
4.3.3	"Applications d'applications"	20
4.4	Monotonie et extrema	20

4.4.1	Monotonie	20
4.4.2	Extrema	20
5	Fonctions trigonométriques	21
5.1	Rappel et compléments sur les fonctions sinus et cosinus . . .	21
5.1.1	Valeurs usuelles	21
5.1.2	Formules élémentaires	21
5.1.3	Parité, périodicité	21
5.1.4	Égalités	22
5.1.5	cosinus et sinus de sommes	22
5.1.6	Produit de cosinus, sinus	23
5.1.7	Sommes de cosinus, sinus	23
5.1.8	Compléments	23
5.2	Fonction tangente	24
5.2.1	Étude de la fonction	24
5.2.2	Compléments	24
6	Fonctions circulaires réciproques	27
6.1	Fonction arcsinus	28
6.1.1	Définition	28
6.1.2	Variations et graphe	28
6.1.3	Formules	28
6.1.4	Dérivation	28
6.2	Fonction arccosinus	28
6.2.1	Définition	28
6.2.2	Variations et graphe	28
6.2.3	Formules	28
6.2.4	Dérivation	28
6.2.5	Égalités supplémentaires	28
6.3	Fonction arctan	28
6.3.1	Définition	28
6.3.2	Variations et graphe	28
6.3.3	Formules	28
6.3.4	Dérivation	28
6.3.5	Égalité supplémentaire	28
7	Fonctions logarithmes, exponentielles, puissances réelles	29
7.1	Fonction logarithme	30
7.1.1	Définition	30
7.1.2	Formules	30
7.1.3	Étude de la fonction \ln	30

7.2	Fonction exponentielle	30
7.2.1	Définition	30
7.2.2	Formule	30
7.2.3	Graphiquement	30
7.2.4	Dérivée	30
7.3	Fonctions puissances réelles	30
7.3.1	Définition	30
7.3.2	Formules	30
7.3.3	Étude de $x \mapsto x^\alpha = f_\alpha$	30
7.4	Relations de comparaisons (ou croissances comparées)	30
7.5	Résultats généraux	30
7.6	Autres situations	30
8	Fonctions hyperboliques	31
8.1	Présentation	32
8.1.1	Définitions	32
8.1.2	Formules de base	32
8.2	Étude de la fonction sh	32
8.2.1	Domaine de définition	32
8.2.2	Remarque de parité	32
8.2.3	Continuité	32
8.2.4	Dérivabilité	32
8.2.5	Variations	32
8.2.6	Branches infinies	32
8.2.7	Graphe	32
8.2.8	Limite usuelle	32
8.3	Étude de la fonction ch	32
8.3.1	Domaine de définition	32
8.3.2	Remarque de parité	32
8.3.3	Continuité	32
8.3.4	Dérivabilité	32
8.3.5	Variations	32
8.3.6	Branches infinies	32
8.3.7	Graphe	32
8.3.8	Limite usuelle	32
8.4	Étude de la fonction th	32
8.4.1	Domaine de définition	32
8.4.2	Remarque de parité	32
8.4.3	Continuité	32
8.4.4	Dérivabilité	32
8.4.5	Variations	32

8.4.6	Branches infinies	32
8.4.7	Graphe	32
8.4.8	Limite usuelle	32
8.5	Petit formulaire hyperbolique	32
9	Fonctions convexes	33
9.1	Présentation	34
9.1.1	Définition	34
9.2	Caractérisations géométriques	34
9.2.1	Croissances des pentes dont on fixe une extrémité . . .	34
9.2.2	Convexité de la partie du plan située au dessus de la courbe	34
9.3	Caractérisations analytiques à l'aide de dérivées	34
9.3.1	Rapport entre convexité et dérivation	34
9.4	Premières applications	34
9.4.1	Inégalité usuelle	34
9.4.2	Comparaison des moyennes arithmétiques et géométriques	34
10	Intégration d'une fonction numérique (ou à valeurs com- plexes) sur un segment	35
10.1	Fonctions uniformément continues	36
10.1.1	Définition	36
10.1.2	Caractérisation séquentielle de l'UC	36
10.1.3	Premières propriétés	36
10.1.4	Théorème de Heine	36
10.2	Définitions	36
10.2.1	Subdivision	36
10.2.2	Fonctions en escalier	36
10.2.3	Fonction continue par morceaux	36
10.3	Premières propriétés	36
10.4	Intégration des fonctions en escalier	36
10.4.1	Définition	36
10.4.2	Propriétés	36
10.5	Définition générale de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux	36
10.5.1	Approximation d'une fonction continue par morceaux par des fonctions en escaliers	36
10.5.2	Définition de l'intégrale de $f \in \mathcal{C}_m([a, b])$	36
10.5.3	Propriétés	36
10.6	Intégration sur un intervalle quelconque	36
10.6.1	Définition	36

10.6.2	Propriétés	36
10.7	Compléments pour des fonctions continues	36
10.7.1	Théorème fondamental	36
10.7.2	Formule de la moyenne	36
10.7.3	Théorème de positivité amélioré	36
10.7.4	Sommes de Riemann	36
10.7.5	IPP, changement de variables	36
10.7.6	Autres formules de Taylor	36
11	Développements limités	37
11.1	Formule de Taylor-Young	38
11.1.1	Énoncé	38
11.1.2	Démonstration	38
11.1.3	Applications	38
11.2	Définitions	38
11.2.1	En 0	38
11.2.2	En x_0	38
11.2.3	En ∞	38
11.2.4	Dans la suite	38
11.3	Premières propriétés	38
11.3.1	DL et convergence, dérivabilité	38
11.3.2	Ordre de DL	38
11.3.3	Unicité	38
11.3.4	Conséquence : remarque de parité	38
11.4	DL usuels	38
11.4.1	Obtention	38
11.4.2	Énumération	38
11.4.3	Remarques	38
11.5	Opérations sur les DL	38
11.5.1	Combinaison linéaire	38
11.5.2	Produit	38
11.5.3	Intégration	38
11.5.4	Composée de DL	38
11.5.5	Quotient	38
12	Primitives et équations différentielles	39
12.1	Primitives	39
12.1.1	Rappels	39
12.1.2	Formules d'Intégration par parties (IPP)	39
12.1.3	Calcul de $\int e^{\alpha x} P(x) dx$	40
12.1.4	Calcul de $\int e^{\alpha x} \cos(ax) dx, \int e^{\alpha x} \sin(ax) dx$	40

12.1.5	Calcul de $\int \frac{1}{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)} dx$	40
12.1.6	Calcul de $\int \frac{1}{ax^2+bx+c} dx$	40
12.2	Présentation des équations différentielles	40
12.3	Équations différentielles d'ordre 1	41
12.3.1	Définition	41
12.3.2	Résolution de l'équation différentielle homogène	42
12.3.3	Résolution de l'équation différentielle complète	42
12.4	Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants	42
12.4.1	Définition	42
12.4.2	Résolution de l'équation différentielle homogène	42
12.4.3	Résolution de l'équation différentielle complète	42
12.4.4	Existence-unicité	42
13	Séries numériques	43
13.1	Présentation générale	44
13.1.1	Définitions	44
13.1.2	Premières propriétés	44
13.1.3	Exemple usuel : série géométrique	44
13.2	Séries à termes positifs	44
13.2.1	Remarque générale	44
13.2.2	Théorème de comparaison par majoration	44
13.2.3	Théorème de comparaison par équivalence	44
13.2.4	Comparaison série-intégrale	44
13.3	Séries à termes quelconque	44
13.3.1	Cas des séries alternées	44
13.3.2	Séries à termes réels quelconques	44
13.3.3	Séries à termes complexes	44
14	Familles sommables	45
14.1	Dans le cas d'une famille de réels ≥ 0	45
14.1.1	Définition	45
14.1.2	Remarques	45
14.1.3	Propriétés	45
14.1.4	À savoir en pratique	45
14.2	Pour une famille de réels quelconques	45
14.2.1	Définition	45
14.2.2	Caractérisation	45
14.2.3	À savoir en pratique	45
14.2.4	Contre-exemple	45
14.3	Pour une famille de termes complexes	45
14.3.1	Définition	45

14.3.2	Caractérisation	45
14.3.3	À savoir	45
15	Fonctions de deux variables	47
15.1	Premières notations	48
15.1.1	Boule ouverte	48
15.1.2	Partie ouverte	48
15.1.3	Continuité	48
15.2	Dérivabilité d'une fonction de deux variables	48
15.2.1	Définition générale	48
15.2.2	Dérivabilité selon les deux directions principales	48
15.2.3	Fonction de classe C^1 sur U	48
15.2.4	Développement limité à l'ordre 1 pour une fonction C^1 au voisinage d'un point	48
15.2.5	Dérivée composée	48
15.2.6	Extrema d'une fonction de deux variables	48

Première partie

Analyse

Chapitre 1

Suites réelles (ou complexes)

1.1 Majoration, minoration

1.1.1 Définitions

1.1.2 Caractérisation

1.2 Limite

1.2.1 Définition préliminaire : voisinage d'un point

Voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}$

Voisinage de $+\infty$

Voisinage de $-\infty$

1.2.2 Définitions

Générale

Ainsi :

Convergence, divergence

1.2.3 Théorèmes relatifs à la valeur absolue

1.2.4 Théorèmes relatifs à la relation d'ordre \leq

1.2.5 Théorèmes opératoires

Relatifs à l'addition

Relatifs à la multiplication

Relatifs au quotient

1.3 Suites usuelles

1.3.1 Suites arithmétiques

Définition, caractérisation

Chapitre 2

Fonctions numériques (ou à valeurs complexes) d'une variable réelle, limite, continuité

2.1 Limite

2.1.1 Définition générale

2.1.2 Traductions

2.1.3 Théorèmes

Théorème de passages aux limites finies dans une inégalité

Théorème des limites finies par encadrement

2.1.4 Théorèmes de la limite monotone

2.2 Continuité

2.2.1 En un point

Définition

Continuité à gauche, à droite seulement

Prolongement par continuité

Caractérisation séquentielle

2.2.2 Sur un intervalle

Définition

Théorèmes opératoires

Composée

Pratique

Chapitre 3

Relations de comparaison

3.1 Sur les suites

3.1.1 Définitions

Domination

Négligeabilité

Équivalence

Traduction pratique

3.1.2 Propriétés

Relation d'équivalence

Équivalence et limite

Équivalence et signe

Équivalence et opérations

Équivalence et somme

Équivalence et négligeabilité

Équivalence par encadrement

Mise en garde

3.1.3 Relations de négligeabilité usuelles

3.2 Sur les fonctions d'une variable réelle

3.2.1 Définitions

Domination

Négligeabilité

Équivalence

En pratique

Chapitre 4

Dérivabilité d'une fonction numérique (ou à valeurs complexes) définie sur un intervalle de \mathbb{R}

4.1 Présentation

4.1.1 En un point

Définition

Dérivabilité à gauche, à droite

Lien avec la continuité

Interprétation graphique

4.1.2 Sur un intervalle

Définition

Précision

4.1.3 Théorèmes

Combinaison linéaire

Produit

Quotient

Composée

Réciproque

4.2 Dérivées d'ordres supérieurs

4.2.1 Définitions

Générale

Fonctionnelle a^k

Chapitre 5

Fonctions trigonométriques

5.1 Rappel et compléments sur les fonctions sinus et cosinus

5.1.1 Valeurs usuelles

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \dots$$

5.1.2 Formules élémentaires

$$\begin{aligned}\cos(x + \pi) &= -\cos(x) \\ \sin(x - \pi) &= -\sin(x) \\ \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= -\sin(x) \\ \cos(x - \pi) &= \sin(x) \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos(x)\end{aligned}\tag{5.1}$$

5.1.3 Parité, périodicité

\cos est paire, \sin est impaire, elles sont 2π -périodiques.

5.1.4 Égalités

De cosinus

$$\cos(a) = \cos(b) \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \ (2\pi) \\ \boxed{\text{ou}} \\ a = -b \ (2\pi) \end{cases}$$

De sinus

$$\cos(a) = \cos(b) \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \ (2\pi) \\ \boxed{\text{ou}} \\ a = \pi - b \ (2\pi) \end{cases}$$

5.1.5 cosinus et sinus de sommes

Formules

$$\begin{aligned} \cos(a + b) &= \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b) \\ \cos(a - b) &= \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b) \\ \sin(a + b) &= \sin(a) \cos(b) + \sin(b) \cos(a) \\ \sin(a - b) &= \sin(a) \cos(b) - \sin(b) \cos(a) \end{aligned}$$

Conséquences

$$\begin{aligned} \cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x) \\ &= 2 \cos^2(x) - 1 \\ &= 1 - 2 \sin^2(x) \end{aligned}$$

$$\sin(2x) = 2 \cos(x) \sin(x)$$

$$\cos(3x) = 4 \cos^3(x) - 3 \cos(x)$$

$$\sin(3x) = -4 \sin^3(x) + 3 \sin(x)$$

Écriture

$$1 - \cos(x) = 2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$1 + \cos(x) = 2 \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

5.1.6 Produit de cosinus, sinus

$$\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$$

$$\sin(a) \sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$$

$$\sin(a) \cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$$

5.1.7 Sommes de cosinus, sinus

$$\cos(p) + \cos(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos(p) - \cos(q) = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin(p) + \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin(p) - \sin(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

5.1.8 Compléments**Limites usuelles**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{x^2}{2}} = 1$$

Inégalité usuelles

$$\forall x \in \mathbb{R}, |\sin x| \leq |x|$$

Transformation de $a \cos + b \sin$

5.2 Fonction tangente

5.2.1 Étude de la fonction

Définition et domaine de définition

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}. \text{ tan est définie sur } \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2}(\pi) \right\}$$

Remarques de parités, périodicité

- tan est impaire
- tan est π -périodique
- On étudie donc tan sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ car c'est identique à une étude sur tout son domaine de définition.

Continuité

tan est continue

Dérivabilité

$$\text{tan est dérivable avec } \tan' x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

Variations

$$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[\quad \tan' x > 0$$

Branche infinie

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$$

Graphe

Limite usuelle

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

5.2.2 Compléments

Valeurs usuelles

$$\tan(0) = 0, \quad \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1, \quad \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$$

Égalité

$$\tan(a) = \tan(b) \Leftrightarrow a = b \ (\pi)$$

Formules immédiates

Tangente d'une somme

Expressions de cosinus et sinus à l'aide de la tangente de l'angle moitié

Interprétation graphique

Chapitre 6

Fonctions circulaires réciproques

6.1 Fonction arcsinus

6.1.1 Définition

6.1.2 Variations et graphe

6.1.3 Formules

6.1.4 Dérivation

6.2 Fonction arccosinus

6.2.1 Définition

6.2.2 Variations et graphe

6.2.3 Formules

6.2.4 Dérivation

6.2.5 Égalités supplémentaires

6.3 Fonction arctan

6.3.1 Définition

6.3.2 Variations et graphe

6.3.3 Formules

6.3.4 Dérivation

6.3.5 Égalité supplémentaire

Chapitre 7

Fonctions logarithmes, exponentielles, puissances réelles

7.1 Fonction logarithme

7.1.1 Définition

7.1.2 Formules

7.1.3 Étude de la fonction \ln

Ensemble de définition

Continuité, dérivabilité

Variations

Branches infinies

Graphe

Compléments

7.2 Fonction exponentielle

7.2.1 Définition

7.2.2 Formule

7.2.3 Graphiquement

7.2.4 Dérivée

7.3 Fonctions puissances réelles

7.3.1 Définition

Prolongement

Définition de la puissance rationnelle

Chapitre 8

Fonctions hyperboliques

8.1 Présentation

8.1.1 Définitions

Fonction sinus hyperbolique : sh

Fonction cosinus hyperbolique : ch

Fonction tangente hyperbolique : th

8.1.2 Formules de base

8.2 Étude de la fonction sh

8.2.1 Domaine de définition

8.2.2 Remarque de parité

8.2.3 Continuité

8.2.4 Dérivabilité

8.2.5 Variations

8.2.6 Branches infinies

8.2.7 Graphe

8.2.8 Limite usuelle

8.3 Étude de la fonction ch

8.3.1 Domaine de définition

8.3.2 Remarque de parité

8.3.3 Continuité

8.3.4 Dérivabilité

Chapitre 9

Fonctions convexes

9.1 Présentation

9.1.1 Définition

Générale

Remarques

Généralisation avec l'inégalité de Jensen

9.2 Caractérisations géométriques

9.2.1 Croissances des pentes dont on fixe une extrémité

9.2.2 Convexité de la partie du plan située au dessus de la courbe

Définition géométrique de la convexité

Énoncé

Démonstration

9.3 Caractérisations analytiques à l'aide de dérivées

9.3.1 Rapport entre convexité et dérivation

Sens direct

Sens réciproque

Conséquence

9.4 Premières applications

9.4.1 Inégalité usuelle

9.4.2 Comparaison des moyennes arithmétiques et géométriques

Chapitre 10

Intégration d'une fonction numérique (ou à valeurs complexes) sur un segment

10.1 Fonctions uniformément continues

10.1.1 Définition

10.1.2 Caractérisation séquentielle de l'UC

10.1.3 Premières propriétés

Combinaison linéaire

Implications

10.1.4 Théorème de Heine

10.2 Définitions

10.2.1 Subdivision

Définition générale

Subdivision à pas constant

10.2.2 Fonctions en escalier

Définition

Exemple

10.2.3 Fonction continue par morceaux

Définition

Graphiquement

10.3 Premières propriétés

10.4 Intégration des fonctions en escalier

Chapitre 11

Développements limités

11.1 Formule de Taylor-Young

11.1.1 Énoncé

11.1.2 Démonstration

But

Résolution

11.1.3 Applications

11.2 Définitions

11.2.1 En 0

11.2.2 En x_0

11.2.3 En ∞

11.2.4 Dans la suite

11.3 Premières propriétés

11.3.1 DL et convergence, dérivabilité

Convergence

Dérivabilité

Contre-exemple

11.3.2 Ordre de DL

11.3.3 Unicité

11.3.4 Conséquence : remarque de parité

11.4 DL usuels

Chapitre 12

Primitives et équations différentielles

12.1 Primitives

12.1.1 Rappels

Définition

Propriété

Existence

Primitives usuelles

12.1.2 Formules d'Intégration par parties (IPP)

Énoncé

Soient u et v dérivables, à dérivées continues sur un intervalle I :

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

Autre primitive usuelle

Avec une intégration par parties :

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - x$$

12.1.3 Calcul de $\int e^{\alpha x} P(x) dx$ **1^{ère} méthode**

Par IPPs successives, en dérivant $P(x)$ et primitivant $e^{\alpha x}$, jusqu'à abaisser à 0 le degré du polynôme.

2^{ème} méthode

En posant une forme primitive à priori $e^{\alpha x} Q(x)$ où Q polynôme tel que $d^\circ Q = d^\circ P$.

12.1.4 Calcul de $\int e^{\alpha x} \cos(ax) dx$, $\int e^{\alpha x} \sin(ax) dx$ **1^{ère} méthode**

À l'aide de deux IPPs.

2^{ème} méthode

En utilisant les nombres complexes.

12.1.5 Calcul de $\int \frac{1}{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)} dx$ **Méthode**

On décompose la fraction en éléments simples.

12.1.6 Calcul de $\int \frac{1}{ax^2+bx+c} dx$ **Méthode****Exemple****12.2 Présentation des équations différentielles**

On appelle équation différentielle d'ordre n sur un intervalle I toute relation entre :

- une variable x (ou t) décrivant I
- une fonction f n fois dérivable en I
- ses dérivées $f', f'', \dots, f^{(n)}$

$$\mathcal{R}(x, f, f', \dots, f^{(n)}) = 0$$

Intégrer l'équation différentielle, c'est :

- déterminer si elle a des solutions
- si oui, les trouver toutes.

12.3 Équations différentielles d'ordre 1

12.3.1 Définition

On appelle équation différentielle linéaire d'ordre 1 toute équation différentielle de la forme $y' + a(x)y = b(x)$ où a, b sont deux fonctions continues sur un intervalle I à valeurs dans \mathbb{R} (ou \mathbb{C}).

12.3.2 Résolution de l'équation différentielle homogène

12.3.3 Résolution de l'équation différentielle complète

À l'aide d'une solution particulière y_0

Avec la méthode de "variation de la constante"

Coïncidence des 2 méthodes

Problème d'existence-unicité

12.4 Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

12.4.1 Définition

12.4.2 Résolution de l'équation différentielle homogène

Résultat admis en 1^{ère} année

Cas où $\Delta = b^2 - 4ac > 0$

Cas où $\Delta = b^2 - 4ac = 0$

Cas où $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

Remarques dans le cas complexe

12.4.3 Résolution de l'équation différentielle complète

Principe

Dans le cas où le second membre $d(x)$ est de la forme $e^{\gamma x} P(x) dx$

Dans le cas où le second membre $d(x)$ est une somme d'expressions de la forme

12.4.4 Existence-unicité

Plus précisément

Démonstration par Analyse-Synthèse

Chapitre 13

Séries numériques

13.1 Présentation générale

13.1.1 Définitions

Notations

Convergence

Divergence

Remarques

13.1.2 Premières propriétés

Linéarité

Condition nécessaire

Relation suite-série

13.1.3 Exemple usuel : série géométrique

13.2 Séries à termes positifs

13.2.1 Remarque générale

13.2.2 Théorème de comparaison par majoration

13.2.3 Théorème de comparaison par équivalence

13.2.4 Comparaison série-intégrale

Résultat

Exemple usuel des séries de Riemann

13.3 Séries à termes quelconque

13.3.1 Cas des séries alternées

13.3.2 Séries à termes réels quelconques

Chapitre 14

Familles sommables

14.1 Dans le cas d'une famille de réels ≥ 0

14.1.1 Définition

14.1.2 Remarques

14.1.3 Propriétés

14.1.4 À savoir en pratique

14.2 Pour une famille de réels quelconques

14.2.1 Définition

14.2.2 Caractérisation

14.2.3 À savoir en pratique

14.2.4 Contre-exemple

14.3 Pour une famille de termes complexes

14.3.1 Définition

14.3.2 Caractérisation

14.3.3 À savoir

Chapitre 15

Fonctions de deux variables

15.1 Premières notations

15.1.1 Boule ouverte

15.1.2 Partie ouverte

Définition

Illustration

Exemple

Remarques

15.1.3 Continuité

Définition

Pratique

Premier exemple

15.2 Dérivabilité d'une fonction de deux variables

15.2.1 Définition générale

15.2.2 Dérivabilité selon les deux directions principales

15.2.3 Fonction de classe C^1 sur U

15.2.4 Développement limité à l'ordre 1 pour une fonction C^1 au voisinage d'un point

Énoncé

Notion complémentaire

Conséquence

Remarques