

# Cours

C. LACOUTURE

Année scolaire 2024-2025, MPSI2, Lycée Carnot



# Table des matières

<b>I</b>	<b>Arithmétique</b>	<b>5</b>
<b>1</b>	<b>Réurrences, sommations</b>	<b>7</b>
1.1	Réurrences . . . . .	7
1.1.1	Principe général . . . . .	7
1.1.2	Utilisation la plus fréquente . . . . .	8
1.1.3	Variantes . . . . .	8
1.1.4	Originalités . . . . .	8
1.2	Sommations . . . . .	8
1.2.1	Somme simple . . . . .	8
1.2.2	Sommes doubles . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Coefficients binomiaux</b>	<b>9</b>
2.1	Définitions . . . . .	9
2.1.1	Factorielle . . . . .	9
2.1.2	Coefficient binomial . . . . .	9
2.2	Formules du triangle de Pascal . . . . .	9
2.2.1	Énoncé . . . . .	9
2.2.2	Pratique . . . . .	10
2.2.3	Expression des coefficients binomiaux . . . . .	10
2.3	Applications . . . . .	10
2.3.1	Symétrie des coefficients binomiaux . . . . .	10
2.3.2	Formule du binôme de Newton . . . . .	10
2.3.3	Linéarisation . . . . .	10
2.3.4	Inversement . . . . .	10
2.3.5	Nombre de parties d'un ensemble . . . . .	11
<b>3</b>	<b>PGCD, PPCM, nombres premiers</b>	<b>13</b>
3.1	PPCM : Plus Petit Commun Multiple . . . . .	14
3.1.1	Définition . . . . .	14
3.1.2	Propriétés . . . . .	14
3.1.3	Cas particulier . . . . .	14

3.2	PGCD : Plus Grand Commun Diviseur . . . . .	14
3.2.1	Définition . . . . .	14
3.2.2	Propriétés . . . . .	14
3.2.3	Cas particulier . . . . .	14
3.2.4	Pratique . . . . .	14
3.3	Nombres premiers entre eux . . . . .	14
3.3.1	Définition . . . . .	14
3.3.2	Caractérisation : théorème de Bézout . . . . .	14
3.3.3	Propriétés . . . . .	14
3.4	Généralisation . . . . .	14
3.4.1	pgcd,ppcm de $n$ entiers . . . . .	14
3.4.2	Pratique . . . . .	14
3.5	Nombres premiers . . . . .	14
3.5.1	Définition . . . . .	14
3.5.2	Premières propriétés . . . . .	14
3.5.3	Infinité . . . . .	14
3.5.4	Crible d'Eratosthène . . . . .	14
3.5.5	Décomposition en facteurs premiers . . . . .	14
3.6	Congruences . . . . .	14
3.6.1	Définition de la relation . . . . .	14
3.6.2	Opérations sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . . . . .	14
3.6.3	Structures . . . . .	14
<b>4</b>	<b>Dénombrements</b>	<b>15</b>
4.1	Cardinal d'un ensemble fini . . . . .	16
4.1.1	Définitions . . . . .	16
4.1.2	Propriétés . . . . .	16
4.2	Applications entre deux ensembles finis . . . . .	16
4.2.1	Remarque préliminaire . . . . .	16
4.2.2	Dénombrement . . . . .	16
4.2.3	Quand $E$ et $F$ sont de même cardinal (fini) . . . . .	16
4.3	Parties d'un ensemble fini . . . . .	16
4.3.1	$p$ -liste d'éléments distincts . . . . .	16
4.3.2	Autre démonstration de $\text{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^{\text{card}(E)}$ . . . . .	16
4.3.3	Retrouvons que $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ . . . . .	16

# Première partie

## Arithmétique



# Chapitre 1

## Réurrences, sommations

### 1.1 Réurrences

#### 1.1.1 Principe général

Axiome

$$\boxed{\text{si}} \ A \text{ est une partie de } \mathbb{N} \text{ tq } \begin{cases} 0 \in A \\ \forall n \in A, n+1 \in A \end{cases} \quad \boxed{\text{alors}} \ A = \mathbb{N}$$

Énoncé

$$\begin{cases} \text{Soit } \mathcal{P}(n) \text{ une propriété dépendante de } n \in \mathbb{N}. \\ \mathcal{P}(0) \text{ vraie} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1) \end{cases} \quad \boxed{\text{alors}} \ \mathcal{P}(n) \text{ est vraie } \forall n \in \mathbb{N}$$

Applications à des expressions de sommes usuelles

— Somme d'entiers consécutifs :

$$\sum_{k=0}^n k = 0 + 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

— Somme des carrés :

$$\sum_{k=0}^n k^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Démonstration : soit  $\mathcal{P}(n)$  l'égalité ci-dessus.

- $\mathcal{P}(0)$  est vraie car  $\sum_{k=0}^0 k^2 = 0 = \frac{0(0+1)(2\cdot 0+1)}{6}$
- $\boxed{\text{si}}$  pour un certain  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{P}(n)$  est vraie  $\boxed{\text{alors}}$  montrons que  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie. En effet :

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=0}^n k^2 + (n+1)^2 \\
 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \text{ par hypothèse de récurrence} \\
 &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\
 &= \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6} \\
 &= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} \\
 &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \\
 &= \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

donc  $\mathcal{P}(n+1)$  est bien vraie.

- Sommes des cubes :

$$\sum_{k=0}^n k^3 = 0^3 + 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left( \frac{n(n+1)}{2} \right)^2 = \left( \sum_{k=0}^n k \right)^2$$

- Somme géométrique : soit  $a \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k=0}^n a^k = 1 + a^1 + a^2 + \dots + a^n = \begin{cases} \frac{1-a^{n+1}}{1-a} & \text{si } a \neq 1 \\ n+1 & \text{si } a = 1 \end{cases}$$

### 1.1.2 Utilisation la plus fréquente

### 1.1.3 Variantes

### 1.1.4 Originalités

## 1.2 Sommations

### 1.2.1 Somme simple

### 1.2.2 Sommes doubles



# Chapitre 2

## Coefficients binomiaux

### 2.1 Définitions

#### 2.1.1 Factorielle

- $\forall n \in \mathbb{N}^*, n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = \prod_{k=1}^n k$
- $0! = 1$

#### 2.1.2 Coefficient binomial

##### Générale

Soient  $p, n \in \mathbb{N}$  tel que  $p \leq n$ .

$\binom{n}{p}$  ( $p$  parmi  $n$ ) est le nombre de parties à  $p$  éléments d'un ensemble à  $n$  éléments.

##### Cas particulier

Si  $p, n \in \mathbb{N}$  avec  $p > n$ ,  $\binom{n}{p} = 0$

### 2.2 Formules du triangle de Pascal

#### 2.2.1 Énoncé

Soient  $p, n \in \mathbb{N}$  tel que  $1 \leq p \leq n-1$ .

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$$

### 2.2.2 Pratique

Cette formule permet de calculer de proche en proche tous les coefficients binomiaux.

### 2.2.3 Expression des coefficients binomiaux

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \llbracket 0, n \rrbracket$$

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

## 2.3 Applications

### 2.3.1 Symétrie des coefficients binomiaux

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \llbracket 0, n \rrbracket$$

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

### 2.3.2 Formule du binôme de Newton

$$\forall a, b \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

### 2.3.3 Linéarisation

But : écrire des puissances de cos et sin comme combinaison de termes de la forme  $\sin(ax)$ ,  $\cos(bx)$ .

Principe :

1. on utilise les formules d'Euler.
2. on développe selon le binôme de Newton.
3. on regroupe deux à deux les termes extrêmes.
4. on réutilise les formules d'Euler.

### 2.3.4 Inversement

Comment écrire  $\sin(ax)$ ,  $\cos(bx)$  en fonction de puissances de cos, sin ?

Méthode :

1. on utilise la formule de Moivre
2. on développe selon la formule du binôme.

### 2.3.5 Nombre de parties d'un ensemble

Soit  $E$  un ensemble à  $n$  éléments. Alors  $E$  a  $2^n$  parties car :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$$



# Chapitre 3

## PGCD, PPCM, nombres premiers

### 3.1 PPCM : Plus Petit Commun Multiple

#### 3.1.1 Définition

Un ensemble  $E$  peut être défini :

- en extension : quand on énumère tous ses éléments.
- en compréhension : à l'aide d'une propriété caractéristique de ses éléments.

### 3.1.2 Propriétés

### 3.1.3 Cas particulier

## 3.2 PGCD : Plus Grand Commun Diviseur

### 3.2.1 Définition

### 3.2.2 Propriétés

### 3.2.3 Cas particulier

### 3.2.4 Pratique

Résultat préliminaire

Algorithme

Notations

Concrètement

Exemple :  $\text{pgcd}(56, 23)$

Remarque

## 3.3 Nombres premiers entre eux

### 3.3.1 Définition

### 3.3.2 Caractérisation : théorème de Bézout

### 3.3.3 Propriétés

## 3.4 Généralisation

### 3.4.1 $\text{pgcd}, \text{ppcm}$ de $n$ entiers

$\text{ppcm}$

$\text{pgcd}$

### 3.4.2 Pratique

## 3.5 Nombres premiers

### 3.5.1 Définition

### 3.5.2 Premières propriétés

### 3.5.3 Infinité

Résultat préliminaire

Conséquence



# Chapitre 4

## Dénombrements

### 4.1 Cardinal d'un ensemble fini

#### 4.1.1 Définitions

#### 4.1.2 Propriétés

Réunion disjointe

Sous-ensemble

Réunion quelconque

Produit cartésien

### 4.2 Applications entre deux ensembles finis

#### 4.2.1 Remarque préliminaire

#### 4.2.2 Dénombrement

#### 4.2.3 Quand $E$ et $F$ sont de même cardinal (fini)

### 4.3 Parties d'un ensemble fini

#### 4.3.1 $p$ -liste d'éléments distincts

#### 4.3.2 Autre démonstration de $\text{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^{\text{card}(E)}$

#### 4.3.3 Retrouvons que $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$