Cours

C. LACOUTURE

Année scolaire 2024-2025, MPSI2, Lycée Carnot

Table des matières

Première partie

Arithmétique

Chapitre 1

Récurrences, sommations

1.1 Récurrences

1.1.1 Principe général

Axiome

$$\boxed{\text{si}}\ A \text{ est une partie de } \mathbb{N} \text{ tq } \begin{cases} 0 \in A \\ \forall n \in A, n+1 \in A \end{cases} \boxed{\text{alors}}\ A = \mathbb{N}$$

Énoncé

Soit $\mathcal{P}(n)$ une propriété dépendante de $n \in N$. $\boxed{\text{si}}$ $\begin{cases} \mathcal{P}(0)\text{vraie} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1) \end{cases}$ $\boxed{\text{alors}}$ $\mathcal{P}(n)$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$

Applications à des expressions de sommes usuelles

— Somme d'entiers consécutifs :

$$\sum_{k=0}^{n} k = 0 + 1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

— Somme des carrés :

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Démonstration : soit $\mathcal{P}(n)$ l'égalité ci-dessus.

— $\mathcal{P}(0)$ est vraie car $\sum_{k=0}^{0} k^2 = 0 = \frac{0(0+1)(2\cdot 0+1)}{6}$

— $\boxed{\text{si}}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie $\boxed{\text{alors}}$ montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. En effet :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n(2n+1)+6(n+1))}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \\ &= \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}\end{aligned} \tag{1.1}$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est bien vraie.

— Sommes des cubes :

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = 0^3 + 1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2$$

— Somme géométrique : soit $a \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = 1 + a^1 + a^2 + ... + a^n = \begin{cases} \frac{1-a^{n+1}}{1-a} & \text{si } a \neq 1 \\ n+1 & \text{si } a = 1 \end{cases}$$

1.1.2 Utilisation la plus fréquente

1.1.3 Variantes

1.1.4 Originalités

1.2 Sommations

1.2.1 Somme simple

1.2.2 Sommes doubles

Chapitre 2

Coefficients binomiaux

2.1 Définitions

2.1.1 Factorielle

— $\forall n \in \mathbb{N}^*, n! = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1 = \prod_{k=1}^{n} k$
— $0! = 1$

2.1.2 Coefficient binomial

Générale

Soient $p, n \in \mathbb{N}$ tel que $p \leqslant n$.
$\binom{n}{p}$ (p parmi n) est le nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments.

Cas particulier

Si $p, n \in \mathbb{N}$ avec $p > n$, $\binom{n}{p} = 0$

2.2 Formules du triangle de Pascal

2.2.1 Énoncé

Soient $p, n \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leqslant p \leqslant n-1$.

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$$

2.2.2 Pratique

Cette formule permet de calculer de proche en proche tous les coefficients binomiaux.

2.2.3 Expression des coefficients binomiaux

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in [\![0, n]\!]$

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

2.3 Applications

2.3.1 Symétrie des coefficients binomiaux

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in [\![0, n]\!]$

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

2.3.2 Formule du binôme de Newton

$\forall a, b \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

2.3.3 Linéarisation

But : écrire des puissances de cos et sin comme combinaison de termes de la forme $\sin(ax)$, $\cos(bx)$.

Principe :

1. on utilise les formules d'Euler.
2. on développe selon le binôme de Newton.
3. on regroupe deux à deux les termes extrêmes.
4. on réutilise les formules d'Euler.

2.3.4 Inversement

Comment écrire $\sin(ax)$, $\cos(bx)$ en fonction de puissances de cos, sin ?

Méthode :

1. on utilise la formule de Moivre
2. on développe selon la formule du binôme.

2.3.5 Nombre de parties d'un ensemble

Soit E un ensemble à n éléments. Alors E a 2^n parties car :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$$

Chapitre 3

PGCD, PPCM, nombres premiers

3.1 PPCM : Plus Petit Commun Multiple

3.1.1 Définition

3.1.2 Propriétés

3.1.3 Cas particulier

3.2 PGCD : Plus Grand Commun Diviseur

3.2.1 Définition

3.2.2 Propriétés

3.2.3 Cas particulier

3.2.4 Pratique

Résultat préliminaire

Algorithme

Notations

Concrètement

Exemple : pgcd(56,23)

Remarque

3.3 Nombres premiers entre eux

3.3.1 Définition

3.3.2 Caractérisation : théorème de Bézout

3.3.3 Propriétés

3.4 Généralisation

Chapitre 4

Dénombrements

4.1 Cardinal d'un ensemble fini

4.1.1 Définitions

4.1.2 Propriétés

Réunion disjointe

Sous-ensemble

Réunion quelconque

Produit cartésien

4.2 Applications entre deux ensembles finis

4.2.1 Remarque préliminaire

4.2.2 Dénombrement

4.2.3 Quand E et F sont de même cardinal (fini)

4.3 Parties d'un ensemble fini

4.3.1 p-liste d'éléments distincts

4.3.2 Autre démonstration de $\mathbf{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^{\mathbf{card}(E)}$

4.3.3 Retrouvons que $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$