

# Cours

C. LACOUTURE

Année scolaire 2024-2025, MPSI2, Lycée Carnot



# Première partie

## Géométrie



# Chapitre 1

## Produit scalaire



# Chapitre 2

## (Sous) espaces affines

### 2.1 Présentation théorique

#### 2.1.1 Définition

#### 2.1.2 Notations

#### 2.1.3 Propriétés simples

#### 2.1.4 Translations

### 2.2 Sous-espaces affines

#### 2.2.1 Définition

#### 2.2.2 Remarque

#### 2.2.3 Dimension

#### 2.2.4 Exemples usuels

Ensembles des solutions d'un système d'équations linéaires

Qui s'écrit (lorsqu'il est  $\neq \emptyset$ )

$$S = X_0 + \ker(A)$$

Solution particulière (origine) + noyau de la matrice associée (direction)

L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire

Qui s'écrit :

- Pour une équation d'ordre 1

$$y_0 + \{\lambda Y_0(x) \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Solution particulière de l'équation complète (origine) + Vect( $Y_0$ )

- Pour une équation d'ordre 2

### 2.2.5 Parallélisme

#### Définition

Soient  $\mathcal{E}_1 = A_1 + F_1$ ,  $\mathcal{E}_2 = A_2 + F_2$  deux sous-espaces affines de  $\epsilon$ .

- $\mathcal{E}_1$  est parallèle à  $\mathcal{E}_2$  ( $\mathcal{E}_1 \parallel \mathcal{E}_2$ ) ssi  $F_1 \subset F_2$
- $\mathcal{E}_1$  et  $\mathcal{E}_2$  sont parallèles ( $\mathcal{E}_1 \parallel \mathcal{E}_2$ ) ssi  $F_1 = F_2$

#### Propriétés

- Théorème d'Euclide

Soit  $\mathcal{V}$  un sous-espace affine (d'origine  $A$ ), de direction  $F$ . Soit  $\Omega$  un point de  $\mathcal{E}$ . Il existe un unique sous-espace affine de  $\mathcal{E}$  passant par  $\Omega$ , parallèle à  $\mathcal{V}$ .

C'est :  $\mathcal{V}' = \Omega + F$  ( $\Omega \in \mathcal{V}'$  donc  $\Omega$  sert d'origine à  $\mathcal{V}'$ .  $\mathcal{V}' \parallel \mathcal{V}$  donc  $\mathcal{V}'$  a pour direction  $F$  et : un point origine et la direction définissent entièrement et de manière unique  $\mathcal{V}'$ )

- Soient  $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$  2 sous-espaces affines de  $\mathcal{E}$

$$\mathcal{V}_1 \parallel \mathcal{V}_2 \Rightarrow \mathcal{V}_1 = \emptyset \text{ ou } \mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_2$$

Démonstration :

On a :  $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$  de directions  $F_1, F_2$  tel que  $F_1 \subset F_2$

Dès lors : montrons que si  $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 \neq \emptyset$  alors  $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_2$  en effet : soit  $\Omega \in \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2$ . On a donc  $\mathcal{V}_1 = \Omega + F_1, \mathcal{V}_2 = \Omega + F_2$ . Puis :  $M \in \mathcal{V}_1 \Leftrightarrow OM \in F_1 \Rightarrow OM \in F_2 \Leftrightarrow M \in \mathcal{V}_2$  d'où  $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_2$ .

- Ainsi :

$$\mathcal{V}_1 \parallel \mathcal{V}_2 \Rightarrow \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 \neq \emptyset \text{ ou } \mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_2$$

### 2.2.6 Intersection

On a 2 sous-espaces affines :  $\mathcal{V}_1 = A_1 + F_1, \mathcal{V}_2 = A_2 + F_2$

#### CNS d'existence

$$\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 \neq \emptyset \Leftrightarrow \overrightarrow{A_1 A_2} \in F_1 + F_2$$

Démonstration :



$\Rightarrow$   
 On a :  $\Omega \in \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2$   
 Dès lors  $\overrightarrow{A_1 A_2} = \overrightarrow{A_1 \Omega} + \overrightarrow{\Omega A_2}$  donc  $\overrightarrow{A_1 A_2} \in F_1 + F_2$   
 $\Leftarrow$   
 On a :  $\overrightarrow{A_1 A_2} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}$  où  $\overrightarrow{u_1} \in F_1, \overrightarrow{u_2} \in F_2$   
 Dès lors  $\exists M_1 \in \mathcal{E}$  tel que  $\overrightarrow{A_1 M_1} = \overrightarrow{u_1}$ ,  $\exists M_2 \in \mathcal{E}$  tel que  $\overrightarrow{A_2 M_2} = -\overrightarrow{u_2}$   
 donc  $M_1 = A_1 + \overrightarrow{u_1} \in A_1 + F_1 = \mathcal{V}_1$ ,  $M_2 = A_2 - \overrightarrow{u_2} \in A_2 + F_2 = \mathcal{V}_2$   
 donc  $\overrightarrow{A_1 A_1} = \overrightarrow{A_1 M_1} - \overrightarrow{A_2 M_2} = \overrightarrow{A_1 M_1} + \overrightarrow{M_2 A_2}$  donc  $\overrightarrow{A_1 M_1} + \overrightarrow{M_1 A_2} = \overrightarrow{A_1 M_1} + \overrightarrow{M_2 A_2}$  c-à-d  $\overrightarrow{M_1 A_2} = \overrightarrow{M_2 A_2}$  c-à-d  $M_1 = M_2$  donc  $M_1 = M_2 \in \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2$   
 donc  $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2$  non vide.

### Conséquence

Si  $E = F_1 + F_2$  alors  $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 \neq \emptyset$

### Structure de $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2$ quand $\neq \emptyset$

$\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2$  est un sous-espace affine de  $\mathcal{E}$ , de direction  $F_1 \cap F_2$ .  
 On a :  $\Omega \in \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2$  donc  $\mathcal{V}_1 = \Omega + F_1, \mathcal{V}_2 = \Omega + F_2$   
 Dès lors :  $M \in \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 \Leftrightarrow M \in \mathcal{V}_1$  et  $M \in \mathcal{V}_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M} \in F_1$  et  $\overrightarrow{\Omega M} \in F_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M} \in F_1 \cup F_2 \Leftrightarrow M \in \Omega + F_1 \cup F_2$   
 Donc  $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 = \Omega + F_1 \cup F_2$  est un sous-espace affine de  $\mathcal{E}$  de direction  $F_1 \cup F_2$ .

### Conséquence immédiate

Si  $E = F_1 \oplus F_2$  alors  $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 = \{\text{un point}\}$   
 Car : on a  $E = F_1 + F_2$  donc  $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 \neq \emptyset$   
 Soit  $\Omega \in \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2$   
 On a alors  $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 = \Omega + F_1 \cup F_2 = \Omega + \{O_E\} = \{\Omega\}$

## 2.2.7 Pratique : positions relatives de droites et plans

### En dimension 2 (dans un plan affine)

Deux droites sont parallèles ou sécantes en un point.

### En dimension 3 (dans un "véritable" espace affine)

- Pour deux plans affines  
 Deux plans  $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$  sont parallèles ou sécants selon une droite

Démonstration :  $\mathcal{P}_1 = A_1 + P_1, \mathcal{P}_2 = A_2 + P_2$  où  $P_1, P_2$  plans vectoriels de  $E = E_3$

— Soit  $P_1 = P_2$  c-à-d  $\mathcal{P}_1 \parallel \mathcal{P}_2$

— Soit  $P_1 \neq P_2$

$\exists \vec{u}_2 \in P_2$  tel que  $\vec{u}_2 \notin P_1$  On sait alors que  $P_1 \oplus \text{Vect}(\vec{u}_2) = E_3$  (cf cours sur les hyperplans,  $P_1$  en étant un) avec  $\text{Vect}(\vec{u}_2) \subset P_2$  puis  $E_3 = P_1 + \text{Vect}(\vec{u}_2) \subset P_1 + P_2$  donc  $P_1 + P_2 = E_3$  donc  $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \neq \emptyset$  donc  $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$  est un espace affine de direction  $P_1 \cap P_2$  avec  $\dim P_1 \cap P_2 = \dim P_1 + \dim P_2 - \dim P_1 + P_2 = 2 + 2 - 3 = 1$  donc  $P_1 \cap P_2$  est une droite vectorielle bref  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  sont sécants selon une droite affine.

— Pour une droite et un plan

$\mathcal{D}$  et  $\mathcal{P}$  sont tels que  $\mathcal{P} \parallel \mathcal{D}$  ou  $\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \{1 \text{ point}\}$

Démonstration :  $\mathcal{D} = A + D, \mathcal{P} = B + P$

— Soit  $D \subset P$  c-à-d  $\mathcal{D} \parallel \mathcal{P}$

— Soit  $D \not\subset P$

Alors  $P \oplus D = E_3$  (cf cours sur les hyperplans) donc  $\mathcal{P} \cap \mathcal{D} = 1 \text{ point}$

— Pour deux droites :  $\mathcal{D}_1 = A_1 + D_1, \mathcal{D}_2 = A_2 + D_2$

— Définition de la coplanarité  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  sont coplanaires ssi  $\mathcal{D}_1 \text{ parr } \mathcal{D}_2$  ou  $\mathcal{D}_1 \text{ inter } \mathcal{D}_2$  {un point}

— En notant  $\mathcal{D}_1 = A_1 + \text{Vect}(\vec{u}_1), \mathcal{D}_2 = A_2 + \text{Vect}(\vec{u}_2)$

On a :  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  coplanaires  $\Leftrightarrow (\overrightarrow{A_1 A_2}, \vec{u}_1, \vec{u}_2)$  lié.

Démonstration :  $(A_1 A_2, u_1, u_2)$  lié signifie :

—  $\vec{u}_1$  et  $\vec{u}_2$  sont colinéaires, c-à-d  $D_1 = \text{Vect}(\vec{u}_1) = D_2 = \text{Vect}(\vec{u}_2)$  c-à-d  $\mathcal{D}_1 \parallel \mathcal{D}_2$

—  $\vec{u}_1$  et  $\vec{u}_2$  non colinéaires, avec  $\overrightarrow{A_1 A_2} \in \text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$  c-à-d  $\overrightarrow{A_1 A_2} \in D_1 + D_2$  c-à-d  $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 \neq \emptyset$  c-à-d  $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \{\text{un point}\}$  car  $D_1 \cap D_2 = \text{Vect}(\vec{u}_1) \cap \text{Vect}(\vec{u}_2) = \{O_E\}$

## 2.3 Étude analytique

### 2.3.1 Définitions générales

#### Repère cartésien (ou affine)

Un repère cartésien d'un espace affine  $\mathcal{E}$  (de direction  $E$ ) est :  $\mathcal{R} = (O, e_1, e_2, \dots, e_n)$  où :

—  $O \in \mathcal{E}$  (origine du repère)

—  $(e_1, \dots, e_n)$  base de  $E$

**Coordonnées cartésiennes**

$\forall M \in \mathcal{E}, \exists! (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  tel que

$$\overrightarrow{OM} = x_1 \overrightarrow{e_1} + \dots + x_n \overrightarrow{e_n}$$

car  $\overrightarrow{OM} \in E$  et  $(e_1, \dots, e_n)$  base de  $E$ .

$(x_1, \dots, x_n)$  ou  $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  sont les coordonnées cartésiennes du point  $M$ , dans le repère cartésien  $(O, e_1, \dots, e_n)$ .

**Équation cartésienne**

Soit  $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$  ( $\mathcal{F}$  : partie de  $\mathcal{E}$ ). On appelle équation cartésienne de  $\mathcal{F}$ , toute relation entre les coordonnées cartésiennes  $x_1, \dots, x_n$  d'un point  $M$  de  $\mathcal{E}$ . Cette relation exprime une CNS pour que  $M \in \mathcal{F}$ .

**Repère orthonormé**

Dans le cas où  $E$  est un  $\mathbb{R}$ ev euclidien et  $(e_1, \dots, e_n)$  est une BON de  $E$   $(O, e_1, \dots, e_n)$  est un RON (repère orthonormé) de  $\mathcal{E}$

**2.3.2 Exemples en dimension 2**

$\mathcal{E}_2$  a pour repère cartésien  $(O, i, j)$ . Les droites  $\mathcal{D}$  de  $\mathcal{E}_2$  sont les parties de  $\mathcal{E}_2$  d'équation cartésienne  $ax + by + c = 0$  où  $(a, b) \neq (0, 0)$

Démonstration :

sens direct Soit  $\mathcal{D}$  une droite de  $\mathcal{E}_2$ , passant par  $\Omega \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$  dans  $(O, i, j)$ , dirigée par  $\overrightarrow{v} \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \end{vmatrix}$  dans  $(i, j)$  où  $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ . On a alors :

$$\begin{aligned} M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{D} &\Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M} \in \mathcal{D} = \text{Vect}(\overrightarrow{v}) \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ sont liés} \\ &\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{v}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \beta(x - x_0) - \alpha(y - y_0) = 0 \\ &\Leftrightarrow \beta x - \alpha y + \alpha y_0 - \beta x_0 = 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

On a bien une équation de la forme :  $ax + by + c = 0$  où  $(a, b) = (\beta, -\alpha) \neq (0, 0)$

sens réciproque Soit  $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}_2$  d'équation cartésienne :  $ax + by + c = 0$  (où  $(a, b) \neq (0, 0)$ ) vu que  $(a, b) \neq (0, 0)$  : l'équation ci-dessus a des solutions (par exemple : si  $a \neq 0$ ,  $(-\frac{c}{a}, 0)$  est solution). Notons  $(x_0, y_0)$  une de ces solutions. On a alors

$$\begin{aligned}
 M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{D} &\Leftrightarrow ax + by + c = ax_0 + by_0 + c \\
 &\Leftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_0 & -b \\ y - y_0 & a \end{vmatrix} = 0 \\
 &\Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M} \text{ et } \vec{u} \text{ sont liés (où } \Omega \text{ est le point de coordonnées } \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\
 &\text{ dans } (O, i, j) \text{ et } \vec{u} \text{ est le vecteur de coordonnées } \begin{vmatrix} -b \\ a \end{vmatrix} \\
 &\text{ dans } (i, j) \text{ donc } \vec{u} \neq \vec{0}) \\
 &\Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M} \subset D = \text{Vect}(\vec{u}) \\
 &\Leftrightarrow M \in \Omega + D
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

donc  $\mathcal{D}$  est bien une droite affine, de direction  $D = \text{Vect}(-ba)$

Remarques :

**Pour  $\mathcal{D}$  d'équation cartésienne  $ax + by + c = 0$  dans  $(O, i, j)$ .**

Un vecteur de base de  $D$  est  $\vec{u} \begin{vmatrix} -b \\ a \end{vmatrix}$  dans  $(i, j)$ .

**Une équation de  $D$  est :  $ax + by = 0$**

Vérifiée par  $\begin{vmatrix} -b \\ a \end{vmatrix}$  et passant par  $O_{E_2}$  de coordonnées (00) dans  $(i, j)$ .

**Dans le cas d'un espace euclidien et d'un RON  $(O, i, j)$**

$D^\perp = \text{Vect}\left(\begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix}\right)$  car  $D^\perp$  est de dimension 1 et  $\begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -b \\ a \end{vmatrix} = 0$  donc  $\begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix} \in D^\perp$

### 2.3.3 Exemples en dimension 3

#### Les plans affines de $\mathcal{E}_3$

Sont les parties de  $\mathcal{E}_3$  d'équation cartésienne :  $ax + by + cz + d = 0$  où  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$

Remarques :

— L'équation de la direction  $P$  dans  $(i, j, k)$  est alors  $ax + by + cz = 0$

— Dans le cas d'un RON :  $P^\perp = \text{Vect}\left(\begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array}\right)$

#### Les droites affines de $\mathcal{E}_3$

Sont les intersections de deux plans de  $\mathcal{E}_3$  non parallèles c-à-d les parties de  $\mathcal{E}_3$  définies par deux équations cartésiennes de la forme  $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$

où  $(a, b, c), (a', b', c') \neq (0, 0, 0)$  et sont non colinéaires (pour ne pas donner la même équation directionnelle)