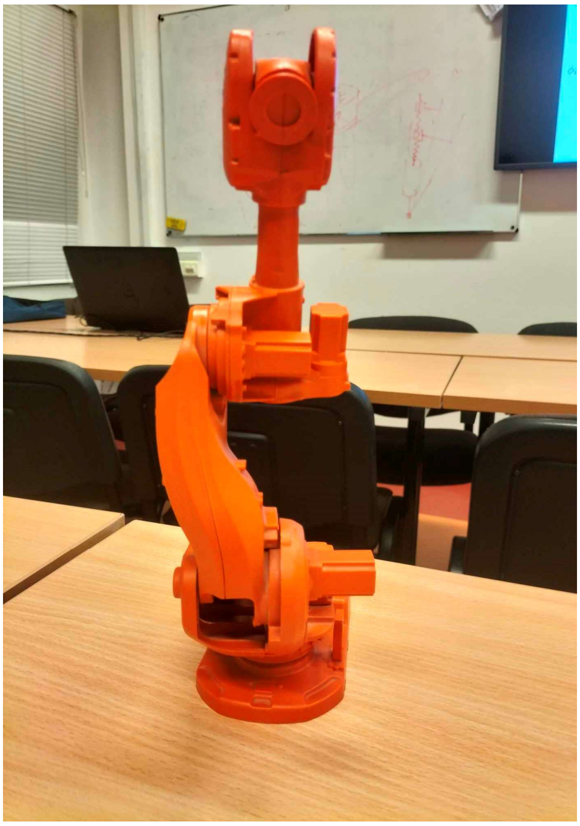
# Modelowanie i sterowanie robotów

# Projekt: Zadanie proste i odwrotne kinematyki

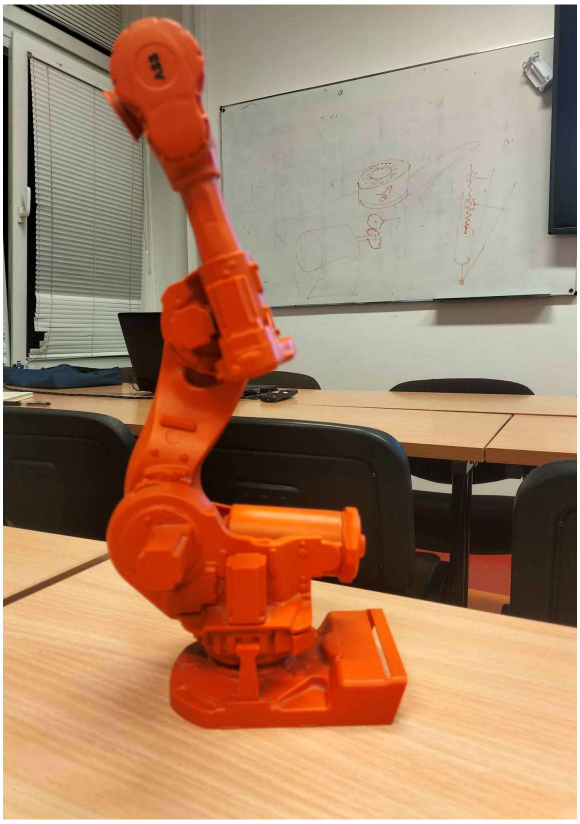
Marcin Przestrzelski

1. Model manipulatora

Badany jest 6-osiowy manipulator o strukturze otwartej.



*Rysunek 1. Model manipulatora – zdjęcie od boku*

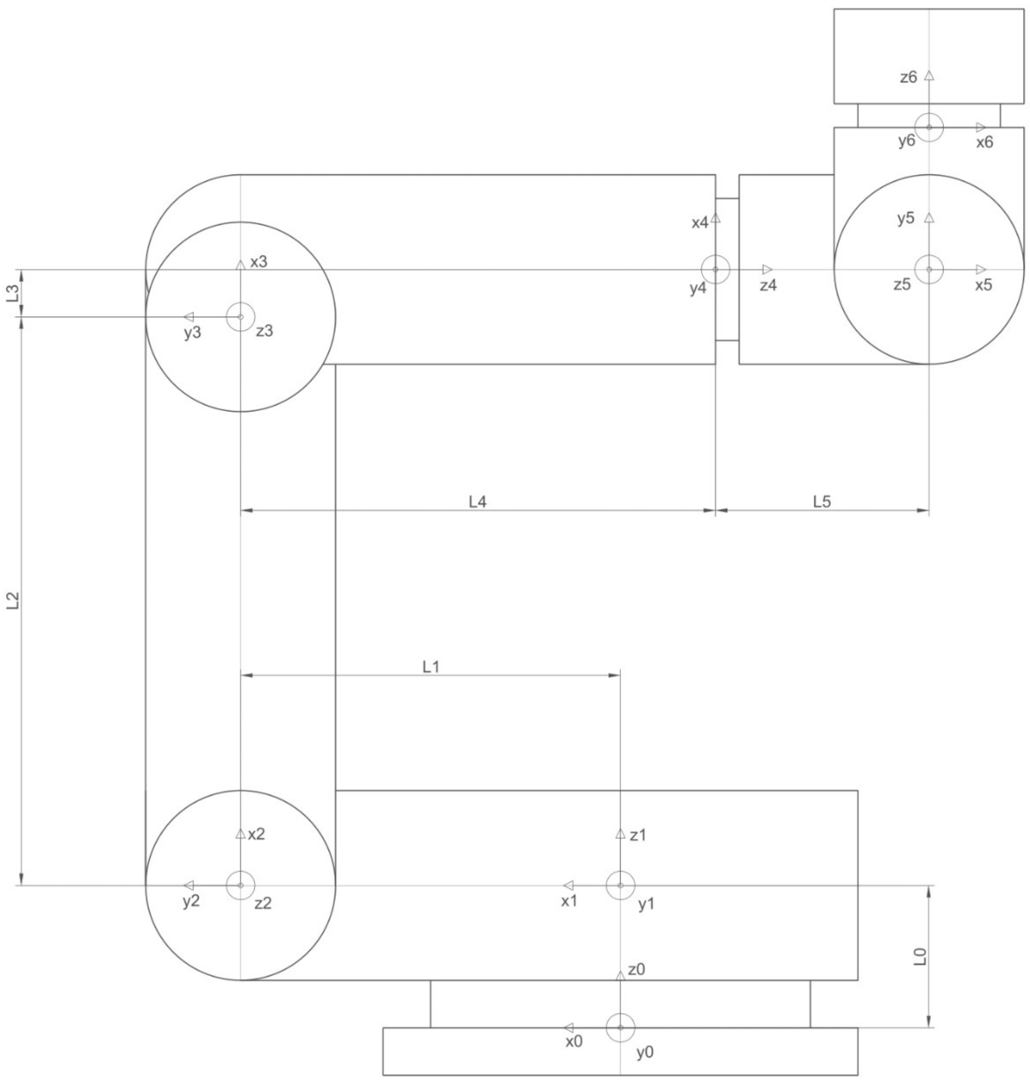


*Rysunek 2. Model manipulatora – zdjęcie od przodu*

Na podstawie uproszczonego modelu (Rys. 3) dobrano parametry Denavita-Hartenberga (Tabela 1).

| $i$ | $a_{i-1}$ | $\alpha_{i-1}$ | $d_i$ | $\theta_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | $\theta_1$ |
| 2 | $L_1$ | $-\frac{\pi}{2}$ | 0 | $\theta_2$ |
| 3 | $L_2$ | 0 | 0 | $\theta_3$ |
| 4 | $L_3$ | $\frac{\pi}{2}$ | $L_4$ | $\theta_4$ |
| 5 | 0 | $-\frac{\pi}{2}$ | 0 | $\theta_5$ |
| 6 | 0 | $-\frac{\pi}{2}$ | $L_6$ | $\theta_6$ |

*Tabela 1. Parametry Denavita-Hartenberga dla uproszczonego modelu manipulatora*




*Rysunek 3. Uproszczony schemat manipulatora z naniesionymi osiami układów współrzędnych i kluczowymi wymiarami*

2. Zadanie proste kinematyki

Zadanie proste kinematyki polega na wyznaczeniu macierzy przekształcenia ${}^{0}_{6}T$ znając zadane kąty na członach manipulatora $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6$.

Na podstawie parametrów D-H, wyznaczono macierze jednorodne.

Gdzie:

$$s_i = \sin\theta_i$$

$$c_i = \cos\theta_i$$

$$ {}^{i-1}_{i}T = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ s\theta_i c\alpha_{i-1} & c\theta_i c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & -d_i s\alpha_{i-1} \\ s\theta_i s\alpha_{i-1} & c\theta_i s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & d_i c\alpha_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$
{}_{1}^{0}T = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & a_0 \\ s\theta_1 c\alpha_0 & c\theta_1 c\alpha_0 & -s\alpha_0 & -d_1 s\alpha_0 \\ s\theta_1 s\alpha_0 & c\theta_1 s\alpha_0 & c\alpha_0 & d_1 c\alpha_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =
$$

$$
= \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & a_0 \\ s\theta_1 c0 & c\theta_1 c0 & -s0 & 0 * s0 \\ s\theta_1 s0 & c\theta_1 s0 & c0 & 0 * c0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =
$$

$$
= \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}_{2}^{1}T = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & a_1 \\ s\theta_2 c\alpha_1 & c\theta_2 c\alpha_1 & -s\alpha_1 & -d_2 s\alpha_1 \\ s\theta_2 s\alpha_1 & c\theta_2 s\alpha_1 & c\alpha_1 & d_2 c\alpha_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =
$$

$$
= \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & L_1 \\ s\theta_2 c\left(-\frac{\pi}{2}\right) & c\theta_2 c\left(-\frac{\pi}{2}\right) & -s\left(-\frac{\pi}{2}\right) & -0 * s\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ s\theta_2 s\left(-\frac{\pi}{2}\right) & c\theta_2 s\left(-\frac{\pi}{2}\right) & c\left(-\frac{\pi}{2}\right) & 0 * c\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =
$$

$$
= \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_2 & -c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}_{3}^{2}T = \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & a_2 \\ s\theta_3 c\alpha_2 & c\theta_3 c\alpha_2 & -s\alpha_2 & -d_3 s\alpha_2 \\ s\theta_3 s\alpha_2 & c\theta_3 s\alpha_2 & c\alpha_2 & d_3 c\alpha_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =
$$

$$
= \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & L_2 \\ s\theta_3 c0 & c\theta_3 c0 & -s0 & -0 * s0 \\ s\theta_3 s0 & c\theta_3 s0 & c0 & 0 * c0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =
$$

$$
= \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & L_2 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}_{4}^{3}T = \begin{bmatrix} c\theta_4 & -s\theta_4 & 0 & a_3 \\ s\theta_4 c\alpha_3 & c\theta_4 c\alpha_3 & -s\alpha_3 & -d_4 s\alpha_3 \\ s\theta_4 s\alpha_3 & c\theta_4 s\alpha_3 & c\alpha_3 & d_4 c\alpha_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =
$$

$$=\begin{bmatrix} c\theta_4 & -s\theta_4 & 0 & L_3 \\ s\theta_4 c\left(\frac{\pi}{2}\right) & c\theta_4 c\left(\frac{\pi}{2}\right) & -s\left(\frac{\pi}{2}\right) & -L_4 s\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ s\theta_4 s\left(\frac{\pi}{2}\right) & c\theta_4 s\left(\frac{\pi}{2}\right) & c\left(\frac{\pi}{2}\right) & L_4 c\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} c\theta_4 & -s\theta_4 & 0 & L_3 \\ 0 & 0 & -1 & -L_4 \\ s\theta_4 & c\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^4_5T=\begin{bmatrix} c\theta_5 & -s\theta_5 & 0 & a_4 \\ s\theta_5 c\alpha_4 & c\theta_5 c\alpha_4 & -s\alpha_4 & -d_5 s\alpha_4 \\ s\theta_5 s\alpha_4 & c\theta_5 s\alpha_4 & c\alpha_4 & d_5 c\alpha_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} c\theta_5 & -s\theta_5 & 0 & 0 \\ s\theta_5 c\left(-\frac{\pi}{2}\right) & c\theta_5 c\left(-\frac{\pi}{2}\right) & -s\left(-\frac{\pi}{2}\right) & -0 * s\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ s\theta_5 s\left(-\frac{\pi}{2}\right) & c\theta_5 s\left(-\frac{\pi}{2}\right) & c\left(-\frac{\pi}{2}\right) & 0 * c\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} c\theta_5 & -s\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_5 & -c\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^5_6T=\begin{bmatrix} c\theta_6 & -s\theta_6 & 0 & a_5 \\ s\theta_6 c\alpha_5 & c\theta_6 c\alpha_5 & -s\alpha_5 & -d_6 s\alpha_5 \\ s\theta_6 s\alpha_5 & c\theta_6 s\alpha_5 & c\alpha_5 & d_6 c\alpha_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} c\theta_6 & -s\theta_6 & 0 & 0 \\ s\theta_6 c\left(-\frac{\pi}{2}\right) & c\theta_6 c\left(-\frac{\pi}{2}\right) & -s\left(-\frac{\pi}{2}\right) & -0 * s\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ s\theta_6 s\left(-\frac{\pi}{2}\right) & c\theta_6 s\left(-\frac{\pi}{2}\right) & c\left(-\frac{\pi}{2}\right) & 0 * c\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} c\theta_6 & -s\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_6 & -c\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Przez to, że macierze zyskały na objętości i ze względu na pozbycie się kątów α, dokonano kolejnego uproszczenia notacji:

$$s\theta_i = s_i$$

$$c\theta_i = c_i$$

Proste zadanie kinematyki rozwiązuje się przez wyznaczenie macierzy przekształcenia z punkty *0*, do punktu końcowego *6* (członu szóstego).

$$ {}^{0}_{6}T = {}^{0}_{1}T\ {}^{1}_{2}T\ {}^{2}_{3}T\ {}^{3}_{4}T\ {}^{4}_{5}T\ {}^{5}_{6}T $$

Obliczenia zostały wykonane przy pomocy programu *SageMath 10.4*. Program został przedstawiony w listingu (Listing 1).

Do dalszych obliczeń przydatne będą macierze pośrednie. Dlatego obliczenia miały następujący przebieg:

$$ {}^{1}_{3}T = {}^{1}_{2}T\ {}^{2}_{3}T $$

$$ {}^{1}_{4}T = {}^{1}_{3}T\ {}^{3}_{4}T $$

$$ {}^{1}_{5}T = {}^{1}_{4}T\ {}^{4}_{5}T $$

$$ {}^{1}_{6}T = {}^{1}_{5}T\ {}^{5}_{6}T $$

$$ {}^{0}_{6}T = {}^{0}_{1}T\ {}^{1}_{6}T $$

$$ \begin{pmatrix} c_2c_3 - s_2s_3 & -c_3s_2 - c_2s_3 & 0 & L_2c_2 + L_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -c_3s_2 - c_2s_3 & -c_2c_3 + s_2s_3 & 0 & -L_2s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

*Macierz* ${}^{1}_{3}T$

$$ \begin{pmatrix} (c_2c_3 - s_2s_3)c_4 & -(c_2c_3 - s_2s_3)s_4 & c_3s_2 + c_2s_3 & (c_3s_2 + c_2s_3)L_4 + L_2c_2 + L_1 \\ s_4 & c_4 & 0 & 0 \\ -(c_3s_2 + c_2s_3)c_4 & (c_3s_2 + c_2s_3)s_4 & c_2c_3 - s_2s_3 & (c_2c_3 - s_2s_3)L_4 - L_2s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

*Macierz* ${}^{1}_{4}T$

$$ \begin{pmatrix} (c_2c_3 - s_2s_3)c_4c_5 - (c_3s_2 + c_2s_3)s_5 & -(c_2c_3 - s_2s_3)c_4s_5 - (c_3s_2 + c_2s_3)c_5 & -(c_2c_3 - s_2s_3)s_4 & (c_3s_2 + c_2s_3)L_4 + L_2c_2 + L_1 \\ c_5s_4 & -s_4s_5 & c_4 & 0 \\ -(c_3s_2 + c_2s_3)c_4c_5 - (c_2c_3 - s_2s_3)s_5 & (c_3s_2 + c_2s_3)c_4s_5 - (c_2c_3 - s_2s_3)c_5 & (c_3s_2 + c_2s_3)s_4 & (c_2c_3 - s_2s_3)L_4 - L_2s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

*Macierz* ${}^{1}_{5}T$

$$ \begin{pmatrix} (c_2c_3 - s_2s_3)s_4s_6 + ((c_2c_3 - s_2s_3)c_4c_5 - (c_3s_2 + c_2s_3)s_5)c_6 & (c_2c_3 - s_2s_3)c_6s_4 - ((c_2c_3 - s_2s_3)c_4c_5 - (c_3s_2 + c_2s_3)s_5)s_6 & -(c_2c_3 - s_2s_3)c_4s_5 - (c_3s_2 + c_2s_3)c_5 & (c_3s_2 + c_2s_3)L_4 + L_2c_2 + L_1 \\ c_5c_6s_4 - c_4s_6 & -c_5s_4s_6 - c_4c_6 & -s_4s_5 & 0 \\ -(c_3s_2 + c_2s_3)s_4s_6 - ((c_3s_2 + c_2s_3)c_4c_5 + (c_2c_3 - s_2s_3)s_5)c_6 & -(c_3s_2 + c_2s_3)c_6s_4 + ((c_3s_2 + c_2s_3)c_4c_5 + (c_2c_3 - s_2s_3)s_5)s_6 & (c_3s_2 + c_2s_3)c_4s_5 - (c_2c_3 - s_2s_3)c_5 & (c_2c_3 - s_2s_3)L_4 - L_2s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

*Macierz* ${}^{1}_{6}T$

$$ \begin{pmatrix} ((c_2c_3 - s_2s_3)s_4s_6 + ((c_2c_3 - s_2s_3)c_4c_5 - (c_3s_2 + c_2s_3)s_5)c_6)c_1 - (c_5c_6s_4 - c_4s_6)s_1 & ((c_2c_3 - s_2s_3)c_6s_4 - ((c_2c_3 - s_2s_3)c_4c_5 - (c_3s_2 + c_2s_3)s_5)s_6)c_1 + (c_5s_4s_6 + c_4c_6)s_1 & s_1s_4s_5 - ((c_2c_3 - s_2s_3)c_4s_5 + (c_3s_2 + c_2s_3)c_5)c_1 & ((c_3s_2 + c_2s_3)L_4 + L_2c_2 + L_1)c_1 \\ (c_5c_6s_4 - c_4s_6)c_1 + ((c_2c_3 - s_2s_3)s_4s_6 + ((c_2c_3 - s_2s_3)c_4c_5 - (c_3s_2 + c_2s_3)s_5)c_6)s_1 & -(c_5s_4s_6 + c_4c_6)c_1 + ((c_2c_3 - s_2s_3)c_6s_4 - ((c_2c_3 - s_2s_3)c_4c_5 - (c_3s_2 + c_2s_3)s_5)s_6)s_1 & -c_1s_4s_5 - ((c_2c_3 - s_2s_3)c_4s_5 + (c_3s_2 + c_2s_3)c_5)s_1 & ((c_3s_2 + c_2s_3)L_4 + L_2c_2 + L_1)s_1 \\ -(c_3s_2 + c_2s_3)s_4s_6 - ((c_3s_2 + c_2s_3)c_4c_5 + (c_2c_3 - s_2s_3)s_5)c_6 & -(c_3s_2 + c_2s_3)c_6s_4 + ((c_3s_2 + c_2s_3)c_4c_5 + (c_2c_3 - s_2s_3)s_5)s_6 & (c_3s_2 + c_2s_3)c_4s_5 - (c_2c_3 - s_2s_3)c_5 & (c_2c_3 - s_2s_3)L_4 - L_2s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

*Macierz* ${}^{0}_{6}T$

3. Zadanie odwrotne kinematyki

Rozwiązanie zadania odwrotnego kinematyki polega na wyznaczeniu kątów $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6$, znając zadaną pacierz punktu końcowego ${}^{0}_{6}T_d$.

$$ {}^{0}_{6}T_d = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Do obliczania kinematyki odwrotnej wykorzystano macierz pośrednią ${}^{1}_{6}T$ .

$$ {}^{1}_{6}T \ = ({}^{0}_{1}T\ )^{-1}\,{}^{0}_{6}T_{\ d} $$

$$ ({}^{0}_{1}T\ )^{-1} = \begin{bmatrix} c_1 & s_1 & 0 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Podstawiając:

$$ ({}^{0}_{1}T\ )^{-1}\,{}^{0}_{6}T_{\ d} = \begin{bmatrix} c_1 & s_1 & 0 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = $$

$$ = \begin{bmatrix} c_1 r_{11} + s_1 r_{21} & c_1 r_{12} + s_1 r_{22} & c_1 r_{13} + s_1 r_{23} & c_1 p_x + s_1 p_y \\ c_1 r_{21} - s_1 r_{11} & c_1 r_{22} - s_1 r_{12} & c_1 r_{23} - s_1 r_{13} & c_1 p_y - s_1 p_x \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Przyrównując elementy macierzy $({}^{0}_{1}T\ )^{-1}\,{}^{0}_{6}T_{\ d}$ z ${}^{1}_{6}T$ obliczono kolejne kąty $\theta_i$.

- $\theta_1$:

Przyrównano punkt (2,4):

$$ c_1 p_y - s_1 p_x = 0 $$

$$ \frac{s_1}{c_1} = \frac{p_y}{p_x} $$

$$ \tan\theta_1 = \frac{p_y}{p_x} $$

$$ \boldsymbol{\theta_1 = \mathbf{arctan}\frac{p_y}{p_x}} $$

- $\theta_2$:

Przyrównano punkty (1,4) i (3,4) otrzymując układ równań:

$$ \begin{cases} L_1 + L_2 c_2 + L_4(s_2 c_3 + c_2 s_3) = c_1 p_x + p_y s_1 \\ -s_2 L_2 + L_4(c_2 c_3 - s_2 s_3) = p_z \end{cases} $$

Złączono funkcje trygonometryczne kątów $\theta_2$ i $\theta_3$.

$$ s_2 c_3 + c_2 s_3 \ = \sin(\theta_2 + \theta_3) = s_{23} $$

$$ c_2 c_3 - s_2 s_3 \ = \cos(\theta_2 + \theta_3) = c_{23} $$

Następnie zamieniono funkcje stronami:

$$ \begin{cases} L_4 s_{23} = c_1 p_x + p_y s_1 - L_1 - L_2 c_2 \\ L_4 c_{23} = p_z + s_2 L_2 \end{cases} $$

Podstawiono, a następnie podniesiono obie funkcje do kwadratu

$$ A = c_1 p_x + p_y s_1 - L_1 $$

$$ \begin{cases} (L_4 s_{23})^2 = (A - L_2 c_2)^2 \\ (L_4 c_{23})^2 = (p_z + s_2 L_2)^2 \end{cases} $$

$$\begin{cases} {L_4}^2{s_{23}}^2 = A^2 - 2AL_2c_2 + {L_2}^2{c_2}^2 \\ {L_4}^2{c_{23}}^2 = {p_z}^2 + 2p_zL_2s_2 + {L_2}^2{s_2}^2 \end{cases}$$

Dodając do siebie oba równania i grupując otrzymano:

$${L_4}^2({s_{23}}^2 + {c_{23}}^2) = 2L_2(p_zs_2 - Ac_2) + {L_2}^2({s_2}^2 + {c_2}^2) + A^2 + {p_z}^2$$

Upraszczając a następnie przekształcając:

$${L_4}^2 = 2L_2(p_zs_2 - Ac_2) + {L_2}^2 + A^2 + {p_z}^2$$

$$Ac_2 - p_zs_2 = \frac{{L_2}^2 + A^2 + {p_z}^2 - {L_4}^2}{2L_2}$$

Aby rozwiązać to równanie wprowadzono współrzędne biegunowe:

$$p_z = \lambda \sin \xi$$

$$A = \lambda \cos \xi$$

$$\lambda = \sqrt[2]{{p_z}^2 + A^2}$$

$$\xi = \arctan\left(\frac{p_z}{A}\right)$$

$$\lambda c_2 \cos \xi - \lambda s_2 \sin \xi = \frac{{L_2}^2 + A^2 + {p_z}^2 - {L_4}^2}{2L_2}$$

$$\lambda \cos(\xi + \theta_2) = \frac{{L_2}^2 + A^2 + {p_z}^2 - {L_4}^2}{2L_2}$$

Przyrównano znane zmienne:

$$\frac{{L_2}^2 + A^2 + {p_z}^2 - {L_4}^2}{2L_2\lambda} = B$$

$$\cos(\xi + \theta_2) = B$$

Przekształcamy to równanie tak aby otrzymać kąt $\theta_2$.

$$1 - (\cos(\xi + \theta_2))^2 = 1 - B^2$$

$$\sin(\xi + \theta_2) = \pm\sqrt{1 - B^2}$$

$$\tan(\xi + \theta_2) = \frac{\pm\sqrt{1 - B^2}}{B}$$

$$\xi + \theta_2 = \arctan\left(\frac{\pm\sqrt{1 - B^2}}{B}\right)$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\lambda = \sqrt[2]{{p_z}^2 + \left(c_1p_x + p_ys_1 - L_1\right)^2}} \\ \boldsymbol{B = \frac{{L_2}^2 + \left(c_1p_x + p_ys_1 - L_1\right)^2 + {p_z}^2 - {L_4}^2}{2L_2\lambda}} \\ \boldsymbol{\theta_2 = \arctan\left(\frac{\pm\sqrt{1 - B^2}}{B}\right) - \arctan\left(\frac{p_z}{A}\right)} \end{cases}$$

- $\theta_3$:

Wracając do punktu (3,4):

$$-s_2L_2 + L_4(c_2c_3 - s_2s_3) = p_z$$

$$-s_2L_2 + L_4c_{23} = p_z$$

$$c_{23} = \frac{p_z + s_2L_2}{L_4}$$

Podstawiając

$$\frac{p_z + s_2L_2}{L_4} = C$$

$$c_{23} = C$$

$$\tan(\theta_2 + \theta_3) = \frac{C}{\pm\sqrt{1 - C^2}}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{C = \frac{p_z + s_2L_2}{L_4}} \\ \boldsymbol{\theta_3 = \arctan\left(\frac{C}{\pm\sqrt{1 - C^2}}\right) - \theta_2} \end{cases}$$

- $\theta_4 \ i \ \theta_5$:

Przyrównując punkty (1,3) i (3,3):

$$-s_2L_2 + L_4(c_2c_3 - s_2s_3)$$

$$\begin{cases} -(c_2c_3 - s_2s_3)c_4s_5 - (s_2c_3 + c_2s_3)c_5 = c_1r_{13} + s_1r_{23} \\ -(s_2c_3 + c_2s_3)c_4s_5 - (c_2c_3 - s_2s_3)c_5 = r_{33} \end{cases}$$

Łącząc funkcje trygonometryczne kątów $\theta_2$ i $\theta_3$.

$$\begin{cases} -c_{23}c_4s_5 - s_{23}c_5 = c_1r_{13} + s_1r_{23} \\ -s_{23}c_4s_5 - c_{23}c_5 = r_{33} \end{cases}$$

Podstawiono:

$$D = c_1r_{13} + s_1r_{23}$$

$$\begin{cases} -c_{23}c_4s_5 - s_{23}c_5 = D \\ -s_{23}c_4s_5 - c_{23}c_5 = r_{33} \end{cases}$$

Wyznaczając z pierwszego równania, a następnie podstawiając:

$$\begin{cases} c_4 = \frac{-D - s_{23}c_5}{c_{23}s_5} \\ -s_{23}c_4s_5 - c_{23}c_5 = r_{33} \end{cases}$$

$$s_{23}\frac{-D - s_{23}c_5}{c_{23}s_5}s_5 - c_{23}c_5 = r_{33}$$

$$-s_{23}\frac{D + s_{23}c_5}{c_{23}} - c_{23}c_5 = r_{33}$$

Wyznaczając $c_5$:

$$-\frac{s_{23}D}{c_{23}}-\frac{{s_{23}}^2}{c_{23}}c_5-c_{23}c_5=r_{33}$$

$$c_5\left(-\frac{{s_{23}}^2}{c_{23}}-c_{23}\right)=r_{33}+\frac{s_{23}D}{c_{23}}$$

$$c_5=\frac{r_{33}+\frac{s_{23}D}{c_{23}}}{-\frac{{s_{23}}^2}{c_{23}}-c_{23}}$$

Upraszczając:

$$c_5=\frac{\frac{r_{33}c_{23}+s_{23}D}{c_{23}}}{-\frac{{s_{23}}^2+{c_{23}}^2}{c_{23}}}$$

$$c_5=\frac{r_{33}c_{23}+s_{23}D}{-1}$$

$$c_5=-r_{33}c_{23}-s_{23}D$$

Analogicznie do poprzednich kątów wyznaczono $\theta_5$:

$$s_5=\pm\sqrt{1^2-(-r_{33}c_{23}-s_{23}D)^2}$$

$$\tan\theta_5=\frac{\pm\sqrt{1^2-(-r_{33}c_{23}-s_{23}D)^2}}{-r_{33}c_{23}-s_{23}D}$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{D=c_1r_{13}+s_1r_{23}}\\ \boldsymbol{\theta_5=\mathbf{arctan}\left(\frac{\pm\sqrt{1^2-(r_{33}c_{23}+s_{23}D)^2}}{-r_{33}c_{23}-s_{23}D}\right)}\end{cases}$$

Następnie wyznaczono $\theta_4$ na podstawie wyznaczonego $\theta_5$:

$$c_4=\frac{-D-s_{23}c_5}{c_{23}s_5}$$

$$\boldsymbol{\theta_4=\mathbf{arctan}\left(\frac{\pm\sqrt{1^2-\left(\frac{-D-s_{23}c_5}{c_{23}s_5}\right)^2}}{\frac{-D-s_{23}c_5}{c_{23}s_5}}\right)}$$

- $\theta_6$:

Przyrównując punkt (2,1):

$$c_1r_{21}-s_1r_{11}=c_5c_6s_4-c_4s_6$$

Wprowadzono współrzędne biegunowe:

$$c_4=\omega\sin\varphi$$

$$c_5 s_4 = \omega \cos\varphi$$

$$\omega = \sqrt[2]{{c_5}^2 {s_4}^2 + {c_4}^2}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{c_4}{c_5 s_4}\right)$$

$$\omega c_2 \cos\varphi - \omega s_2 \sin\varphi = c_1 r_{21} - s_1 r_{11}$$

$$\omega \cos(\varphi + \theta_6) = c_1 r_{21} - s_1 r_{11}$$

$$\cos(\varphi + \theta_6) = \frac{c_1 r_{21} - s_1 r_{11}}{\omega}$$

$$\cos\left(\arctan\left(\frac{c_4}{c_5 s_4}\right) + \theta_6\right) = \frac{c_1 r_{21} - s_1 r_{11}}{\sqrt[2]{{c_5}^2 {s_4}^2 + {c_4}^2}}$$

$$\arctan\left(\frac{c_4}{c_5 s_4}\right) + \theta_6 = \arctan\left(\frac{\pm\sqrt{1^2 - \left(\frac{c_1 r_{21} - s_1 r_{11}}{\sqrt[2]{{c_5}^2 {s_4}^2 + {c_4}^2}}\right)^2}}{\frac{c_1 r_{21} - s_1 r_{11}}{\sqrt[2]{{c_5}^2 {s_4}^2 + {c_4}^2}}}\right)$$

$$\boldsymbol{\theta_6 = \arctan\left(\frac{\pm\sqrt{1^2 - \left(\frac{c_1 r_{21} - s_1 r_{11}}{\sqrt[2]{{c_5}^2 {s_4}^2 + {c_4}^2}}\right)^2}}{\frac{c_1 r_{21} - s_1 r_{11}}{\sqrt[2]{{c_5}^2 {s_4}^2 + {c_4}^2}}}\right) - \arctan\left(\frac{c_4}{c_5 s_4}\right)}$$

Ostateczny wynika to:

$$\boldsymbol{\theta_1 = \arctan\frac{p_y}{p_x}}$$

$$\boldsymbol{\lambda = \sqrt[2]{{p_z}^2 + \left(c_1 p_x + p_y s_1 - L_1\right)^2}}$$

$$\boldsymbol{B = \frac{{L_2}^2 + \left(c_1 p_x + p_y s_1 - L_1\right)^2 + {p_z}^2 - {L_4}^2}{2 L_2 \lambda}}$$

$$\boldsymbol{\theta_2 = \arctan\left(\frac{\pm\sqrt{1 - B^2}}{B}\right) - \arctan\left(\frac{p_z}{A}\right)}$$

$$\boldsymbol{C = \frac{p_z + s_2 L_2}{L_4}}$$

$$\boldsymbol{\theta_3 = \arctan\left(\frac{C}{\pm\sqrt{1 - C^2}}\right) - \theta_2}$$

$$\boldsymbol{D = c_1 r_{13} + s_1 r_{23}}$$

$$\boldsymbol{\theta_5} = \mathbf{arctan}\left(\frac{\pm\sqrt{1^2-(r_{33}c_{23}+s_{23}D)^2}}{-r_{33}c_{23}-s_{23}D}\right)$$

$$\boldsymbol{\theta_4} = \mathbf{arctan}\left(\frac{\pm\sqrt{1^2-\left(\frac{-D-s_{23}c_5}{c_{23}s_5}\right)^2}}{\frac{-D-s_{23}c_5}{c_{23}s_5}}\right)$$

$$\boldsymbol{\theta_6} = \mathbf{arctan}\left(\frac{\pm\sqrt{1^2-\left(\frac{c_1r_{21}-s_1r_{11}}{\sqrt[2]{c_5{}^2s_4{}^2+c_4{}^2}}\right)^2}}{\frac{c_1r_{21}-s_1r_{11}}{\sqrt[2]{c_5{}^2s_4{}^2+c_4{}^2}}}\right) - \mathbf{arctan}\left(\frac{c_4}{c_5s_4}\right)$$

Listing 1

```
var('c1 s1')
var('c2 s2')
var('c3 s3')
var('c4 s4')
var('c5 s5')
var('c6 s6')
var('L1')
var('L2')
var('L3')
var('L4')
var('L5')
var('L6')
A1 = matrix([[c1,-1*s1,0,0] ,[s1,c1,0,0] ,[0,0,1,0] ,[0,0,0,1]])
A2 = matrix([[c2,-1*s2,0,L1],[0,0,1,0] ,[-s2,-c2,0,0],[0,0,0,1]])
A3 = matrix([[c3,-1*s3,0,L2],[s3,c3,0,0] ,[0,0,1,0] ,[0,0,0,1]])
A4 = matrix([[c4,-1*s4,0,0] ,[0,0,-1,-L4],[s4,c4,0,0] ,[0,0,0,1]])
A5 = matrix([[c5,-1*s5,0,0] ,[0,0,1,0] ,[-s5,-c5,0,0],[0,0,0,1]])
A6 = matrix([[c6,-1*s6,0,0] ,[0,0,1,0] ,[-s6,-c6,0,0],[0,0,0,1]])
w1=A2*A3
w2=w1*A4
w3=w2*A5
w4=w3*A6
w5=A1*w4
pretty_print(w1)
pretty_print(w2)
pretty_print(w3)
pretty_print(w4)
pretty_print(w5)
```