

Rapport de projet Biomedical engineering



[2]

Chemin des gouttelettes inhalées dans le poumon

Groupe de travail : groupe8

- ✓ *Abdelmoula ELBOUHALI*
- ✓ *Mouna ARAQI HOUSSAINI*
- ✓ *Taha LAKHDARI*
- ✓ *Dao Pascal SOUMAHORO*
- ✓ *Omar EL FAKIR*
- ✓ *Hajiba MOUTIA*

Encadrant :

Mr. Marcel FILOCHE

Remerciement

Nous adressons nos sincères remerciements à Mr M.FILOCHE pour le temps qui nous a consacré à nous apporter moult conseils indispensables à la conduite de ce projet .

Un grand merci également à notre directeur Mr CHEIMANOFF ,dont la vision était de nous inciter à découvrir le monde de la recherche scientifique

Table des matières

Introduction :	4
1-Problématique :	5
2-Relationset physiques mathématiques :	5
1)L'équation de Navier-Stokes :	5
2)L'équation vérifiant l'incompressibilité du fluide :	5
3)L'équation de Stokes :	5
4)Discretisation de la trajectoire par pas de temps :	5
5)Méthode de discrétisation :	5
3- Démarche suivie :	5
1-Cas particulier (Cas de poiseuille) :	6
1-1Trachée.....	6
2-Cas général :	7
2-1 La trachée :	8
2-2-Bifurcation :	9
Conclusion:	11
Annexe :	12

Introduction



Les gouttelettes respirées sont des gouttes sphériques microscopiques produites en respirant, en parlant ..., ces gouttelettes peuvent contenir des microbes et des virus ...qui, par le biais de l'éternuement, par exemple, pourraient se transmettre d'une personne à une autre en pénétrant son système respiratoire.

Certaines maladies infectieuses, notamment la COVID 19, peuvent se transmettre via des gouttelettes respiratoires expulsées de la bouche et du nez.

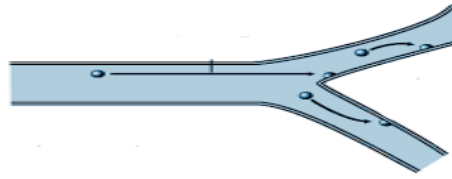
Notre projet consisterait à étudier le

comportement d'une gouttelette inhalée et de pouvoir détecter sa vitesse et trajectoire, plus généralement son mouvement relatif. Il s'agit d'une étude qui fait intervenir non seulement des connaissances liées à la physique mais aussi des compétences informatiques en python.

Nous veillerions à détailler dans notre rapport la démarche suivie pour répondre à la problématique (celle-ci est explicitée dans le paragraphe suivant).

1-Problématique :

La problématique posée est d'étudier le dépôt des particules inhalées dans le poumon par le biais des outils mathématiques et physiques, traduits par des programmes informatiques.



2-Relationset physiques mathématiques :

1)L'équation de Navier-Stokes :

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right] = -\vec{\nabla} P + \eta \Delta \vec{u}$$

2)L'équation vérifiant l'incompressibilité du fluide :

$$\text{div } \vec{u} = 0$$

3)L'équation de Stokes :

Pour un fluide stationnaire, l'équation de Navier-Stokes s'écrit comme :

$$-\vec{\nabla} P + \eta \Delta \vec{u} = 0$$

4)Discretisation de la trajectoire par pas de temps :

$$\vec{\chi}_p(t_{n+1}) = \vec{\chi}_p(t_n) + \Delta t \cdot \vec{v}(t_n)$$

$$\vec{v}(t_{n+1}) = \vec{v}(t_n) + \frac{\Delta t}{m} \left[6\pi\eta \left(\vec{u}(\vec{\chi}_p(t_n)) - \vec{v}(t_n) \right) + m\vec{g} \right]$$

5)Méthode de discrétisation :

La méthode de la discrétisation consiste à découper d'une façon bien déterminée une quantité précise et la transformer en quantité ordonnée pour permettre une représentation graphique. On adaptera cette notion pour plusieurs éléments dans notre projet :

$$\Delta f = \left(\frac{f_{i-1,j} + f_{i+1,j} - 2f_{i,j}}{\delta_x^2} \right) + \left(\frac{f_{i,j-1} + f_{i,j+1} - 2f_{i,j}}{\delta_y^2} \right)$$

3- Démarche suivie :

Concernant notre démarche, nous avons adopté un plan inductif. En effet on a commencé par traiter le cas particulier le plus simple, puis on a, au fur et à mesure, modifier des conditions et ajouter d'autres pour traiter le cas le plus général.

On considère, dans notre étude, le fluide incompressible et parfait, l'écoulement stationnaire et laminaire (faible nombre de Reynolds). Ainsi la force du frottement s'écrit de la forme $6\pi\eta (\vec{u}(\vec{\chi}_p(t_n)) - \vec{v}(t_n))$.

1-Cas particulier (Cas de poiseuille) :

1-1 Trachée

a. Vitesse du fluide

Dans cette partie, nous nous sommes limités à la trachée sans prendre en considération la bifurcation. Pour une première approximation, nous avons supposé que le gradient de P soit constant. L'équation de Stokes

(3) s'écrit donc : $\Delta \vec{u} = \frac{\bar{\nabla} P}{\eta} = cste$

A partir de la relation de discrétisation (5), on aura donc la formule simplifiée suivante :

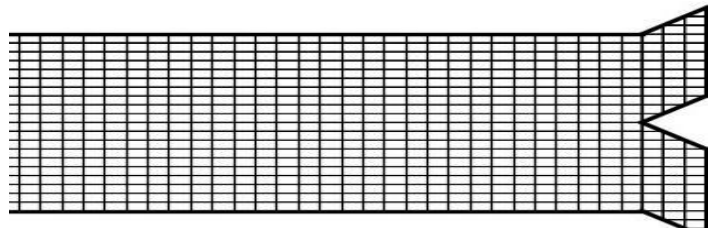
$$r^2(f_{i,j-1} + f_{i,j+1}) + f_{i+1,j} + f_{i-1,j} - 2f_{i,j}(r^2 + 1) = cste$$

* on note r le coefficient qui vérifie la relation $r = \frac{\delta_x}{\delta_y}$ *

Pour trouver la vitesse u du fluide suivant l'axe (Ox) (u_y étant nulle dans ce cas) on a dû transformer cette relation $\Delta \vec{u} = cste$ sous forme matricielle :

$$MX=B$$

Avec : M la matrice de coefficients de la vitesse, X la matrice colonne de la vitesse u du fluide et B la matrice des constantes.



On s'est limité d'abord à présenter un exemple d'une matrice de taille (3,4), afin d'avoir une idée sur la forme de la matrice, pour traiter par la suite le cas d'une matrice de taille (m, n).

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 & 0 & a \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} j & a & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & k & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

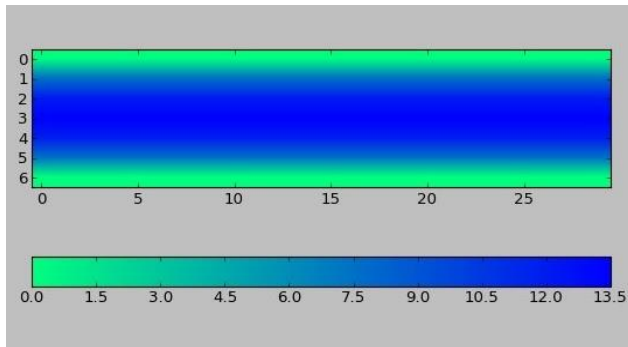
Avec :

$$k = r^2 - 2(r^2 + 1)$$

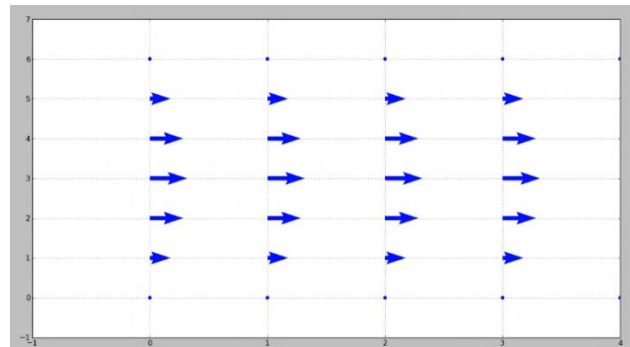
$$a = r^2$$

$$j = -2(r^2 + 1)$$

La vitesse est prise nulle aux parois. La résolution de l'équation matricielle citée au-dessus nous a conduit au profil de vitesse dans les deux figures (1) et (2).



(Figure 1) : profile de vitesse - norme -



(figure 2) : profile de vitesse – vecteurs -

Il s'agit d'un profil parabolique. En effet, la vitesse du fluide est maximale au centre et elle diminue de part et d'autre de l'axe principal du tube. Il reste à préciser que le gradient de P est négatif car la pression diminue en parcourant la trachée du haut vers le bas.

Puisque on travail par un tube de dimension uniforme, alors ; la surface de sortie et entrée est invariant et aussi le profil de vitesse uniforme aussi. Ainsi ; le débit est constant. Donc, le profil de vitesse est correct

b. La trajectoire de la particule :

D'abord on détermine la vitesse de la particule par application du principe fondamentale de la dynamique :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{P}$$

Avec :

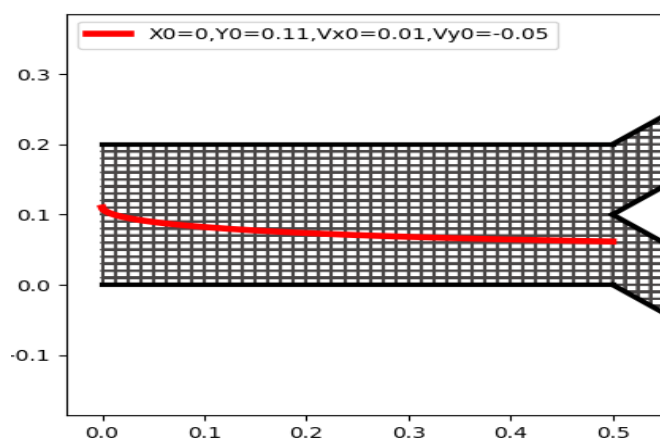
- \vec{F} la force des frottement fluide
- \vec{P} le poids de la particule qui sera négligé

Après la discrétisation de cette équation on obtient :

$$\vec{v}(t_{n+1}) = \vec{v}(t_n) + \frac{\Delta t}{m} \left[6\pi\eta \left(\vec{u}(\vec{x}_p(t_n)) - \vec{v}(t_n) \right) \right]$$

Le programme informatique qu'on a réalisé se base sur la détermination de la vitesse de la particule puis sa position en chaque point et à chaque instant, en utilisant la relation suivante :

$$\vec{x}_p(t_{n+1}) = \vec{x}_p(t_n) + \Delta t \cdot \vec{v}(t_n)$$



(Figure3)

Pour la réalisation du programme informatique, on considère une particule de forme sphérique, de rayon R , masse volumique ρ . On obtient le résultat présenté sur la figure ci-contre :

2-Cas général :

Dans ce cas, on aborde le cas réel, où le gradient de P n'est plus constant, en effet à partir des deux équations (2) et (3), on peut extraire trois équations majeures (deux équations qui résultent de la projection de l'équation de Stokes sur les deux axes (Ox) et (Oy), et l'équation de la divergence de la vitesse est nulle) sur lesquelles notre programme général sera basé.

2-1 La trachée :

a- La matrice générale :

➤ La vitesse du fluide

On utilisera la même méthode de discrétisation que dans le cas de Poiseuille.

On note ici qu'on effectuera aussi la discrétisation du gradient de p pour savoir la pression à chaque point de la grille.

On obtient les trois équations scalaires suivantes :

Projection de (2) suivant X :

$$-\frac{\delta_x}{2}(P(i_2) - P(i_4)) + \eta(u_x(i_1) + u_x(i_2) + r^2(u_x(i_3) + u_x(i_4)) - 2u_x(i_0)(r^2 + 1)) = 0$$

Projection de (2) suivant Y :

$$-r\frac{\delta_x}{2}(P(i_4) - P(i_3)) + \eta(u_y(i_1) + u_y(i_2) + r^2(u_y(i_3) + u_y(i_4)) - 2u_y(i_0)(r^2 + 1)) = 0$$

Divergence nulle : $u_x(i_2) - u_x(i_1) + r^1(u_y(i_4) - u_y(i_3)) = 0$

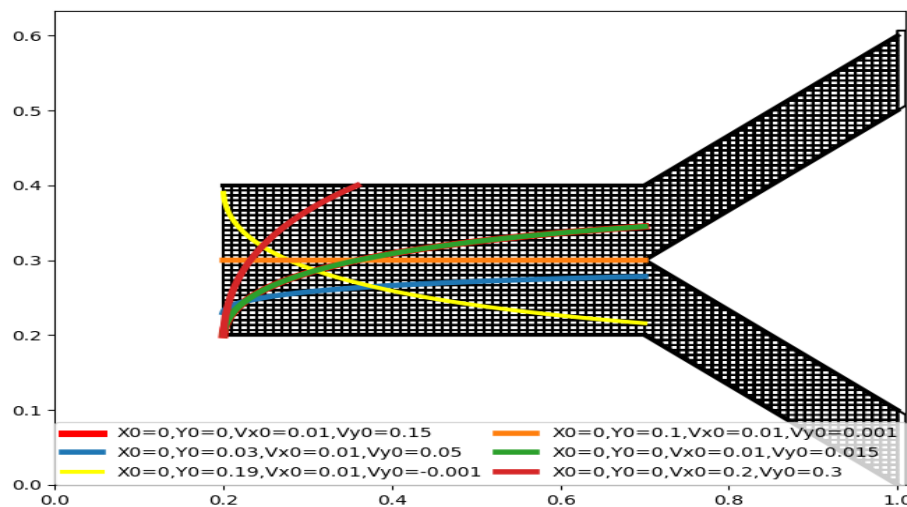
A l'aide de ces équations on a pu remplir la matrice \mathbf{M} générale qui concerne la trachée, cette dernière est de taille $3N$, avec N le nombre des points (ou de nœuds de la grille).

Quant aux conditions aux limites on a gardé les mêmes choisis pour le premiers cas (la matrice colonnes \mathbf{B} elle-même).

Enfin on a résolu le système matriciel qui nous donne en retour une matrice colonne contenant les u_x , u_y , vitesses du fluide, et la pression p .

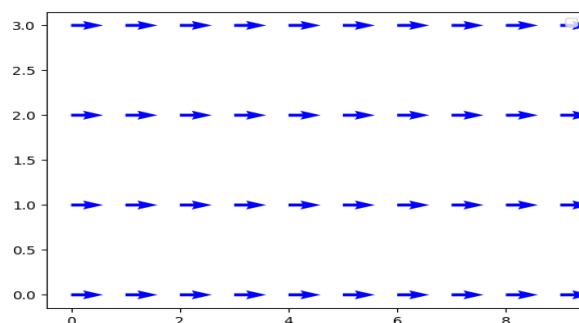
➤ La trajectoire de la particule :

On développe un programme qui sépare les deux vecteurs u_x et u_y chacun dans une matrice colonnes pour les implémenter dans le programme de la détermination de la trajectoire de la particule.



(figure4)

La carte d'écoulement le long de la trachée est donnée par la figure suivante :



(figure5)

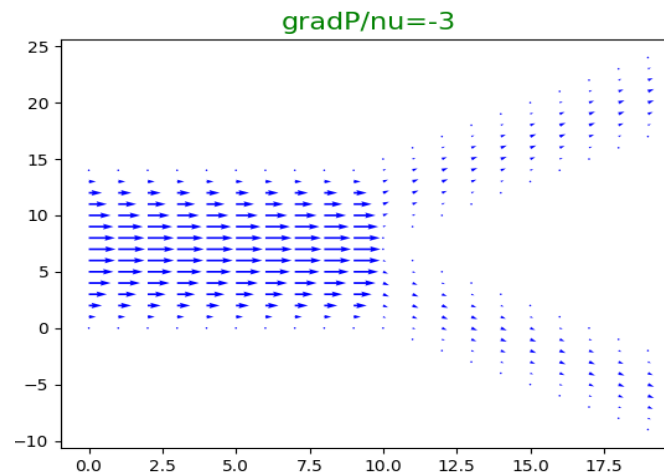
2-2-Bifurcation :

Il faut appliquer les mêmes programmes développés précédemment pour la bifurcation aussi, cependant, sa forme exige quelques modifications, cela sera explicité dans le paragraphe suivant :

On a considéré la bifurcation étant trois tubes, on a résolu l'équation de chacun et les a présentés dans la même figure.

On a implémenté les mêmes programmes de résolution qui nous donne la vitesse du fluide (cette fois dans la bifurcation aussi), de trajectoire des particules au sein de la bifurcation toute entière.

Les résultats sont les suivants :

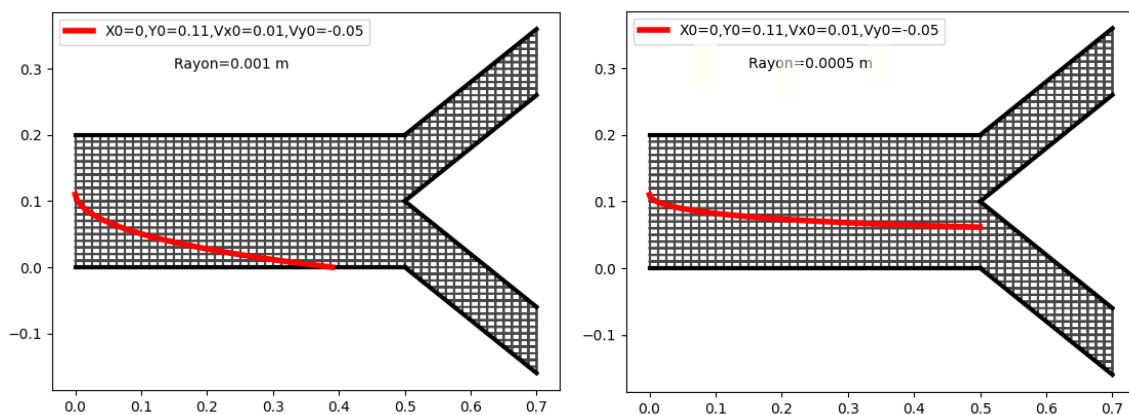


N.B : La vitesse au centre de la trachée reste maximale contrairement à la réalité car la méthode suivie pour trouver les carte d'écoulement ne nous permet pas de déterminer la vitesse en ce point.

3-Dépot des particules :

Le nombre de Stokes est défini comme suit :

$$S_t = \frac{\rho_p d_p^2 u}{18\eta D} = \frac{\rho_p}{18\eta} \cdot \left(\frac{d_p}{D}\right)^2 \cdot Re \quad (*)$$



(Figure 6) : Effet de changement de rayon

D'après les deux figures, on remarque que les gouttelettes ayant un grand rayon ont une grande probabilité de se déposer sur les parois. Alors que les gouttelettes de rayon plus petit ont une grande probabilité de continuer leur chemin. Alors, d'après (*) la probabilité de disposition des gouttelettes s'élève avec l'augmentation du rayon de la gouttelette, ce qu'entraîne l'augmentation du nombre de Stokes.

Conclusions

-Dans les deux cas étudiés et sous les hypothèses citées auparavant, nous avons obtenu le profil de Poiseuille.

-La trajectoire des particules change selon le nombre de Stokes et des vitesses initialement imposées.

-En réalité, l'écoulement n'est pas forcément laminaire. Les résultats obtenus ne peuvent donc pas être généralisés.

NB : -Les gaz sont généralement compressibles. Cependant, au niveau des poumons la température et la pression sont quasiment constantes, et par conséquent la masse volumique reste constante.

Annexe

On présente ci-joint tous les programmes python utilisés dans notre projet :

- [Programmes](#)

Bibliographie

- https://splf.fr/wp-content/uploads/2014/06/TraductionISAM-ERS2011_1_1.pdf
- https://fr.wikipedia.org/wiki/Gouttelette_respiratoire
- <http://www.ilocis.org/fr/documents/ilo010.htm>
- https://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/claude_saintblanquet/synophys/45meflu/45meflu.htm
- <https://www.youtube.com/watch?v=r4JI7wGjVhE>
- https://perso.limsi.fr/wietze/cours/MF/meca_flu_chap3.pdf
- https://elearning.emines.um6p.ma/pluginfile.php/25910/mod_resource/content/1/Biomedical-4.pdf
- https://elearning.emines.um6p.ma/pluginfile.php/25914/mod_resource/content/1/corpc_deposition.pdf
- https://cdn.radiofrance.fr/s3/cruiser-production/2018/05/1ad28977-3e28-45cd-8c68-1baefb66bdf9/870x489_gettyimages-57532864.jpg [1]
- https://www.asme.org/getmedia/86f7ec3b-0483-4660-bc59-b1fb061b0700/050520_computational-lung-model-may-guide-how-ventilators-are-usedlungs-3d_hero.jpg?width=920&height=720&ext=.jpg [2]