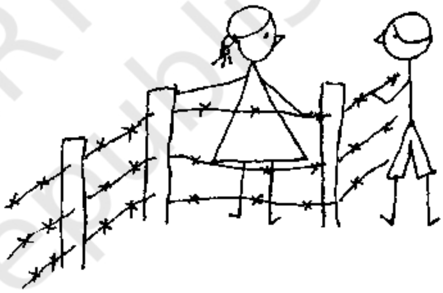
परिशिष्ट 1

गणित में उपपत्तियाँ

A1.1 भूमिका



मान लीजिए आपके परिवार के पास एक भूखंड है, परन्तु उसके चारों ओर कोई बाड़ (fence) नहीं बनी है। एक दिन आपके पड़ोसी ने अपने भूखंड के चारों ओर बाड़ (fence) बनाने का निर्णय लिया। जब पड़ोसी ने बाड़ बना ली, तब आपको पता चला कि बाड़ के अंदर आपके परिवार के भूखंड का कुछ भाग चला गया है। आप अपने पड़ोसी को कैसे सिद्ध करेंगे कि उसने आपके भूखंड के कुछ भाग पर कब्जा करने की कोशिश की है। इस संबंध में आपका पहला काम परिसीमा वाले विवाद को सुलझाने के लिए गाँव के बुजर्गों से सहायता लेना हो सकता है। परन्तु, मान लीजिए कि इस मामले में बुजुर्गों के अलग-अलग मत हैं। कुछ बुजुर्ग आपके दावे को सही मानते हैं और कुछ आपके पड़ोसी के दावे को सही मानते हैं। तब, ऐसी स्थिति में आप क्या करेंगे? इस संबंध में आपके सामने केवल यही विकल्प रह जाता है कि अपने भूखंड की परिसीमाओं पर अपने दावे को स्थापित करने के लिए आप एक ऐसी विधि निकालें जो कि सभी को स्वीकार्य हो। उदाहरण के लिए, अपने दावे को सही सिद्ध करने और अपने पड़ोसी के दावे को गलत सिद्ध करने के लिए, आप यदि आवश्यक हुआ तो न्यायालय में, सरकार द्वारा अनुमोदित अपने गाँव के सर्वेक्षण मानचित्र का प्रयोग कर सकते हैं।

आइए अब हम एक अन्य स्थिति पर विचार करें। मान लीजिए आपकी माँ ने अगस्त महीने, 2005 का घर की बिजली के बिल का भुगतान कर दिया है। परन्तु सितंबर, 2005 के बिल में यह दर्शाया गया है कि अगस्त के बिल का भुगतान नहीं किया गया है। बिजली विभाग द्वारा किए गए इए दावे को आप किस प्रकार गलत सिद्ध करेंगे? इसके लिए आपको भुगतान बिल रसीद प्रस्तुत करनी होगी, जो यह सिद्ध कर देगी कि अगस्त महीने के बिल का भुगतान किया जा चुका है।

ऊपर के उदाहरणों से यह पता चलता है कि हमें अपने दैनिक जीवन में प्राय: यह सिद्ध करना होता है कि अमुक कथन या दावा सत्य है या असत्य। फिर भी, ऐसे अनेक कथन होते हैं जिन्हें सिद्ध किए बिना ही हम स्वीकार कर लेते हैं। परन्तु, गणित में हम किसी कथन को सत्य या असत्य केवल तभी स्वीकार करते हैं (कुछ अभिगृहीतों को छोड़कर) जब गणित के तर्क के अनुसार इस कथन को सिद्ध कर दिया गया हो।

वस्तुत:, गणित में उपपत्तियों का अस्तित्व हजारों वर्षों से रहा है और ये गणित की किसी भी शाखा के केंद्र होती हैं। ऐसा विश्वास किया जाता है कि पहली ज्ञात उपपत्ति (proof) एक यूनानी दार्शनिक और गणितज्ञ थेल्स ने प्रस्तुत की थी। यूँ तो मेसोपोटामिया, मिस्र, चीन और भारत जैसी अनेक प्राचीन सभ्यताओं में गणित केंद्रित है, फिर भी इस बात का कोई स्पष्ट प्रमाण नहीं मिलता है कि उन्होंने उपपत्तियों का प्रयोग उस प्रकार किया था जिस प्रकार आज हम करते हैं।

इस अध्याय में, हम देखेंगे कि कथन क्या होते हैं, गणित में किस प्रकार तर्क दिया जाता है और एक गणितीय उपपत्ति में क्या-क्या अवयव निहित होते हैं।

A1.2 गणितीय रूप से स्वीकार्य कथन

इस अनुच्छेद में, हम गणितीय रूप से स्वीकार्य कथन (mathematically acceptable statement) के अर्थ की व्याख्या करने का प्रयास करेंगे। 'कथन' वह वाक्य है जो न तो आदेश सूचक वाक्य होता है और न ही विस्मयादि बोधक (exclamatry) वाक्य। नि:संदेह, कथन एक प्रश्न भी नहीं है! उदाहरण के लिए,

"आपके बालों का रंग क्या है?" यह एक कथन नहीं है। यह एक प्रश्न है।

"कृपया जाइए और मेरे लिए पानी लाइए" एक अनुरोध या एक आदेश है। यह एक कथन नहीं है।

"कितना मनमोहक सूर्यास्त है !" एक *विस्मयादि बोधक* टिप्पणी है। यह एक कथन नहीं है।

फिर भी, "आपके बालों का रंग काला है" एक कथन है।

सामान्यत:, कथन निम्नलिखित प्रकारों में से एक हो सकता है:

- *सदैव सत्य* (*always true*)
- *सदैव असत्य* (*always false*)
- *संदिग्ध* (*ambiguous*)

यहाँ शब्द "संदिग्ध" की कुछ व्याख्या कर देना आवश्यक है। ऐसी दो स्थितियाँ होती हैं जिनसे कथन संदिग्ध बन जाता है। पहली स्थिति तो वह होती है जबकि हम यह निर्णय नहीं ले पाते कि कथन सदैव सत्य है या सदैव असत्य है। उदाहरण के लिए, "कल गुरुवार है" संदिग्ध है, क्योंकि संदर्भ में इतना कुछ नहीं बताया गया है, जिससे हम यह निर्णय ले सकें कि कथन सत्य है या असत्य।

संदिग्धता की दूसरी स्थिति तब उत्पन्न होती है जब कथन व्यक्तिपरक (subjective) होता है। अर्थात् कुछ व्यक्तियों के लिए यह सत्य होता है और अन्य व्यक्तियों के लिए असत्य होता है। उदाहरण के लिए, "कुत्ते बुद्धिमान होते हैं" संदिग्ध कथन है, क्योंकि कुछ लोग इसे सत्य मानते हैं और कुछ इसे सत्य नहीं मानते हैं।

उदाहरण 1 : बताइए कि निम्न कथनों में कौन-कौन से कथन सदैव सत्य हैं, सदैव असत्य हैं या संदिग्ध हैं। अपने उत्तर की कारण सहित पुष्टि कीजिए।

(i) एक सप्ताह में आठ दिन होते हैं।

(ii) यहाँ वर्षा हो रही है।

(iii) पश्चिम में सूर्यास्त होता है।

(iv) गौरी एक दयालु लड़की है।

(v) दो विषम पूर्णांकों का गुणनफल सम होता है।

(vi) दो सम प्राकृत संख्याओं का गुणनफल सम होता है।

हल :

(i) कथन सदैव असत्य है, क्योंकि एक सप्ताह में 7 दिन होते हैं।

(ii) यह कथन संदिग्ध है, क्योंकि यह स्पष्ट नहीं है कि यहाँ कहाँ है।

(iii) कथन सदैव सत्य है। हम कहीं भी रहते हों, सूर्यास्त पश्चिम में ही होता है।

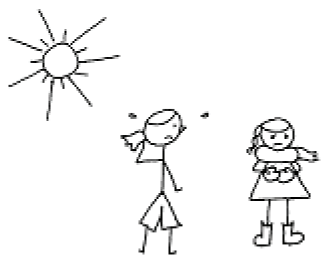
(iv) कथन संदिग्ध है, क्योंकि यह व्यक्तिपरक है। कुछ लोगों के लिए गौरी दयालु हो सकती है और अन्य लोगों के लिए नहीं।

(v) कथन सदैव असत्य है। दो विषम पूर्णांकों का गुणनफल सदैव विषम होता है।

(vi) यह कथन सदैव सत्य है। फिर भी इस बात की पुष्टि करने के लिए कि यह सत्य है, हमें कुछ और करने की आवश्यकता होगी। इसे *अनुच्छेद* A1.4 में सिद्ध किया जाएगा।

जैसा कि पहले बताया जा चुका है कि अपने दैनिक जीवन में हम कथनों की मान्यता के प्रति अधिक सावधान नहीं रहते। उदाहरण के लिए, मान लीजिए आपकी सहेली आपको यह बताती है कि केरल के मनंतावड़ी में जुलाई के महीने में प्रतिदिन वर्षा होती है। पूर्ण विश्वास के साथ आप उसके इस कथन को सत्य मान लेंगी, यद्यपि यह संभव है कि जुलाई के महीने में एक या दो दिन वर्षा न भी हुई हो और, यदि आप वकील नहीं हैं, तो आप उससे बहस नहीं करेंगी।

एक अन्य उदाहरण के रूप में कुछ ऐसे कथन लीजिए, जिन्हें हम प्राय: एक दूसरे से कहते रहते हैं जैसे "आज बहुत गर्मी है।" हम ऐसे कथनों को सरलता से स्वीकार कर लेते हैं, क्योंकि हम संदर्भ जानते हैं, यद्यपि ये कथन संदिग्ध हैं। "आज बहुत गर्मी है" का अर्थ अलग-अलग लोगों के लिए अलग-अलग हो सकता है, क्योंकि कुमायूँ के व्यक्ति के लिए जो मौसम बहुत गर्म होगा, वह चैन्नई के व्यक्ति के लिए गर्म नहीं भी हो सकता है।



परन्तु गणितीय कथन संदिग्ध नहीं हो सकता है। *गणित में कथन केवल स्वीकार्य या मान्य* (*valid*) *होता है, जबकि वह या तो सत्य हो या असत्य हो।* जब यह सदैव सत्य होता है, तब हम कहते हैं कि यह एक *सत्य कथन* (true statement) है अन्यथा कथन असत्य होता है।

उदाहरण के लिए, $5 + 2 = 7$ सदैव सत्य है। अत: '$5 + 2 = 7$' एक सत्य कथन है। $5 + 3 = 7$ असत्य है। अत: '$5 + 3 = 7$' एक असत्य कथन है।

उदाहरण 2 : बताइए कि नीचे दिए गए कथन सत्य हैं या असत्य :

(i) एक त्रिभुज के अंत:कोणों का योग $180°$ होता है।

(ii) 1 से बड़ी प्रत्येक विषम संख्या अभाज्य होती है।

(iii) किसी भी वास्तविक संख्या x के लिए $4x + x = 5x$ होता है।

(iv) प्रत्येक वास्तविक संख्या x के लिए $2x > x$ होगा।

(v) प्रत्येक वास्तविक संख्या x के लिए $x^2 \geq x$ होगा।

(vi) यदि एक चतुर्भुज की सभी भुजाएँ बराबर हों, तो वह एक वर्ग होता है।

हल :

(i) यह कथन सत्य है। आप इसे अध्याय 6 में सिद्ध कर चुके हैं।

(ii) यह कथन असत्य है। उदाहरण के लिए 9 एक अभाज्य संख्या नहीं है।

(iii) यह कथन सत्य है।

(iv) यह कथन असत्य है। उदाहरण के लिए, $2 \times (-1) = -2$, और -2, -1 से बड़ा नहीं है।

(v) यह कथन असत्य है। उदाहरण के लिए, $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, और $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ से बड़ा नहीं है।

(vi) यह कथन असत्य है; क्योंकि समचतुर्भुज की बराबर भुजाएँ तो होती हैं, परन्तु यह आवश्यक नहीं है कि वह एक वर्ग है।

इस बात की ओर आपने अवश्य ध्यान दिया होगा कि यह स्थापित करने के लिए कि गणित के अनुसार कथन सत्य नहीं है, हमें एक ऐसा उदाहरण या ऐसी स्थिति देनी होगी, जहाँ यह लागू नहीं होता। अत: (ii) में, क्योंकि 9 अभाज्य संख्या नहीं है, यह एक उदाहरण है जो यह दर्शाता है कि कथन "1 से बड़ी प्रत्येक विषम संख्या अभाज्य होती है", सत्य नहीं है। इस प्रकार का उदाहरण, जो कथन के अनुकूल न हो, *प्रत्युदाहरण* (*counter example*) कहलाता है। हम अनुच्छेद A1.5 में प्रत्युदाहरणों पर विस्तार से चर्चा करेंगे।

इस बात की ओर भी आपने अवश्य ध्यान दिया होगा कि यद्यपि कथन (iv), (v) और (vi) असत्य हैं, फिर भी इन पर कुछ प्रतिबंध लगाकर आप इन्हें सत्य बना सकते हैं।

उदाहरण 3 : उपयुक्त प्रतिबंध लगाकर निम्नलिखित कथनों को पुनः इस प्रकार लिखिए कि वे सत्य कथन हो जाएँ।

(i) प्रत्येक वास्तविक संख्या x के लिए $2x > x$ होगा।

(ii) प्रत्येक वास्तविक संख्या x के लिए $x^2 \geq x$ होगा।

(iii) यदि आप एक संख्या को स्वयं उसी संख्या से भाग दें, तो आपको सदैव ही 1 प्राप्त होगा।

(iv) वृत्त के एक बिंदु पर उसकी जीवा द्वारा अंतरित कोण $90°$ का होता है।

(v) यदि एक चतुर्भुज की सभी भुजाएँ बराबर हों, तो वह एक वर्ग होता है।

हल :

(i) यदि $x > 0$ हो, तो $2x > x$ होगा।

(ii) यदि $x \leq 0$ हो या $x \geq 1$ हो, तो $x^2 \geq x$ होगा।

(iii) यदि शून्य के अतिरिक्त किसी अन्य संख्या को स्वयं उसी संख्या से भाग दें, तो आपको सदैव 1 प्राप्त होगा।

(iv) वृत्त के एक बिंदु पर वृत्त के एक व्यास द्वारा अंतरित कोण $90°$ का होता है।

(v) यदि एक चतुर्भुज की सभी भुजाएँ और सभी अंतःकोण बराबर हों, तो वह एक वर्ग होता है।

प्रश्नावली A 1.1

1. बताइए कि निम्नलिखित कथन सदैव सत्य हैं, सदैव असत्य हैं या संदिग्ध हैं। कारण सहित अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

(i) एक वर्ष में 13 महीने होते हैं।

(ii) दीवाली शुक्रवार को पड़ रही है।

(iii) मगादी में तापमान $26° C$ है।

(iv) पृथ्वी का एक चन्द्रमा है।

(v) कुत्ते उड़ सकते हैं।

(vi) फरवरी में केवल 28 दिन होते हैं।

2. बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य। कारण सहित उत्तर दीजिए।

(i) एक चतुर्भुज के अंतःकोणों का योग $350°$ होता है।

(ii) किसी भी वास्तविक संख्या x के लिए $x^2 \geq 0$ है।

(iii) समचतुर्भुज एक समांतर चतुर्भुज होता है।

(iv) दो सम संख्याओं का योग सम होता है।

(v) दो विषम संख्याओं का योग विषम होता है।

3. उपयुक्त प्रतिबंध लगाकर, निम्नलिखित कथनों को इस प्रकार लिखिए कि वे सत्य कथन बन जाएँ:

(i) सभी अभाज्य संख्याएँ विषम होती हैं।

(ii) एक वास्तविक संख्या का दुगुना सदा एक सम संख्या होती है।

(iii) किसी भी x के लिए, $3x + 1 > 4$ होता है।

(iv) किसी भी x के लिए, $x^3 \geq 0$ होता है।

(v) प्रत्येक त्रिभुज में माध्यिका एक कोण समद्विभाजक भी होती है।

A1.3 निगमनिक तर्कण

एक **असंदिग्ध (unambiguous)** कथन की सत्यता स्थापित करने में प्रयुक्त मुख्य तर्कसंगत साधन *निगमनिक तर्कण* (*deductive reasoning*) है।

निगमनिक तर्कण को समझने के लिए, आइए हम एक पहेली से प्रारंभ करें जिसे आपको हल करना है।

मान लीजिए आपको चार कार्ड दिए गए हैं। प्रत्येक कार्ड की एक ओर एक संख्या छपी है और दूसरी ओर एक अक्षर छपा है।

A	**V**	**6**	**5**

मान लीजिए आपको यह बताया जाता है कि ये कार्ड निम्नलिखित नियम का पालन करते हैं:

"यदि कार्ड की एक ओर एक सम संख्या हो, तो दूसरी ओर एक स्वर (vowel) होता है।"

नियम की सत्यता की जाँच करने के लिए, **कम से कम** कितने कार्डों को उलटने की आवश्यकता होगी।

हाँ, यह विकल्प तो आपके पास है ही कि आप सभी कार्डों को उलट सकते हैं और जाँच कर सकते हैं। परन्तु क्या आप कम संख्या में कार्डों को उलट कर, दिए हुए कथन की जाँच कर सकते हैं?

ध्यान दीजिए कि कथन में यह बताया गया है कि वह कार्ड जिसकी एक ओर सम संख्या है उसकी दूसरी ओर एक स्वर होता है। इस कथन में यह नहीं बताया गया है कि जिस कार्ड की एक ओर स्वर है उसकी दूसरी ओर एक सम संख्या अवश्य होनी चाहिए। ऐसा हो भी सकता है या नहीं भी हो सकता है। नियम में यह भी नहीं बताया गया है कि वह कार्ड जिसके एक ओर एक विषम संख्या है, उसके दूसरी ओर व्यंजन (consonant) होना ही चाहिए। यह हो भी सकता है या नहीं भी हो सकता है।

अत: क्या हमें 'A' को उलटने की आवश्यकता होगी? उत्तर है: नहीं। दूसरी ओर चाहें एक सम संख्या हो या एक विषम संख्या हो, नियम तब भी लागू होता है।

"5" के संबंध में आप क्या कहेंगे? यहाँ भी हमें कार्ड उलटने की आवश्यकता नहीं है, क्योंकि दूसरी ओर चाहे स्वर हो या व्यंजन, नियम तब भी लागू होता है।

परन्तु V और 6 वाले कार्डों को उलटने की आवश्यकता है। यदि V की दूसरी ओर एक सम संख्या हो, तो नियम भंग हो जाता है। इसी प्रकार, यदि 6 की दूसरी ओर एक व्यंजन हो, तो भी नियम भंग हो जाता है।

इस पहेली को हल करने के लिए हमने जिस प्रकार के तर्कण का प्रयोग किया है, उसे **निगमनिक तर्कण (deductive reasoning)** कहा जाता है। इसे 'निगमनिक' इसलिए कहा जाता है, क्योंकि तर्क का प्रयोग करके पहले स्थापित किए गए कथन से हम एक परिणाम या कथन प्राप्त (अर्थात् निगमित) कर सकते हैं। उदाहरण के लिए ऊपर की पहेली में, निगमित किए गए अनेक तर्कों से हमने यह निगमित (प्राप्त) किया कि केवल V और 6 को ही उलटने की आवश्यकता है।

निगमनिक तर्कण की सहायता से, हम यह भी निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि अमुक कथन सत्य है, क्योंकि यह एक अति व्यापक कथन की, जिसे सत्य माना गया है, एक विशिष्ट स्थिति है। उदाहरण के लिए, एक बार जब हम यह सिद्ध कर लेते हैं कि दो विषम संख्याओं का गुणनफल सदैव ही विषम होता है, तब (बिना अभिकलन के) हम तुरंत यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि 70001×134563 विषम होगा, क्योंकि 70001 और 134563 दोनों संख्याएँ ही विषम हैं।

शताब्दियों से निगमनिक तर्कण मानव चिंतन का एक अंग रहा है और इसका प्रयोग हमारे दैनिक जीवन में सदा होता रहता है। उदाहरण के लिए, मान लीजिए ये कथन कि "पुष्प सोलारिस केवल तब खिलता है, जबकि पिछले दिन का अधिकतम तापमान 28°C से अधिक होता है "और" 15 सितंबर, 2005 को काल्पनिक घाटी (imaginary valley) में सोलारिस खिला था, सत्य है। तब निगमनिक तर्कण का प्रयोग करके, हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि काल्पनिक घाटी में 14 सितंबर, 2005 को अधिकतम तापमान 28° C से अधिक था।

हमारा दुर्भाग्य यह है कि हम अपने दैनिक जीवन में सही तर्कण का प्रयोग सदा नहीं करते। हम प्राय: सदोष (गलत) तर्कण के आधार पर अनेक निष्कर्ष निकाल लेते हैं। उदाहरण के लिए, यदि आपकी सहेली एक दिन आपको देखकर मुस्कराती नहीं है, तब आप यह निष्कर्ष निकाल लेते हैं कि वह आपसे नाराज है। यद्यपि यह सत्य भी हो सकता है कि "यदि वह मुझसे नाराज है, तो मुझे देखकर वह नहीं मुस्कराएगी"; परन्तु यह भी सत्य हो सकता है कि "यदि उसके सिर में बहुत दर्द हो, तो वह मुझे देखकर नहीं मुस्कराएगी''। आप कुछ निष्कर्षों की जाँच क्यों नहीं कर लेते जो कि आप प्रतिदिन निकालते रहते हैं और देखें कि ये निष्कर्ष मान्य तर्कण पर आधारित हैं या सदोष तर्कण पर आधारित हैं?

प्रश्नावली A 1.2

1. निगमनिक तर्कण द्वारा निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(i) मानव स्तनधारी होते हैं। सभी स्तनधारी कशेरुकों (vertebrates) होते हैं। इन दो कथनों के आधार पर आप मानव के संबंध में क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं?

(ii) एंथनी एक नाई है। दिनेश ने अपने बाल कटवाए हैं। क्या आप यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि एंथनी ने दिनेश के बाल काटे हैं?

(iii) मार्टियन (Martians) की जीभ लाल होती हैं। गुलग एक मार्टियन है। इन दो कथनों के आधार पर आप गुलग के बारे में क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं?

(iv) यदि किसी दिन चार घंटे से अधिक समय तक वर्षा होती है, तो अगले दिन गटरों की सफाई करनी पड़ती है। आज 6 घंटे तक वर्षा हुई है। कल गटर की अवस्था क्या होगी, इसके बारे में आप क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं?

(v) नीचे के कार्टून में दिए गए गाय के तर्क में क्या विरोधाभास (fallacy) है?

2. आपको फिर से चार कार्ड दिए गए हैं। प्रत्येक कार्ड के एक ओर एक संख्या और दूसरी ओर एक अक्षर छपा है। नीचे दिया गया नियम लागू होता है या नहीं, इसकी जाँच करने के लिए, वे कौन-से दो कार्ड होंगे जिन्हें उलटने की आवश्यकता होगी?

"यदि एक कार्ड की एक ओर एक व्यंजन हो, तो उसकी दूसरी ओर एक विषम संख्या होती है।"

B	**3**	**U**	**8**

A1.4 प्रमेय, कंजेक्चर और अभिगृहीत

अभी तक हमने कुछ कथनों पर चर्चा की है और देखा है कि इन कथनों की मान्यता की जाँच किस प्रकार की जाती है। इस अनुच्छेद में, आप उन तीन अलग-अलग प्रकार के कथनों में भेद करने के बारे में अध्ययन करेंगे जिनसे गणित का निर्माण हुआ है। ये हैं: प्रमेय, कंजेक्चर (conjecture) और अभिगृहीत।

आप पहले भी अनेक प्रमेयों को देख चुके हैं। अत: प्रमेय क्या है? उस गणितीय कथन को जिसकी सत्यता स्थापित (सिद्ध) कर दी गई है, *प्रमेय* (*theorem*) कहा जाता है। उदाहरण के लिए, नीचे दिए गए कथन प्रमेय हैं, जैसा कि आप अनुच्छेद A1.5 में देखेंगे।

प्रमेय A 1.1 : *एक त्रिभुज के अंत:कोण का योग* 180° *होता है।*

प्रमेय A 1.2 : *दो प्राकृत संख्याओं का गुणनफल सम होता है।*

प्रमेय A 1.3 : किन्हीं भी तीन क्रमागत सम प्राकृत संख्याओं का गुणनफल 16 से भाज्य होता है।

कंजेक्चर वह कथन है, जिसे हम अपने गणितीय ज्ञान और अनुभव अर्थात् गणितीय *अंर्तज्ञान* (*intuition*) के आधार पर सत्य मानते हैं। कंजेक्चर सत्य या असत्य हो सकता है। साथ ही, यदि हम इसे सिद्ध भी कर सकें, तो यह एक प्रमेय हो जाता है। प्रतिरूपों को देखने और बुद्धिमतापूर्ण गणितीय अनुमान लगाने के लिए, गणितज्ञ प्राय: कंजेक्चर का प्रयोग करते हैं। आइए हम कुछ प्रतिरूप लें और देखें कि हम किस प्रकार का बुद्धितापूर्ण अनुमान लगा सकते हैं।

उदाहरण 4 : कोई भी तीन क्रमागत सम संख्याएँ लीजिए और उन्हें जोड़िए, जैसे–

$2 + 4 + 6 = 12$, $4 + 6 + 8 = 18$, $6 + 8 + 10 = 24$, $8 + 10 + 12 = 30$, $20 + 22 + 24 = 66$

आदि। क्या आप इन योगफलों से किसी प्रतिरूप का अनुमान लगा सकते हैं? इनके बारे में आप क्या कजेक्चर दे सकते हैं?

हल : एक कंजेक्चर यह हो सकता है:

(i) तीन क्रमागत सम संख्याओं का योग सम होता है।

अन्य कंजेक्चर यह हो सकता है:

(ii) तीन क्रमागत सम संख्याओं का योग 6 से विभाज्य होता है।

उदाहरण 5 : संख्याओं का निम्न प्रतिरूप लीजिए जिसे पास्कल-त्रिभुज कहा जाता है :

पंक्ति		संख्याओं का योग
1	1	1
2	1 1	2
3	1 2 1	4
4	1 3 3 1	8
5	1 4 6 4 1	16
6	1 5 10 10 5 1	32
7	: :	:
8	: :	:

पंक्तियों 7 और 8 की संख्याओं के योगफलों के लिए कंजेक्चर आप क्या दे सकते हैं? पंक्ति 21 की संख्याओं के बारे में आप क्या कहेंगे? क्या आप एक प्रतिरूप देख रहे हैं? पंक्ति n की संख्याओं के योग के एक सूत्र के बारे में अनुमान लगाइए।

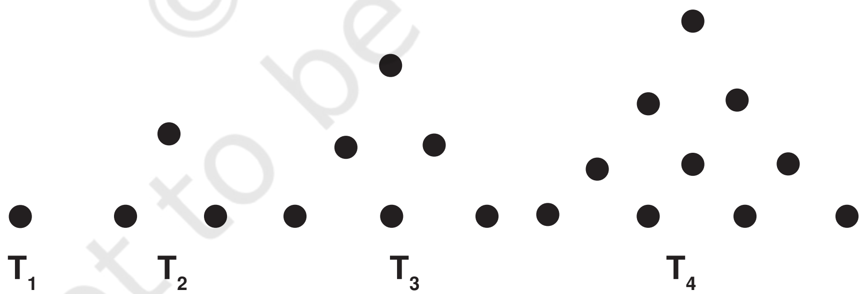
हल : पंक्ति 7 की संख्याओं का योग $= 2 \times 32 = 64 = 2^6$ है।

पंक्ति 8 की संख्याओं का योग $= 2 \times 64 = 128 = 2^7$ है।

पंक्ति 21 की संख्याओं का योग $= 2^{20}$ है।

पंक्ति n की संख्याओं का योग $= 2^{n-1}$ है।

उदाहरण 6 : तथाकथित त्रिभुजीय संख्याएँ T_n लीजिए:

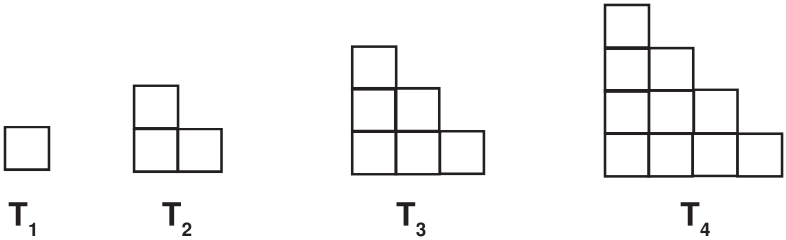


आकृति A 1.1

बिंदुओं का विन्यास इस प्रकार किया गया है कि इनसे एक त्रिभुज बनता है। यहाँ $T_1 = 1$, $T_2 = 3$, $T_3 = 6$, $T_4 = 10$, आदि-आदि। क्या आप अनुमान लगा सकते हैं कि T_5 क्या है? T_6 के बारे में आप क्या कह सकते हैं? T_n के बारे में आप क्या कह सकते हैं?

T_n का एक कंजेक्चर दीजिए।

यदि आप इन्हें नीचे दी गई विधि से पुनः खींचें, तो इससे आपको सहायता मिल सकती है:



आकृति A 1.2

हल : $$T_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 = \frac{5 \times 6}{2}$$

$$T_6 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21 = \frac{6 \times 7}{2}$$

$$T_n = \frac{n \times (n+1)}{2}$$

कंजेक्चर का एक अनुकूल उदाहरण जो कि अभी भी खुला हुआ है (अर्थात् अभी तक सिद्ध नहीं किया गया है कि यह सत्य है या असत्य), गणितज्ञ क्रिश्चियन गोल्डबाक (1690–1764) के नाम पर रखा गया गोल्डबाक कंजेक्चर है। इस कंजेक्चर का कथन यह है: "4 *से बड़े प्रत्येक सम पूर्णांक को दो विषम अभाज्य संख्याओं के योग के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।"* यदि आप यह सिद्ध कर लेंगे कि यह परिणाम सत्य है या असत्य तो आप प्रसिद्ध हो जाएँगे।

यह देखकर आपको अवश्य आश्चर्य हुआ होगा कि गणित में हमारे सामने जो कुछ भी आता है, क्या उसे सिद्ध करना आवश्यक है, और यदि नहीं, तो क्यों नहीं?

वास्तविकता तो यह है कि गणित का प्रत्येक क्षेत्र कुछ कथनों पर आधारित होता है' जिन्हें हम सत्य मान लेते हैं और उन्हें सिद्ध नहीं करते। ये "स्व-प्रमाणित सत्य" हैं जिन्हें हम बिना उपपत्ति के

सत्य मान लेते हैं। इन कथनों को *अभिगृहीत* (*axioms*) कहा जाता है। अध्याय 5 में आप यूक्लिड के अभिगृहीतों और अभिधारणाओं (postulates) का अध्ययन कर चुके हैं (आजकल अभिगृहीतों और अभिधारणाओं के बीच कोई भेद नहीं रखा जाता है)।

उदाहरण के लिए युक्लिड की पहली अभिधारणा है:

किसी एक बिंदु से किसी अन्य बिंदु तक एक सरल रेखा खींची जा सकती है।

और उनकी तीसरी अभिधारणा है:

कोई भी केंद्र और कोई भी त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचा जा सकता है।

ये कथन पूर्णत: सत्य दिखाई पड़ते हैं और यूक्लिड ने इन्हें सत्य मान लिया था। क्यों?

उन्होंने इसे सत्य इसलिए मान लिया था, क्योंकि हम प्रत्येक तथ्य को सिद्ध नहीं कर सकते और हमें कहीं न कहीं से प्रारंभ तो करना ही पड़ता है। इसके लिए, हमें कुछ कथनों की आवश्यकता होती है, जिन्हें हम सत्य मान लेते हैं और फिर इन अभिगृहीतों पर आधारित तर्क के नियमों का प्रयोग करके हम अपने ज्ञान का निर्माण कर सकते हैं।

आपको यह जानकर आश्चर्य हो सकता है कि तब हम उन सभी कथनों को स्वीकार क्यों नहीं कर लेते जो स्व-प्रमाणित प्रतीत होते हैं। इसके अनेक कारण हैं। प्राय: हमारा अंर्तज्ञान गलत सिद्ध हो सकता है; चित्र या प्रतिरूप हमें धोखा दे सकते हैं और फिर हमारे सामने केवल एक ही विकल्प बच जाता है कि दिए हुए तथ्य को सिद्ध करें। उदाहरण के लिए, हममें से अनेक व्यक्ति यह विश्वास करते हैं कि यदि एक संख्या को एक अन्य संख्या से गुणा करें, तो प्राप्त परिणाम दोनों संख्याओं से बड़ा होगा। परन्तु हम यह जानते हैं कि यह सदैव सत्य नहीं होता है। उदाहरण के लिए, $5 \times 0.2 = 1$ है, जो कि 5 से कम है।

अब आप नीचे दी गई आकृति देखिए। कौन सा रेखाखंड अधिक लंबा है, AB या CD?

आकृति A 1.3

दोनों ही रेखाखंड ठीक-ठीक समान लंबाई के हैं, यद्यपि AB छोटा दिखाई पड़ता है।

तब आप अभिगृहीतों की मान्यता के संबंध में आश्चर्य कर सकते हैं। आपने अंर्तज्ञान के आधार पर वे अभिगृहीत लिए गए हैं जो स्व-प्रमाणित दिखाई पड़ते हैं। फिर भी संभव है कि बाद में चलकर हमें पता चल सकता है कि अमुक अभिगृहीत सत्य नहीं है। इस संभावना से किस प्रकार बचाव किया जाए? इसके लिए हम निम्नलिखित चरण अपनाते हैं?

(i) अभिगृहीतों की संख्या कम से कम रखिए। उदाहरण के लिए, यूक्लिड के केवल अभिगृहीतों और 5 अभिधारणाओं के आधार पर हम सैकड़ों परिणाम व्युत्पन्न कर सकते हैं।

(ii) सुनिश्चित हो जाइए कि अभिगृहीत संगत (अविरोधी) (consistent) है।

हम अभिगृहीतों के संग्रह को *असंगत* (inconsistent) तब कहते हैं जबकि हम इनका प्रयोग करते हुए, यह सिद्ध कर लें कि इनमें से एक अभिगृहीत सत्य नहीं है। उदाहरण के लिए, निम्नलिखित दो कथन लीजिए। यहाँ हम यह दिखाएँगे कि ये कथन असंगत हैं।

कथन 1 **:** कोई भी पूर्ण संख्या अपनी परवर्ती संख्या के बराबर नहीं होती।

कथन 2 **:** एक पूर्ण संख्या को शून्य से भाग देने पर एक पूर्ण संख्या प्राप्त होती है।

(स्मरण रहे कि **शून्य से दिया गया भाग परिभाषित नहीं है।**) परन्तु, एक क्षण के लिए यह मान लीजिए कि ऐसा संभव है और फिर देखते हैं कि क्या होता है।)

कथन 2 से हमें $\frac{1}{0} = a$ प्राप्त होता है, जहाँ a एक पूर्ण संख्या है। इससे यह पता चलता है कि $1 = 0$ है। परन्तु कथन 1 को, जो कहता है कि कोई भी पूर्ण संख्या अपनी परवर्ती पूर्ण संख्या के बराबर नहीं होती, यह असत्य सिद्ध कर देता है।

(iii) कभी न कभी एक असत्य अभिगृहीत के कारण अंतर्विरोध अवश्य होगा। *हम अंतर्विरोध तब मानते हैं जबकि हमें एक ऐसा कथन प्राप्त होता है, जिससे कि कथन और उसका निषेध (negation) दोनों ही सत्य हो जाएँ।* उदाहरण के लिए, ऊपर दिए गए कथन 1 और कथन 2 को पुनः लीजिए।

कथन 1 से हम यह परिणाम व्युत्पन्न कर सकते हैं कि $2 \neq 1$ है।

अब आप $x^2 - x^2$ लीजिए। इसका गुणनखंडन हम दो विधियों से कर सकते हैं :

(i) $x^2 - x^2 = x(x - x)$ और

(ii) $x^2 - x^2 = (x + x)(x - x)$

अतः, $x(x - x) = (x + x)(x - x)$ हुआ।

कथन 2 के अनुसार, हम दोनों पक्षों से $(x - x)$ काट सकते हैं।

तब हमें $x = 2x$ प्राप्त होता है, जिससे यह पता चलता है कि $2 = 1$ है।

अतः कथन $2 \neq 1$ और इसका निषेध $2 = 1$ दोनों ही सत्य हैं। यह एक अंतर्विरोध है। यह अंतर्विरोध असत्य अभिगृहीत के कारण है, जोकि यह है कि एक पूर्ण संख्या को 0 से भाग देने पर एक पूर्ण संख्या प्राप्त होती है।

अतः, हम जिन कथनों को अभिगृहीत मानते हैं, उसके लिए बहुत सोच-विचार और अंतर्दृष्टि की आवश्यकता होती है। इस संबंध में हमें यह अवश्य सुनिश्चित कर लेना चाहिए कि इनसे कोई असंगतता या तर्कसंगत अंतर्विरोध न हो, फिर भी, कभी-कभी अभिगृहीतों या अभिधारणों के चयन से कुछ नए तथ्यों का पता लगता है। अध्याय 5 से आप यूक्लिड के पाँचवीं अभिधारणा और अयूक्लिडीय ज्यामितियों के आविष्कार से आप परिचित हैं। वहाँ आपने यह देखा है कि गणितज्ञों का यह विश्वास था कि पाँचवीं अभिधारणा को एक अभिधारणा लेने की आवश्यकता नहीं है और वास्तव में यह एक प्रमेय है, जिसे पहली चार अभिधारणाओं की सहायता से सिद्ध किया जा सकता है। आश्चर्य है कि इन कार्यों से अयूक्लिडीय ज्यामितियों का आविष्कार हो गया।

अभिगृहीत, प्रमेय और कंजेक्चर के बीच के अंतरों को बताते हुए, हम इस अनुच्छेद को यहीं समाप्त करते हैं। **अभिगृहीत** एक गणितीय कथन है जिसे बिना उपपत्ति के सत्य मान लिया जाता है। कंजेक्चर एक गणितीय कथन है जिसकी सत्यता या असत्यता को अभी स्थापित करना शेष है, और प्रमेय एक गणितीय कथन है जिसकी सत्यता तार्किक रूप से स्थापित की गई है।

प्रश्नावली A 1.3

1. कोई भी तीन क्रमागत सम संख्याएँ लीजिए और उनका गुणनफल ज्ञात कीजिए : उदाहरण के लिए, $2 \times 4 \times 6 = 48, 4 \times 6 \times 8 = 192$, आदि आदि। इन गुणनफलों के तीन कंजेक्चर बनाइए।

2. पास्कल-त्रिभुज पर आ जाइए।

पंक्ति $1 : 1 = 11^0$

पंक्ति $2 : 1 \;\; 1 = 11^1$

पंक्ति $3 : 1 \;\; 2 \;\; 1 = 11^2$

पंक्ति 4 और पंक्ति 5 के लिए एक-एक कंजेक्चर बनाइए। क्या आपका कंजेक्चर सत्य है? क्या आपका कंजेक्चर पंक्ति 6 पर भी लागू होता है?

3. आइए हम त्रिभुजीय संख्याओं को पुनः देखें (आकृति A1.2) दो क्रमागत संख्याओं को जोड़िए। उदाहरण के लिए, $T_1 + T_2 = 4, T_2 + T_3 = 9, T_3 + T_4 = 16$ है।

$T_4 + T_5$ के बारे में आपका क्या कहना है? $T_{n-1} + T_n$ का एक कंजेक्चर बनाइए।

4. निम्नलिखित प्रतिरूप देखिए :

$1^2 = 1$

$11^2 = 121$

$111^2 = 12321$

$1111^2 = 1234321$

$11111^2 = 123454321$

निम्नलिखित में से प्रत्येक का एक कंजेक्चर बनाइए:

$111111^2 =$

$1111111^2 =$

जाँच कीजिए कि आपका कंजेक्चर सत्य है या नहीं।

5. इस पुस्तक में प्रयुक्त पाँच अभिगृहीत (अभिधारणाएँ) बताइए।

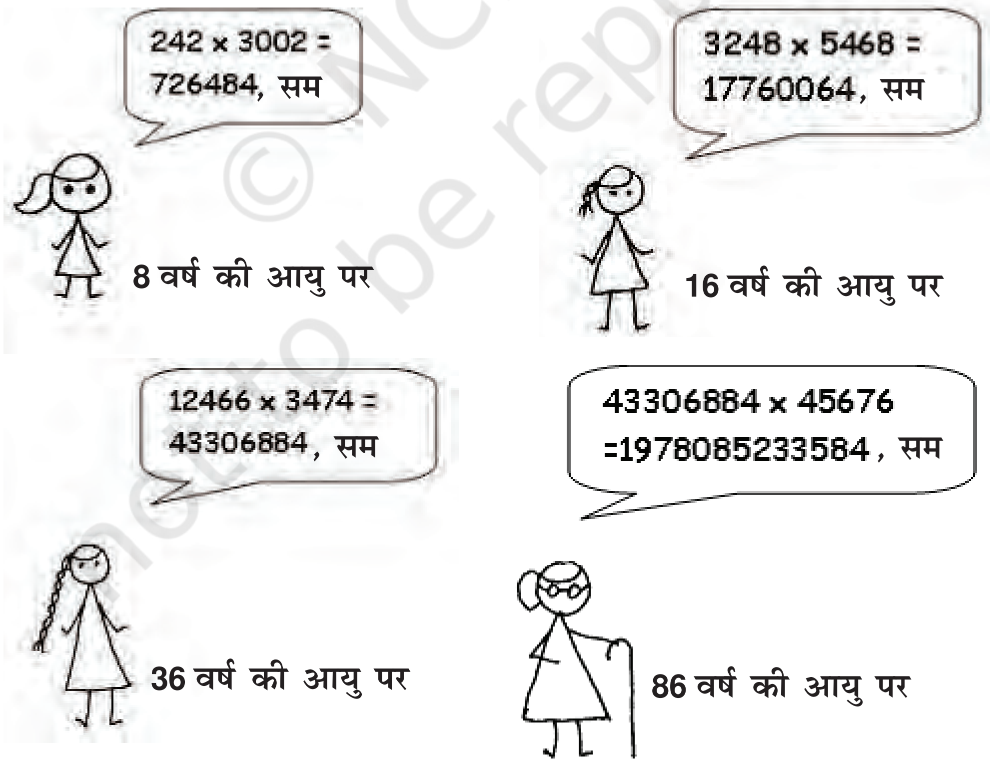
A1.5 गणितीय उपपत्ति क्या है?

आइए हम उपपत्तियों के विभिन्न पहलुओं पर विचार करें। सबसे पहले हम सत्यापन (verification) और उपपत्ति (proof) के बीच के अंतर को समझेंगे। गणित में उपपत्तियों का अध्ययन करने से पहले, आपसे कथनों को सत्यापित करने के लिए कहा जाता है।

उदाहरण के लिए, उदाहरणों के साथ यह सत्यापित करने के लिए कहा जा सकता है कि "दो सम संख्याओं का गुणनफल सम होता है"। अत: इसके लिए आप यदृच्छया दो सम संख्या ले सकते हैं। मान लीजिए वे संख्याएँ 24 और 2006 ली जा सकती हैं और जाँच की जा सकती हैं कि $24 \times 2006 = 48144$ एक सम संख्या है। इस तरह के और उदाहरण लेकर भी आप यह क्रिया कर सकते हैं।

आपको कक्षा में अनेक त्रिभुज खींचने और इनके अंत:कोणों का योग अभिकलित करने के लिए कहा जा सकता है। मापन में त्रुटियाँ न होने पर त्रिभुज के अंत:कोणों का योग $180°$ होता है।

इस विधि में त्रुटि (flaw) क्या है? ऐसी अनेक समस्याएँ हैं, जिनका सत्यापन करना है। इसकी सहायता से आप यह तो कह सकते हैं कि जिस कथन को आप सही मानते हैं वह सत्य है, परन्तु आप इस बात से सुनिश्चित नहीं हो सकते कि यह सभी स्थितियों के लिए सत्य है। उदाहरण के लिए, सम संख्याओं के अनेक युग्मों के गुणन से आप यह अनुमान तो लगा सकते हैं कि दो सम संख्याओं का गुणनफल सम होता है। फिर भी, आप सुनिश्चित नहीं हो पाते कि सम संख्याओं के सभी युग्मों का गुणनफल सम है। आप व्यक्तिगत रूप से सम संख्याओं के सभी युग्मों के गुणनफलों की जाँच नहीं कर सकते। यदि ऐसा आप कर पाते तो कार्टून में दिखाई गई लड़की की भाँति अपने शेष जीवन में सम संख्याओं के गुणनफलों का परिकलन करते ही रहते। इसी प्रकार, कुछ ऐसे भी त्रिभुज हो सकते हैं जिन्हें अभी तक आपने नहीं बनाया है और जिनके अंत:कोणों का योग $180°$ नहीं है। हम सभी संभव त्रिभुजों के अंत:कोणों को नहीं माप सकते।



प्रायः सत्यापन भी भ्रामक हो सकते हैं। उदाहरण के लिए, पहले किए गए सत्यापनों के आधार पर पास्कल-त्रिभुज (प्रश्नावली A1.3 का प्रश्न 2) से हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि $11^5 = 15101051$ है। परन्तु वास्तव में $11^5 = 161051$ है।

अतः आपको एक अन्य विधि से सोचना होगा जो कि केवल कुछ स्थितियों के सत्यापन पर ही निर्भर न हो। एक अन्य विधि है जिसमें कथन को सिद्ध करके दिखाया जाता है। वह प्रक्रम, जो केवल तर्कसंगत तर्कों के आधार पर गणितीय कथन की सत्यता स्थापित कर सकता है उसे *गणितीय उपपत्ति* (*mathematical proof*) कहा जाता है।

अनुच्छेद A1.2 के उदाहरण 2 में, आपने यह देखा है कि गणितीय कथन को असत्य स्थापित करने के लिए एक प्रत्युदाहरण प्राप्त कर लेना ही पर्याप्त है। अतः, यद्यपि हजारों स्थितियाँ लेकर एक गणितीय कथन की जाँच करके अथवा सत्यापन करके इसकी मान्यता स्थापित करना पर्याप्त नहीं होता। फिर भी, इसके लिए एक ऐसा प्रत्युदाहरण प्राप्त कर देना ही पर्याप्त होता है जो कथन को असत्य सिद्ध कर देता है (अर्थात् यह दिखाना कि कुछ असत्य है)। इस बात पर विशेष ध्यान देने की आवश्यकता है।

गणितीय कथन को असत्य दर्शाने के लिए एक प्रत्युदाहरण ज्ञात कर लेना ही पर्याप्त होता है।

अतः, $7 + 5 = 12$ कथन दो विषम संख्याओं का योग विषम होता है, का एक प्रत्युदाहरण है।

आइए अब हम एक उपपत्ति के आधारभूत अवयवों की सूची देखें :

(i) एक प्रमेय को सिद्ध करने के लिए, हमें इस बात का एक स्थूल विचार (rough idea) होना चाहिए कि यह प्रक्रिया किस प्रकार की जाती है।

(ii) प्रमेय में पहले से दी गई सूचनाओं (अर्थात् परिकल्पना) को अच्छी तरह से समझ लेना चाहिए और प्रयोग करना चाहिए।

उदाहरण के लिए, प्रमेय A1.2 में, जो यह है कि दो सम संख्याओं का गुणनफल सम होता है, हमें दो सम प्राकृत संख्याएँ दी हुई हैं। अत: हमें इनके गुणों का प्रयोग करना चाहिए। (अध्याय 2 के) गुणनखंड प्रमेय में एक बहुपद $p(x)$ दिया गया है और बताया गया है कि $p(a) = 0$ का यह दर्शाने के लिए आपको प्रयोग करना है कि $(x - a)$, $p(x)$ का एक गुणनखंड है। इसी प्रकार, गुणनखंड प्रमेय के विलोम (converse) के लिए यह दिया गया है कि $(x - a)$, $p(x)$ का एक गुणनखंड है और इसका प्रयोग आपको इस परिकल्पना (hypothesis) को सिद्ध करने के लिए करना है कि $p(a) = 0$ है।

एक प्रमेय को सिद्ध करने के प्रक्रम में, आप रचनाओं का भी प्रयोग कर सकते हैं। उदाहरण के लिए, यह सिद्ध करने के लिए कि एक त्रिभुज के कोणों का योग 180° होता है, हम किसी एक भुजा के समांतर और उस भुजा के सम्मुख शीर्ष से होकर जाने वाली एक रेखा खींचते हैं और समांतर रेखाओं के गुणों का प्रयोग करते हैं।

(iii) उपपत्ति में गणितीय कथनों का एक उत्तरोत्तर (successive) अनुक्रम होता है। उपपत्ति का प्रत्येक कथन उपपत्ति के पिछले कथन से, पहले सिद्ध किए गए प्रमेय से, एक अभिगृहीत से या अपनी परिकल्पनाओं से तार्किक रूप से निगमित हो जाता है।

(iv) एक तार्किक रूप से सही क्रम में विन्यासित गणितीय रूप से सत्य कथनों के अनुक्रम का निष्कर्ष वही होना चाहिए जिसे हम सिद्ध करना चाहते हैं, अर्थात् यह वह होना चाहिए जिसका प्रमेय में दावा किया गया है।

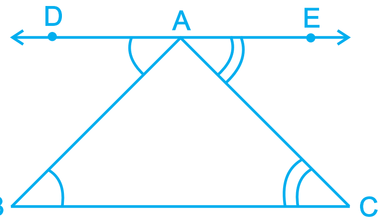
इन अवयवों को समझने के लिए, हम प्रमेय A1.1 और उसकी उपपत्ति का विश्लेषण करेंगे। आप अध्याय 6 में इस प्रमेय को पढ़ चुके हैं। परन्तु पहले हम ज्यामिति की उपपत्तियों के संबंध में कुछ टिप्पणी देंगे। प्राय: हम प्रमेयों को सिद्ध करने के लिए आकृतियों या आरेखों की सहायता लेते हैं और यह एक अति महत्वपूर्ण बात है। फिर भी, उपपत्ति के प्रत्येक कथन को केवल तर्क की सहायता से स्थापित करना होता है। प्राय: हमने विद्यार्थियों को यह कहते सुना है कि "वे दो कोण बराबर हैं, क्योंकि आकृति में वे बराबर दिखाई पड़ते हैं" या "वह कोण 90° का होगा, क्योंकि दो रेखाएँ ऐसी दिखाई पड़ती हैं जैसे वे एक-दूसरे पर लंब हैं।" अत:, जो कुछ भी आप देखते हैं, उससे धोखा न खा जाइए। आकृति A1.4 को पुन: ध्यान से देखिए।

अत: आइए अब हम प्रमेय A1.1 लें।

प्रमेय A1.1 : *एक त्रिभुज के अंत:कोणों का योगफल 180° होता है।*

उपपत्ति : त्रिभुज ABC लीजिए (देखिए आकृति A1.4)

हमें यह सिद्ध करना है कि $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180°$ (1)



आकृति A1.4

BC के समांतर एक रेखा DE खींचिए जो A से होकर जाती है। (2)

DE, BC के समांतर है और AB एक तिर्यक रेखा (transversal) है।

अत:, $\angle DAB$ और $\angle ABC$ एकांतर कोण हैं। इसलिए अध्याय 6 के प्रमेय 6.2 के अनुसार, ये कोण बराबर हैं। अर्थात् $\angle DAB = \angle ABC$ है। (3)

इसी प्रकार, $\angle CAE = \angle ACB$ (4)

इसलिए, $\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = \angle DAB + \angle BAC + \angle CAE$ (5)

परन्तु $\angle DAB + \angle BAC + \angle CAE = 180°$ है, क्योंकि इनसे एक ऋजु कोण (straight angle) बनता है। (6)

अत:, $\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = 180°$ (7)

अब हम उपपत्ति में प्रयुक्त प्रत्येक चरण पर टिप्पणी देंगे।

चरण 1 : क्योंकि हमारे प्रमेय का संबंध त्रिभुज के एक गुण से है, इसलिए सबसे पहले हम एक त्रिभुज लेंगे।

चरण 2 : यह एक मुख्य विचार है–अंतर्ज्ञानात्मक प्रारंभिक कदम या यह समझ लेना कि कौन सी प्रक्रिया अपनाई जाए जिससे हम प्रमेय सिद्ध कर सकें। प्राय: ज्यामितीय उपपत्तियों में रचना करने की आवश्यकता होती है।

चरण 3 और 4 : इस तथ्य का प्रयोग करके कि DE, BC के समांतर है (अपनी रचना से) और पहले सिद्ध किए गए प्रमेय 6.2 से, जो यह है कि यदि दो समांतर रेखाओं को एक तिर्यक रेखा काटती हो, तो एकांतर कोण बराबर होते हैं, यहाँ हम यह निष्कर्ष निकाल लेते हैं कि $\angle DAE = \angle ABC$ और $\angle CAE = \angle ACB$ है।

चरण 5 : यहाँ हम निम्नलिखित निगमित करने के लिए यूक्लिड के अभिग्रहीत (देखिए अध्याय 5) का प्रयोग करते हैं, जो यह है "यदि बराबरों को बराबरों में जोड़ा जाए, तो पूरे बराबर होते हैं।"

$$\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = \angle DAB + \angle BAC + \angle CAE$$

अर्थात् त्रिभुज के अंत:कोणों का योग एक ऋजु रेखा पर के कोणों के योग के बराबर होता है।

चरण 6 : यह दिखाने के लिए कि $\angle DAB + \angle BAC + \angle CAE = 180°$ है, हम अध्याय 6 के रैखिक युग्म अभिगृहीत का प्रयोग करते हैं, जिसका कथन यह है कि एक ऋजु रेखा पर के कोणों का योग $180°$ होता है।

चरण 7 : यह निष्कर्ष निकालने के लिए कि $\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = \angle DAB + \angle BAC + \angle CAE = 180°$ है, हम यूक्लिड के अभिगृहीत का प्रयोग करते हैं, जो यह है "वे वस्तुएँ जो समान वस्तु के बराबर हैं, एक-दूसरे के बराबर होती हैं। ध्यान दीजिए कि चरण 7 उस प्रमेय द्वारा किया गया दावा है, जिसे हमें सिद्ध करना है।

अब हम विश्लेषण किए बिना ही प्रमेयों A1.2 और A1.3 को सिद्ध करेंगे।

प्रमेय A1.2 : *दो सम प्राकृत संख्याओं का गुणनफल सम होता है।*

उपपत्ति : मान लीजिए x और y कोई दो सम प्राकृत संख्याएँ हैं।

हम यह सिद्ध करना चाहते हैं कि xy सम है।

क्योंकि x और y सम हैं, इसलिए ये 2 से भाज्य हैं। इसीलिए, $x = 2m$ के रूप में, जहाँ m कोई प्राकृत संख्या है और $y = 2n$ के रूप में, जहाँ n कोई प्राकृत संख्या है, व्यक्त किया जा सकता है।

तब $xy = 4\,mn$ है और क्योंकि $4\,mn$, 2 से भाज्य है, इसलिए xy भी दो से भाज्य होगा।

अतः, xy सम है।

प्रमेय A1.3 : *किन्हीं भी तीन क्रमागत सम प्राकृत संख्याओं का गुणनफल 16 से भाज्य होता है।*

उपपत्ति : कोई भी तीन क्रमागत सम प्राकृत संख्या $2n$, $2n + 2$ और $2n + 4$ के रूप की होगी, जहाँ n कोई प्राकृत संख्या है। हमें यह सिद्ध करना है कि इनका गुणनफल $2n(2n + 2)(2n + 4)$ 16 से भाज्य है।

अब, $2n(2n + 2)(2n + 4) = 2n \times 2(n + 1) \times 2(n + 2)$

$$= 2 \times 2 \times 2n(n + 1)(n + 2) = 8n(n + 1)(n + 2)$$

अब हमारे सामने दो स्थितियाँ हैं: या तो n सम है या विषम है। आइए हम प्रत्येक स्थिति की जाँच करें।

मान लीजिए n सम है। तब हम $n = 2m$ लिख सकते हैं, जहाँ m कोई प्राकृत संख्या है।

साथ ही, तब $2n(2n + 2)(2n + 4) = 8n(n + 1)(n + 2) = 16m(2m + 1)(2m + 2)$

अतः, $2n(2n + 2)(2n + 4)$, 16 से भाज्य है।

अब, मान लीजिए n विषम है। तब $n + 1$ सम होगा और हम $n + 1 = 2r$ लिख सकते हैं, जहाँ r कोई प्राकृत संख्या है।

तब

$$\begin{aligned} 2n(2n + 2)(2n + 4) &= 8n(n + 1)(n + 2) \\ &= 8(2r - 1) \times 2r \times (2r + 1) \\ &= 16r(2r - 1)(2r + 1) \end{aligned}$$

अतः, $2n(2n + 2)(2n + 4)$, 16 से भाज्य है।

अतः, दोनों स्थितियों में, हमने यह दर्शा दिया है कि किन्ही भी तीन क्रमागत सम संख्याओं का गुणनफल 16 से भाज्य होता है।

गणितज्ञों ने किस प्रकार परिणामों की खोज की है और किस प्रकार औपचारिक दृढ़ उपपत्तियाँ लिखी गई हैं इनके अंतर पर कुछ टिप्पणी देते हुए, हम इस अध्याय को यहीं समाप्त करते हैं। जैसा कि ऊपर बताया गया है, प्रत्येक उपपत्ति का एक मुख्य अंतर्ज्ञानात्मक विचार (कभी-कभी एक से अधिक) होता है। गणितज्ञों की चिंतन-विधि और परिणामों का पता लगाने में अंतर्ज्ञान केंद्र बिंदु काम करता है। प्रायः प्रमेय की उपपत्ति गणितज्ञों के मस्तिष्क में अपने आप आने लगती है। सही हल या उपपत्ति प्राप्त करने से पहले विभिन्न चिंतन-विधियों और तर्क और उदाहरणों के साथ गणितज्ञ प्रायः प्रयोग करता रहता है। सर्जनात्मक प्रावस्था के दब जाने के बाद ही सभी तर्कों को एक साथ लेकर उचित उपपत्ति प्रस्तुत की जाती है।

यहाँ यह उल्लेख कर देना आवश्यक है कि अपने कथनों तक पहुँचने के लिए, भारत के महान गणितज्ञ श्रीनिवास रामानुजन ने उच्च स्तर के अंतर्ज्ञान का प्रयोग किया था, जिनके संबंध में उनका यह दावा था कि वे सत्य हैं। इनमें से अनेक जो सत्य सिद्ध हो गए हैं वे सुपरिचित प्रमेय हो गए हैं। जो अभी तक सिद्ध नहीं हो पाए हैं उनमें से कुछ दावों (कंजेक्चर) को सिद्ध करने (या असत्य सिद्ध करने) में आज भी पूरे विश्व के गणितज्ञ लगे हुए हैं।

श्रीनिवास रामानुजन
(1887–1920)
आकृति A1.5

प्रश्नावली A1.4

1. निम्नलिखित कथनों को असत्य सिद्ध करने के लिए प्रत्युदाहरण ज्ञात कीजिए।

(i) यदि दो त्रिभुजों के संगत कोण बराबर हों, तो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

(ii) वह चतुर्भुज, जिसकी सभी भुजाएँ बराबर हैं एक वर्ग होता है।

(iii) वह चतुर्भुज, जिसके सभी कोण बराबर हैं, एक वर्ग होता है।

(iv) यदि a और b पूर्णांक हैं, तो $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$ है।

(v) $2n^2 + 11$ एक अभाज्य संख्या है, जहाँ n पूर्ण संख्या है।

(vi) सभी धनात्मक पूर्णांकों n के लिए $n^2 - n + 41$ एक अभाज्य संख्या है।

2. आप अपने पसंद की उपपत्ति लीजिए और ऊपर चर्चित की गई विधियों, (अंतर्ज्ञानात्मक प्रारम्भिक कदम क्या है, क्या दिया हुआ है, क्या निगमित किया गया है, किन प्रमेयों और अभिगृहीतों का प्रयोग किया गया है, आदि आदि) के अनुसार इसका चरणशः विश्लेषण कीजिए।

3. सिद्ध कीजिए कि दो विषम संख्याओं का योग सम होता है।

4. सिद्ध कीजिए कि दो विषम संख्याओं का गुणनफल विषम होता है।

5. सिद्ध कीजिए कि तीन क्रमागत सम संख्याओं का योग 6 से भाज्य होता है।

6. सिद्ध कीजिए कि उस रेखा पर अपिरमित रूप से अनेक बिंदु होते हैं जिसका समीकरण $y = 2x$ है।

(*संकेत* **:** बिंदु $(n, 2n)$ लीजिए, जहाँ n कोई पूर्णांक है।)

7. आपके मित्र ने कभी आपको कहा होगा कि आप अपने मन में एक संख्या सोच लीजिए और उसके साथ विभिन्न क्रियाएँ कीजिए, और तब आपकी मूल संख्या जाने बिना ही उसने बता दिया होगा कि वह वास्तविक संख्या कौन-सी थी। आपके पास कौन-सी संख्या बची है। यहाँ दो उदाहरण दिए गए हैं। सिद्ध कीजिए कि ये दोनों उदाहरण सत्य क्यों हैं?

(i) एक संख्या लीजिए, उसका दो गुना कीजिए, उसमें नौ जोड़िए, अपनी मूल संख्या जोड़िए। इसे तीन से भाग दीजिए। अपनी मूल संख्या को इसमें से घटाइए। आपका परिणाम 7 है।

(ii) कोई भी तीन अंकों वाली एक संख्या लीजिए (उदाहरण के लिए 425 लीजिए) इन अंकों को उसी क्रम में दोबारा लिखकर एक छ अंक वाली संख्या बनाइए (425425)। आपकी नई संख्या 7,11 और 13 से भाज्य है।

A1.6 सारांश

इस परिशिष्ट में, आपने निम्नलिखित बिंदुओं का अध्ययन किया है:

1. गणित में कोई कथन तब स्वीकार्य होता है जबकि यह कथन सदैव सत्य हो या असत्य हो।

2. यह दर्शाने के लिए कि गणितीय कथन असत्य है एक प्रत्युदाहरण ज्ञात कर लेना ही पर्याप्त होता है।

3. अभिगृहीत वे कथन हैं जिन्हें उपपत्ति बिना सत्य मान लिया गया है।

4. एक कंजेक्चर वह कथन है जिसे हम अपने गणितीय अंतर्ज्ञान के आधार पर सत्य मान लेते हैं, परन्तु जिन्हें हमें अभी सिद्ध करना है।

5. उस गणितीय कथन को, जिसकी सत्यता स्थापित (या सिद्ध) कर दी गई है, प्रमेय कहा जाता है।

6. गणितीय कथनों को सिद्ध करने का एक मुख्य तार्किक साधन निगमनिक तर्कण है।

7. उपपत्ति गणितीय कथनों का एक उत्तरोत्तर अनुक्रम होती है। उपपत्ति का प्रत्येक कथन पहले से ज्ञात कथन से, या पहले सिद्ध किए गए प्रमेय से, या एक अभिगृहीत से, या परिकल्पनाओं से तार्किक रूप से निगमित किया जाता है।

परिशिष्ट 2

गणितीय निदर्शन का परिचय

A2.1 भूमिका

आप प्रारंभिक कक्षाओं से ही, अपने वास्तविक जगत से जुड़ी समस्याएँ हल करते आए हैं। उदाहरण के लिए, आपने साधारण ब्याज के प्रश्न संबंधित सूत्र का प्रयोग करके हल किए हैं। यह सूत्र (या समीकरण) ब्याज और इससे संबंधित अन्य तीन राशियों अर्थात् मूलधन, ब्याज-दर और अवधि के बीच का एक संबंध है। यह सूत्र **गणितीय प्रतिरूप** या **निदर्श** (**mathematical model**) का एक उदाहरण है। **गणितीय निदर्श** (**प्रतिरूप**) एक गणितीय संबंध होता है जो वास्तविक जीवन से जुड़ी किसी स्थिति की व्याख्या करता है।

गणितीय निदर्शों का प्रयोग वास्तविक जीवन से जुड़ी अनेक स्थितियों का हल ज्ञात करने में किया जाता है, जैसे

- उपग्रह छोड़ना।
- मानसून के आने की प्रागुक्ति करना।
- वाहनों से होने वाले प्रदूषण को नियंत्रित करना।
- बड़े शहरों में ट्रैफिक जाम को कम करना।

इस अध्याय में, हम आपको गणितीय निदर्श बनाने के प्रक्रम से, जिसे **गणितीय प्रतिरूपण** या **गणितीय निदर्शन** (**mathematical modelling**) कहा जाता है, परिचित कराएँगे। गणितीय निदर्शन में हम वास्तविक जीवन से जुड़ी एक समस्या लेते हैं और इसे एक तुल्य गणितीय समस्या के रूप में लिखते हैं। फिर हम गणितीय समस्या का हल करते हैं और इसके हल का निर्वचन (की व्याख्या) वास्तविक जीवन से जुड़ी समस्या के पदों में करते हैं। इसके बाद, हम देखते हैं कि यह हल वास्तविक जीवन से जुड़ी समस्या के संदर्भ में, किस सीमा तक मान्य है। अतः, गणितीय निदर्शन में लागू होने वाले *चरण* होते हैं: *सूत्रण* (*formulation*), *हल* (*solution*), निर्वचन (*व्याख्या*) (*interpretation*) और *मान्यकरण* (*validation*)।

सबसे पहले हम उस प्रक्रम को लेंगे जिसका प्रयोग आप अनुच्छेद A2.2 में शब्द-समस्याओं को हल करने में करेंगे। यहाँ हम कुछ शब्द-समस्याओं पर चर्चा करेंगे जो आपके द्वारा पिछली कक्षाओं में हल की गई समस्याओं के समान हैं। बाद में चलकर आप यह देखेंगे कि जिन चरणों का प्रयोग आपने शब्द-समस्याओं को हल करने में किया है, उनमें से कुछ चरणों का प्रयोग गणितीय निदर्शन में भी किया जाता है।

अगले अनुच्छेद अर्थात् A2.3 में हम कुछ सरल निदर्शों (models) पर चर्चा करेंगे।

अनुच्छेद A2.4 में हम निदर्शन के समग्र प्रक्रम (overall process) उसके लाभ और उसकी कुछ सीमाओं पर चर्चा करेंगे।

A2.2 शब्द समस्याओं का पुनर्विलोकन

इस अनुच्छेद में, हम कुछ शब्द-समस्याओं पर चर्चा करेंगे जो उन समस्याओं के समान हैं जिन्हें आप पिछली कक्षाओं में हल कर चुके हैं। आइए हम सबसे पहले अनुक्रमानुपाती विचरण से संबंधित एक समस्या लें।

उदाहरण 1 : मैंने अपनी कार से 432 km की दूरी तय की और इसमें 48 लीटर पेट्रोल लगा। मुझे अपनी कार से उस स्थान तक जाना है जो 180 km दूर है। इसके लिए मुझे कितने पेट्रोल की आवश्यकता होगी?

हल : यहाँ हम इस समस्या को हल करने में प्रयुक्त चरणों का उल्लेख करेंगे।

चरण 1 : सूत्रण : हम जानते हैं कि हम जितनी अधिक दूरी तय करेंगे उतने ही अधिक पेट्रोल की आवश्यकता होती है, अर्थात् पेट्रोल की मात्रा तय की गई दूरी के अनुक्रमानुपाती होगी।

432 km की दूरी तय करने के लिए आवश्यक पेट्रोल की मात्रा = 48 लीटर

180 km की दूरी तय करने के लिए आवश्यक पेट्रोल की मात्रा = ?

गणितीय वर्णन : मान लीजिए

x = मेरे द्वारा तय की जाने वाली दूरी

y = मेरे लिए आवश्यक पेट्रोल की मात्रा

y , x के अनुक्रमानुपाती है।

अतः, $y = kx$, जहाँ k एक अचर है।

मैं, 48 लीटर पेट्रोल में 432 km की दूरी तय कर सकता हूँ।

अतः, $y = 48, x = 432$

इसलिए, $$k = \frac{y}{x} = \frac{48}{432} = \frac{1}{9}$$

क्योंकि $$y = kx \text{ है,}$$

इसलिए $$y = \frac{1}{9}x \qquad (1)$$

समीकरण (या सूत्र) (1) आवश्यक पेट्रोल की मात्रा और तय की गई दूरी के बीच का संबंध बताती है।

चरण 2 : हल : हमें 180 km की दूरी तय करने के लिए आवश्यक पेट्रोल की मात्रा ज्ञात करनी है। अतः हमें y का मान ज्ञात करना है, जबकि $x = 180$ है। समीकरण (1) में $x = 180$ रखने पर, हमें यह प्राप्त होता है:

$$y = \frac{180}{9} = 20$$

चरण 3 : निर्वचन (व्याख्या) : क्योंकि $y = 20$ है, इसलिए 180 km की दूरी तय करने के लिए हमें 20 लीटर पेट्रोल की आवश्यकता होगी।

क्या यह बात आपकी समझ में आई है या नहीं कि सभी स्थितियों में सूत्र (1) को लागू नहीं किया जा सकता? उदाहरण के लिए, मान लीजिए कि 432 km वाला मार्ग पहाड़ों में होकर है और 180 km वाला मार्ग समतल मैदान में है। पहाड़ी मार्ग से तो कार में पेट्रोल की खपत कुछ तेज दर से होगी, परन्तु 180 km वाले मार्ग से कार में पेट्रोल की खपत इस दर से नहीं होगी, अपितु धीमी दर से होगी। अतः यह सूत्र तभी लागू होता है जबकि वे सभी स्थितियाँ जो उस दर को प्रभावित करती हैं जिससे दोनों यात्राओं में पेट्रोल की खपत दर समान हो। या, यदि स्थितियों में अंतर हो, तो कार के लिए आवश्यक पेट्रोल की मात्रा पर इस अंतर का प्रभाव बहुत कम होगा। केवल ऐसी स्थिति में ही पेट्रोल की खपत तय की गई दूरी के अनुक्रमानुपाती होगी। समस्या हल करते समय, हम इसे मान कर चलते हैं, अर्थात् इसे हम परिकल्पलित कर लेते हैं।

उदाहरण 2 : मान लीजिए सुधीर ने 8% की साधारण वार्षिक ब्याज दर से ₹ 15000 निवेश किए हैं। निवेश से उसे जो धनराशि मिलती है उससे वह एक वाशिंग मशीन, जिसकी कीमत ₹ 19000 है, खरीदना चाहता है। बताइए कि वह कितनी अवधि के लिए ₹ 15000 निवेश करे जिससे कि वाशिंग मशीन खरीदने के लिए उसे पर्याप्त धनराशि प्राप्त हो जाए?

हल : चरण 1 : समस्या का सूत्रण : यहाँ हमें मूलधन और ब्याज-दर ज्ञात है। ब्याज वह धनराशि है जो कि वाशिंग मशीन खरीदने के लिए आवश्यक ₹ 15000 से अतिरिक्त धनराशि है। हमें वर्षों की संख्या ज्ञात करनी है।

गणितीय वर्णन : साधारण ब्याज का सूत्र $I = \frac{Pnr}{100}$ है,

जहाँ $$P = \text{मूलधन}$$

$$n = \text{वर्षों की संख्या}$$

$$r\ \% = \text{ब्याज-दर}$$

$$\mathrm{I} = \text{अर्जित ब्याज}$$

यहाँ मूलधन = ₹15000

सुधीर द्वारा वाशिंग मशीन खरीदने के लिए आवश्यक धन = ₹19000

अतः, अर्जित किया जाने वाला ब्याज = ₹19000 – 15000

= ₹4000

वर्षों की वह संख्या जिसमें ₹15000 की राशि जमा की गई है = n

8% की दर पर n वर्षों में ₹15000 पर ब्याज = I

तब,
$$\mathrm{I} = \frac{15000 \times n \times 8}{100}$$

अतः,
$$\mathrm{I} = 1200\,n \qquad (1)$$

उपरोक्त से वर्षों की संख्या और ब्याज के बीच का संबंध प्राप्त हो जाता है, जबकि 8% की वार्षिक दर पर ₹15000 निवेश किए गए हों।

हमें वह अवधि ज्ञात करना है जिसमें अर्जित ब्याज ₹4000 है। समीकरण (1) में $\mathrm{I} = 4000$ रखने पर, हमें यह प्राप्त होता है:

$$4000 = 1200\,n \qquad (2)$$

चरण 2 : समस्या का हल : समीकरण (2) का हल करने पर, हमें यह प्राप्त होता है:

$$n = \frac{4000}{1200} = 3\frac{1}{3}$$

चरण 3 : निर्वचन : क्योंकि $n = 3\frac{1}{3}$ और एक वर्ष का तिहाई 4 महीने होते हैं, इसलिए 3 वर्ष और 4 महीने बाद सुधीर वाशिंग मशीन खरीद सकता है।

क्या आप उन परिकल्पनाओं का अनुमान लगा सकते हैं, जिन्हें आपको ऊपर के उदाहरण में करना है? हम यहाँ यह मान लेते हैं कि उस अवधि में भी ब्याज-दर वही बनी रहेगी जिसमें हम ब्याज परिकलित करते हैं, अन्यथा सूत्र $\mathrm{I} = \frac{Pnr}{100}$ लागू नहीं होगा। हमने यह भी मान लिया है कि उस समय तक वाशिंग मशीन की कीमत में कोई वृद्धि नहीं होती, जब तक कि सुधीर आवश्यक धनराशि एकत्रित नहीं कर लेता।

उदाहरण 3 : एक मोटर-बोट एक नदी में ऊर्ध्वप्रवाह (upstream) जाकर, नदी के किनारे बसे दो नगरों के बीच की दूरी छः घंटे में तय करती है। यही दूरी वह अनुप्रवाह (downstream) पाँच घंटे में तय करती है। यदि धारा की चाल 2 km/h हो, तो शांत जल में बोट की चाल ज्ञात कीजिए।

हल : चरण 1 : सूत्रण : हमें नदी की धारा की चाल और दो स्थानों के बीच की दूरी तय करने का समय ज्ञात है। हमें शांत जल में बोट की चाल ज्ञात करनी है।

गणितीय वर्णन : मान लीजिए बोट की चाल x km/h है, लिया गया समय t घंटा है और तय की दूरी y km/h है। तब,

$$y = tx \qquad (1)$$

है। मान लीजिए दो स्थानों के बीच की दूरी d km है।

ऊर्ध्वप्रवाह जाने में बोट की वास्तविक चाल = बोट की चाल – धारा की चाल,

क्योंकि बोट नदी के प्रवाह के विरुद्ध जा रही है।

अत: ऊर्ध्वप्रवाह में, बोट की चाल = $(x - 2)$ km/h

यदि यह ऊर्ध्वप्रवाह दो नगरों के बीच की दूरी तय करने में 6 घंटे लेती हो, तो समीकरण (1) से हमें यह प्राप्त होता है:

$$d = 6(x - 2) \qquad (2)$$

अनुप्रवाह जाते समय बोट की चाल में नदी की चाल जोड़नी होती है।

अत: अनुप्रवाह में, बोट की चाल = $(x + 2)$ km/h

अनुप्रवाह इसी दूरी को तय करने में बोट 5 घंटा लेती है।

अत:,

$$d = 5(x + 2) \qquad (3)$$

(2) और (3) से, हमें यह प्राप्त होता है:

$$5(x + 2) = 6(x - 2) \qquad (4)$$

चरण 2 : हल ज्ञात करना

समीकरण (4) को x में हल करने पर, हमें $x = 22$ प्राप्त होता है।

चरण 3 : निर्वचन

क्योंकि $x = 22$ है, इसलिए शांत जल में मोटर-बोट की चाल 22 km/h होगी।

ऊपर के उदाहरण में, हम जानते हैं कि हर जगह नदी की चाल समान नहीं होती। किनारे के निकट यह धीरे प्रवाहित होती है और बीच धारा में तेज प्रवाहित होती है। बोट किनारे से चलना प्रारंभ करती है और नदी की बीच धारा की ओर जाती है। जब यह गंतव्य स्थान के निकट आ जाती है, तो इसकी चाल किनारे के निकट आते हुए कम होती जाती है। अत: बीच धारा में बोट की चाल और किनारे पर बोट की चाल में थोड़ा अंतर होता है। क्योंकि यह किनारे के निकट बहुत कम समय तक रहती

है, इसलिए नदी की चाल का यह अंतर केवल थोड़ी अवधि के लिए ही प्रभावित करता है। अतः नदी की चाल में हम इस अंतर की उपेक्षा कर सकते हैं। बोट की चाल में हुए थोड़े परिवर्तन की भी हम उपेक्षा कर सकते हैं। साथ ही, नदी की चाल के अतिरिक्त पानी (जल) और बोट की सतह के बीच का घर्षण भी बोट की वास्तविक चाल को प्रभावित करेगा। यहाँ भी हम यह मान लेते हैं कि यह प्रभाव बहुत कम है।

अतः यहाँ हम यह मान लेते हैं कि:

1. नदी की चाल और बोट की चाल पूरे समय अचर बनी रहती है।
2. बोट और पानी के बीच का घर्षण और वायु के कारण हो रहा घर्षण उपेक्षणीय है।

ऊपर की गई परिकल्पनाओं के आधार पर, हमने शांत जल में बोट की चाल ज्ञात की है।

जैसा कि ऊपर दी गई शब्द-समस्याओं में हमने देखा है कि एक शब्द-समस्या का हल करने में तीन चरण लागू होते हैं। ये चरण निम्नलिखित हैं :

1. **सूत्रण :** हम समस्या का विश्लेषण करते हैं और देखते हैं कि समस्या के हल में कौन-कौन से कारकों का अधिक प्रभाव है। ये **सुसंगत कारक (relevant factors)** कहलाते हैं। हमारे पहले उदाहरण में, सुसंगत कारक तय की गई दूरी और खपत किया गया पेट्रोल है। हमने मार्ग की अवस्था, चलाने की चाल जैसे अन्य कारकों की उपेक्षा कर ली है। अन्यथा समस्या इतनी कठिन हो जाएगी कि इसे हल करना अधिक कठिन हो जाएगा। जिन कारकों की हम उपेक्षा कर देते हैं, उन्हें **असंगत कारक (irrelevant factors)** कहा जाता है।

   तब हम एक या अधिक गणितीय समीकरणों के रूप में समस्या की गणितीयतः व्याख्या करते हैं।

2. **हल :** कुछ उपयुक्त विधियों की सहायता से चरण 1 में प्राप्त गणितीय समीकरणों को हल करके, हम समस्या का हल ज्ञात करते हैं।

3. **निर्वचन :** हम देखते हैं कि चरण 2 में प्राप्त हल का अर्थ मूल शब्द-समस्या के संदर्भ में क्या है।

यहाँ आपके लिए कुछ प्रश्न दिए जा रहे हैं। इन प्रश्नों के लिए ऊपर बताए गए तीन चरणों को लागू करके शब्द-समस्याओं को हल करने में जिन चरणों का प्रयोग किया जाता है, उन्हें आपने समझा है या नहीं। इसकी जाँच आप कर सकते हैं।

प्रश्नावली A 2.1

नीचे दी गई प्रत्येक समस्या में स्पष्ट रूप से बताइए कि ऊपर दिए गए चरणों 1, 2 और 3 को लागू करने में सुसंगत और असंगत कौन-कौन से कारक हैं।

1. मान लीजिए एक कंपनी को कुछ समय के लिए एक कंप्यूटर की आवश्यकता है। कंपनी या तो ₹ 2000 प्रति माह की दर से कंप्यूटर किराए पर ले सकती है या ₹ 25000 में एक

कंप्यूटर खरीद सकती है। यदि कंपनी को लंबी अवधि तक कंप्यूटर का प्रयोग करना है, तो कंपनी को इतना किराया देना पड़ेगा कि इससे सस्ता तो यह होगा कि वह कंप्यूटर खरीद ले। इसके विपरीत, यदि कंपनी को थोड़े समय, अर्थात् केवल एक महीने के लिए ही कंप्यूटर का प्रयोग करना है, तो ऐसी स्थिति में किराए पर कंप्यूटर लेना अधिक सस्ता पड़ेगा। उन महीनों की संख्या बताइए जिसके बाद कंप्यूटर को खरीदना अधिक सस्ता पड़ेगा।

2. मान लीजिए एक कार स्थान A से चलना प्रारंभ करती है और वह एक अन्य स्थान B की ओर 40 km/h की चाल से जाती है। उसी समय एक अन्य कार स्थान B से चलना प्रारंभ करती है और वह A की ओर 30 km/h की चाल से जाती है। यदि A और B के बीच की दूरी 100 km है, तो बताइए कि कितने समय बाद एक कार दूसरी कार से मिलेगी।

3. पृथ्वी से चंद्रमा लगभग 384000 km की दूरी पर है और पृथ्वी के प्रति परिक्रमा करने का पथ लगभग वृत्तीय है। यह मानकर कि चंद्रमा पृथ्वी की परिक्रमा 24 घंटे में पूरा करता है, बताइए कि किस चाल से चंद्रमा पृथ्वी की परिक्रमा करेगा। ($\pi = 3.14$ लीजिए)

4. एक परिवार उन महीनों में, जिनमें वह वाटर हीटर का प्रयोग नहीं करता, बिजली के लिए औसतन ₹ 1000 भुगतान करता है। जिन महीनों में वह वाटर हीटर का प्रयोग करता है, उन महीनों में बिजली का औसत बिल ₹ 1240 आता है। वाटर हीटर का प्रयोग करने की लागत ₹ 8 प्रति घंटा है। एक दिन में वाटर हीटर का प्रयोग जितने औसत घंटों के लिए किया जाता है उसे ज्ञात कीजिए।

A2.3 कुछ गणितीय निदर्श

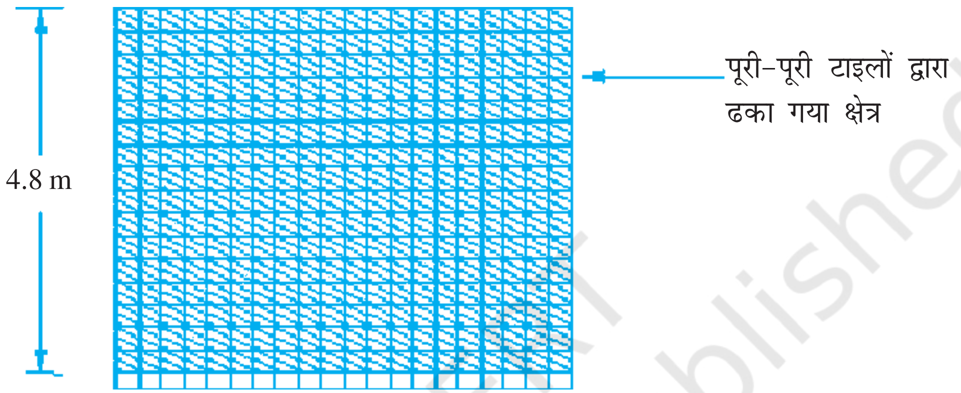
अभी तक अपनी चर्चा में हमने कोई नई बात नहीं कही है। इस अनुच्छेद में, हम पहले बताए गए चरणों में एक और चरण बढ़ा देंगे। इस चरण को **मान्यकरण (validation)** कहा जाता है। मान्यकरण का अर्थ क्या है? आइए हम देखें कि इसका अर्थ क्या है। वास्तविक जीवन से जुड़ी स्थिति में, हम उस निदर्श को स्वीकार नहीं कर सकते जिससे प्राप्त उत्तर वास्तविकता से मेल नहीं खाता हो। वास्तविकता के विरुद्ध उत्तर की जाँच करने और यदि आवश्यक हो तो, गणितीय वर्णन में आपरिवर्तन करने के इस प्रक्रम को *मान्यकरण* कहा जाता है।

यह निदर्शन का एक अति महत्वपूर्ण चरण है। इस अनुच्छेद में, हम आपको इस चरण से परिचित कराएँगे।

इस संदर्भ में आइए पहले हम एक उदाहरण लें, जहाँ हमें मान्यकरण के बाद अपने निदर्श का आपरिवर्तन (modification) करने की आवश्यकता नहीं होती।

उदाहरण 4 : मान लीजिए आपके पास 6 मीटर लंबा और 5 मीटर चौड़ा एक कमरा है। आप इस कमरे के फर्श पर 30 cm की भुजा वाली वर्गाकार मोजाइक टाइलों को लगवाना चाहते हैं। इसके लिए कितनी टाइलों की आवश्यकता होगी? एक गणितीय निदर्श बनाकर इसे हल कीजिए।

हल : सूत्रण : इस समस्या को हल करने के लिए, हमें कमरे का क्षेत्रफल और एक टाइल का क्षेत्रफल लेना होता है। टाइल की एक भुजा की लंबाई 0.3 मीटर है। क्योंकि कमरे की लंबाई 6 मीटर है, इसलिए कमरे की लंबाई के अनुदिश एक पंक्ति में $\frac{6}{0.3} = 20$ टाइलें लगाई जा सकती हैं (देखिए आकृति A2.1)।



आकृति A 2.1

क्योंकि कमरे की चौड़ाई 5 मीटर है, और $\frac{5}{0.3} = 16.67$ है, अत:, एक स्तंभ में हम 16 टाइलें लगा सकते हैं। क्योंकि $16 \times 0.3 = 4.8$ है, इसलिए चौड़ाई के अनुदिश $5 - 4.8 = 0.2$ मीटर स्थान पर टाइलें नहीं लगी होंगी। इस भाग में (खाली स्थान में) साइज के अनुसार टाइलों को काटकर लगाना होगा। टाइल से बिना ढके फर्श की चौड़ाई 0.2 मीटर है, जो टाइल की लंबाई 0.3 m के आधे से अधिक है। अत:, हम एक टाइल को दो बराबर-बराबर आधे भागों में नहीं बाँट सकते और शेष भाग को ढकने के लिए दोनों आधे भागों का प्रयोग नहीं कर सकते।

गणितीय वर्णन:

आवश्यक टाइलों की कुल संख्या = (लंबाई के अनुदिश टाइलों की संख्या × चौड़ाई में टाइलों की संख्या) + बिना ढके हुए क्षेत्र पर टाइलों की संख्या (1)

हल : जैसा कि हम ऊपर कह चुके हैं कि लंबाई के अनुदिश टाइलों की संख्या 20 है और चौड़ाई के अनुदिश टाइलों की संख्या 16 है। अंतिम पंक्ति के लिए, हमें 20 और टाइलों की आवश्यकता होगी। इन मानों को (1) में प्रतिस्थापित करने पर, हमें यह प्राप्त होता है:

$$(20 \times 16) + 20 = 320 + 20 = 340$$

निर्वचन : फर्श पर लगाने के लिए 340 टाइलों की आवश्यकता होगी।

मान्यकरण : व्यावहारिक जीवन में आपका मिस्त्री आपसे कुछ और टाइल मांग सकता है, क्योंकि साइज के अनुसार काटते समय टाइलें टूट-फूट गई थीं। आपका मिस्त्री इस काम में कितना कुशल है उस पर ही टाइलों की संख्या निर्भर करेगी। परन्तु, इसके लिए समीकरण (1) का आपरिवर्तन करने की आवश्यकता नहीं है। इससे हमें एक स्थूल अनुमान (rough estimate) मिल जाता है कि कितनी टाइलों की आवश्यकता होगी। अत:, यहाँ हम रुक सकते हैं।

आइए अब हम एक अन्य स्थिति लें।

उदाहरण 5 : वर्ष 2000 में संयुक्त राष्ट्र के 191 सदस्य देशों ने एक घोषणा पर हस्ताक्षर किए। अपनी घोषणा में ये सभी देश, वर्ष 2015 तक कुछ विकास लक्ष्य प्राप्त करने पर सहमत थे। इन लक्ष्यों को *मिलेनियम विकास लक्ष्य* कहा जाता है। इनमें से एक लक्ष्य लिंग समानता को बढ़ाना है। यह लक्ष्य प्राप्त कर लिया गया है कि नहीं, इसका एक सूचक प्राथमिक, माध्यमिक और तृतीयक (tertiary) शिक्षा में लड़कियों और लड़कों का अनुपात है। भारत में, जो कि घोषणा पर हस्ताक्षर करने वाला एक सदस्य देश है, इस अनुपात में वृद्धि हुई है। उन लड़कियों के प्रतिशत आंकड़े, जिन्होंने विद्यालय में प्रवेश लिया है, सारणी A 2.1 में दिए गए हैं।

सारणी A 2.1

वर्ष	नामांकन (% में)
1991-92	41.9
1992-93	42.6
1993-94	42.7
1994-95	42.9
1995-96	43.1
1996-97	43.2
1997-98	43.5
1998-99	43.5
1999-2000	43.6*
2000-01	43.7*
2001-02	44.1*

स्रोत : *शैक्षिक आंकड़े, वेब पेज, शिक्षा विभाग भारत सरकार*

* *बताता है कि आंकड़े अनंतिम है।*

इन आंकड़ों का प्रयोग करके, गणितीय रूप में वह दर बताइए जिस अनुपात पर प्राथमिक विद्यालयों में भर्ती की गई लड़कियों की संख्या बढ़ रही है। उस वर्ष का भी अनुमान लगाइए जबकि भर्ती की गई लड़कियों की संख्या 50% तक पहुँच जाएगी।

हल : आइए पहले हम इस समस्या को एक गणितीय समस्या में बदल दें।

चरण 1 : सूत्रण : *सारणी* A2.1 में वर्ष 1991–92, 1992–93 आदि के नामांकन दिए गए हैं। क्योंकि विद्यार्थी शैक्षिक वर्ष के प्रारंभ में प्रवेश लेते हैं, इसलिए हम वर्षों को 1991, 1992 आदि ले सकते हैं। आइए हम यह मान लें कि प्राथमिक विद्यालयों में प्रवेश लेने वाली लड़कियों के प्रतिशत में उसी दर से वृद्धि होती रहती है जैसा कि सारणी A2.1 में दिया गया है। अत: विशिष्ट वर्ष का महत्व नहीं है, अपितु वर्षों की संख्या का महत्व है (इसी प्रकार की स्थिति तब थी जबकि 8% की दर से तीन वर्षों के लिए ₹ 15000 का साधारण ब्याज ज्ञात किया था। यहाँ इस बात का कोई महत्व नहीं है कि तीन वर्ष की अवधि 1999 से 2003 है या 2001 से 2004 है (महत्वपूर्ण है वर्षों में ब्याज दर का होना)। यहाँ भी, हम यह देखेंगे कि 1991 के बाद नामांकन में किस प्रकार वृद्धि हुई है। ऐसा हम 1992 के बाद बीत गए वर्षों की संख्या और संगत नामांकन की तुलना द्वारा करेंगे। आइए हम 1991 को 0 वाँ वर्ष मान लें और 1992 के लिए 1 लिखें, क्योंकि 1991 के बाद 1992 तक 1 वर्ष निकल गया है। इसी प्रकार, 1993 के लिए 2, 1994 के लिए 3 आदि लिखेंगे। अत:, अब सारणी A2.1, सारणी A 2.2 के समान दिखाई पड़ेगी।

सारणी A2.2

वर्ष	नामांकन (% में)
0	41.9
1	42.6
2	42.7
3	42.9
4	43.1
5	43.2
6	43.5
7	43.5
8	43.6
9	43.7
10	44.1

नामांकन में हुई वृद्धि नीचे सारणी में दी गई है:

सारणी A2.3

वर्ष	नामांकन (% में)	वृद्धि
0	41.9	0
1	42.6	0.7
2	42.7	0.1
3	42.9	0.2
4	43.1	0.2
5	43.2	0.1
6	43.5	0.3
7	43.5	0
8	43.6	0.1
9	43.7	0.1
10	44.1	0.4

1991 से 1992 तक की एक वर्ष की अवधि में नामांकन 41.9% से बढ़कर 42.6% तक हो गया। अर्थात् नामांकन में 0.7% की वृद्धि हुई है। दूसरे वर्ष के अंत में, इसमें 0.1% की वृद्धि हुई है अर्थात् यह 42.6% से बढ़कर 42.7% हो गया है। ऊपर की सारणी से, हम वर्षों की संख्या और प्रतिशत में कोई निश्चित संबंध प्राप्त नहीं कर सकते। परन्तु वृद्धि अपरिवर्ती बनी रहती है। केवल पहले वर्ष में और दसवें वर्ष में अधिक वृद्धि हुई है। इन मानों का माध्य यह है:

$$\frac{0.7 + 0.1 + 0.2 + 0.2 + 0.1 + 0.3 + 0 + 0.1 + 0.1 + 0.4}{10} = 0.22$$

आइए हम यह मान लें कि नामांकन में अपरिवर्ती रूप से (steadily) 0.22 प्रतिशत की दर से वृद्धि हो रही है।

गणितीय वर्णन : हमने यह मान लिया है कि नामांकन में 0.22% प्रति वर्ष की दर से अपरिवर्ती रूप से वृद्धि हो रही है।

अत:, पहले वर्ष में नामांकन प्रतिशत (EP) $= 41.9 + 0.22$

दूसरे वर्ष में, EP $= 41.9 + 0.22 + 0.22 = 41.9 + 2 \times 0.22$

तीसरे वर्ष में, EP $= 41.9 + 0.22 + 0.22 + 0.22 = 41.9 + 3 \times 0.22$

अत:, nवें वर्ष में नामांकन प्रतिशत $= 41.9 + 0.22n$, जहाँ $n \geq 1$ है। (1)

अब, हमें वर्षों की वह संख्या भी ज्ञात करनी है जिसमें नामांकन 50% पहुँच जाएगा। अतः हमें निम्नलिखित समीकरण से n का मान ज्ञात करना है:

$$50 = 41.9 + 0.22n \qquad (2)$$

चरण 2 : हल : n के लिए (2) को हल करने पर, हमें यह प्राप्त होता है:

$$n = \frac{50 - 41.9}{0.22} = \frac{8.1}{0.22} = 36.8$$

चरण 3 : निर्वचन : क्योंकि वर्षों की संख्या एक पूर्णांकीय मान है, इसलिए हम अगला उच्च पूर्णांक 37 लेंगे। अतः, $1991 + 37 = 2028$ में नामांकन प्रतिशत 50% हो जाएगा।

शब्द-समस्या को तो प्रायः हम यहीं तक हल करते हैं। लेकिन, चूँकि हम वास्तविक जीवन से जुड़ी स्थिति पर अध्ययन कर रहे हैं, इसलिए हमें यह देखना होगा कि किस सीमा तक यह मान वास्तविक स्थिति से मेल खाता है।

चरण 4 : मान्यकरण : आइए हम यह देखें कि सूत्र (2) वास्तविकता से मेल खाता है कि नहीं। आइए हम सूत्र (2) का प्रयोग करके ज्ञात वर्षों के मान ज्ञात करें और अंतर ज्ञात करके, ज्ञात मानों के साथ इनकी तुलना करें। सारणी A2.4 में ये मान दिए गए हैं।

सारणी A2.4

वर्ष	नामांकन (% में)	(2) द्वारा दिए गए मान (% में)	अंतर (% में)
0	41.9	41.90	0
1	42.6	42.12	0.48
2	42.7	42.34	0.36
3	42.9	42.56	0.34
4	43.1	42.78	0.32
5	43.2	43.00	0.20
6	43.5	43.22	0.28
7	43.5	43.44	0.06
8	43.6	43.66	–0.06
9	43.7	43.88	–0.18
10	44.1	44.10	0.00

जैसा कि आप देख सकते हैं कि सूत्र (2) द्वारा दिए गए कुछ मान वास्तविक मान से लगभग 0.3% से 0.5% तक कम हैं। इससे लगभग 3 से 5 वर्षों का अंतर आ सकता है, क्योंकि वास्तव में प्रति वर्ष वृद्धि 1% से 2% तक है। इतना अंतर स्वीकार्य हो सकता है और हम यहीं रुक सकते हैं। इस स्थिति में, हमारा गणितीय निदर्श (2) है।

मान लीजिए कि यह त्रुटि काफी बड़ी है और हमें इस निदर्श में सुधार लाना है। तब हमें चरण 1 पर पुनः लौटकर जाना होगा, पुनः सूत्रण करना होगा और समीकरण (1) को बदलना होगा। आइए हम इसे करें।

चरण 1 : पुनःसूत्रण : हम यहाँ भी यह मान लेंगे कि नामाकंन प्रतिशत के मानों में अपरिवर्ती रूप से 0.22% की वृद्धि हो रही है। परन्तु यहाँ अब हम त्रुटि को कम करने के लिए एक संशुद्धि गुणक (correction factor) का प्रयोग करेंगे। इसके लिए हम सभी त्रुटियों का माध्य ज्ञात करते हैं। माध्य यह है:

$$\frac{0.48 + 0.36 + 0.34 + 0.32 + 0.2 + 0.28 + 0.06 - 0.06 - 0.18 + 0}{10} = 0.18$$

हम त्रुटियों का माध्य लेते हैं और इस मान से अपने त्रुटि को संशुद्ध करते हैं।

संशोधित गणितीय वर्णन : आइए अब हम (1) में दिए गए नामांकन प्रतिशत के लिए अपने सूत्र में त्रुटियों का माध्य जोड़ दें। अतः, हमारा संशोधित सूत्र यह हो जाएगा:

nवें वर्ष में प्रतिशत नामांकन $= 41.9 + 0.22n + 0.18 = 42.08 + 0.22n$, जहाँ $n \geq 1$ (3)

हम अपने समीकरण (2) में भी उपयुक्तरूप से आपरिवर्तन करेंगे। n में हमारा नया समीकरण यह होगा:

$$50 = 42.08 + 0.22n \tag{4}$$

चरण 2 : परिवर्तित हल : n के लिए समीकरण (4) को हल करने पर, हमें यह प्राप्त होता है:

$$n = \frac{50 - 42.08}{0.22} = \frac{7.92}{0.22} = 36$$

चरण 3 : निर्वचन : क्योंकि $n = 36$ है, इसलिए वर्ष $1991 + 36 = 2027$ में प्राथमिक विद्यालयों में लड़कियों का नामांकन 50% तक पहुँच जाएगा।

चरण 4 : मान्यकरण : आइए हम पुनः सूत्र (4) की सहायता से प्राप्त मानों की तुलना वास्तविक मानों से करें। सारणी A 2.5 में मानों की यह तुलना दी गई है।

सारणी A2.5

वर्ष	नामांकन (% में)	(2) द्वारा दिए गए मान	मानों के बीच का अंतर	(4) द्वारा दिए गए मान	मानों के बीच का अंतर
0	41.9	41.90	0	41.9	0
1	42.6	42.12	0.48	42.3	0.3
2	42.7	42.34	0.36	42.52	0.18
3	42.9	42.56	0.34	42.74	0.16
4	43.1	42.78	0.32	42.96	0.14
5	43.2	43.00	0.2	43.18	0.02
6	43.5	43.22	0.28	43.4	0.1
7	43.5	43.44	0.06	43.62	– 0.12
8	43.6	43.66	– 0.06	43.84	– 0.24
9	43.7	43.88	– 0.18	44.06	– 0.36
10	44.1	44.10	0	44.28	– 0.18

जैसा कि आप देख सकते हैं कि (2) से प्राप्त मानों की तुलना में (4) से प्राप्त अनेक मान वास्तविक मान के अधिक निकट हैं। इस स्थिति में त्रुटियों का माध्य 0 है।

हम अपने प्रक्रम को यहीं रोक देंगे। अतः, समीकरण (4) हमारा गणितीय वर्णन है जो कि वर्षों और कुल नामांकन में लड़कियों के प्रतिशत नामांकन के बीच का गणितीय संबंध स्थापित करता है। हमने एक गणितीय निदर्श का निर्माण किया है, जो वृद्धि की व्याख्या करता है।

वह प्रक्रम, जिसका हमने ऊपर की स्थिति में अनुसरण किया है, उसे गणितीय निदर्शन (mathematical modelling) कहा जाता है।

हमने उपलब्ध गणितीय साधनों से एक गणितीय निदर्श का निर्माण करने का प्रयास किया है। उपलब्ध आंकड़ों से प्रागुक्तियाँ करने के उत्तम गणितीय साधन भी उपलब्ध हैं। परन्तु वे इस पाठ्यक्रम के अध्ययन क्षेत्र से बाहर हैं। इस निदर्श को बनाने का हमारा उद्देश्य आपको निदर्शन प्रक्रम से परिचित कराना है, न कि इस चरण पर परिशुद्ध प्रागुक्तियाँ (accurate predictions) करना।

आप अभी तक की गई चर्चा को कितना समझ पाए हैं इसके लिए हम चाहेंगे कि आप वास्तविक जीवन से जुड़ी कुछ स्थितियों का निदर्शन करें। यहाँ आपके लिए एक प्रश्नावली दी जा रही है।

प्रश्नावली A 2.2

1. ओलंपिक खेलों में जबसे 400 मीटर की दौड़ शुरू हुई है तब से स्वर्ण पदक पाने वालों का समय नीचे की सारणी में दिया गया है। वर्षों और समयों से संबंधित एक गणितीय निदर्श बनाइए। इसका प्रयोग अगले ओलंपिक में लगने वाले समय का आकलन करने में कीजिए:

सारणी A 2.6

वर्ष	समय (सेकंडों में)
1964	52.01
1968	52.03
1972	51.08
1976	49.28
1980	48.88
1984	48.83
1988	48.65
1992	48.83
1996	48.25
2000	49.11
2004	49.41

A 2.4 निदर्शन प्रक्रम, इसके लाभ और इसकी सीमाएँ

आइए अब हम गणितीय निदर्शन के उन पहलुओं पर विचार करते हुए, जिन्हें हमने प्रस्तुत उदाहरणों में दिखाया है, अपनी चर्चा यहीं समाप्त करें। पिछले अनुच्छेदों की पृष्ठभूमि से, अब हम इस स्थिति में आ गए हैं कि हम निदर्शन में प्रयुक्त होने वाले चरणों का एक संक्षिप्त परिदृश्य दे सकें।

चरण 1 : सूत्रण : अनुच्छेद A 2.2 के उदाहरण 1 के सूत्रण चरण और A 2.3 में चर्चित निदर्श के सूत्रण चरण के बीच के अंतर की ओर आपने अवश्य ध्यान दिया होगा। उदाहरण 1 में सभी सूचनाएँ तुरंत उपयोगी रूप में हैं। परन्तु A 2.3 में दिए गए निदर्श में ऐसा नहीं है। साथ ही, एक गणितीय वर्णन प्राप्त करने में कुछ समय भी लगा था। हमने अपने पहले सूत्र की जाँच की है, जिसमें पाया कि यह उतना उत्तम नहीं है, जितना कि दूसरा था। व्यापक रूप में, यह प्राय: सत्य होता है। अर्थात् उस स्थिति में जबकि हम वास्तविक जीवन से जुड़ी स्थितियों का निदर्शन करने का प्रयास कर रहे होते हैं, इसमें प्राय: पहले निदर्श को संशोधित करने की आवश्यकता होती है। जब हम वास्तविक जीवन से जुड़ी

समस्या हल कर रहे होते हैं, तो सूत्रण करने में काफी समय लग सकता है। उदाहरण के लिए, न्यूटन के तीन गति-नियम, जो कि गति के गणितीय वर्णन हैं, के कथन सरलता से दिए जा सकते हैं। परन्तु इन नियमों तक पहुँचने के लिए उसे काफी मात्रा में आंकड़ों का अध्ययन करना पड़ा था और उन कार्यों की ओर ध्यान देना पड़ा था जो कि उसके पूर्व के वैज्ञानिकों ने किए थे।

सूत्रण में निम्नलिखित तीन चरण लागू करने होते हैं:

(i) **समस्या का कथन :** प्राय: समस्या का कथन स्थूल रूप से दिया जाता है। उदाहरण के लिए, हमारा स्थूल लक्ष्य तो यह सुनिश्चित करना है कि लड़कों और लड़कियों के नामांकन बराबर हैं। इसका अर्थ यह हो सकता है कि विद्यालय जाने वाले आयु के लड़कों की कुल संख्या का 50% और विद्यालय जाने वाली आयु की लड़कियों की कुल संख्या का 50% नामांकित होनी चाहिए। एक अन्य विधि यह है कि यह सुनिश्चित किया जाय कि विद्यालय जाने वाले बच्चों में से 50% लड़कियाँ हैं। हमने अपनी समस्या में दूसरे दृष्टिकोण को अपनाया है।

(ii) **सुसंगत कारकों को पहचानना :** पहले यह निर्णय लीजिए कि हमारी समस्या में कौन-कौन सी राशियाँ और संबंध महत्वपूर्ण हैं और कौन-कौन महत्वपूर्ण नहीं हैं, जिनकी उपेक्षा की जा सकती है। उदाहरण के लिए, प्राथमिक विद्यालयों में नामांकन संबंधी हमारी समस्या में पिछले वर्ष में नामांकित लड़कियों का प्रतिशत इस वर्ष नामांकित लड़कियों की संख्या को प्रभावित कर सकता है। ऐसा इसलिए है कि विद्यालय में जैसे-जैसे और लड़कियाँ नामांकित होती जाती हैं वैसे-वैसे उनके माता-पिता अनुभव करने लगेंगे कि वे अपनी लड़कियों को भी विद्यालय में भर्ती कराएं। परन्तु, हमने इस कारक की उपेक्षा कर दी है, क्योंकि एक निश्चित प्रतिशत से अधिक नामांकन हो जाने के बाद ही यह महत्वपूर्ण हो सकता है। साथ ही, इस कारक को बढ़ा देने के बाद निदर्श और अधिक जटिल हो सकता है।

(iii) **गणितीय वर्णन :** आइए अब हम यह मान लें कि हमें यह स्पष्ट हो गया है कि समस्या क्या है और इसका कौन-सा पहलू अन्य पहलुओं से अधिक सुसंगत है। तब हमें एक समीकरण, एक आलेख या अन्य उपयुक्त गणितीय वर्णन के रूप में निहित पहलुओं के बीच का संबंध ज्ञात करना होता है। यदि यह एक समीकरण है, तो हमारे गणितीय समीकरण में प्रत्येक महत्वपूर्ण पहलू को एक चर से निरूपित करना चाहिए।

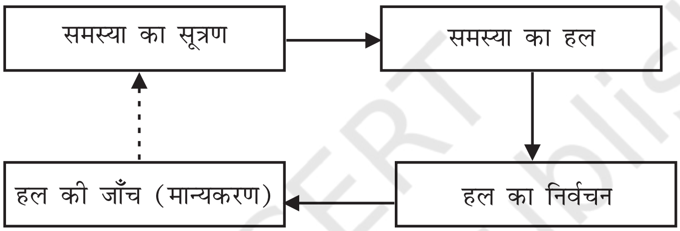
चरण 2 : हल ज्ञात करना : गणितीय सूत्रण से हल प्राप्त नहीं होता। हमें समस्या के इस गणितीय तुल्य को हल करना होता है। यही वह स्थल है जहाँ हमारा गणितीय ज्ञान उपयोगी सिद्ध होता है।

चरण 3 : हल का निर्वचन : गणितीय हल निदर्श के चरों के कुछ मान होते हैं। हमें वास्तविक जीवन से जुड़ी समस्या को पुन: लेना होगा और यह देखना होगा कि समस्या में इन मानों का क्या अर्थ है।

चरण 4 : हल का मान्यकरण : जैसा कि हमने A 2.3 में यह देखा कि हल ज्ञात करने के बाद, हमें यह देखना होगा कि हल वास्तविकता से मेल खाता है कि नहीं। यदि यह मेल खाता है, तो गणितीय निदर्श स्वीकार्य होता है। यदि गणितीय हल मेल नहीं खाता, तो हमें सूत्रण चरण पर पुन: आ जाएँ और हम अपने निदर्श में सुधार लाने का प्रयास करें।

प्रक्रम के इस चरण में शब्द-समस्याओं को हल करने और गणितीय निदर्शन के बीच एक बड़ा अंतर होता है। निदर्शन में यह एक अति महत्वपूर्ण चरण है जो कि शब्द-समस्याओं में नहीं होता है। हाँ, यह संभव है कि वास्तविक जीवन से जुड़ी स्थितियों में हमें अपने उत्तर का मान्यकरण करने की आवश्यकता नहीं होती क्योंकि समस्या सरल है और हमें सीधे सही हल प्राप्त हो जाता है। अनुच्छेद A2.3 में लिए गए निदर्श में ऐसा ही था।

हमने उस क्रम का संक्षिप्त विवरण दिया है जिसमें नीचे दी गई आकृति A2.2 में गणितीय निदर्शन के चरण लागू किए गए हैं। मान्यकरण चरण से सूत्रण चरण की ओर जाने को **बिंदुकित तीर** से दिखाया गया है। ऐसा इसलिए किया गया है कि हो सकता है इस चरण को पुनः लागू करना आवश्यक न भी हो।



आकृति A2.2

अब, क्योंकि आपने गणितीय निदर्शन से संबंधित चरणों का अध्ययन कर लिया है, इसलिए आइए हम इसके कुछ पहलुओं पर चर्चा कर लें।

गणितीय निदर्शन का उद्देश्य वास्तविक जगत से जुड़ी समस्या के बारे में, उसे गणितीय समस्या में रूपांतरित करके कुछ उपयोगी सूचनाएँ प्राप्त करना है। यह विशेष रूप से तब उपयोगी होता है जबकि सीधे प्रेक्षण करके या प्रयोग करने जैसे अन्य साधनों से सूचना प्राप्त करना या तो संभव न हो या बहुत खर्चीला हो।

आपको यह जानकर भी आश्चर्य हो सकता है कि हमें गणितीय निदर्शन का प्रयोग क्यों करना चाहिए? आइए हम निदर्शन के लाभ पर कुछ चर्चा करें। मान लीजिए हम ताजमहल पर मथुरा रिफाइनरी के विसर्जन के संक्षारक प्रभाव पर अध्ययन करना चाहते हैं। हम ताजमहल पर सीधे प्रयोग नहीं करना चाहेंगे, क्योंकि ऐसा करना सुरक्षित नहीं होगा। वास्तव में, हम इस संबंध में ताजमहल का एक छोटा मॉडल ले सकते हैं। परन्तु इसके लिए हमें विशिष्ट सुविधाओं की आवश्यकता हो सकती है, जोकि काफी खर्चीली हो सकती है। यही वह स्थल है जहाँ गणितीय निदर्शन काफी उपयोगी सिद्ध हो सकता है।

मान लीजिए हम यह ज्ञात करना चाहते हैं कि 5 साल बाद कितने प्राथमिक विद्यालयों की आवश्यकता होगी। तब हम एक गणितीय निदर्श का प्रयोग करके, यह समस्या हल कर सकते हैं। इसी प्रकार, केवल निदर्शन करके वैज्ञानिकों ने अनेक परिघटनाओं की व्याख्या की है।

अनुच्छेद A2.4 में आपने यह देखा है कि उत्तम विधियों को लागू करके दूसरे उदाहरण में हम उत्तर में सुधार लाने का प्रयास कर सकते थे। लेकिन हम वहीं रुक गए, क्योंकि हमारे पास कोई गणितीय साधन उपलब्ध नहीं है। ऐसी स्थिति वास्तविक जीवन में भी हो सकती है। प्राय: हमें सन्निकट उत्तरों से ही संतुष्ट हो जाना पड़ता है, क्योंकि गणितीय साधन उपलब्ध नहीं होते हैं। उदाहरण के लिए, मौसम के निदर्शन में प्रयुक्त निदर्श समीकरण इतने जटिल होते हैं कि यथा स्थिति हल ज्ञात करने के गणितीय साधन उपलब्ध नहीं हैं।

आप आश्चर्य कर सकते हैं कि किस सीमा तक हमें अपने निदर्श में सुधार लाना चाहिए। इसमें सुधार लाने के लिए, प्राय: हमें अन्य कारकों को भी ध्यान में रखने की आवश्यकता होती है। जब हम ऐसा करते हैं, तब हम अपने गणितीय समीकरणों में और चर बढ़ा देते हैं। तब हमें एक अति जटिल निदर्श प्राप्त हो सकता है, जिसका प्रयोग करना कठिन होगा। निदर्श इतना सरल होना चाहिए कि उसका प्रयोग किया जा सके। एक उत्तम निदर्श दो कारकों को संतुलित करता है:

1. परिशुद्धता (accuracy), अर्थात् यह वास्तविकता से कितना निकट है।
2. प्रयोग की सरलता

उदाहरण के लिए, न्यूटन के गति के नियम काफी सरल, परन्तु इतने शक्तिशाली हैं कि इससे अनेक भौतिक स्थितियों का निदर्शन किया जा सकता है।

अत:, क्या गणितीय निदर्शन सभी समस्याओं का उत्तर है, बिल्कुल नहीं! इसकी अपनी सीमाएँ हैं।

अत: यह बात हमें अपने मस्तिष्क में रखना चाहिए कि *निदर्श* वास्तविक जीवन से जुड़ी *समस्या का केवल एक सरलीकरण* है और ये दोनों समान नहीं होते। यह बहुत कुछ उस अंतर के समान है जो किसी देश के भौतिक लक्षणों को दर्शाने वाले मानचित्र और स्वयं उस देश में होता है। इस मानचित्र से हम समुद्र तल से एक स्थान की ऊँचाई तो ज्ञात कर सकते हैं परन्तु हम यहाँ के लोगों के अभिलक्षणों के बारे में कुछ ज्ञात नहीं कर सकते। अत: हमें निदर्श का प्रयोग केवल उद्देश्य को ध्यान में रखकर करना चाहिए और यह भी ध्यान रखना होता है कि इसका निर्माण करते समय हमने किन-किन कारकों की उपेक्षा कर दी है। हमें निदर्श का प्रयोग केवल लागू होने वाली सीमाओं के अंदर ही करनी चाहिए। आगे की कक्षाओं में हम इस पहलू पर कुछ विस्तार से चर्चा करेंगे।

प्रश्नावली A 2.3

1. आपकी पाठ्य पुस्तक में दी गई शब्द-समस्याओं को हल करने में और गणितीय निदर्शन के प्रक्रम में क्या अंतर है?

2. मान लीजिए आप चौराहे पर खड़े वाहनों के प्रतीक्षा-काल को कम-से-कम करना चाहते हैं। निम्नलिखित कारकों में कौन-से कारक महत्वपूर्ण हैं और कौन-से कारक महत्वपूर्ण नहीं हैं?

(i) पेट्रोल की कीमत।

(ii) वह दर जिससे चार अलग-अलग सड़कों से आने वाले वाहन चौराहे पर पहुँचते हैं।

(iii) साइकिल और रिक्शा आदि जैसी धीमी गति से चलने वाले वाहनों और कार तथा मोटर साइकिल जैसी तेज गति से चलने वाले वाहनों का अनुपात।

A 2.5 सारांश

इस परिशिष्ट में, आपने निम्नलिखित बिन्दुओं का अध्ययन किया है:

1. शब्द-समस्याओं को हल करने में प्रयुक्त चरणों का पुनर्विलोकन करना।

2. कुछ गणितीय निदर्शों का निर्माण करना।

3. गणितीय निदर्शन में प्रयुक्त नीचे बॉक्स में दिए गए चरणों पर चर्चा:

1. **सूत्रण :**
   (i) समस्या का कथन लिखना
   (ii) सुसंगत कारकों को पहचानना
   (iii) गणितीय वर्णन
2. **हल ज्ञात करना**
3. **वास्तविक जगत से जुड़ी समस्या के संदर्भ में हल का निर्वचन**
4. **यह देखना कि किस सीमा तक निदर्श अध्ययन की जा रही समस्या का एक उत्तम निरूपण है।**

4. गणितीय निदर्शन का उद्देश्य, लाभ और सीमाएँ।

उत्तर/संकेत

प्रश्नावली 1.1

1. हाँ, $0 = \frac{0}{1} = \frac{0}{2} = \frac{0}{3}$ आदि, हर q को भी ऋण पूर्णांक माना जा सकता है।

2. संख्याओं 3 और 4 के बीच अनंततः अनेक परिमेय संख्याएँ हो सकती हैं; इन्हें लेने की एक विधि है

$3 = \frac{21}{6+1}, 4 = \frac{28}{6+1}$ · तब छः संख्याएँ हैं $\frac{22}{7}, \frac{23}{7}, \frac{24}{7}, \frac{25}{7}, \frac{26}{7}, \frac{27}{7}$.

3. $\frac{3}{5} = \frac{30}{50}, \frac{4}{5} = \frac{40}{50}$ · अतः पाँच परिमेय संख्याएँ हैं : $\frac{31}{50}, \frac{32}{50}, \frac{33}{50}, \frac{34}{50}, \frac{35}{50}$.

4. (i) सत्य है, क्योंकि पूर्ण संख्याओं के संग्रह में सभी प्राकृत संख्याएँ होती हैं।

(ii) असत्य है, उदाहरण के लिए -2 एक पूर्ण संख्या नहीं है।

(iii) असत्य है, उदाहरण के लिए $\frac{1}{2}$ परिमेय संख्या है, परन्तु पूर्ण संख्या नहीं है।

प्रश्नावली 1.2

1. (i) सत्य है, क्योंकि वास्तविक संख्याओं का संग्रह परिमेय और अपरिमेय संख्याओं से बना होता है।

(ii) असत्य है, क्योंकि कोई भी ऋण संख्या किसी प्राकृत संख्या का वर्गमूल नहीं हो सकती।

(iii) असत्य, उदाहरणार्थ 2 वास्तविक संख्या है किन्तु अपरिमेय नहीं।

2. नहीं। उदाहरण के लिए, $\sqrt{4} = 2$ एक परिमेय संख्या है।

3. आकृति 1.8 में दी गई क्रियाविधि को अनेक बार कीजिए। पहले $\sqrt{4}$ प्राप्त कीजिए और तब $\sqrt{5}$ प्राप्त कीजिए।

प्रश्नावली 1.3

1. (i) 0.36, सांत (ii) $0.\overline{09}$, अनवसानी पुनरावर्ती

(iii) 4.125, सांत (iv) $0.\overline{230769}$, अनवसानी पुनरावर्ती

(v) $0.\overline{18}$ अनवसानी पुनरावर्ती (vi) 0.8225 सांत

2. $\frac{2}{7} = 2 \times \frac{1}{7} = 0.\overline{285714}$, $\frac{3}{7} = 3 \times \frac{1}{7} = 0.\overline{428571}$, $\frac{4}{7} = 4 \times \frac{1}{7} = 0.\overline{571428}$,

$\frac{5}{7} = 5 \times \frac{1}{7} = 0.\overline{714285}$, $\frac{6}{7} = 6 \times \frac{1}{7} = 0.\overline{857142}$

3. (i) $\frac{2}{3}$ [मानलीजिए $x = 0.666\ldots$ अत:, $10x = 6.666\ldots$ या, $10x = 6 + x$ या , $x = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$]

(ii) $\frac{43}{90}$ (iii) $\frac{1}{999}$

4. 1 [मानलीजिए $x = 0.9999\ldots$ अत:, $10x = 9.999\ldots$ या, $10x = 9 + x$ या, $x = 1$]

5. $0.\overline{0588235294117647}$

6. q के अभाज्य गुणनखंडन में केवल 2 के घात, या 5 के घात या दोनों होते हैं।

7. 0.01001000100001..., 0.202002000200002..., 0.003000300003...

8. 0.75075007500075000075..., 0.767076700767000767..., 0.808008000800008...

9. (i), (iv) और (v) अपरिमेय है; (ii) और (iii) परिमेय है।

प्रश्नावली 1.4

1. 2.665 के लिए अनुच्छेद 1.4 के अनुसार क्रिया कीजिए।

2. उदाहरण 11 के अनुसार क्रिया कीजिए।

प्रश्नावली 1.5

1. (i) अपरिमेय (ii) परिमेय (iii) परिमेय (iv) अपरिमेय

(v) अपरिमेय

2. (i) $6 + 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{6}$ (ii) 6 (iii) $7 + 2\sqrt{10}$ (iv) 3

3. इसका कोई अंतर्विरोध नहीं है। स्मरण रहे कि जब कभी-भी एक स्केल से या किसी अन्य युक्ति से लंबाई मापते हैं, तब आपको केवल एक सन्निकट परिमेय मान प्राप्त होता है। अत: आप यह अनुभव नहीं कर पाते कि c या d अपरिमेय है।

4. देखिए आकृति 1.17.

5. (i) $\frac{\sqrt{7}}{7}$ (ii) $\sqrt{7}+\sqrt{6}$ (iii) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}$ (iv) $\frac{\sqrt{7}+2}{3}$

प्रश्नावली 1.6

1. (i) 8 (ii) 2 (iii) 5 **2.** (i) 27 (ii) 4 (iii) 8 (iv) $\frac{1}{5}\left[(125)^{-\frac{1}{3}}=\left(5^{3}\right)^{-\frac{1}{3}}=5^{-1}\right]$

3. (i) $2^{\frac{13}{15}}$ (ii) 3^{-21} (iii) $11^{\frac{1}{4}}$ (iv) $56^{\frac{1}{2}}$

प्रश्नावली 2.1

1. (i) और (ii) एक चर में बहुपद है। (v) तीन चरों में एक बहुपद है, (iii), (iv) बहुपद नहीं है, क्योंकि चर का प्रत्येक घातांक पूर्ण संख्या नहीं है।

2. (i) 1 (ii) –1 (iii) $\frac{\pi}{2}$ (iv) 0

3. $3x^{35}-4$; $\sqrt{2}\,y^{100}$ (अलग-अलग गुणांकों वाले कुछ और बहुपद आप लिख सकते हैं।)

4. (i) 3 (ii) 2 (iii) 1 (iv) 0

5. (i) द्विघाती (ii) त्रिघाती (iii) द्विघाती (iv) रैखिक
(v) रैखिक (vi) द्विघाती (vii) त्रिघाती

प्रश्नावली 2.2

1. (i) 3 (ii) – 6 (iii) – 3

2. (i) 1, 1, 3 (ii) 2, 4, 4 (iii) 0, 1, 8 (iv) –1, 0, 3

3. (i) हाँ (ii) नहीं (iii) हाँ (iv) हाँ
(v) हाँ (vi) हाँ

(vii) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ बहुपद का एक शून्यक है, परन्तु $\frac{2}{\sqrt{3}}$ बहुपद का एक शून्यक नहीं है। (viii) नहीं

4. (i) -5 (ii) 5 (iii) $\frac{-5}{2}$ (iv) $\frac{2}{3}$

(v) 0 (vi) 0 (vii) $-\frac{d}{c}$

प्रश्नावली 2.3

1. (i) 0 (ii) $\frac{27}{8}$ (iii) 1 (iv) $-\pi^3 + 3\pi^2 - 3\pi + 1$ (v) $-\frac{27}{8}$

2. $5a$ **3.** नहीं, क्योंकि शेषफल शून्य नहीं है।

प्रश्नावली 2.4

1. $(x + 1)$, (i) का एक गुणनखंड है परन्तु (ii), (iii) और (iv) का गुणनखंड नहीं है।

2. (i) हाँ (ii) नहीं (iii) हाँ

3. (i) -2 (ii) $-\left(2+\sqrt{2}\right)$ (iii) $\sqrt{2}-1$ (iv) $\frac{3}{2}$

4. (i) $(3x-1)(4x-1)$ (ii) $(x+3)(2x+1)$ (iii) $(2x+3)(3x-2)$ (iv) $(x+1)(3x-4)$

5. (i) $(x-2)(x-1)(x+1)$ (ii) $(x+1)(x+1)(x-5)$

(iii) $(x+1)(x+2)(x+10)$ (iv) $(y-1)(y+1)(2y+1)$

प्रश्नावली 2.5

1. (i) $x^2+14x+40$ (ii) $x^2-2x-80$ (iii) $9x^2-3x-20$

(iv) $y^2-\frac{9}{4}$ (v) $9-4x^2$

2. (i) 11021 (ii) 9120 (iii) 9984

3. (i) $(3x+y)(3x+y)$ (ii) $(2y-1)(2y-1)$ (iii) $\left(x+\frac{y}{10}\right)\left(x-\frac{y}{10}\right)$

4. (i) $x^2+4y^2+16z^2+4xy+16yz+8xz$

(ii) $4x^2+y^2+z^2-4xy-2yz+4xz$

(iii) $4x^2+9y^2+4z^2-12xy+12yz-8xz$

(iv) $9a^2+49b^2+c^2-42ab+14bc-6ac$

(v) $4x^2+25y^2+9z^2-20xy-30yz+12xz$

(vi) $\frac{a^2}{16}+\frac{b^2}{4}+1-\frac{ab}{4}-b+\frac{a}{2}$

5. (i) $(2x+3y-4z)\,(2x+3y-4z)$ (ii) $\left(-\sqrt{2}\,x + y + 2\sqrt{2}\,z\right)\left(-\sqrt{2}\,x + y + 2\sqrt{2}\,z\right)$

6. (i) $8x^3+12x^2+6x+1$ (ii) $8a^3-27b^3-36a^2b+54ab^2$

(iii) $\frac{27}{8}x^3+\frac{27}{4}x^2+\frac{9}{2}x+1$ (iv) $x^3-\frac{8}{27}y^3-2x^2y+\frac{4xy^2}{3}$

7. (i) 970299 (ii) 1061208 (iii) 994011992

8. (i) $(2a+b)(2a+b)(2a+b)$ (ii) $(2a-b)(2a-b)(2a-b)$

(iii) $(3-5a)(3-5a)(3-5a)$ (iv) $(4a-3b)(4a-3b)(4a-3b)$

(v) $\left(3p-\frac{1}{6}\right)\left(3p-\frac{1}{6}\right)\left(3p-\frac{1}{6}\right)$

10. (i) $(3y+5z)\,(9y^2+25z^2-15yz)$ (ii) $(4m-7n)\,(16m^2+49n^2+28mn)$

11. $(3x+y+z)\,(9x^2+y^2+z^2-3xy-yz-3xz)$

12. दक्षिण पक्ष को सरल कीजिए।

13. सर्वसमिका VIII में $x+y+z=0$ रखिए।

14. (i) -1260. Let $a=-12$, $b=7$, $c=5$. यहाँ $a+b+c=0$. प्रश्न 13 में दिए गए परिणाम का प्रयोग कीजिए।

(ii) 16380

15. (i) एक संभव उत्तर है : लंबाई $=5a-3$, चौड़ाई $=5a-4$

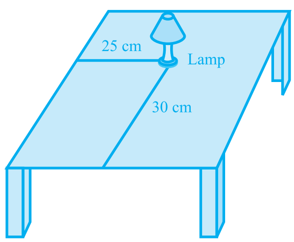
(ii) एक संभव उत्तर है : लंबाई $=7y-3$, चौड़ाई $=5y+4$

16. (i) एक संभव उत्तर है : 3, x और $x-4$.

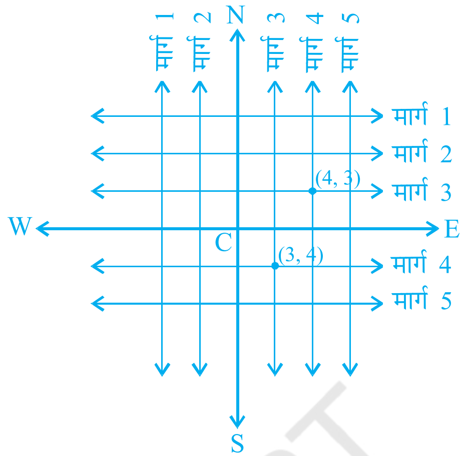
(ii) एक संभव उत्तर है : $4k$, $3y+5$ और $y-1$.

प्रश्नावली 3.1

1. लैम्प को एक बिन्दु मान लीजिए और मेज को एक समतल। मेज का कोई भी दो लंब कोर लीजिए। बड़े कोर से लैम्प की दूरी माप लीजिए। मान लीजिए यह दूरी 25 सेमी है। अब, छोटे कोर से लैम्प की दूरी मापिए और मानलीजिए यह दूरी 30 सेमी है। जिस क्रम में आपने लैम्प रखा है उसके अनुसार उसकी स्थिति को (30, 25) या (25, 30) लिख सकते हैं।



2. मार्ग योजना नीचे दी गई आकृति में दिखाई गई है



दोनों की क्रास मार्ग ऊपर की आकृति में चिह्नित किए गए हैं। ये अद्वितीयत: प्राप्त किए जाते हैं, क्योंकि दो संदर्भ रेखाओं में हमने स्थान निर्धारण के लिए दोनों का प्रयोग किया है।

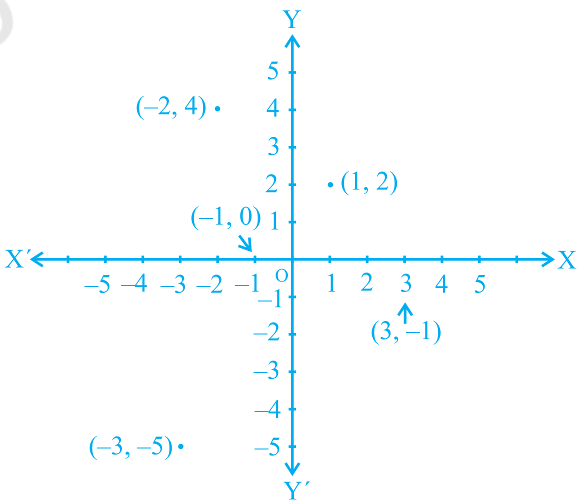
प्रश्नावली 3.2

1. (i) x - अक्ष और y - अक्ष (ii) चतुर्थाशं (iii) मूल बिन्दु

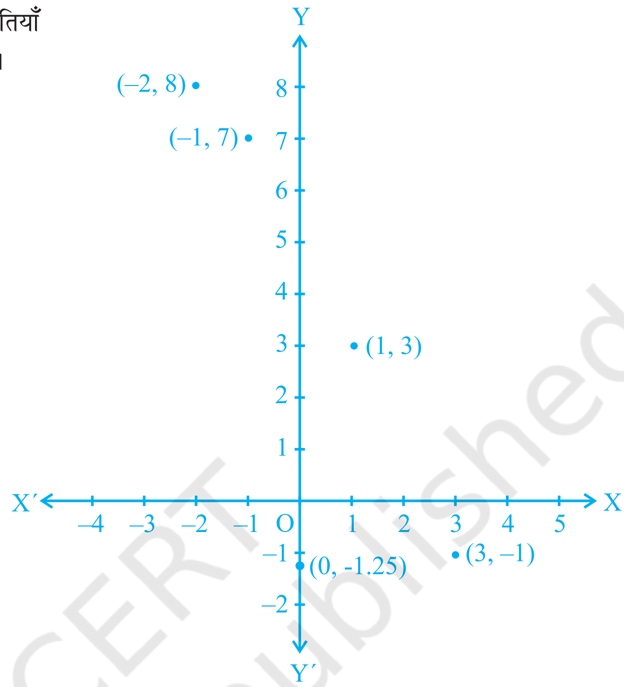
2. (i) (–5, 2) (ii) (5, –5) (iii) E (iv) G (v) 6 (vi) – 3 (vii) (0, 5) (viii) (–3, 0)

प्रश्नावली 3.3

1. बिन्दु (–2, 4), चतुर्थाशं II में स्थित है। बिन्दु (3, –1) चतुर्थाशं IV में स्थित है, बिन्दु (–1, 0) ऋण x - अक्ष पर स्थित है, बिन्दु (1, 2) चतुर्थाशं I में स्थित है। और बिन्दु (–3, –5) चतुर्थाशं III में स्थित है। पास की आकृति में बिन्दुओं के स्थान निर्धारण दिखाए गए हैं।



2. संलग्न आकृति में बिन्दुओं की स्थितियाँ बिन्दियों (dots) द्वारा दर्शाई गई हैं।



प्रश्नावली 4.1

1. $x = 2y$ या $x - 2y = 0$

2. (i) $2x + 3y - 9.3\overline{5} = 0; a = 2, b = 3, c = -9.3\overline{5}$

(ii) $x - \frac{y}{5} - 10 = 0; a = 1, b = \frac{-1}{5}, c = -10$

(iii) $-2x + 3y - 6 = 0; a = -2, b = 3, c = -6$

(iv) $1.x - 3y + 0 = 0; a = 1, b = -3, c = 0$

(v) $2x + 5y + 0 = 0; a = 2, b = 5, c = 0$

(vi) $3x + 0.y + 2 = 0; a = 3, b = 0, c = 2$

(vii) $0.x + 1.y - 2 = 0; a = 0, b = 1, c = -2$

(viii) $-2x + 0.y + 5 = 0; a = -2, b = 0, c = 5$

प्रश्नावली 4.2

1. (iii), क्योंकि x के प्रत्येक मान के लिये, y का एक संगत मान होता है और विलोमतः भी।

2. (i) (0, 7), (1, 5), (2, 3), (4, –1)

(ii) $(1, 9-\pi), (0, 9), (-1, 9+\pi), \left(\frac{9}{\pi}, 0\right)$

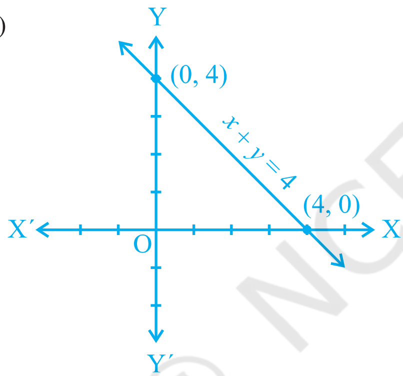
(iii) $(0, 0), (4, 1), (-4, 1), \left(2, \frac{1}{2}\right)$

3. (i) नहीं (ii) नहीं (iii) हाँ (iv) नहीं (v) नहीं

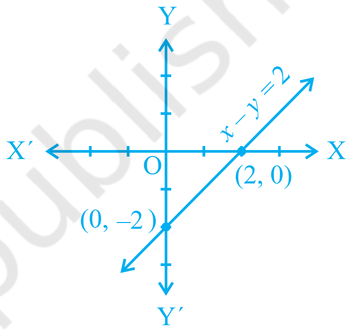
4. 7

प्रश्नावली 4.3

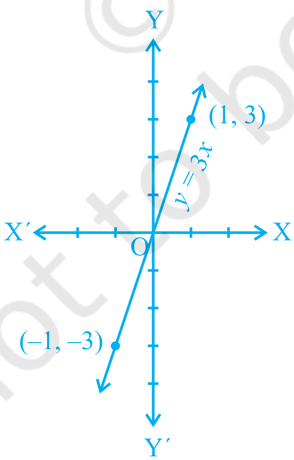
1. (i)



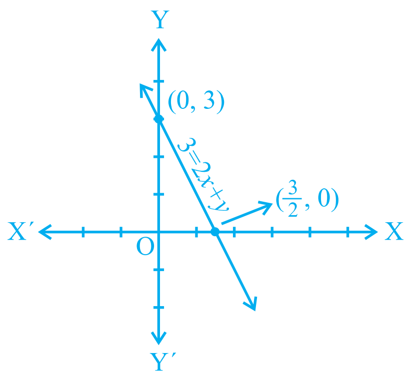
(ii)



(iii)



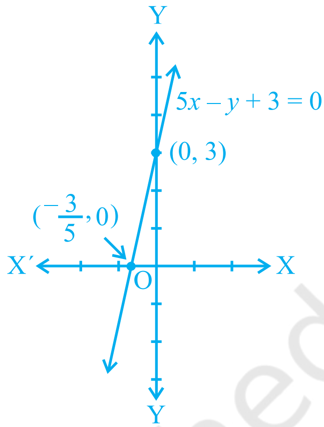
(iv)



2. $7x - y = 0$ और $x + y = 16$; अनंत: अनेक (एक बिन्दु से होती हुई अनंत: अनेक रेखाएँ खींची जा सकती है।)

3. $\frac{5}{3}$

4. $5x - y + 3 = 0$

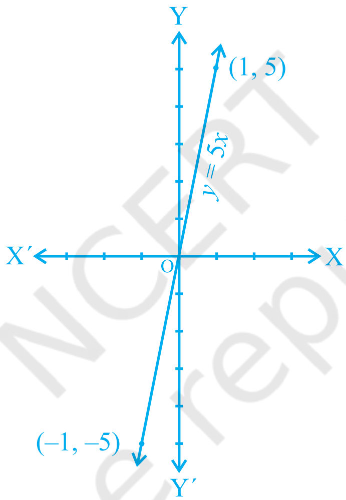


5. आकृति 4.6 के लिए, $x + y = 0$ और आकृति 4.7 के लिए, $y = -x + 2$.

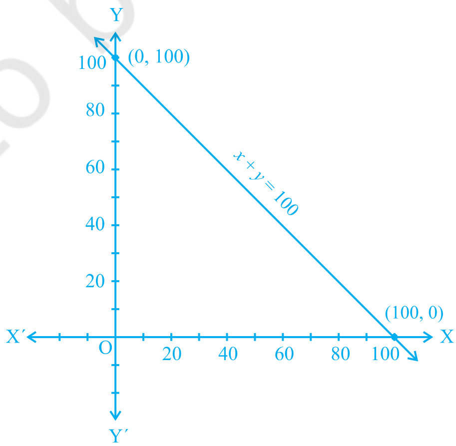
6. मान लीजिए x दूरी है और y किया गया कार्य है। अत: प्रश्न के अनुसार समीकरण $y = 5x$ होगा।

(i) 10 एकक

(ii) 0 एकक



7. $x + y = 100$



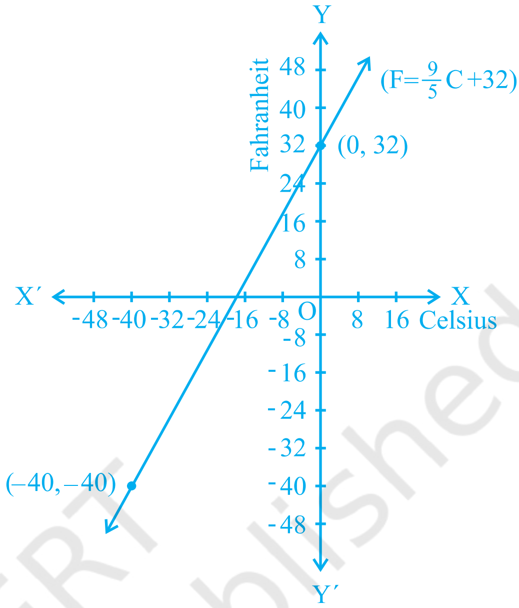
8. (i) संलग्न आकृति देखिए।

(ii) 86°F

(iii) 35°C

(iv) 32° F, –17.8° C (लगभग)

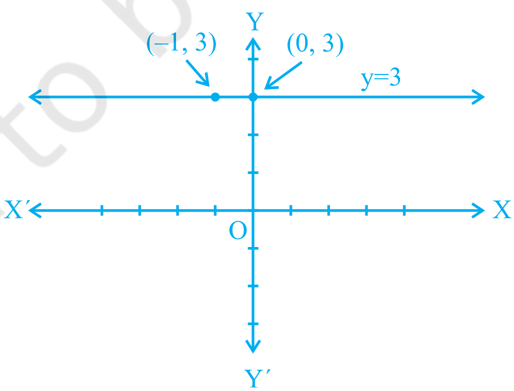
(v) हाँ, – 40° (F और C दोनों में)



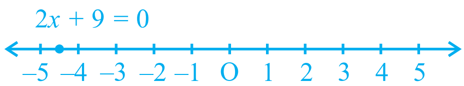
प्रश्नावली 4.4

1. (i)

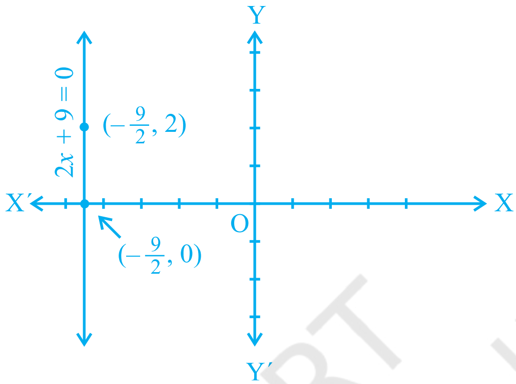
(ii)



2. (i)



(ii)



प्रश्नावली 5.1

1. (i) असत्य : इसे छात्र अपनी आँखों से देख सकते हैं।

(ii) असत्य : यह अभिगृहीत 5.1 का अंतर्विरोध करता है।

(iii) सत्य : (अभिगृहीत-2)

(iv) सत्य : यदि एक वृत्त से परिबद्ध प्रदेश को दूसरे प्रदेश पर अध्यारोपित करें, तो वे संपाती होंगे। अत: इनके केन्द्र और परिसीमाएँ संपाती होती हैं। अत: इनकी त्रिज्याएँ संपाती होंगी।

(v) सत्य : यूक्लिड का प्रथम अभिगृहीत

3. ऐसे अनेक अपरिभाषित शब्द हैं जिनकी जानकारी छात्र को होनी चाहिए। ये संगत होते हैं, क्योंकि इनमें दो अलग-अलग स्थितियों का अध्ययन किया जाता है अर्थात् (i) यदि दो बिन्दु A और B दिए हुए हों, तो उनके बीच में स्थिति एक बिन्दु C होता है; (ii) यदि A और B दिए हुए हो, तो आप एक ऐसा बिन्दु C ले सकते हैं जो A और B से होकर जाने वाली रेखा पर स्थित नहीं होता।

ये अभिगृहीत यूक्लिड की अभिगृहीतों का अनुसरण नहीं करते। फिर भी ये अभिगृहीत 5.1 का अनुसरण करते हैं।

4. $$AC = BC$$

इसलिए $$AC + AC = BC + AC$$ (बराबरों को बराबरों में जोड़ा गया है।)

अर्थात् $$2AC = AB$$ (BC + AC, AB के संपाती हैं।)

इसलिए $$AC = \frac{1}{2}AB$$

5. अस्थायी रूप से यह मानलीजिए कि AB के दो मध्य बिन्दु C और D है जहाँ C और D अलग अलग हैं। अब हम यह दिखाऐंगे कि बिन्दु C और D दो अलग-अलग बिन्दु नहीं है।

6. AC = BD (दिया हुआ है) (1)

AC = AB + BC (बिन्दु B, बिन्दुओं A और C के बीच स्थिति हैं) (2)

BD = BC + CD (बिन्दु C, बिन्दुओं B और D के बीच स्थित है) (3)

(1) में (2) और (3) को प्रतिस्थापित करने पर हमें यह प्राप्त होता है।

AB + BC = BC + CD

इसलिए, AB = CD (बराबरों में से बराबरों को घटाने पर)

7. क्योंकि विश्व के किसी भाग में किसी भी वस्तु के लिए यह सत्य होता है, इसलिए इसे सार्वभौमिक सत्य माना जाता है।

प्रश्नावली 5.2

1. छात्र द्वारा दिए गए किसी सूत्रण की मान्यता के संबंध में कक्षा में चर्चा करनी चाहिए।

2. यदि कोई सरल रेखा l दो सरल रेखाओं m और n पर पड़ती हो कि l की एक ओर के अंत:कोणों का योग दो समकोण हो, तो यूक्लिड के पाँचवे अभिगृहीत के अनुसार यह रेखा l के इस ओर नहीं मिलेगी। अब आप जानते हैं कि रेखा l की दूसरी ओर के अंत: कोणों का योग भी दो समकोण होगा। अत: दूसरी ओर भी ये नहीं मिलेंगे। अत: रेखाएँ m और n कभी भी नहीं मिलेंगे और, इसलिए ये समांतर होगी।

प्रश्नावली 6.1

1. 30°, 250° **2.** 126° **4.** एक बिन्दु पर सभी कोणों का योग = 360°

5. $\angle QOS = \angle SOR + \angle ROQ$ और $\angle POS = \angle POR - \angle SOR$ **6.** 122°, 302°

प्रश्नावली 6.2

1. 130°, 130° **2.** 126° **3.** 126°, 36°, 54° **4.** 60° **5.** 50°, 77°

6. आपतन कोण = परावर्तन कोण। बिन्दु B पर $BE \perp PQ$ खींचिए और बिन्दु C पर $CF \perp RS$ खींचिए।

प्रश्नावली 6.3

1. 65° **2.** 32°, 121° **3.** 92° **4.** 60° **5.** 37°, 53°

6. ΔPQR के कोणों का योग = ΔQTR के कोणों का योग और $\angle PRS = \angle QPR + \angle PQR$ है।

प्रश्नावली 7.1

1. ये बराबर है **6.** $\angle BAC = \angle DAE$

प्रश्नावली 7.2

6. $\angle BCD = \angle BCA + \angle DCA = \angle B + \angle D$ **7.** प्रत्येक $45°$ का है।

प्रश्नावली 7.3

3. **(ii)**, (i) से $\angle ABM = \angle PQN$

प्रश्नावली 7.4

4. BD को मिलाइए और दिखाइए कि $\angle B > \angle D$; AC को मिलाइए और दिखाइए कि $\angle A > \angle C$

5. $\angle Q + \angle QPS > \angle R + \angle RPS$, आदि।

प्रश्नावली 8.1

1. $36°$, $60°$, $108°$ और $156°$.

6. (i) Δ DAC और Δ BCA से यह दिखाइए कि $\angle DAC = \angle BCA$ और $\angle ACD = \angle CAB$, आदि।

(ii) प्रमेय 8.4 की सहायता से यह दिखाइए कि $\angle BAC = \angle BCA$.

प्रश्नावली 8.2

2. दिखाइए कि PQRS एक समांतर चतुर्भुज है। यह भी दिखाइए कि $PQ \parallel AC$ और $PS \parallel BD$ है। इसलिए $\angle P = 90°$ है।

5. AECF एक समांतर चतुर्भुज है। अत: $AF \parallel CE$ आदि।

प्रश्नावली 9.1

1. (i) आधार DC, समांतर रेखाएँ DC और AB; (iii) आधार QR, समांतर रेखाएँ QR और PS;

(v) आधार AD, समांतर रेखाएँ AD और BQ

प्रश्नावली 9.2

1. 12.8 cm **2.** EG मिलाइए; उदाहरण 2 के परिणाम का प्रयोग कीजिए।

6. गेहूँ Δ APQ में और दाल अन्य दो त्रिभुजों में या दाल Δ APQ में और गेहूँ अन्य दो त्रिभुजों में।

प्रश्नावली 9.3

4. $CM \perp AB$ और $DN \perp AB$ खींचिए। दिखाइए कि $CM = DN$ है। **12.** देखिए उदाहरण 4.

प्रश्नावली 9.4 (ऐच्छिक)

7. उदाहरण 3 के परिणाम को बार-बार प्रयोग कीजिए।

प्रश्नावली 10.1

1. (i) अभ्यंतर (ii) वहिर्भाग (iii) व्यास
(iv) अर्द्धवृत्त (v) जीवा (vi) तीन

2. (i) सत्य (ii) असत्य (iii) असत्य
(iv) सत्य (v) असत्य (vi) सत्य

प्रश्नावली 10.2

1. सर्वांगसम वृत्तों की जीवाएँ लेकर ठीक-ठीक प्रमेय 10.1 की भांति सिद्ध कीजिए।

2. SAS सर्वांगसम-अभिगृहीत की सहायता से दिए गए दो त्रिभुजों की सर्वांगसमता दर्शाइए।

प्रश्नावली 10.3

1. 0, 1, 2; दो **2.** उदाहरण 1 की भांति क्रिया कीजिए।

3. वृतों के केन्द्र O, O′ को उभयनिष्ठ जीवा के मध्य बिन्दु M से मिलाइए। तब दिखाइए कि $\angle OMA = 90°$ और $\angle O'MA = 90°$.

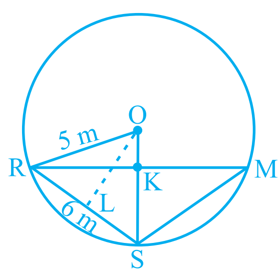
प्रश्नावली 10.4

1. 6 cm; पहले यह दिखाइए कि केन्द्रों को मिलाने वाली रेखा छोटे वृत्त की त्रिज्या पर लंब है और तब यह दिखाइए कि उभयनिष्ठ जीवा छोटे वृत्त का व्यास है।

2. यदि एक वृत्त जिसका केन्द्र O है की दो समान जीवाएँ AB तथा CD बिन्दु E पर प्रतिच्छेद करती हैं, $OM \perp AB$ और $OM \perp CD$ खींचिए और OE को मिलाइए। दिखाइए कि समकोण Δ OME और Δ ONE सर्वांगसम है।

3. उदाहरण 2 की भाँति हल कीजिए। **4.** $OM \perp AD$ खींचिए।

5. रेशमा, सलमा और मंदीप को क्रमशः बिन्दु R, S और M द्वारा दर्शाइए। माना KR = x m (आकृति देखिए)



$$\Delta \text{ ORS का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times x \times 5$$

साथ ही, Δ ORS का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} RS \times OL = \frac{1}{2} \times 6 \times 4$

x का मान ज्ञात कीजिए। इस प्रकार आप RM का मान भी ज्ञात कर सकते हैं।

6. समबाहु त्रिभुज के गुण तथा पाइथागोरस प्रमेय का प्रयोग कीजिए।

प्रश्नावली 10.5

1. $45°$ 2. $150°, 30°$ 3. $10°$

4. $80°$ 5. $110°$ 6. $\angle BCD = 80°$ और $\angle ECD = 50°$

8. CD पर लंब AM और BN डालिए ($AB \parallel CD$ और $AB < CD$). दिखाइए कि $\Delta AMD \cong \Delta BNC$ है। इससे $\angle C = \angle D$ प्राप्त होता है, अत: $\angle A + \angle C = 180°$.

प्रश्नावली 10.6 (ऐच्छिक)

2. मान लीजिए O, वृत्त का केन्द्र है। तब दो जीवाओं के लंब-अर्धक समान होंगे और O से होकर जायेंगे। मानलीजिए r त्रिज्या है, तब $r^2 = \left(\frac{11}{2}\right)^2 + x^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + (6-x)^2$, जहाँ x, 11 सेमी की लंबाई वाली जीवा पर O से डाले गए लंब की लंबाई है। इससे $x = 1$ प्राप्त होता है, अत: $r = \frac{5\sqrt{5}}{2}$ cm

3. 3 cm

4. मान लीजिए $\angle AOC = x$ और $\angle DOE = y$ है। मान लीजिए $\angle AOD = z$, तब $\angle EOC = z$ और $x + y + 2z = 360°$.

$\angle ODB = \angle OAD + \angle DOA = 90° - \frac{1}{2}z + z = 90° + \frac{1}{2}z$ तथा $\angle OEB = 90° + \frac{1}{2}z$

8. $\angle ABE = \angle ADE$, $\angle ADF = \angle ACF = \frac{1}{2}\angle C$

इसलिए $\angle EDF = \angle ABE + \angle ADF = \frac{1}{2}(\angle B + \angle C) = \frac{1}{2}(180° - \angle A) = 90° - \frac{1}{2}\angle A$

9. प्रश्नावली 10.2 के प्रश्न 1 और प्रमेय 10.8 का प्रयोग कीजिए।

10. मान लीजिए $\angle A$ का कोण-अर्धक ΔABC के अर्धवृत्त को D पर काटता है। DC और DB को मिलाइए। तब $\angle BCD = \angle BAD = \frac{1}{2}\angle A$ और $\angle DBC = \angle DAC = \frac{1}{2}\angle A$. इसलिए, $\angle BCD = \angle DBC$ या $DB = DC$. अत: D, BC के लंब-अर्धक पर स्थित होता है।

प्रश्नावली 12.1

1. $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, 900, 3cm^2 2. ₹ 1650000 3. $20\sqrt{2}$ m^2

4. $21\sqrt{11}$ cm^2 5. 9000 cm^2 6. $9\sqrt{15}$ cm^2

प्रश्नावली 12.2

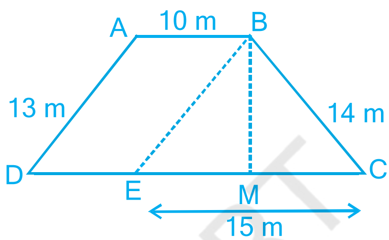
1. 65.5 m^2 (लगभग) **2.** 15.2 cm^2 (लगभग) **3.** 19.4 cm^2 (लगभग)

4. 12 cm **5.** 48 m^2 **6.** $1000\sqrt{6}\ cm^2$, $1000\sqrt{6}\ cm^2$

7. छाया I का क्षेत्रफल = छाया II का क्षेत्रफल = 256 cm^2 और छाया III का क्षेत्रफल = 17.92 cm^2

8. ₹705.60 **9.** 196 m^2

[आकृति देखिए। Δ BEC = 84 m^2, BM की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।]



प्रश्नावली 13.1

1. (i) 5.45 m^2 (ii) ₹109 **2.** ₹555 **3.** 6 m **4.** 100 ईंट

5. (i) घनाकार बक्स का पार्श्व पृष्ठ क्षेत्रफल, 40 cm^2 बड़ा है।

(ii) घनाकार बक्स का कुल पृष्ठ क्षेत्रफल 10 cm^2 बड़ा है।

6. (i) कांच का 4250 cm^2 (ii) फीता का 320 cm [सभी कोरों का योगफल परिकलित कीजिए (12 कोरों में 4 लम्बाइयाँ, 4 चौड़ाईयाँ और 4 ऊँचाईयाँ है)]

7. ₹2184 **8.** 47 m^2

प्रश्नावली 13.2

1. 2 cm **2.** 7.48 m^2 **3.** (i) 968 cm^2 (ii) 1064.8 cm^2 (iii) 2038.08 cm^2

[एक पाइप का कुल पृष्ठ-क्षेत्रफल (अंत: वक्रित पृष्ठ क्षेत्रफल + बाह्य वक्रित पृष्ठ क्षेत्रफल + दो आधारों का क्षेत्रफल) है। प्रत्येक आधार, π $(R^2 - r^2)$ द्वारा दिए गए क्षेत्रफल वाला एक वलय है, जहाँ R = बाह्य त्रिज्या और r = अंत: त्रिज्या।

4. 1584 m^2 **5.** ₹68.75 **6.** 1 m

7. (i) 110 m^2 (ii) ₹4400 **8.** 4.4 m^2

9. (i) 59.4 m^2 (ii) 95.04 m^2

[मान लीजिए प्रयुक्त इस्पात का वास्तविक क्षेत्रफल x m^2 है। क्योंकि वास्तविक रूप में प्रयुक्त इस्पात

का $\frac{1}{12}$ भाग व्यर्थ चला गया है, इसलिए टंकी में प्रयुक्त इस्पात का क्षेत्रफल $= x$ का $\frac{11}{12}$. इसका अर्थ यह है कि प्रयुक्त इस्पात का वास्तविक क्षेत्रफल $= \frac{12}{11} \times 87.12\,m^2$]

10. 2200 cm^2; बेलन की ऊँचाई $(30 + 2.5 + 2.5)$ cm होनी चाहिए।

11. 7920 cm^2

प्रश्नावली 13.3

1. 165 cm^2 **2.** 1244.57 m^2 **3.** (i) 7 cm (ii) 462 cm^2

4. (i) 26 m (ii) ₹ 137280 **5.** 63 m **6.** ₹ 1155

7. 5500 cm^2 **8.** ₹ 384.34 (लगभग)

प्रश्नावली 13.4

1. (i) 1386 cm^2 (ii) 394.24 cm^2 (iii) 2464 cm^2

2. (i) 616 cm^2 (ii) 1386 cm^2 (iii) 38.5 m^2

3. 942 cm^2 **4.** 1 : 4 **5.** ₹ 27.72

6. 3.5 cm **7.** 1 : 16 **8.** 173.25 cm^2

9. (i) $4\pi r^2$ (ii) $4\pi r^2$ (iii) 1 : 1

प्रश्नावली 13.5

1. 180 cm^3 **2.** 135000 लीटर **3.** 4.75 m **4.** ₹ 4320 **5.** 2 m

6. 3 दिन **7.** 16000 **8.** 6 cm, 4 : 1 **9.** 4000 m^3

प्रश्नावली 13.6

1. 34.65 लीटर

2. 3.432 kg [पाइप का आयतन $= \pi h \times (R^2 - r^2)$, जहाँ R बाह्य त्रिज्या है और r अंतः त्रिज्या है।]

3. बेलन की धारिता 85 cm^3 अधिक है।

4. (i) 3 cm (ii) 141.3 cm^3

5. (i) 110 m^2 (ii) 1.75 m (iii) 96.25 *kl* **6.** 0.4708 m^2

7. लकड़ी का आयतन = 5.28 cm^3, ग्रेफाइट का आयतन = 0.11 cm^3.

8. 38500 cm^3 या 38.5 लीटर सूप।

प्रश्नावली 13.7

1. (i) 264 cm^3 (ii) 154 cm^3 **2.** (i) 1.232 l (ii) $\frac{11}{35}\,l$

3. 10 cm **4.** 8 cm **5.** 38.5 kl

6. (i) 48 cm (ii) 50 cm (iii) 2200 cm^2 **7.** $100\pi\ cm^3$ **8.** $240\pi\ cm^3$; 5 : 12

9. 28.875 m^3, 99.825 m^2

प्रश्नावली 13.8

1. (i) $1437\frac{1}{3}\ cm^3$ (ii) 1.05 m^3 (लगभग)

2. (i) $11498\frac{2}{3}\ cm^3$ (ii) 0.004851 m^3 **3.** 345.39 g (लगभग) **4.** $\frac{1}{64}$

5. 0.303L (लगभग) **6.** 0.06348 m^3 (लगभग)

7. $179\frac{2}{3}\ cm^3$ **8.** (i) 249.48 m^2 (ii) 523.9 m^3 (लगभग) **9.** (i) $3r$ (ii) 1 : 9

10. 22.46 mm^3 (लगभग)

प्रश्नावली 13.9 (ऐच्छिक)

1. ₹6275

2. ₹2784.32 (लगभग) [सिल्वर पेंट की लागत का परिकलन करते समय गोले के उस भाग को घटाना न भूलिए जो आधारों पर टिका हुआ है।] **3.** 43.75%

प्रश्नावली 14.1

1. अपने दैनिक कार्यों से एकत्रित किए जाने वाले आंकड़ों के पांच उदाहरण ये हैं :

(i) अपनी कक्षा में छात्रों की संख्या।

(ii) अपने विद्यालय में पंखों की संख्या।

(iii) पिछले दो वर्षों के घर की बिजली का बिल।

(iv) टेलीविजन या समाचार पत्रों से प्राप्त चुनाव के परिणाम।

(v) शैक्षिक सर्वेक्षण से प्राप्त साक्षरता दर के आंकड़े।

फिर भी आप यह देख सकते हैं कि और भी अनेक अलग-अलग उत्तर हो सकते हैं।

2. प्राथमिक आंकड़ा : (i), (ii) और (iii), गौण आंकड़ा : (iv) और (v)

प्रश्नावली 14.2

1.

रक्त समूह	छात्रों की संख्या
A	9
B	6
O	12
AB	3
कुल योग	30

अधिक सामान्य – O , सबसे विरल – AB

2.

(km में) (दूरी)	मिलान चिह्न	बारंबारता
0 - 5	𝍸	5
5 - 10	𝍸 𝍸 |	11
10 - 15	𝍸 𝍸 |	11
15 - 20	𝍸 ||||	9
20 - 25	|	1
25 - 30	|	1
30 - 35	||	2
कुल योग		40

3. (i)

सापेक्ष आर्द्रता (% में)	बारंबारता
84 - 86	1
86 - 88	1
88 - 90	2
90 - 92	2
92 - 94	7
94 - 96	6
96 - 98	7
98 - 100	4
कुल योग	30

(ii) क्योंकि सापेक्ष आर्द्रता अधिक है, अत: ऐसा प्रतीत होता है कि आँकड़े वर्षा के मौसम में लिए गए हैं।

(iii) परिसर = 99.2 – 84.9 = 14.3

4. (i)

लंबाई (cm में)	बारंबारता
150 - 155	12
155 - 160	9
160 - 165	14
165 - 170	10
170 - 175	5
कुल योग	50

(ii) ऊपर की सारणी से एक निष्कर्ष हम यह निकाल सकते हैं कि 50% से अधिक छात्रों की लंबाई 165 cm से कम है।

5. (i)

(ppm) में सल्फर डाई-आक्साइड का सांद्रण	बारंबारता
0.00 - 0.04	4
0.04 - 0.08	9
0.08 - 0.12	9
0.12 - 0.16	2
0.16 - 0.20	4
0.20 - 0.24	2
कुल योग	30

(ii) 8 दिनों तक सल्फर डाई-आक्साइड का सांद्रण 0.11 ppm से अधिक था।

6.

सिरों की संख्या	बारंबारता
0	6
1	10
2	9
3	5
कुल योग	30

7. (i)

अंक	बारंबारता
0	2
1	5
2	5
3	8
4	4
5	5
6	4
7	4
8	5
9	8
कुल योग	50

(ii) सबसे अधिक बार आने वाले अंक 3 और 9 हैं। सबसे कम बार आने वाले अंक 0 है।

8. (i)

घंटों की संख्या	बारंबारता
0 - 5	10
5 - 10	13
10 - 15	5
15 - 20	2
कुल योग	30

(ii) 2 बच्चे

9.

बैट्री का जीवन-काल (वर्षों में)	बारंबारता
2.0 - 2.5	2
2.5 - 3.0	6
3.0 - 3.5	14
3.5 - 4.0	11
4.0 - 4.5	4
4.5 - 5.0	3
कुल योग	40

प्रश्नावली 14.3

1. (ii) पुनरुत्पादी स्वास्थ्य अवस्था

3. (ii) पार्टी A **4.** (ii) हाँ बारंबारता बहुभुज (iii) नहीं **5.** (ii) 184

8.

आयु (वर्षों में)	बारंबारता	चौड़ाई	आयत की लंबाई
1 - 2	5	1	$\frac{5}{1} \times 1 = 5$
2 - 3	3	1	$\frac{3}{1} \times 1 = 3$
3 - 5	6	2	$\frac{6}{2} \times 1 = 3$
5 - 7	12	2	$\frac{12}{2} \times 1 = 6$
7 - 10	9	3	$\frac{9}{3} \times 1 = 3$
10 - 15	10	5	$\frac{10}{5} \times 1 = 2$
15 - 17	4	2	$\frac{4}{2} \times 1 = 2$

अब इन लंबाईयों से आप आयत चित्र खींच सकते हैं।

9. (i)

अक्षरों की संख्या	बारंबारता	अंतराल की चौड़ाई	आयत की लंबाई
1 - 4	6	3	$\frac{6}{3} \times 2 = 4$
4 - 6	30	2	$\frac{30}{2} \times 2 = 30$
6 - 8	44	2	$\frac{44}{2} \times 2 = 44$
8 - 12	16	4	$\frac{16}{4} \times 2 = 8$
12 - 20	4	8	$\frac{4}{8} \times 2 = 1$

अब, आयत चित्र खींचिए।

(ii) 6 - 8

प्रश्नावली 14.4

1. माध्य $= 2.8$; माध्यिका $= 3$; बहुलक $= 3$
2. माध्य $= 54.8$; माध्यिका $= 52$; बहुलक $= 52$
3. $x = 62$ 4. 14
5. 60 कामगारों का माध्य वेतन ₹ 5083.33 है।

प्रश्नावली 15.1

1. $\frac{24}{30}$ अर्थात् $\frac{4}{5}$ 2. (i) $\frac{19}{60}$ (ii) $\frac{407}{750}$ (iii) $\frac{211}{1500}$ 3. $\frac{3}{20}$ 4. $\frac{9}{25}$
5. (i) $\frac{29}{2400}$ (ii) $\frac{579}{2400}$ (iii) $\frac{1}{240}$ (iv) $\frac{1}{96}$ (v) $\frac{1031}{1200}$ 6. (i) $\frac{7}{90}$ (ii) $\frac{23}{90}$
7. (i) $\frac{27}{40}$ (ii) $\frac{13}{40}$ 8. (i) $\frac{9}{40}$ (ii) $\frac{31}{40}$ (iii) 0 11. $\frac{7}{11}$ 12. $\frac{1}{15}$ 13. $\frac{1}{10}$

प्रश्नावली A1.1

1. (i) सदा असत्य। एक वर्ष में 12 महीने होते हैं।
   (ii) संदिग्ध : एक दिए हुए वर्ष में दीवाली शुक्रवार को पड़ सकती है और नहीं भी पड़ सकती है।
   (iii) संदिग्ध : वर्ष में कभी-कभी मगादी में तापमान 26° हो सकता है।
   (iv) सदा सत्य
   (v) सदा असत्य : कुत्ते उड़ नहीं सकते हैं।
   (vi) संदिग्ध : एक लीप वर्ष में फरवरी 29 दिन का होता है।
2. (i) असत्य। एक चतुर्भुज के अंतः कोणों का योग 360° होता है।
   (ii) सत्य (iii) सत्य (iv) सत्य
   (v) असत्य। उदाहरण के लिए $7 + 5 = 12$ जो एक विषम संख्या नहीं है।
3. (i) 2 से बड़ी सभी अभाज्य संख्याएँ विषम होती हैं।
   (ii) प्राकृत संख्या का दोगुना सदैव सम होता है।
   (iii) किसी भी $x > 1$ के लिए, $3x + 1 > 4$
   (iv) किसी भी $x \geq 0$ के लिए $x^3 \geq 0$
   (v) एक समबाहु त्रिभुज में माध्यिका कोण-अर्धक भी होती है।

प्रश्नावली A1.2

1. (i) मानव मेरुदंड वाले होते हैं। (ii) नहीं, दिनेश अपने बाल किसी अन्य दिन भी कटवा सकता था। (iii) गुलग की लाल जीभ है। (iv) हम यह निष्कर्ष निकाल लेते हैं कि गटर की सफ़ाई तुरंत हो जानी चाहिए। (v) यह आवश्यक नहीं है कि पूँछ वाले सभी जानवर कुत्ते ही हों। उदाहरण के लिए, बैल, बंदर जैसे जानवरों की पूँछ होती है, परन्तु वे कुत्ते नहीं हैं।
2. अब आपको उलटकर B और 8 को देखना होता है। यदि दूसरी ओर B पर एक सम संख्या हो, तो नियम भंग हो जाता है। इसी प्रकार, यदि दूसरी ओर 8 पर एक स्वर हो, तो नियम भंग हो जाता है।

प्रश्नावली A1.3

1. तीन संभव कंजक्चर ये हैं :

   (i) किन्हीं भी तीन क्रमागत सम संख्याओं का गुणनफल सम होता है। (ii) किन्हीं भी तीन क्रमागत सम संख्याओं का गुणनफल, 4 से भाज्य होता है। (iii) किन्हीं भी तीन क्रमागत सम संख्याओं का गुणनफल 6 से भाज्य होता है।
2. पंक्ति 4: $1\ 3\ 3\ 1 = 11^3$; पंक्ति 5: $1\ 4\ 6\ 4\ 1 = 11^4$; पंक्ति 4 और पंक्ति 5 पर कंजक्चर लागू होता है। नहीं, क्योंकि $11^5 \neq 15101051$.
3. $T_4 + T_5 = 25 = 5^2$; $T_{n-1} + T_n = n^2$.
4. $111111^2 = 12345654321$; $1111111^2 = 1234567654321$
5. विद्यार्थी का अपना उत्तर। उदाहरण के लिए, यूक्लिड की अभिधारणाएँ।

प्रश्नावली A1.4

1. (i) समान कोण, परन्तु अलग-अलग भुजाओं वाले कोई भी दो त्रिभुज हो सकते है।

   (ii) समभुज की भुजाएँ तो बराबर होती हैं, परन्तु यह वर्ग नहीं भी हो सकता है।

   (iii) आयत के कोण बराबर होते हैं, परन्तु यह वर्ग नहीं भी हो सकता है।

   (iv) $a = 3$ और $b = 4$ पर कथन सत्य नहीं है।

   (v) $n = 11$ पर $2n^2 + 11 = 253$ जो अभाज्य नहीं है।

   (vi) $n = 41$ पर $n^2 - n + 41$ अभाज्य नहीं है।
2. विद्यार्थी का अपना उत्तर।
3. माना x तथा y दो विषम संख्याएं हैं। तब $x = 2m + 1$, जहाँ m एक प्राकृत संख्या है तथा $y = 2n + 1$, जहाँ n भी एक प्राकृत संख्या है।

   $x + y = 2\,(m + n + 1)$। इसलिए, $x + y$ दो से भाज्य है तथा सम है।
4. प्रश्न 3 देखिए। $xy = (2m + 1)(2n + 1) = 2\,(2mn + m + n) + 1$.

   अतः xy, 2 से भाज्य नहीं है। इसलिए यह विषम है।

5. मान लीजिए $2n$, $2n + 2$ और $2n + 4$ तीन क्रमागत सम संख्याएँ हैं। तब इनका योग $6(n + 1)$ है जो कि 6 से भाज्य है।

7. (i) मान लीजिए मूल संख्या n है। तब हम निम्नलिखित संक्रियाएँ करते हैं।

$$n \to 2n \to 2n+9 \to 2n+9+n = 3n+9 \to \frac{3n+9}{3} = n+3 \to n+3+4 = n+7 \to n+7-n = 7$$

(ii) ध्यान दीजिए कि $7 \times 11 \times 13 = 1001$. कोई भी तीन अंकों वाली संख्या, मान लीजिए abc लीजिए। तब $abc \times 1001 = abcabc$. अत: छ: अंकों वाली $abcabc$, 7, 11 और 13 से भाज्य है।

प्रश्नावली A2.1

1. **चरण 1: सूत्रण :**

प्रासंगिक कारक है कंप्यूटर को किराए पर लेने की अवधि और हमें दी गई दो लागत। हम यह मान लेते हैं कि कंप्यूटर को खरीदने या किराए पर लेने पर लागत में कोई सार्थक परिवर्तन नहीं होता। अत: हम किसी भी परिवर्तन को अप्रासंगिक मान लेते हैं। हम यह भी मान लेते हैं कि सभी ब्रांड के कंप्यूटर और पीढ़ियाँ समान हैं अर्थात् ये अंतर भी अप्रासंगिक हैं।

x महिनों के लिए कंप्यूटर को किराए पर लेने पर रु. 2000 x का खर्च आता है। यदि यह राशि कंप्यूटर की कीमत से अधिक है, तो कंप्यूटर खरीदना ही उत्तम होगा। अत: समीकरण यह होता है।

$$2000x = 25000 \qquad (1)$$

चरण 2 : हल : (1) हल करने पर, $x = \frac{25000}{2000} = 12.5$

चरण 3 : निर्वचन : क्योंकि 12.5 महीने बाद कंप्यूटर को किराए पर लेने पर लागत अधिक आती है। अत: कंप्यूटर खरीदना ही सस्ता तब पड़ेगा, जबकि इसका प्रयोग आप 12 महीने से अधिक अवधि के लिए करना चाहते हैं।

2. **चरण 1 : सूत्रण :** हम यहाँ यह मान लेगें कि कार अचर चाल से चल रही है। अत: चाल में हुए किसी भी परिवर्तन को असंगत माना जाएगा। यदि कारें x घंटे के बाद मिलती हैं, तो पहली कार A से $40x$ कि.मी. की दूरी तय करेगी और दूसरी कार $30x$ कि.मी. की दूरी तय करेगी। अत: यह A से $(100 - 30x)$ कि.मी. की दूरी तय करेगी। अत: समीकरण होगा $40x = 100 - 30x$, अर्थात् $70x = 100$.

चरण 2 : हल : समीकरण हल करने पर $x = \frac{100}{70}$ प्राप्त होता है।

चरण 3 : निर्वचन : $\frac{100}{70}$ लगभग 1.4 घंटा है अत: कारें 1.4 घंटे बाद मिलेंगी।

3. **चरण 1 : सूत्रण :** कक्षा में पृथ्वी की परिक्रमा कर रहे चांद की चाल यह है

$$\frac{\text{कक्षा की लंबाई}}{\text{लिया गया समय}}$$

चरण 2 : हल : क्योंकि कक्षा लगभग वृत्तीय है, इसलिए लंबाई $2 \times \pi \times 384000$ km = 2411520 km

एक कक्षा को पूरा करने में चंद्रमा 24 घंटे लेता है।

अत: चाल = $\frac{2411520}{24}$ = 100480 km/h

चरण 3 : निर्वचन : चाल 100480 km/h है।

4. **सूत्रण :** यह कल्पना कर ली गई है कि बिल में अंतर होने का कारण केवल वाटर हीटर का प्रयोग है।

मान लीजिए वाटर हीटर के इस्तेमाल होने का औसत समय = x घंटा

वाटर हीटर के इस्तेमाल के कारण प्रति महिने अंतर = ₹1240 – ₹1000 = ₹240

एक घंटे के लिए वाटर हीटर का इस्तेमाल की लागत = ₹8

So, the cost of using the water heater for 30 days = $8 \times 30 \times x$

अत: 30 दिनों तक वाटर हीटर का इस्तेमाल करने की लागत = बिल में अंतर

इसलिए, $240x = 240$

हल : इस समीकरण से हमें $x = 1$ प्राप्त होता है।

निर्वचन : क्योंकि $x = 1$, इसलिए औसतन प्रति दिन 1 घंटे तक वाटर हीटर का प्रयोग किया जाता है।

प्रश्नावली A2.2

1. यहाँ हम किसी विशेष हल पर चर्चा नहीं करेंगे। आप यहाँ पिछले उदाहरण में प्रयुक्त विधि का या किसी अन्य उपयुक्त विधि का प्रयोग कर सकते हैं।

प्रश्नावली A2.3

1. हम यह पहले बता चुके हैं कि वास्तविक जीवन से जुड़ी स्थितियों में सूत्रण भाग ब्यौरेवार हो सकता है। हम शब्द समस्याओं में उत्तर को व्यक्त नहीं करते। इसके अतिरिक्त इस शब्द समस्या का एक सही उत्तर होता है। आवश्यक नहीं है कि यह वास्तविक जीवन से जुड़ी स्थितियाँ ही हों।

2. महत्वपूर्ण कारक (ii) और (iii)। यहाँ (i) एक महत्वपूर्ण कारक नहीं है, यद्यपि इसकी बेची गई वाहनों की संख्या को प्रभावित भी कर सकता है।

गणित

कक्षा 9 के लिए पाठ्यपुस्तक

0963

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्
NATIONAL COUNCIL OF EDUCATIONAL RESEARCH AND TRAINING

प्रथम संस्करण
मार्च 2006 फाल्गुन 1927

पुनर्मुद्रण
अक्तूबर 2006 कार्तिक 1928
अक्तूबर 2007 कार्तिक 1929
जनवरी 2009 माघ 1930
जनवरी 2010 पौष 1931
जनवरी 2011 पौष 1932
जनवरी 2012 माघ 1933
दिसंबर 2012 अग्रहायण 1934
फरवरी 2014 माघ 1935
दिसंबर 2015 अग्रहायण 1937
दिसंबर 2016 पौष 1938
दिसंबर 2017 अग्रहायण 1939
दिसंबर 2018 अग्रहायण 1940
अगस्त 2019 भाद्रपद 1941

PD 85T RPS

₹ 155.00

एन.सी.ई.आर.टी. वाटरमार्क 80 जी.एस.एम. पेपर पर मुद्रित।

प्रकाशन प्रभाग में सचिव, राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, श्री अरविंद मार्ग, नयी दिल्ली 110 016 द्वारा प्रकाशित तथा एस.डी.आर. प्रिंटर्स, ए-28, वेस्ट ज्योति नगर, लोनी रोड, शाहदरा, दिल्ली - 110 094 द्वारा मुद्रित।

ISBN 81-7450-505-9

एन.सी.ई.आर.टी. के प्रकाशन प्रभाग के कार्यालय

एन.सी.ई.आर.टी. कैंपस
श्री अरविंद मार्ग
नयी दिल्ली 110 016 **फोन : 011-26562708**

108, 100 फीट रोड
हेली एक्सटेंशन, होस्डेकेरे
बनाशंकरी III स्टेज
बैंगलुरु 560 085 **फोन : 080-26725740**

नवजीवन ट्रस्ट भवन
डाकघर नवजीवन
अहमदाबाद 380 014 **फोन : 079-27541446**

सी.डब्ल्यू.सी. कैंपस
निकट: धनकल बस स्टॉप
पनिहटी
कोलकाता 700 114 **फोन : 033-25530454**

सी.डब्ल्यू.सी. कॉम्प्लैक्स
मालीगांव
गुवाहाटी 781021 **फोन : 0361-2674869**

प्रकाशन सहयोग

अध्यक्ष, प्रकाशन प्रभाग	: *एम. सिराज अनवर*
मुख्य संपादक	: *श्वेता उप्पल*
मुख्य व्यापार प्रबंधक	: *बिबाष कुमार दास*
मुख्य उत्पादन अधिकारी	: *अरुण चितकारा*
संपादक	: *रेखा अग्रवाल*
उत्पादन सहायक	: *सुनील कुमार*

चित्रांकन और आवरण
डिजिटल एक्सप्रेशन

आमुख

राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा (2005) सुझाती है कि बच्चों के स्कूली जीवन को बाहर के जीवन से जोड़ा जाना चाहिए। यह सिद्धान्त किताबी ज्ञान की उस विरासत के विपरीत है जिसके प्रभाववश हमारी व्यवस्था आज तक स्कूल और घर के बीच अंतराल बनाये हुए है। नई राष्ट्रीय पाठ्यचर्या पर आधारित पाठ्यक्रम और पाठ्यपुस्तकें इस बुनियादी विचार पर अमल करने का प्रयास हैं। इस प्रयास में हर विषय को एक मजबूत दीवार से घेर देने और जानकारी को रटा देने की प्रवृत्ति का विरोध शामिल है। आशा है कि ये कदम हमें राष्ट्रीय शिक्षा नीति (1986) में वर्णित बाल-केन्द्रित व्यवस्था की दिशा में काफ़ी दूर तक ले जाएँगे।

इस प्रयत्न की सफलता अब इस बात पर निर्भर है कि स्कूलों के प्राचार्य और अध्यापक बच्चों को कल्पनाशील गतिविधियों और सवालों की मदद से सीखने और सीखने के दौरान अपने अनुभव पर विचार करने का अवसर देते हैं। हमें यह मानना होगा कि यदि जगह, समय और आज़ादी दी जाए तो बच्चे बड़ों द्वारा सौंपी गई सूचना-सामग्री से जुड़कर और जूझकर नये ज्ञान का सृजन करते हैं। शिक्षा के विविध साधनों व स्रोतों की अनेदखी किये जाने का प्रमुख कारण पाठ्यपुस्तक को परीक्षा का एकमात्र आधार बनाने की प्रवृत्ति है। सर्जना और पहल को विकसित करने के लिये ज़रूरी है कि हम बच्चों को सीखने की प्रक्रिया में पूरा भागीदार मानें और बनाएँ, उन्हें ज्ञान की निर्धारित खुराक का ग्राहक मानना छोड़ दें।

ये उद्देश्य स्कूल की दैनिक ज़िन्दगी और कार्यशैली में काफ़ी फेरबदल की माँग करते हैं। दैनिक समय-सारणी में लचीलापन उतना ही ज़रूरी है जितनी वार्षिक कैलेण्डर के अमल में चुस्ती, जिससे शिक्षण के लिये नियत दिनों की संख्या हकीकत बन सके। शिक्षण और मूल्यांकन की विधियाँ भी इस बात को तय करेंगी कि यह पाठ्यपुस्तक स्कूल में बच्चों के जीवन को मानसिक दबाव तथा बोरियत की जगह खुशी का अनुभव बनाने में कितनी प्रभावी सिद्ध होती है। बोझ की समस्या से निपटने के लिये पाठ्यक्रम निर्माताओं ने विभिन्न चरणों में ज्ञान का पुनर्निधारण करते समय बच्चों के मनोविज्ञान एवं अध्यापन के लिये उपलब्ध समय का ध्यान रखने की पहले से अधिक सचेत कोशिश की है। इस कोशिश को और गहराने के यत्न में यह पाठ्यपुस्तक सोच-विचार और विस्मय, छोटे समूहों में बातचीत एवं बहस और हाथ से की जाने वाली गतिविधियों को प्राथमिकता देती है।

एन.सी.ई.आर.टी. इस पुस्तक की रचना के लिये बनाई गई पाठ्यपुस्तक निर्माण समिति के परिश्रम के लिए कृतज्ञता व्यक्त करती है। परिषद् विज्ञान एवं गणित के सलाहकार समूह के अध्यक्ष प्रोफ़ेसर जयंत विष्णु नारलीकर और इस पुस्तक की मुख्य सलाहकार इन्दिरा गाँधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय की प्रोफेसर पी. सिंक्लेयर की विशेष आभारी है। इस पाठ्यपुस्तक के विकास में कई शिक्षकों ने

योगदान दिया; इस योगदान को संभव बनाने के लिये हम उनके प्राचार्यों के आभारी हैं। हम उन सभी संस्थाओं और संगठनों के प्रति कृतज्ञ हैं जिन्होंने अपने संसाधनों, सामग्री तथा सहयोगियों की मदद लेने में हमें उदारतापूर्वक सहयोग दिया। हम विशेष रूप से माध्यमिक एवं उच्चतर शिक्षा विभाग, मानव संसाधन विकास मंत्रालय द्वारा प्रोफेसर मृणाल मिरी और प्रोफेसर जी. पी. देशपांडे की अध्यक्षता में गठित राष्ट्रीय निरीक्षण समिति द्वारा प्रदत्त बहुमूल्य समय एवं योगदान के लिए भी कृतज्ञ हैं। व्यवस्थागत सुधारों और अपने प्रकाशनों में निरन्तर निखार लाने के प्रति समर्पित एन.सी.ई.आर.टी. टिप्पणियों व सुझावों का स्वागत करेगी जिनसे भावी संशोधनों में मदद ली जा सके।

नयी दिल्ली
20 दिसंबर 2005

निदेशक
राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्

पाठ्यपुस्तक निर्माण समिति

विज्ञान एवं गणित के सलाहकार समूह के अध्यक्ष

जयंत विष्णु नारलीकर, *इमीरिटस प्रोफ़ेसर,* अध्यक्ष, आई.यू.सी.ए.ए., गणेशखिंड, पूना विश्वविद्यालय, पूना।

मुख्य सलाहकार

पी. सिंक्लेयर, *प्रोफ़ेसर,* विज्ञान विद्यापीठ, इ.गा.रा.मु.वि., नयी दिल्ली

मुख्य समन्वयक

हुकुम सिंह, *प्रोफ़ेसर,* डी.ई.एस.एम., रा.शै.अ.प्र.प., नयी दिल्ली

सदस्य

अंजली लाल, *पी.जी.टी.* (गणित), डी.ए.वी. पब्लिक स्कूल, सेक्टर–14, गुड़गांव
अंजू निरूला, *पी.जी.टी.* (गणित), डी.ए.वी. पब्लिक स्कूल, पुष्पांजली इंक्लेव, पीतम पुरा, दिल्ली
उदय सिंह, *लेक्चरर,* डी.ई.एस.एम., रा.शै.अ.प्र.प., नयी दिल्ली
ए.के. वझलवार, *प्रोफ़ेसर,* डी.ई.एस.एम., रा.शै.अ.प्र.प., नयी दिल्ली
एस. वेंकटरमन, *लेक्चरर,* विज्ञान विद्यापीठ, इ.गा.रा.मु.वि. नयी दिल्ली
जी.पी. दीक्षित, *प्रोफ़ेसर,* गणित और खगोलिकी विभाग, लखनऊ विश्वविद्यालय, लखनऊ
के.ए.एस.एस.वी. कामेश्वर राव, *लेक्चरर,* क्षेत्रीय शिक्षा संस्थान, भुवनेश्वर
महेन्द्र आर. गजरे, *पी.जी.टी.,* अतुल विद्यालय, अतुल, जिला वलसाद
महेन्द्र शंकर, लेक्चरर (एस.जी.) (सेवानिवृत), रा.शै.अ.प्र.प., नयी दिल्ली
रामा बालाजी, *टी.जी.टी.* (गणित), के.वी. मेग और केन्द्र, सेंट जान्स रोड, बंगलौर
वेद डुडेज़ा, *उप–प्रधानाचार्य* (सेवानिवृत), राजकीय बालिका माध्यमिक विद्यालय, सैनिक विहार, दिल्ली
संजय मुद्गल, *लेक्चरर,* सी.आई.ई.टी., रा.शै.अ.प्र.प., नयी दिल्ली
शशिधर जगदीशन, *शिक्षक और सदस्य,* गवरनिंग कॉउंसिल, सेन्टर फॉर लर्निंग, बंगलौर

हिन्दी रूपांतरकर्ता

जी.पी. दीक्षित, *प्रोफ़ेसर,* गणित और खगोलिकी विभाग, लखनऊ विश्वविद्यालय, लखनऊ
महेन्द्र शंकर, लेक्चरर (एस.जी.) (सेवानिवृत), रा.शै.अ.प्र.प., नयी दिल्ली
हरीश्वर प्रसाद सिन्हा, सी–210, राजाजी पुरम, लखनऊ

सदस्य–समन्वयक

राम अवतार, *प्रोफ़ेसर,* डी.ई.एस.एम., रा.शै.अ.प्र.प., नयी दिल्ली (दिसम्बर 2005 तक)
आर.पी. मौर्य, *प्रोफ़ेसर,* डी.ई.एस.एम., रा.शै.अ.प्र.प., नयी दिल्ली (जनवरी 2006 से)

भारत का संविधान

उद्देशिका

हम, भारत के लोग, भारत को एक [1]**[संपूर्ण प्रभुत्व-संपन्न समाजवादी पंथनिरपेक्ष लोकतंत्रात्मक गणराज्य]** बनाने के लिए, तथा उसके समस्त नागरिकों को :

सामाजिक, आर्थिक और राजनैतिक **न्याय,**

विचार, अभिव्यक्ति, विश्वास, धर्म

और उपासना की **स्वतंत्रता,**

प्रतिष्ठा और अवसर की **समता**

प्राप्त कराने के लिए,

तथा उन **सब में**

व्यक्ति की गरिमा और [2]**[राष्ट्र की एकता और अखंडता]** सुनिश्चित करने वाली **बंधुता**

बढ़ाने के लिए

दृढ़संकल्प होकर **अपनी इस संविधान सभा में** आज तारीख 26 नवंबर, 1949 ई. को **एतद्द्वारा इस संविधान को अंगीकृत, अधिनियमित और आत्मार्पित करते हैं।**

---

1. संविधान (बयालीसवां संशोधन) अधिनियम, 1976 की धारा 2 द्वारा (3.1.1977 से) ''प्रभुत्व-संपन्न लोकतंत्रात्मक गणराज्य'' के स्थान पर प्रतिस्थापित।
2. संविधान (बयालीसवां संशोधन) अधिनियम, 1976 की धारा 2 द्वारा (3.1.1977 से) ''राष्ट्र की एकता'' के स्थान पर प्रतिस्थापित।

आभार

परिषद् पाठ्यपुस्तक की समीक्षा के लिए आयोजित कार्यशाला के निम्नलिखित प्रतिभागियों का उनके बहुमूल्य योगदान के लिए हार्दिक आभार प्रकट करती है: ए. के. सक्सैना, *प्रोफेसर* (सेवानिवृत), लखनऊ विश्वविद्यालय लखनऊ; सुनील बजाज, *एच.ओ.डी.* (गणित), एस.सी.ई.आर.टी. हरियाणा, गुड़गाँव; के. एल. आर्य, *प्रोफेसर* (सेवानिवृत), डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नई दिल्ली; बंदिता कालरा, *लेक्चरर*, सर्वोदय कन्या विद्यालय, विकास पुरी, डिस्ट्रिक्ट सेंटर, नई दिल्ली; जगदीश सिंह, *पी.जी.टी.*, सैनिक स्कूल, कपूरथला; पी. के. बग्गा, *टी.जी.टी.*, एस.बी.वी., सुभाष नगर, नई दिल्ली; आर.सी. महाना, *टी.जी.टी.*, केन्द्रीय विद्यालय, संबलपुर; डी.आर. खंडवे, *टी.जी.टी.*, जे.एन.वी. दुधनोई, गोलपाड़ा; एस.एस. चट्टोपाध्याय, *एसिसटेंट मास्टर*, बिधान नगर गवर्नमेंट हाई स्कूल, कोलकाता; एन.ए. सुजाथा, *टी.जी.टी.*, के.वी. वास्को न. 1, गोवा; अकिला सहदेवन, *टी.जी.टी.*, के.वी. मीनांबक्कम, चेन्नई; एस.सी. राऊतो, *टी.जी.टी.*, सैंट्रल स्कूल फॉर तिब्बतनस, मसूरी; सुनील पी. जेवियर, *टी.जी.टी.*, एन.वी., नेरीयामंलगम, एरनाकुलम; अमित बजाज, *टी.जी.टी.*, सी.आर.पी.एफ पब्लिक स्कूल, रोहिणी, दिल्ली; आर.के. पाण्डे, *टी.जी.टी.*, डी.एम. स्कूल, आर.आई.ई. भोपाल; वी. माधवी, *टी.जी.टी.*, संस्कृति स्कूल, चाणक्यपुरी, नई दिल्ली; जी. श्री हरि बाबू, *टी.जी.टी.*, जे.एन.वी. कागज़नगर, अदिलाबाद।

परिषद् उन विषय-विशेषज्ञों, शिक्षकों एवं विभागीय सदस्यों की भी आभारी है जिन्होंने इस पुस्तक के हिन्दी संस्करण की समीक्षा की और इसे अधिक उपयोगी बनाने हेतु महत्त्वपूर्ण सुझाव दिए: नन्दकिशोर वर्मा, *लेक्चरर*, एच.ई.एस.-II, गणित विभाग, राज्य शैक्षिक अनु. एवं प्रशि. परि., हरियाणा, गुडगाँव; रविन्द्र सिंह पंवार, *पी.जी.टी.*, एम.बी.डी.ए.वी. सीनियर सै. स्कूल, यूसुफ सराय, नई दिल्ली; अजय कुमार सिंह, *टी.जी.टी.*, रामजस सी.सै. स्कूल, न. 3, कूचा नटवा, चाँदनी चौक, दिल्ली; सविता गर्ग, *पी.जी.टी.*, सर्वोदय कन्या विद्यालय, चांद नगर, नई दिल्ली; सुधा गुप्ता, *टी.जी.टी.*, सर्वोदय कन्या विद्यालय, अवन्तिका, रोहिणी, दिल्ली; राजकुमार भारद्वाज, *टी.जी.टी.*, राजकीय माध्यमिक बाल विद्यालय, ए-ब्लाक, सुल्तानपुरी, दिल्ली; अशोक कुमार गुप्ता, *टी.जी.टी.*, राजकीय उच्चतर माध्यमिक विद्यालय, एस.यू. ब्लाक, पीतमपुरा, दिल्ली; पी.के. तिवारी, *सहायक आयुक्त* (सेवानिवृत), केन्द्रीय विद्यालय संगठन, नई दिल्ली; आर.पी. मौर्य, (*समन्वयक*) *प्रोफ़ेसर*, डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी.।

परिषद् पुस्तक विकास की प्रक्रिया में सहयोग के लिए एम. चन्द्रा, *प्रोफेसर एवं विभागाध्यक्ष,* डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी. की विशेष रूप से आभारी है।

परिषद् *कंप्यूटर प्रभारी,* दीपक कपूर; *डी.टी.पी. ऑपरेटर,* नरेश कुमार; *कॉपी संपादक,* प्रगति भारद्वाज और एल.आर. भारती; *प्रूफ रीडर,* योगिता शर्मा के प्रयासों के प्रति भी आभार प्रकट करती है। ए.पी.सी. कार्यालय, डी.ई.एस.एम. का प्रशासन, प्रकाशन प्रभाग और एन.सी.ई.आर.टी. सचिवालय के योगदान भी सराहनीय हैं।

विषय सूची

भारत का संविधान

भाग 4क

नागरिकों के मूल कर्तव्य

अनुच्छेद 51 क

मूल कर्तव्य – भारत के प्रत्येक नागरिक का यह कर्तव्य होगा कि वह –

(क) संविधान का पालन करे और उसके आदर्शों, संस्थाओं, राष्ट्रध्वज और राष्ट्रगान का आदर करे;

(ख) स्वतंत्रता के लिए हमारे राष्ट्रीय आंदोलन को प्रेरित करने वाले उच्च आदर्शों को हृदय में संजोए रखे और उनका पालन करे;

(ग) भारत की संप्रभुता, एकता और अखंडता की रक्षा करे और उसे अक्षुण्ण बनाए रखे;

(घ) देश की रक्षा करे और आह्वान किए जाने पर राष्ट्र की सेवा करे;

(ङ) भारत के सभी लोगों में समरसता और समान भ्रातृत्व की भावना का निर्माण करे जो धर्म, भाषा और प्रदेश या वर्ग पर आधारित सभी भेदभावों से परे हो, ऐसी प्रथाओं का त्याग करे जो महिलाओं के सम्मान के विरुद्ध हों;

(च) हमारी सामासिक संस्कृति की गौरवशाली परंपरा का महत्त्व समझे और उसका परिरक्षण करे;

(छ) प्राकृतिक पर्यावरण की, जिसके अंतर्गत वन, झील, नदी और वन्य जीव हैं, रक्षा करे और उसका संवर्धन करे तथा प्राणिमात्र के प्रति दयाभाव रखे;

(ज) वैज्ञानिक दृष्टिकोण, मानववाद और ज्ञानार्जन तथा सुधार की भावना का विकास करे;

(झ) सार्वजनिक संपत्ति को सुरक्षित रखे और हिंसा से दूर रहे;

(ञ) व्यक्तिगत और सामूहिक गतिविधियों के सभी क्षेत्रों में उत्कर्ष की ओर बढ़ने का सतत् प्रयास करे, जिससे राष्ट्र निरंतर बढ़ते हुए प्रयत्न और उपलब्धि की नई ऊँचाइयों को छू सके; और

(ट) यदि माता-पिता या संरक्षक है, छह वर्ष से चौदह वर्ष तक की आयु वाले अपने, यथास्थिति, बालक या प्रतिपाल्य को शिक्षा के अवसर प्रदान करे।

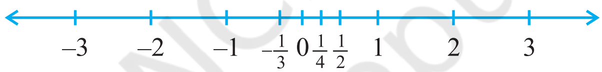
0963CH01

अध्याय 1

संख्या पद्धति

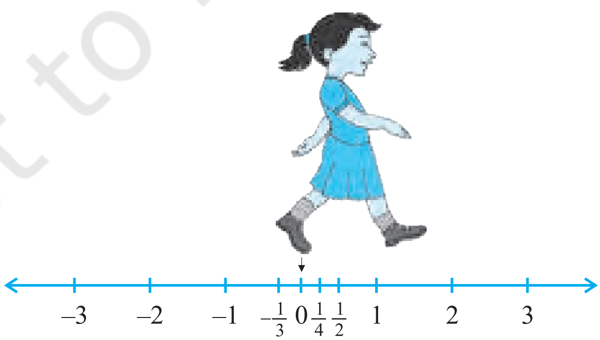
1.1 भूमिका

पिछली कक्षाओं में, आप संख्या रेखा के बारे में पढ़ चुके हैं और वहाँ आप यह भी पढ़ चुके हैं कि विभिन्न प्रकार की संख्याओं को संख्या रेखा पर किस प्रकार निरूपित किया जाता है (देखिए आकृति 1.1)।



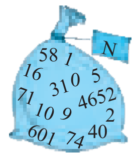
आकृति 1.1 : संख्या रेखा

कल्पना कीजिए कि आप शून्य से चलना प्रारंभ करते हैं और इस रेखा पर धनात्मक दिशा में चलते जा रहे हैं। जहाँ तक आप देख सकते हैं; वहाँ तक आपको संख्याएँ, संख्याएँ और संख्याएँ ही दिखाई पड़ती हैं।

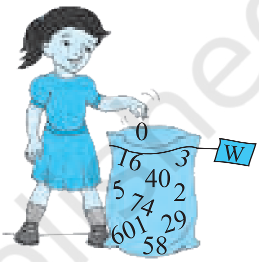


आकृति 1.2

अब मान लीजिए आप संख्या रेखा पर चलना प्रारंभ करते हैं और कुछ संख्याओं को एकत्रित करते जा रहे हैं। इस संख्याओं को रखने के लिए एक थैला तैयार रखिए!

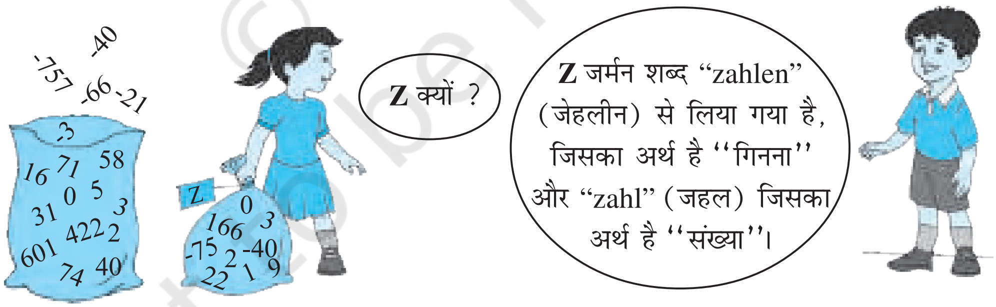


संभव है कि आप 1, 2, 3 आदि जैसी केवल प्राकृत संख्याओं को उठाना प्रारंभ कर रहे हों। आप जानते हैं कि यह सूची सदैव बढ़ती ही जाती है। (क्या आप बता सकते हैं कि ऐसा क्यों है?) अतः अब आप के थैले में अपरिमित रूप से अनेक प्राकृत संख्याएँ भर जाती हैं! आपको याद होगा कि हम इस संग्रह को प्रतीक **N** से प्रकट करते हैं।

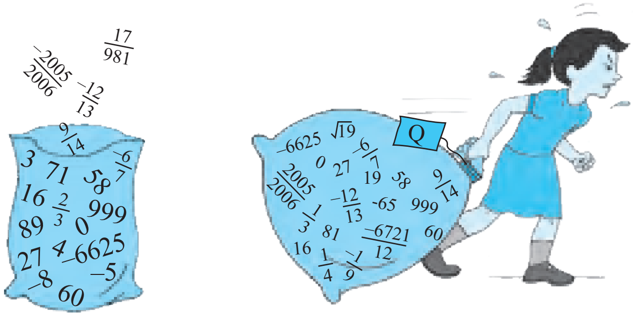


अब आप घूम जाइए और विपरीत दिशा में चलते हुए शून्य को उठाइए और उसे भी थैले में रख दीजिए। अब आपको **पूर्ण संख्याओं** (**whole numbers**) का एक संग्रह प्राप्त हो जाता है। जिसे प्रतीक **W** से प्रकट किया जाता है।

अब, आपको अनेक-अनेक ऋणात्मक पूर्णांक दिखाई देते हैं। आप इन सभी ऋणात्मक पूर्णांकों को अपने थैले में डाल दीजिए। क्या आप बता सकते हैं कि आपका यह नया संग्रह क्या है? आपको याद होगा कि यह सभी **पूर्णांकों** (**integers**) का संग्रह है और इसे प्रतीक **Z** से प्रकट किया जाता है।



क्या अभी भी रेखा पर संख्याएँ बची रहती हैं? निश्चित रूप से ही, रेखा पर संख्याएँ बची रहती हैं। ये संख्याएँ $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$, या $\frac{-2005}{2006}$ जैसी संख्याएँ भी हैं। यदि आप इस प्रकार की सभी संख्याओं को भी थैले में डाल दें, तब यह **परिमेय संख्याओं** (**rational numbers**)



का संग्रह हो जाएगा। परिमेय संख्याओं के संग्रह को **Q** से प्रकट किया जाता है। अंग्रेजी शब्द "rational" की व्युत्पत्ति अंग्रेजी शब्द "ratio" से हुई है और अक्षर **Q** अंग्रेजी शब्द 'quotient' से लिया गया है।

अब आपको याद होगा कि परिमेय संख्याओं की परिभाषा इस प्रकार दी जाती है :

संख्या 'r' को परिमेय संख्या कहा जाता है, यदि इसे $\frac{p}{q}$ के रूप में लिखा जा सकता हो, जहाँ p और q पूर्णांक हैं और $q \neq 0$ है (यहाँ हम इस बात पर बल क्यों देते हैं कि $q \neq 0$ होना चाहिए)।

अब आप इस बात की ओर ध्यान दीजिए कि थैले में रखी सभी संख्याओं को $\frac{p}{q}$ के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ p और q पूर्णांक हैं और $q \neq 0$ है। उदाहरण के लिए, -25 को $\frac{-25}{1}$ के रूप में लिखा जा सकता है; यहाँ $p = -25$ और $q = 1$ है। इस तरह हम यह पाते हैं कि परिमेय संख्याओं के अंतर्गत प्राकृत संख्याएँ, पूर्ण संख्याएँ और पूर्णांक भी आते हैं।

आप यह भी जानते हैं कि परिमेय संख्याओं का $\frac{p}{q}$ के रूप में अद्वितीय (unique) निरूपण नहीं होता है, जहाँ p और q पूर्णांक हैं और $q \neq 0$ है। उदाहरण के लिए, $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{10}{20} = \frac{25}{50} = \frac{47}{94}$, आदि। ये परिमेय संख्याएँ **तुल्य परिमेय संख्याएँ (या भिन्न)** हैं। फिर भी, जब हम यह कहते हैं कि $\frac{p}{q}$ एक परिमेय संख्या है या जब हम $\frac{p}{q}$ को एक संख्या

रेखा पर निरूपित करते हैं, तब हम यह मान लेते हैं कि $q \neq 0$ और p और q का 1 के अतिरिक्त अन्य कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है [अर्थात् p और q असहभाज्य संख्याएँ (coprime numbers) हैं]। अतः संख्या रेखा पर $\frac{1}{2}$ के तुल्य अपरिमित रूप से अनेक भिन्नों में से हम $\frac{1}{2}$ लेते हैं जो सभी को निरूपित करती है।

आइए अब हम विभिन्न प्रकार की संख्याओं, जिनका अध्ययन आप पिछली कक्षाओं मे कर चुके हैं, से संबंधित कुछ उदाहरण हल करें।

उदाहरण 1 : नीचे दिए गए कथन सत्य हैं या असत्य? कारण के साथ अपने उत्तर दीजिए।

(i) प्रत्येक पूर्ण संख्या एक प्राकृत संख्या होती है।

(ii) प्रत्येक पूर्णांक एक परिमेय संख्या होता है।

(iii) प्रत्येक परिमेय संख्या एक पूर्णांक होती है।

हल : (i) असत्य है, क्योंकि शून्य एक पूर्ण संख्या है परन्तु प्राकृत संख्या नहीं है।

(ii) सत्य है, क्योंकि प्रत्येक पूर्णांक m को $\frac{m}{1}$ के रूप में लिखा जा सकता है और इसलिए यह एक परिमेय संख्या है।

(iii) असत्य है, क्योंकि $\frac{3}{5}$ एक पूर्णांक नहीं है।

उदाहरण 2 : 1 और 2 के बीच की पाँच परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

इस प्रश्न को हम कम से कम दो विधियों से हल कर सकते हैं।

हल 1 : आपको याद होगा कि r और s के बीच की एक परिमेय संख्या ज्ञात करने के लिए आप r और s को जोड़ते हैं और उसे दो से भाग दे देते हैं, अर्थात् $\frac{r+s}{2}$, r और s के बीच स्थित होती है। अतः $\frac{3}{2}$, 1 और 2 के बीच की एक संख्या है। इसी प्रक्रिया में आप 1 और 2 के बीच चार और परिमेय संख्याएँ ज्ञात कर सकते हैं। ये चार संख्याएँ हैं : $\frac{5}{4}, \frac{11}{8}, \frac{13}{8}$ और $\frac{7}{4}$।

हल 2 : एक अन्य विकल्प है कि एक ही चरण में सभी पाँच परिमेय संख्याओं को ज्ञात कर लें। क्योंकि हम पाँच संख्याएँ ज्ञात करना चाहते हैं, इसलिए हम 5 + 1 अर्थात्, 6 को हर लेकर 1 और 2 को परिमेय संख्याओं के रूप में लिखते हैं। अर्थात् $1 = \frac{6}{6}$ और $2 = \frac{12}{6}$ हैं। तब आप यह देख सकते हैं कि $\frac{7}{6}, \frac{8}{6}, \frac{9}{6}, \frac{10}{6}$ और $\frac{11}{6}$ सभी 1 और 2 के बीच स्थित परिमेय संख्याएँ हैं। अतः 1 और 2 के बीच स्थित संख्याएँ हैं : $\frac{7}{6}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}$ और $\frac{11}{6}$।

टिप्पणी : ध्यान दीजिए कि उदाहरण 2 में 1 और 2 के बीच स्थित केवल पाँच परिमेय संख्याएँ ही ज्ञात करने के लिए कहा गया था। परन्तु आपने यह अवश्य अनुभव किया होगा कि वस्तुतः 1 और 2 के बीच अपरिमित रूप से अनेक परिमेय संख्याएँ होती हैं। व्यापक रूप में, **किन्हीं दो दी हुई परिमेय संख्याओं के बीच अपरिमित रूप से अनेक परिमेय संख्याएँ होती हैं।**

आइए हम संख्या रेखा को पुनः देखें। क्या आपने इस रेखा पर स्थित सभी संख्याओं को ले लिया है? अभी तक तो नहीं। ऐसा होने का कारण यह है कि संख्या रेखा पर अपरिमित रूप से अनेक और संख्याएँ बची रहती हैं। आप द्वारा उठायी गई संख्याओं के स्थानों के बीच रिक्त स्थान हैं और रिक्त स्थान न केवल एक या दो हैं, बल्कि अपरिमित रूप से अनेक हैं। आश्चर्यजनक बात तो यह है कि किन्ही दो रिक्त स्थानों के बीच अपरिमित रूप से अनेक संख्याएँ स्थित होती हैं।

अतः, हमारे सामने निम्नलिखित प्रश्न बचे रह जाते हैं:

1. संख्या रेखा पर बची हुई संख्याओं को क्या कहा जाता है?
2. इन्हें हम किस प्रकार पहचानते हैं? अर्थात् इन संख्याओं और परिमेय संख्याओं के बीच हम किस प्रकार भेद करते हैं?

इन प्रश्नों के उत्तर अगले अनुच्छेद में दिए जाएँगे।

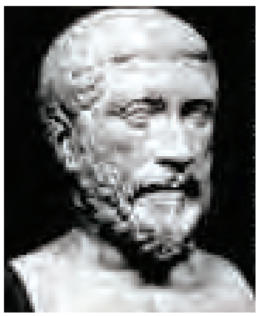
प्रश्नावली 1.1

1. क्या शून्य एक परिमेय संख्या है? क्या इसे आप $\frac{p}{q}$ के रूप में लिख सकते हैं, जहाँ p और q पूर्णांक हैं और $q \neq 0$ है?
2. 3 और 4 के बीच में छः परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।
3. $\frac{3}{5}$ और $\frac{4}{5}$ के बीच पाँच परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।
4. नीचे दिए गए कथन सत्य हैं या असत्य? कारण के साथ अपने उत्तर दीजिए।
   (i) प्रत्येक प्राकृत संख्या एक पूर्ण संख्या होती है।
   (ii) प्रत्येक पूर्णांक एक पूर्ण संख्या होती है।
   (iii) प्रत्येक परिमेय संख्या एक पूर्ण संख्या होती है।

1.2 अपरिमेय संख्याएँ

पिछले अनुच्छेद में, हमने यह देखा है कि संख्या रेखा पर ऐसी संख्याएँ भी हो सकती हैं जो परिमेय संख्याएँ नहीं हैं। इस अनुच्छेद में, अब हम इन संख्याओं पर चर्चा करेंगे। अभी तक हमने जिन संख्याओं पर चर्चा की है, वे $\frac{p}{q}$ के रूप की रही हैं, जहाँ p और q पूर्णांक हैं और $q \neq 0$ है। अतः आप यह प्रश्न कर सकते हैं कि क्या ऐसी भी संख्याएँ हैं जो इस रूप की नहीं होती हैं? वस्तुतः ऐसी संख्याएँ होती हैं।

लगभग 400 सा०यु०पू०, ग्रीस के प्रसिद्ध गणितज्ञ और दार्शनिक पाइथागोरस के अनुयायियों ने इन संख्याओं का सबसे पहले पता लगाया था। इन संख्याओं को **अपरिमेय संख्याएँ (irrational numbers)** कहा जाता है, क्योंकि इन्हें पूर्णांकों के अनुपात के रूप में नहीं लिखा जा सकता है। पाइथागोरस के एक अनुयायी, क्रोटोन के हिपाक्स द्वारा पता लगायी गई अपरिमेय संख्याओं के संबंध में अनेक किंवदंतियाँ हैं। हिपाक्स का एक दुर्भाग्यपूर्ण अंत रहा, चाहे इसका कारण इस बात की खोज हो कि $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है या इस खोज के बारे में बाहरी दुनिया को उजागर करना हो।



पाइथागोरस
(569 सा॰ यु॰ पू॰ – 479 सा॰ यु॰ पू॰)
आकृति 1.3

आइए अब हम इन संख्याओं की औपचारिक परिभाषा दें।

संख्या 's' को **अपरिमेय संख्या (irrational number)** कहा जाता है, यदि इसे $\frac{p}{q}$ के रूप में न लिखा जा सकता हो, जहाँ p और q पूर्णांक हैं और $q \neq 0$ है।

आप यह जानते हैं कि अपरिमित रूप से अनेक परिमेय संख्याएँ होती हैं। इसी प्रकार, अपरिमेय संख्याएँ भी अपरिमित रूप से अनेक होती हैं। इनके कुछ उदाहरण हैं:

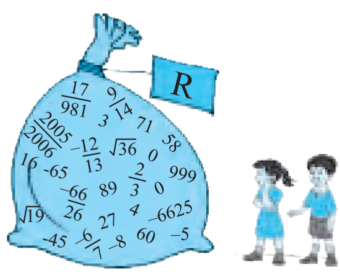
$$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{15}, \pi, 0.10110111011110...$$

टिप्पणी : आपको याद होगा कि जब कभी हम प्रतीक "$\sqrt{\ }$" का प्रयोग करते हैं, तब हम यह मानकर चलते हैं कि यह संख्या का धनात्मक वर्गमूल है। अतः $\sqrt{4} = 2$ है, यद्यपि 2 और -2 दोनों ही संख्या 4 के वर्गमूल हैं।

ऊपर दी गई कुछ अपरिमेय संख्याओं के बारे में आप जानते हैं। उदाहरण के लिए, ऊपर दिए गए अनेक वर्गमूलों और संख्या π से आप परिचित हो चुके हैं।

पाइथागोरस के अनुयायियों ने यह सिद्ध किया है कि $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है। बाद में 425 ई.पू. के आस-पास साइरीन के थियोडोरस ने यह दर्शाया था कि $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{10}, \sqrt{11}, \sqrt{12}, \sqrt{13}, \sqrt{14}, \sqrt{15}$ और $\sqrt{17}$ भी अपरिमेय संख्याएँ हैं। $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, आदि की अपरिमेयता (irrationality) की उपपत्तियों पर चर्चा कक्षा 10 में की जाएगी। जहाँ तक π का संबंध है, हजारों वर्षों से विभिन्न संस्कृतियाँ इससे परिचित रही हैं, परन्तु 1700 ई. के अंत में ही लैम्बर्ट और लेजान्ड्रे ने सिद्ध किया था कि यह एक अपरिमेय संख्या है। अगले अनुच्छेद में हम इस बात पर चर्चा करेंगे कि 0.10110111011110... और π अपरिमेय क्यों हैं।

आइए हम पिछले अनुच्छेद के अंत में उठाए गए प्रश्नों पर पुनः विचार करें। इसके लिए परिमेय संख्याओं वाला थैला लीजिए। अब यदि हम थैले में सभी अपरिमेय संख्याएँ भी डाल दें, तो क्या अब भी संख्या रेखा पर कोई संख्या बची रहेगी? इसका उत्तर है "नहीं"। अतः, एक साथ ली गई सभी परिमेय संख्याओं और अपरिमेय संख्याओं के संग्रह से जो प्राप्त होता है, उसे **वास्तविक संख्याओं (real numbers)** का नाम दिया जाता



है, जिसे **R** से प्रकट किया जाता है। **अतः वास्तविक संख्या या तो परिमेय या अपरिमेय संख्या हो सकती है। अतः हम यह कह सकते हैं कि प्रत्येक वास्तविक संख्या को संख्या रेखा के एक अद्वितीय बिन्दु से निरूपित किया जाता है। साथ ही, संख्या रेखा का प्रत्येक बिन्दु एक अद्वितीय वास्तविक संख्या को निरूपित करता है।** यही कारण है कि संख्या रेखा को **वास्तविक संख्या रेखा (real number line) कहा जाता है।**

जी. कैन्टर (1845–1918)

आकृति 1.4

1870 में दो जर्मन गणितज्ञ कैन्टर और डेडेकिंड ने इसे भिन्न-भिन्न विधियों से सिद्ध किया था। उन्होंने यह दिखाया था कि प्रत्येक वास्तविक संख्या के संगत वास्तविक संख्या रेखा पर एक बिन्दु होता है और संख्या रेखा के प्रत्येक बिन्दु के संगत एक अद्वितीय वास्तविक संख्या होती है।

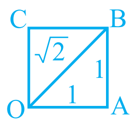
आर. डेडेकिंड (1831–1916)

आकृति 1.5

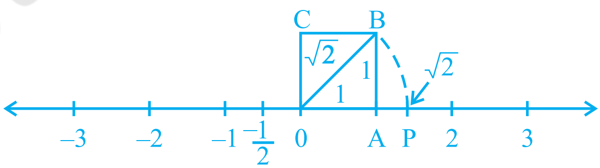
आइए देखें कि संख्या रेखा पर हम कुछ अपरिमेय संख्याओं का स्थान निर्धारण किस प्रकार कर सकते हैं।

उदाहरण 3 : संख्या रेखा पर $\sqrt{2}$ का स्थान निर्धारण (को निरूपित) कीजिए।

हल : यह सरलता से देखा जा सकता है कि किस प्रकार यूनानियों ने $\sqrt{2}$ का पता लगाया होगा। एक एकक (मात्रक) की लंबाई की भुजा वाला वर्ग OABC लीजिए (देखिए आकृति 1.6)। तब आप पाइथागोरस प्रमेय लागू करके यह देख सकते हैं कि OB = $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ है। संख्या रेखा पर हम $\sqrt{2}$ को किस प्रकार निरूपित करते हैं? ऐसा सरलता से किया जा सकता है। इस बात का ध्यान रखते हुए कि शीर्ष O शून्य के साथ संपाती बना रहे, आकृति 1.6 को संख्या रेखा पर स्थानांतरित कीजिए (देखिए आकृति 1.7)।



आकृति 1.6

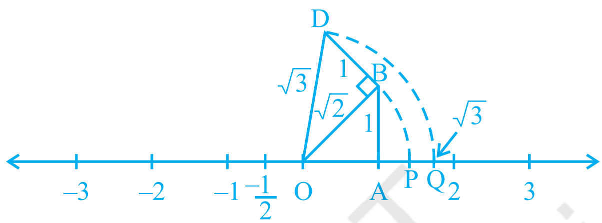


आकृति 1.7

अभी आपने देखा है कि OB = $\sqrt{2}$ है। एक परकार की सहायता से O को केन्द्र और OB को त्रिज्या मानकर एक चाप (arc) खींचिए जो संख्या रेखा को बिन्दु P पर काटता है। तब बिन्दु P संख्या रेखा पर $\sqrt{2}$ के संगत होता है।

उदाहरण 4 : वास्तविक संख्या रेखा पर $\sqrt{3}$ का स्थान निर्धारण कीजिए।

हल : आइए हम आकृति 1.7 को पुनः लें।



आकृति 1.8

OB पर एकक लंबाई वाले लंब BD की रचना कीजिए (जैसा कि आकृति 1.8 में दिखाया गया है)। तब पाइथागोरस प्रमेय लागू करने पर, हमें OD = $\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$ प्राप्त होता है। एक परकार की सहायता से O को केन्द्र और OD को त्रिज्या मानकर एक चाप खींचिए जो संख्या रेखा को बिन्दु Q पर काटता है। तब Q, $\sqrt{3}$ के संगत है।

इसी प्रकार $\sqrt{n-1}$ का स्थान निर्धारण हो जाने के बाद आप $\sqrt{n}$ का स्थान निर्धारण कर सकते हैं, जहाँ n एक धनात्मक पूर्णांक है।

प्रश्नावली 1.2

1. नीचे दिए गए कथन सत्य हैं या असत्य हैं। कारण के साथ अपने उत्तर दीजिए।

(i) प्रत्येक अपरिमेय संख्या एक वास्तविक संख्या होती है।

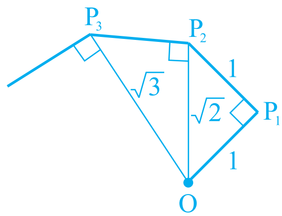
(ii) संख्या रेखा का प्रत्येक बिन्दु $\sqrt{m}$ के रूप का होता है, जहाँ m एक प्राकृत संख्या है।

(iii) प्रत्येक वास्तविक संख्या एक अपरिमेय संख्या होती है।

2. क्या सभी धनात्मक पूर्णांकों के वर्गमूल अपरिमेय होते हैं? यदि नहीं, तो एक ऐसी संख्या के वर्गमूल का उदाहरण दीजिए जो एक परिमेय संख्या है।

3. दिखाइए कि संख्या रेखा पर $\sqrt{5}$ को किस प्रकार निरूपित किया जा सकता है।

4. **कक्षा के लिए क्रियाकलाप (वर्गमूल सर्पिल की रचना) :** कागज की एक बड़ी शीट लीजिए और नीचे दी गई विधि से "वर्गमूल सर्पिल" (square root spiral) की रचना कीजिए। सबसे पहले एक बिन्दु O लीजिए और एकक लंबाई का रेखाखंड (line segment) OP_1 खींचिए। एकक लंबाई वाले OP_1 पर लंब रेखाखंड P_1P_2 खींचिए (देखिए आकृति 1.9)। अब OP_2 पर लंब रेखाखंड P_2P_3 खींचिए। तब OP_3 पर लंब रेखाखंड P_3P_4 खींचिए। इस प्रक्रिया को जारी रखते हुए OP_{n-1} पर एकक लंबाई वाला लंब रेखाखंड खींचकर आप रेखाखंड $P_{n-1}P_n$ प्राप्त कर सकते हैं। इस प्रकार आप बिन्दु O, P_1, P_2, P_3,..., P_n,... प्राप्त कर लेंगे और उन्हें मिलाकर $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \ldots$ को दर्शाने वाला एक सुंदर सर्पिल प्राप्त कर लेंगे।



आकृति 1.9 : **वर्गमूल सर्पिल की रचना**

1.3 वास्तविक संख्याएँ और उनके दशमलव प्रसार

इस अनुच्छेद में, हम एक अलग दृष्टिकोण से परिमेय और अपरिमेय संख्याओं का अध्ययन करेंगे। इसके लिए हम वास्तविक संख्याओं के दशमलव प्रसार (expansions) पर विचार करेंगे और देखेंगे कि क्या हम परिमेय संख्याओं और अपरिमेय संख्याओं में भेद करने के लिए इन प्रसारों का प्रयोग कर सकते हैं या नहीं। यहाँ हम इस बात की भी व्याख्या करेंगे कि वास्तविक संख्याओं के दशमलव प्रसार का प्रयोग करके किस प्रकार संख्या रेखा पर वास्तविक संख्याओं को प्रदर्शित किया जाता है। क्योंकि हम अपरिमेय संख्याओं की तुलना में परिमेय संख्याओं से अधिक परिचित हैं, इसलिए हम अपनी चर्चा इन्हीं संख्याओं से प्रारंभ करेंगे। यहाँ इनके तीन उदाहरण दिए गए हैं : $\frac{10}{3}, \frac{7}{8}, \frac{1}{7}$। शेषफलों पर विशेष ध्यान दीजिए और देखिए कि क्या आप कोई प्रतिरूप (pattern) प्राप्त कर सकते हैं।

उदाहरण 5 : $\frac{10}{3}, \frac{7}{8}$ और $\frac{1}{7}$ के दशमलव प्रसार ज्ञात कीजिए।

हल :

$$\begin{array}{r|l} & 3.333... \\ \hline 3 & 10 \\ & \underline{9} \\ & 10 \\ & \underline{9} \\ & 10 \\ & \underline{9} \\ & 10 \\ & \underline{9} \\ & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} & 0.875 \\ \hline 8 & 7.0 \\ & \underline{64} \\ & 60 \\ & \underline{56} \\ & 40 \\ & \underline{40} \\ & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} & 0.142857... \\ \hline 7 & 1.0 \\ & \underline{7} \\ & 30 \\ & \underline{28} \\ & 20 \\ & \underline{14} \\ & 60 \\ & \underline{56} \\ & 40 \\ & \underline{35} \\ & 50 \\ & \underline{49} \\ & 1 \end{array}$$

शेष : 1, 1, 1, 1, 1...
भाजक : 3

शेष : 6, 4, 0
भाजक : 8

शेष : 3, 2, 6, 4, 5, 1, 3, 2, 6, 4, 5, 1,...
भाजक : 7

यहाँ आपने किन-किन बातों पर ध्यान दिया है? आपको कम से कम तीन बातों पर ध्यान देना चाहिए।

(i) कुछ चरण के बाद शेष या तो 0 हो जाते हैं या स्वयं की पुनरावृत्ति करना प्रारंभ कर देते हैं।

(ii) शेषों की पुनरावृत्ति शृंखला में प्रविष्टियों (entries) की संख्या भाजक से कम होती है ($\frac{1}{3}$ में एक संख्या की पुनरावृत्ति होती है और भाजक 3 है, $\frac{1}{7}$ में शेषों की पुनरावृत्ति शृंखला में छः प्रविष्टियाँ 326451 हैं और भाजक 7 है)।

(iii) यदि शेषों की पुनरावृत्ति होती हो, तो भागफल (quotient) में अंकों का एक पुनरावृत्ति खंड प्राप्त होता है ($\frac{1}{3}$ के लिए भागफल में 3 की पुनरावृत्ति होती है और $\frac{1}{7}$ के लिए भागफल में पुनरावृत्ति खंड 142857 प्राप्त होता है)।

यद्यपि केवल ऊपर दिए गए उदाहरणों से हमने यह प्रतिरूप प्राप्त किया है, परन्तु यह $\frac{p}{q}$ $(q \neq 0)$ के रूप की सभी परिमेय संख्याओं पर लागू होता है। q से p को भाग देने पर दो मुख्य बातें घटती हैं – या तो शेष शून्य हो जाता है या कभी भी शून्य नहीं होता है और तब हमें शेषफलों की एक पुनरावृत्ति शृंखला प्राप्त होती है। आइए हम प्रत्येक स्थिति पर अलग-अलग विचार करें।

स्थिति (i) : शेष शून्य हो जाता है।

$\frac{7}{8}$ वाले उदाहरण में हमने यह देखा है कि कुछ चरणों के बाद शेष शून्य हो जाता है और $\frac{7}{8}$ का दशमलव प्रसार 0.875 है। अन्य उदाहरण हैं : $\frac{1}{2} = 0.5$, $\frac{639}{250} = 2.556$ है। इन सभी स्थितियों में कुछ परिमित चरणों के बाद दशमलव प्रसार का अंत हो जाता है। हम ऐसी संख्याओं के दशमलव प्रसार को **सांत (terminating)** दशमलव कहते हैं।

स्थिति (ii) : शेष कभी भी शून्य नहीं होता है।

$\frac{1}{3}$ और $\frac{1}{7}$ वाले उदाहरणों में, हम यह पाते हैं कि कुछ चरणों के बाद शेष की पुनरावृत्ति होने लगती है, जिससे दशमलव प्रसार निरंतर जारी रहता है। दूसरे शब्दों में, हमें भागफल में अंकों का एक पुनरावृत्ति खंड प्राप्त होता है। तब हम यह कहते हैं कि यह प्रसार **अनवसानी आवर्ती (non-terminating recurring)** है। उदाहरण के लिए, $\frac{1}{3} = 0.3333...$ और $\frac{1}{7} = 0.142857142857142857...$ है।

यह दिखाने के लिए कि $\frac{1}{3}$ के भागफल में 3 की पुनरावृत्ति होती है, हम इसे $0.\bar{3}$ के रूप में लिखते हैं। इसी प्रकार, क्योंकि $\frac{1}{7}$ के भागफल में अंकों के खंड 142857 की पुनरावृत्ति होती है, इसलिए हम $\frac{1}{7}$ को $0.\overline{142857}$ के रूप में लिखते हैं, जहाँ अंकों के ऊपर लगाया गया दंड, अंकों के उस खंड को प्रकट करता है जिसकी पुनरावृत्ति होती है। साथ ही, 3.57272 . . . को $3.5\overline{72}$ के रूप में लिखा जा सकता है। अत: इन सभी उदाहरणों से अनवसानी आवर्त (पुनरावृत्ति) दशमलव प्रसार प्राप्त होते हैं। इस तरह हम यह देखते हैं कि परिमेय संख्याओं के दशमलव प्रसार के केवल दो विकल्प होते हैं या तो वे सांत होते हैं या अनवसानी (असांत) आवर्ती होते हैं।

इसके विपरीत अब आप यह मान लीजिए कि संख्या रेखा पर चलने पर आपको 3.142678 जैसी संख्याएँ प्राप्त होती हैं जिसका दशमलव प्रसार सांत होता है या 1.272727..., अर्थात् $1.\overline{27}$ जैसी संख्या प्राप्त होती है, जिसका दशमलव प्रसार अनवसानी आवर्ती है। इससे क्या आप यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि यह एक परिमेय संख्या है? इसका उत्तर है, हाँ! इसे हम सिद्ध नहीं करेंगे, परन्तु कुछ उदाहरण लेकर इस तथ्य को प्रदर्शित करेंगे। सांत स्थितियाँ तो सरल हैं।

उदाहरण 6 : दिखाइए कि 3.142678 एक परिमेय संख्या है। दूसरे शब्दों, में 3.142678 को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त कीजिए, जहाँ p और q पूर्णांक हैं और $q \neq 0$ है।

हल : यहाँ $3.142678 = \frac{3142678}{1000000}$ है। अतः यह एक परिमेय संख्या है।

आइए अब हम उस स्थिति पर विचार करें, जबकि दशमलव प्रसार अनवसानी आवर्ती हो।

उदाहरण 7 : दिखाइए कि $0.3333... = 0.\overline{3}$ को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, जहाँ p और q पूर्णांक हैं और $q \neq 0$ है।

हल : क्योंकि हम यह नहीं जानते हैं कि $0.\overline{3}$ क्या है, अतः आइए इसे हम 'x' मान लें।

$$x = 0.3333...$$

अब, यही वह स्थिति है जहाँ हमें कुछ युक्ति लगानी पड़ेगी।

यहाँ, $$10\,x = 10 \times (0.333...) = 3.333...$$

अब, $$3.3333... = 3 + x, \text{ चूँकि } x = 0.3333... \text{ है।}$$

इसलिए, $$10\,x = 3 + x$$

x के लिए हल करने पर, हमें यह प्राप्त होता है:

$$9x = 3$$

अर्थात्, $$x = \frac{1}{3}$$

उदाहरण 8 : दिखाइए कि $1.272727... = 1.\overline{27}$ को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, जहाँ p और q पूर्णांक हैं और $q \neq 0$ है।

हल : मान लीजिए $x = 1.272727...$ है। क्योंकि यहाँ दो अंकों की पुनरावृत्ति है, इसलिए हम x को 100 से गुणा करते हैं। ऐसा करने पर, हमें यह प्राप्त होता है :

$$100\,x = 127.2727...$$

अतः, $$100\,x = 126 + 1.272727... = 126 + x$$

इसलिए, $$100\,x - x = 126, \text{ अर्थात् } 99\,x = 126$$

अर्थात्, $$x = \frac{126}{99} = \frac{14}{11}$$

आप इसके इस विलोम की जाँच कर सकते हैं कि $\frac{14}{11} = 1.\overline{27}$ है।

उदाहरण 9 : दिखाइए कि $0.2353535... = 0.2\overline{35}$ को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त कर सकते हैं, जहाँ p और q पूर्णांक हैं और $q \neq 0$ है।

हल : मान लीजिए $x = 0.2\overline{35}$ है। यहाँ यह देखिए कि 2 की पुनरावृत्ति नहीं होती है, परन्तु खंड 35 की पुनरावृत्ति होती है। क्योंकि दो अंकों की पुनरावृत्ति हो रही है, इसलिए हम x को 100 से गुणा करते हैं। ऐसा करने पर, हमें यह प्राप्त होता है :

$$100\,x = 23.53535...$$

इसलिए, $$100\,x = 23.3 + 0.23535... = 23.3 + x$$

अतः, $$99\,x = 23.3$$

अर्थात्, $$99\,x = \frac{233}{10}, \text{ जिससे } x = \frac{233}{990} \text{ हुआ।}$$

आप इसके विलोम, अर्थात् $\frac{233}{990} = 0.2\overline{35}$ की भी जाँच कर सकते हैं।

अतः अनवसानी आवर्ती दशमलव प्रसार वाली प्रत्येक संख्या को $\frac{p}{q}$ $(q \neq 0)$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, जहाँ p और q पूर्णांक हैं। आइए हम अपने परिणामों को संक्षेप में इस प्रकार व्यक्त करें:

एक परिमेय संख्या का दशमलव प्रसार या तो सांत होता है या अनवसानी आवर्ती होता है। साथ ही, वह संख्या, जिसका दशमलव प्रसार सांत या अनवसानी आवर्ती है, एक परिमेय संख्या होती है।

अब हम यह जानते हैं कि परिमेय संख्या का दशमलव प्रसार क्या हो सकता है। अब प्रश्न उठता हैं कि अपरिमेय संख्याओं का दशमलव प्रसार क्या होता है? ऊपर बताए गए गुण के अनुसार हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि इन संख्याओं के दशमलव प्रसार **अनवसानी अनावर्ती** (**non-terminating non-recurring**) हैं। अत: ऊपर परिमेय संख्याओं के लिए बताए गए गुण के समान अपरिमेय संख्याओं का गुण यह होता है:

एक अपरिमेय संख्या का दशमलव प्रसार अनवसानी अनावर्ती होता है। विलोमत: वह संख्या जिसका दशमलव प्रसार अनवसानी अनावर्ती होता है, अपरिमेय होती है।

पिछले अनुच्छेद में हमने एक अपरिमेय संख्या 0.10110111011110... की चर्चा की थी। मान लीजिए कि $s = 0.10110111011110...$ है। ध्यान दीजिए कि यह अनवसानी अनावर्ती है। अत: ऊपर बताए गए गुण के अनुसार यह अपरिमेय है। साथ ही, यह भी ध्यान दीजिए कि आप s के समरूप अपरिमित रूप से अनेक अपरिमेय संख्याएँ जनित कर सकते हैं।

सुप्रसिद्ध अपरिमेय संख्याओं $\sqrt{2}$ और π के संबंध में आप क्या जानते हैं? यहाँ कुछ चरण तक उनके दशमलव प्रसार दिए गए हैं:

$$\sqrt{2} = 1.4142135623730950488016887242096...$$

$$\pi = 3.14159265358979323846264338327950...$$

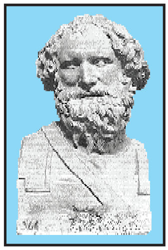
(ध्यान दीजिए कि हम प्राय: $\frac{22}{7}$ को π का एक सन्निकट मान मानते हैं, जबकि $\pi \neq \frac{22}{7}$ है।)

वर्षों से गणितज्ञों ने अपरिमेय संख्याओं के दशमलव प्रसार में अधिक से अधिक अंकों को उत्पन्न करने की विभिन्न तकनीक विकसित की हैं। उदाहरण के लिए, संभवत: आपने विभाजन विधि (division method) से $\sqrt{2}$ के दशमलव प्रसार में अंकों को ज्ञात करना अवश्य ही सीखा होगा। यह एक रोचक बात है कि सुल्बसूत्रों (जीवा-नियमों) में, जो वैदिक युग (800 ई.पू. – 500 ई.पू.) के गणितीय ग्रंथ हैं, हमें $\sqrt{2}$ का एक सन्निकट मान प्राप्त होता है, जो यह है:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{34} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3}\right) = 1.4142156$$

ध्यान दीजिए कि यह वही है जो कि ऊपर प्रथम पाँच दशमलव स्थानों तक के लिए दिया गया है। π के दशमलव प्रसार में अधिक से अधिक अंक प्राप्त करने का इतिहास काफी रोचक रहा है।

यूनान का प्रबुद्ध व्यक्ति आर्कमिडीज ही वह पहला व्यक्ति था जिसने π के दशमलव प्रसार में अंकों को अभिकलित किया था। उसने यह दिखाया कि $3.140845 < \pi < 3.142857$ होता है। आर्यभट्ट (476 – 550 ई॰) ने जो एक महान भारतीय गणितज्ञ और खगोलविद थे, चार दशमलव स्थानों तक शुद्ध π का मान (3.1416) ज्ञात किया था। उच्च चाल कंप्यूटरों और उन्नत कलन विधियों (algorithms) का प्रयोग करके 1.24 ट्रिलियन से भी अधिक दशमलव स्थानों तक π का मान अभिकलित किया जा चुका है।



आर्कमिडीज
(287 सा॰ यु॰ पू॰ –212 सा॰ यु॰ पू॰)
आकृति 1.10

आइए अब हम देखें कि किस प्रकार अपरिमेय संख्याएँ प्राप्त की जाती हैं।

उदाहरण 10 : $\frac{1}{7}$ और $\frac{2}{7}$ के बीच की एक अपरिमेय संख्या ज्ञात कीजिए।

हल : हमने देखा है कि $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$ है।

अत: हम सरलता से यह परिकलित कर सकते हैं कि $\frac{2}{7} = 0.\overline{285714}$ है।

$\frac{1}{7}$ और $\frac{2}{7}$ के बीच की एक अपरिमेय संख्या ज्ञात करने के लिए, हम एक ऐसी संख्या ज्ञात करते हैं जो इन दोनों के बीच स्थित अनवसानी अनावर्ती होती है। इस प्रकार की आप अपरिमित रूप से अनेक संख्याएँ ज्ञात कर सकते हैं। इस प्रकार की संख्या का एक उदाहरण 0.150150015000150000. . . है।

प्रश्नावली 1.3

1. निम्नलिखित भिन्नों को दशमलव रूप में लिखिए और बताइए कि प्रत्येक का दशमलव प्रसार किस प्रकार का है :

(i) $\frac{36}{100}$ (ii) $\frac{1}{11}$ (iii) $4\frac{1}{8}$

(iv) $\frac{3}{13}$ (v) $\frac{2}{11}$ (vi) $\frac{329}{400}$

2. आप जानते हैं कि $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$ है। वास्तव में, लंबा भाग दिए बिना क्या आप यह बता सकते

हैं कि $\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}$ के दशमलव प्रसार क्या हैं? यदि हाँ, तो कैसे?

[**संकेत :** $\frac{1}{7}$ का मान ज्ञात करते समय शेषफलों का अध्ययन सावधानी से कीजिए।]

3. निम्नलिखित को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त कीजिए, जहाँ p और q पूर्णांक हैं तथा $q \neq 0$ है:

(i) $0.\overline{6}$ (ii) $0.4\overline{7}$ (iii) $0.\overline{001}$

4. $0.99999\ldots$ को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त कीजिए। क्या आप अपने उत्तर से आश्चर्यचकित हैं? अपने अध्यापक और कक्षा के सहयोगियों के साथ उत्तर की सार्थकता पर चर्चा कीजिए।

5. $\frac{1}{17}$ के दशमलव प्रसार में अंकों के पुनरावृत्ति खंड में अंकों की अधिकतम संख्या क्या हो सकती है? अपने उत्तर की जाँच करने के लिए विभाजन-क्रिया कीजिए।

6. $\frac{p}{q}$ $(q \neq 0)$ के रूप की परिमेय संख्याओं के अनेक उदाहरण लीजिए, जहाँ p और q पूर्णांक हैं, जिनका 1 के अतिरिक्त अन्य कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है और जिसका सांत दशमलव निरूपण (प्रसार) है। क्या आप यह अनुमान लगा सकते हैं कि q को कौन-सा गुण अवश्य संतुष्ट करना चाहिए?

7. ऐसी तीन संख्याएँ लिखिए जिनके दशमलव प्रसार अनवसानी अनावर्ती हों।

8. परिमेय संख्याओं $\frac{5}{7}$ और $\frac{9}{11}$ के बीच की तीन अलग-अलग अपरिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

9. बताइए कि निम्नलिखित संख्याओं में कौन-कौन संख्याएँ परिमेय और कौन-कौन संख्याएँ अपरिमेय हैं:

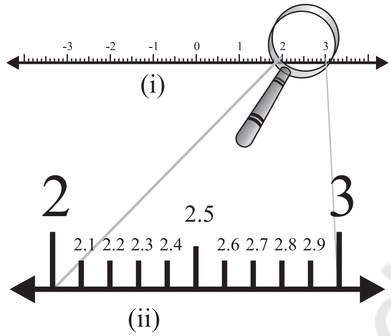
(i) $\sqrt{23}$ (ii) $\sqrt{225}$ (iii) 0.3796

(iv) 7.478478... (v) 1.101001000100001...

1.4 संख्या रेखा पर वास्तविक संख्याओं का निरूपण

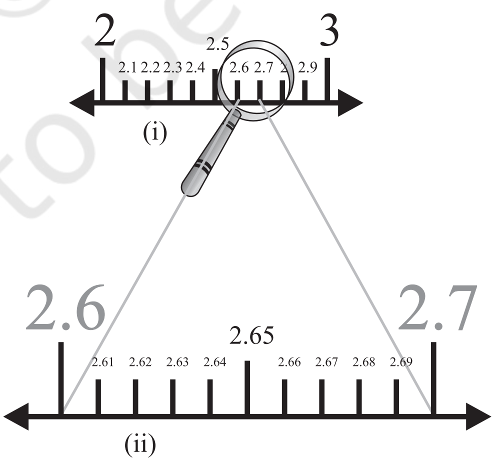
पिछले अनुच्छेद में, आपने यह देखा है कि किसी भी वास्तविक संख्या का एक दशमलव प्रसार होता है। इनकी सहायता से हम इस संख्या को संख्या रेखा पर निरूपित कर सकते हैं। आइए हम देखें कि इसे किस प्रकार किया जाता है।

मान लीजिए हम संख्या रेखा पर 2.665 का स्थान निर्धारण करना चाहते हैं। हम जानते हैं कि 2 और 3 के बीच यह संख्या स्थित है। आइए हम 2 और 3 के बीच संख्या रेखा के भाग को ध्यानपूर्वक देखें। मान लीजिए हम इसे 10 बराबर भागों में बाँट देते हैं और इस भाग के प्रत्येक बिन्दु को अंकित करते हैं, जैसा कि आकृति 1.11 (i) में दिखाया गया है।



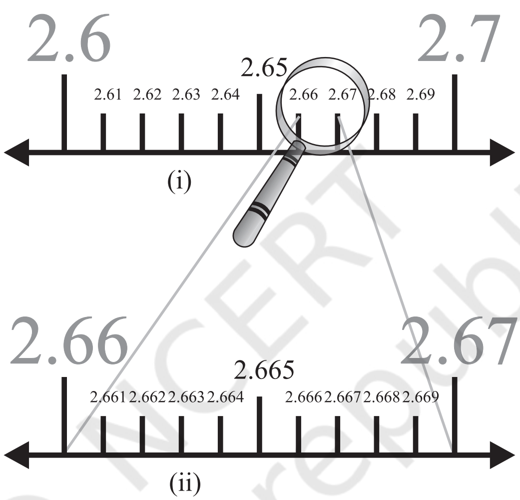
आकृति 1.11

तब 2 के दायीं ओर का पहला चिह्न 2.1 को निरूपित करेगा, दूसरा चिह्न 2.2 को निरूपित करेगा, आदि-आदि। आपको आकृति 1.11 (i) में 2 और 3 के इन विभाजन बिन्दुओं को देखने में कुछ कठिनाई का अनुभव हो सकता है। इन्हें स्पष्ट रूप से देखने के लिए आप एक आवर्धन शीशे (magnifying glass) का प्रयोग कर सकते हैं और 2 और 3 के बीच के भाग को देख सकते हैं। यह वैसा ही दिखाई पड़ेगा जैसा कि आप इन्हें आकृति 1.11 (ii) में देखते हैं। अब, 2.6 और 2.7 के बीच 2.665 स्थित है। अतः आइए हम 2.6 और 2.7 के बीच के भाग पर अपना ध्यान केंद्रित करें। हम इसे पुनः दस बराबर भागों में बाँटते हैं। पहला चिह्न 2.61 को निरूपित करेगा, दूसरा चिह्न 2.62 को निरूपित करेगा, आदि-आदि। इसे स्पष्ट रूप से देखने के लिए, इसे हम आकृति 1.12 (ii) में आवर्धित करते हैं।



आकृति 1.12

अब इस आकृति में, 2.665 पुनः 2.66 और 2.67 के बीच स्थित है। इसलिए आइए संख्या रेखा के इस भाग पर अपना ध्यान केंद्रित करें [देखिए आकृति 1.13 (i)] और कल्पना करें कि यह भाग 10 बराबर भागों में बाँटा गया है। इसे और स्पष्ट रूप से देखने के लिए, इसे आवर्धित करते हैं, जैसा कि आकृति 1.13 (ii) में दिखाया गया है। पहला चिह्न 2.661 को निरूपित करता है, अगला चिह्न 2.662 को निरूपित करता है, आदि-आदि। अतः, 2.665 इस उपविभाजन का पाँचवाँ चिह्न है।



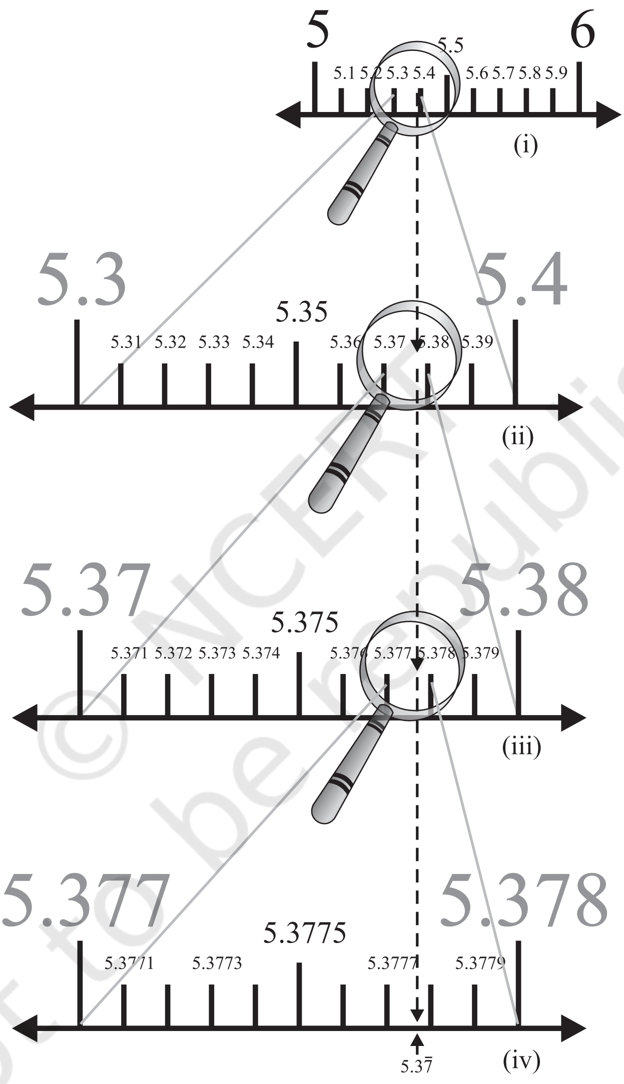
आकृति 1.13

एक आवर्धन शीशे की सहायता से संख्या रेखा पर संख्याओं के निरूपण को देखने के इस प्रक्रम को **उत्तरोत्तर आवर्धन प्रक्रम (process of successive magnification)** कहा जाता है।

इस तरह हमने यह देखा है कि पर्याप्त रूप से उत्तरोत्तर आवर्धन द्वारा सांत दशमलव वाले प्रसार वाली वास्तविक संख्या की संख्या रेखा पर स्थिति (या निरूपण) को स्पष्ट रूप से देखा जा सकता है।

आइए अब हम संख्या रेखा पर अनवसानी आवर्ती दशमलव प्रसार वाली एक वास्तविक संख्या की स्थिति (निरूपण) को देखने का प्रयास करें। एक आवर्धन शीशे से हम उपयुक्त अंतरालों को देख सकते हैं और उत्तरोत्तर आवर्धन करके संख्या रेखा पर संख्या की स्थिति देख सकते हैं।

उदाहरण 11 : संख्या रेखा पर 5 दशमलव स्थानों तक, अर्थात् 5.37777 तक $5.3\overline{7}$ का निरूपण देखिए।



आकृति 1.14

हल : एक बार फिर हम उत्तरोत्तर आवर्धन करते हैं और उस वास्तविक रेखा के भागों की लंबाइयों में उत्तरोत्तर कमी करते जाते हैं जिसमें $5.3\overline{7}$ स्थित है। सबसे पहले हम यह देखते हैं कि 5 और 6 के बीच $5.3\overline{7}$ स्थित है। अगले चरण में हम $5.3\overline{7}$ का 5.3 और 5.4 के

बीच स्थान निर्धारण करते हैं। निरूपण को और अधिक परिशुद्ध रूप से देखने के लिए, हम वास्तविक रेखा के इस भाग को दस बराबर भागों में बाँट देते हैं और आवर्धन शीशे से यह देखते हैं कि 5.37 और 5.38 के बीच $5.3\overline{7}$ स्थित है। $5.3\overline{7}$ को और अधिक परिशुद्ध रूप से देखने के लिए, हम 5.377 और 5.378 के बीच के भाग को पुनः दस बराबर भागों में बाँट देते हैं और $5.3\overline{7}$ के निरूपण को देखते हैं, जैसा कि आकृति 1.14 (iv) में दिखाया गया है। ध्यान दीजिए कि $5.3\overline{7}$, 5.3777 की अपेक्षा 5.3778 से अधिक निकट है [देखिए आकृति 1.14 (iv)]।

टिप्पणी : एक आवर्धन शीशे से उत्तरोत्तरतः देखकर और साथ ही वास्तविक रेखा के उस भाग को, जिसमें $5.3\overline{7}$ स्थित है, लंबाई में कमी की कल्पना करके हम इस प्रक्रिया को निरंतर आगे बढ़ा सकते हैं। रेखा के उस भाग का आमाप (size) क्या होना चाहिए, यह परिशुद्धता की उस मात्रा पर निर्भर करता है, जिसके अनुसार हम संख्या रेखा पर संख्या की स्थिति देखना चाहते हैं।

अब तक आप यह अवश्य समझ गए होंगे कि इसी प्रक्रिया को संख्या रेखा पर अनवसानी अनावर्ती दशमलव प्रसार वाली वास्तविक संख्या को देखने में भी लागू किया जा सकता है।

ऊपर की गई चर्चाओं और उत्तरोत्तर आवर्धनों की कल्पना के आधार पर हम यह पुनः कह सकते हैं कि *प्रत्येक वास्तविक संख्या को संख्या रेखा पर एक अद्वितीय बिन्दु से निरूपित किया जाता है। साथ ही, संख्या रेखा का प्रत्येक बिन्दु एक और केवल एक वास्तविक संख्या को निरूपित करता है।*

प्रश्नावली 1.4

1. उत्तरोत्तर आवर्धन करके संख्या रेखा पर 3.765 को देखिए।
2. 4 दशमलव स्थानों तक संख्या रेखा पर $4.\overline{26}$ को देखिए।

1.5 वास्तविक संख्याओं पर संक्रियाएँ

पिछली कक्षाओं में, आप यह पढ़ चुके हैं कि परिमेय संख्याएँ योग और गुणन के क्रमविनिमेय (commutative), साहचर्य (associative) और बंटन (distributive) नियमों को संतुष्ट करती हैं और हम यह भी पढ़ चुके हैं कि यदि हम दो परिमेय संख्याओं को जोड़ें, घटाएँ, गुणा करें या (शून्य छोड़कर) भाग दें, तब भी हमें एक परिमेय संख्या प्राप्त होती है [अर्थात् जोड़, घटाना, गुणा और भाग के सापेक्ष परिमेय संख्याएँ संवृत (closed) होती हैं]। यहाँ

हम यह भी देखते हैं कि अपरिमेय संख्याएँ भी योग और गुणन के क्रमविनिमेय, साहचर्य और बंटन-नियमों को संतुष्ट करती हैं। परन्तु, अपरिमेय संख्याओं के योग, अंतर, भागफल और गुणनफल सदा अपरिमेय नहीं होते हैं। उदाहरण के लिए, $\left(\sqrt{2}\right)-\left(\sqrt{2}\right), \left(\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{3}\right)$ और $\dfrac{\sqrt{17}}{\sqrt{17}}$ परिमेय संख्याएँ हैं।

आइए अब यह देखें कि जब एक परिमेय संख्या में अपरिमेय संख्या जोड़ते हैं और एक परिमेय संख्या को एक अपरिमेय संख्या से गुणा करते हैं, तो क्या होता है।

उदाहरण के लिए, $\sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है। तब $2+\sqrt{3}$ और $2\sqrt{3}$ क्या हैं? क्योंकि $\sqrt{3}$ एक अनवसानी अनावर्ती दशमलव प्रसार है, इसलिए यही बात $2+\sqrt{3}$ और $2\sqrt{3}$ के लिए भी सत्य है। अतः $2+\sqrt{3}$ और $2\sqrt{3}$ भी अपरिमेय संख्याएँ हैं।

उदाहरण 12 : जाँच कीजिए कि $7\sqrt{5}$, $\dfrac{7}{\sqrt{5}}$, $\sqrt{2}+21$, $\pi-2$ अपरिमेय संख्याएँ हैं या नहीं।

हल : $\sqrt{5} = 2.236...$, $\sqrt{2} = 1.4142...$, $\pi = 3.1415...$ हैं।

तब $7\sqrt{5} = 15.652...$, $\dfrac{7}{\sqrt{5}} = \dfrac{7\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \dfrac{7\sqrt{5}}{5} = 3.1304...$ हैं।

$\sqrt{2} + 21 = 22.4142...$, $\pi - 2 = 1.1415...$

ये सभी अनवसानी अनावर्ती दशमलव हैं। अतः ये सभी अपरिमेय संख्याएँ हैं।

उदाहरण 13 : $2\sqrt{2}+5\sqrt{3}$ और $\sqrt{2}-3\sqrt{3}$ को जोड़िए।

हल : $\left(2\sqrt{2}+5\sqrt{3}\right)+\left(\sqrt{2}-3\sqrt{3}\right) = \left(2\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)+\left(5\sqrt{3}-3\sqrt{3}\right)$

$$= (2+1)\sqrt{2}+(5-3)\sqrt{3} = 3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$$

उदाहरण 14 : $6\sqrt{5}$ को $2\sqrt{5}$ से गुणा कीजिए।

हल : $6\sqrt{5} \times 2\sqrt{5} = 6 \times 2 \times \sqrt{5} \times \sqrt{5} = 12 \times 5 = 60$

उदाहरण 15 : $8\sqrt{15}$ को $2\sqrt{3}$ से भाग दीजिए।

हल : $8\sqrt{15} \div 2\sqrt{3} = \dfrac{8\sqrt{3\times 5}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{8\sqrt{3}\times\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} = 4\sqrt{5}$

इन उदाहरणों से आप निम्नलिखित तथ्यों के होने की आशा कर सकते हैं जो सत्य हैं:

(i) एक परिमेय संख्या और एक अपरिमेय संख्या का जोड़ या घटाना अपरिमेय होता है।

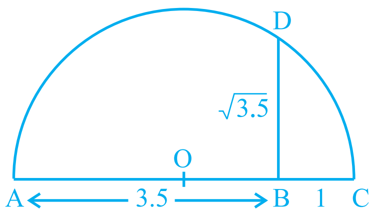
(ii) एक अपरिमेय संख्या के साथ एक शून्येतर (non-zero) परिमेय संख्या का गुणनफल या भागफल अपरिमेय होता है।

(iii) यदि हम दो अपरिमेय संख्याओं को जोड़ें, घटायें, गुणा करें या एक अपरिमेय संख्या को दूसरी अपरिमेय संख्या से भाग दें, तो परिणाम परिमेय या अपरिमेय कुछ भी हो सकता है।

अब हम अपनी चर्चा वास्तविक संख्याओं के वर्गमूल निकालने की संक्रिया (operation) पर करेंगे। आपको याद होगा कि यदि a एक प्राकृत संख्या है, तब $\sqrt{a} = b$ का अर्थ है $b^2 = a$ और $b > 0$। यही परिभाषा धनात्मक वास्तविक संख्याओं पर भी लागू की जा सकती है।

मान लीजिए $a > 0$ एक वास्तविक संख्या है। तब $\sqrt{a} = b$ का अर्थ है $b^2 = a$ और $b > 0$ है।

अनुच्छेद 1.2 में, हमने यह देखा है कि किस प्रकार संख्या रेखा पर $\sqrt{n}$ को, जहाँ n एक धनात्मक पूर्णांक है, निरूपित किया जाता है। अब हम यह दिखाएँगे कि किस प्रकार $\sqrt{x}$ को, जहाँ x एक दी हुई धनात्मक वास्तविक संख्या है, ज्यामितीय (geometrically) रूप से ज्ञात किया जाता है। उदाहरण के लिए, आइए हम इसे $x = 3.5$ के लिए प्राप्त करें। अर्थात् हम $\sqrt{3.5}$ को ज्यामीतीय रूप से प्राप्त करेंगे।

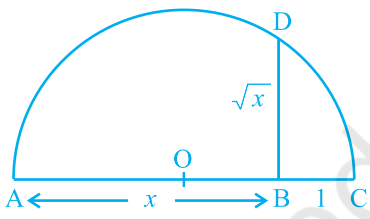


आकृति 1.15

एक दी हुई रेखा पर एक स्थिर बिन्दु A से 3.5 एकक की दूरी पर चिह्न लगाने पर एक ऐसा बिन्दु B प्राप्त होता है, जिससे कि AB = 3.5 एकक (देखिए आकृति 1.15)। B से 1 एकक की दूरी पर चिह्न लगाइए और इस नए बिन्दु को C मान लीजिए। AC का मध्य-बिन्दु ज्ञात

कीजिए और उस बिंदु को O मान लीजिए। O को केन्द्र और OC को त्रिज्या मानकर एक अर्धवृत्त बनाइए। AC पर लंब एक ऐसी रेखा खींचिए जो B से होकर जाती हो और अर्धवृत्त को D पर काटती हो। तब BD = $\sqrt{3.5}$ है।

अधिक व्यापक रूप में, $\sqrt{x}$ का मान ज्ञात करने के लिए, जहाँ x एक धनात्मक वास्तविक संख्या है, एक ऐसा बिंदु B लेते हैं, जिससे कि AB = x एकक हो और जैसा कि आकृति 1.16 में दिखाया गया है, एक ऐसा बिंदु C लीजिए जिससे कि BC = 1 एकक हो। तब, जैसा कि हमने स्थिति $x = 3.5$ के लिए किया है, हमें BD = $\sqrt{x}$ प्राप्त होगा (आकृति 1.16)।



आकृति 1.16

हम इस परिणाम को पाइथागोरस प्रमेय की सहायता से सिद्ध कर सकते हैं।

ध्यान दीजिए कि आकृति 1.16 में, Δ OBD एक समकोण त्रिभुज है। वृत्त की त्रिज्या $\frac{x+1}{2}$ एकक है।

अत:, OC = OD = OA = $\frac{x+1}{2}$ एकक

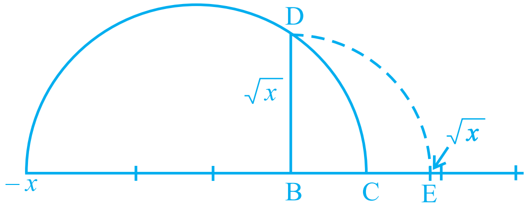
अब, OB = $x - \left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{x-1}{2}$.

अत:, पाइथागोरस प्रमेय लागू करने पर, हमें यह प्राप्त होता है:

$$BD^2 = OD^2 - OB^2 = \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 = \frac{4x}{4} = x$$

इससे यह पता चलता है कि BD = $\sqrt{x}$ है।

इस रचना से यह दर्शाने की एक चित्रीय और ज्यामितीय विधि प्राप्त हो जाती है कि सभी वास्तविक संख्याओं $x > 0$ के लिए, $\sqrt{x}$ का अस्तित्व है। यदि हम संख्या रेखा पर $\sqrt{x}$ की स्थिति जानना चाहते हैं, तो आइए हम रेखा BC को संख्या रेखा मान लें, B को शून्य मान लें और C को 1 मान लें, आदि-आदि। B को केन्द्र और BD को त्रिज्या मानकर एक चाप खींचिए जो संख्या रेखा को E पर काटता है (देखिए आकृति 1.17)। तब E, $\sqrt{x}$ निरूपित करता है।



आकृति 1.17

अब हम वर्गमूल की अवधारणा को घनमूलों, चतुर्थमूलों और व्यापक रूप से nवें मूलों, जहाँ n एक धनात्मक पूर्णांक है, पर लागू करना चाहेंगे। आपको याद होगा कि पिछली कक्षाओं में आप वर्गमूलों और घनमूलों का अध्ययन कर चुके हैं।

$\sqrt[3]{8}$ क्या है? हम जानते हैं कि यह एक धनात्मक संख्या है जिसका घन 8 है, और आपने यह अवश्य अनुमान लगा लिया होगा कि $\sqrt[3]{8} = 2$ है। आइए हम $\sqrt[5]{243}$ का मान ज्ञात करें। क्या आप एक ऐसी संख्या b जानते हैं जिससे कि $b^5 = 243$ हो? उत्तर है 3, अतः, $\sqrt[5]{243} = 3$ हुआ।

इन उदाहरणों से क्या आप $\sqrt[n]{a}$ परिभाषित कर सकते हैं, जहाँ $a > 0$ एक वास्तविक संख्या है और n एक धनात्मक पूर्णांक है?

मान लीजिए $a > 0$ एक वास्तविक संख्या है और n एक धनात्मक पूर्णांक है। तब $\sqrt[n]{a} = b$, जबकि $b^n = a$ और $b > 0$। ध्यान दीजिए कि $\sqrt{2}, \sqrt[3]{8}, \sqrt[n]{a}$ आदि में प्रयुक्त प्रतीक "$\sqrt{\ }$" को करणी चिह्न (radical sign) कहा जाता है।

अब हम यहाँ वर्गमूलों से संबंधित कुछ सर्वसमिकाएँ (identities) दे रहे हैं जो विभिन्न विधियों से उपयोगी होती हैं। पिछली कक्षाओं में आप इनमें से कुछ सर्वसमिकाओं से परिचित हो चुके हैं। शेष सर्वसमिकाएँ वास्तविक संख्याओं के योग पर गुणन के बंटन नियम से और सर्वसमिका $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$ से, जहाँ x और y वास्तविक संख्याएँ हैं, प्राप्त होती हैं।

मान लीजिए a और b धनात्मक वास्तविक संख्याएँ हैं। तब,

(i) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ (ii) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

(iii) $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right) = a - b$ (iv) $\left(a + \sqrt{b}\right)\left(a - \sqrt{b}\right) = a^2 - b$

(v) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{c}+\sqrt{d}\right)=\sqrt{ac}+\sqrt{ad}+\sqrt{bc}+\sqrt{bd}$

(vi) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2=a+2\sqrt{ab}+b$

आइए हम इन सर्वसमिकाओं की कुछ विशेष स्थितियों पर विचार करें।

उदाहरण 16 : निम्नलिखित व्यंजकों को सरल कीजिए:

(i) $\left(5+\sqrt{7}\right)\left(2+\sqrt{5}\right)$ (ii) $\left(5+\sqrt{5}\right)\left(5-\sqrt{5}\right)$

(iii) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)^2$ (iv) $\left(\sqrt{11}-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{11}+\sqrt{7}\right)$

हल : (i) $\left(5+\sqrt{7}\right)\left(2+\sqrt{5}\right)=10+5\sqrt{5}+2\sqrt{7}+\sqrt{35}$

(ii) $\left(5+\sqrt{5}\right)\left(5-\sqrt{5}\right)=5^2-\left(\sqrt{5}\right)^2=25-5=20$

(iii) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2+2\sqrt{3}\sqrt{7}+\left(\sqrt{7}\right)^2=3+2\sqrt{21}+7=10+2\sqrt{21}$

(iv) $\left(\sqrt{11}-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{11}+\sqrt{7}\right)=\left(\sqrt{11}\right)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2=11-7=4$

टिप्पणी : ध्यान दीजिए कि ऊपर के उदाहरण में दिए गए शब्द "सरल करना" का अर्थ यह है कि व्यंजक को परिमेय संख्याओं और अपरिमेय संख्याओं के योग के रूप में लिखना चाहिए।

हम इस समस्या पर विचार करते हुए कि $\frac{1}{\sqrt{2}}$ संख्या रेखा पर कहाँ स्थित है, इस अनुच्छेद को यहीं समाप्त करते हैं। हम जानते हैं कि यह एक अपरिमेय है। यदि हर एक परिमेय संख्या हो, तो इसे सरलता से हल किया जा सकता है। आइए हम देखें कि क्या हम इसके हर का परिमेयकरण (rationalise) कर सकते हैं, अर्थात् क्या हर को एक परिमेय संख्या में परिवर्तित कर सकते हैं। इसके लिए हमें वर्गमूलों से संबंधित सर्वसमिकाओं की आवश्यकता होती है। आइए हम देखें कि इसे कैसे किया जा सकता है।

उदाहरण 17 : $\frac{1}{\sqrt{2}}$ के हर का परिमेयकरण कीजिए।

हल : हम $\frac{1}{\sqrt{2}}$ को एक ऐसे तुल्य व्यंजक के रूप में लिखना चाहते हैं, जिसमें हर एक परिमेय संख्या

हो। हम जानते हैं कि $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}$ परिमेय है। हम यह भी जानते हैं कि $\frac{1}{\sqrt{2}}$ को $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ से गुणा करने पर हमें एक तुल्य व्यंजक प्राप्त होता है, क्योंकि $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$ है। अतः इन दो तथ्यों को एक साथ लेने पर, हमें यह प्राप्त होता है:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

इस रूप में $\frac{1}{\sqrt{2}}$ को संख्या रेखा पर स्थान निर्धारण सरल हो जाता है। यह 0 और $\sqrt{2}$ के मध्य स्थित है।

उदाहरण 18 : $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ के हर का परिमेयकरण कीजिए।

हल : इसके लिए हम ऊपर दी गई सर्वसमिका (iv) का प्रयोग करते हैं। $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ को $2-\sqrt{3}$ से गुणा करने और भाग देने पर, हमें यह प्राप्त होता है:

$$\frac{1}{2+\sqrt{3}} \times \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{4-3} = 2-\sqrt{3}$$

उदाहरण 19 : $\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$ के हर का परिमेयकरण कीजिए।

हल : यहाँ हम ऊपर दी गई सर्वसमिका (iii) का प्रयोग करते हैं।

अतः, $$\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \frac{5\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}{3-5} = \left(\frac{-5}{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)$$

उदाहरण 20 : $\frac{1}{7+3\sqrt{2}}$ के हर का परिमेयकरण कीजिए।

हल : $$\frac{1}{7+3\sqrt{2}} = \frac{1}{7+3\sqrt{2}} \times \left(\frac{7-3\sqrt{2}}{7-3\sqrt{2}}\right) = \frac{7-3\sqrt{2}}{49-18} = \frac{7-3\sqrt{2}}{31}$$

अत: जब एक व्यंजक के हर में वर्गमूल वाला एक पद होता है (या कोई संख्या करणी चिह्न के अंदर हो), तब इसे एक ऐसे तुल्य व्यंजक में, जिसका हर एक परिमेय संख्या है, रूपांतरित करने की क्रियाविधि को *हर का परिमेयकरण* (*rationalising the denominator*) कहा जाता है।

प्रश्नावली 1.5

1. बताइए नीचे दी गई संख्याओं में कौन-कौन परिमेय हैं और कौन-कौन अपरिमेय हैं:

(i) $2-\sqrt{5}$ (ii) $\left(3+\sqrt{23}\right)-\sqrt{23}$ (iii) $\dfrac{2\sqrt{7}}{7\sqrt{7}}$

(iv) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (v) 2π

2. निम्नलिखित व्यंजकों में से प्रत्येक व्यंजक को सरल कीजिए:

(i) $\left(3+\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)$ (ii) $\left(3+\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{3}\right)$

(iii) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^2$ (iv) $\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)$

3. आपको याद होगा कि π को एक वृत्त की परिधि (मान लीजिए c) और उसके व्यास (मान लीजिए d) के अनुपात से परिभाषित किया जाता है, अर्थात् $\pi = \dfrac{c}{d}$ है। यह इस तथ्य का अंतर्विरोध करता हुआ प्रतीत होता है कि π अपरिमेय है। इस अंतर्विरोध का निराकरण आप किस प्रकार करेंगे?

4. संख्या रेखा पर $\sqrt{9.3}$ को निरूपित कीजिए।

5. निम्नलिखित के हरों का परिमेयकरण कीजिए:

(i) $\dfrac{1}{\sqrt{7}}$ (ii) $\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}$ (iii) $\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ (iv) $\dfrac{1}{\sqrt{7}-2}$

1.6 वास्तविक संख्याओं के लिए घातांक-नियम

क्या आपको याद है कि निम्नलिखित का सरलीकरण किस प्रकार करते हैं?

(i) $17^2 . 17^5 =$ (ii) $(5^2)^7 =$

(iii) $\dfrac{23^{10}}{23^7} =$ (iv) $7^3 . 9^3 =$

क्या आपने निम्नलिखित उत्तर प्राप्त किए थे?

(i) $17^2 . 17^5 = 17^7$ (ii) $(5^2)^7 = 5^{14}$

(iii) $\dfrac{23^{10}}{23^7} = 23^3$ (iv) $7^3 . 9^3 = 63^3$

इन उत्तरों को प्राप्त करने के लिए, आपने निम्नलिखित घातांक-नियमों (laws of exponents) का प्रयोग अवश्य किया होगा, [यहाँ a, n और m प्राकृत संख्याएँ हैं। आपको याद होगा कि a को आधार (base) और m और n को घातांक (exponents) कहा जाता है।] जिनका अध्ययन आप पिछली कक्षाओं में कर चुके हैं:

(i) $a^m . a^n = a^{m+n}$ (ii) $(a^m)^n = a^{mn}$

(iii) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, m > n$ (iv) $a^m b^m = (ab)^m$

$(a)^0$ क्या है? इसका मान 1 है। आप यह अध्ययन पहले ही कर चुके हैं कि $(a)^0 = 1$ होता है। अत:, (iii) को लागू करके, आप $\dfrac{1}{a^n} = a^{-n}$ प्राप्त कर सकते हैं। अब हम इन नियमों को ऋणात्मक घातांकों पर भी लागू कर सकते हैं।

अत:, उदाहरण के लिए :

(i) $17^2 \cdot 17^{-5} = 17^{-3} = \dfrac{1}{17^3}$ (ii) $(5^2)^{-7} = 5^{-14}$

(iii) $\dfrac{23^{-10}}{23^7} = 23^{-17}$ (iv) $(7)^{-3} \cdot (9)^{-3} = (63)^{-3}$

मान लीजिए हम निम्नलिखित अभिकलन करना चाहते हैं :

(i) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}$ (ii) $\left(\dfrac{1}{3^5}\right)^4$

(iii) $\dfrac{7^{\frac{1}{5}}}{7^{\frac{1}{3}}}$ (iv) $13^{\frac{1}{5}} \cdot 17^{\frac{1}{5}}$

हम ये अभिकलन किस प्रकार करेंगे? यह देखा गया है कि वे घातांक-नियम, जिनका अध्ययन हम पहले कर चुके हैं, उस स्थिति में भी लागू हो सकते हैं, जबकि आधार धनात्मक वास्तविक संख्या हो और घातांक परिमेय संख्या हो (आगे अध्ययन करने पर हम यह देखेंगे

कि ये नियम वहाँ भी लागू हो सकते हैं, जहाँ घातांक वास्तविक संख्या हो।)। परन्तु, इन नियमों का कथन देने से पहले और इन नियमों को लागू करने से पहले, यह समझ लेना आवश्यक है कि, उदाहरण के लिए, $4^{\frac{3}{2}}$ क्या है। अत:, इस संबंध में हमें कुछ करना होगा।

अनुच्छेद 1.4 में, हमने $\sqrt[n]{a}$ को इस प्रकार परिभाषित किया है, जहाँ $a > 0$ एक वास्तविक संख्या है:

मान लीजिए $a > 0$ एक वास्तविक संख्या है और n एक धनात्मक पूर्णांक है। तब $\sqrt[n]{a} = b$ होता है, जबकि $b^n = a$ और $b > 0$ हो।

घातांकों की भाषा में, हम $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ के रूप में परिभाषित करते हैं। उदाहरण के लिए, $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$ है। अब हम $4^{\frac{3}{2}}$ को दो विधियों से देख सकते हैं।

$$4^{\frac{3}{2}} = \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^3 = 2^3 = 8$$

$$4^{\frac{3}{2}} = (4^3)^{\frac{1}{2}} = (64)^{\frac{1}{2}} = 8$$

अत:, हमें यह परिभाषा प्राप्त होती है:

मान लीजिए $a > 0$ एक वास्तविक संख्या है तथा m और n ऐसे पूर्णांक हैं कि 1 के अतिरिक्त इनका कोई अन्य उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है और $n > 0$ है। तब,

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

अत: वांछित विस्तृत घातांक नियम ये हैं:

मान लीजिए $a > 0$ एक वास्तविक संख्या है और p और q परिमेय संख्याएँ हैं। तब,

(i) $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ (ii) $(a^p)^q = a^{pq}$

(iii) $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ (iv) $a^p b^p = (ab)^p$

अब आप पहले पूछे गए प्रश्नों का उत्तर ज्ञात करने के लिए इन नियमों का प्रयोग कर सकते हैं।

उदाहरण 21 : सरल कीजिए: (i) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}$ (ii) $\left(\frac{1}{3^5}\right)^4$

(iii) $\frac{7^{\frac{1}{5}}}{7^{\frac{1}{3}}}$ (iv) $13^{\frac{1}{5}} \cdot 17^{\frac{1}{5}}$

हल :

(i) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)} = 2^{\frac{3}{3}} = 2^1 = 2$ (ii) $\left(3^{\frac{1}{5}}\right)^4 = 3^{\frac{4}{5}}$

(iii) $\dfrac{7^{\frac{1}{5}}}{7^{\frac{1}{3}}} = 7^{\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)} = 7^{\frac{3-5}{15}} = 7^{\frac{-2}{15}}$ (iv) $13^{\frac{1}{5}} \cdot 17^{\frac{1}{5}} = (13 \times 17)^{\frac{1}{5}} = 221^{\frac{1}{5}}$

प्रश्नावली 1.6

1. ज्ञात कीजिए: (i) $64^{\frac{1}{2}}$ (ii) $32^{\frac{1}{5}}$ (iii) $125^{\frac{1}{3}}$

2. ज्ञात कीजिए: (i) $9^{\frac{3}{2}}$ (ii) $32^{\frac{2}{5}}$ (iii) $16^{\frac{3}{4}}$ (iv) $125^{\frac{-1}{3}}$

3. सरल कीजिए:(i) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{5}}$ (ii) $\left(\dfrac{1}{3^3}\right)^7$ (iii) $\dfrac{11^{\frac{1}{2}}}{11^{\frac{1}{4}}}$ (iv) $7^{\frac{1}{2}} \cdot 8^{\frac{1}{2}}$

1.7 सारांश

इस अध्याय में, आपने निम्नलिखित बिन्दुओं का अध्ययन किया है:

1. संख्या r को परिमेय संख्या कहा जाता है, यदि इसे $\dfrac{p}{q}$ के रूप में लिखा जा सकता हो, जहाँ p और q पूर्णांक हैं और $q \neq 0$ है।

2. संख्या s को अपरिमेय संख्या कहा जाता है, यदि इसे $\dfrac{p}{q}$ के रूप में न लिखा जा सकता हो, जहाँ p और q पूर्णांक हैं और $q \neq 0$ है।

3. एक परिमेय संख्या का दशमलव प्रसार या तो सांत होता है या अनवसानी आवर्ती होता है। साथ ही, वह संख्या, जिसका दशमलव प्रसार सांत या अनवसानी आवर्ती है, परिमेय होती है।

4. एक अपरिमेय संख्या का दशमलव प्रसार अनवसानी अनावर्ती होता है। साथ ही, वह संख्या जिसका दशमलव प्रसार अनवसानी अनावर्ती है, अपरिमेय होती है।

5. सभी परिमेय और अपरिमेय संख्याओं को एक साथ लेने पर वास्तविक संख्याओं का संग्रह प्राप्त होता है।

6. संख्या रेखा के प्रत्येक बिन्दु के संगत एक अद्वितीय वास्तविक संख्या होती है। साथ ही, प्रत्येक वास्तविक संख्या के संगत संख्या रेखा पर एक बिंदु होता है।

7. यदि r परिमेय है और s अपरिमेय है, तब $r+s$ और $r-s$ अपरिमेय संख्याएँ होती हैं तथा rs और $\frac{r}{s}$ अपरिमेय संख्याएँ होती हैं यदि $r \neq 0$ है।

8. धनात्मक वास्तविक संख्याओं a और b के संबंध में निम्नलिखित सर्वसमिकाएँ लागू होती हैं:

(i) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ (ii) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

(iii) $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right) = a - b$ (iv) $\left(a + \sqrt{b}\right)\left(a - \sqrt{b}\right) = a^2 - b$

(v) $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 = a + 2\sqrt{ab} + b$

9. $\frac{1}{\sqrt{a} + b}$ के हर का परिमेयकरण करने के लिए, इसे हम $\frac{\sqrt{a} - b}{\sqrt{a} - b}$ से गुणा करते हैं, जहाँ a और b पूर्णांक हैं।

10. मान लीजिए $a > 0$ एक वास्तविक संख्या है और p और q परिमेय संख्याएँ हैं। तब,

(i) $a^p \,.\, a^q = a^{p+q}$ (ii) $(a^p)^q = a^{pq}$

(iii) $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ (iv) $a^p b^p = (ab)^p$

0963CH02

अध्याय 2

बहुपद

2.1 भूमिका

पिछली कक्षाओं में, आप बीजीय व्यंजकों और उनके जोड़, घटाना, गुणा और भाग का अध्ययन कर चुके हैं। वहाँ आप यह भी अध्ययन कर चुके हैं कि किस प्रकार कुछ बीजीय व्यंजकों का गुणनखंडन किया जाता है। आप निम्न बीजीय सर्वसमिकाओं और उनका गुणनखंडन में उपयोग का पुन:स्मरण कर सकते हैं:

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

और, $$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

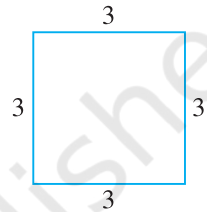
इस अध्याय में, सबसे पहले एक विशेष प्रकार के बीजीय व्यंजक का, जिसे *बहुपद* (*polynomial*) कहा जाता है, और उससे संबद्ध शब्दावली (terminology) का अध्ययन करेंगे। यहाँ हम *शेषफल प्रमेय* (*Remainder Theorem*), *गुणनखंड प्रमेय* (Factor Theorem) और बहुपदों के गुणनखंडन में इनके उपयोग का भी अध्ययन करेंगे। इनके अतिरिक्त, हम कुछ और बीजीय सर्वसमिकाओं का और कुछ दिए हुए व्यंजकों का गुणनखंडन करने तथा मान निकालने के बारे में भी अध्ययन करेंगे।

2.2 एक चर वाले बहुपद

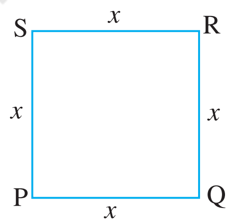
सबसे पहले हम याद करेंगे कि चर को एक प्रतीक से प्रकट किया जाता है जो कोई भी वास्तविक मान धारण कर सकता है। हम चरों को अक्षरों $x, y, z,$ आदि से प्रकट करते हैं। ध्यान रहे कि $2x, 3x, -x, -\frac{1}{2}x$ बीजीय व्यंजक हैं। ये सभी व्यंजक, (एक अचर) $\times\, x$ के रूप के

हैं। अब मान लीजिए कि हम एक ऐसा व्यंजक लिखना चाहते हैं जो कि (एक अचर) × (एक चर) है और हम यह नहीं जानते कि अचर क्या है। ऐसी स्थितियों में, हम अचर को a, b, c आदि से प्रकट करते हैं। अतः व्यंजक, मान लीजिए, ax होगा।

फिर भी, अचर को प्रकट करने वाले अक्षर और चर को प्रकट करने वाले अक्षर में अंतर होता है। एक विशेष स्थिति में अचरों के मान सदा समान बने रहते हैं। अर्थात् एक दी हुई समस्या में अचर के मान में कोई परिवर्तन नहीं होता। परन्तु चर के मान में परिवर्तन होता रहता है।



आकृति 2.1



आकृति 2.2

अब 3 एकक की भुजा वाला एक वर्ग लीजिए (देखिए आकृति 2.1)। इसका परिमाप (perimeter) क्या है? आप जानते हैं कि वर्ग का परिमाप चारों भुजाओं की लंबाइयों का जोड़ होता है। यहाँ प्रत्येक भुजा की लंबाई 3 एकक है। अतः इसका परिमाप 4×3 अर्थात् 12 एकक है। यदि वर्ग की प्रत्येक भुजा 10 एकक हो, तो परिमाप क्या होगा? परिमाप 4×10 अर्थात् 40 एकक होगा। यदि प्रत्येक भुजा की लंबाई x एकक हो (देखिए आकृति 2.2), तो परिमाप $4x$ एकक होता है। अतः हम यह पाते हैं कि भुजा की लंबाई में परिवर्तन होने पर परिमाप बदल जाता है।

क्या आप वर्ग PQRS का क्षेत्रफल ज्ञात कर सकते हैं? यह $x \times x = x^2$ वर्ग एकक (मात्रक) है। x^2 एक बीजीय व्यंजक है। आप $2x, x^2 + 2x, x^3 - x^2 + 4x + 7$ जैसे अन्य बीजीय व्यंजकों से भी परिचित हैं। ध्यान दीजिए कि अभी तक लिए गए सभी बीजीय व्यंजकों में चर के घातांक पूर्ण संख्या ही रहे हैं। इस रूप के व्यंजकों को *एक चर वाला बहुपद* (*polynomials in one variable*) कहा जाता है। ऊपर दिए गए उदाहरणों में चर x है। उदाहरण के लिए, $x^3 - x^2 + 4x + 7$, चर x में एक बहुपद है। इसी प्रकार $3y^2 + 5y$, चर y में एक बहुपद है और $t^2 + 4$, चर t में एक बहुपद है।

बहुपद $x^2 + 2x$ में व्यंजक x^2 और $2x$ बहुपद के *पद* (*terms*) कहे जाते हैं। इसी प्रकार, बहुपद $3y^2 + 5y + 7$ में तीन पद अर्थात् $3y^2$, $5y$ और 7 हैं। क्या आप बहुपद $-x^3 + 4x^2 + 7x - 2$ के पद लिख सकते हैं? इस बहुपद के चार पद अर्थात् $-x^3, 4x^2, 7x$ और -2 हैं।

बहुपद के प्रत्येक पद का एक गुणांक (coefficient) होता है। अतः, $-x^3 + 4x^2 + 7x - 2$ में x^3 का गुणांक -1 है, x^2 का गुणांक 4 है, x का गुणांक 7 है और x^0 का गुणांक -2 है

(स्मरण रहे कि $x^0 = 1$ है)। क्या आप जानते हैं कि $x^2 - x + 7$ में x का गुणांक क्या है? x का गुणांक -1 है।

ध्यान रहे कि 2 भी एक बहुपद है। वस्तुत: 2, –5, 7 आदि *अचर बहुपदों* (*constant polynomials*) के उदाहरण हैं। अचर बहुपद 0 को ***शून्य बहुपद*** कहा जाता है। साथ ही, जैसा कि उच्च कक्षाओं में आप देखेंगे, सभी बहुपदों के संग्रह में शून्य बहुपद एक अति महत्वपूर्ण भूमिका निभाता है।

अब आप $x + \frac{1}{x}$, $\sqrt{x} + 3$ और $\sqrt[3]{y} + y^2$ जैसे बीजीय व्यंजक लीजिए। क्या आप जानते हैं कि आप $x + \frac{1}{x} = x + x^{-1}$ लिख सकते हैं? यहाँ दूसरे पद अर्थात् x^{-1} का घातांक -1 है जो एक पूर्ण संख्या नहीं है। अत: यह बीजीय व्यंजक एक बहुपद नहीं है। साथ ही, $\sqrt{x} + 3$ को $x^{\frac{1}{2}} + 3$ के रूप में लिखा जा सकता है। यहाँ x का घातांक $\frac{1}{2}$ है, जो कि एक पूर्ण संख्या नहीं है। तो क्या आप यह समझते हैं कि $\sqrt{x} + 3$ एक बहुपद है? नहीं, यह एक बहुपद नहीं है। क्या $\sqrt[3]{y} + y^2$ एक बहुपद है? यह भी एक बहुपद नहीं है। (क्यों?)

यदि एक बहुपद में चर x हो, तो हम बहुपद को $p(x)$ या $q(x)$ या $r(x)$, आदि से प्रकट कर सकते हैं, उदाहरण के लिए, हम यह लिख सकते हैं:

$$p(x) = 2x^2 + 5x - 3$$
$$q(x) = x^3 - 1$$
$$r(y) = y^3 + y + 1$$
$$s(u) = 2 - u - u^2 + 6u^5$$

बहुपद में परिमित संख्या में कितने भी पद हो सकते हैं। उदाहरण के लिए, $x^{150} + x^{149} + ... + x^2 + x + 1$ एक बहुपद है, जिसमें 151 पद हैं।

अब बहुपद $2x$, 2, $5x^3$, $-5x^2$, y और u^4 लीजिए। क्या आप देखते हैं कि इन बहुपदों में से प्रत्येक बहुपद का केवल एक पद है। केवल एक पद वाले बहुपद को *एकपदी* (*monomial*) कहा जाता है। (अंग्रेजी शब्द 'mono' का अर्थ है "एक")।

अब नीचे दिए गए बहुपदों में से प्रत्येक पर ध्यान दीजिए:

$p(x) = x + 1,\quad q(x) = x^2 - x,\quad r(y) = y^{30} + 1,\quad t(u) = u^{43} - u^2$

यहाँ प्रत्येक बहुपद में कितने पद हैं? इनमें से प्रत्येक बहुपद में केवल दो पद हैं। केवल दो पदों वाले बहुपदों को *द्विपद* (binomials) कहा जाता है। (अंग्रेजी शब्द 'bi' का अर्थ है "दो")।

इसी प्रकार, केवल तीन पदों वाले बहुपदों को *त्रिपद* (*trinomials*) कहा जाता है। (अंग्रेजी शब्द 'tri' का अर्थ है "तीन")। त्रिपद के कुछ उदाहरण ये हैं:

$p(x) = x + x^2 + \pi,$ $\qquad q(x) = \sqrt{2} + x - x^2,$

$r(u) = u + u^2 - 2,$ $\qquad t(y) = y^4 + y + 5$

अब बहुपद $p(x) = 3x^7 - 4x^6 + x + 9$ को देखिए। इसमें x की अधिकतम घात वाला पद कौन-सा है? यह पद $3x^7$ है। इस पद में x का घातांक 7 है। इसी प्रकार, बहुपद $q(y) = 5y^6 - 4y^2 - 6$ में y की अधिकतम घात वाला पद $5y^6$ है और इस पद में y का घातांक 6 है। एक बहुपद में चर की अधिकतम घात वाले पद के घातांक को *बहुपद की घात* (*degree of the polynomial*) कहा जाता है। अतः बहुपद $3x^7 - 4x^6 + x + 9$ की घात 7 है और बहुपद $5y^6 - 4y^2 - 6$ की घात 6 है। **एक शून्येतर अचर बहुपद की घात शून्य होती है।**

उदाहरण 1 : नीचे दिए गए प्रत्येक बहुपद की घात ज्ञात कीजिए:

(i) $x^5 - x^4 + 3$ $\qquad$ (ii) $2 - y^2 - y^3 + 2y^8$ $\qquad$ (iii) 2

हल : (i) चर का अधिकतम घातांक 5 है। अतः बहुपद की घात 5 है।

(ii) चर का अधिकतम घातांक 8 है। अतः बहुपद की घात 8 है।

(iii) यहाँ केवल एक पद 2 है जिसे $2x^0$ के रूप में लिखा जा सकता है। अतः x का घातांक 0 है। इसलिए, बहुपद की घात 0 है।

अब बहुपदों $p(x) = 4x + 5$, $q(y) = 2y$, $r(t) = t + \sqrt{2}$ और $s(u) = 3 - u$ को लीजिए। क्या इनमें कोई सर्वनिष्ठ तथ्य देखने को मिलता है? इनमें प्रत्येक बहुपद की घात एक है। एक घात वाले बहुपद को *रैखिक बहुपद* (*linear polynomial*) कहा जाता है। एक चर में कुछ और रैखिक बहुपद $2x - 1$, $\sqrt{2}\,y + 1$ और $2 - u$ हैं। अब क्या x में तीन पदों वाला एक रैखिक बहुपद हम ज्ञात कर सकते हैं? हम एक ऐसा रैखिक बहुपद ज्ञात नहीं कर सकते, क्योंकि x में एक रैखिक बहुपद में अधिक से अधिक दो पद हो सकते हैं। अतः x में कोई भी रैखिक बहुपद $ax + b$ के रूप का होगा, जहाँ a और b अचर हैं और $a \neq 0$ है। (क्यों?) इसी प्रकार $ay + b$, y में एक रैखिक बहुपद है।

अब आप निम्नलिखित बहुपदों को लीजिए:

$$2x^2 + 5,\ 5x^2 + 3x + \pi,\ x^2 \text{ और } x^2 + \frac{2}{5}x$$

क्या आप इस बात से सहमत हैं कि ऊपर दिए गए सभी बहुपद घात 2 वाले हैं? घात 2 वाले बहुपद को *द्विघाती* या *द्विघात बहुपद* (*quadratic polynomial*) कहा जाता है।

द्विघाती बहुपद के कुछ उदाहरण $5 - y^2$, $4y + 5y^2$ और $6 - y - y^2$ हैं। क्या आप एक चर में चार अलग-अलग पदों वाले एक द्विघाती बहुपद को लिख सकते हैं? आप देखेंगे कि एक चर में एक द्विघाती बहुपद के अधिक से अधिक 3 पद होंगे। यदि आप कुछ और द्विघाती पद बना सकें तो आप पाएँगे कि x में कोई भी द्विघाती बहुपद $ax^2 + bx + c$ के रूप का होगा, जहाँ $a \neq 0$ और a, b, c अचर हैं। इसी प्रकार, y में द्विघाती बहुपद $ay^2 + by + c$ के रूप का होगा, जबकि $a \neq 0$ और a, b, c अचर हों।

तीन घात वाले बहुपद को *त्रिघाती बहुपद* (*cubic polynomial*) कहा जाता है। x में एक त्रिघाती बहुपद के कुछ उदाहरण $4x^3$, $2x^3 + 1$, $5x^3 + x^2$, $6x^3 - x$, $6 - x^3$ और $2x^3 + 4x^2 + 6x + 7$ हैं। आपके विचार से एक चर में त्रिघाती बहुपद में कितने पद हो सकते हैं? अधिक से अधिक 4 पद हो सकते हैं। इन्हें $ax^3 + bx^2 + cx + d$ के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ $a \neq 0$ और a, b, c और d अचर हैं।

अभी आपने देखा है कि घात 1, घात 2 या घात 3 वाले बहुपद देखने में लगभग समान ही लगते हैं, तो क्या आप एक चर में, घात n वाला एक बहुपद लिख सकते हैं, जहाँ n कोई प्राकृत संख्या है? एक चर x में, घात n वाला बहुपद निम्न रूप का एक व्यंजक होता है:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

जहाँ $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ अचर हैं और $a_n \neq 0$ है।

विशेष रूप में, यदि $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n = 0$ हो (सभी अचर शून्य हों), तो हमें **शून्य बहुपद** (**zero polynomial**) प्राप्त होता है, जिसे **0** से प्रकट किया जाता है। शून्य बहुपद की घात क्या होती है? शून्य बहुपद की घात *परिभाषित नहीं* है।

अभी तक हमने केवल एक चर वाले बहुपदों के बारे में अध्ययन किया है। हम एक से अधिक चरों वाले बहुपद भी प्राप्त कर सकते हैं। उदाहरण के लिए, $x^2 + y^2 + xyz$ (जहाँ चर x, y और z हैं) तीन चरों में एक बहुपद है। इसी प्रकार, $p^2 + q^{10} + r$ (जहाँ चर p, q और r हैं), $u^3 + v^2$ (जहाँ चर u और v हैं) क्रमशः तीन चरों और दो चरों में (वाले) बहुपद हैं। इस प्रकार के बहुपदों का विस्तार से अध्ययन हम बाद में करेंगे।

प्रश्नावली 2.1

1. निम्नलिखित व्यंजकों में कौन-कौन एक चर में बहुपद हैं और कौन-कौन नहीं हैं? कारण के साथ अपने उत्तर दीजिए :

(i) $4x^2 - 3x + 7$ (ii) $y^2 + \sqrt{2}$ (iii) $3\sqrt{t} + t\sqrt{2}$

(iv) $y + \dfrac{2}{y}$ (v) $x^{10} + y^3 + t^{50}$

2. निम्नलिखित में से प्रत्येक में x^2 का गुणांक लिखिए:

(i) $2 + x^2 + x$ (ii) $2 - x^2 + x^3$ (iii) $\frac{\pi}{2}x^2 + x$ (iv) $\sqrt{2}x - 1$

3. 35 घात के द्विपद का और 100 घात के एकपदी का एक-एक उदाहरण दीजिए।

4. निम्नलिखित बहुपदों में से प्रत्येक बहुपद की घात लिखिए :

(i) $5x^3 + 4x^2 + 7x$ (ii) $4 - y^2$

(iii) $5t - \sqrt{7}$ (iv) 3

5. बताइए कि निम्नलिखित बहुपदों में कौन-कौन बहुपद रैखिक हैं, कौन-कौन द्विघाती हैं और कौन-कौन त्रिघाती हैं:

(i) $x^2 + x$ (ii) $x - x^3$ (iii) $y + y^2 + 4$ (iv) $1 + x$

(v) $3t$ (vi) r^2 (vii) $7x^3$

2.3 बहुपद के शून्यक

निम्नलिखित बहुपद लीजिए:

$$p(x) = 5x^3 - 2x^2 + 3x - 2$$

यदि $p(x)$ में सर्वत्र x के स्थान पर 1 प्रतिस्थापित करें, तो हमें यह प्राप्त होता है:

$$p(1) = 5 \times (1)^3 - 2 \times (1)^2 + 3 \times (1) - 2$$
$$= 5 - 2 + 3 - 2$$
$$= 4$$

अत:, हम यह कह सकते हैं कि $x = 1$ पर $p(x)$ का मान 4 है।

इसी प्रकार, $p(0) = 5(0)^3 - 2(0)^2 + 3(0) - 2$

$$= -2$$

क्या आप $p(-1)$ ज्ञात कर सकते हैं?

उदाहरण 2 : चरों के दिए गए मान पर नीचे दिए गए प्रत्येक बहुपद का मान ज्ञात कीजिए:

(i) $x = 1$ पर $p(x) = 5x^2 - 3x + 7$ का मान

(ii) $y = 2$ पर $q(y) = 3y^3 - 4y + \sqrt{11}$ का मान

(iii) $t = a$ पर $p(t) = 4t^4 + 5t^3 - t^2 + 6$ का मान

हल : (i) $p(x) = 5x^2 - 3x + 7$

$x = 1$ पर बहुपद $p(x)$ का मान यह होता है:

$$p(1) = 5(1)^2 - 3(1) + 7$$
$$= 5 - 3 + 7 = 9$$

(ii) $q(y) = 3y^3 - 4y + \sqrt{11}$

$y = 2$ पर बहुपद $q(y)$ का मान यह होता है:

$$q(2) = 3(2)^3 - 4(2) + \sqrt{11} = 24 - 8 + \sqrt{11} = 16 + \sqrt{11}$$

(iii) $p(t) = 4t^4 + 5t^3 - t^2 + 6$

$t = a$ पर बहुपद $p(t)$ का मान यह होता है:

$$p(a) = 4a^4 + 5a^3 - a^2 + 6$$

अब बहुपद $p(x) = x - 1$ लीजिए।

$p(1)$ क्या है? ध्यान दीजिए कि $p(1) = 1 - 1 = 0$ है।

क्योंकि $p(1) = 0$ है, इसलिए हम यह कहते हैं कि 1, बहुपद $p(x)$ का एक *शून्यक* (*zero*) है।

इसी प्रकार, आप यह देख सकते हैं कि 2, $q(x)$ का एक *शून्यक* है, जहाँ $q(x) = x - 2$ है।

व्यापक रूप में, हम यह कहते हैं कि बहुपद $p(x)$ का शून्यक एक ऐसी संख्या c है कि $p(c) = 0$ हो।

इस बात की ओर आपने अवश्य ध्यान दिया होगा कि बहुपद $(x - 1)$ का शून्यक इस बहुपद को 0 के समीकृत करके प्राप्त किया जाता है। अर्थात् $x - 1 = 0$, जिससे $x = 1$ प्राप्त होता है। तब हम कहते हैं कि $p(x) = 0$ एक बहुपद समीकरण है और 1 इस बहुपद समीकरण $p(x) = 0$ का एक मूल है। अत: हम यह कहते हैं कि 1, बहुपद $x - 1$ का शून्यक है या यह बहुपद समीकरण $x - 1 = 0$ का एक *मूल* (*root*) है।

अब अचर बहुपद 5 लीजिए। क्या आप बता सकते हैं कि इसका शून्यक क्या है? इस बहुपद का कोई शून्यक नहीं है, क्योंकि $5x^0$ में x के स्थान पर किसी भी संख्या को प्रतिस्थापित करने पर हमें 5 ही प्राप्त होता है। वस्तुत:, *एक शून्येतर अचर बहुपद का कोई शून्यक नहीं होता।* अब प्रश्न उठता है कि शून्य बहुपद के शून्यकों के बारे में क्या कहा जाए। परंपरा के अनुसार *प्रत्येक वास्तविक संख्या शून्य बहुपद का एक शून्यक होती है।*

उदाहरण 3 : जाँच कीजिए कि -2 और 2 बहुपद $x + 2$ के शून्यक हैं या नहीं।

हल : मान लीजिए $p(x) = x + 2$

तब $p(2) = 2 + 2 = 4$, $p(-2) = -2 + 2 = 0$

अतः -2 बहुपद $x + 2$ का एक शून्यक है, परन्तु 2 बहुपद $x + 2$ का शून्यक नहीं है।

उदाहरण 4 : बहुपद $p(x) = 2x + 1$ का एक शून्यक ज्ञात कीजिए।

हल : $p(x)$ का शून्यक ज्ञात करना वैसा ही है जैसा कि समीकरण

$$p(x) = 0$$

को हल करना।

अब $2x + 1 = 0$ से हमें $x = -\frac{1}{2}$ प्राप्त होता है।

अतः, $-\frac{1}{2}$ बहुपद $2x + 1$ का एक शून्यक है।

अब, यदि $p(x) = ax + b$, $a \neq 0$ एक रैखिक बहुपद हो, तो हम इस $p(x)$ का शून्यक किस प्रकार ज्ञात कर सकते हैं? उदाहरण 4 से आपको इसका कुछ संकेत मिल सकता है। बहुपद $p(x)$ का शून्यक ज्ञात करने का अर्थ है बहुपद समीकरण $p(x) = 0$ को हल करना।

अब $p(x) = 0$ का अर्थ है $ax + b = 0,\ a \neq 0$

अतः, $ax = -b$

अर्थात् $x = -\frac{b}{a}$

अतः, $x = -\frac{b}{a}$ ही केवल $p(x)$ का शून्यक है, अर्थात् *रैखिक बहुपद का एक और केवल एक शून्यक होता है।*

अब हम यह कह सकते हैं कि 1, $x - 1$ का केवल एक शून्यक है और -2, $x + 2$ का केवल एक शून्यक है।

उदाहरण 5 : सत्यापित कीजिए कि 2 और 0 बहुपद $x^2 - 2x$ के शून्यक हैं।

हल : मान लीजिए $p(x) = x^2 - 2x$

तब $p(2) = 2^2 - 4 = 4 - 4 = 0$

और $p(0) = 0 - 0 = 0$

अतः, 2 और 0 दोनों ही बहुपद $x^2 - 2x$ के शून्यक हैं।

आइए अब हम अपने प्रेक्षणों की सूची बनाएँ:

1. आवश्यक नहीं है कि बहुपद का शून्यक शून्य ही हो।
2. 0, बहुपद का एक शून्यक हो सकता है।
3. प्रत्येक रैखिक बहुपद का एक और केवल एक शून्यक होता है।
4. एक बहुपद के एक से अधिक शून्यक हो सकते हैं।

प्रश्नावली 2.2

1. निम्नलिखित पर बहुपद $5x - 4x^2 + 3$ के मान ज्ञात कीजिए:

(i) $x = 0$ (ii) $x = -1$ (iii) $x = 2$

2. निम्नलिखित बहुपदों में से प्रत्येक बहुपद के लिए $p(0), p(1)$ और $p(2)$ ज्ञात कीजिए:

(i) $p(y) = y^2 - y + 1$ (ii) $p(t) = 2 + t + 2t^2 - t^3$

(iii) $p(x) = x^3$ (iv) $p(x) = (x - 1)(x + 1)$

3. सत्यापित कीजिए कि दिखाए गए मान निम्नलिखित स्थितियों में संगत बहुपद के शून्यक हैं:

(i) $p(x) = 3x + 1;\ x = -\dfrac{1}{3}$ (ii) $p(x) = 5x - \pi;\ x = \dfrac{4}{5}$

(iii) $p(x) = x^2 - 1;\ x = 1, -1$ (iv) $p(x) = (x + 1)(x - 2);\ x = -1, 2$

(v) $p(x) = x^2;\ x = 0$ (vi) $p(x) = lx + m;\ x = -\dfrac{m}{l}$

(vii) $p(x) = 3x^2 - 1;\ x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ (viii) $p(x) = 2x + 1;\ x = \dfrac{1}{2}$

4. निम्नलिखित स्थितियों में से प्रत्येक स्थिति में बहुपद का शून्यक ज्ञात कीजिए :

(i) $p(x) = x + 5$ (ii) $p(x) = x - 5$ (iii) $p(x) = 2x + 5$

(iv) $p(x) = 3x - 2$ (v) $p(x) = 3x$ (vi) $p(x) = ax;\ a \neq 0$

(vii) $p(x) = cx + d;\ c \neq 0, c, d$ वास्तविक संख्याएँ हैं।

2.4 शेषफल प्रमेय

आइए हम दो संख्याएँ 15 और 6 लें। आप जानते हैं कि जब हम 15 को 6 से भाग देते हैं, तो हमें भागफल 2 और शेषफल 3 प्राप्त होता है। क्या आप जानते हैं कि इस तथ्य को

किस प्रकार व्यक्त किया जाता है? हम 15 को इस रूप में लिखते हैं:

$$15 = (2 \times 6) + 3$$

हम यहाँ देखते हैं कि शेषफल 3 भाजक 6 से कम है। इसी प्रकार, यदि हम 12 को 6 से भाग दें, तो हमें प्राप्त होता है:

$$12 = (2 \times 6) + 0$$

यहाँ पर शेषफल क्या है? यहाँ पर शेषफल शून्य है। हम यह कहते हैं कि 6, 12 का एक *गुणनखंड* (*factor*) है या 12, 6 का एक *गुणज* (*multiple*) है।

अब प्रश्न यह उठता है कि क्या हम एक बहुपद को दूसरे बहुपद से भाग दे सकते हैं? आइए सबसे पहले हम इसे हल करने का प्रयास करें और यह तब करें जबकि भाजक एक एकपदी हो।

अतः आइए हम बहुपद $2x^3 + x^2 + x$ को एकपदी x से भाग दें।

$$(2x^3 + x^2 + x) \div x = \frac{2x^3}{x} + \frac{x^2}{x} + \frac{x}{x}$$
$$= 2x^2 + x + 1$$

यहाँ आप यह देख सकते हैं कि $2x^3 + x^2 + x$ के प्रत्येक पद में x सर्वनिष्ठ है। अतः हम $2x^3 + x^2 + x$ को $x(2x^2 + x + 1)$ के रूप में लिख सकते हैं।

तब हम यह कहते हैं कि x और $2x^2 + x + 1$ बहुपद $2x^3 + x^2 + x$ के गुणनखंड हैं, और $2x^3 + x^2 + x$, x का एक गुणज है और $2x^2 + x + 1$ का भी एक गुणज है।

बहुपदों $3x^2 + x + 1$ और x का एक अन्य युग्म लीजिए।

यहाँ $(3x^2 + x + 1) \div x = (3x^2 \div x) + (x \div x) + (1 \div x)$ है।

हम देखते हैं कि 1 को x से भाग देने पर हमें एक बहुपद प्राप्त नहीं हो सकता। अतः इस स्थिति में हम रुक जाते हैं और देखते हैं कि शेषफल 1 है। अतः

$$3x^2 + x + 1 = \{(3x + 1) \times x\} + 1$$

यहाँ भागफल $3x + 1$ है और शेषफल 1 है। क्या आप यह सोच सकते हैं कि x बहुपद $3x^2 + x + 1$ का एक गुणनखंड है? क्योंकि शेषफल शून्य नहीं है, इसलिए यह गुणनखंड नहीं है।

आइए अब हम एक बहुपद को एक-दूसरे शून्येतर बहुपद से भाग दें।

उदाहरण 6 : $p(x)$ को $g(x)$ से भाग दीजिए, जहाँ $p(x) = x + 3x^2 - 1$ और $g(x) = 1 + x$ है।

हल : हम भाग देने के प्रक्रम को निम्नलिखित चरणों में करते हैं:

चरण 1 : भाज्य $x + 3x^2 - 1$ और भाजक $(1 + x)$ को मानक रूप में लिखते हैं, अर्थात् पदों को उनकी घातों के अवरोही क्रम (descending order) में लिखते हैं।

अत: भाज्य : $3x^2 + x - 1$, भाजक : $x + 1$

चरण 2 : हम भाज्य के पहले पद को भाजक के पहले पद से भाग देते हैं, अर्थात् हम $3x^2$ को x से भाग देते हैं और हमें $3x$ प्राप्त होता है। यह भागफल का पहला पद होता है।

$$\frac{3x^2}{x} = 3x = \text{भागफल का पहला पद}$$

चरण 3 : हम भाजक को भागफल के पहले पद से गुणा करते हैं और इस गुणनफल को भाज्य से घटा देते हैं, अर्थात् हम $x + 1$ को $3x$ से गुणा करते हैं और गुणनफल $3x^2 + 3x$ को भाज्य $3x^2 + x - 1$ से घटाते हैं। इससे हमें शेषफल $-2x - 1$ प्राप्त होता है।

$$\begin{array}{r|l} & 3x \\ \hline x+1 & 3x^2 + x - 1 \\ & 3x^2 + 3x \\ & - \quad - \\ \hline & -2x - 1 \end{array}$$

चरण 4 : हम शेषफल $-2x - 1$ को नया भाज्य मान लेते हैं। भाजक वही बना रहता है। चरण 2 को पुन: लागू करने पर, हमें भागफल का अगला पद प्राप्त होता है। अर्थात् (नए) भाज्य के पहले पद $-2x$ को भाजक के पहले पद x से भाग देते हैं और हमें -2 प्राप्त होता है। इस तरह, भागफल का दूसरा पद -2 है।

$$\frac{-2x}{x} = -2$$
= भागफल का दूसरा पद

नया भागफल $= 3x - 2$

चरण 5 : हम भाजक को भागफल के दूसरे पद से गुणा करते हैं और इस गुणनफल को भाज्य से घटाते हैं। अर्थात् हम $x + 1$ को -2 से गुणा करते हैं और गुणनफल $-2x - 2$ को भाज्य $-2x - 1$ से घटाते हैं। इससे शेषफल के रूप में हमें 1 प्राप्त होता है।

$$\begin{array}{l|l} (x+1)(-2) & -2x - 1 \\ = -2x - 2 & -2x - 2 \\ & + \quad + \\ \hline & \quad +1 \end{array}$$

यह प्रक्रम हम तब तक करते रहते हैं जब तक कि नए भाज्य की घात भाजक की घात से कम नहीं हो जाती। इस चरण पर, भाज्य शेषफल हो जाता है और भागफलों के योगफल से हमें पूर्ण भागफल प्राप्त हो जाता है।

चरण 6 : इस तरह पूरा भागफल $3x - 2$ है और शेषफल 1 है।

आइए हम देखें कि पूरे प्रक्रम में हमने क्या-क्या किया है।

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad 3x - 2 \\
\hline
x + 1 & 3x^2 + x - 1 \\
 & 3x^2 + 3x \\
 & - \quad\; - \\
\hline
 & \qquad -2x - 1 \\
 & \qquad -2x - 2 \\
 & \qquad + \quad\; + \\
\hline
 & \qquad\qquad\; 1
\end{array}
$$

ध्यान दीजिए कि $3x^2 + x - 1 = (x + 1)\,(3x - 2) + 1$

अर्थात् **भाज्य = (भाजक × भागफल) + शेषफल**

व्यापक रूप में, यदि $p(x)$ और $g(x)$ ऐसे दो बहुपद हों कि $p(x)$ की घात $\geq g(x)$ की घात और $g(x) \neq 0$ है, तो हम ऐसे बहुपद $q(x)$ और $r(x)$ प्राप्त कर सकते हैं जिससे कि

$$p(x) = g(x)q(x) + r(x),$$

जहाँ $r(x) = 0$ या $r(x)$ की घात $< g(x)$ की घात। यहाँ हम कह सकते हैं कि $p(x)$ को $g(x)$ से भाग देने पर भागफल $q(x)$ और शेषफल $r(x)$ प्राप्त होता है।

ऊपर के उदाहरण में, भाजक एक रैखिक बहुपद था। ऐसी स्थिति में आइए हम देखें कि शेषफल और भाज्य के कुछ मानों में कोई संबंध है या नहीं।

$p(x) = 3x^2 + x - 1$ में x के स्थान पर -1 प्रतिस्थापित करने पर, हमें यह प्राप्त होता है:

$$p(-1) = 3(-1)^2 + (-1) -1 = 1$$

अत: $p(x) = 3x^2 + x - 1$ को $(x + 1)$ से भाग देने पर जो शेषफल प्राप्त होता है, यह वही होता है जो कि बहुपद $(x + 1)$ के शून्यक, अर्थात् -1 पर बहुपद $p(x)$ का मान होता है।

आइए हम कुछ अन्य उदाहरण लें।

उदाहरण 7 : $3x^4 - 4x^3 - 3x - 1$ को $x - 1$ से भाग दीजिए।

हल : लंबे भाग से हमें यह प्राप्त होता है :

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3x^3 - x^2 - x - 4 \\
\hline
x - 1 & 3x^4 - 4x^3 - 3x - 1 \\
 & \underset{-}{3x^4} \underset{+}{-} 3x^3 \\
\hline
 & - x^3 \qquad - 3x - 1 \\
 & \underset{+}{-} x^3 \underset{-}{+} x^2 \\
\hline
 & - x^2 - 3x - 1 \\
 & \underset{+}{-} x^2 \underset{-}{+} x \\
\hline
 & - 4x - 1 \\
 & \underset{+}{-} 4x \underset{-}{+} 4 \\
\hline
 & - 5
\end{array}
$$

यहाँ शेषफल -5 है। अब $x - 1$ का शून्यक 1 है। अत: $p(x)$ में $x = 1$ रखने पर हम यह पाते हैं कि

$$
\begin{aligned}
p(1) &= 3(1)^4 - 4(1)^3 - 3(1) - 1 \\
&= 3 - 4 - 3 - 1 \\
&= -5, \text{ जो कि शेषफल है।}
\end{aligned}
$$

उदाहरण 8 : $p(x) = x^3 + 1$ को $x + 1$ से भाग देने पर प्राप्त शेषफल ज्ञात कीजिए।

हल : लंबे भाग से,

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 - x + 1 \\
\hline
x + 1 & x^3 + 1 \\
 & \underset{-}{x^3} \underset{-}{+} x^2 \\
\hline
 & - x^2 \qquad + 1 \\
 & \underset{+}{-} x^2 \underset{+}{-} x \\
\hline
 & x + 1 \\
 & \underset{-}{x} \underset{-}{+} 1 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

अतः, हमें शेषफल 0 प्राप्त होता है।

यहाँ $p(x) = x^3 + 1$ है और $x + 1 = 0$ का मूल $x = -1$ है। अतः

$$\begin{aligned} p(-1) &= (-1)^3 + 1 \\ &= -1 + 1 \\ &= 0, \end{aligned}$$

जो वास्तविक रूप से भाग देने पर प्राप्त शेषफल के बराबर है।

क्या यह एक बहुपद को एक *रैखिक बहुपद* से भाग देने पर प्राप्त शेषफल ज्ञात करने की एक सरल विधि नहीं है? अब हम इस तथ्य को निम्नलिखित प्रमेय के रूप में प्रस्तुत करेंगे। हम यहाँ इस प्रमेय की उपपत्ति देकर यह भी दिखाएँगे कि यह प्रमेय सत्य क्यों है।

शेषफल प्रमेय : *मान लीजिए $p(x)$ एक से अधिक या एक के बराबर घात वाला एक बहुपद है और मान लीजिए a कोई वास्तविक संख्या है। यदि $p(x)$ को रैखिक बहुपद $x - a$ से भाग दिया जाए, तो शेषफल $p(a)$ होता है।*

उपपत्ति : मान लीजिए $p(x)$ एक या एक से अधिक घात वाला एक बहुपद है और मान लीजिए कि जब $p(x)$ को $x - a$ से भाग दिया जाता है, तो भागफल $q(x)$ होता है और शेषफल $r(x)$ होता है। अर्थात्

$$p(x) = (x - a)\, q(x) + r(x)$$

क्योंकि $x - a$ की घात 1 है और $r(x)$ की घात $x - a$ की घात से कम है, इसलिए $r(x)$ की घात $= 0$ है। इसका अर्थ यह है कि $r(x)$ एक अचर है। मान लीजिए यह अचर r है।

अतः, x के प्रत्येक मान के लिए $r(x) = r$ है।

इसलिए,
$$p(x) = (x - a)\, q(x) + r$$

विशेष रूप से, यदि $x = a$, तो इस समीकरण से हमें यह प्राप्त होता है:

$$\begin{aligned} p(a) &= (a - a)\, q(a) + r \\ &= r \end{aligned}$$

इस तरह प्रमेय सिद्ध हो जाती है।

आइए हम इस परिणाम को एक अन्य उदाहरण पर लागू करें।

उदाहरण 9 : $x^4 + x^3 - 2x^2 + x + 1$ को $x - 1$ से भाग देने पर प्राप्त शेषफल ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ, $p(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 + x + 1$ है और $x - 1$ का शून्यक 1 है।

$$p(1) = (1)^4 + (1)^3 - 2(1)^2 + 1 + 1 = 2$$

अतः शेषफल प्रमेय के अनुसार $x^4 + x^3 - 2x^2 + x + 1$ को $(x - 1)$ से भाग देने पर शेषफल 2 प्राप्त होता है।

उदाहरण 10 : जाँच कीजिए कि बहुपद $q(t) = 4t^3 + 4t^2 - t - 1$, $2t + 1$ का एक गुणज है।

हल : जैसा कि आप जानते हैं कि $q(t)$ बहुपद $2t + 1$ का गुणज केवल तब होगा जबकि $2t + 1$ से $q(t)$ को भाग देने पर कोई शेष न बचता हो। अब $2t + 1 = 0$ लेने पर हमें यह प्राप्त होता है:

$$t = -\frac{1}{2}$$

और,
$$q\left(-\frac{1}{2}\right) = 4\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 4\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right) - 1$$
$$= -\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} - 1$$
$$= 0$$

अतः, $q(t)$ को $2t + 1$ से भाग देने पर प्राप्त शेषफल 0 है।

अतः, $2t + 1$ दिए हुए बहुपद $q(t)$ का एक गुणनखंड है अर्थात् $q(t)$, $2t + 1$ का एक गुणज है।

प्रश्नावली 2.3

1. $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ को निम्नलिखित से भाग देने पर शेषफल ज्ञात कीजिए:

   (i) $x + 1$ (ii) $x - \frac{1}{2}$ (iii) x (iv) $x + \pi$ (v) $5 + 2x$

2. $x^3 - ax^2 + 6x - a$ को $x - a$ से भाग देने पर शेषफल ज्ञात कीजिए।

3. जाँच कीजिए कि $7 + 3x$, $3x^3 + 7x$ का एक गुणनखंड है या नहीं।

2.5 बहुपदों का गुणनखंडन

आइए अब हम ऊपर के उदाहरण 10 की स्थिति पर ध्यानपूर्वक विचार करें। इसके अनुसार, क्योंकि शेषफल $q\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$ है, इसलिए $2t + 1$, $q(t)$ का एक गुणनखंड है। अर्थात् किसी बहुपद $g(t)$ के लिए,

$$q(t) = (2t + 1)\, g(t) \text{ होता है।}$$

यह नीचे दिए हुए प्रमेय की एक विशेष स्थिति है:

गुणनखंड प्रमेय : यदि $p(x)$ घात $n \geq 1$ वाला एक बहुपद हो और a कोई वास्तविक संख्या हो, तो

(i) $x - a$, $p(x)$ का एक गुणनखंड होता है, यदि $p(a) = 0$ हो, और

(ii) $p(a) = 0$ होता है, यदि $x - a$, $p(x)$ का एक गुणनखंड हो।

उपपत्ति : शेषफल प्रमेय द्वारा, $p(x) = (x - a)\, q(x) + p(a)$.

(i) यदि $p(a) = 0$, तब $p(x) = (x - a)\, q(x)$, जो दर्शाता है कि $x - a$, $p(x)$ का एक गुणनखंड है।

(ii) चूंकि $x - a$, $p(x)$ का एक गुण $x - a$, $p(x)$ का एक गुणनखंड है, तो किसी बहुपद $g(x)$ के लिए $p(x) = (x - a)\, g(x)$ होगा। इस स्थिति में, $p(a) = (a - a)\, g(a) = 0$.

उदाहरण 11 : जाँच कीजिए कि $x + 2$ बहुपदों $x^3 + 3x^2 + 5x + 6$ और $2x + 4$ का एक गुणनखंड है या नहीं।

हल : $x + 2$ का शून्यक -2 है। मान लीजिए

$$p(x) = x^3 + 3x^2 + 5x + 6 \text{ और } s(x) = 2x + 4$$

तब,
$$\begin{aligned} p(-2) &= (-2)^3 + 3(-2)^2 + 5(-2) + 6 \\ &= -8 + 12 - 10 + 6 \\ &= 0 \end{aligned}$$

अत: गुणनखंड प्रमेय (Factor Theorem) के अनुसार $x + 2$, $x^3 + 3x^2 + 5x + 6$ का एक गुणनखंड है।

पुनः,
$$s(-2) = 2(-2) + 4 = 0$$

अत: $x + 2$, $2x + 4$ का एक गुणनखंड है। वास्तव में, गुणनखंड प्रमेय लागू किए बिना ही आप इसकी जाँच कर सकते हैं, क्योंकि $2x + 4 = 2(x + 2)$ है।

उदाहरण 12 : यदि $x - 1$, $4x^3 + 3x^2 - 4x + k$ का एक गुणनखंड है, तो k का मान ज्ञात कीजिए।

हल : क्योंकि $x - 1$, $p(x) = 4x^3 + 3x^2 - 4x + k$ का एक गुणनखंड है, इसलिए

$$p(1) = 0 \text{ होगा।}$$

अब,
$$p(1) = 4(1)^3 + 3(1)^2 - 4(1) + k$$

इसलिए $4 + 3 - 4 + k = 0$

अर्थात् $k = -3$

अब हम घात 2 और घात 3 के कुछ बहुपदों के गुणनखंड ज्ञात करने के लिए गुणनखंड प्रमेय का प्रयोग करेंगे।

आप $x^2 + lx + m$ जैसे द्विघाती बहुपद के गुणनखंडन से परिचित हैं। आपने मध्य पद lx को $ax + bx$ में इस प्रकार विभक्त करके कि $ab = m$ हो, गुणनखंडन किया था। तब $x^2 + lx + m = (x + a)(x + b)$ प्राप्त हुआ था। अब हम $ax^2 + bx + c$, जहाँ $a \neq 0$ और a, b, c अचर हैं, के प्रकार के द्विघाती बहुपदों का गुणनखंडन करने का प्रयास करेंगे।

मध्य पद को विभक्त करके बहुपद $ax^2 + bx + c$ का गुणनखंडन निम्न प्रकार से होता है:

मान लीजिए इसके गुणनखंड $(px + q)$ और $(rx + s)$ हैं। तब,

$$ax^2 + bx + c = (px + q)(rx + s) = pr\, x^2 + (ps + qr)\, x + qs$$

x^2 के गुणांकों की तुलना करने पर, हमें $a = pr$ प्राप्त होता है।

इसी प्रकार, x के गुणांकों की तुलना करने पर, हमें $b = ps + qr$ प्राप्त होता है।

साथ ही, अचर पदों की तुलना करने पर, हमें $c = qs$ प्राप्त होता है।

इससे यह पता चलता है कि b दो संख्याओं ps और qr का योगफल है, जिनका गुणनफल $(ps)(qr) = (pr)(qs) = ac$ है। अत: $ax^2 + bx + c$ का गुणनखंडन करने के लिए, हम b को ऐसी दो संख्याओं के योगफल के रूप में लिखते हैं जिनका गुणनफल ac हो। यह तथ्य नीचे दिए गए उदाहरण 13 से स्पष्ट हो जाएगा।

उदाहरण 13 : मध्य पद को विभक्त करके तथा गुणनखंड प्रमेय का प्रयोग करके $6x^2 + 17x + 5$ का गुणनखंडन कीजिए।

हल 1 : (मध्य पद को विभक्त करके) : यदि हम ऐसी दो संख्याएँ p और q ज्ञात कर सकते हों जिससे कि

$p + q = 17$ और $pq = 6 \times 5 = 30$ हो, तो हम गुणनखंड प्राप्त कर सकते हैं।

अत: आइए हम 30 के गुणनखंड-युग्मों को ढूढ़ें। कुछ युग्म 1 और 30, 2 और 15, 3 और 10, 5 और 6 हैं।

इन युग्मों में, हमें 2 और 15 के युग्म से $p + q = 17$ प्राप्त होगा।

अतः $6x^2 + 17x + 5 = 6x^2 + (2 + 15)x + 5$

$$= 6x^2 + 2x + 15x + 5$$

$$= 2x(3x + 1) + 5(3x + 1)$$

$$= (3x + 1)\,(2x + 5)$$

हल 2 : (गुणनखंड प्रमेय की सहायता से):

$6x^2 + 17x + 5 = 6\left(x^2 + \frac{17}{6}x + \frac{5}{6}\right) = 6\,p(x)$, मान लीजिए। यदि a और b, $p(x)$ के शून्यक हों, तो $6x^2 + 17x + 5 = 6(x - a)\,(x - b)$ है। अतः $ab = \frac{5}{6}$ होगा। आइए हम a और b के लिए कुछ संभावनाएँ देखें। ये $\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{5}{3}, \pm\frac{5}{2}, \pm 1$ हो सकते हैं। अब, $p\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{17}{6}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{5}{6} \neq 0$ है। परन्तु $p\left(\frac{-1}{3}\right) = 0$ है। अतः $\left(x + \frac{1}{3}\right)$, $p(x)$ का एक गुणनखंड है। इसी प्रकार, जाँच करके आप यह ज्ञात कर सकते हैं कि $\left(x + \frac{5}{2}\right)$, $p(x)$ का एक गुणनखंड है।

अतः,
$$6x^2 + 17x + 5 = 6\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{5}{2}\right)$$

$$= 6\left(\frac{3x+1}{3}\right)\left(\frac{2x+5}{2}\right)$$

$$= (3x + 1)\,(2x + 5)$$

इस उदाहरण के लिए, विभक्त करने की विधि का प्रयोग अधिक प्रभावशाली है। फिर भी, आइए हम एक और उदाहरण लें।

उदाहरण 14 : गुणनखंड प्रमेय की सहायता से $y^2 - 5y + 6$ का गुणनखंडन कीजिए।

हल : मान लीजिए $p(y) = y^2 - 5y + 6$ है। अब, यदि $p(y) = (y - a)\,(y - b)$ हो, तो हम जानते हैं कि इसका अचर पद ab होगा। अतः $ab = 6$ है। इसलिए, $p(y)$ के गुणनखंड प्राप्त करने के लिए हम 6 के गुणनखंड ज्ञात करते हैं।

6 के गुणनखंड 1, 2 और 3 हैं।

अब, $p(2) = 2^2 - (5 \times 2) + 6 = 0$

इसलिए $y-2$, $p(y)$ का एक गुणनखंड है।

साथ ही, $p(3) = 3^2 - (5 \times 3) + 6 = 0$

इसलिए, $y-3$ भी $y^2 - 5y + 6$ का एक गुणनखंड है।

अत:, $y^2 - 5y + 6 = (y-2)\,(y-3)$

ध्यान दीजिए कि मध्य पद $-5y$ को विभक्त करके भी $y^2 - 5y + 6$ का गुणनखंडन किया जा सकता है।

आइए अब हम त्रिघाती बहुपदों का गुणनखंडन करें। यहाँ प्रारंभ में विभक्त-विधि अधिक उपयोगी सिद्ध नहीं होगी। हमें पहले कम से कम एक गुणनखंड ज्ञात करना आवश्यक होता है, जैसा कि आप नीचे के उदाहरण में देखेंगे।

उदाहरण 15 : $x^3 - 23x^2 + 142x - 120$ का गुणनखंडन कीजिए।

हल : मान लीजिए $p(x) = x^3 - 23x^2 + 142x - 120$ है।

अब हम -120 के सभी गुणनखंडों का पता लगाएँगे। इनमें कुछ गुणनखंड हैं:

$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6, \pm 8, \pm 10, \pm 12, \pm 15, \pm 20, \pm 24, \pm 30, \pm 60$

जाँच करने पर, हम यह पाते हैं कि $p(1) = 0$ है। अत: $(x-1)$, $p(x)$ का एक गुणनखंड है।

अब हम देखते हैं कि $x^3 - 23x^2 + 142x - 120 = x^3 - x^2 - 22x^2 + 22x + 120x - 120$

$$= x^2(x-1) - 22x(x-1) + 120(x-1) \quad \text{(क्यों?)}$$

$$= (x-1)\,(x^2 - 22x + 120) \quad [(x-1) \text{ को सर्वनिष्ठ लेकर}]$$

इसे $p(x)$ को $(x-1)$ से भाग देकर भी प्राप्त किया जा सकता था।

अब $x^2 - 22x + 120$ का गुणनखंडन या तो मध्य पद को विभक्त करके या गुणनखंड प्रमेय की सहायता से किया जा सकता है। मध्य पद को विभक्त करने पर, हमें यह प्राप्त होता है:

$$x^2 - 22x + 120 = x^2 - 12x - 10x + 120$$

$$= x(x-12) - 10(x-12)$$

$$= (x-12)\,(x-10)$$

अत:, $x^3 - 23x^2 - 142x - 120 = (x-1)(x-10)(x-12)$

प्रश्नावली 2.4

1. बताइए कि निम्नलिखित बहुपदों में से किस बहुपद का एक गुणनखंड $x + 1$ है।

(i) $x^3 + x^2 + x + 1$ (ii) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

(iii) $x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + 1$ (iv) $x^3 - x^2 - \left(2 + \sqrt{2}\right)x + \sqrt{2}$

2. गुणनखंड प्रमेय लागू करके बताइए कि निम्नलिखित स्थितियों में से प्रत्येक स्थिति में $g(x)$, $p(x)$ का एक गुणनखंड है या नहीं:

(i) $p(x) = 2x^3 + x^2 - 2x - 1,\ g(x) = x + 1$

(ii) $p(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1,\ g(x) = x + 2$

(iii) $p(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6,\ g(x) = x - 3$

3. k का मान ज्ञात कीजिए जबकि निम्नलिखित स्थितियों में से प्रत्येक स्थिति में $(x - 1)$, $p(x)$ का एक गुणनखंड हो :

(i) $p(x) = x^2 + x + k$ (ii) $p(x) = 2x^2 + kx + \sqrt{2}$

(iii) $p(x) = kx^2 - \sqrt{2}x + 1$ (iv) $p(x) = kx^2 - 3x + k$

4. गुणनखंड ज्ञात कीजिए:

(i) $12x^2 - 7x + 1$ (ii) $2x^2 + 7x + 3$

(iii) $6x^2 + 5x - 6$ (iv) $3x^2 - x - 4$

5. गुणनखंड ज्ञात कीजिए:

(i) $x^3 - 2x^2 - x + 2$ (ii) $x^3 - 3x^2 - 9x - 5$

(iii) $x^3 + 13x^2 + 32x + 20$ (iv) $2y^3 + y^2 - 2y - 1$

2.6 बीजीय सर्वसमिकाएँ

पिछली कक्षाओं में, आप यह पढ़ चुके हैं कि बीजीय सर्वसमिका (algebraic identity) एक बीजीय समीकरण होती है जो कि चरों के सभी मानों के लिए सत्य होती है। पिछली कक्षाओं में, आप निम्नलिखित बीजीय सर्वसमिकाओं का अध्ययन कर चुके हैं:

सर्वसमिका I : $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

सर्वसमिका II : $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

सर्वसमिका III : $x^2 - y^2 = (x + y)\ (x - y)$

सर्वसमिका IV : $(x + a)\ (x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

इन बीजीय सर्वसमिकाओं में से कुछ का प्रयोग आपने बीजीय व्यंजकों के गुणनखंड ज्ञात करने में अवश्य किया होगा। आप इनकी उपयोगिता अभिकलनों (computations) में भी देख सकते हैं।

उदाहरण 16 : उपयुक्त सर्वसमिकाओं का उपयोग करके निम्नलिखित गुणनफल ज्ञात कीजिए:

(i) $(x + 3)(x + 3)$ (ii) $(x – 3)(x + 5)$

हल : (i) यहाँ हम सर्वसमिका I $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ का प्रयोग कर सकते हैं। इस सर्वसमिका में $y = 3$ रखने पर, हमें यह प्राप्त होता है:

$$(x + 3)(x + 3) = (x + 3)^2 = x^2 + 2(x)(3) + (3)^2$$
$$= x^2 + 6x + 9$$

(ii) सर्वसमिका IV अर्थात् $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ को लागू करने पर, हमें यह प्राप्त होता है:

$$(x – 3)(x + 5) = x^2 + (–3 + 5)x + (–3)(5)$$
$$= x^2 + 2x – 15$$

उदाहरण 17 : सीधे गुणा न करके 105×106 का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $105 \times 106 = (100 + 5) \times (100 + 6)$

$= (100)^2 + (5 + 6)(100) + (5 \times 6)$ (सर्वसमिका IV लागू करके)

$= 10000 + 1100 + 30$

$= 11130$

कुछ दिए हुए व्यंजकों का गुणनफल ज्ञात करने के लिए, हमने ऊपर बतायी गई कुछ सर्वसमिकाओं का प्रयोग किया है। ये सर्वसमिकाएँ बीजीय व्यंजकों का गुणनखंडन करने में भी उपयोगी होती हैं, जैसा कि आप नीचे दिए गए उदाहरण में देख सकते हैं।

उदाहरण 18 : गुणनखंड ज्ञात कीजिए:

(i) $49a^2 + 70ab + 25b^2$ (ii) $\frac{25}{4}x^2 - \frac{y^2}{9}$

हल : (i) यहाँ आप यह देख सकते हैं कि

$$49a^2 = (7a)^2,\ 25b^2 = (5b)^2,\ 70ab = 2(7a)(5b)$$

$x^2 + 2xy + y^2$ के साथ दिए हुए व्यंजक की तुलना करने पर, हम यह पाते हैं कि $x = 7a$ और $y = 5b$ है।

सर्वसमिका I लागू करने पर, हमें यह प्राप्त होता है:

$$49a^2 + 70ab + 25b^2 = (7a + 5b)^2 = (7a + 5b)(7a + 5b)$$

(ii) यहाँ $\frac{25}{4}x^2 - \frac{y^2}{9} = \left(\frac{5}{2}x\right)^2 - \left(\frac{y}{3}\right)^2$

सर्वसमिका III के साथ इसकी तुलना करने पर, हमें यह प्राप्त होता है:

$$\frac{25}{4}x^2 - \frac{y^2}{9} = \left(\frac{5}{2}x\right)^2 - \left(\frac{y}{3}\right)^2$$

$$= \left(\frac{5}{2}x + \frac{y}{3}\right)\left(\frac{5}{2}x - \frac{y}{3}\right)$$

अभी तक हमारी सभी सर्वसमिकाएँ द्विपदों के गुणनफलों से संबंधित रही हैं। आइए अब हम सर्वसमिका I को त्रिपद $x + y + z$ पर लागू करें। हम सर्वसमिका I लागू करके, $(x + y + z)^2$ का अभिकलन करेंगे।

मान लीजिए $x + y = t$ है। तब,

$$(x + y + z)^2 = (t + z)^2$$

$= t^2 + 2tz + t^2$ (सर्वसमिका I लागू करने पर)

$= (x + y)^2 + 2(x + y)z + z^2$ (t का मान प्रतिस्थापित करने पर)

$= x^2 + 2xy + y^2 + 2xz + 2yz + z^2$ (सर्वसमिका I लागू करने पर)

$= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$ (पदों को विन्यासित करने पर)

अतः हमें निम्नलिखित सर्वसमिका प्राप्त होती है:

सर्वसमिका V : $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$

टिप्पणी : हम दाएँ पक्ष के व्यंजक को बाएँ पक्ष के व्यंजक का प्रसारित रूप मानते हैं। ध्यान दीजिए कि $(x + y + z)^2$ के प्रसार में तीन वर्ग पद और तीन गुणनफल पद हैं।

उदाहरण 19 : $(3a + 4b + 5c)^2$ को प्रसारित रूप में लिखिए।

हल : दिए हुए व्यंजक की $(x + y + z)^2$ के साथ तुलना करने पर, हम यह पाते हैं कि

$$x = 3a,\ y = 4b \text{ और } z = 5c$$

अतः सर्वसमिका V लागू करने पर, हमें यह प्राप्त होता है:

$$(3a + 4b + 5c)^2 = (3a)^2 + (4b)^2 + (5c)^2 + 2(3a)(4b) + 2(4b)(5c) + 2(5c)(3a)$$
$$= 9a^2 + 16b^2 + 25c^2 + 24ab + 40bc + 30ac$$

उदाहरण 20 : $(4a - 2b - 3c)^2$ का प्रसार कीजिए।

हल : सर्वसमिका V लागू करने पर, हमें यह प्राप्त होता है:

$$(4a - 2b - 3c)^2 = [4a + (-2b) + (-3c)]^2$$
$$= (4a)^2 + (-2b)^2 + (-3c)^2 + 2(4a)(-2b) + 2(-2b)(-3c) + 2(-3c)(4a)$$
$$= 16a^2 + 4b^2 + 9c^2 - 16ab + 12bc - 24ac$$

उदाहरण 21 : $4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 2yz + 4xz$ का गुणनखंडन कीजिए।

हल : यहाँ $4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 2yz + 4xz = (2x)^2 + (-y)^2 + (z)^2 + 2(2x)(-y) + 2(-y)(z) + 2(2x)(z)$

$$= [2x + (-y) + z]^2 \quad \text{(सर्वसमिका V लागू करने पर)}$$
$$= (2x - y + z)^2 = (2x - y + z)\,(2x - y + z)$$

अभी तक हमने द्विघात पदों से संबंधित सर्वसमिकाओं का ही अध्ययन किया है। आइए अब हम सर्वसमिका I को $(x + y)^3$ अभिकलित करने में लागू करें। यहाँ,

$$(x + y)^3 = (x + y)\,(x + y)^2$$
$$= (x + y)(x^2 + 2xy + y^2)$$
$$= x(x^2 + 2xy + y^2) + y(x^2 + 2xy + y^2)$$
$$= x^3 + 2x^2y + xy^2 + x^2y + 2xy^2 + y^3$$
$$= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$
$$= x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$$

अतः, हमें निम्नलिखित सर्वसमिका प्राप्त होती है:

सर्वसमिका VI : $\mathbf{(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy\,(x + y)}$

सर्वसमिका VI में y के स्थान पर $-y$ रखने पर, हमें प्राप्त होता है:

सर्वसमिका VII : $\mathbf{(x - y)^3 = x^3 - y^3 - 3xy(x - y)}$

$$\mathbf{= x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3}$$

उदाहरण 22 : निम्नलिखित घनों को प्रसारित रूप में लिखिए:

(i) $(3a + 4b)^3$ (ii) $(5p - 3q)^3$

हल : (i) $(x + y)^3$ के साथ दिए गए व्यंजक की तुलना करने पर हम, यह पाते हैं कि

$$x = 3a \text{ और } y = 4b$$

अतः सर्वसमिका VI का प्रयोग करने पर, हमें यह प्राप्त होता है:

$$(3a + 4b)^3 = (3a)^3 + (4b)^3 + 3(3a)(4b)(3a + 4b)$$
$$= 27a^3 + 64b^3 + 108a^2b + 144ab^2$$

(ii) $(x - y)^3$ के साथ दिए हुए व्यंजक की तुलना करने पर, हम यह पाते हैं कि

$$x = 5p \text{ और } y = 3q$$

सर्वसमिका VII लागू करने पर, हमें यह प्राप्त होता है:

$$(5p - 3q)^3 = (5p)^3 - (3q)^3 - 3(5p)(3q)(5p - 3q)$$
$$= 125p^3 - 27q^3 - 225p^2q + 135pq^2$$

उदाहरण 23 : उपयुक्त सर्वसमिकाएँ प्रयोग करके, निम्नलिखित में से प्रत्येक का मान ज्ञात कीजिए:

(i) $(104)^3$ (ii) $(999)^3$

हल : (i) यहाँ

$$(104)^3 = (100 + 4)^3$$
$$= (100)^3 + (4)^3 + 3(100)(4)(100 + 4)$$

(सर्वसमिका VI का प्रयोग करने पर)

$$= 1000000 + 64 + 124800$$
$$= 1124864$$

(ii) यहाँ

$$(999)^3 = (1000 - 1)^3$$
$$= (1000)^3 - (1)^3 - 3(1000)(1)(1000 - 1)$$

(सर्वसमिका VII का प्रयोग करने पर)

$$= 1000000000 - 1 - 2997000$$
$$= 997002999$$

उदाहरण 24 : $8x^3 + 27y^3 + 36x^2y + 54xy^2$ का गुणनखंडन कीजिए।

हल : दिए हुए व्यंजक को इस प्रकार लिखा जा सकता है:

$$(2x)^3 + (3y)^3 + 3(4x^2)(3y) + 3(2x)(9y^2)$$
$$= (2x)^3 + (3y)^3 + 3(2x)^2(3y) + 3(2x)(3y)^2$$
$$= (2x + 3y)^3 \quad \text{(सर्वसमिका VI का प्रयोग करने पर)}$$
$$= (2x + 3y)(2x + 3y)(2x + 3y)$$

अब $(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$ का प्रसार करने पर, हमें गुणनफल इस रूप में प्राप्त होता है:

$$x(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) + y(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) + z(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$
$$= x^3 + xy^2 + xz^2 - x^2y - xyz - zx^2 + x^2y + y^3 + yz^2 - xy^2 - y^2z - xyz + x^2z + y^2z + z^3 - xyz - yz^2 - xz^2$$
$$= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \qquad \text{(सरल करने पर)}$$

अतः, हमें निम्नलिखित सर्वसमिका प्राप्त होती है:

सर्वसमिका VIII : $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

उदाहरण 25 : $8x^3 + y^3 + 27z^3 - 18xyz$ का गुणनखंडन कीजिए।

हल : यहाँ,

$$8x^3 + y^3 + 27z^3 - 18xyz$$
$$= (2x)^3 + y^3 + (3z)^3 - 3(2x)(y)(3z)$$
$$= (2x + y + 3z)[(2x)^2 + y^2 + (3z)^2 - (2x)(y) - (y)(3z) - (2x)(3z)]$$
$$= (2x + y + 3z)(4x^2 + y^2 + 9z^2 - 2xy - 3yz - 6xz)$$

प्रश्नावली 2.5

1. उपयुक्त सर्वसमिकाओं को प्रयोग करके निम्नलिखित गुणनफल ज्ञात कीजिए:

   (i) $(x + 4)(x + 10)$ (ii) $(x + 8)(x - 10)$ (iii) $(3x + 4)(3x - 5)$

   (iv) $(y^2 + \frac{3}{2})(y^2 - \frac{3}{2})$ (v) $(3 - 2x)(3 + 2x)$

2. सीधे गुणा किए बिना निम्नलिखित गुणनफलों के मान ज्ञात कीजिए:

   (i) 103×107 (ii) 95×96 (iii) 104×96

3. उपयुक्त सर्वसमिकाएँ प्रयोग करके निम्नलिखित का गुणनखंडन कीजिए:

   (i) $9x^2 + 6xy + y^2$ (ii) $4y^2 - 4y + 1$ (iii) $x^2 - \frac{y^2}{100}$

4. उपयुक्त सर्वसमिकाओं का प्रयोग करके निम्नलिखित में से प्रत्येक का प्रसार कीजिए:

   (i) $(x + 2y + 4z)^2$ (ii) $(2x - y + z)^2$ (iii) $(-2x + 3y + 2z)^2$

   (iv) $(3a - 7b - c)^2$ (v) $(-2x + 5y - 3z)^2$ (vi) $\left[\frac{1}{4}a - \frac{1}{2}b + 1\right]^2$

5. गुणनखंडन कीजिए:

(i) $4x^2 + 9y^2 + 16z^2 + 12xy - 24yz - 16xz$

(ii) $2x^2 + y^2 + 8z^2 - 2\sqrt{2}\,xy + 4\sqrt{2}\,yz - 8xz$

6. निम्नलिखित घनों को प्रसारित रूप में लिखिए:

(i) $(2x+1)^3$ (ii) $(2a-3b)^3$

(iii) $\left[\frac{3}{2}x+1\right]^3$ (iv) $\left[x-\frac{2}{3}y\right]^3$

7. उपयुक्त सर्वसमिकाएँ प्रयोग करके निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए:

(i) $(99)^3$ (ii) $(102)^3$ (iii) $(998)^3$

8. निम्नलिखित में से प्रत्येक का गुणनखंडन कीजिए:

(i) $8a^3 + b^3 + 12a^2b + 6ab^2$ (ii) $8a^3 - b^3 - 12a^2b + 6ab^2$

(iii) $27 - 125a^3 - 135a + 225a^2$ (iv) $64a^3 - 27b^3 - 144a^2b + 108ab^2$

(v) $27p^3 - \frac{1}{216} - \frac{9}{2}p^2 + \frac{1}{4}p$

9. सत्यापित कीजिए: (i) $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$ (ii) $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$

10. निम्नलिखित में से प्रत्येक का गुणनखंडन कीजिए:

(i) $27y^3 + 125z^3$ (ii) $64m^3 - 343n^3$

[**संकेत:** देखिए प्रश्न 9]

11. गुणनखंडन कीजिए: $27x^3 + y^3 + z^3 - 9xyz$

12. सत्यापित कीजिए: $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \frac{1}{2}(x+y+z)\left[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2\right]$

13. यदि $x + y + z = 0$ हो, तो दिखाइए कि $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ है।

14. वास्तव में घनों का परिकलन किए बिना निम्नलिखित में से प्रत्येक का मान ज्ञात कीजिए:

(i) $(-12)^3 + (7)^3 + (5)^3$ (ii) $(28)^3 + (-15)^3 + (-13)^3$

15. नीचे दिए गए आयतों, जिनमें उनके क्षेत्रफल दिए गए हैं, में से प्रत्येक की लंबाई और चौड़ाई के लिए संभव व्यंजक दीजिए:

क्षेत्रफल : $25a^2 - 35a + 12$	क्षेत्रफल : $35y^2 + 13y - 12$
(i)	(ii)

16. घनाभों (cuboids), जिनके आयतन नीचे दिए गए हैं कि, विमाओं के लिए संभव व्यंजक क्या हैं?

(i)	(ii)
आयतन : $3x^2 - 12x$	आयतन : $12ky^2 + 6ky - 20k$

2.7 सारांश

इस अध्याय में, आपने निम्नलिखित बिंदुओं का अध्ययन किया है:

1. एक चर वाला बहुपद $p(x)$ निम्न रूप का x में एक बीजीय व्यंजक है:

$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$

जहाँ $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ अचर हैं और $a_n \neq 0$ है। $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ क्रमशः $x^0, x, x^2, \ldots, x^n$ के गुणांक हैं और n को बहुपद की घात कहा जाता है। प्रत्येक $a_n x^n, a_{n-1} x^{n-1}, \ldots, a_0$, जहाँ $a_n \neq 0$, को बहुपद $p(x)$ का पद कहा जाता है।

2. एक पद वाले बहुपद को एकपदी कहा जाता है।

3. दो पदों वाले बहुपद को द्विपद कहा जाता है।

4. तीन पदों वाले बहुपद को त्रिपद कहा जाता है।

5. एक घात वाले बहुपद को रैखिक बहुपद कहा जाता है।

6. दो घात वाले बहुपद को द्विघाती बहुपद कहा जाता है।

7. तीन घात वाले बहुपद को त्रिघाती बहुपद कहा जाता है।

8. वास्तविक संख्या 'a', बहुपद $p(x)$ का एक शून्यक होती है, यदि $p(a) = 0$ हो।

9. एक चर में प्रत्येक रैखिक बहुपद का एक अद्वितीय शून्यक होता है। एक शून्येतर अचर बहुपद का कोई शून्यक नहीं है और प्रत्येक वास्तविक संख्या शून्य बहुपद का एक शून्यक होती है।

10. **शेषफल प्रमेय :** यदि $p(x)$, एक से अधिक या एक के बराबर घात वाला एक बहुपद हो, और $p(x)$ को रैखिक बहुपद $x - a$ से भाग दिया गया हो, तो शेषफल $p(a)$ होता है।

11. यदि $p(a) = 0$ हो, तो $x - a$ बहुपद $p(x)$ का एक गुणनखंड होता है और यदि $x - a$, $p(x)$ का एक गुणनखंड हो, तो $p(a) = 0$ होता है।

12. $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$

13. $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$

14. $(x - y)^3 = x^3 - y^3 - 3xy(x - y)$

15. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

0963CH03

अध्याय 3

निर्देशांक ज्यामिति

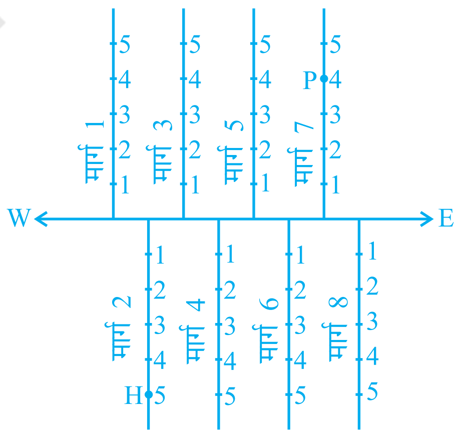
What's the good of Mercator's North Poles and Equators, Tropics, Zones and Meridian Lines? So the Bellman would cry; and crew would reply ' They are merely conventional signs!'

(मरकेटर के उत्तरी ध्रुवों और विषुवत वृत्तों, उष्ण कटिबंधों, मंडलों और यामोत्तर रेखाओं में क्या अच्छाई है? इसलिए बेलमैन ने शोर मचाया होगा और नाविक दल ने उत्तर दिया होगा, ''ये केवल परंपरागत चिह्न हैं''।)

LEWIS CARROLL, *The Hunting of the Snark*

3.1 भूमिका

आप यह पढ़ चुके हैं कि एक संख्या रेखा पर एक बिन्दु का स्थान निर्धारण किस प्रकार किया जाता है। आप यह भी पढ़ चुके हैं कि एक रेखा पर एक बिन्दु की स्थिति की व्याख्या किस प्रकार की जाती है। ऐसी अनेक स्थितियाँ हैं जिनमें एक बिन्दु ज्ञात करने के लिए हमें एक से अधिक रेखाओं के संदर्भ में उसकी स्थिति की व्याख्या करनी होती है। उदाहरण के लिए, निम्नलिखित स्थितियों पर विचार कीजिए:

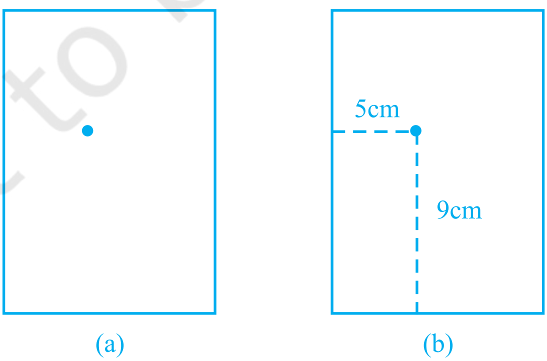


आकृति 3.1

I. आकृति 3.1 में एक मुख्य मार्ग है जो पूर्व से पश्चिम की ओर जाता है और इस पर कुछ सड़कें बनी हैं, इनकी सड़क (मार्ग) संख्याएँ पश्चिम से पूर्व की ओर दी गई हैं।

प्रत्येक सड़क (मार्ग) पर बने मकानों पर संख्याएँ अंकित कर दी गई हैं। आपको यहाँ अपनी सहेली के मकान का पता लगाना है। क्या इसके लिए केवल एक निर्देश-बिन्दु का ज्ञात होना पर्याप्त होगा? उदाहरण के लिए, यदि हमें केवल यह ज्ञात हो कि वह सड़क 2 पर रहती है तो क्या हम उसके घर का पता सरलता से लगा सकते हैं? उतनी सरलता से नहीं जितनी सरलता से तब जबकि हमें दो जानकारियाँ अर्थात् सड़क की वह संख्या जिस पर उसका मकान है और मकान की संख्या ज्ञात होने पर होती है। यदि आप उस मकान पर जाना चाहते हैं जो सड़क 2 पर स्थित है और जिसकी संख्या 5 है, तो सबसे पहले आपको यह पता लगाना होगा कि सड़क 2 कौन-सी है और तब उस मकान का पता लगाना होता है जिसकी संख्या 5 है। आकृति 3.1 में H इसी मकान का स्थान दर्शाता है। इसी प्रकार, P उस मकान को दर्शाता है जो सड़क संख्या 7 पर है और जिसकी संख्या 4 है।

II. मान लीजिए आप एक कागज की शीट पर एक बिन्दु लगा देते हैं [आकृति 3.2 (a)]। यदि हम आपसे कागज़ पर लगे बिन्दु की स्थिति के बारे में पूछें, तो आप इसे कैसे बताएँगे? संभवतः आप इस प्रश्न का उत्तर इस प्रकार दें : "बिन्दु कागज़ के आधे के ऊपरी भाग में स्थित है" या ''यह भी कह सकते हैं कि यह बिन्दु कागज़ की बायीं कोर के निकट स्थित है'' या ''यह बिन्दु कागज़ की बायीं ओर के ऊपरी कोने के काफी निकट स्थित है।" क्या ऊपर दिए गए कथनों में से किसी भी कथन के आधार पर आप बिन्दु की ठीक-ठीक स्थिति बता सकते हैं? स्पष्ट है कि उत्तर ''नहीं'' है। परन्तु, यदि आप यह कहें कि "बिन्दु कागज़ की बायीं कोर से लगभग 5 cm दूर है, तो इससे आपको बिन्दु की स्थिति का आभास तो हो जाता है फिर भी ठीक-ठाक स्थिति का पता नहीं चलता। थोड़ा बहुत सोच-विचार के बाद आप यह कह सकते हैं कि सबसे नीचे वाली रेखा से बिन्दु 9 cm की दूरी पर है। अब हम बिन्दु की स्थिति ठीक-ठाक बता सकते हैं।



आकृति 3.2

इसके लिए हम दो नियत रेखाओं अर्थात् कागज की बायीं कोर और कागज़ की सबसे नीचे वाली रेखा से बिन्दु की स्थिति नियत करते हैं [आकृति 3.2 (b)]। दूसरे शब्दों में, हम यह कह सकते हैं कि बिन्दु की स्थिति ज्ञात करने के लिए दो स्वतंत्र सूचनाओं का होना आवश्यक होता है।

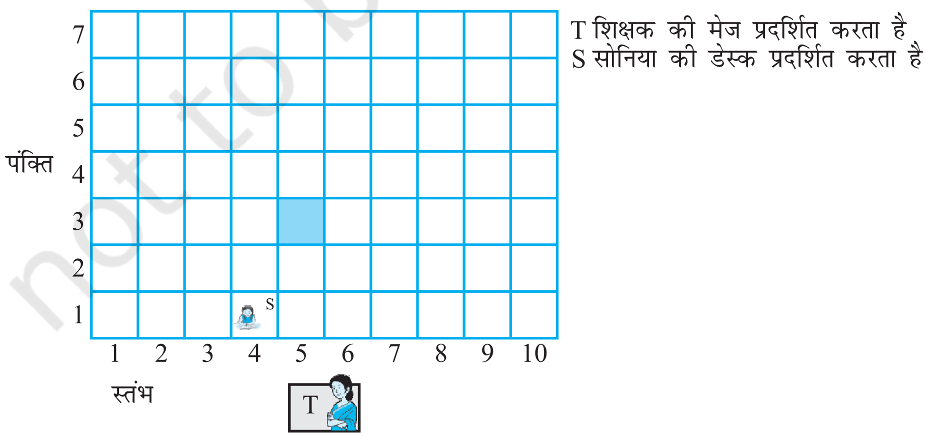
अब आप कक्षा में "बैठने की योजना" नामक निम्नलिखित क्रियाकलाप कीजिए:

क्रियाकलाप 1 (बैठने की योजना) : सभी मेज़ों को एक साथ खींचकर अपनी कक्षा में बैठने की एक योजना बनाइए। प्रत्येक मेज़ को एक वर्ग से निरूपित कीजिए। प्रत्येक वर्ग में उस विद्यार्थी का नाम लिखिए जिस पर वह बैठता है और जिसे वह वर्ग निरूपित करता है। कक्षा में प्रत्येक विद्यार्थी की स्थिति का ठीक-ठीक निर्धारण निम्नलिखित दो सूचनाओं की सहायता से किया जाता है।

(i) वह स्तंभ जिसमें वह बैठता / बैठती है।

(ii) वह पंक्ति जिसमें वह बैठता / बैठती है।

यदि आप उस मेज़ पर बैठते हैं जो 5वें स्तंभ और तीसरी पंक्ति में है, जिसे आकृति 3.3 में छायित वर्ग से दिखाया गया है, तो आपकी स्थिति को (5, 3) के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, जहाँ पहली संख्या स्तंभ संख्या को प्रकट करती है और दूसरी संख्या पंक्ति संख्या को प्रकट करती है। क्या यह वही है जो कि (3, 5) है? आप अपनी कक्षा के अन्य विद्यार्थियों के नाम और उनके बैठने की स्थितियाँ लिखें। उदाहरण के लिए, यदि सोनिया चौथे स्तंभ और पहली पंक्ति में बैठती है, तो उसके लिए S(4, 1) लिखिए। शिक्षक की मेज़ आपके बैठने की योजना के अंतर्गत नहीं आती है। यहाँ हम शिक्षक को केवल एक प्रेक्षक ही मानते हैं।



आकृति 3.3

ऊपर की चर्चा में आपने यह देखा है कि एक तल पर रखी हुई किसी वस्तु की स्थिति दो लंब रेखाओं की सहायता से निरूपित की जा सकती है। यदि वस्तु एक बिन्दु है, तो हमें सबसे नीचे वाली रेखा से और कागज की बायीं कोर से बिन्दु की दूरी ज्ञात होना आवश्यक होता है। ''बैठने की योजना'' के संबंध में हमें स्तंभ की संख्या और पंक्ति की संख्या का जानना आवश्यक होता है। इस सरल विचारधारा के दूरगामी परिणाम होते हैं और इससे गणित की **निर्देशांक ज्यामिति** (Coordinate Geometry) नामक एक अति महत्वपूर्ण शाखा की व्युत्पत्ति हुई। इस अध्याय में, हमारा लक्ष्य निर्देशांक ज्यामिति की कुछ आधारभूत संकल्पनाओं से आपको परिचित कराना है। इसके बारे में आप विस्तार से अध्ययन उच्च कक्षाओं में करेंगे। प्रारंभ में फ्रांसीसी दार्शनिक और गणितज्ञ **रेने दकार्ते** ने इस अध्ययन को विकसित किया था।

कुछ लोग प्रात:काल में बिस्तर पर लेटे रहना पसंद करते हैं। यही आदत सत्रहवीं शताब्दी के महान फ्रांसीसी गणितज्ञ **रेने दकार्ते** की थी। परन्तु वह आलसी व्यक्ति नहीं था, वह यह समझता था कि बिस्तर पर पड़े-पड़े ही अधिक चिंतन किया जा सकता है। एक दिन जबकि वह अपने बिस्तर पर लेटे-लेटे आराम कर रहा था, उसने एक तल में एक बिन्दु की स्थिति का निर्धारण करने से संबंधित समस्या का हल ढूँढ़ निकाला। जैसाकि आप देखेंगे उसकी विधि अक्षांश और देशांतर की पुरानी विचारधारा की ही एक विकसित रूप थी। एक तल की एक बिन्दु की स्थिति का निर्धारण करने में प्रयुक्त पद्धति को दकार्ते के सम्मान में **कार्तीय पद्धति** (**Cartesian System**) भी कहा जाता है।

रेने दकार्ते **(1596 -1650)**

आकृति 3.4

प्रश्नावली 3.1

1. एक अन्य व्यक्ति को आप अपने अध्ययन मेज पर रखे टेबल लैंप की स्थिति किस तरह बताएँगे?
2. **(सड़क योजना) :** एक नगर में दो मुख्य सड़कें हैं, जो नगर के केन्द्र पर मिलती हैं। ये दो सड़कें उत्तर-दक्षिण की दिशा और पूर्व-पश्चिम की दिशा में हैं। नगर की अन्य सभी सड़कें इन मुख्य सड़कों के समांतर परस्पर 200 मीटर की दूरी पर हैं। प्रत्येक दिशा में लगभग पाँच सड़कें हैं। 1 सेंटीमीटर = 200 मीटर का पैमाना लेकर अपनी नोट बुक में नगर का एक मॉडल बनाइए। सड़कों को एकल रेखाओं से निरूपित कीजिए।

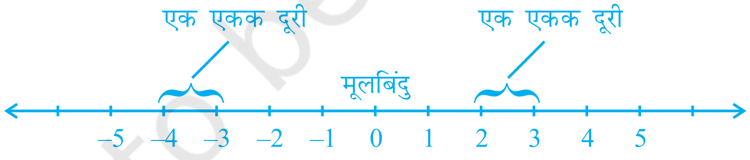
आपके मॉडल में एक-दूसरे को काटती हुई अनेक क्रॉस-स्ट्रीट (चौराहे) हो सकती हैं। एक विशेष क्रॉस-स्ट्रीट दो सड़कों से बनी है, जिनमें से एक उत्तर-दक्षिण दिशा में जाती है और दूसरी पूर्व-पश्चिम की दिशा में। प्रत्येक क्रॉस-स्ट्रीट का निर्देशन इस प्रकार किया जाता है: यदि दूसरी सड़क उत्तर-दक्षिण दिशा में जाती है और पाँचवीं सड़क पूर्व-पश्चिम दिशा में जाती है और ये एक क्रॉसिंग पर मिलती हैं, तब इसे हम क्रॉस-स्ट्रीट (2, 5) कहेंगे। इसी परंपरा से यह ज्ञात कीजिए कि

(i) कितनी क्रॉस-स्ट्रीटों को (4, 3) माना जा सकता है।

(ii) कितनी क्रॉस-स्ट्रीटों को (3, 4) माना जा सकता है।

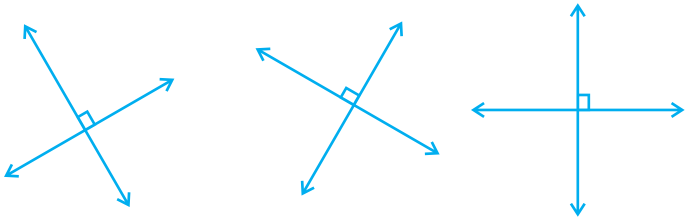
3.2 कार्तीय पद्धति

'संख्या पद्धति' के अध्याय में आप **संख्या रेखा** के बारे में पढ़ चुके हैं। संख्या रेखा पर एक नियत बिन्दु से दूरियों को बराबर एककों में एक दिशा में धनात्मक और दूसरी दिशा में ऋणात्मक अंकित किया जाता है। उस बिन्दु को, जहाँ से दूरियाँ अंकित की जाती हैं, **मूल-बिन्दु (origin)** कहा जाता है। एक रेखा पर समान दूरियों पर बिन्दुओं को अंकित करके, हम संख्या रेखा का प्रयोग संख्याओं को निरूपित करने के लिए करते हैं। यदि एक एकक दूरी संख्या '1' को निरूपित करती हो, तो 3 एकक दूरी संख्या '3' को निरूपित करेगी, जहाँ 'O' मूलबिन्दु है। मूलबिन्दु से धनात्मक दिशा में दूरी r पर स्थित बिन्दु संख्या r को निरूपित करती है। मूलबिन्दु से ऋणात्मक दिशा में दूरी r पर स्थित बिन्दु संख्या r को निरूपित करती है। संख्या रेखा पर विभिन्न संख्याओं के स्थान आकृति 3.5 में दिखाए गए हैं।



आकृति 3.5

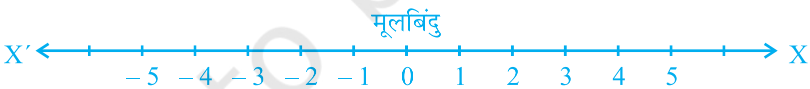
दकार्ते ने एक तल पर एक दूसरे पर लंब दो रेखाओं को खींचने और इन रेखाओं के सापेक्ष तल पर बिन्दुओं का स्थान निर्धारण करने का विचार प्रस्तुत किया। लंब रेखाएँ किसी भी दिशा में हो सकती हैं, जैसा कि आकृति 3.6 में दिखाया गया है। लेकिन जब हम इस *अध्याय में* एक तल में स्थित एक बिन्दु का स्थान निर्धारण करने के लिए दो रेखाएँ लेंगे, तो एक रेखा क्षैतिज होगी और दूसरी रेखा ऊर्ध्वाधर, जैसा कि आकृति 3.6 (c) में दिखाया गया है।



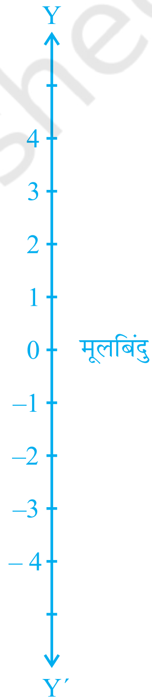
(a) (b) (c)

आकृति 3.6

वास्तव में ये रेखाएँ इस प्रकार प्राप्त की जाती हैं : दो संख्या रेखाएँ लीजिए और उन्हें X′X और Y′Y का नाम दे दीजिए। X′X को क्षैतिज रखिए [जैसा कि आकृति 3.7(a) में दिखाया गया है] और इस पर ठीक उसी प्रकार संख्याएँ लिखिए जैसा कि संख्या रेखा पर लिखी जाती हैं। ये ही सभी क्रियाएँ आप Y′Y के साथ कीजिए। अंतर केवल यही है कि Y′Y क्षैतिज नहीं है, अपितु ऊर्ध्वाधर है [देखिए आकृति 3.7 (b)]।



(a)



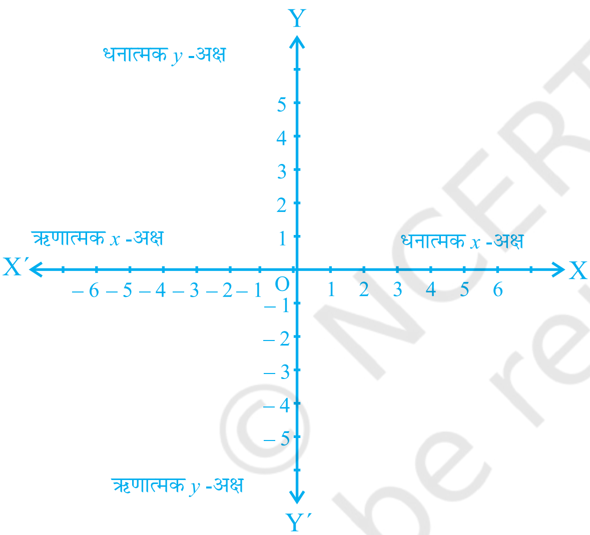
(b)

आकृति 3.7

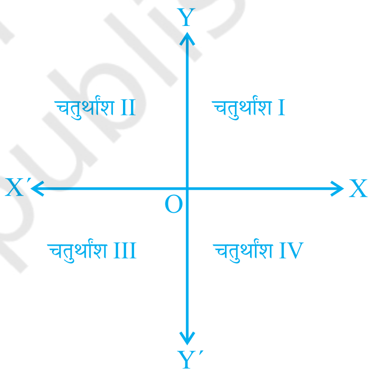
दोनों रेखाओं का संयोजन इस प्रकार कीजिए कि ये दो रेखाएँ एक-दूसरे को मूलबिन्दु पर काटती हों (आकृति 3.8)। क्षैतिज रेखा X′X को x - अक्ष कहा जाता है और ऊर्ध्वाधर रेखा Y′Y को y - अक्ष कहा जाता है। वह बिन्दु, जहाँ X′X और Y′Y एक-दूसरे को काटती हैं, उसे **मूलबिन्दु (origin)** कहा जाता है और इसे O से प्रकट किया जाता है। क्योंकि धनात्मक संख्याएँ OX और OY की दिशाओं में स्थित हैं, इसलिए OX और OY को क्रमशः

x-अक्ष और y-अक्ष की धनात्मक दिशाएँ कहा जाता है। इसी प्रकार, OX′ और OY′ को x-अक्ष और y-अक्ष की क्रमशः ऋणात्मक दिशाएँ कहा जाता है।

यहाँ आप यह देखते हैं कि ये दोनों अक्ष तल को चार भागों में विभाजित करती हैं। इन चार भागों को **चतुर्थांश (quadrants)** (एक-चौथाई) कहा जाता है। OX से वामावर्त दिशा में इन्हें I, II, III और IV चतुर्थांश कहा जाता है (देखिए आकृति 3.9)। इस प्रकार, इस तल में दोनों अक्ष और चारों चतुर्थांश सम्मिलित हैं। हम इस तल को *कार्तीय तल* (*Cartesian plane*) या *निर्देशांक तल* (*Coordinate plane*) या *xy-तल* (*xy-plane*) कहते हैं। अक्षों को *निर्देशांक अक्ष* (*coordinate axes*) कहा जाता है।

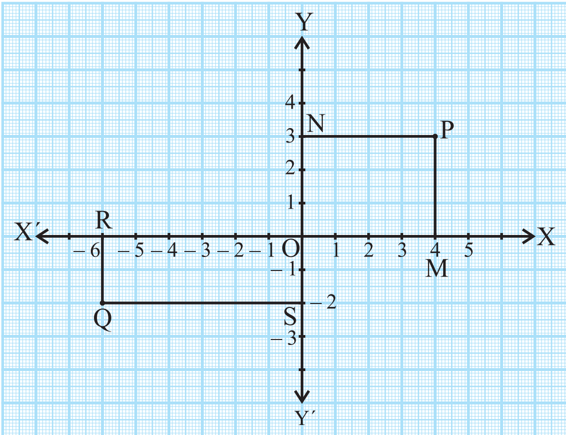


आकृति 3.8



आकृति 3.9

आइए अब हम यह देखें कि गणित में इस पद्धति का इतना महत्व क्यों है और यह किस प्रकार उपयोगी होती है। आगे दिया गया आरेख लीजिए, जहाँ अक्षों को आलेख कागज (graph paper) पर खींचा गया है। आइए हम अक्षों से बिन्दुओं P और Q की दूरियाँ ज्ञात करें। इसके लिए x-अक्ष पर लंब PM और y-अक्ष पर लंब PN डालिए। इसी प्रकार, हम लंब QR और QS डालते हैं, जैसा कि आकृति 3.10 में दिखाया गया है।



आकृति 3.10

आप पाते हैं कि

(i) y-अक्ष से बिन्दु P की लांबिक दूरी, जिसे x-अक्ष की धनात्मक दिशा में मापा गया है, PN = OM = 4 एकक है।

(ii) x-अक्ष से बिन्दु P की लांबिक दूरी, जिसे y-अक्ष की धनात्मक दिशा में मापा गया है, PM = ON = 3 एकक है।

(iii) y-अक्ष से बिन्दु Q की लांबिक दूरी, जिसे x-अक्ष की ऋणात्मक दिशा में मापा गया है, OR = SQ = 6 एकक है।

(iv) x-अक्ष से बिन्दु Q की लांबिक दूरी, जिसे y-अक्ष की ऋणात्मक दिशा में मापा गया है, OS = RQ = 2 एकक है।

इन दूरियों की सहायता से हम बिन्दुओं का निर्धारण किस प्रकार करें कि कोई भ्रम न रह जाए?

हम निम्नलिखित परंपराओं को ध्यान में रखकर एक बिन्दु के निर्देशांक लिखते हैं:

(i) एक बिन्दु का x - निर्देशांक (x-coordinate), y-अक्ष से इस बिन्दु की लांबिक दूरी है, जिसे x -अक्ष पर मापा जाता है (जो कि x-अक्ष की धनात्मक दिशा में धनात्मक और x-अक्ष की ऋणात्मक दिशा में ऋणात्मक होती है)। बिन्दु P के लिए यह + 4 है और Q के लिए यह – 6 है। x - निर्देशांक को **भुज (abscissa)** भी कहा जाता है।

(ii) एक बिन्दु का y-निर्देशांक, x-अक्ष से उसकी लांबिक दूरी होती है जिसे y-अक्ष पर मापा जाता है (जो y-अक्ष की धनात्मक दिशा में धनात्मक और y-अक्ष की ऋणात्मक दिशा में ऋणात्मक होती है)। बिन्दु P के लिए यह + 3 है और Q के लिए –2 है। y-निर्देशांक को **कोटि (ordinate)** भी कहा जाता है।

(iii) निर्देशांक तल में एक बिन्दु के निर्देशांक लिखते समय पहले x-निर्देशांक लिखते हैं और उसके बाद y-निर्देशांक लिखते हैं। हम निर्देशांकों को कोष्ठक के अंदर लिखते हैं।

अत: P के निर्देशांक (4, 3) हैं और Q के निर्देशांक (– 6, – 2) हैं।

ध्यान दीजिए कि तल में एक बिन्दु के निर्देशांक अद्वितीय होते हैं। इसके अनुसार निर्देशांक (3, 4) और निर्देशांक (4, 3) समान नहीं हैं।

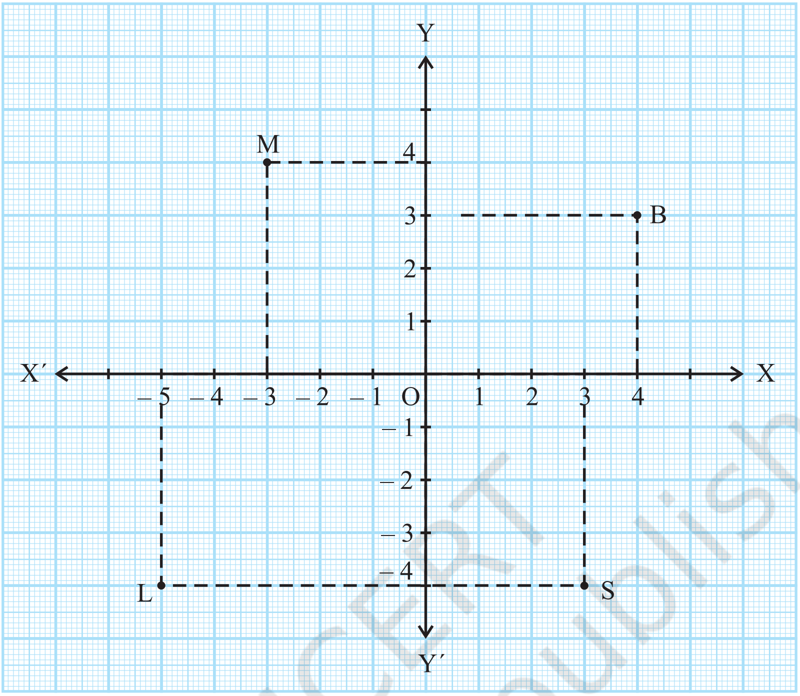
उदाहरण 1 : नीचे दी गई आकृति 3.11 को देखकर निम्नलिखित कथनों को पूरा कीजिए:

(i) बिन्दु B का भुज और कोटि क्रमश: _ _ _ _ और _ _ _ _ हैं। अत: B के निर्देशांक (_ _ _, _ _ _) हैं।

(ii) बिन्दु M के x-निर्देशांक और y-निर्देशांक क्रमश: _ _ _ और _ _ _ हैं। अत: M के निर्देशांक (_ _, _ _) हैं।

(iii) बिन्दु L के x-निर्देशांक और y-निर्देशांक क्रमश: _ _ _ और _ _ _ हैं। अत: L के निर्देशांक (_ _, _ _) हैं।

(iv) बिन्दु S के x-निर्देशांक और y-निर्देशांक क्रमश: _ _ _ और _ _ _ हैं। अत: S के निर्देशांक (_ _, _ _) हैं।



आकृति 3.11

हल : (i) क्योंकि y-अक्ष से बिन्दु B की दूरी 4 एकक है, इसलिए बिन्दु B का x-निर्देशांक या भुज 4 होगा। x-अक्ष से बिन्दु B की दूरी 3 एकक है, इसलिए बिन्दु B का y-निर्देशांक अर्थात् कोटि 3 होगी। अतः बिन्दु B के निर्देशांक (4, 3) हैं।

ऊपर (i) की भांतिः

(ii) बिन्दु M के x-निर्देशांक और y-निर्देशांक क्रमशः –3 और 4 हैं। अतः बिन्दु M के निर्देशांक (–3, 4) हैं।

(iii) बिन्दु L के x-निर्देशांक और y - निर्देशांक क्रमशः –5 और – 4 हैं। अतः बिन्दु L के निर्देशांक (–5, – 4) हैं।

(iv) बिन्दु S के x-निर्देशांक और y- निर्देशांक क्रमशः 3 और – 4 है। अतः बिन्दु S के निर्देशांक (3, – 4) हैं।

उदाहरण 2 : आकृति 3.12 में अक्षों पर अंकित बिन्दुओं के निर्देशांक लिखिए:

हल : आप यहाँ देख सकते हैं कि :

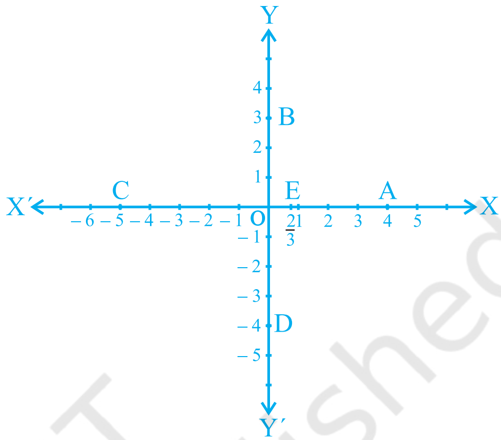
(i) बिन्दु A, y-अक्ष से + 4 एकक की दूरी पर है और x-अक्ष से दूरी 0 पर है। अत: बिन्दु A का x-निर्देशांक 4 है और y-निर्देशांक 0 है। इसलिए A के निर्देशांक (4, 0) हैं।

(ii) B के निर्देशांक (0, 3) हैं। क्यों?

(iii) C के निर्देशांक (– 5, 0) हैं। क्यों?

(iv) D के निर्देशांक (0, – 4) हैं। क्यों?

(v) E के निर्देशांक $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ हैं। क्यों?



आकृति 3.12

क्योंकि x-अक्ष का प्रत्येक बिन्दु x-अक्ष से शून्य दूरी पर है, इसलिए x-अक्ष पर स्थित प्रत्येक बिन्दु का y-निर्देशांक सदा ही शून्य होगा। इस तरह, x-अक्ष पर स्थित किसी भी बिन्दु के निर्देशांक $(x, 0)$ के रूप के होंगे, जहाँ y-अक्ष से बिन्दु की दूरी x है। इसी प्रकार, y-अक्ष पर स्थित किसी भी बिन्दु के निर्देशांक $(0, y)$ के रूप के होंगे, जहाँ x-अक्ष से बिन्दु की दूरी y है। क्यों?

मूलबिन्दु O के निर्देशांक क्या हैं? क्योंकि दोनों अक्षों से इसकी दूरी शून्य है, इसलिए इसके भुज और कोटि दोनों ही शून्य होंगे। अत: मूलबिन्दु के निर्देशांक **(0, 0)** होते हैं।

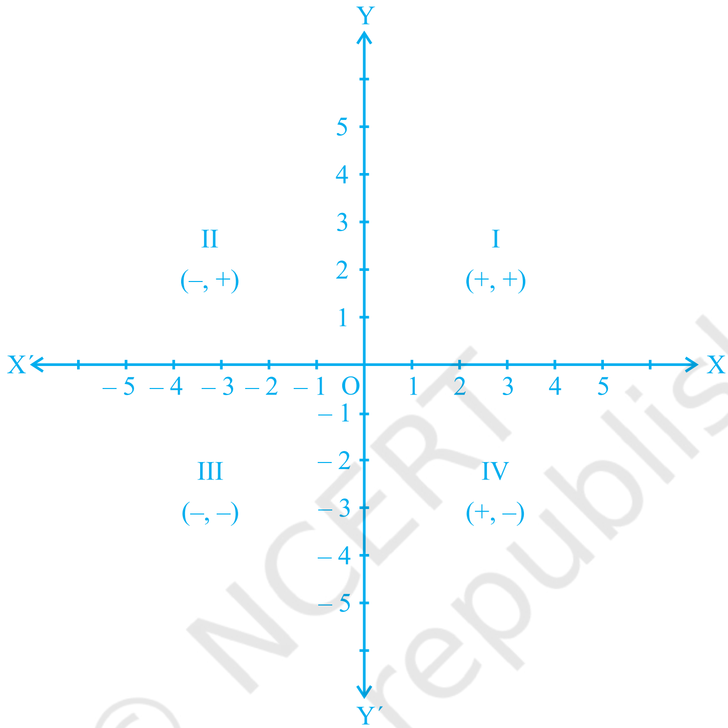
ऊपर के उदाहरणों में, आपने एक बिन्दु के निर्देशांकों में लगे चिह्नों और उस बिन्दु के चतुर्थांश, जिसमें वह स्थित है, के बीच के निम्नलिखित संबंधों की ओर अवश्य ध्यान दिया होगा:

(i) यदि बिन्दु पहले चतुर्थांश में है, तो बिन्दु (+, +) के रूप का होगा, क्योंकि पहला चतुर्थांश धनात्मक x-अक्ष और धनात्मक y-अक्ष से परिबद्ध है।

(ii) यदि बिन्दु दूसरे चतुर्थांश में है, तो बिन्दु (–, +) के रूप का होगा, क्योंकि दूसरा चतुर्थांश ऋणात्मक x-अक्ष और धनात्मक y-अक्ष से परिबद्ध है।

(iii) यदि बिन्दु तीसरे चतुर्थांश में है, तो बिन्दु (–, –) के रूप में होगा, क्योंकि तीसरा चतुर्थांश ऋणात्मक x-अक्ष और ऋणात्मक y-अक्ष से परिबद्ध है।

(iv) यदि बिन्दु चौथे चतुर्थांश में है, तो बिन्दु (+, –) के रूप में होगा, क्योंकि चौथा चतुर्थांश धनात्मक x-अक्ष और ऋणात्मक y-अक्ष से परिबद्ध है (देखिए आकृति 3.13)।



आकृति 3.13

टिप्पणी : एक तल में स्थित एक बिन्दु की व्याख्या करने के संबंध में ऊपर हमने जिस पद्धति के बारे में चर्चा की है, वह केवल एक परंपरा है जिसको पूरे विश्व में स्वीकार किया जाता है। उदाहरण के लिए, पद्धति में ऐसा भी हो सकता है कि पहले कोटि लिखी जाए और उसके बाद भुज लिखा जाए। फिर भी, जिस पद्धति का उल्लेख हमने किया है उसे पूरा विश्व बिना किसी भ्रम के स्वीकार करता है।

प्रश्नावली 3.2

1. निम्नलिखित प्रश्नों में से प्रत्येक प्रश्न का उत्तर दीजिए:

(i) कार्तीय तल में किसी बिन्दु की स्थिति निर्धारित करने वाली क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर रेखाओं के क्या नाम हैं?

(ii) इन दो रेखाओं से बने तल के प्रत्येक भाग के नाम बताइए।

(iii) उस बिन्दु का नाम बताइए जहाँ ये दो रेखाएँ प्रतिच्छेदित होती हैं।

2. आकृति 3.14 देखकर निम्नलिखित को लिखिए:

(i) B के निर्देशांक

(ii) C के निर्देशांक

(iii) निर्देशांक (–3, –5) द्वारा पहचाना गया बिन्दु

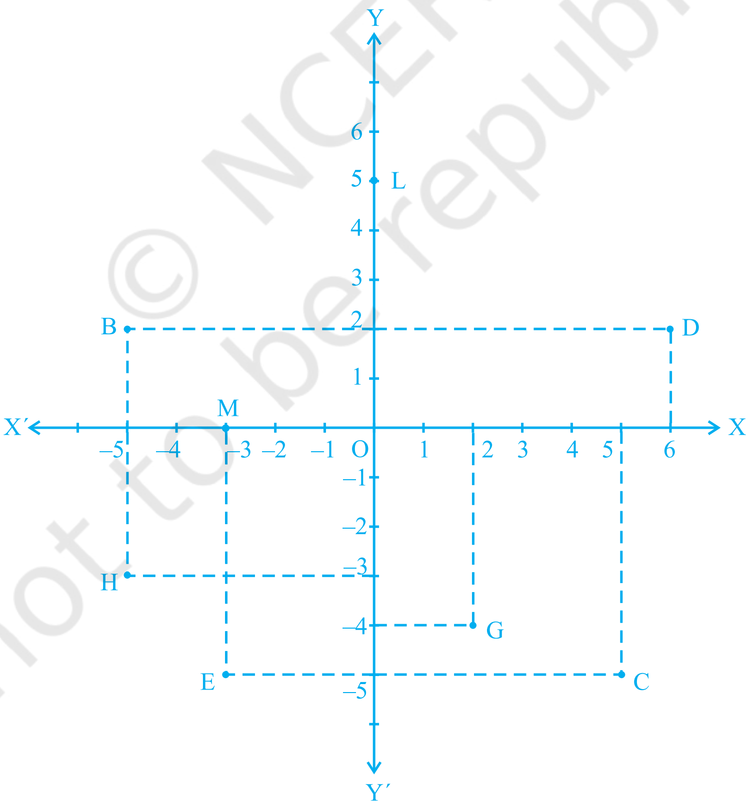
(iv) निर्देशांक (2, – 4) द्वारा पहचाना गया बिन्दु

(v) D का भुज

(vi) बिन्दु H की कोटि

(vii) बिन्दु L के निर्देशांक

(viii) बिन्दु M के निर्देशांक

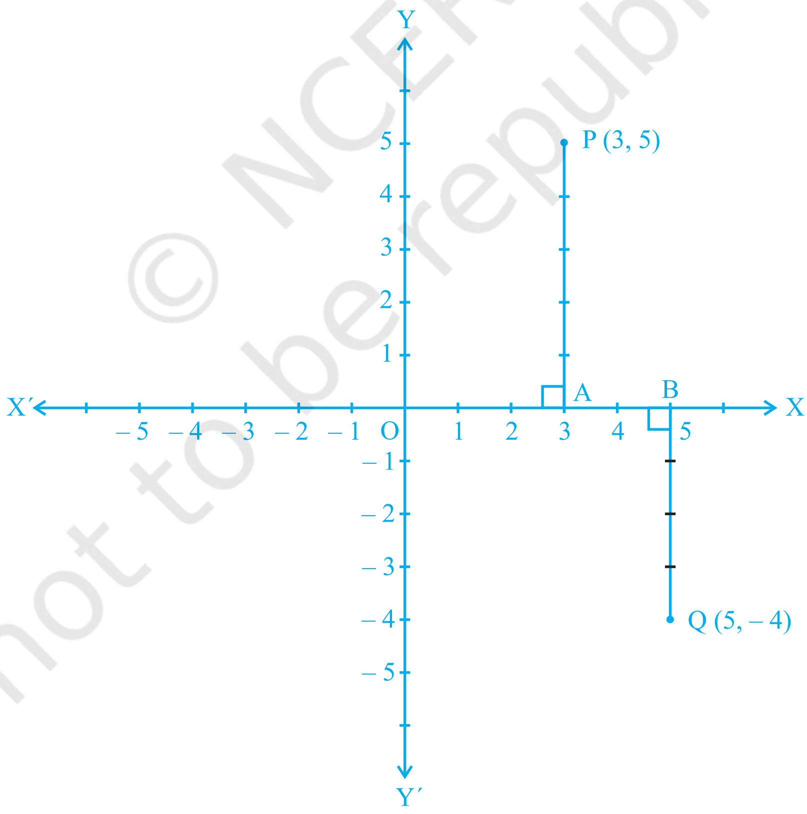


आकृति 3.14

3.3 तल में एक बिन्दु आलेखित करना जबकि इसके निर्देशांक दिए हुए हों

अभी तक हमने आपके लिए बिन्दु खींचे हैं और आपसे उनके निर्देशांक बताने के लिए कहा है। अब हम आपको यह दर्शाएँगे कि तल में इन बिन्दुओं को किस प्रकार अंकित करते हैं जबकि इनके निर्देशांक हमें ज्ञात हों। इस प्रक्रम को हम "बिन्दु का आलेखन" (plotting the point) कहते हैं।

मान लीजिए एक बिन्दु के निर्देशांक (3, 5) हैं। हम इस बिन्दु को निर्देशांक तल में आलेखित करना चाहते हैं। हम निर्देशांक अक्ष खींचते हैं और अपने एककों का चयन इस प्रकार करते हैं कि दोनों अक्षों पर एक सेंटीमीटर एक एकक को निरूपित करता हो। बिन्दु (3, 5) के निर्देशांक से हमें यह पता चलता है कि धनात्मक x-अक्ष पर इस बिन्दु की y-अक्ष से दूरी 3 एकक है और धनात्मक y-अक्ष पर इस बिन्दु की x-अक्ष से दूरी 5 एकक है। मूलबिन्दु O से प्रारंभ करके हम धनात्मक x-अक्ष पर 3 एकक की गिनती करते हैं और संगत बिन्दु को A के रूप में अंकित करते हैं। अब A से प्रारंभ करके हम y-अक्ष

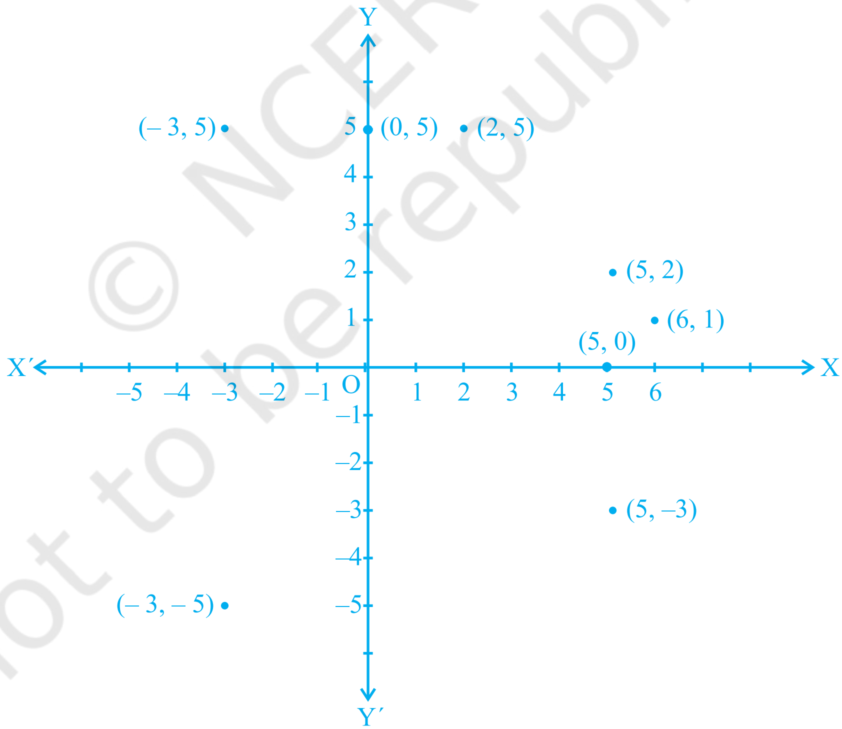


आकृति 3.15

की धनात्मक दिशा में चलते हैं और 5 एकक की गिनती करते हैं तथा संगत बिन्दु को P के रूप में अंकित करते हैं (देखिए आकृति 3.15)। आप यहाँ यह देखते हैं कि y-अक्ष से P की दूरी 3 एकक है और x - अक्ष से 5 एकक है। अत: P विचाराधीन बिन्दु की स्थिति है। ध्यान दीजिए कि P पहले चतुर्थांश में स्थित है, क्योंकि P के दोनों निर्देशांक धनात्मक हैं। इसी प्रकार आप निर्देशांक तल में बिन्दु Q (5, – 4) आलेखित कर सकते हैं। ऋणात्मक y-अक्ष के अनुदिश x-अक्ष से Q की दूरी 4 एकक है जिससे कि इसका y-निर्देशांक – 4 है (देखिए आकृति 3.15)। बिन्दु Q चौथे चतुर्थांश में स्थित है। क्यों?

उदाहरण 3 : कार्तीय तल में बिन्दुओं (5, 0), (0, 5), (2, 5), (5, 2), (–3, 5), (–3, –5), (5, –3) और (6, 1) का स्थान निर्धारण कीजिए।

हल : 1cm = 1 एकक लेकर हम x-अक्ष और y-अक्ष खींचते हैं। बिन्दुओं की स्थितियों को आकृति 3.16 में गहरे बिन्दुओं से दिखाया गया है।



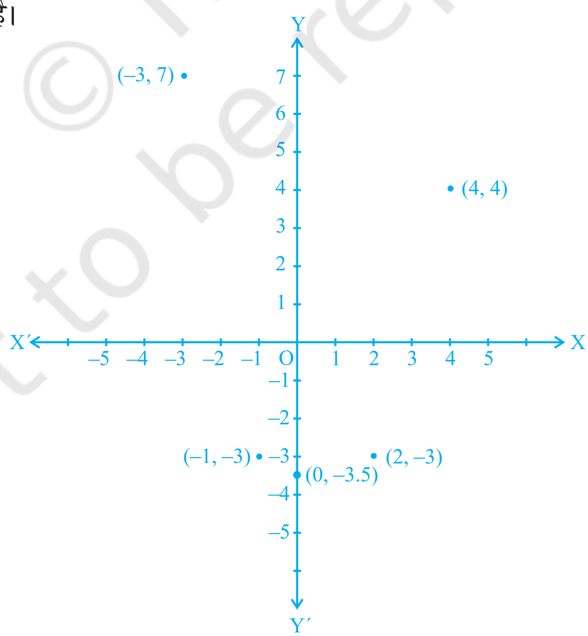
आकृति 3.16

नोट : ऊपर दिए गए उदाहरण में हम यह देखते हैं कि (5, 0) और (0, 5) समान नहीं हैं। इसी प्रकार, (5, 2) और (2, 5) अलग-अलग स्थितियाँ हैं और (–3, 5) और (5, –3) भिन्न-भिन्न स्थितियाँ हैं। इसी प्रकार के अनेक उदाहरण लेने पर आप यह देखेंगे कि यदि $x \neq y$ हो, तो कार्तीय तल में (x, y) की स्थिति (y, x) की स्थिति से भिन्न होती है। अत: यदि हम निर्देशांकों x और y में अदला-बदली करें, तो (y, x) की स्थिति (x, y) की स्थिति से भिन्न हो जाएगी। इससे यह अर्थ निकलता है कि (x, y) में x और y के क्रम का काफी महत्व होता है। अत: (x, y) को क्रमित युग्म (ordered pair) कहा जाता है। क्रमित युग्म $(x, y) \neq$ क्रमित युग्म (y, x), यदि $x \neq y$ है और $(x, y) = (y, x)$, यदि $x = y$ है।

उदाहरण 4 : निम्नलिखित संख्या-युग्मों को कार्तीय तल के बिन्दुओं के रूप में आलेखित कीजिए। अक्षों पर पैमाना 1 सेंटीमीटर = 1 एकक लीजिए।

x	– 3	0	– 1	4	2
y	7	–3.5	– 3	4	– 3

हल : सारणी में दिए गए संख्या-युग्मों को बिन्दुओं (– 3, 7), (0, –3.5), (– 1, – 3), (4, 4) और (2, – 3) से निरूपित किया जा सकता है। बिन्दुओं के स्थानों को आकृति 3.17 में गहरे बिन्दुओं से दिखाया गया है।



आकृति 3.17

क्रियाकलाप 2 : दो *व्यक्तियों का एक खेल*। (आवश्यक वस्तुएँ – दो काउंटर या सिक्के, ग्राफ पेपर, अलग-अलग रंगों के दो पासे, मान लीजिए लाल और हरे रंग के दो पासे)।

प्रत्येक काउंटर को (0, 0) पर रखिए। प्रत्येक खिलाड़ी एक साथ दो पासे फेंकती हैं। जब पहली खिलाड़ी ऐसा करती है, तो मान लीजिए लाल पासे पर 3 आता है और हरे पासे पर 1 आता है। अतः वह अपना काउंटर (3, 1) की ओर ले जाती है। इसी प्रकार, यदि दूसरी खिलाड़ी लाल पर 2 और हरे पर 4 फेंकती है, तो वह अपना काउंटर (2, 4) की ओर ले जाती है। दूसरी बार फेंकने पर यदि पहली खिलाड़ी लाल पर 1 और हरे पर 4 फेंकती है, तो वह अपना काउंटर (3, 1) से (3 + 1, 1 + 4) की ओर ले जाती है। अर्थात् (3, 1) के x-निर्देशांक में 1 जोड़ देती है और y-निर्देशांक में 4 जोड़ देती है।

इस खेल का उद्देश्य सीमा लाँघे बिना पहले (10, 10) पर पहुँचना है, अर्थात् न तो भुज और न ही कोटि 10 से अधिक हो सकती है। ध्यान रहे कि एक काउंटर की स्थिति दूसरे काउंटर की स्थिति के साथ संपाती नहीं होनी चाहिए। उदाहरण के लिए, यदि पहली खिलाड़ी का काउंटर उस बिन्दु की ओर गतिमान होता है जहाँ पहले से ही दूसरी खिलाड़ी का काउंटर स्थित है, तो दूसरी खिलाड़ी का काउंटर (0, 0) पर आ जाएगा। यदि सीमा लाँघे बिना चाल चलना संभव नहीं है, तो खिलाड़ी से वह बारी छूट जाती है। इस खेल को अधिक संख्या में अपनी सहेलियों को लेकर आप खेल सकती हैं।

टिप्पणी : कार्तीय तल में बिन्दुओं के आलेखन की तुलना कुछ सीमा तक समय-दूरी ग्राफ, भुजा-परिमाप ग्राफ, आदि जिनका अध्ययन आप पिछली कक्षाओं में कर चुके हैं, जैसी विभिन्न स्थितियों से की जा सकती है। ऐसी स्थिति में, x-अक्ष और y-अक्ष के स्थान पर अक्षों को t-अक्ष, d-अक्ष, s-अक्ष या p-अक्ष आदि कह सकते हैं।

प्रश्नावली 3.3

1. किस चतुर्थांश में या किस अक्ष पर बिन्दु (– 2, 4), (3, – 1), (– 1, 0), (1, 2) और (– 3, – 5) स्थित हैं? कार्तीय तल पर इनका स्थान निर्धारण करके अपने उत्तर सत्यापित कीजिए।

2. अक्षों पर दूरी का उपयुक्त एकक लेकर नीचे सारणी में दिए गए बिन्दुओं को तल पर आलेखित कीजिए:

x	– 2	–1	0	1	3
y	8	7	– 1.25	3	– 1

3.4 सारांश

इस अध्याय में, आपने निम्नलिखित बिन्दुओं का अध्ययन किया है:

1. एक तल में एक वस्तु या एक बिन्दु का स्थान निर्धारण करने के लिए दो लांबिक रेखाओं की आवश्यकता होती है जिसमें एक क्षैतिज होती है और दूसरी ऊर्ध्वाधर होती है।

2. तल को कार्तीय या निर्देशांक तल कहा जाता है और रेखाओं को निर्देशांक अक्ष कहा जाता है।

3. क्षैतिज रेखा को x-अक्ष और ऊर्ध्वाधर रेखा को y-अक्ष कहा जाता है।

4. निर्देशांक अक्ष तल को चार भागों में बाँट देते हैं, जिन्हें चतुर्थांश कहा जाता है।

5. अक्षों के प्रतिच्छेद बिन्दु को मूलबिन्दु कहा जाता है।

6. y-अक्ष से किसी बिन्दु की दूरी को उसका x-निर्देशांक या भुज कहा जाता है। साथ ही, x-अक्ष से बिन्दु की दूरी को y-निर्देशांक या कोटि कहा जाता है।

7. यदि एक बिन्दु का भुज x हो और कोटि y हो, तो (x, y) को बिन्दु के निर्देशांक कहा जाता है।

8. x-अक्ष पर एक बिन्दु के निर्देशांक $(x, 0)$ के रूप के होते हैं और y-अक्ष पर बिन्दु के निर्देशांक $(0, y)$ के रूप के होते हैं।

9. मूलबिन्दु के निर्देशांक $(0, 0)$ होते हैं।

10. एक बिन्दु के निर्देशांक पहले चतुर्थांश में $(+, +)$ के रूप के दूसरे चतुर्थांश में $(-, +)$ के रूप के, तीसरे चतुर्थांश में $(-, -)$ के रूप के और चौथे चतुर्थांश में $(+, -)$ के रूप के होते हैं, जहाँ $+$ एक धनात्मक वास्तविक संख्या को और $-$ एक ऋणात्मक वास्तविक संख्या को प्रकट करते हैं।

11. यदि $x \neq y$ हो, तो $(x, y) \neq (y, x)$ होगा और यदि $x = y$ हो, तो $(x, y) = (y, x)$ होगा।

0963CH04

अध्याय 4

दो चरों वाले रैखिक समीकरण

The principal use of the Analytic Art is to bring Mathematical Problems to Equations and to exhibit those Equations in the most simple terms that can be.

(वैश्लेषिक कला का मुख्य प्रयोग गणितीय समस्याओं को समीकरण में लाना है और इन समीकरणों को यथासंभव सरल पदों में प्रस्तुत करना है)।

—***Edmund Halley***

4.1 भूमिका

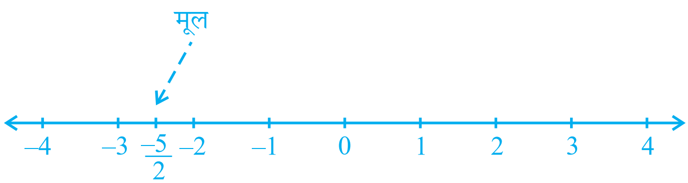
पिछली कक्षाओं में, आप एक चर वाले रैखिक समीकरणों का अध्ययन कर चुके हैं। क्या आप एक चर वाला कोई रैखिक समीकरण लिख सकते हैं? आप कह सकते हैं कि $x + 1 = 0, x + \sqrt{2} = 0$ और $\sqrt{2}\,y + \sqrt{3} = 0$ एक चर वाले रैखिक समीकरणों के उदाहरण हैं। आप यह भी जानते हैं कि ऐसे समीकरणों का एक अद्वितीय (अर्थात् एक और केवल एक) हल होता है। आपको संभवत: यह भी याद होगा कि एक संख्या रेखा पर हल को किस प्रकार निरूपित किया जाता है। इस अध्याय में, हम एक चर वाले रैखिक समीकरणों पर पुन: विचार करेंगे और उनसे संबंधित ज्ञान को दो चरों वाले रैखिक समीकरणों पर लागू करेंगे। यहाँ हम इस प्रकार के प्रश्नों पर विचार करेंगे: क्या दो चरों वाले रैखिक समीकरण का एक हल होता है? यदि हाँ, तो क्या यह अद्वितीय होता है? कार्तीय तल पर हल किस प्रकार दिखाई पड़ता है? इस प्रकार के प्रश्नों का अध्ययन करने के लिए, हम अध्याय 3 में बताई गई संकल्पनाओं का भी प्रयोग करेंगे।

4.2 रैखिक समीकरण

आइए पहले हम यह देखें कि अभी तक आपने क्या-क्या अध्ययन किया है। आइए हम निम्नलिखित समीकरण लें :

$$2x + 5 = 0$$

इसका हल, अर्थात् समीकरण का मूल $-\frac{5}{2}$ है। इसे संख्या रेखा पर इस प्रकार निरूपित किया जा सकता है, जैसा कि नीचे की आकृति में दिखाया गया है :



आकृति 4.1

एक समीकरण को हल करते समय निम्नलिखित बातों को ध्यान में रखना होता है।

एक रैखिक समीकरण पर तब कोई प्रभाव नहीं पड़ता जबकि:

(i) समीकरण के दोनों पक्षों में समान संख्या जोड़ी या घटाई जाती है।

(ii) समीकरण के दोनों पक्षों को समान शून्येतर संख्या से गुणा या भाग दिया जाता है।

आइए अब हम निम्नलिखित स्थिति पर विचार करें:

नागपुर में भारत और श्रीलंका के बीच खेले गए एक एकदिवसीय अंतर्राष्ट्रीय क्रिकेट मैच में दो भारतीय बल्लेबाजों ने एक साथ मिलकर 176 रन बनाए। इस जानकारी को एक समीकरण के रूप में व्यक्त कीजिए।

यहाँ आप यह देख सकते हैं कि दोनों बल्लेबाजों में से किसी भी बल्लेबाज द्वारा बनाए गए रन ज्ञात नहीं हैं, अर्थात् यहाँ दो अज्ञात राशियाँ हैं। आइए हम इन अज्ञात राशियों को x और y से प्रकट करें। इस तरह एक बल्लेबाज द्वारा बनाए गए रनों की संख्या x है और दूसरे बल्लेबाज द्वारा बनाए गए रनों की संख्या y है। हम जानते हैं कि

$$x + y = 176$$

है, जो कि अभीष्ट समीकरण है।

यह दो चरों वाले एक रैखिक समीकरण का एक उदाहरण है। यह परंपरा रही है कि इस प्रकार के समीकरणों के चरों को x और y से प्रकट किया जाता है, परंतु अन्य अक्षरों का भी प्रयोग किया जा सकता है। दो चरों वाले रैखिक समीकरणों के कुछ उदाहरण ये हैं:

$$1.2s + 3t = 5,\ p + 4q = 7,\ \pi u + 5v = 9 \text{ और } 3 = \sqrt{2}\,x - 7y$$

क्या आप कुछ और उदाहरण दे सकते हैं? ध्यान दीजिए कि आप इन समीकरणों को क्रमशः $1.2s + 3t - 5 = 0$, $p + 4q - 7 = 0$, $\pi u + 5v - 9 = 0$ और $\sqrt{2}\,x - 7y - 3 = 0$ के रूप में व्यक्त कर सकते हैं।

अतः उस समीकरण को, जिसे $ax + by + c = 0$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता हो, जहाँ a, b और c वास्तविक संख्याएँ हैं और a और b दोनों शून्य नहीं हैं, *दो चरों वाला रैखिक समीकरण* (*linear equation in two variables*) कहा जाता है।

उदाहरण 1 : नीचे दिए गए समीकरणों को $ax + by + c = 0$ के रूप में लिखिए और प्रत्येक स्थिति में a, b और c के मान बताइए :

(i) $2x + 3y = 4.37$ (ii) $x - 4 = \sqrt{3}\,y$ (iii) $4 = 5x - 3y$ (iv) $2x = y$

हल : (i) $2x + 3y = 4.37$ को $2x + 3y - 4.37 = 0$ के रूप में लिखा जा सकता है। यहाँ $a = 2$, $b = 3$ और $c = -4.37$ है।

(ii) समीकरण $x - 4 = \sqrt{3}\,y$ को $x - \sqrt{3}\,y - 4 = 0$ के रूप में लिखा जा सकता है। यहाँ $a = 1$, $b = -\sqrt{3}$ और $c = -4$ है।

(iii) समीकरण $4 = 5x - 3y$ को $5x - 3y - 4 = 0$ के रूप में लिखा जा सकता है। यहाँ $a = 5$, $b = -3$ और $c = -4$ है। क्या आप इस बात से सहमत हैं कि इसे $-5x + 3y + 4 = 0$ के रूप में भी लिखा जा सकता है? इस स्थिति में, $a = -5$, $b = 3$ और $c = 4$ है।

(iv) समीकरण $2x = y$ को $2x - y + 0 = 0$ के रूप में लिखा जा सकता है। यहाँ $a = 2$, $b = -1$ और $c = 0$ है।

समीकरण $ax + b = 0$ भी दो चरों वाले रैखिक समीकरणों का ही एक उदाहरण है, क्योंकि इसे $ax + 0.y + b = 0$ के रूप में लिखा जा सकता है।

उदाहरण के लिए, $4 - 3x = 0$ को $-3x + 0.y + 4 = 0$ के रूप में लिखा जा सकता है।

उदाहरण 2 : निम्नलिखित में से प्रत्येक को दो चरों वाले समीकरणों के रूप में व्यक्त कीजिए:

(i) $x = -5$ (ii) $y = 2$ (iii) $2x = 3$ (iv) $5y = 2$

हल : (i) $x = -5$ को $1.x + 0.y = -5$, या $1.x + 0.y + 5 = 0$ के रूप में लिखा जा सकता है।

(ii) $y = 2$ को $0.x + 1.y = 2$, या $0.x + 1.y - 2 = 0$ के रूप में लिखा जा सकता है।

(iii) $2x = 3$ को $2.x + 0.y - 3 = 0$ के रूप में लिखा जा सकता है।

(iv) $5y = 2$ को $0.x + 5.y - 2 = 0$ के रूप में लिखा जा सकता है।

प्रश्नावली 4.1

1. एक नोटबुक की कीमत एक कलम की कीमत से दो गुनी है। इस कथन को निरूपित करने के लिए दो चरों वाला एक रैखिक समीकरण लिखिए।

(संकेत : मान लीजिए, नोटबुक की कीमत x रु है और कलम की कीमत y रु है)।

2. निम्नलिखित रैखिक समीकरणों को $ax + by + c = 0$ के रूप में व्यक्त कीजिए और प्रत्येक स्थिति में a, b और c के मान बताइए:

(i) $2x + 3y = 9.3\overline{5}$ (ii) $x - \frac{y}{5} - 10 = 0$ (iii) $-2x + 3y = 6$ (iv) $x = 3y$

(v) $2x = -5y$ (vi) $3x + 2 = 0$ (vii) $y - 2 = 0$ (viii) $5 = 2x$

4.3 रैखिक समीकरण का हल

आपने देखा है कि एक चर वाले प्रत्येक रैखिक समीकरण का एक अद्वितीय हल होता है। दो चरों वाले रैखिक समीकरण के हल के बारे में आप क्या कह सकते हैं? क्योंकि समीकरण में दो चर हैं, इसलिए हल का अर्थ होता है x तथा y के उन मानों का युग्म जो दिए हुए समीकरण को संतुष्ट करते हैं। आइए, हम समीकरण $2x + 3y = 12$ लें। यहाँ $x = 3$ और $y = 2$ एक हल है, क्योंकि जब हम ऊपर के समीकरण में $x = 3$ और $y = 2$ प्रतिस्थापित करते हैं तब हमें यह प्राप्त होता है:

$$2x + 3y = (2 \times 3) + (3 \times 2) = 12$$

इस हल को एक क्रमित युग्म $(3, 2)$ के रूप में लिखा जाता है, जिसमें पहले x का और उसके बाद y का मान लिखा जाता है। इसी प्रकार, $(0, 4)$ भी ऊपर दिए गए समीकरण का एक हल है।

इसके विपरीत, $(1, 4)$ ऊपर दिए गए समीकरण का एक हल नहीं है, क्योंकि $x = 1$ और $y = 4$ प्रतिस्थापित करने पर हमें $2x + 3y = 14$ प्राप्त होता है जो 12 नहीं है। ध्यान दीजिए कि $(0, 4)$ तो एक हल है परंतु $(4, 0)$ एक हल नहीं है। इस तरह आपने $2x + 3y = 12$ के कम से कम दो हल $(3, 2)$ और $(0, 4)$ प्राप्त कर लिए हैं।

क्या आप कोई अन्य हल प्राप्त कर सकते हैं? क्या आप इस बात से सहमत हैं कि $(6, 0)$ एक अन्य हल है? यदि हाँ, तो आप इसे सत्यापित कीजिए। वस्तुत: निम्न विधि से हम कई हल प्राप्त कर सकते हैं:

आप $2x + 3y = 12$ में अपनी इच्छानुसार x का एक मान (मान लीजिए $x = 2$) ले सकते हैं। तब समीकरण $4 + 3y = 12$ हो जाता है, जो कि एक चर वाला रैखिक समीकरण

है। इसे हल करने पर हमें $y = \frac{8}{3}$ प्राप्त होता है। अत: $\left(2, \frac{8}{3}\right)$, $2x + 3y = 12$ का एक अन्य हल है। इसी प्रकार, $x = -5$ लेने पर हम पाते हैं कि समीकरण $-10 + 3y = 12$ हो जाता है। इससे $y = \frac{22}{3}$ प्राप्त होता है। अत: $\left(-5, \frac{22}{3}\right)$, $2x + 3y = 12$ का एक अन्य हल है। इसलिए दो चरों वाले रैखिक समीकरण के विभिन्न हलों का कोई अंत नहीं है। कहने का अर्थ है कि *दो चरों वाले रैखिक समीकरण के अपरिमित रूप से अनेक हल होते हैं।*

उदाहरण 3 : समीकरण $x + 2y = 6$ के चार अलग-अलग हल ज्ञात कीजिए।

हल : देखने पर $x = 2, y = 2$ एक हल है, क्योंकि $x = 2, y = 2$ पर

$$x + 2y = 2 + 4 = 6$$

है। आइए, अब हम $x = 0$ लें। x के इस मान पर दिया हुआ समीकरण $2y = 6$ हो जाता है, जिसका कि एक अद्वितीय हल $y = 3$ होता है। अत: $x = 0, y = 3$ भी $x + 2y = 6$ का एक हल है। इसी प्रकार, $y = 0$ लेने पर दिया हुआ समीकरण $x = 6$ हो जाता है। अत: $x = 6, y = 0$ भी $x + 2y = 6$ का एक हल है। अंत में, आइए हम $y = 1$ लें। अब दिया हुआ समीकरण $x + 2 = 6$ हो जाता है, जिसका हल $x = 4$ है। इसलिए, $(4, 1)$ भी दिए हुए समीकरण का एक हल है। अत:, दिए हुए समीकरण के अपरिमित रूप से अनेक हलों में चार हल ये हैं:

$$(2, 2), (0, 3), (6, 0) \text{ और } (4, 1)$$

टिप्पणी : ध्यान दीजिए कि एक हल प्राप्त करने की सरल विधि $x = 0$ लेना है और y का संगत मान प्राप्त करना है। इसी प्रकार, हम $y = 0$ ले सकते हैं और तब x का संगत मान प्राप्त कर लेते हैं।

उदाहरण 4 : निम्नलिखित समीकरणों में से प्रत्येक समीकरण के दो हल ज्ञात कीजिए:

(i) $4x + 3y = 12$

(ii) $2x + 5y = 0$

(iii) $3y + 4 = 0$

हल : (i) $x = 0$ लेने पर, हमें $3y = 12$, अर्थात् $y = 4$ प्राप्त होता है। अत: $(0, 4)$ भी दिए हुए समीकरण का एक हल है। इसी प्रकार, $y = 0$ लेने पर हमें $x = 3$ प्राप्त होता है। इस तरह, $(3, 0)$ भी एक हल है।

(ii) $x = 0$ लेने पर, हमें $5y = 0$, अर्थात् $y = 0$ प्राप्त होता है। इसलिए $(0, 0)$ दिए हुए समीकरण का एक हल है।

अब, यदि हम $y = 0$ लें, तो हमें एक हल के रूप में पुनः (0, 0) प्राप्त होता है; जो कि वही है जिसे हमने पहले प्राप्त किया था। एक अन्य हल प्राप्त करने के लिए $x = 1$ लीजिए। तब आप देख सकते हैं कि y का संगत मान $-\frac{2}{5}$ है। अतः $\left(1, -\frac{2}{5}\right)$, $2x + 5y = 0$ का एक अन्य हल है।

(iii) समीकरण $3y + 4 = 0$ को $0.x + 3y + 4 = 0$ के रूप में लिखने पर, x के किसी भी मान पर हमें $y = -\frac{4}{3}$ प्राप्त होगा। अतः हमें दो हल $0, -\frac{4}{3}$ और $1, -\frac{4}{3}$ प्राप्त हो सकते हैं।

प्रश्नावली 4.2

1. निम्नलिखित विकल्पों में कौन-सा विकल्प सत्य है, और क्यों?

$y = 3x + 5$ का

(i) एक अद्वितीय हल है (ii) केवल दो हल हैं (iii) अपरिमित रूप से अनेक हल हैं

2. निम्नलिखित समीकरणों में से प्रत्येक समीकरण के चार हल लिखिए:

(i) $2x + y = 7$ (ii) $\pi x + y = 9$ (iii) $x = 4y$

3. बताइए कि निम्नलिखित हलों में कौन-कौन समीकरण $x - 2y = 4$ के हल हैं और कौन-कौन हल नहीं हैं :

(i) $(0, 2)$ (ii) $(2, 0)$ (iii) $(4, 0)$ (iv) $(\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$ (v) $(1, 1)$

4. k का मान ज्ञात कीजिए जबकि $x = 2, y = 1$ समीकरण $2x + 3y = k$ का एक हल हो।

4.4 दो चरों वाले रैखिक समीकरण का आलेख

अभी तक आपने दो चरों वाले रैखिक समीकरण के हल बीजीय रूप से प्राप्त किए हैं। आइए अब हम इसके ज्यामितीय निरूपण को देखें। आप जानते हैं कि प्रत्येक ऐसी समीकरण के अपरिमित रूप से अनेक हल होते हैं। इन्हें हम निर्देशांक तल में किस प्रकार दर्शा सकते हैं? हल को मान-युग्मों में लिखने पर आपको इसके कुछ संकेत मिल सकते हैं। उदाहरण 3 के रैखिक समीकरण

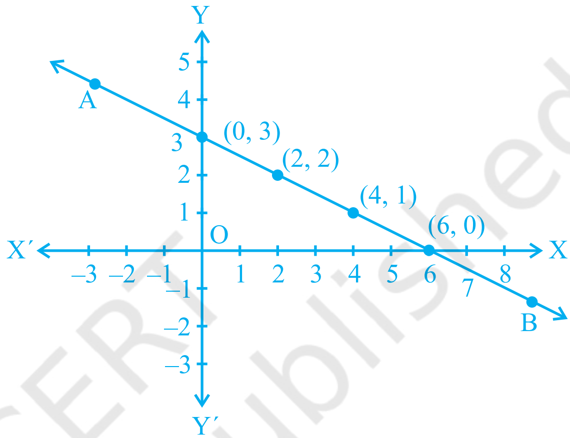
$$x + 2y = 6 \tag{1}$$

के हल को x के संगत मानों के नीचे y के मान लिखकर एक सारणी के रूप में इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है:

सारणी 1

x	0	2	4	6	. . .
y	3	2	1	0	. . .

पिछले अध्याय में आपने यह देखा है कि एक आलेख कागज (graph paper) पर बिंदुओं को किस प्रकार आलेखित किया जाता है। आइए हम आलेख कागज पर बिंदुओं (0, 3), (2, 2), (4, 1) और (6, 0) को आलेखित करें। अब किन्हीं दो बिंदुओं को मिलाकर एक रेखा प्राप्त कीजिए। मान लीजिए यह रेखा AB है (देखिए आकृति 4.2)।



आकृति 4.2

क्या आप देखते हैं कि अन्य दो बिंदु भी रेखा AB पर स्थित हैं? अब, इस रेखा पर एक अन्य बिंदु, मान लीजिए (8, –1), लीजिए। क्या यह एक हल है? वस्तुत: $8 + 2(-1) = 6$ है। अत: (8, –1) एक हल है। इस रेखा AB पर एक अन्य बिंदु लीजिए और जाँच कीजिए कि इसके निर्देशांक समीकरण को संतुष्ट करते हैं या नहीं। अब एक ऐसा बिंदु लीजिए जो रेखा AB पर स्थित नहीं हो। मान लीजिए यह बिंदु (2, 0) है। क्या इसके निर्देशांक समीकरण को संतुष्ट करते हैं? जाँच करने पर आप यह देखेंगे कि ये निर्देशांक समीकरण को संतुष्ट नहीं करते।

इस तरह, हम यह देखते हैं कि

1. प्रत्येक बिंदु जिसके निर्देशांक समीकरण (1) को संतुष्ट करते हैं; रेखा AB पर स्थित होता है।
2. रेखा AB पर स्थित प्रत्येक बिंदु (a, b) से समीकरण (1) का एक हल $x = a, y = b$ प्राप्त हो जाता है।
3. कोई भी बिंदु, जो रेखा AB पर स्थित नहीं है, समीकरण (1) का हल नहीं होगा।

अतः आप यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि रेखा पर स्थित प्रत्येक बिंदु रेखा के समीकरण को संतुष्ट करता है और समीकरण का प्रत्येक हल रेखा पर स्थित एक बिंदु होता है। वस्तुतः दो चरों वाले एक रैखिक समीकरण ज्यामितीय रूप से एक ऐसी रेखा से निरूपित किया जाता है जिसके सभी बिंदु समीकरण के हल होते हैं। इसे रैखिक समीकरण का *आलेख* कहा जाता है। अतः दो चरों वाले रैखिक समीकरण का आलेख प्राप्त करने के लिए दो हलों के संगत दो बिंदु आलेखित करना और उन्हें एक रेखा से मिला देना पर्याप्त होता है। फिर भी, उत्तम तो यह होगा कि इस प्रकार के दो से अधिक बिंदु आलेखित किए जाएँ जिससे कि आप आलेख की शुद्धता की जाँच तुरंत कर सकें।

टिप्पणी : एक घात वाले बहुपद समीकरण $ax + by + c = 0$ को रैखिक समीकरण इसलिए कहा जाता है, क्योंकि इसका ज्यामितीय निरूपण एक सरल रेखा होती है।

उदाहरण 5 : यदि बिंदु $(1, 2)$ दिया हुआ हो, तो क्या आप उस रेखा का समीकरण दे सकते हैं जिस पर वह बिंदु स्थित है? इस प्रकार के कितने समीकरण हो सकते हैं?

हल : $(1, 2)$ उस रैखिक समीकरण का एक हल है जिसे आप ढूँढ़ रहे हैं। इस प्रकार आप एक ऐसी रेखा का पता लगाना चाहते हैं जो बिंदु $(1, 2)$ से होकर जाती है। इस प्रकार के रैखिक समीकरण का एक उदाहरण $x + y = 3$ है। अन्य समीकरण हैं: $y - x = 1$, $y = 2x$, क्योंकि ये भी बिंदु $(1, 2)$ के निर्देशांकों से संतुष्ट हो जाते हैं। वस्तुतः, ऐसे अपरिमित रूप से अनेक रैखिक समीकरण हैं जो बिंदु $(1, 2)$ के निर्देशांकों से संतुष्ट हो जाते हैं। क्या आप इसे चित्रीय रूप से देख सकते हैं?

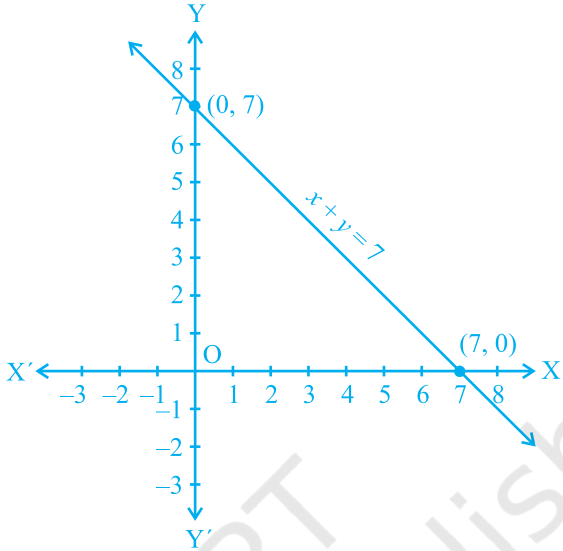
उदाहरण 6 : $x + y = 7$ का आलेख खींचिए।

हल : ग्राफ (आलेख) खींचने के लिए हमें समीकरण के कम से कम दो हलों की आवश्यकता होती है। आप यह देख सकते हैं कि दिए हुए समीकरण के हल $x = 0, y = 7$ और $x = 7$, $y = 0$ हैं। अतः ग्राफ खींचने के लिए आप नीचे दी गई सारणी का प्रयोग कर सकते हैं:

सारणी 2

x	0	7
y	7	0

सारणी 2 के दो बिंदुओं को आलेखित करके इन्हें एक रेखा से मिलाकर आलेख खींचिए (देखिए आकृति 4.3)।



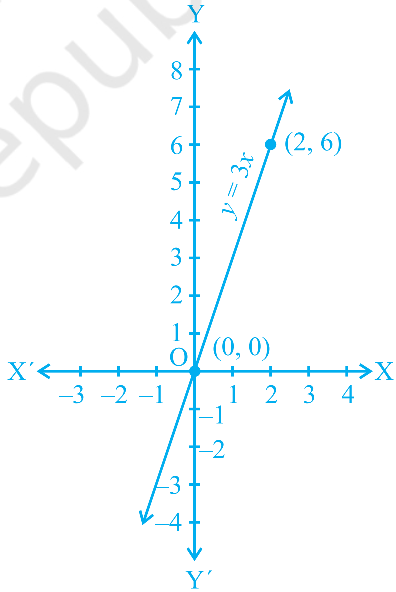
आकृति 4.3

उदाहरण 7 : आप जानते हैं कि एक पिंड पर लगाया गया बल पिंड में उत्पन्न त्वरण के अनुक्रमानुपाती होता है। इस स्थिति को व्यक्त करने वाला एक समीकरण लिखिए और समीकरण को आलेखित कीजिए।

हल : यहाँ चर, बल और त्वरण हैं। मान लीजिए लगाया गया बल y मात्रक है और उत्पन्न त्वरण x मात्रक है। अनुपात और समानुपात से आप इस तथ्य को इस प्रकार व्यक्त कर सकते हैं:

$$y = kx$$

जहाँ k एक अचर है। (विज्ञान के अध्ययन से आप यह जानते हैं कि वास्तव में k पिंड का द्रव्यमान होता है)।



आकृति 4.4

अब क्योंकि हम यह नहीं जानते कि k क्या है, इसलिए हम $y = kx$ का परिशुद्ध आलेख नहीं खींच सकते। फिर भी, यदि हम k को एक मान दे दें, तब हम आलेख खींच सकते हैं। आइए हम $k = 3$ लें। तब हम $y = 3x$ को निरूपित करने वाली रेखा खींच सकते हैं।

इसके लिए, इस समीकरण के हम दो हल ज्ञात करते हैं। मान लीजिए ये हल (0, 0) और (2, 6) हैं (देखिए आकृति 4.4)।

इस आलेख से आप यह देख सकते हैं कि जब लगाया गया बल 3 मात्रक होता है, तब उत्पन्न त्वरण 1 मात्रक होता है। आप यहाँ यह भी देखते हैं कि बिंदु (0, 0) आलेख पर स्थित है, जिसका अर्थ यह है कि जब लगाया गया बल 0 मात्रक होता है तो उत्पन्न त्वरण 0 मात्रक होता है।

टिप्पणी : $y = kx$ के रूप की समीकरण का आलेख एक रेखा होती है जो सदैव मूलबिंदु से होकर जाती है।

उदाहरण 8 : आकृति 4.5 में दिए गए प्रत्येक आलेख को ध्यान से देखिए और नीचे के प्रत्येक आलेख के विकल्पों से आलेख में दिए गए समीकरण का चयन कीजिए:

(a) आकृति 4.5 (i) के लिए,

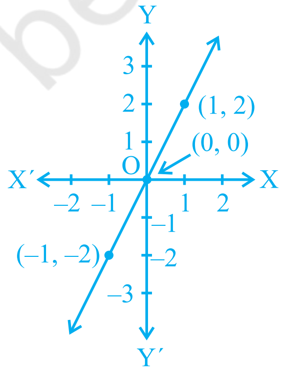
(i) $x + y = 0$ (ii) $y = 2x$ (iii) $y = x$ (iv) $y = 2x + 1$

(b) आकृति 4.5 (ii) के लिए,

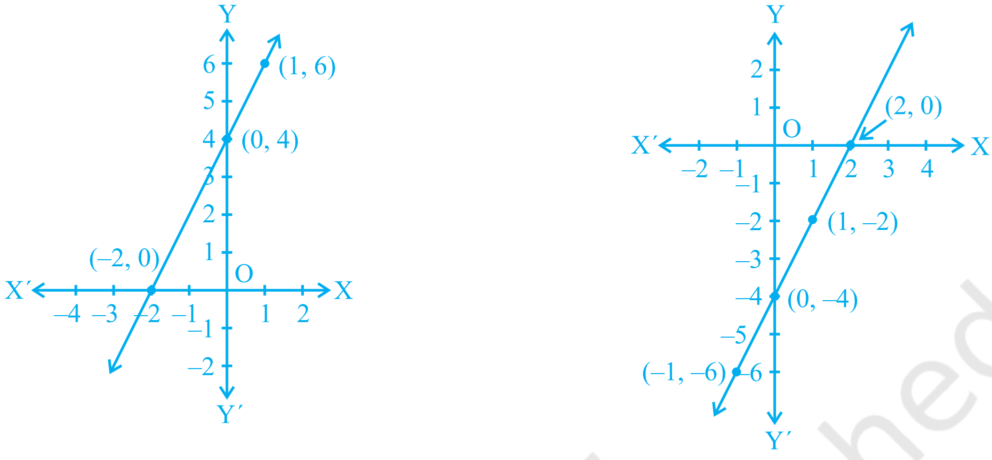
(i) $x + y = 0$ (ii) $y = 2x$ (iii) $y = 2x + 4$ (iv) $y = x - 4$

(c) आकृति 4.5 (iii) के लिए,

(i) $x + y = 0$ (ii) $y = 2x$ (iii) $y = 2x + 1$ (iv) $y = 2x - 4$



(i)



(ii) (iii)

आकृति 4.5

हल : (a) आकृति 4.5 (i) में रेखा पर बिंदु (–1, –2), (0, 0), (1, 2) हैं। देखने पर, इस आलेख का संगत समीकरण $y = 2x$ है। आप यहाँ यह देख सकते हैं कि प्रत्येक स्थिति में y-निर्देशांक, x-निर्देशांक का दोगुना है।

(b) आकृति 4.5 (ii) में रेखा पर बिंदु (–2, 0), (0, 4), (1, 6) हैं। आप जानते हैं कि आलेख के बिंदुओं के निर्देशांक समीकरण $y = 2x + 4$ को संतुष्ट करते हैं। अत:, $y = 2x + 4$ आकृति 4.5 (ii) के आलेख का संगत समीकरण है।

(c) आकृति 4.5 (iii) में, रेखा पर बिंदु (–1, –6), (0, –4), (1, –2), (2, 0) हैं। देखकर आप यह कह सकते हैं कि $y = 2x – 4$ दिए हुए आलेख का संगत समीकरण है।

प्रश्नावली 4.3

1. दो चरों वाले निम्नलिखित रैखिक समीकरणों में से प्रत्येक का आलेख खींचिए:

(i) $x + y = 4$ (ii) $x – y = 2$ (iii) $y = 3x$ (iv) $3 = 2x + y$

2. बिंदु (2, 14) से होकर जाने वाली दो रेखाओं के समीकरण लिखिए। इस प्रकार की और कितनी रेखाएँ हो सकती हैं, और क्यों?

3. यदि बिंदु (3, 4) समीकरण $3y = ax + 7$ के आलेख पर स्थित है, तो a का मान ज्ञात कीजिए।

4. एक नगर में टैक्सी का किराया निम्नलिखित है : पहले किलोमीटर का किराया 8 रु है और

उसके बाद की दूरी के लिए प्रति किलोमीटर का किराया 5 रु है। यदि तय की गई दूरी x किलोमीटर हो, और कुल किराया y रु हो, तो इसका एक रैखिक समीकरण लिखिए और उसका आलेख खींचिए।

5. निम्नलिखित आलेखों में से प्रत्येक आलेख के लिए दिए गए विकल्पों से सही समीकरण का चयन कीजिए:

आकृति 4.6 के लिए

(i) $y = x$

(ii) $x + y = 0$

(iii) $y = 2x$

(iv) $2 + 3y = 7x$

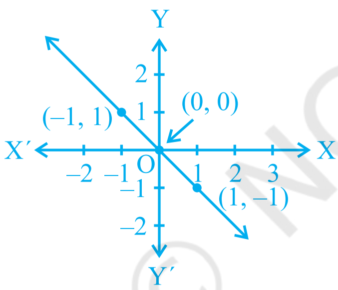
आकृति 4.7 के लिए

(i) $y = x + 2$

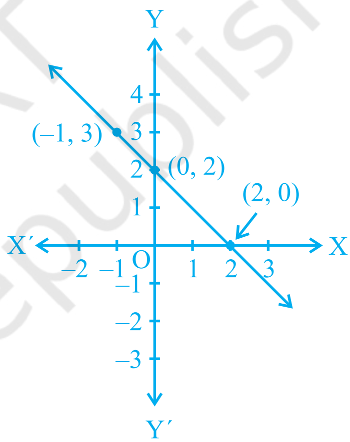
(ii) $y = x - 2$

(iii) $y = -x + 2$

(iv) $x + 2y = 6$



आकृति 4.6



आकृति 4.7

6. एक अचर बल लगाने पर एक पिंड द्वारा किया गया कार्य पिंड द्वारा तय की गई दूरी के अनुक्रमानुपाती होता है। इस कथन को दो चरों वाले एक समीकरण के रूप में व्यक्त कीजिए और अचर बल 5 मात्रक लेकर इसका आलेख खींचिए। यदि पिंड द्वारा तय की गई दूरी

(i) 2 मात्रक (ii) 0 मात्रक

हो, तो आलेख से किया हुआ कार्य ज्ञात कीजिए।

7. एक विद्यालय की कक्षा IX की छात्राएं यामिनी और फातिमा ने मिलकर भूकंप पीड़ित व्यक्तियों की सहायता के लिए प्रधानमंत्री राहत कोष में 100 रु अंशदान दिया। एक रैखिक समीकरण लिखिए जो इन आंकड़ों को संतुष्ट करती हो। (आप उनका अंशदान ₹x और ₹y मान सकते हैं)। इस समीकरण का आलेख खींचिए।

8. अमरीका और कनाडा जैसे देशों में तापमान फारेनहाइट में मापा जाता है, जबकि भारत जैसे देशों में तापमान सेल्सियस में मापा जाता है। यहाँ फारेनहाइट को सेल्सियस में रूपांतरित करने वाला एक रैखिक समीकरण दिया गया है :

$$F = \left(\frac{9}{5}\right)C + 32$$

(i) सेल्सियस को x-अक्ष और फारेनहाइट को y- अक्ष मानकर ऊपर दिए गए रैखिक समीकरण का आलेख खींचिए।

(ii) यदि तापमान 30°C है, तो फारेनहाइट में तापमान क्या होगा?

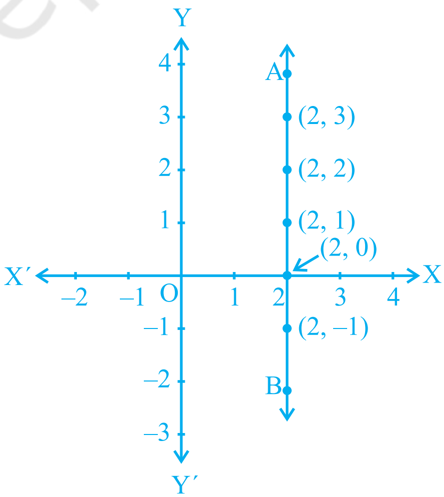
(iii) यदि तापमान 95°F है, तो सेल्सियस में तापमान क्या होगा?

(iv) यदि तापमान 0°C है, तो फारेनहाइट में तापमान क्या होगा? और यदि तापमान 0°F है, तो सेल्सियस में तापमान क्या होगा?

(v) क्या ऐसा भी कोई तापमान है जो फारेनहाइट और सेल्सियस दोनों के लिए संख्यात्मकतः समान है? यदि हाँ, तो उसे ज्ञात कीजिए।

4.5 x-अक्ष और y-अक्ष के समांतर रेखाओं के समीकरण

आप यह पढ़ चुके हैं कि किस प्रकार कार्तीय तल में एक दिए हुए बिंदु के निर्देशांक लिखे जाते हैं। क्या आप जानते हैं कि कार्तीय तल पर (2, 0), (–3, 0), (4, 0) और $(n, 0)$, जहाँ n कोई वास्तविक संख्या है, कहाँ पर स्थित होते हैं? हाँ, ये सभी बिंदु x-अक्ष पर स्थित हैं। परंतु क्या आप जानते हैं कि ऐसा क्यों है? ऐसा इसलिए है क्योंकि x-अक्ष पर प्रत्येक बिंदु का y-निर्देशांक 0 होता है। वस्तुतः x-अक्ष पर स्थित प्रत्येक बिंदु $(x, 0)$ के रूप का होता है। क्या अब आप x-अक्ष के समीकरण का अनुमान लगा सकते हैं? हाँ, यह समीकरण $y = 0$ होता है। जैसा कि आप देख सकते हैं, $y = 0$ को $0.x + 1.y = 0$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। इसी प्रकार, आप यह देख सकते हैं कि y-अक्ष का समीकरण $x = 0$ होता है।



आकृति 4.8

अब समीकरण $x - 2 = 0$ लीजिए। यदि इसे हम केवल एक चर x वाला एक समीकरण मान लें, तो इसका एक अद्वितीय हल $x = 2$ होता है, जो संख्या रेखा पर स्थित एक बिंदु है। साथ ही, इसे दो चरों वाला समीकरण मान लेने पर इसे $x + 0.y - 2 = 0$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। इसके अपरिमित रूप से अनेक हल हैं, जो $(2, r)$ के रूप के हैं, जहाँ r एक वास्तविक संख्या है। साथ ही आप यह जाँच सकते हैं कि $(2, r)$ के रूप का प्रत्येक बिंदु इस समीकरण का एक हल है। अत: दो चरों वाले समीकरण की भांति, $x - 2 = 0$ के आलेख को आकृति 4.8 में रेखा AB से निरूपित किया जाता है।

उदाहरण 9 : समीकरण $2x + 1 = x - 3$ को हल कीजिए और हल को (i) संख्या रेखा (ii) कार्तीय तल पर निरूपित कीजिए।

हल : $2x + 1 = x - 3$ को हल करने पर यह प्राप्त होता है:

$$2x - x = -3 - 1$$

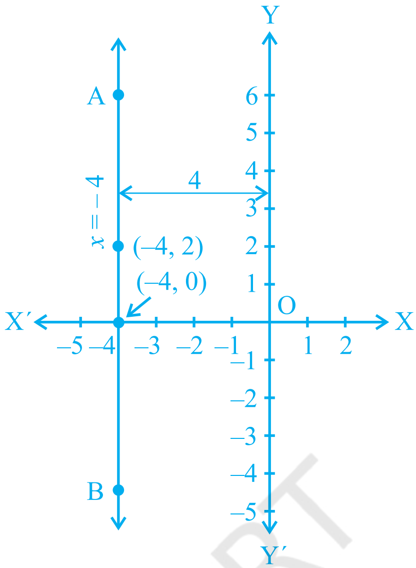
अर्थात् $$x = -4$$

(i) संख्या रेखा पर हल के निरूपण को आकृति 4.9 में दिखाया गया है, जहाँ $x = -4$ को एक चर वाला समीकरण माना गया है।

आकृति 4.9

(ii) हम जानते हैं कि चर x और y वाले रैखिक समीकरण के रूप में हम $x = -4$ को $x + 0.y = -4$ के रूप में लिख सकते हैं। इसे एक रेखा से निरूपित किया जाता है। अब y के सभी मान मान्य होते हैं, क्योंकि $0.y$ सदा ही शून्य होता है। फिर भी x को संबंध $x = -4$ को अवश्य संतुष्ट करना चाहिए। अत: दिए हुए समीकरण के दो हल $x = -4$, $y = 0$ और $x = -4$, $y = 2$ हैं।

ध्यान दीजिए कि आलेख AB, y-अक्ष के समांतर एक रेखा है जो इसके बायीं ओर 4 एकक की दूरी पर है (देखिए आकृति 4.10)।



आकृति 4.10

इसी प्रकार, $y = 3$ या $0.x + 1.y = 3$ के प्रकार के समीकरणों के संगत, हम x-अक्ष के समांतर एक रेखा प्राप्त कर सकते हैं।

प्रश्नावली 4.4

1. (i) एक चर वाले (ii) दो चर वाले

समीकरण के रूप में $y = 3$ का ज्यामितीय निरूपण कीजिए।

2. (i) एक चर वाले (ii) दो चर वाले

समीकरण के रूप में $2x + 9 = 0$ का ज्यामितीय निरूपण कीजिए।

4.6 सारांश

इस अध्याय में, आपने निम्नलिखित बिंदुओं का अध्ययन किया है:

1. $ax + by + c = 0$ के रूप के समीकरण को जहाँ, a, b और c वास्तविक संख्याएँ हैं और a और b दोनों शून्य नहीं हैं, दो चरों वाला रैखिक समीकरण कहा जाता है।

2. दो चरों वाले रैखिक समीकरण के अपरिमित रूप से अनेक हल होते हैं।

3. दो चरों वाले प्रत्येक रैखिक समीकरण का आलेख एक सरल रेखा होता है।

4. $x = 0$, y-अक्ष का समीकरण है और $y = 0$, x-अक्ष का समीकरण है।

5. $x = a$ का आलेख y-अक्ष के समांतर एक सरल रेखा होता है।

6. $y = a$ का आलेख x-अक्ष के समांतर एक सरल रेखा होता है।

7. $y = mx$ के प्रकार का समीकरण मूलबिंदु से होकर जाने वाली एक रेखा को निरूपित करता है।

8. दो चरों वाले रैखिक समीकरण के आलेख पर स्थित प्रत्येक बिंदु रैखिक समीकरण का एक हल होता है। साथ ही, रैखिक समीकरण का प्रत्येक हल रैखिक समीकरण के आलेख पर स्थित एक बिंदु होता है।

0963CH05

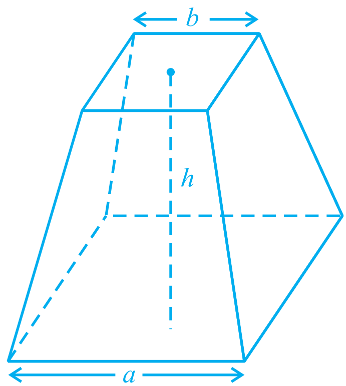
अध्याय 5

यूक्लिड की ज्यामिति का परिचय

5.1 भूमिका

शब्द 'ज्यामिति' (geometry) यूनानी भाषा के शब्दों 'जियो' (geo) और 'मीट्रीन' (metrein) से मिल कर बना है। जियो का अर्थ है 'पृथ्वी' या 'भूमि' और मीट्रीन का अर्थ है 'मापना'। इससे ऐसा प्रतीत होता है कि ज्यामिति का उद्‌गम भूमि मापने की आवश्यकता के कारण हुआ है। गणित की इस शाखा का अध्ययन विभिन्न रूपों में प्रत्येक प्राचीन सभ्यताओं द्वारा किया गया, चाहे वह मिस्र हो, बेबीलोन हो, चीन हो, भारत हो, यूनान हो या इनकास (incas), इत्यादि। इन सभ्यताओं के लोगों को अनेक व्यावहारिक समस्याओं का सामना करना पड़ा जिनमें ज्यामिति के विकास की विभिन्न प्रकार से आवश्यकता पड़ी।

उदाहरण के तौर पर, जब भी नील नदी में बाढ़ आती थी, तो विभिन्न भूमि स्वामियों के संलग्न खेतों के बीच की परिसीमाओं (boundaries) को अपने साथ बहा ले जाती थी। इन बाढ़ों के बाद, इन परिसीमाओं को पुनः बनाया जाता था। इस कार्य के लिए, मिस्रवासियों ने सरल क्षेत्रफल परिकलित करने के साथ ही सरल रचनाएँ करने के लिए, अनेक ज्यामितीय तकनीकें और नियम विकसित किए। उन्होंने ज्यामिति के ज्ञान का उपयोग अन्नभण्डारों के आयतन निकालने तथा नहरों और पिरामिडों (pyramids) के निर्माण करने में किया। वे एक कटे हुए पिरामिड (truncated pyramid) (देखिए आकृति 5.1) का आयतन ज्ञात करने का सही



आकृति 5.1 : कटा हुआ पिरामिड

सूत्र भी जानते थे। आप जानते हैं कि पिरामिड एक ऐसी ठोस आकृति होती है, जिसका आधार एक त्रिभुज या वर्ग या कोई अन्य बहुभुज होता है और जिसके पार्श्व फलक (side faces या lateral faces), ऊपर एक ही बिंदु पर मिलने वाले त्रिभुज होते हैं।

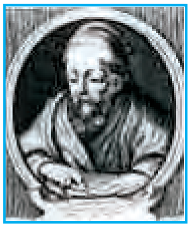
भारतीय उप-महाद्वीप में, हड़प्पा और मोहनजोदड़ो, इत्यादि की खुदाइयों से यह पता लगता है कि सिन्धु घाटी की सभ्यता (लगभग 3000 ई॰पू॰) ने ज्यामिति का प्रचुर मात्रा में उपयोग किया। वह एक उच्च कोटि का संगठित समाज था। शहर अत्याधिक रूप से विकसित थे और बड़े योजनाबद्ध ढंग से निर्मित किए गए थे। उदाहरणार्थ, सड़कें परस्पर समांतर होती थीं और भूमिगत नालियों की व्यवस्था थी। घरों में विभिन्न प्रकार के अनेक कमरे हुआ करते थे। ये बातें दर्शाती हैं कि नगरवासी क्षेत्रमिति (mensuration) और व्यावहारिक अंकगणित में पूर्ण रूप से निपुण थे। निर्माण कार्य में प्रयोग की जाने वाली ईंटें भट्टों पर पकाई (बनाई) जाती थीं और इन ईंटों के लिए अनुपात लम्बाई : चौड़ाई : मोटाई, 4 : 2 : 1 होता था।

प्राचीन भारत में, सुल्बासूत्र (800 ई॰पू॰–500 ई॰पू॰) ज्यामितीय रचनाओं के लिए महत्वपूर्ण ग्रंथ थे। वैदिक काल की ज्यामिति का उद्‌गम वैदिक पूजा के लिए आवश्यक भिन्न-भिन्न प्रकार की वेदियों और अग्नि-कुण्डों के निर्माण कार्य से हुआ। पवित्र अग्नियों को अधिक प्रभावशाली साधक होने के लिए, उनके स्थान, उनके आकारों और क्षेत्रफलों के बारे में स्पष्ट रूप से निर्धारित अनुदेशों के अनुसार, होते थे। घरेलू धार्मिक क्रियाओं के लिए, वर्गाकार और वृत्ताकार वेदियों का प्रयोग किया जाता था, जबकि सार्वजनिक पूजा स्थलों के लिए आयतों, त्रिभुजों और समलंबों के संयोजनों (मिले जुले) से बने आकारों का प्रयोग आवश्यक होता था। (अथर्ववेद में दिए) 'श्रीयंत्र' में एक दूसरे के साथ जुड़े नौ समद्विबाहु त्रिभुज अंतर्निहित हैं। ये त्रिभुज इस प्रकार व्यवस्थित किए गए हैं कि इनसे 43 छोटे (या गौण) त्रिभुजों का निर्माण होता है। यद्यपि वेदियों की रचना करने में परिशुद्ध ज्यामितीय विधियों का उपयोग किया गया था, फिर भी इनसे संबंधित सिद्धांतों की कोई चर्चा नहीं की गई।

उपरोक्त उदाहरण यह दर्शाते हैं कि ज्यामिति का विकास और अनुप्रयोग विश्व के सभी स्थानों पर होता रहा। परन्तु यह बड़े अव्यवस्थित प्रकार से हो रहा था। प्राचीन विश्व में, ज्यामिति के विकास की इन गतिविधियों की एक रोचक बात यह है कि इनका ज्ञान एक पीढ़ी से दूसरी पीढ़ी को या तो मौखिक रूप से या ताड़ के वृक्ष की पत्तियों पर लिखे संदेशों या कुछ अन्य विधियों द्वारा दिया जाता रहा। साथ ही, हम यह भी पाते हैं कि कुछ सभ्यताओं, जैसे कि बेबीलोनिया में, ज्यामिति एक अत्याधिक व्यावहारिक दृष्टिकोण वाले विषय तक

सीमित रही तथा ऐसा ही भारत और रोम में रहा। मिस्रवासियों द्वारा विकसित की गई ज्यामिति में मुख्यत: परिणामों के कथन ही निहित थे। इनमें प्रक्रियाओं (अथवा विधियों) के कोई व्यापक नियम नहीं दिए गए। वस्तुत: बेबीलोन और मिस्रवासियों दोनों ही ने ज्यामिति का उपयोग अधिकांशत: व्यावहारिक कार्यों के लिए ही किया तथा उसको एक क्रमबद्ध विज्ञान के रूप में विकसित करने के लिए बहुत कम काम किया। परन्तु यूनान जैसी सभ्यताओं में इस तर्क पर बल दिया जाता था कि कुछ रचनाएँ किस प्रकार हो जाती हैं। यूनानियों की अभिरुचि उन कथनों, जिनको उन्होंने स्थापित किया था, की सत्यता निगमनिक तर्कण (deductive reasoning) का उपयोग करके जाँचने में थी (देखिए परिशिष्ट 1)।

थेल्स
(640 सा०यु०पू०- 546 सा०यु०पू०)
आकृति 5.2



यूक्लिड
(325 सा०यु०पू०- 265 सा०यु०पू०)
आकृति 5.3

एक यूनानी गणितज्ञ थेल्स (Thales) को श्रेय जाता है कि उन्होंने सबसे पहली ज्ञात उपपत्ति (proof) प्रदान की। यह उपपत्ति इस कथन की थी कि वृत्त का व्यास वृत्त को समद्विभाजित (अर्थात् दो बराबर भागों में विभाजित) करता है। थेल्स का एक सबसे प्रसिद्ध शिष्य पाइथागोरस (572 ई॰पू॰) था, जिसका नाम आपने अवश्य सुना होगा। पाइथागोरस और उसके साथियों ने अनेक ज्यामितीय गुणों की खोज की और ज्यामिति के सिद्धांतों का अत्याधिक विकास किया। यह प्रक्रिया 300 ई॰पू॰ तक जारी रही। इसी समय मिस्र में अलेक्जेंड्रिया के एक गणित के शिक्षक यूक्लिड (Euclid) ने उस समय तक ज्ञात गणित के सभी ज्ञान को एकत्रित किया और **एलीमेंट्स (Elements)** नामक अपने प्रसिद्ध ग्रंथ के रूप में उसे व्यवस्थित किया। उन्होंने एलीमेंट्स को 13 अध्यायों में विभाजित किया, जिनमें से प्रत्येक को 'पुस्तिका' माना जाता है। इन पुस्तिकाओं ने समस्त विश्व की ज्यामिति संबंधी समझ को आने वाली पीढ़ियों तक प्रभावित किया।

इस अध्याय में, हम ज्यामिति के प्रति यूक्लिड के दृष्टिकोण की चर्चा करेंगे और ज्यामिति के वर्तमान स्वरूप से इसे जोड़ने का प्रयत्न करेंगे।

5.2 यूक्लिड की परिभाषाएँ, अभिगृहीत और अभिधारणाएँ

यूक्लिड के समय के यूनानी गणितज्ञों ने ज्यामिति को उस विश्व का एक सिद्धांतीय प्रतिमान (model) सोचा जिसमें वे रहते थे। बिंदु (point), रेखा (line), तल (plane) [या पृष्ठ (surface)],

इत्यादि की अवधारणाएँ उन वस्तुओं से स्थापित की गईं जो उनके आस-पास थीं। आकाश (space) और उनके आस-पास के ठोसों के अध्ययनों के आधार पर, एक ठोस वस्तु की सिद्धांतीय ज्यामितीय अवधारणा विकसित की गई। एक ठोस (solid) का आकार होता है, माप और स्थिति होती है तथा उसे एक स्थान से दूसरे स्थान तक ले जाया जा सकता है। इसकी परिसीमाएँ **पृष्ठ (surface)** कहलाती हैं। ये आकाश के एक भाग को दूसरे भाग से पृथक करती हैं और इनकी कोई मोटाई नहीं होती। पृष्ठों की परिसीमाएँ **वक्र (curves)** या सीधी **रेखाएँ (lines)** होती हैं। इन रेखाओं के सिरे बिंदु **(points)** होते हैं।

ठोसों से बिंदुओं (ठोस-पृष्ठ-रेखाएँ-बिंदु) तक के तीन चरणों पर विचार कीजिए। प्रत्येक चरण में, हम एक विस्तार, जिसे हम विमा (dimension) भी कहते हैं, से वंचित होते हैं। इसलिए, यह कहा जाता है कि एक ठोस की तीन विमाएँ होती हैं, एक पृष्ठ की दो विमाएँ, एक रेखा की एक विमा होती है और एक बिंदु की कोई विमा नहीं होती। यूक्लिड ने इन कथनों को संक्षिप्त रूप से परिभाषाओं के रूप में प्रस्तुत किया। उन्होंने अपने इन रहस्योदघाटनों का प्रारम्भ 'एलीमेंट्स' की पुस्तक 1 में 23 परिभाषाएँ (definitions) देकर किया। इनमें से कुछ परिभाषाएँ नीचे दी जा रही हैं:

1. एक **बिंदु (point)** वह है जिसका कोई भाग नहीं होता।
2. एक **रेखा (line)** चौड़ाई रहित लम्बाई होती है।
3. एक रेखा के सिरे बिंदु होते हैं।
4. एक **सीधी रेखा** ऐसी रेखा है जो स्वयं पर बिंदुओं के साथ सपाट रूप से स्थित होती है।
5. एक **पृष्ठ (surface)** वह है जिसकी केवल लम्बाई और चौड़ाई होती है।
6. पृष्ठ के **किनारे (edges)** रेखाएँ होती हैं।
7. एक समतल पृष्ठ **(plane surface)** ऐसा पृष्ठ है जो स्वयं पर सीधी रेखाओं के साथ सपाट रूप से स्थित होता है।

यदि आप ध्यानपूर्वक इन परिभाषाओं को देखें, तो आप पाएँगे कि कुछ पदों जैसे भाग, चौड़ाई, लम्बाई, सपाट रूप से, इत्यादि को स्पष्ट रूप से आगे और अधिक समझाने की आवश्यकता है। उदाहरणार्थ, बिंदु की परिभाषा पर विचार कीजिए जो यूक्लिड ने दी है। इस परिभाषा में, 'एक भाग' को परिभाषित करने की आवश्यकता है। मान लीजिए कि हम यह परिभाषित करें कि एक भाग वह है जो 'क्षेत्र' घेरता है, तो हमें पुनः 'क्षेत्र' को परिभाषित करने की आवश्यकता होगी। अतः एक वस्तु को परिभाषित करने के लिए, आपको अनेक वस्तुओं

को परिभाषित करने की आवश्यकता होती है और बिना किसी अंत के परिभाषाओं की एक लम्बी श्रृंखला प्राप्त हो सकती है। इन्हीं कारणवश, गणितज्ञों द्वारा यह सुविधाजनक पाया गया कि कुछ ज्यामितीय पदों को *अपरिभाषित* (*undefined*) मान लिया जाए। इस विधि से, हम एक बिंदु की ज्यामितीय संकल्पना का ऊपर दी हुई 'परिभाषा' की तुलना में एक बेहतर अंतर्ज्ञानात्मक आभास प्राप्त करेंगे। इसलिए, हम बिंदु को एक सूक्ष्म बिंदी (dot) से निरूपित करते हैं, परन्तु इस सूक्ष्म बिंदी की कुछ न कुछ विमा अवश्य होती है।

इसी प्रकार की समस्या उपरोक्त परिभाषा 2 में भी आती है। इसमें चौड़ाई और लम्बाई का संदर्भ आता है और इनमें से किसी को भी पहले परिभाषित नहीं किया गया है। इसी कारण, किसी भी विषय के अध्ययन के लिए कुछ पदों को अपरिभाषित रखा गया है। इसलिए, ज्यामिति में हम बिंदु, रेखा और तल (यूक्लिड के शब्दों में समतल पृष्ठ) को अपरिभाषित शब्दों के रूप में मान कर चलते हैं। केवल यह बात अवश्य है कि हम इन्हें अंतर्ज्ञानात्मक रूप से निरूपित कर सकते हैं अथवा 'भौतिक प्रतिमानों' (वस्तुओं) की सहायता से स्पष्ट कर सकते हैं।

अपनी इन परिभाषाओं से प्रारम्भ करते हुए, यूक्लिड ने कुछ गुणों को बिना सिद्ध किए सत्य कथन मानने की कल्पना की। ये कल्पनाएँ वास्तव में 'स्पष्टत: सर्वव्यापी सत्य' थे। उन्होंने इनको दो वर्गों में विभाजित किया। ये वर्ग थे : **अभिगृहीत (axioms)** और **अभिधारणाएँ (postulates)**। उन्होंने **अभिधारणा** शब्द का प्रयोग उन कल्पनाओं के लिए किया जो विशिष्ट रूप से ज्यामिति से संबंधित थीं। दूसरी ओर, सामान्य अवधारणाएँ [जिन्हें प्राय: **अभिगृहीत (axioms)** कहा गया] वे कल्पनाएँ थीं जिन्हें निरंतर गणित में प्रयोग किया गया और जिनका केवल ज्यामिति से ही विशेष संबंध नहीं था। अभिगृहीत और अभिधारणाओं की और अधिक जानकारी के लिए परिशिष्ट 1 को देखिए।

यूक्लिड के कुछ अभिगृहीतों को, बिना उनके द्वारा दिए क्रम के, नीचे दिया जा रहा है:

(1) वे वस्तुएँ जो एक ही वस्तु के बराबर हों एक दूसरे के बराबर होती हैं।

(2) यदि बराबरों को बराबरों में जोड़ा जाए, तो पूर्ण भी बराबर होते हैं।

(3) यदि बराबरों को बराबरों में से घटाया जाए, तो शेषफल भी बराबर होते हैं।

(4) वे वस्तुएँ जो परस्पर संपाती हों, एक दूसरे के बराबर होती हैं।

(5) पूर्ण अपने भाग से बड़ा होता है।

(6) एक ही वस्तुओं के दुगुने परस्पर बराबर होते हैं।

(7) एक ही वस्तुओं के आधे परस्पर बराबर होते हैं।

ये सामान्य अवधारणाएँ किसी प्रकार के परिमाणों (magnitudes) के संदर्भ में कही गई हैं। पहली सामान्य अवधारणा को समतलीय आकृतियों के लिए प्रयोग किया जा सकता है। उदाहरणार्थ, यदि एक त्रिभुज का क्षेत्रफल एक आयत के क्षेत्रफल के बराबर हो और इस आयत का क्षेत्रफल एक वर्ग के क्षेत्रफल के बराबर हो, तो त्रिभुज का क्षेत्रफल भी वर्ग के क्षेत्रफल के बराबर होगा।

एक ही प्रकार के परिमाणों की तुलना की जा सकती है और उन्हें जोड़ा भी जा सकता है, परंतु भिन्न-भिन्न प्रकार के परिमाणों की तुलना नहीं की जा सकती है। उदाहरणार्थ, एक रेखा को एक आयत में जोड़ा नहीं जा सकता और न ही एक कोण की एक पंचभुज (pentagon) से तुलना की जा सकती है।

ऊपर दिया हुआ चौथा अभिगृहीत यह बताता हुआ प्रतीत होता है कि यदि दो वस्तुएँ सर्वसम (identical) हों (अर्थात् वे एक ही हों), तो वे बराबर होती हैं। दूसरे शब्दों में, कोई भी वस्तु स्वयं के बराबर होती है। यह अध्यारोपण (superposition) के सिद्धांत की तर्कसंगतता प्रकट करता है। अभिगृहीत (5) 'से बड़ा है (greater than)' की परिभाषा देता है। उदाहरणार्थ, यदि कोई राशि B, किसी अन्य राशि A का एक भाग हो, तो A को राशि B और एक अन्य राशि C के योग के रूप में लिखा जा सकता है। सांकेतिक रूप से, $A > B$ का अर्थ है कि कोई C ऐसा है कि $A = B + C$ है।

आइए अब यूक्लिड की पाँच अभिधारणाओं (postulates) की चर्चा करें। ये इस प्रकार हैं:

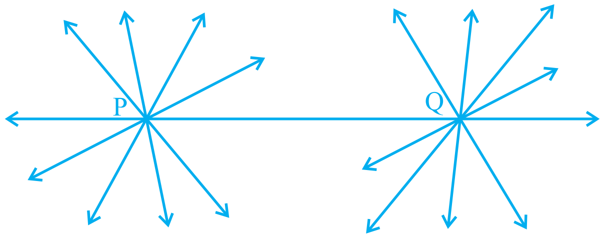
अभिधारणा 1 : *एक बिंदु से एक अन्य बिंदु तक एक सीधी रेखा खींची जा सकती है।*

ध्यान दीजिए कि यह अभिधारणा हमें बताती है कि दो भिन्न (distinct) बिंदुओं से होकर कम से कम एक रेखा अवश्य खींची जा सकती है, परन्तु इससे यह नहीं ज्ञात होता कि ऐसी एक से अधिक सीधी रेखाएँ नहीं हो सकतीं। परन्तु अपने समस्त कार्यों में यूक्लिड ने, बिना कुछ बताए, यह बार-बार कल्पना की है कि दो भिन्न बिंदुओं से एक अद्वितीय (unique) रेखा ही खींची जा सकती है। हम इस परिणाम को एक अभिगृहीत के रूप में नीचे दे रहे हैं:

अभिगृहीत 5.1 : *दिए हुए दो भिन्न बिंदुओं से होकर एक अद्वितीय रेखा खींची जा सकती है।*

बिंदु P से होकर कितनी रेखाएँ खींची जा सकती हैं जो बिंदु Q से होकर भी जाती हों (देखिए आकृति 5.4)? केवल एक। यह रेखा PQ है। बिंदु Q से होकर जाने वाली ऐसी

कितनी रेखाएँ हैं जो बिंदु P से होकर भी जाती है? केवल एक, अर्थात् रेखा PQ। इस प्रकार, उपरोक्त कथन एक स्वयं सिद्ध (self evident) सत्य है और इसीलिए हम इसे एक अभिगृहीत के रूप में मान लेते हैं।



आकृति 5.4

अभिधारणा 2 : *एक सांत रेखा (terminated line) को अनिश्चित रूप से बढ़ाया जा सकता है।*

ध्यान दीजिए जिसको हम आजकल रेखाखंड (line segment) कहते हैं, उसे यूक्लिड ने सांत रेखा कहा था। अत:, वर्तमान की भाषा में, दूसरी अभिधारणा यह कहती है कि एक रेखाखंड को दोनों ओर विस्तृत करके एक रेखा बनाई जा सकती है (देखिए आकृति 5.5)।

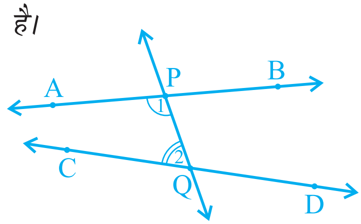
आकृति 5.5

अभिधारणा 3 : *किसी को केन्द्र मान कर और किसी त्रिज्या से एक वृत्त खींचा जा सकता है।*

अभिधारणा 4 : *सभी समकोण एक दूसरे के बराबर होते हैं।*

अभिधारणा 5 : *यदि एक सीधी रेखा दो सीधी रेखाओं पर गिर कर अपने एक ही ओर दो अंत: कोण (interior angles) इस प्रकार बनाए कि इन दोनों कोणों का योग मिल कर दो समकोणों से कम हो, तो वे दोनों सीधी रेखाएँ अनिश्चित रूप से बढ़ाए जाने पर उसी ओर मिलती हैं जिस ओर यह योग दो समकोणों से कम होता है।*

उदाहरणार्थ, आकृति 5.6 में, रेखा PQ रेखाओं AB और CD पर इस प्रकार गिरती है कि अंत: कोणों 1 और 2 का योग, जो PQ के बाईं ओर स्थित हैं, 180^o से कम है। अत:, रेखाएँ AB और CD अंतत: PQ के बाईं ओर प्रतिच्छेद करेंगी।



आकृति 5.6

उपरोक्त पाँचों अभिधारणाओं को केवल देखने मात्र से, हमें यह स्पष्टत: पता चल जाएगा कि अन्य अभिधारणाओं की तुलना में अभिधारणा 5 कुछ अधिक जटिल है। दूसरी ओर, अभिधारणाएँ 1 से 4 इतनी सरल और स्पष्ट हैं कि उन्हें स्वयं सिद्ध सत्य के रूप में मान लिया जाता है। परन्तु, इन्हें सिद्ध करना संभव नहीं है। इसलिए, इन कथनों को बिना उपपत्ति (proof) के स्वीकृत कर लिया गया है (देखिए परिशिष्ट 1)। इस जटिलता के कारण, पाँचवीं अभिधारणा पर अगले अनुच्छेद में अधिक ध्यान दिया जाएगा।

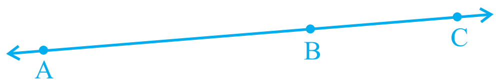
आजकल, 'अभिधारणा' और 'अभिगृहीत' दोनों पदों को एक दूसरे के लिए एक ही अर्थ में प्रयोग किया जाता है। वास्तव में, अभिधारणा एक क्रिया (verb) है। जब हम कहते हैं कि 'आइए अभिधारणा करें', तो इसका अर्थ है कि 'आइए विश्व में प्रेक्षित परिघटनाओं (phenomena) के आधार पर कुछ कथन कहें।' इसकी सत्यता/मान्यता की जाँच बाद में की जाती है। यदि वह सत्य है, तो उसे 'अभिधारणा' के रूप में स्वीकृत कर लिया जाता है।

कुछ अभिगृहीतों का एक निकाय (system) *अविरोधी* (*consistent*) कहलाता है (देखिए परिशिष्ट 1), यदि इन अभिगृहीतों से ऐसा कथन निर्मित करना असंभव हो, जो किसी अन्य अभिगृहीत या पहले सिद्ध किए गए किसी कथन के विरोधी (contradictory) हो। अत:, यदि अभिगृहीतों का कोई निकाय दिया हो, तो यह सुनिश्चित करना आवश्यक है कि यह निकाय अविरोधी हो।

यूक्लिड ने अपनी अभिधारणाएँ और अभिगृहीतों को देने के बाद, इनका प्रयोग अन्य परिणामों को सिद्ध करने में किया। फिर इन परिणामों का प्रयोग करके, उन्होंने निगमनिक तर्कण (deductive reasoning) द्वारा कुछ और परिणामों को सिद्ध किया। जिन कथनों को सिद्ध किया वे **साध्य** (**propositions**) या **प्रमेय** (**theorems**) कहलाती थीं। यूक्लिड ने अपनी अभिगृहीतों, अभिधारणाओं, परिभाषाओं और पहले सिद्ध की गई प्रमेयों का प्रयोग करके, एक तार्किक श्रृंखला में 465 साध्य निगमित (deduce) किए। ज्यामिति के कुछ अगले अध्यायों में आप इन अभिगृहीतों का प्रयोग करके कुछ प्रमेयों को सिद्ध करेंगे।

आइए आगे आने वाले उदाहरणों में देखें कि यूक्लिड ने कुछ परिणामों को सिद्ध करने के लिए अपनी अभिगृहीतों और अभिधारणाओं का किस प्रकार प्रयोग किया।

उदाहरण 1 : यदि A, B और C एक रेखा पर स्थित तीन बिंदु हैं और B बिंदुओं A और C के बीच में स्थित है (देखिए आकृति 5.7), तो सिद्ध कीजिए कि AB + BC = AC है।



आकृति 5.7

हल : उपरोक्त आकृति में, AB + BC के साथ AC संपाती है।

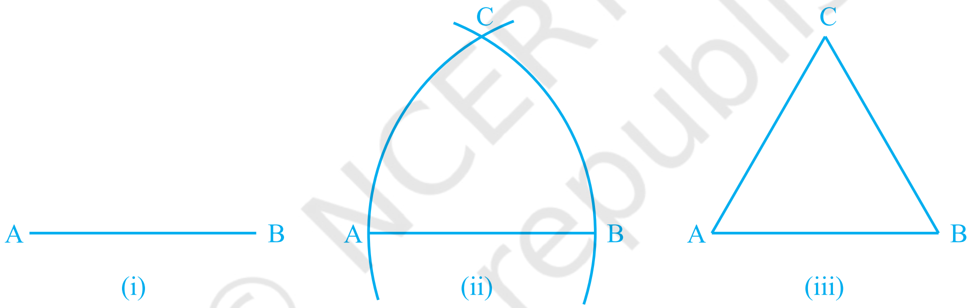
साथ ही, यूक्लिड का अभिगृहीत (4) कहता है कि वे वस्तुएँ जो परस्पर संपाती हों एक दूसरे के बराबर होती हैं। अत:, यह सिद्ध किया जा सकता है कि

$$AB + BC = AC$$

है। ध्यान दीजिए कि इस हल में यह मान लिया गया है कि दो बिंदुओं से होकर एक अद्वितीय रेखा खींची जा सकती है।

उदाहरण 2 : सिद्ध कीजिए कि एक दिए हुए रेखाखंड पर एक समबाहु त्रिभुज की रचना की जा सकती है।

हल : उपरोक्त कथन में, एक दी हुई लम्बाई का एक रेखाखंड, मान लीजिए, AB दिया है [देखिए आकृति 5.8 (i)]।



आकृति 5.8

यहाँ आपको कुछ रचना करने की आवश्यकता है। यूक्लिड की अभिधारणा (3) का प्रयोग करके, आप बिंदु A को केन्द्र और AB त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींच सकते हैं [देखिए आकृति 5.8 (ii)]। इसी प्रकार, B को केन्द्र मानकर और BA त्रिज्या लेकर एक अन्य वृत्त खींचा जा सकता है। ये दोनों वृत्त मान लीजिए बिंदु C पर मिलते हैं। अब रेखाखंडों AC और BC खींच कर Δ ABC बनाइए [देखिए आकृति 5.8 (iii)]।

इसलिए, आपको सिद्ध करना है कि यह त्रिभुज एक समबाहु त्रिभुज है; अर्थात् AB = AC = BC है।

अब, AB = AC है, क्योंकि ये एक वृत्त की त्रिज्याएँ हैं। (1)

इसी प्रकार, AB = BC (एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ) (2)

उपरोक्त दोनों तथ्यों और यूक्लिड के पहले अभिगृहीत (वे वस्तुएँ जो एक ही वस्तु के बराबर होती हैं एक दूसरे के बराबर होती हैं) से आप निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि AB = BC = AC है।

अत:, Δ ABC एक समबाहु त्रिभुज है।

ध्यान दीजिए कि यहाँ यूक्लिड ने, बिना कहीं बताए, यह मान लिया है कि केन्द्रों A और B को लेकर खींचे गए वृत्त परस्पर एक बिंदु पर मिलेंगे।

अब हम एक प्रमेय सिद्ध करेंगे जो विभिन्न परिणामों में अनेक बार अधिकांशत: प्रयोग की जाती है:

प्रमेय 5.1 : *दो भिन्न रेखाओं में एक से अधिक बिंदु उभयनिष्ठ नहीं हो सकता।*

उपपत्ति : यहाँ, हमें दो रेखाएँ l और m दी हुई हैं। हमें यह सिद्ध करना है कि l और m में केवल एक बिंदु उभयनिष्ठ है।

थोड़े समय के लिए, यह मान लीजिए कि ये दो रेखाएँ दो भिन्न बिंदुओं P और Q पर प्रतिच्छेद करती हैं।

इस प्रकार, दो भिन्न बिंदुओं P और Q से होकर जाने वाली आपके पास दो रेखाएँ l और m हो जाती हैं। परन्तु यह कथन अभिगृहीत 5.1 के विरुद्ध है, जिसके अनुसार दो भिन्न बिंदुओं से होकर एक अद्वितीय रेखा खींची जा सकती है। अत:, हम जिस कल्पना से चले थे कि दो रेखाएँ दो भिन्न बिंदुओं से होकर जाती हैं गलत है।

इससे हम क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं? हम निष्कर्ष निकालने पर बाध्य हो जाते हैं कि दो भिन्न रेखाओं में एक से अधिक बिंदु उभयनिष्ठ नहीं होगा।

प्रश्नावली 5.1

1. निम्नलिखित कथनों में से कौन-से कथन सत्य हैं और कौन-से कथन असत्य हैं? अपने उत्तरों के लिए कारण दीजिए।

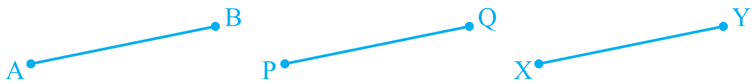
   (i) एक बिंदु से होकर केवल एक ही रेखा खींची जा सकती है।

   (ii) दो भिन्न बिंदुओं से होकर जाने वाली असंख्य रेखाएँ हैं।

   (iii) एक सांत रेखा दोनों ओर अनिश्चित रूप से बढ़ाई जा सकती है।

   (iv) यदि दो वृत्त बराबर हैं, तो उनकी त्रिज्याएँ बराबर होती हैं।

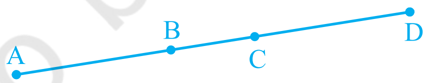
   (v) आकृति 5.9 में, यदि AB = PQ और PQ = XY है, तो AB = XY होगा।



आकृति 5.9

2. निम्नलिखित पदों में से प्रत्येक की परिभाषा दीजिए। क्या इनके लिए कुछ ऐसे पद हैं, जिन्हें परिभाषित करने की आवश्यकता है? वे क्या हैं और आप इन्हें कैसे परिभाषित कर पाएँगे?
   (i) समांतर रेखाएँ (ii) लम्ब रेखाएँ (iii) रेखाखंड
   (iv) वृत्त की त्रिज्या (v) वर्ग
3. नीचे दी हुई दो अभिधारणाओं पर विचार कीजिए :
   (i) दो भिन्न बिंदु A और B दिए रहने पर, एक तीसरा बिंदु C ऐसा विद्यमान है जो A और B के बीच स्थित होता है।
   (ii) यहाँ कम से कम ऐसे तीन बिंदु विद्यमान हैं कि वे एक रेखा पर स्थित नहीं हैं।

   क्या इन अभिधारणाओं में कोई अपरिभाषित शब्द हैं? क्या ये अभिधारणाएँ अविरोधी हैं? क्या ये यूक्लिड की अभिधारणाओं से प्राप्त होती हैं? स्पष्ट कीजिए।
4. यदि दो बिंदुओं A और B के बीच एक बिंदु C ऐसा स्थित है कि $AC = BC$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $AC = \frac{1}{2}AB$ है। एक आकृति खींच कर इसे स्पष्ट कीजिए।
5. प्रश्न 4 में, C रेखाखंड AB का एक मध्य-बिंदु कहलाता है। सिद्ध कीजिए कि एक रेखाखंड का एक और केवल एक ही मध्य-बिंदु होता है।
6. आकृति 5.10 में, यदि $AC = BD$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $AB = CD$ है।



आकृति 5.10

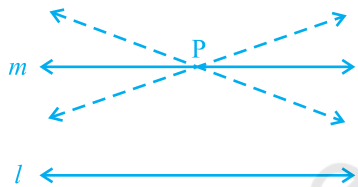
7. यूक्लिड की अभिगृहीतों की सूची में दिया हुआ अभिगृहीत 5 एक सर्वव्यापी सत्य क्यों माना जाता है? (ध्यान दीजिए कि यह प्रश्न पाँचवीं अभिधारणा से संबंधित नहीं है।)

5.3 यूक्लिड की पाँचवीं अभिधारणा के समतुल्य रूपान्तरण

गणित के इतिहास में यूक्लिड की पाँचवीं अभिधारणा का अत्याधिक महत्व है। अनुच्छेद 5.2 से पुनः इस अभिधारणा को याद कीजिए। इस अभिधारणा के परिणामस्वरूप यदि दो

रेखाओं पर गिरने वाली रेखा के एक ही ओर के दोनों अंतः कोणों का योग 180^0 हो, तो दोनों रेखाएँ कभी भी प्रतिच्छेद नहीं कर सकतीं। इस अभिधारणा के अनेक समतुल्य रूपांतरण (equivalent versions) हैं। इनमें से एक प्लेफेयर का अभिगृहीत (Playfair's Axiom) है (जिसे स्काटलेंड के एक गणितज्ञ जॉन प्लेफेयर ने 1729 में दिया था)। यह इस प्रकार है:

प्रत्येक रेखा l और उस पर न स्थित प्रत्येक बिंदु P के लिए, एक अद्वितीय रेखा m ऐसी होती है जो P से होकर जाती है और l के समांतर है।



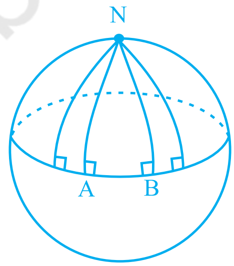
आकृति 5.11

आकृति 5.11 में, आप देख सकते हैं कि P से होकर जाने वाली सभी रेखाओं में से केवल m ही रेखा l के समांतर है।

इस परिणाम को निम्नलिखित रूप में भी व्यक्त किया जा सकता है :

दो भिन्न प्रतिच्छेदी रेखाएँ एक ही रेखा के समांतर नहीं हो सकतीं।

यूक्लिड को अपनी प्रथम 28 प्रमेयों को सिद्ध करने में पाँचवीं अभिधारणा की कोई आवश्यकता नहीं पड़ी। अनेक गणितज्ञों और स्वयं यूक्लिड को यह विश्वास था कि पाँचवीं अभिधारणा वास्तव में एक प्रमेय है, जिसे चारों अभिधारणों और अन्य अभिगृहीतों की सहायता से सिद्ध किया जा सकता है। परन्तु पाँचवीं अभिधारणा को प्रमेय के रूप में सिद्ध करने के सभी प्रयत्न असफल रहे। परन्तु इन प्रयत्नों के कारण एक महत्वपूर्ण उपलब्धि हुई – यह उपलब्धि अनेक अन्य ज्यामितियों की रचनाएँ (सृष्टि) रही। ये ज्यामितियाँ यूक्लिडीय ज्यामिति (Euclidean Geometry) से बहुत भिन्न हैं। *इन्हें अयूक्लिडीय ज्यामितियाँ* (Non-Euclidean Geometries) कहा जाता है। इन ज्यामितियों की रचना को विचारों के इतिहास में एक मील का पत्थर माना जाता है, क्योंकि तब तक प्रत्येक व्यक्ति यह विश्वास करता था कि यूक्लिड की ज्यामिति ही एक मात्र ज्यामिति है और संपूर्ण विश्व यूक्लिडीय है। जिस विश्व में हम रह रहे हैं, उसकी ज्यामिति को अब अयूक्लिडीय ज्यामिति दर्शाया जा चुका है। वास्तव में, यह *गोलाकार ज्यामिति* (*spherical geometry*) कहलाती है। गोलाकार ज्यामिति में रेखाएँ सीधी रेखाएँ नहीं होती हैं। ये रेखाएँ दीर्घ वृत्तों (great circles) (जो एक गोले और उसके केन्द्र से होकर जाने वाले तलों के प्रतिच्छेदन से प्राप्त वृत्त होते हैं) के भाग होती हैं।



आकृति 5.12

आकृति 5.12 में, रेखाएँ AN और BN (जो एक गोले के दीर्घ वृत्तों के भाग हैं) एक ही रेखा AB पर लम्ब हैं। परन्तु ये एक दूसरे से मिल रही हैं, यद्यपि रेखा AB के एक ही ओर के अंतः कोणों का योग दो समकोणों से कम नहीं है (वास्तव में, यह $90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ है)। साथ ही, ध्यान दीजिए कि त्रिभुज NAB के कोणों का योग 180° से अधिक है, क्योंकि $\angle A + \angle B = 180^\circ$ है। इस प्रकार, यूक्लिडीय ज्यामिति केवल एक तल में बनी आकृतियों के लिए ही मान्य है। वक्र पृष्ठों में यह असफल रहती है।

अब, आइए एक उदाहरण लें।

उदाहरण 3 : निम्न कथन पर विचार कीजिए : सीधी रेखाओं के एक ऐसे युग्म का अस्तित्व है, जो एक दूसरे से प्रत्येक स्थान पर समदूरस्थ (equidistant) होती हैं। क्या यह कथन यूक्लिड की पाँचवीं अभिधारणा का एक प्रत्यक्ष (सीधा) परिणाम है? स्पष्ट कीजिए।

हल : एक रेखा l लीजिए और एक बिंदु ऐसा लीजिए जो रेखा l पर स्थित न हो। तब, प्लेफेयर अभिगृहीत से, जो यूक्लिड की पाँचवीं अभिधारणा के समतुल्य है, हम जानते हैं कि P से होकर जाती हुई एक अद्वितीय रेखा m है जो l के समांतर है।

अब, *एक बिंदु की एक रेखा से दूरी उस बिंदु से रेखा पर डाले गए लम्ब की लम्बाई होती है।* m पर स्थित किसी बिंदु से रेखा l की दूरी और l पर स्थित किसी बिंदु से रेखा m की दूरी सदैव समान होगी। अतः, ये दोनों रेखाएँ l और m प्रत्येक स्थान पर एक दूसरे से समदूरस्थ हैं।

टिप्पणी : अगले कुछ अध्यायों में जो आप पढ़ेंगे वह यूक्लिडीय ज्यामिति होगी। परन्तु, इनमें हमारे द्वारा प्रयोग किए गए अभिगृहीत और प्रमेय यूक्लिड के अभिगृहीत और प्रमेयों से भिन्न हो सकते हैं।

प्रश्नावली 5.2

1. आप यूक्लिड की पाँचवीं अभिधारणा को किस प्रकार लिखेंगे ताकि वह सरलता से समझी जा सके?
2. क्या यूक्लिड की पाँचवीं अभिधारणा से समांतर रेखाओं के अस्तित्व का औचित्य निर्धारित होता है? स्पष्ट कीजिए।

5.4 सारांश

इस अध्याय में, आपने निम्नलिखित बिंदुओं का अध्ययन किया है:

1. यद्यपि यूक्लिड ने बिंदु, रेखा और तल को परिभाषित किया है, परन्तु गणितज्ञों ने इन परिभाषाओं को स्वीकार नहीं किया है। इसलिए ज्यामिति में इन्हें अब अपरिभाषित पदों के रूप में लिया जाता है।
2. अभिगृहीत और अभिधारणाएँ ऐसी कल्पनाएँ हैं जो स्पष्टतः सर्वव्यापी सत्य होती हैं। इन्हें सिद्ध नहीं किया जाता है।

3. प्रमेय वे कथन हैं जिन्हें परिभाषाओं, अभिगृहीतों, पहले सिद्ध किए गए कथनों और निगमनिक तर्कण द्वारा सिद्ध किया जाता है।

4. यूक्लिड के कुछ अभिगृहीत थे :

   (1) वे वस्तुएँ जो एक ही वस्तु के बराबर हों, एक दूसरे के बराबर होती हैं।

   (2) यदि बराबरों को बराबरों में जोड़ा जाए, तो पूर्ण भी बराबर होते हैं।

   (3) यदि बराबरों को बराबरों में से घटाया जाए, तो शेषफल भी बराबर होते हैं।

   (4) वे वस्तुएँ जो परस्पर संपाती हों एक दूसरे के बराबर होती हैं।

   (5) पूर्ण अपने भाग से बड़ा होता है।

   (6) एक ही वस्तुओं के दुगुने परस्पर बराबर होते हैं।

   (7) एक ही वस्तुओं के आधे परस्पर बराबर होते हैं।

5. यूक्लिड की अभिधारणाएँ निम्न थीं :

   अभिधारणा 1 : एक बिंदु से एक अन्य बिंदु तक एक सीधी रेखा खींची जा सकती है।

   अभिधारणा 2 : एक सांत रेखा को अनिश्चित रूप से बढ़ाया जा सकता है।

   अभिधारणा 3 : किसी को केन्द्र मान कर और किसी त्रिज्या से एक वृत्त खींचा जा सकता है।

   अभिधारणा 4 : सभी समकोण एक दूसरे के बराबर होते हैं।

   अभिधारणा 5 : यदि एक सीधी रेखा दो सीधी रेखाओं पर गिर कर अपने एक ही ओर दो अंतः कोण इस प्रकार बनाए कि इन दोनों कोणों का योग मिल कर दो समकोणों से कम हो, तो वे दोनों सीधी रेखाएँ अनिश्चित रूप से बढ़ाए जाने पर उसी ओर मिलती हैं जिस ओर यह योग दो समकोणों से कम होता है।

6. यूक्लिड की पाँचवीं अभिधारणा के दो समतुल्य रूपांतरण हैं :

   (i) प्रत्येक रेखा l और उस पर न स्थित प्रत्येक बिंदु P के लिए, एक अद्वितीय रेखा m ऐसी होती है जो P से होकर जाती है और l के समांतर है।

   (ii) दो भिन्न प्रतिच्छेदी रेखाएँ एक ही रेखा के समांतर नहीं हो सकतीं।

7. यूक्लिड की पाँचवीं अभिधारणा को पहली चारों अभिधारणों की सहायता से सिद्ध करने के सभी प्रयत्न असफल रहे। परन्तु इनसे अन्य ज्यामितियों की खोज हुई जिन्हें अयूक्लिडीय ज्यामितियाँ कहा जाता है।

0963CH06

अध्याय 6

रेखाएँ और कोण

6.1 भूमिका

अध्याय 5 में, आप पढ़ चुके हैं कि एक रेखा को खींचने के लिए न्यूनतम दो बिंदुओं की आवश्यकता होती है। आपने कुछ अभिगृहीतों (axioms) का भी अध्ययन किया है और उनकी सहायता से कुछ अन्य कथनों को सिद्ध किया है। इस अध्याय में, आप कोणों के उन गुणों का अध्ययन करेंगे जब दो रेखाएँ परस्पर प्रतिच्छेद करती हैं और कोणों के उन गुणों का भी अध्ययन करेंगे जब एक रेखा दो या अधिक समांतर रेखाओं को भिन्न-भिन्न बिंदुओं पर काटती है। साथ ही, आप इन गुणों का निगमनिक तर्कण (deductive reasoning) द्वारा कुछ कथनों को सिद्ध करने में भी प्रयोग करेंगे (देखिए परिशिष्ट 1)। आप पिछली कक्षाओं में इन कथनों की कुछ क्रियाकलापों द्वारा जाँच (पुष्टि) कर चुके हैं।

आप अपने दैनिक जीवन में समतल पृष्ठों के किनारों (edges) के बीच बने अनेक प्रकार के कोण देखते हैं। समतल पृष्ठों का प्रयोग करके, एक ही प्रकार के मॉडल बनाने के लिए, आपको कोणों के बारे में विस्तृत जानकारी की आवश्यकता होती है। उदाहरणार्थ, आप अपने विद्यालय की प्रदर्शिनी के लिए बाँसों का प्रयोग करके एक झोंपड़ी का मॉडल बनाना चाहते हैं। सोचिए, आप इसे कैसे बनाएँगे। कुछ बाँसों को आप परस्पर समांतर रखेंगे और कुछ को तिरछा रखेंगे। जब एक आर्किटेक्ट (architect) एक बहुतलीय भवन के लिए एक रेखाचित्र खींचता है, तो उसे विभिन्न कोणों पर प्रतिच्छेदी और समांतर रेखाएँ खींचनी पड़ती हैं। क्या आप सोचते हैं कि वह रेखाओं और कोणों के ज्ञान के बिना इस भवन की रूपरेखा खींच सकता है?

विज्ञान में, आप प्रकाश के गुणों का किरण आरेख (ray diagrams) खींच कर अध्ययन करते हैं। उदाहरणार्थ, प्रकाश के अपवर्तन (refraction) गुण का अध्ययन करने के लिए, जब

प्रकाश की किरणें एक माध्यम (medium) से दूसरे माध्यम में प्रवेश करती हैं, आप प्रतिच्छेदी रेखाओं और समांतर रेखाओं के गुणों का प्रयोग करते हैं। जब एक पिंड पर दो या अधिक बल कार्य कर रहे हों, तो आप इन बलों का उस पिंड पर परिणामी बल ज्ञात करने के लिए, एक ऐसा आरेख खींचते हैं जिसमें बलों को दिष्ट रेखाखंडों (directed line segments) द्वारा निरूपित किया जाता है। उस समय, आपको उन कोणों के बीच संबंध जानने की आवश्यकता होगी जिनकी किरणें (अथवा रेखाखंड) परस्पर समांतर या प्रतिच्छेदी होंगी। एक मीनार की ऊँचाई ज्ञात करने अथवा किसी जहाज की एक प्रकाश पुंज (light house) से दूरी ज्ञात करने के लिए, हमें क्षैतिज और दृष्टि रेखा (line of sight) के बीच बने कोण की जानकारी की आवश्यकता होगी। प्रचुर मात्रा में ऐसे उदाहरण दिए जा सकते हैं जहाँ रेखाओं और कोणों का प्रयोग किया जाता है। ज्यामिति के आने वाले अध्यायों में, आप रेखाओं और कोणों के इन गुणों का अन्य उपयोगी गुणों को निगमित (निकालने) करने में प्रयोग करेंगे।

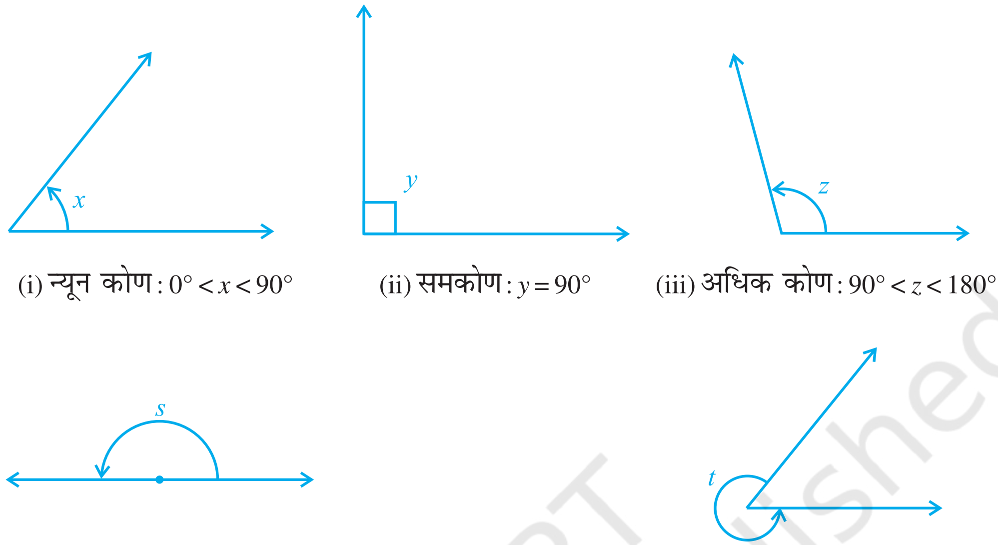
आइए पहले हम पिछली कक्षाओं में रेखाओं और कोणों से संबंधित पढ़े गए पदों और परिभाषाओं का पुनर्विलोकन करें।

6.2 आधारभूत पद और परिभाषाएँ

याद कीजिए कि एक रेखा का वह भाग जिसके दो अंत बिंदु हों एक **रेखाखंड** कहलाता है और रेखा का वह भाग जिसका एक अंत बिंदु हो एक **किरण** कहलाता है। ध्यान दीजिए कि रेखाखंड AB को $\overline{AB}$ से व्यक्त किया जाता है और उसकी लंबाई को AB से व्यक्त किया जाता है। किरण AB को $\overrightarrow{AB}$ से और रेखा AB को $\overleftrightarrow{AB}$ से व्यक्त किया जाता है। परन्तु हम इन संकेतनों का प्रयोग नहीं करेंगे तथा रेखा AB, किरण AB, रेखाखंड AB और उसकी लंबाई को एक ही संकेत AB से व्यक्त करेंगे। इनका अर्थ संदर्भ से स्पष्ट हो जाएगा। कभी-कभी छोटे अक्षर जैसे l, m, n इत्यादि का प्रयोग रेखाओं को व्यक्त करने में किया जाएगा।

यदि तीन या अधिक बिंदु एक ही रेखा पर स्थित हों, तो वे **संरेख बिंदु (collinear points)** कहलाते हैं, अन्यथा वे **असंरेख बिंदु (non-collinear points)** कहलाते हैं।

याद कीजिए कि जब दो किरणें एक ही अंत बिंदु से प्रारम्भ होती हैं, तो एक **कोण (angle)** बनता है। कोण को बनाने वाली दोनों किरणें कोण की **भुजाएँ (arms** या **sides)** कहलाती हैं और वह उभयनिष्ठ अंत बिंदु कोण का **शीर्ष (vertex)** कहलाता है। आप पिछली कक्षाओं में, विभिन्न प्रकार के कोणों जैसे न्यून कोण (acute angle), समकोण (right angle), अधिक कोण (obtuse angle), ऋजु कोण (straight angle) और प्रतिवर्ती कोण (reflex angle) के बारे में पढ़ चुके हैं (देखिए आकृति 6.1)।



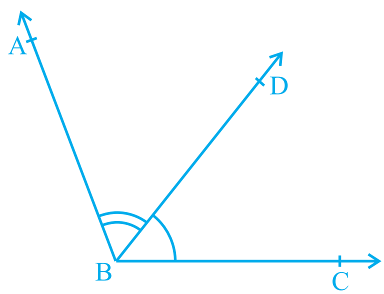
(i) न्यून कोण : $0° < x < 90°$ (ii) समकोण : $y = 90°$ (iii) अधिक कोण : $90° < z < 180°$

(iv) ऋजु कोण : $s = 180°$ (v) प्रतिवर्ती कोण : $180° < t < 360°$

आकृति 6.1 : कोणों के प्रकार

एक **न्यून कोण** का माप 0° और 90° के बीच होता है, जबकि एक **समकोण** का माप ठीक 90° होता है। 90° से अधिक परन्तु 180° से कम माप वाला कोण **अधिक कोण** कहलाता है। साथ ही, याद कीजिए कि एक **ऋजु कोण** 180° के बराबर होता है। वह कोण जो 180° से अधिक, परन्तु 360° से कम माप का होता है एक **प्रतिवर्ती कोण** कहलाता है। इसके अतिरिक्त, यदि दो कोणों का योग एक समकोण के बराबर हो, तो ऐसे कोण **पूरक कोण (complementary angles)** कहलाते हैं और वे दो कोण, जिनका योग 180° हो, **संपूरक कोण (supplementary angles)** कहलाते हैं।

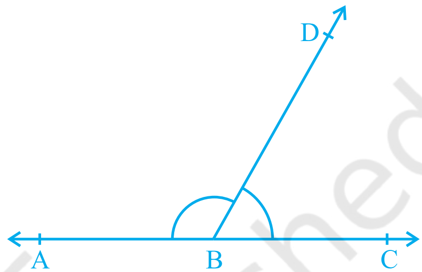
आप पिछली कक्षाओं में आसन्न कोणों (adjacent angles) के बारे में भी पढ़ चुके हैं (देखिए आकृति 6.2)। दो कोण **आसन्न कोण (adjacent angles)** कहलाते हैं, यदि उनमें एक उभयनिष्ठ शीर्ष हो, एक उभयनिष्ठ भुजा हो और उनकी वे भुजाएँ जो उभयनिष्ठ नहीं हैं, उभयनिष्ठ भुजा के विपरीत ओर स्थित हों। आकृति 6.2 में, $\angle$ ABD और $\angle$ DBC आसन्न कोण हैं। किरण BD इनकी उभयनिष्ठ भुजा है और B इनका उभयनिष्ठ



आकृति 6.2 : आसन्न कोण

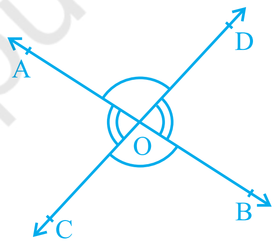
शीर्ष है। किरण BA और किरण BC वे भुजाएँ हैं जो उभयनिष्ठ नहीं हैं। इसके अतिरिक्त, जब दो कोण आसन्न कोण होते हैं, तो उनका योग उस कोण के बराबर होता है जो इनकी उन भुजाओं से बनता है, जो उभयनिष्ठ नहीं हैं। अतः हम लिख सकते हैं कि $\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC$ है।

ध्यान दीजिए कि $\angle ABC$ और $\angle ABD$ आसन्न कोण नहीं हैं। क्यों? इसका कारण यह है कि अउभयनिष्ठ भुजाएँ (अर्थात् वे भुजाएँ जो उभयनिष्ठ नहीं हैं) BD और BC उभयनिष्ठ भुजा BA के एक ही ओर स्थित है।



आकृति 6.3 : **कोणों का रैखिक युग्म**

यदि आकृति 6.2 में, अउभयनिष्ठ भुजाएँ BA और BC एक रेखा बनाएँ, तो यह आकृति 6.3 जैसा लगेगा। इस स्थिति में, $\angle ABD$ और $\angle DBC$ **कोणों का एक रैखिक युग्म (linear pair of angles)** बनाते हैं।



आकृति 6.4 : **शीर्षाभिमुख कोण**

आप **शीर्षाभिमुख कोणों (vertically opposite angles)** को भी याद कर सकते हैं, जो दो रेखाओं, मान लीजिए, AB और CD को परस्पर बिंदु O पर प्रतिच्छेद करने पर बनते हैं (देखिए आकृति 6.4)। यहाँ शीर्षाभिमुख कोणों के दो युग्म हैं। इनमें से एक युग्म $\angle AOD$ और $\angle BOC$ का है। क्या आप दूसरा युग्म ज्ञात कर सकते हैं?

6.3 प्रतिच्छेदी रेखाएँ और अप्रतिच्छेदी रेखाएँ

एक कागज़ पर दो भिन्न रेखाएँ PQ और RS खींचिए। आप देखेंगे कि आप इन रेखाओं को दो प्रकार से खींच सकते हैं, जैसा कि आकृति 6.5 (i) और आकृति 6.5 (ii) में दर्शाया गया है।

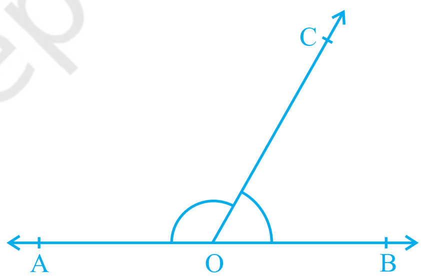
(i) प्रतिच्छेदी रेखाएँ (ii) अप्रतिच्छेदी (समांतर) रेखाएँ

आकृति 6.5 : दो रेखाएँ खींचने के विभिन्न प्रकार

रेखा की इस अवधारणा को भी याद कीजिए कि वह दोनों दिशाओं में अनिश्चित रूप से विस्तृत होती है। रेखाएँ PQ और RS आकृति 6.5 (i) में प्रतिच्छेदी रेखाएँ हैं और आकृति 6.5 (ii) में ये समांतर रेखाएँ हैं। ध्यान दीजिए कि इन दोनों समांतर रेखाओं के विभिन्न बिंदुओं पर उनके उभयनिष्ठ लम्बों की लंबाइयाँ समान रहेंगी। *यह समान लंबाई दोनों समांतर रेखाओं के बीच की दूरी कहलाती है।*

6.4 कोणों के युग्म

अनुच्छेद 6.2 में, आप कोणों के कुछ युग्मों जैसे पूरक कोण, संपूरक कोण, आसन्न कोण, कोणों का रैखिक युग्म, इत्यादि की परिभाषाओं के बारे में पढ़ चुके हैं। क्या आप इन कोणों में किसी संबंध के बारे में सोच सकते हैं? आइए अब उन कोणों में संबंध पर विचार करें जिन्हें कोई किरण किसी रेखा पर स्थित होकर बनाती है, जैसा कि आकृति 6.6 में दर्शाया गया है। रेखा को AB और किरण को OC कहिए। बिंदु O पर बनने वाले कोण क्या हैं? ये $\angle$ AOC, $\angle$ BOC और $\angle$ AOB हैं।



आकृति 6.6 : कोणों का रैखिक युग्म

क्या हम $\angle AOC + \angle BOC = \angle AOB$ लिख सकते हैं? (1)

हाँ! (क्यों? अनुच्छेद 6.2 में दिए आसन्न कोणों को देखिए।)

$\angle$ AOB का माप क्या है? यह $180°$ है। (क्यों?) (2)

क्या (1) ओर (2) से, आप कह सकते हैं कि $\angle AOC + \angle BOC = 180°$ है? हाँ! (क्यों?)

उपरोक्त चर्चा के आधार पर, हम निम्न अभिगृहीत को लिख सकते हैं:

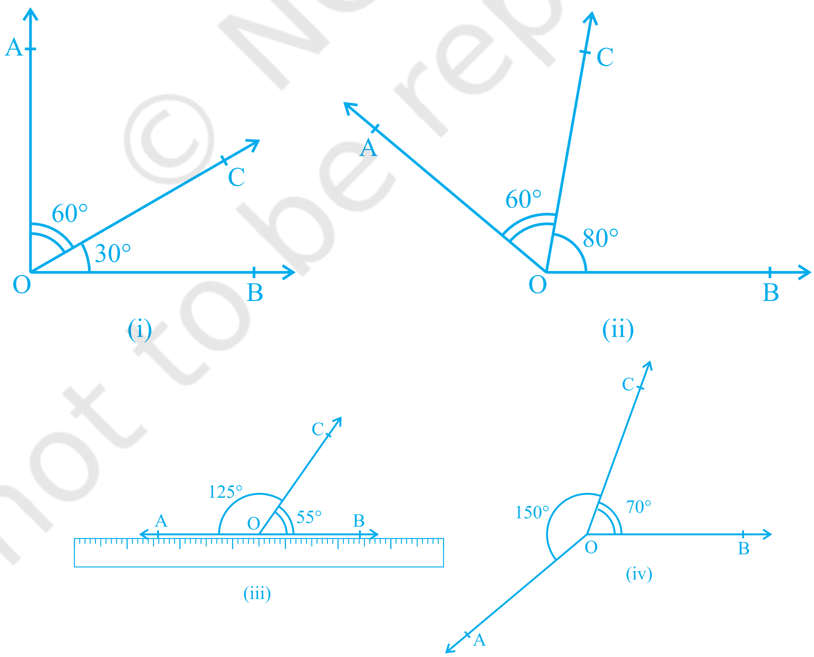
अभिगृहीत 6.1 : *यदि एक किरण एक रेखा पर खड़ी हो, तो इस प्रकार बने दोनों आसन्न कोणों का योग 180° होता है।*

याद कीजिए कि जब दो आसन्न कोणों का योग 180° हो, तो वे कोणों का एक **रैखिक युग्म** बनाते हैं।

अभिगृहीत 6.1 में यह दिया है कि 'एक किरण एक रेखा पर खड़ी हो'। इस दिए हुए से, हमने निष्कर्ष निकाला कि इस प्रकार बने दोनों आसन्न कोणों का योग 180° होता है। क्या हम अभिगृहीत 6.1 को एक विपरीत प्रकार से लिख सकते हैं? अर्थात् अभिगृहीत 6.1 के निष्कर्ष को दिया हुआ मानें और उसके दिए हुए को निष्कर्ष मानें। तब हमें यह प्राप्त होगा:

(A) यदि दो आसन्न कोणों का योग 180° है, तो एक किरण एक रेखा पर खड़ी होती है (अर्थात् अउभयनिष्ठ भुजाएँ एक ही रेखा में हैं)।

अब आप देखते हैं कि अभिगृहीत 6.1 और कथन (A) एक दूसरे के विपरीत हैं। हम इनमें से प्रत्येक को दूसरे का **विलोम** (**converse**) कहते हैं। हम यह नहीं जानते कि कथन (A) सत्य है या नहीं। आइए इसकी जाँच करें। विभिन्न मापों के, आकृति 6.7 में दर्शाए अनुसार, आसन्न कोण खींचिए। प्रत्येक स्थिति में, अउभयनिष्ठ भुजाओं में से एक भुजा के अनुदिश एक पटरी (ruler) रखिए। क्या दूसरी भुजा भी इस पटरी के अनुदिश स्थित है?



आकृति 6.7 : विभिन्न मापों के आसन्न कोण

आप पाएँगे कि केवल आकृति 6.7 (iii) में ही दोनों अउभयनिष्ठ भुजाएँ पटरी के अनुदिश हैं, अर्थात् A, O और B एक ही रेखा पर स्थित हैं और किरण OC इस रेखा पर खड़ी है। साथ ही, यह भी देखिए कि $\angle$ AOC + $\angle$ COB = 125° + 55° = 180° है। इससे आप निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि कथन (A) सत्य है। अतः, आप इसे एक अभिगृहीत के रूप में निम्न प्रकार लिख सकते हैं :

अभिगृहीत 6.2 : *यदि दो आसन्न कोणों का योग 180° है, तो उनकी अउभयनिष्ठ भुजाएँ एक रेखा बनाती हैं।*

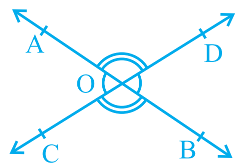
स्पष्ट कारणों से, उपरोक्त दोनों अभिगृहीतों को मिला कर **रैखिक युग्म अभिगृहीत (Linear Pair Axiom)** कहते हैं।

आइए अब उस स्थिति की जाँच करें जब दो रेखाएँ प्रतिच्छेद करती हैं।

पिछली कक्षाओं से आपको याद होगा कि यदि दो रेखाएँ परस्पर प्रतिच्छेद करें, तो शीर्षाभिमुख कोण बराबर होते हैं। आइए अब इस परिणाम को सिद्ध करें। एक उपपत्ति (proof) में निहित अवयवों के लिए, परिशिष्ट 1 को देखिए और नीचे दी हुई उपपत्ति को पढ़ते समय इन्हें ध्यान में रखिए।

प्रमेय 6.1 : *यदि दो रेखाएँ परस्पर प्रतिच्छेद करती हैं, तो शीर्षाभिमुख कोण बराबर होते हैं।*

उपपत्ति : उपरोक्त कथन में यह दिया है कि दो रेखाएँ परस्पर प्रतिच्छेद करती हैं। अतः मान लीजिए कि AB और CD दो रेखाएँ हैं जो परस्पर बिंदु O पर प्रतिच्छेद करती हैं, जैसा कि आकृति 6.8 में दर्शाया गया है। इससे हमें शीर्षाभिमुख कोणों के निम्न दो युग्म प्राप्त होते हैं:



आकृति 6.8 : शीर्षाभिमुख कोण

(i) $\angle$ AOC और $\angle$ BOD (ii) $\angle$ AOD और $\angle$ BOC

हमें सिद्ध करना है कि $\angle$ AOC = $\angle$ BOD है और $\angle$ AOD = $\angle$ BOC है।

अब किरण OA रेखा CD पर खड़ी है।

अतः, $\angle$ AOC + $\angle$ AOD = 180° (रैखिक युग्म अभिगृहीत) (1)

क्या हम $\angle$ AOD + $\angle$ BOD = 180° लिख सकते हैं? हाँ। (क्यों?) (2)

(1) और (2) से, हम लिख सकते हैं कि:

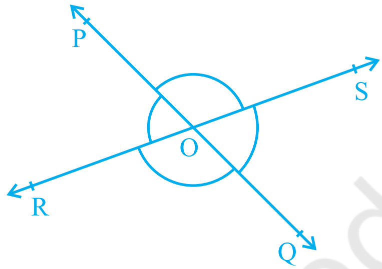
$$\angle AOC + \angle AOD = \angle AOD + \angle BOD$$

इससे निष्कर्ष निकलता है कि $\angle$ AOC = $\angle$ BOD (अनुच्छेद 5.2 का अभिगृहीत 3 देखिए)

इसी प्रकार, सिद्ध किया जा सकता है कि $\angle AOD = \angle BOC$ है।

आइए अब रैखिक युग्म अभिगृहीत और प्रमेय 6.1 पर आधारित कुछ उदाहरण हल करें।

उदाहरण 1 : आकृति 6.9 में, रेखाएँ PQ और RS परस्पर बिंदु O पर प्रतिच्छेद करती हैं। यदि $\angle POR : \angle ROQ = 5 : 7$ है, तो सभी कोण ज्ञात कीजिए।



आकृति 6.9

हल : $\angle POR + \angle ROQ = 180^\circ$ (रैखिक युग्म के कोण)

परन्तु, $\angle POR : \angle ROQ = 5 : 7$ (दिया है)

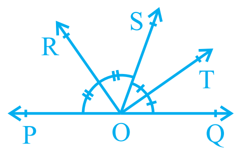
अतः, $\angle POR = \frac{5}{12} \times 180^\circ = 75^\circ$

इसी प्रकार, $\angle ROQ = \frac{7}{12} \times 180^\circ = 105^\circ$

अब $\angle POS = \angle ROQ = 105^\circ$ (शीर्षाभिमुख कोण)

और $\angle SOQ = \angle POR = 75^\circ$ (शीर्षाभिमुख कोण)

उदाहरण 2 : आकृति 6.10 में, किरण OS रेखा POQ पर खड़ी है। किरण OR और OT क्रमशः $\angle POS$ और $\angle SOQ$ के समद्विभाजक हैं। यदि $\angle POS = x$ है, तो $\angle ROT$ ज्ञात कीजिए।



आकृति 6.10

हल : किरण OS रेखा POQ पर खड़ी है।

अतः, $\angle POS + \angle SOQ = 180^\circ$

परन्तु, $\angle POS = x$

अतः, $x + \angle SOQ = 180^\circ$

इसलिए, $\angle SOQ = 180^\circ - x$

अब किरण OR, $\angle POS$ को समद्विभाजित करती है।

इसलिए, $\angle ROS = \frac{1}{2} \times \angle POS$

$$= \frac{1}{2} \times x = \frac{x}{2}$$

इसी प्रकार, $\angle \text{SOT} = \frac{1}{2} \times \angle \text{SOQ}$

$$= \frac{1}{2} \times (180° - x)$$

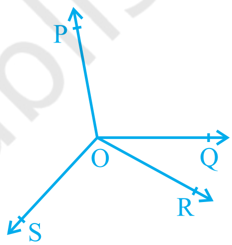
$$= 90° - \frac{x}{2}$$

अब, $\angle \text{ROT} = \angle \text{ROS} + \angle \text{SOT}$

$$= \frac{x}{2} + 90° - \frac{x}{2}$$

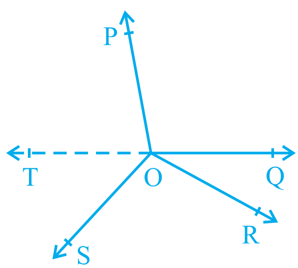
$$= 90°$$

उदाहरण 3 : आकृति 6.11 में, OP, OQ, OR और OS चार किरणें हैं। सिद्ध कीजिए कि $\angle \text{POQ} + \angle \text{QOR} + \angle \text{SOR} + \angle \text{POS} = 360°$ है।



आकृति 6.11

हल : आकृति 6.11 में, आपको किरणों OP, OQ, OR और OS में से किसी एक को पीछे एक बिंदु तक बढ़ाए जाने की आवश्यकता है। आइए किरण OQ को एक बिंदु T तक पीछे बढ़ा दें ताकि TOQ एक रेखा हो (देखिए आकृति 6.12)।



आकृति 6.12

अब किरण OP रेखा TOQ पर खड़ी है।

अत:, $\angle \text{TOP} + \angle \text{POQ} = 180°$ (1)

(रैखिक युग्म अभिगृहीत)

इसी प्रकार, किरण OS रेखा TOQ पर खड़ी है।

अत:, $\angle \text{TOS} + \angle \text{SOQ} = 180°$ (2)

परन्तु $\angle \text{SOQ} = \angle \text{SOR} + \angle \text{QOR}$ है।

अत:, (2) निम्न हो जाती है :

$$\angle \text{TOS} + \angle \text{SOR} + \angle \text{QOR} = 180° \quad (3)$$

अब, (1) और (3) को जोड़ने पर, आपको प्राप्त होगा:

$$\angle TOP + \angle POQ + \angle TOS + \angle SOR + \angle QOR = 360° \qquad (4)$$

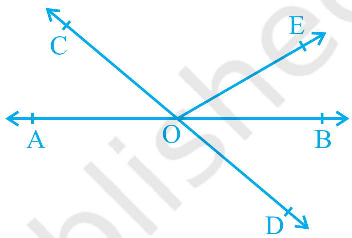
परन्तु $\angle TOP + \angle TOS = \angle POS$ है।

अतः, (4) निम्न हो जाती है :

$$\angle POQ + \angle QOR + \angle SOR + \angle POS = 360°$$

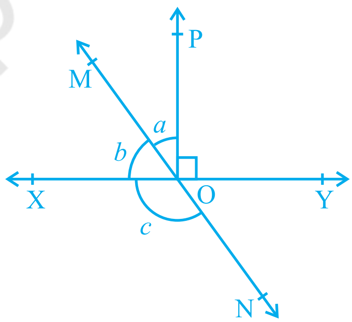
प्रश्नावली 6.1

1. आकृति 6.13 में, रेखाएँ AB और CD बिंदु O पर प्रतिच्छेद करती हैं। यदि $\angle AOC + \angle BOE = 70°$ है और $\angle BOD = 40°$ है, तो $\angle BOE$ और प्रतिवर्ती $\angle COE$ ज्ञात कीजिए।



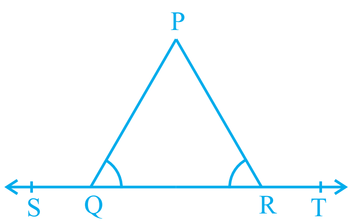
आकृति 6.13

2. आकृति 6.14 में, रेखाएँ XY और MN बिंदु O पर प्रतिच्छेद करती हैं। यदि $\angle POY = 90°$ और $a : b = 2 : 3$ है, तो c ज्ञात कीजिए।



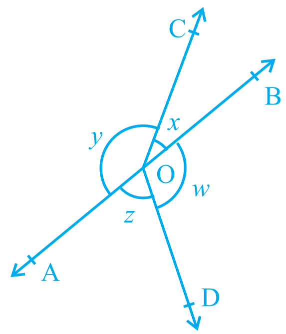
आकृति 6.14

3. आकृति 6.15 में, यदि $\angle PQR = \angle PRQ$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $\angle PQS = \angle PRT$ है।



आकृति 6.15

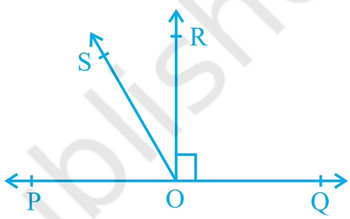
4. आकृति 6.16 में, यदि $x + y = w + z$ है, तो सिद्ध कीजिए कि AOB एक रेखा है।



आकृति 6.16

5. आकृति 6.17 में, POQ एक रेखा है। किरण OR रेखा PQ पर लम्ब है। किरणों OP और OR के बीच में OS एक अन्य किरण है। सिद्ध कीजिए:

$$\angle \text{ROS} = \frac{1}{2}(\angle \text{QOS} - \angle \text{POS})$$

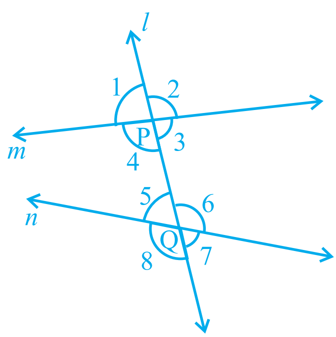


आकृति 6.17

6. यह दिया है कि $\angle \text{XYZ} = 64°$ है और XY को बिंदु P तक बढ़ाया गया है। दी हुई सूचना से एक आकृति खींचिए। यदि किरण YQ, $\angle$ZYP को समद्विभाजित करती है, तो $\angle$XYQ और प्रतिवर्ती $\angle$QYP के मान ज्ञात कीजिए।

6.5 समांतर रेखाएँ और तिर्यक रेखा

आपको याद होगा कि वह रेखा जो दो या अधिक रेखाओं को भिन्न बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करती है एक **तिर्यक रेखा (transversal)** कहलाती है (देखिए आकृति 6.18)। रेखा l रेखाओं m और n को क्रमश: बिंदुओं P और Q पर प्रतिच्छेद करती है। अत: रेखा l रेखाओं m और n के लिए एक तिर्यक रेखा है। देखिए कि प्रत्येक बिंदु P और Q पर चार कोण बन रहे हैं।



आकृति 6.18

आइए इन कोणों को आकृति 6.18 में दर्शाए अनुसार $\angle 1, \angle 2, \ldots, \angle 8$ से नामांकित करें।

$\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 7$ और $\angle 8$ **बाह्य: कोण** **(exterior angles)** कहलाते हैं। $\angle 3$, $\angle 4$, $\angle 5$ और $\angle 6$ **अंत: कोण (interior angles)** कहलाते हैं।

याद कीजिए कि पिछली कक्षाओं में, आपने कुछ कोणों के युग्मों का नामांकन किया था, जो एक तिर्यक रेखा द्वारा दो रेखाओं को प्रतिच्छेद करने से बनते हैं। ये युग्म निम्न हैं:

(a) **संगत कोण (Corresponding angles) :**

(i) $\angle 1$ और $\angle 5$ (ii) $\angle 2$ और $\angle 6$

(iii) $\angle 4$ और $\angle 8$ (iv) $\angle 3$ और $\angle 7$

(b) **एकांतर अंत: कोण (Alternate interior angles) :**

(i) $\angle 4$ और $\angle 6$ (ii) $\angle 3$ और $\angle 5$

(c) **एकांतर बाह्य: कोण (Alternate exterior angles) :**

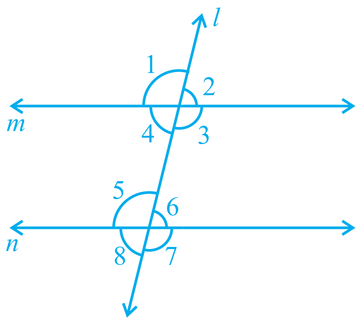
(i) $\angle 1$ और $\angle 7$ (ii) $\angle 2$ और $\angle 8$

(d) **तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अंत: कोण:**

(i) $\angle 4$ और $\angle 5$ (ii) $\angle 3$ और $\angle 6$

तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अंत: कोणों को **क्रमागत अंत: कोण (consecutive interior angles)** या **संबंधित कोण (allied angles)** या **सह-अंत: कोण (co-interior angles)** भी कहा जाता है। साथ ही, अनेक बार हम एकांतर अंत: कोणों के लिए केवल शब्दों एकांतर कोणों का प्रयोग करते हैं।

आइए अब इन कोणों में संबंध ज्ञात करें जब रेखाएँ *m* और *n* समांतर हैं। आप जानते हैं कि आपकी अभ्यास-पुस्तिका पर बनी सीधी लकीरें (ruled lines) परस्पर समांतर होती हैं। इसलिए, इन लकीरों के अनुदिश पटरी और पेंसिल की सहायता से दो समांतर रेखाएँ भी खींचिए, जैसा कि आकृति 6.19 में दर्शाया गया है।



आकृति 6.19

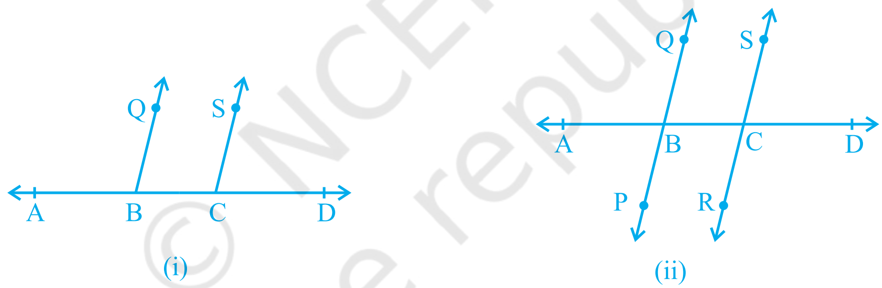
अब संगत कोणों के किसी भी युग्म को मापिए और उनके बीच में संबंध ज्ञात कीजिए। आप ज्ञात कर सकते हैं कि $\angle 1 = \angle 5, \angle 2 = \angle 6, \angle 4 = \angle 8$ और $\angle 3 = \angle 7$ है। इससे आप निम्न अभिगृहीत को स्वीकृत कर सकते हैं:

अभिगृहीत 6.3 : *यदि एक तिर्यक रेखा दो समांतर रेखाओं को प्रतिच्छेद करे, तो संगत कोणों का प्रत्येक युग्म बराबर होता है।*

अभिगृहीत 6.3 को **संगत कोण अभिगृहीत** भी कहा जाता है। आइए अब इस अभिगृहीत के विलोम (converse) की चर्चा करें, जो निम्न है:

'यदि एक तिर्यक रेखा दो रेखाओं को इस प्रकार प्रतिच्छेद करे कि संगत कोणों का एक युग्म बराबर हो, तो दोनों रेखाएँ समांतर होती हैं'।

क्या यह कथन सत्य है? इसकी जाँच निम्न प्रकार की जा सकती है : एक रेखा AD खींचिए और उस पर दो बिंदु B और C अंकित कीजए। B और C पर क्रमश: $\angle$ ABQ और $\angle$ BCS की रचना कीजिए जो परस्पर बराबर हों, जैसा कि आकृति 6.20 (i) में दर्शाया गया है।

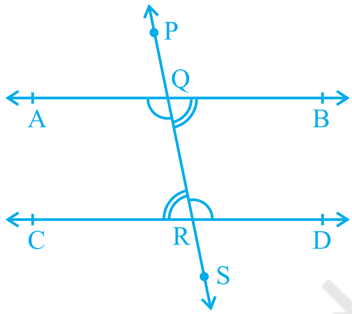


आकृति 6.20

QB और SC को AD के दूसरी ओर बढ़ाकर रेखाएँ PQ और RS प्राप्त कीजिए, जैसा कि आकृति 6.20 (ii) में दर्शाया गया है। आप देख सकते हैं कि ये रेखाएँ परस्पर प्रतिच्छेद नहीं करतीं। आप दोनों रेखाओं PQ और RS के विभिन्न बिंदुओं पर उभयनिष्ठ लम्ब खींच कर और उनकी लम्बाइयाँ माप कर देख सकते हैं कि ये लंबाइयाँ प्रत्येक स्थान पर बराबर हैं। अत: आप निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि ये रेखाएँ समांतर हैं। अर्थात् संगत कोण अभिगृहीत का विलोम भी सत्य है। इस प्रकार, हम निम्न अभिगृहीत प्राप्त करते हैं :

अभिगृहीत 6.4 : *यदि एक तिर्यक रेखा दो रेखाओं को इस प्रकार प्रतिच्छेद करे कि संगत कोणों का एक युग्म बराबर है, तो दोनों रेखाएँ परस्पर समांतर होती हैं।*

क्या हम एक तिर्यक रेखा द्वारा दो समांतर रेखाओं को प्रतिच्छेद करने से बने एकांतर अंतः कोणों के बीच कोई संबंध ज्ञात करने के लिए संगत कोण अभिगृहीत का प्रयोग कर सकते हैं? आकृति 6.21 में, तिर्यक रेखा PS समांतर रेखाओं AB और CD को क्रमशः बिंदुओं Q और R पर प्रतिच्छेद करती है।



आकृति 6.21

क्या $\angle BQR = \angle QRC$ और $\angle AQR = \angle QRD$ हैं?

आप जानते हैं कि $\angle PQA = \angle QRC$ (1)

(संगत कोण अभिगृहीत)

क्या $\angle PQA = \angle BQR$ है? हाँ! (क्यों?) (2)

इसलिए (1) और (2) से, हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि

$$\angle BQR = \angle QRC$$

इसी प्रकार, $\angle AQR = \angle QRD$

उपरोक्त परिणाम को एक प्रमेय (theorem) के रूप में निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है:

प्रमेय 6.2 : *यदि एक तिर्यक रेखा दो समांतर रेखाओं को प्रतिच्छेद करे, तो एकांतर अंतः कोणों का प्रत्येक युग्म बराबर होता है।*

अब, संगत कोण अभिगृहीत के विलोम का प्रयोग करके क्या हम एकांतर अंतः कोणों के एक युग्म के बराबर होने पर दोनों रेखाओं को समांतर दर्शा सकते हैं? आकृति 6.22 में, तिर्यक रेखा PS रेखाओं AB और CD को क्रमशः बिंदुओं Q और R पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करती है कि $\angle BQR = \angle QRC$ है।

क्या $AB \parallel CD$ है?

$\angle BQR = \angle PQA$ (क्यों ?) (1)

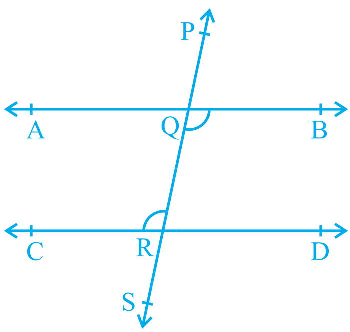
परन्तु, $\angle BQR = \angle QRC$ (दिया है) (2)

अतः, (1) और (2) से आप निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि

$\angle PQA = \angle QRC$

परन्तु ये संगत कोण हैं।

अतः, $AB \parallel CD$ है। (संगत कोण अभिगृहीत का विलोम)



आकृति 6.22

इस कथन को एक प्रमेय के रूप में निम्न प्रकार व्यक्त किया जा सकता है:

प्रमेय 6.3 : *यदि एक तिर्यक रेखा दो रेखाओं को इस प्रकार प्रतिच्छेद करे कि एकांतर अंतः कोणों का एक युग्म बराबर है, तो दोनों रेखाएँ परस्पर समांतर होती हैं।*

इसी प्रकार, आप तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अंतः कोणों से संबंधित निम्नलिखित दो प्रमेय प्राप्त कर सकते हैं:

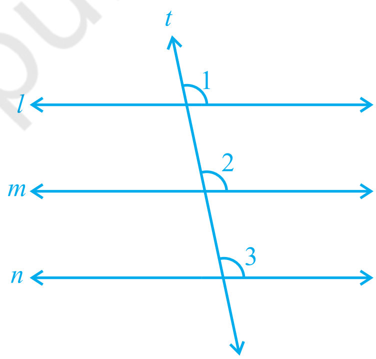
प्रमेय 6.4 : *यदि एक तिर्यक रेखा दो समांतर रेखाओं को प्रतिच्छेद करे, तो तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अंतः कोणों का प्रत्येक युग्म संपूरक होता है।*

प्रमेय 6.5 : *यदि एक तिर्यक रेखा दो रेखाओं को इस प्रकार प्रतिच्छेद करे कि तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अंतः कोणों का एक युग्म संपूरक है, तो दोनों रेखाएँ परस्पर समांतर होती हैं।*

आपको याद होगा कि इन सभी अभिगृहीतों और प्रमेयों की जाँच पिछली कक्षाओं में आप कुछ क्रियाकलापों के द्वारा कर चुके हैं। आप इन क्रियाकलापों को यहाँ दोहरा सकते हैं।

6.6 एक ही रेखा के समांतर रेखाएँ

यदि दो रेखाएँ एक ही रेखा के समांतर हों, तो क्या वे परस्पर समांतर होंगी? आइए इसकी जाँच करें। आकृति 6.23 को देखिए, जिसमें $m \parallel l$ है और $n \parallel l$ है। आइए रेखाओं l, m और n के लिए एक तिर्यक रेखा t खींचें। यह दिया है कि $m \parallel l$ है और $n \parallel l$ है।



आकृति 6.23

अतः, $\angle 1 = \angle 2$ और $\angle 1 = \angle 3$ है।

(संगत कोण अभिगृहीत)

इसलिए, $\angle 2 = \angle 3$ (क्यों?)

परन्तु $\angle 2$ और $\angle 3$ संगत कोण हैं और बराबर हैं।

अतः, आप कह सकते हैं कि

$m \parallel n$ (संगत कोण अभिगृहीत का विलोम)

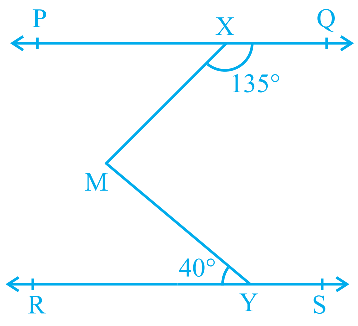
इस परिणाम को एक प्रमेय के रूप में निम्न प्रकार व्यक्त किया जा सकता है:

प्रमेय 6.6 : *वे रेखाएँ जो एक ही रेखा के समांतर हों, परस्पर समांतर होती हैं।*

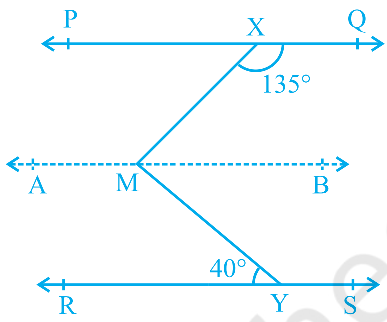
टिप्पणी : उपरोक्त गुण को दो से अधिक रेखाओं के लिए भी लागू किया जा सकता है।

आइए अब समांतर रेखाओं से संबंधित कुछ प्रश्न हल करें:

उदाहरण 4 : आकृति 6.24 में, यदि PQ || RS, ∠ MXQ = 135° और ∠ MYR = 40° है, तो ∠ XMY ज्ञात कीजिए।



आकृति 6.24



आकृति 6.25

हल : यहाँ हमें *m* से होकर, रेखा PQ के समांतर एक रेखा AB खींचने की आवश्यकता है, जैसा कि आकृति 6.25 में दिखाया गया है। अब, AB || PQ और PQ || RS है।

अत:, AB || RS है। (क्यों?)

अब, ∠ QXM + ∠ XMB = 180°

(AB || PQ, तिर्यक रेखा XM के एक ही ओर के अंत: कोण)

परन्तु, ∠ QXM = 135° है। इसलिए,

135° + ∠ XMB = 180°

अत:, ∠ XMB = 45° (1)

अब, ∠ BMY = ∠ MYR (AB || RS, एकांतर कोण)

अत:, ∠ BMY = 40° (2)

(1) और (2) को जोड़ने पर, आपको प्राप्त होगा :

∠ XMB + ∠ BMY = 45° + 40°

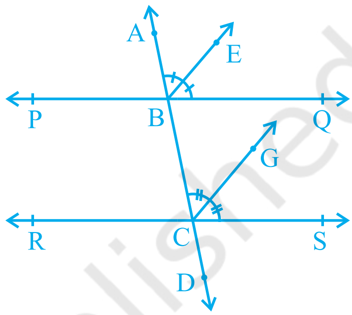
अर्थात, ∠ XMY = 85°

उदाहरण 5 : यदि एक तिर्यक रेखा दो रेखाओं को इस प्रकार प्रतिच्छेद करे कि संगत कोणों के एक युग्म के समद्विभाजक परस्पर समांतर हों, तो सिद्ध कीजिए कि दोनों रेखाएँ भी परस्पर समांतर होती हैं।

हल : आकृति 6.26 में, एक तिर्यक रेखा AD दो रेखाओं PQ और RS को क्रमशः बिंदुओं B और C पर प्रतिच्छेद करती है। किरण BE, $\angle ABQ$ की समद्विभाजक है और किरण CG, $\angle BCS$ की समद्विभाजक है तथा $BE \parallel CG$ है।

हमें सिद्ध करना है कि $PQ \parallel RS$ है।

यह दिया है कि किरण BE, $\angle ABQ$ की समद्विभाजक है।



आकृति 6.26

अतः, $\angle ABE = \frac{1}{2} \angle ABQ$ (1)

इसी प्रकार किरण CG, $\angle BCS$ की समद्विभाजक है।

अतः, $\angle BCG = \frac{1}{2} \angle BCS$ (2)

परन्तु, $BE \parallel CG$ है और AD एक तिर्यक रेखा है।

अतः, $\angle ABE = \angle BCG$

(संगत कोण अभिगृहीत) (3)

(3) में, (1) और (2) को प्रतिस्थापित करने पर, आपको प्राप्त होगा:

$$\frac{1}{2} \angle ABQ = \frac{1}{2} \angle BCS$$

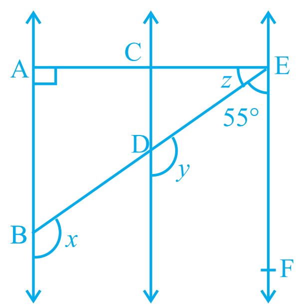
अर्थात्, $\angle ABQ = \angle BCS$

परन्तु, ये तिर्यक रेखा AD द्वारा रेखाओं PQ और RS के साथ बनाए गए संगत कोण हैं और ये बराबर हैं।

अतः, $PQ \parallel RS$

(संगत कोण अभिगृहीत का विलोम)

उदाहरण 6 : आकृति 6.27 में, $AB \parallel CD$ और $CD \parallel EF$ है। साथ ही, $EA \perp AB$ है। यदि $\angle BEF = 55°$ है, तो x, y और z के मान ज्ञात कीजिए।



आकृति 6.27

हल : $y + 55° = 180°$ ($CD \parallel EF$, तिर्यक रेखा ED के एक ही ओर के अंतः कोण)

अतः, $y = 180° - 55° = 125°$

पुनः, $x = y$ (AB ∥ CD, संगत कोण अभिगृहीत)

इसलिए, $x = 125°$

अब चूँकि AB ∥ CD और CD ∥ EF है, इसलिए AB ∥ EF है।

अतः, $\angle EAB + \angle FEA = 180°$

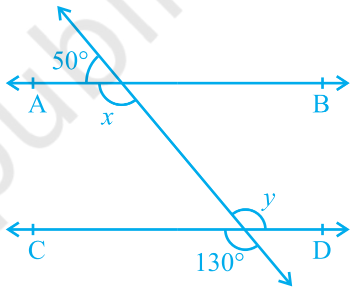
(तिर्यक रेखा EA के एक ही ओर के अंतः कोण)

इसलिए, $90° + z + 55° = 180°$

जिससे, $z = 35°$ प्राप्त होता है।

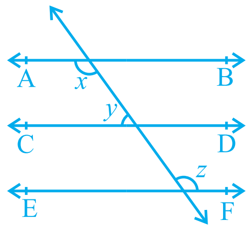
प्रश्नावली 6.2

1. आकृति 6.28 में, x और y के मान ज्ञात कीजिए और फिर दर्शाइए कि AB ∥ CD है।



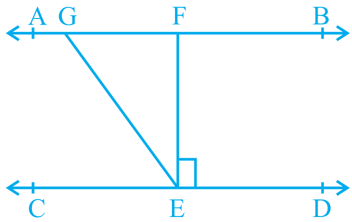
आकृति 6.28

2. आकृति 6.29 में, यदि AB ∥ CD, CD ∥ EF और $y : z = 3 : 7$ है, तो x का मान ज्ञात कीजिए।



आकृति 6.29

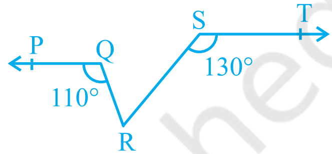
3. आकृति 6.30 में, यदि AB ‖ CD, EF ⊥ CD और $\angle$GED = 126° है, तो $\angle$AGE, $\angle$GEF और $\angle$FGE ज्ञात कीजिए।



आकृति 6.30

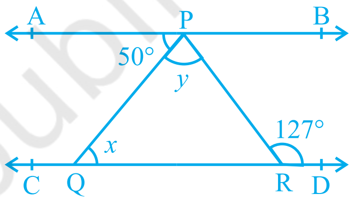
4. आकृति 6.31में, यदि PQ ‖ ST, $\angle$PQR = 110° और $\angle$RST = 130° है, तो $\angle$QRS ज्ञात कीजिए।

[**संकेत :** बिंदु R से होकर ST के समांतर एक रेखा खींचिए।]



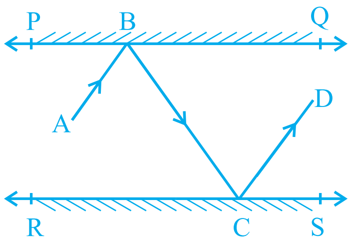
आकृति 6.31

5. आकृति 6.32 में, यदि AB ‖ CD, $\angle$APQ = 50° और $\angle$PRD = 127° है, तो x और y ज्ञात कीजिए।



आकृति 6.32

6. आकृति 6.33 में, PQ और RS दो दर्पण हैं जो एक दूसरे के समांतर रखे गए हैं। एक आपतन किरण (incident ray) AB, दर्पण PQ से B पर टकराती है और परावर्तित किरण (reflected ray) पथ BC पर चलकर दर्पण RS से C पर टकराती है तथा पुन: CD के अनुदिश परावर्तित हो जाती है। सिद्ध कीजिए कि AB ‖ CD है।

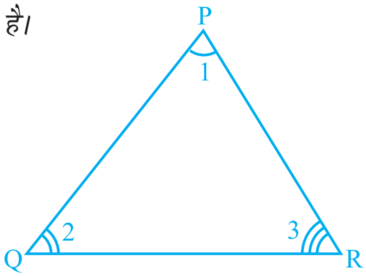


आकृति 6.33

6.7 त्रिभुज का कोण योग गुण

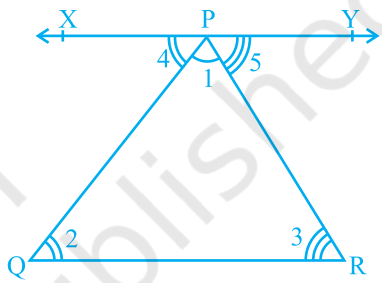
पिछली कक्षाओं में आप क्रियाकलापों द्वारा यह सीख चुके हैं कि एक त्रिभुज के सभी कोणों का योग 180° होता है। हम इस कथन को समांतर रेखाओं से संबंधित अभिगृहीतों और प्रमेयों का प्रयोग करके सिद्ध कर सकते हैं।

प्रमेय 6.7 : *किसी त्रिभुज के कोणों का योग 180° होता है।*



आकृति 6.34

उपपत्ति : आइए देखें कि हमें उपरोक्त कथन में क्या दिया है, अर्थात् हमारी परिकल्पना (hypothesis) क्या है और हमें क्या सिद्ध करना है। हमें एक त्रिभुज PQR दिया है तथा $\angle 1$, $\angle 2$ और $\angle 3$ इस त्रिभुज के कोण हैं (देखिए आकृति 6.34)।



आकृति 6.35

हमें, $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$ सिद्ध करना है। आइए भुजा QR के समांतर उसके सम्मुख शीर्ष P से होकर एक रेखा XPY खींचें, जैसा कि आकृति 6.35 में दर्शाया गया है। इससे हम समांतर रेखाओं से संबंधित गुणों का प्रयोग कर सकते हैं।

अब, XPY एक रेखा है।

अत:, $\angle 4 + \angle 1 + \angle 5 = 180°$ है। (1)

परन्तु XPY ॥ QR तथा PQ और PR तिर्यक रेखाएँ हैं।

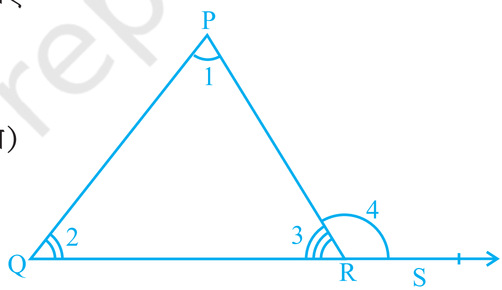
इसलिए, $\angle 4 = \angle 2$ और $\angle 5 = \angle 3$

(एकांतर कोणों के युग्म)

$\angle 4$ और $\angle 5$ के ये मान (1) में, रखने पर हमें प्राप्त होता है:

$$\angle 2 + \angle 1 + \angle 3 = 180°$$

अर्थात्, $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$ है।



आकृति 6.36

याद कीजिए कि आपने पिछली कक्षाओं में, एक त्रिभुज के बहिष्कोणों (exterior angles) के बारे में अध्ययन किया था (देखिए आकृति 6.36)। भुजा QR को बिंदु S तक बढ़ाया गया है। $\angle$ PRS त्रिभुज PQR का एक **बहिष्कोण (exterior angle)** है।

क्या $\angle 3 + \angle 4 = 180°$ है? (क्यों?) (1)

साथ ही, यह भी देखिए कि $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$ है। (क्यों?) (2)

(1) और (2) से, आप देख सकते हैं कि $\angle 4 = \angle 1 + \angle 2$ है।

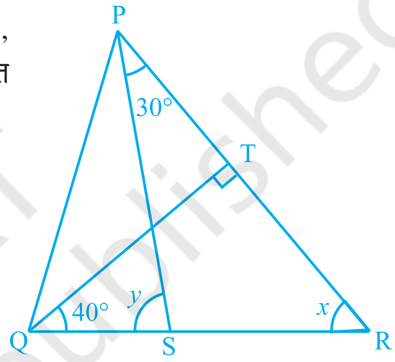
इस परिणाम को एक प्रमेय के रूप में निम्न प्रकार व्यक्त किया जा सकता है:

प्रमेय 6.8 : *यदि एक त्रिभुज की एक भुजा बढ़ाई जाए, तो इस प्रकार बना बहिष्कोण दोनों अंत: अभिमुख (विपरीत) कोणों (interior opposite angles) के योग के बराबर होता है।*

उपरोक्त प्रमेय से यह स्पष्ट है कि *किसी त्रिभुज का एक बहिष्कोण अपने दोनों अंत: अभिमुख कोणों में से प्रत्येक से बड़ा होता है।*

आइए इन प्रमेयों का प्रयोग करके कुछ उदाहरण हल करें।

उदाहरण 7 : आकृति 6.37 में, यदि QT ⊥ PR, $\angle$ TQR = 40° और $\angle$ SPR = 30° है, तो x और y ज्ञात कीजिए।



आकृति 6.37

हल : Δ TQR में, 90° + 40° + x = 180°

(त्रिभुज का कोण योग गुण)

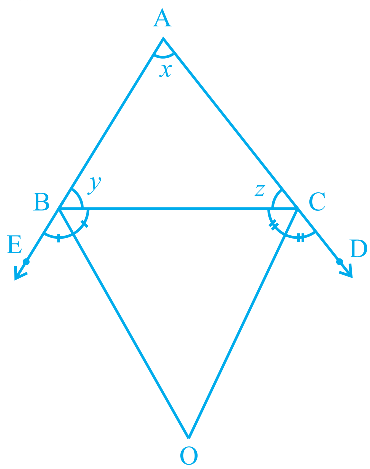
अत:, x = 50°

अब, $y = \angle$ SPR + x (प्रमेय 6.8)

अत:, y = 30° + 50° = 80°

उदाहरण 8 : आकृति 6.38 में, ΔABC की भुजाओं AB और AC को क्रमश: E और D तक बढ़ाया गया है। यदि $\angle$ CBE और $\angle$ BCD के समद्विभाजक क्रमश: BO और CO बिंदु O पर मिलते हैं, तो सिद्ध कीजिए कि

$\angle \text{BOC} = 90° - \frac{1}{2} \angle \text{BAC}$ है।



आकृति 6.38

हल : किरण BO कोण CBE की समद्विभाजक है।

अत:, $\angle \text{CBO} = \frac{1}{2} \angle \text{CBE}$

$= \frac{1}{2}(180° - y)$

$= 90° - \frac{y}{2}$ (1)

इसी प्रकार, किरण CO कोण BCD की समद्विभाजक है।

अतः, $\angle BCO = \frac{1}{2} \angle BCD$

$$= \frac{1}{2}(180° - z) = 90° - \frac{z}{2} \quad (2)$$

Δ BOC में, $\angle BOC + \angle BCO + \angle CBO = 180°$ है। (3)

(1) और (2) को (3) में रखने पर, आपको प्राप्त होगा :

$$\angle BOC + 90° - \frac{z}{2} + 90° - \frac{y}{2} = 180°$$

इसलिए, $\angle BOC = \frac{z}{2} + \frac{y}{2}$

या, $\angle BOC = \frac{1}{2}(y + z)$ (4)

परन्तु, $x + y + z = 180°$ (त्रिभुज का कोण योग गुण)

अतः, $y + z = 180° - x$

इससे (4) निम्न हो जाता है :

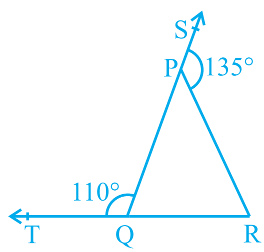
$$\angle BOC = \frac{1}{2}(180° - x)$$

$$= 90° - \frac{x}{2}$$

$$= 90° - \frac{1}{2}\angle BAC$$

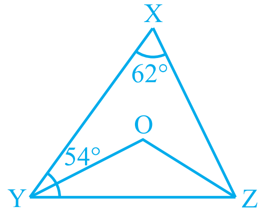
प्रश्नावली 6.3

1. आकृति 6.39 में, Δ PQR की भुजाओं QP और RQ को क्रमशः बिंदुओं S और T तक बढ़ाया गया है। यदि $\angle SPR = 135°$ है और $\angle PQT = 110°$ है, तो $\angle PRQ$ ज्ञात कीजिए।



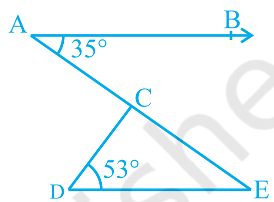
आकृति 6.39

2. आकृति 6.40 में, $\angle X = 62°$ और $\angle XYZ = 54°$ है। यदि YO और ZO क्रमशः Δ XYZ के $\angle XYZ$ और $\angle XZY$ के समद्विभाजक हैं, तो $\angle OZY$ और $\angle YOZ$ ज्ञात कीजिए।



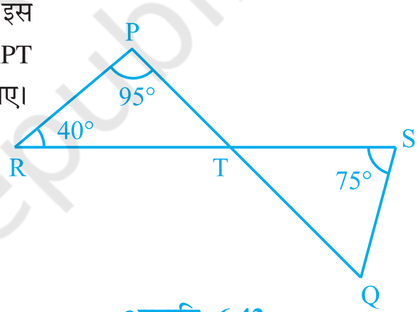
आकृति 6.40

3. आकृति 6.41 में, यदि AB ॥ DE, $\angle BAC = 35°$ और $\angle CDE = 53°$ है, तो $\angle DCE$ ज्ञात कीजिए।



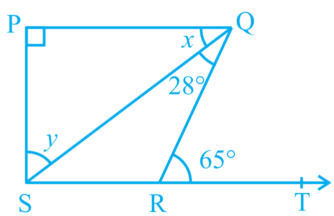
आकृति 6.41

4. आकृति 6.42 में, यदि रेखाएँ PQ और RS बिंदु T पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करती हैं कि $\angle PRT = 40°$, $\angle RPT = 95°$ और $\angle TSQ = 75°$ है, तो $\angle SQT$ ज्ञात कीजिए।



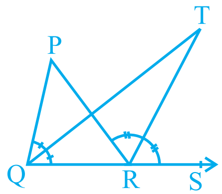
आकृति 6.42

5. आकृति 6.43 में, यदि PQ $\perp$ PS, PQ ॥ SR, $\angle SQR = 28°$ और $\angle QRT = 65°$ है, तो x और y के मान ज्ञात कीजिए।



आकृति 6.43

6. आकृति 6.44 में, Δ PQR की भुजा QR को बिंदु S तक बढ़ाया गया है। यदि $\angle$ PQR और $\angle$ PRS के समद्विभाजक बिंदु T पर मिलते हैं, तो सिद्ध कीजिए कि $\angle QTR = \frac{1}{2} \angle QPR$ है।



आकृति 6.44

6.8 सारांश

इस अध्याय में, आपने निम्न बिंदुओं का अध्ययन किया है:

1. यदि एक किरण एक रेखा पर खड़ी हो, तो इस प्रकार बने दोनों आसन्न कोणों का योग 180° होता है और विलोमत: यदि दो आसन्न कोणों का योग 180° है, तो उनकी अउभयनिष्ठ भुजाएँ एक रेखा बनाती हैं। इन गुणों को मिलाकर रैखिक युग्म अभिगृहीत कहते हैं।

2. यदि दो रेखाएँ परस्पर प्रतिच्छेद करें, तो शीर्षाभिमुख कोण बराबर होते हैं।

3. यदि एक तिर्यक रेखा दो समांतर रेखाओं को प्रतिच्छेद करे, तो

(i) संगत कोणों का प्रत्येक युग्म बराबर होता है।

(ii) एकांतर अंत: कोणों का प्रत्येक युग्म बराबर होता है।

(iii) तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अंत: कोणों का प्रत्येक युग्म संपूरक होता है।

4. यदि एक तिर्यक रेखा दो रेखाओं को इस प्रकार प्रतिच्छेद करे कि या तो

(i) संगत कोणों का कोई एक युग्म बराबर हो या

(ii) एकांतर अंत: कोणों का कोई एक युग्म बराबर हो या

(iii) तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अंत: कोणों का कोई एक युग्म संपूरक हो, तो ये दोनों रेखाएँ समांतर होती हैं।

5. वे रेखाएँ जो एक ही रेखा के समांतर होती हैं परस्पर समांतर होती हैं।

6. एक त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180^0 होता है।

7. यदि किसी त्रिभुज की एक भुजा को बढ़ाया जाए, तो इस प्रकार बना बहिष्कोण अपने दोनों अंत: अभिमुख कोणों के योग के बराबर होता है।

0963CH07

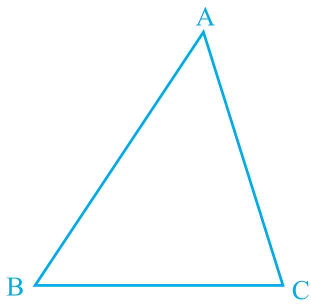
अध्याय 7

त्रिभुज

7.1 भूमिका

आप पिछली कक्षाओं में, त्रिभुजों और उनके विभिन्न गुणों के बारे में अध्ययन कर चुके हैं। आप जानते हैं कि तीन प्रतिच्छेदी रेखाओं द्वारा बनाई गई एक बंद आकृति (closed figure) एक *त्रिभुज* (*triangle*) कहलाती है ('त्रि' का अर्थ है 'तीन')। एक त्रिभुज की तीन भुजाएँ, तीन कोण और तीन शीर्ष होते हैं। उदाहरणार्थ, आकृति 7.1 में दिए त्रिभुज ABC, जिसे Δ ABC से व्यक्त करते हैं, की तीन भुजाएँ AB, BC और CA हैं, $\angle$ A, $\angle$ B और $\angle$ C इसके तीन कोण हैं तथा A, B और C इसके तीन शीर्ष हैं।

अध्याय 6 में, आप त्रिभुजों के कुछ गुणों का भी अध्ययन कर चुके हैं। इस अध्याय में, आप त्रिभुजों की सर्वांगसमता (congruence), सर्वांगसमता के नियमों, त्रिभुजों के कुछ अन्य गुणों और त्रिभुजों में असमिकाओं (inequalities) के बारे में विस्तृत रूप से अध्ययन करेंगे। आप पिछली कक्षाओं के इन गुणों में से अधिकतर गुणों की सत्यता की जाँच क्रियाकलापों द्वारा कर चुके हैं। यहाँ हम इनमें से कुछ गुणों को सिद्ध भी करेंगे।



आकृति 7.1

7.2 त्रिभुजों की सर्वांगसमता

आपने यह अवश्य ही देखा होगा कि आपकी फोटो की एक ही साइज की दो प्रतियाँ सर्वसम (identical) होती हैं। इसी प्रकार, एक ही माप की दो चूड़ियाँ और एक ही बैंक द्वारा जारी किए गए दो एटीएम (ATM) कार्ड सर्वसम होते हैं। आपने देखा होगा कि यदि एक ही वर्ष

में ढले (बने) दो एक रुपए के सिक्कों में से एक को दूसरे पर रखें, तो वे एक दूसरे को पूर्णतया ढक लेते हैं।

क्या आपको याद है कि ऐसी आकृतियों को कैसी आकृतियाँ कहते हैं? नि:संदेह ये **सर्वांगसम आकृतियाँ (congruent figures)** कहलाती हैं ('सर्वांगसम' का अर्थ है 'सभी प्रकार से बराबर', अर्थात् वे आकृतियाँ जिनके समान आकार और समान माप हैं)।

अब एक ही त्रिज्या के दो वृत्त खींचिए और एक को दूसरे पर रखिए। आप क्या देखते हैं? ये एक दूसरे को पूर्णतया ढक लेते हैं और हम इन्हें *सर्वांगसम वृत्त* कहते हैं।

इसी क्रियाकलाप की एक ही माप की भुजाओं वाले दो वर्गों को खींच कर और फिर एक वर्ग को दूसरे वर्ग पर रखकर (देखिए आकृति 7.2) अथवा बराबर भुजाओं वाले दो समबाहु त्रिभुजों को एक दूसरे पर रखकर, पुनरावृत्ति कीजिए। आप देखेंगे कि वर्ग सर्वांगसम हैं और समबाहु त्रिभुज भी सर्वांगसम हैं।

आकृति 7.2

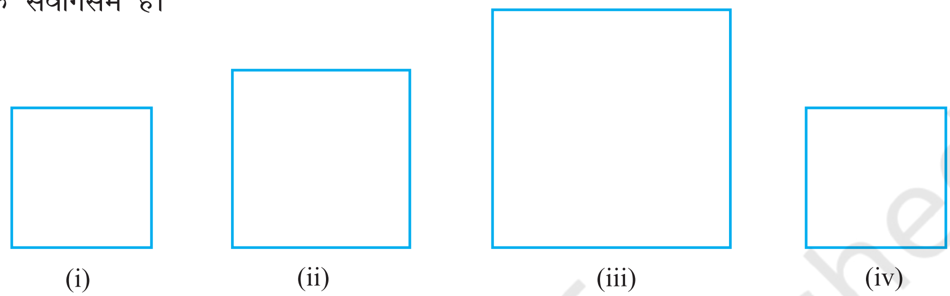
आप सोच सकते हैं कि हम सर्वांगसमता का अध्ययन क्यों कर रहे हैं। आपने अपने रेफ्रीजरेटर में बर्फ की ट्रे (ice tray) अवश्य ही देखी होगी। ध्यान दीजिए कि बर्फ जमाने के लिए बने सभी खाँचे सर्वांगसम हैं। ट्रे में (खाँचों के लिए प्रयोग किए गए साँचों की गहराइयाँ भी सर्वांगसम होती हैं (ये सभी आयताकार या सभी वृत्ताकार या सभी त्रिभुजाकार हो सकते हैं)। अत:, जब भी सर्वसम (एक जैसी) वस्तुएँ बनानी होती हैं, तो साँचे बनाने के लिए सर्वांगसमता की संकल्पना का प्रयोग किया जाता है।

कभी-कभी आपको अपने पेन के रिफिल (refill) बदलने में भी कठिनाई हो सकती है, यदि नया रिफिल आपके पेन के साइज का न हो। स्पष्टत: रिफिल तभी पेन में लग पाएगा, जबकि पुरानी रिफिल और नया रिफिल सर्वांगसम होंगे। इस प्रकार, आप दैनिक जीवन की स्थितियों में ऐसे अनेक उदाहरण ज्ञात कर सकते हैं, जहाँ वस्तुओं की सर्वांगसमता का उपयोग होता है।

क्या आप सर्वांगसम आकृतियों के कुछ और उदाहरण सोच सकते हैं?

अब, निम्न में से कौन-कौन सी आकृतियाँ आकृति 7.3 (i) में दिए वर्ग के सर्वांगसम नहीं हैं?

आकृति 7.3 (ii) और आकृति 7.3 (iii) में दिए बड़े वर्ग स्पष्टत: आकृति 7.3 (i) के वर्ग के सर्वांगसम नहीं हैं। परन्तु आकृति 7.3 (iv) में दिया हुआ वर्ग आकृति 7.3 (i) में दिए वर्ग के सर्वांगसम है।

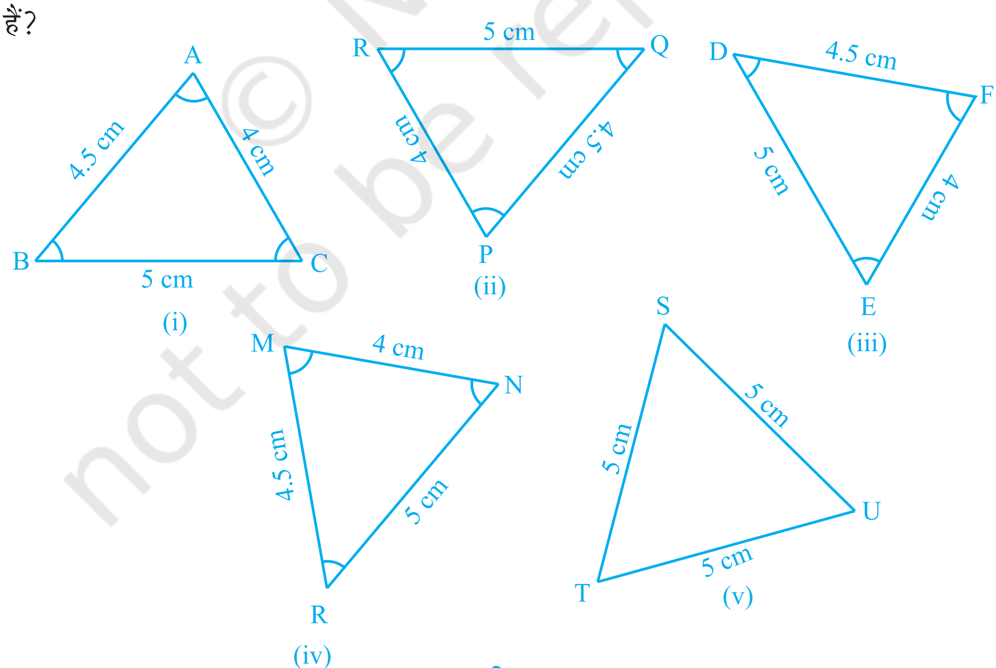


आकृति 7.3

आइए अब दो त्रिभुजों की सर्वांगसमता की चर्चा करें।

आप पहले से यह जानते हैं कि दो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं, यदि एक त्रिभुज की भुजाएँ और कोण दूसरे त्रिभुज की संगत भुजाओं और कोणों के बराबर हों।

अब, निम्न में से कौन-कौन से त्रिभुज आकृति 7.4 (i) में दिए त्रिभुज ABC के सर्वांगसम हैं?



आकृति 7.4

आकृति 7.4 (ii) से आकृति 7.4 (v) तक के प्रत्येक त्रिभुज को काट कर उसे पलट कर Δ ABC पर रखने का प्रयत्न कीजिए। देखिए कि आकृतियों 7.4 (ii), (iii) और (iv) में दिए त्रिभुज Δ ABC के सर्वांगसम हैं, जबकि 7.4 (v) का Δ TSU, Δ ABC के सर्वांगसम नहीं है।

यदि Δ PQR, Δ ABC के सर्वांगसम है, तो हम $\Delta PQR \cong \Delta ABC$ लिखते हैं।

ध्यान दीजिए कि जब $\Delta PQR \cong \Delta ABC$ हो, तो Δ PQR की भुजाएँ Δ ABC की संगत बराबर भुजाओं पर पड़ेंगी और ऐसा ही कोणों के लिए भी होगा।

अर्थात् भुजा PQ भुजा AB को ढकती है, भुजा QR भुजा BC को ढकती है और भुजा RP भुजा CA को ढकती है; कोण P कोण A को ढकता है, कोण Q कोण B को ढकता है और कोण R कोण C को ढकता है। साथ ही, दोनों त्रिभुजों के शीर्षों में एक-एक संगतता (one-one correspondence) है। अर्थात् शीर्ष P शीर्ष A के संगत है, शीर्ष Q शीर्ष B के संगत है और शीर्ष R शीर्ष C के संगत है। इसे निम्न रूप में लिखा जाता है :

$$P \leftrightarrow A,\ Q \leftrightarrow B,\ R \leftrightarrow C$$

ध्यान दीजिए कि इस संगतता के अंतर्गत, $\Delta PQR \cong \Delta ABC$ है। परन्तु इसे $\Delta QRP \cong \Delta ABC$ लिखना गलत होगा।

इसी प्रकार, आकृति 7.4 (iii) के लिए,

$$FD \leftrightarrow AB,\ DE \leftrightarrow BC \text{ और } EF \leftrightarrow CA$$

तथा $$F \leftrightarrow A,\ D \leftrightarrow B \text{ और } E \leftrightarrow C \text{ है।}$$

इसलिए, $\Delta FDE \cong \Delta ABC$ लिखना सही है, परन्तु $\Delta DEF \cong \Delta ABC$ लिखना गलत होगा।

आकृति 7.4 (iv) के त्रिभुज और Δ ABC के बीच संगतता लिखिए।

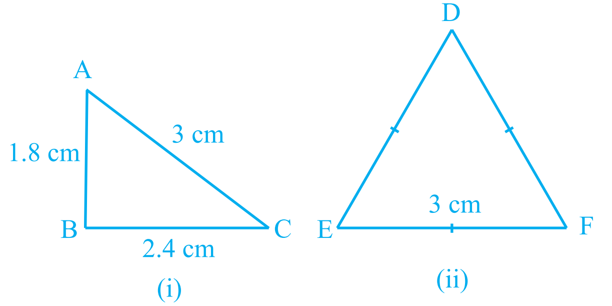
अतः, त्रिभुजों की सर्वांगसमता को सांकेतिक रूप में लिखने के लिए, उनके शीर्षों की संगतता को सही प्रकार से लिखना आवश्यक है।

ध्यान दीजिए कि **सर्वांगसम त्रिभुजों में संगत भाग बराबर होते हैं** और *'सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भागों* के लिए' हम संक्षेप में 'CPCT' लिखते हैं।

7.3 त्रिभुजों की सर्वांगसमता के लिए कसौटियाँ

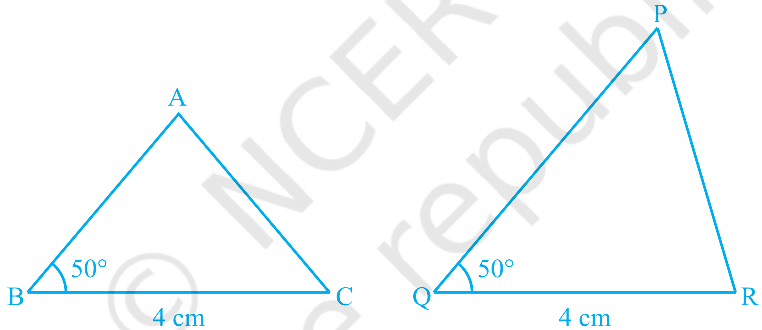
पिछली कक्षाओं में, आप त्रिभुजों की सर्वांगसमता के लिए चार कसौटियाँ (criteria) या नियम (rules) पढ़ चुके हैं। आइए इनका पुनर्विलोकन करें।

एक भुजा 3 cm लेकर दो त्रिभुज खींचिए (देखिए आकृति 7.5)। क्या ये त्रिभुज सर्वांगसम हैं? ध्यान दीजिए कि ये त्रिभुज सर्वांगसम नहीं हैं।



आकृति 7.5

अब दो त्रिभुज खींचिए जिनमें एक भुजा 4 cm है और एक कोण 50° है (देखिए आकृति 7.6)। क्या ये त्रिभुज सर्वांगसम हैं?



आकृति 7.6

देखिए कि ये दोनों त्रिभुज सर्वांगसम नहीं हैं।

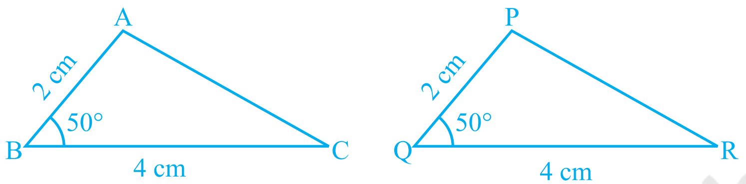
इस क्रियाकलाप को त्रिभुजों के कुछ और युग्म खींच कर दोहराइए।

अतः, भुजाओं के एक युग्म की समता अथवा भुजाओं के एक युग्म और कोणों के एक युग्म की समता हमें सर्वांगसम त्रिभुज देने के लिए पर्याप्त नहीं है।

उस स्थिति में क्या होगा जब बराबर कोणों की भुजाओं का अन्य युग्म भी बराबर हो जाए?

आकृति 7.7 में $BC = QR$, $\angle B = \angle Q$ और साथ ही $AB = PQ$ है। अब आप ΔABC और ΔPQR की सर्वांगसमता के बारे में क्या कह सकते हैं?

पिछली कक्षाओं से याद कीजिए कि इस स्थिति में, दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं। आप इसका सत्यापन, Δ ABC को काट कर और उसे Δ PQR पर रख कर कर सकते हैं। इस क्रियाकलाप को त्रिभुजों के अन्य युग्म लेकर दोहराइए। क्या आप देखते हैं कि दो भुजाओं और अंतर्गत कोण की समता त्रिभुजों की सर्वांगसमता के लिए पर्याप्त है? हाँ, यह पर्याप्त है।



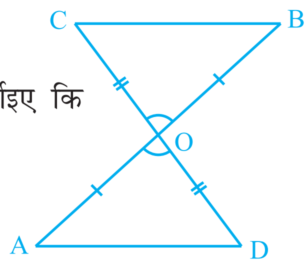
आकृति 7.7

यह त्रिभुजों की सर्वांगसमता की पहली कसौटी (criterion) है।

अभिगृहीत 7.1 (SAS सर्वांगसमता नियम) : *दो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं, यदि एक त्रिभुज की दो भुजाएँ और उनका अंतर्गत कोण दूसरे त्रिभुज की दो भुजाओं और उनके अंतर्गत कोण के बराबर हों।*

इस परिणाम को इससे पहले ज्ञात परिणामों की सहायता से सिद्ध नहीं किया जा सकता है और इसीलिए इसे एक अभिगृहीत के रूप में सत्य मान लिया गया है (देखिए परिशिष्ट 1)।

आइए अब कुछ उदाहरण लें।



आकृति 7.8

उदाहरण 1 : आकृति 7.8 में OA = OB और OD = OC है। दर्शाइए कि

(i) Δ AOD ≅ Δ BOC और (ii) AD || BC है।

हल : (i) Δ AOD और Δ BOC में,

$$\left.\begin{aligned} OA &= OB \\ OD &= OC \end{aligned}\right\} \text{ (दिया है)}$$

साथ ही, क्योंकि ∠ AOD और ∠ BOC शीर्षाभिमुख कोणों का एक युग्म है, अतः

$$\angle AOD = \angle BOC$$

इसलिए, $\Delta AOD \cong \Delta BOC$ (SAS सर्वांगसमता नियम द्वारा)

(ii) सर्वांगसम त्रिभुजों AOD और BOC में, अन्य संगत भाग भी बराबर होंगे।

अतः, $\angle$ OAD = $\angle$ OBC है। परन्तु ये रेखाखंडों AD और BC के लिए एकांतर कोणों का एक युग्म बनाते हैं।

अतः, AD $\parallel$ BC है।

उदाहरण 2 : AB एक रेखाखंड है और रेखा l इसका लम्ब समद्विभाजक है। यदि l पर स्थित P कोई बिंदु है, तो दर्शाइए कि P बिंदुओं A और B से समदूरस्थ (equidistant) है।

हल : $l \perp$ AB है और AB के मध्य-बिंदु C से होकर जाती है (देखिए आकृति 7.9)। आपको दर्शाना है कि PA = PB है। इसके लिए Δ PCA और Δ PCB पर विचार कीजिए। हमें प्राप्त है :

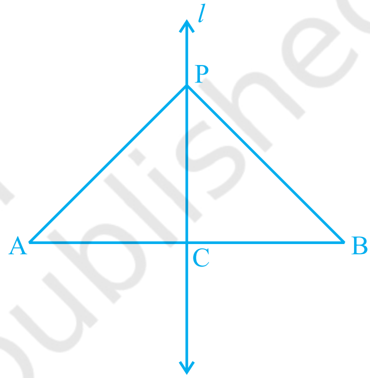
AC = BC (C, AB का मध्य-बिंदु है)

$\angle$ PCA = $\angle$ PCB = 90° (दिया है)

PC = PC (उभयनिष्ठ)

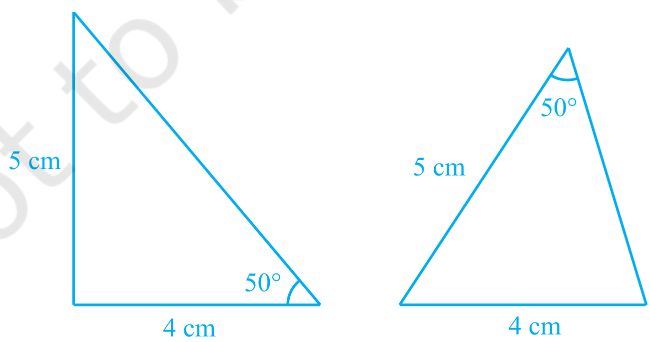
अतः, Δ PCA $\cong$ Δ PCB (SAS नियम)

इसलिए, PA = PB (सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाएँ)



आकृति 7.9

आइए अब दो त्रिभुजों की रचना करें जिनकी दो भुजाएँ 4 cm और 5 cm हैं और एक कोण 50° है तथा साथ ही यह कोण बराबर भुजाओं के बीच अंतर्गत कोण नहीं है (देखिए आकृति 7.10)। क्या ये त्रिभुज सर्वांगसम हैं?



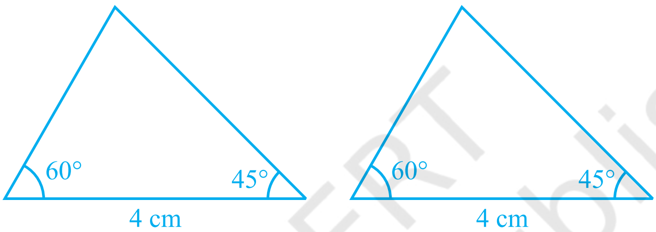
आकृति 7.10

ध्यान दीजिए कि ये दोनों त्रिभुज सर्वांगसम नहीं हैं।

त्रिभुजों के कुछ अन्य युग्म लेकर इस क्रियाकलाप को दोहराइए। आप देखेंगे कि दोनों त्रिभुजों की सर्वांगसमता के लिए यह आवश्यक है कि बराबर कोण बराबर भुजाओं के अंतर्गत कोण हो।

अतः, SAS *नियम तो सत्य है, परन्तु* ASS या SSA नियम सत्य नहीं है।

अब, ऐसे दो त्रिभुजों की रचना करने का प्रयत्न करिए, जिनमें दो कोण 60° और 45° हों तथा इन कोणों की अंतर्गत भुजा 4 cm हो (देखिए आकृति 7.11)।



आकृति 7.11

इन दोनों त्रिभुजों को काटिए और एक त्रिभुज को दूसरे के ऊपर रखिए। आप क्या देखते हैं? देखिए कि एक त्रिभुज दूसरे त्रिभुज को पूर्णतया ढक लेता है, अर्थात् दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं। कुछ और त्रिभुजों को लेकर इस क्रियाकलाप को दोहराइए। आप देखेंगे कि त्रिभुजों की सर्वांगसमता के लिए, दो कोणों और उनकी अंतर्गत भुजा की समता पर्याप्त है।

यह परिणाम **कोण-भुजा-कोण** (Angle-Side-Angle) कसौटी है और इसे **ASA सर्वांगसमता कसौटी** लिखा जाता है। आप पिछली कक्षाओं में, इसकी सत्यता की जाँच कर चुके हैं। आइए इस परिणाम को सिद्ध करें।

चूँकि इस परिणाम को सिद्ध किया जा सकता है, इसलिए इसे एक **प्रमेय (theorem)** कहा जाता है। इसे सिद्ध करने के लिए, हम SAS सर्वांगसमता नियम का प्रयोग करेंगे।

प्रमेय 7.1 (ASA सर्वांगसमता नियम) : *दो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं, यदि एक त्रिभुज के दो कोण और उनकी अंतर्गत भुजा दूसरे त्रिभुज के दो कोणों और उनकी अंतर्गत भुजा के बराबर हों।*

उपपत्ति : हमें दो त्रिभुज ABC और DEF दिए हैं, जिनमें $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$ और $BC = EF$ है। हमें $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ सिद्ध करना है।

दोनों त्रिभुजों की सर्वांगसमता के लिए देखिए कि यहाँ तीन स्थितियाँ संभव हैं।

स्थिति (i) : मान लीजिए AB = DE है(देखिए आकृति 7.12)।

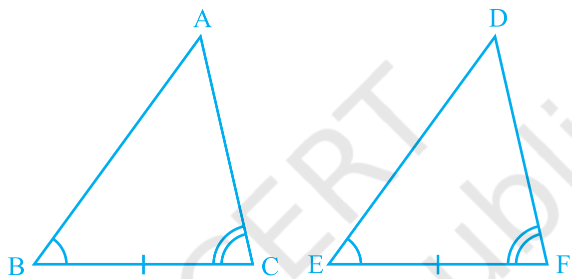
अब आप क्या देखते हैं? आप देख सकते हैं कि

AB = DE (कल्पना की है)

$\angle B = \angle E$ (दिया है)

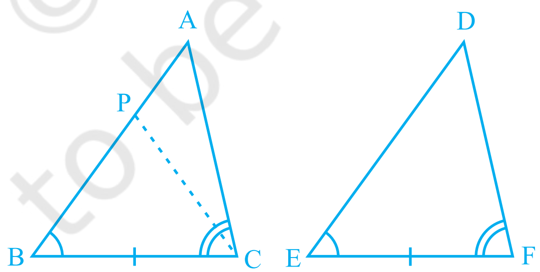
BC = EF (दिया है)

अत:, $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ (SAS नियम द्वारा)



आकृति 7.12

स्थिति (ii) : मान लीजिए, यदि संभव है तो, AB > DE है। इसलिए, हम AB पर एक बिंदु P ऐसा ले सकते हैं कि PB = DE हो (देखिए आकृति 7.13)।



आकृति 7.13

अब Δ PBC और Δ DEF में,

PB = DE (रचना से)

$\angle B = \angle E$ (दिया है)

BC = EF (दिया है)

अतः, हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि

Δ PBC $\cong \Delta$ DEF (SAS सर्वांगसमता अभिगृहीत द्वारा)

चूँकि दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं, इसलिए इनके संगत भाग बराबर होने चाहिए।

अतः, $\angle$ PCB $= \angle$ DFE

परन्तु हमें दिया है कि

$\angle$ ACB $= \angle$ DFE

अतः, $\angle$ ACB $= \angle$ PCB

परन्तु क्या यह संभव है?

यह तभी संभव है, जब P बिंदु A के साथ संपाती हो।

या BA = ED

अतः, Δ ABC $\cong \Delta$ DEF (SAS अभिगृहीत द्वारा)

स्थिति (iii) : यदि AB < DE हो, तो हम DE पर एक बिंदु M इस प्रकार ले सकते हैं कि ME = AB हो। अब स्थिति (ii) वाले तर्कण को दोहराते हुए, हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि AB = DE है और इसीलिए Δ ABC $\cong \Delta$ DEF है।

अब मान लीजिए कि दो त्रिभुजों में दो कोणों के युग्म और संगत भुजाओं का एक युग्म बराबर हैं, परन्तु ये भुजाएँ बराबर कोणों के युग्मों की अंतर्गत भुजाएँ नहीं हैं। क्या ये त्रिभुज अभी भी सर्वांगसम हैं? आप देखेंगे कि ये त्रिभुज सर्वांगसम हैं। क्या आप इसका कारण बता सकते हैं?

आप जानते हैं कि त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180° होता है। अतः त्रिभुजों के कोणों के दो युग्म बराबर होने पर उनके तीसरे कोण भी बराबर होंगे (180° – दोनों बराबर कोणों का योग)।

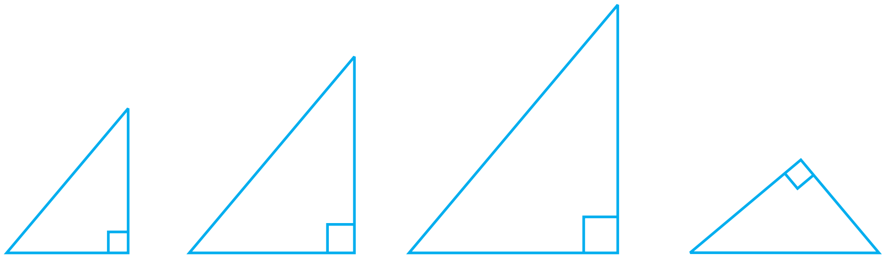
अतः, *दो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं, यदि इन त्रिभुजों के दो कोणों के युग्म बराबर हों और संगत भुजाओं का एक युग्म बराबर हो।* हम इसे **AAS सर्वांगसमता नियम** कह सकते हैं।

आइए अब निम्नलिखित क्रियाकलाप करें :

40°, 50° और 90° वाले कुछ त्रिभुज खींचिए।

आप ऐसे कितने त्रिभुज खींच सकते हैं? वास्तव में, भुजाओं की विभिन्न लंबाइयाँ लेकर

हम ऐसे जितने चाहे उतने त्रिभुज खींच सकते हैं (देखिए आकृति 7.14)।



आकृति 7.14

देखिए कि ये त्रिभुज सर्वांगसम हो भी सकते हैं और नहीं भी हो सकते हैं।

अतः, तीन कोणों की समता त्रिभुजों की सर्वांगसमता के लिए पर्याप्त नहीं है। इसलिए, त्रिभुजों की सर्वांगसमता के लिए, तीन बराबर भागों में से एक बराबर भाग भुजा अवश्य होना चाहिए।

आइए अब कुछ और उदाहरण लें।

उदाहरण 3 : रेखाखंड AB एक अन्य रेखाखंड CD के समांतर है और O रेखाखंड AD का मध्य-बिंदु है (देखिए आकृति 7.15)। दर्शाइए कि (i) $\Delta AOB \cong \Delta DOC$ (ii) O रेखाखंड BC का भी मध्य-बिंदु है।

हल : (i) Δ AOB और Δ DOC पर विचार कीजिए।

$\angle ABO = \angle DCO$ (एकांतर कोण और तिर्यक रेखा BC के साथ $AB \parallel CD$)

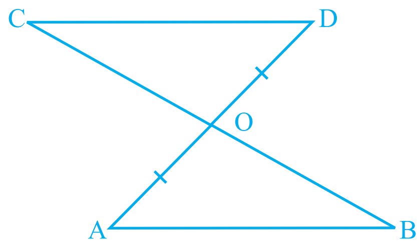
$\angle AOB = \angle DOC$ (शीर्षाभिमुख कोण)

$OA = OD$ (दिया है)

अतः, $\Delta AOB \cong \Delta DOC$ (AAS नियम)

(ii) $OB = OC$ (CPCT)

अर्थात् O, रेखाखंड BC का भी मध्य-बिंदु है।

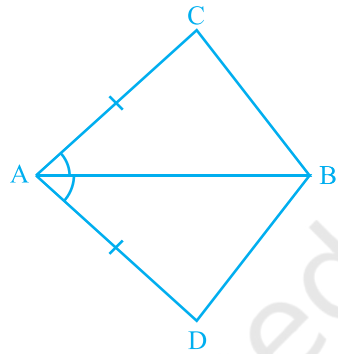


आकृति 7.15

प्रश्नावली 7.1

1. चतुर्भुज ACBD में, AC = AD है और AB कोण A को समद्विभाजित करता है (देखिए आकृति 7.16)। दर्शाइए कि $\Delta ABC \cong \Delta ABD$ है।

BC और BD के बारे में आप क्या कह सकते हैं?



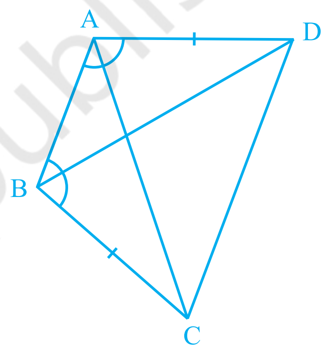
आकृति 7.16

2. ABCD एक चतुर्भुज है, जिसमें AD = BC और $\angle DAB = \angle CBA$ है (देखिए आकृति 7.17)। सिद्ध कीजिए कि

(i) $\Delta ABD \cong \Delta BAC$

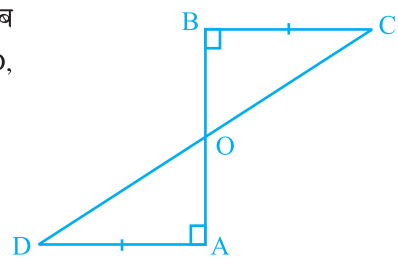
(ii) $BD = AC$

(iii) $\angle ABD = \angle BAC$



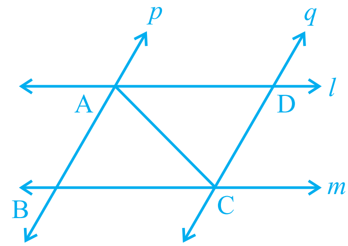
आकृति 7.17

3. एक रेखाखंड AB पर AD और BC दो बराबर लंब रेखाखंड हैं (देखिए आकृति 7.18)। दर्शाइए कि CD, रेखाखंड AB को समद्विभाजित करता है।



आकृति 7.18

4. l और m दो समांतर रेखाएँ हैं जिन्हें समांतर रेखाओं p और q का एक अन्य युग्म प्रतिच्छेदित करता है (देखिए आकृति 7.19)। दर्शाइए कि $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ है।

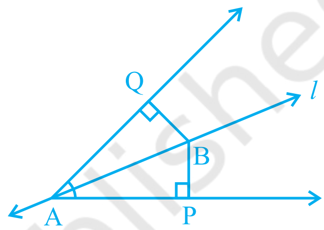


आकृति 7.19

5. रेखा l कोण A को समद्विभाजित करती है और B रेखा l पर स्थित कोई बिंदु है। BP और BQ कोण A की भुजाओं पर B से डाले गए लम्ब हैं (देखिए आकृति 7.20)। दर्शाइए कि

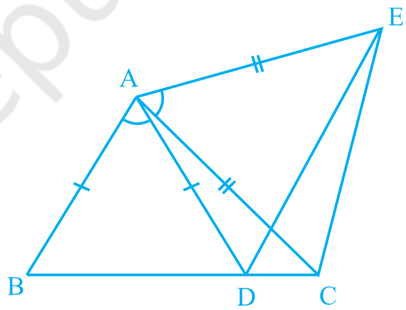
(i) $\Delta APB \cong \Delta AQB$

(ii) $BP = BQ$ है, अर्थात् बिंदु B कोण की भुजाओं से समदूरस्थ है



आकृति 7.20

6. आकृति 7.21 में, AC = AE, AB = AD और $\angle BAD = \angle EAC$ है। दर्शाइए कि $BC = DE$ है।

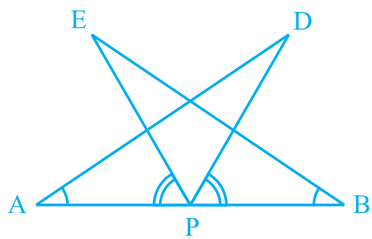


आकृति 7.21

7. AB एक रेखाखंड है और P इसका मध्य-बिंदु है। D और E रेखाखंड AB के एक ही ओर स्थित दो बिंदु इस प्रकार हैं कि $\angle BAD = \angle ABE$ और $\angle EPA = \angle DPB$ है। (देखिए आकृति 7.22)। दर्शाइए कि

(i) $\Delta DAP \cong \Delta EBP$

(ii) $AD = BE$



आकृति 7.22

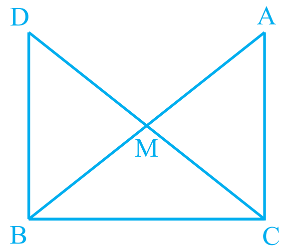
8. एक समकोण त्रिभुज ABC में, जिसमें कोण C समकोण है, M कर्ण AB का मध्य-बिंदु है। C को M से मिलाकर D तक इस प्रकार बढ़ाया गया है कि DM = CM है। बिंदु D को बिंदु B से मिला दिया जाता है (देखिए आकृति 7.23)। दर्शाइए कि

(i) $\Delta\ AMC \cong \Delta\ BMD$

(ii) $\angle\ DBC$ एक समकोण है

(iii) $\Delta\ DBC \cong \Delta\ ACB$

(iv) $CM = \frac{1}{2}\ AB$



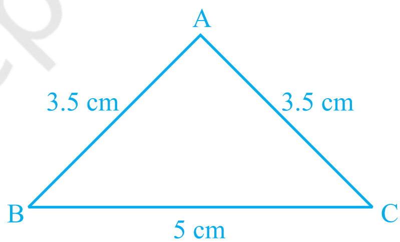
आकृति 7.23

7.4 एक त्रिभुज के कुछ गुण

पिछले अनुच्छेद में, आपने त्रिभुजों की सर्वांगसमता की दो कसौटियों का अध्ययन किया है। आइए इन परिणामों का एक ऐसे त्रिभुज के कुछ गुणों का अध्ययन करने में प्रयोग करें जिसकी दो भुजाएँ बराबर होती हैं।

नीचे दिया गया क्रियाकलाप कीजिए:

एक त्रिभुज की रचना कीजिए जिसकी दो भुजाएँ बराबर हों। मान लीजिए दो भुजाएँ 3.5 cm लंबाई की हैं और एक भुजा 5 cm लंबाई की है (देखिए आकृति 7.24)। आप पिछली कक्षाओं में, ऐसी रचनाएँ कर चुके हैं।



आकृति 7.24

क्या आपको याद है कि इस त्रिभुज को क्या कहते हैं?

एक त्रिभुज जिसकी दो भुजाएँ बराबर हों **समद्विबाहु त्रिभुज (isosceles triangle)** कहलाता है। अतः, आकृति 7.24 का $\Delta\ ABC$ एक समद्विबाहु त्रिभुज है, जिसमें $AB = AC$ है।

अब $\angle B$ और $\angle C$ को मापिए। आप क्या देखते हैं?

विभिन्न भुजाओं वाले अन्य समद्विबाहु त्रिभुज लेकर इस क्रियाकलाप को दोहराइए। आप देख सकते हैं कि ऐसे प्रत्येक त्रिभुज में बराबर भुजाओं के सम्मुख (सामने के) कोण बराबर हैं।

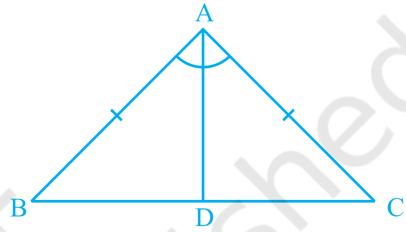
यह एक अति महत्वपूर्ण परिणाम है और प्रत्येक समद्विबाहु त्रिभुज के लिए सत्य है। इसे नीचे दशाई विधि के अनुसार सिद्ध किया जा सकता है:

प्रमेय 7.2 : *एक समद्विबाहु त्रिभुज की बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।*

इस परिणाम को कई विधियों से सिद्ध किया जा सकता है। इनमें से एक उपपत्ति नीचे दी जा रही है।

उपपत्ति : हमें एक समद्विबाहु ΔABC दिया है, जिसमें $AB = AC$ है। हमें $\angle B = \angle C$ सिद्ध करना है।

आइए $\angle A$ का समद्विभाजक खींचे। मान लीजिए यह BC से D पर मिलता है (देखिए आकृति 7.25)।



आकृति 7.25

अब, Δ BAD और Δ CAD में,

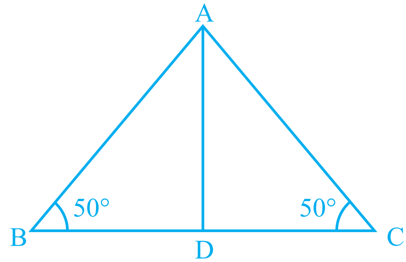
	$AB = AC$	(दिया है)
	$\angle BAD = \angle CAD$	(रचना से)
	$AD = AD$	(उभयनिष्ठ)
अतः,	$\Delta BAD \cong \Delta CAD$	(SAS नियम द्वारा)
इसलिए,	$\angle ABD = \angle ACD$	(CPCT)
अर्थात्	$\angle B = \angle C$	

क्या इसका विलोम भी सत्य है? अर्थात्

यदि किसी त्रिभुज के दो कोण बराबर हों, तो क्या हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि उनकी सम्मुख भुजाएँ भी बराबर होंगी?

नीचे दिया क्रियाकलाप कीजिए :

एक ΔABC की रचना कीजिए जिसमें BC किसी भी लंबाई वाली एक भुजा है और $\angle B = \angle C = 50°$ है। $\angle A$ का समद्विभाजक खींचिए और मान लीजिए कि यह BC को D पर प्रतिच्छेद करता है (देखिए आकृति 7.26)।



आकृति 7.26

त्रिभुज ABC को कागज में से काट लीजिए और इसे AD के अनुदिश मोड़िए ताकि शीर्ष C शीर्ष B पर गिरे (पड़े)।

AC और AB के बारे में आप क्या कह सकते हैं?

देखिए कि AC, AB को पूर्णतया ढक लेती है।

अतः, $AC = AB$

इसी क्रियाकलाप को ऐसे ही कुछ अन्य त्रिभुज लेकर दोहराइए। प्रत्येक बार आप देखेंगे कि एक त्रिभुज के बराबर कोणों की सम्मुख भुजाएँ बराबर हैं। अतः, हम निम्न प्रमेय प्राप्त करते हैं :

प्रमेय 7.3 : *किसी त्रिभुज के बराबर कोणों की सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं।*

यह प्रमेय 7.2 का विलोम है।

आप इस प्रमेय को ASA सर्वांगसमता नियम का प्रयोग करके सिद्ध कर सकते हैं।

आइए इन परिणामों को स्पष्ट करने के लिए कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 4 : Δ ABC में, $\angle$ A का समद्विभाजक AD भुजा BC पर लम्ब है (देखिए आकृति 7.27)। दर्शाइए कि AB = AC है और Δ ABC समद्विबाहु है।

हल : Δ ABD और Δ ACD में,

$\angle BAD = \angle CAD$ (दिया है)

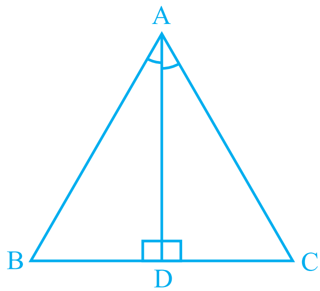
$AD = AD$ (उभयनिष्ठ)

$\angle ADB = \angle ADC = 90°$ (दिया है)

अतः, $\Delta ABD \cong \Delta ACD$ (ASA नियम)

इसलिए, $AB = AC$ (CPCT)

इसी कारण Δ ABC समद्विबाहु है।



आकृति 7.27

उदाहरण 5 : E और F क्रमशः त्रिभुज ABC की बराबर भुजाओं AB और AC के मध्य-बिंदु हैं (देखिए आकृति 7.28)। दर्शाइए कि BF = CE है।

हल : Δ ABF और Δ ACE में,

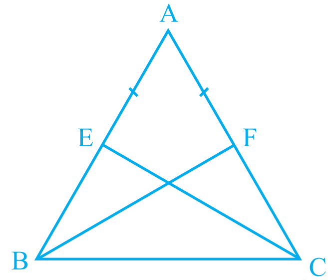
AB = AC (दिया है)

$\angle$A = $\angle$A (उभयनिष्ठ)

AF = AE (बराबर भुजाओं के आधे)

अतः, $\Delta ABF \cong \Delta ACE$ (SAS नियम)

इसलिए, BF = CE (CPCT)



आकृति 7.28

उदाहरण 6 : एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC जिसमें AB = AC है, की भुजा BC पर दो बिंदु D और E इस प्रकार हैं कि BE = CD है (देखिए आकृति 7.29)। दर्शाइए कि AD = AE है।

हल : Δ ABD और Δ ACE में,

AB = AC (दिया है) (1)

$\angle$B = $\angle$C (2)

(बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण)

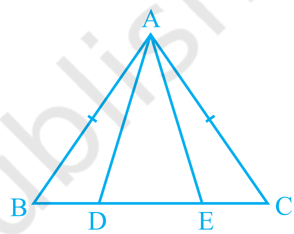
साथ ही, BE = CD (दिया है)

इसलिए, BE – DE = CD – DE

अर्थात्, BD = CE (3)

अतः, $\Delta ABD \cong \Delta ACE$ [(1), (2), (3) और SAS नियम द्वारा]

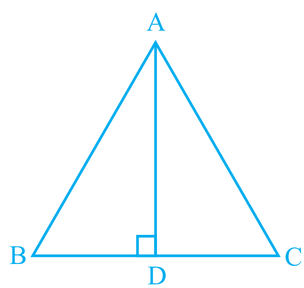
इससे प्राप्त होता है: AD = AE (CPCT)



आकृति 7.29

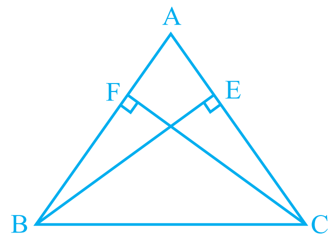
प्रश्नावली 7.2

1. एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC में जिसमें AB = AC है, $\angle$B और $\angle$C के समद्विभाजक परस्पर बिंदु O पर प्रतिच्छेद करते हैं। A और O को जोड़िए। दर्शाइए कि
   (i) OB = OC
   (ii) AO कोण A को समद्विभाजित करता है
2. Δ ABC में AD भुजा BC का लम्ब समद्विभाजक है (देखिए आकृति 7.30)। दर्शाइए कि Δ ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है, जिसमें AB = AC है।



आकृति 7.30

3. ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है, जिसमें बराबर भुजाओं AC और AB पर क्रमश: शीर्षलम्ब BE और CF खींचे गए हैं (देखिए आकृति 7.31)। दर्शाइए कि ये शीर्षलम्ब बराबर हैं।

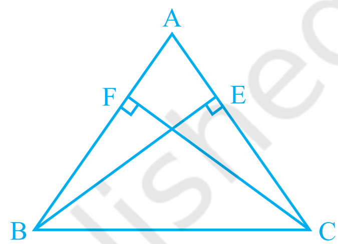


आकृति 7.31

4. ABC एक त्रिभुज है जिसमें AC और AB पर खींचे गए शीर्षलम्ब BE और CF बराबर हैं (देखिए आकृति 7.32)। दर्शाइए कि

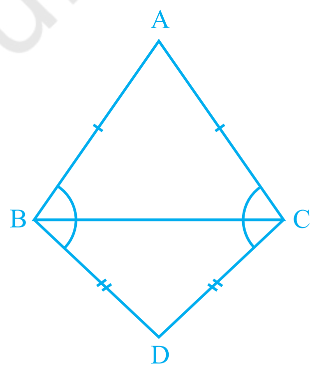
(i) $\Delta ABE \cong \Delta ACF$

(ii) AB = AC, अर्थात् ΔABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है।



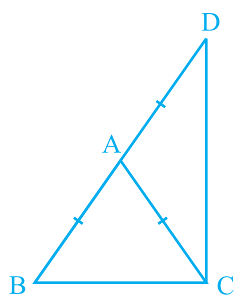
आकृति 7.32

5. ABC और DBC समान आधार BC पर स्थित दो समद्विबाहु त्रिभुज हैं (देखिए आकृति 7.33)। दर्शाइए कि $\angle ABD = \angle ACD$ है।



आकृति 7.33

6. ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है, जिसमें AB = AC है। भुजा BA बिंदु D तक इस प्रकार बढ़ाई गई है कि AD = AB है (देखिए आकृति 7.34)। दर्शाइए कि $\angle BCD$ एक समकोण है।



आकृति 7.34

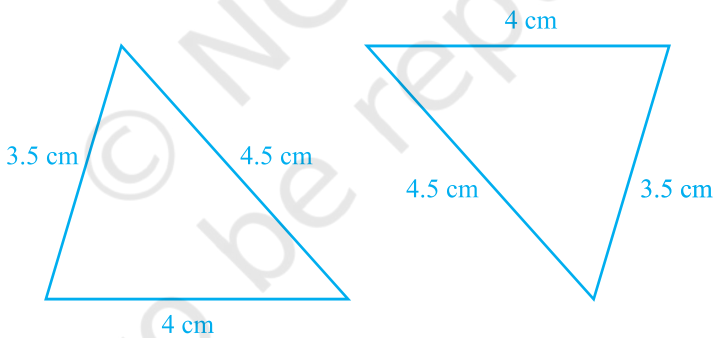
7. ABC एक समकोण त्रिभुज है, जिसमें $\angle A = 90°$ और $AB = AC$ है। $\angle B$ और $\angle C$ ज्ञात कीजिए।

8. दर्शाइए कि किसी समबाहु त्रिभुज का प्रत्येक कोण $60°$ होता है।

7.5 त्रिभुजों की सर्वांगसमता के लिए कुछ और कसौटियाँ

आप इस अध्याय में, पहले यह देख चुके हैं कि एक त्रिभुज के तीनों कोणों के दूसरे त्रिभुज के तीनों कोणों के बराबर होने पर दोनों त्रिभुजों का सर्वांगसम होना आवश्यक नहीं है। आप सोच सकते हैं कि संभवत: एक त्रिभुज की तीनों भुजाओं के दूसरे त्रिभुज की तीनों भुजाओं के बराबर होने पर त्रिभुज सर्वांगसम हो जाएँ। आप यह पिछली कक्षाओं में पढ़ चुके हैं कि ऐसी स्थिति में त्रिभुज नि:संदेह सर्वांगसम होते हैं।

इस धारणा को निश्चित करने के लिए, 4cm, 3.5cm और 4.5cm के दो त्रिभुज खींचिए (देखिए आकृति 7.35)। इन्हें काटकर, एक दूसरे पर रखिए। आप क्या देखते हैं? यदि बराबर भुजाओं को एक दूसरे पर रखा जाए। ये एक दूसरे को पूर्णतया ढक लेते हैं अत:, दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं।



आकृति 7.35

इस क्रियाकलाप को कुछ अन्य त्रिभुज खींचकर दोहराइए। इस प्रकार, हम सर्वांगसमता के एक और नियम पर पहुँच जाते हैं:

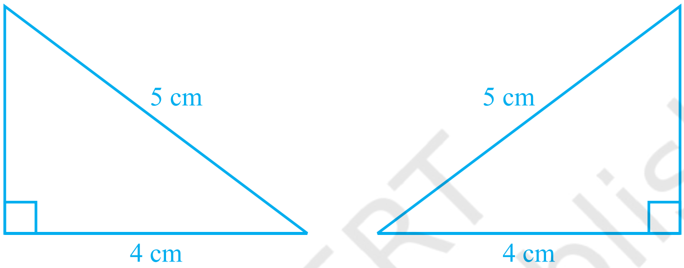
प्रमेय 7.4 (SSS सर्वांगसमता नियम) : *यदि एक त्रिभुज की तीनों भुजाएँ एक अन्य त्रिभुज की तीनों भुजाओं के बराबर हों, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।*

एक उपयुक्त रचना करके, इस प्रमेय को सिद्ध किया जा सकता है।

आप SAS सर्वांगसमता नियम में पहले ही देख चुके हैं कि बराबर कोणों के युग्म संगत बराबर भुजाओं के युग्मों के बीच में (अंतर्गत) होने चाहिए और यदि ऐसा नहीं हो, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम नहीं भी हो सकते हैं।

इस क्रियाकलाप को कीजिए :

दो समकोण त्रिभुज ऐसे खींचिए जिनमें प्रत्येक का कर्ण 5 सेमी और एक भुजा 4 cm की हो (देखिए आकृति 7.36)।



आकृति 7.36

इन्हें काटिए और एक दूसरे पर इस प्रकार रखिए कि इनकी बराबर भुजाएँ एक दूसरे पर आएँ। यदि आवश्यक हो, तो त्रिभुजों को घुमाइए। आप क्या देखते हैं?

आप देखते हैं कि दोनों त्रिभुज एक दूसरे को पूर्णतया ढक लेते हैं और इसीलिए ये सर्वांगसम हैं। यही क्रियाकलाप समकोण त्रिभुजों के अन्य युग्म लेकर दोहराइए। आप क्या देखते हैं?

आप पाएँगे कि दोनों समकोण त्रिभुज सर्वांगसम होंगे, यदि उनके कर्ण बराबर हों और भुजाओं का एक युग्म बराबर हो। आप इस तथ्य की जाँच पिछली कक्षाओं में कर चुके हैं।

ध्यान दीजिए कि इस स्थिति में समकोण अंतर्गत कोण **नहीं** है।

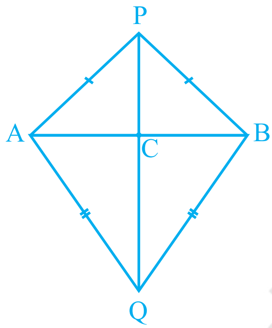
इस प्रकार, आप निम्नलिखित सर्वांगसमता नियम पर पहुँच गए हैं:

प्रमेय 7.5 (RHS सर्वांगसमता नियम) : *यदि दो समकोण त्रिभुजों में, एक त्रिभुज का कर्ण और एक भुजा क्रमश: दूसरे त्रिभुज के कर्ण और एक भुजा के बराबर हों, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।*

ध्यान दीजिए कि यहाँ RHS **समकोण (Right angle) - कर्ण (Hypotenuse) - भुजा (Side)** को दर्शाता है।

आइए अब कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 7 : AB एक रेखाखंड है तथा बिंदु P और Q इस रेखाखंड AB के विपरीत ओर इस प्रकार स्थित हैं कि इनमें से प्रत्येक A और B से समदूरस्थ है (देखिए आकृति 7.37)। दर्शाइए कि रेखा PQ रेखाखंड AB का लम्ब समद्विभाजक है।



आकृति 7.37

हल : आपको $PA = PB$ और $QA = QB$ दिया हुआ है। आपको दर्शाना है कि $PQ \perp AB$ है और PQ रेखाखंड AB को समद्विभाजित करती है। मान लीजिए रेखा PQ रेखाखंड AB को C पर प्रतिच्छेद करती है। क्या आप इस आकृति में दो सर्वांगसम त्रिभुजों को देख सकते हैं?

आइए Δ PAQ और Δ PBQ लें।

इन त्रिभुजों में,

$AP = BP$ (दिया है)

$AQ = BQ$ (दिया है)

$PQ = PQ$ (उभयनिष्ठ)

अतः, $\Delta PAQ \cong \Delta PBQ$ (SSS नियम)

इसलिए, $\angle APQ = \angle BPQ$ (CPCT)

अब Δ PAC और Δ PBC को लीजिए। आपको प्राप्त है :

$AP = BP$ (दिया है)

$\angle APC = \angle BPC$ ($\angle APQ = \angle BPQ$ ऊपर सिद्ध किया है)

$PC = PC$ (उभयनिष्ठ)

अतः, $\Delta PAC \cong \Delta PBC$ (SAS नियम)

इसलिए, $AC = BC$ (CPCT) (1)

और $\angle ACP = \angle BCP$ (CPCT)

साथ ही, $\angle ACP + \angle BCP = 180°$ (रैखिक युग्म)

इसलिए, $2\angle ACP = 180°$

या, $\angle ACP = 90°$ (2)

(1) और (2) से, आप निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि रेखा PQ रेखाखंड AB का लम्ब समद्विभाजक है।

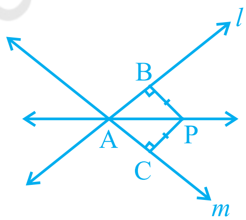
[ध्यान दीजिए कि Δ PAQ और Δ PBQ की सर्वांगसमता दर्शाए बिना, आप यह नहीं दिखा सकते कि Δ PAC $\cong$ Δ PBC है, यद्यपि AP = BP (दिया है), PC = PC (उभयनिष्ठ) और $\angle$ PAC = $\angle$ PBC (Δ APB में बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण) है। यह इस कारण है कि इनसे हमें SSA नियम प्राप्त होता है, जो त्रिभुजों की सर्वांगसमता के लिए सदैव मान्य नहीं है। साथ ही, कोण बराबर भुजाओं के अंतर्गत नहीं है।]

आइए कुछ और उदाहरण लें।

उदाहरण 8 : बिंदु A पर प्रतिच्छेद करने वाली दो रेखाओं l और m से समदूरस्थ एक बिंदु P है (देखिए आकृति 7.38)। दर्शाइए कि रेखा AP दोनों रेखाओं के बीच के कोण को समद्विभाजित करती है।

हल : आपको दिया है कि रेखाएँ l और m परस्पर A पर प्रतिच्छेद करती हैं। मान लीजिए PB $\perp$ l और PC $\perp$ m है। यह दिया है कि PB = PC है।

आपको दर्शाना है कि $\angle$ PAB = $\angle$ PAC है।



आकृति 7.38

अब, Δ PAB और Δ PAC में,

PB = PC (दिया है)

$\angle$ PBA = $\angle$ PCA = 90° (दिया है)

PA = PA (उभयनिष्ठ)

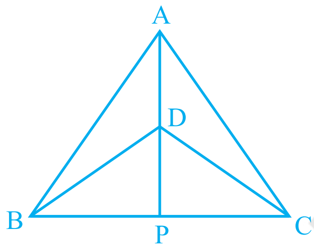
अतः, Δ PAB $\cong$ Δ PAC (RHS नियम)

इसलिए, $\angle$ PAB = $\angle$ PAC (CPCT)

ध्यान दीजिए कि यह परिणाम प्रश्नावली 7.1 के प्रश्न 5 में सिद्ध किए गए परिणाम का विलोम है।

प्रश्नावली 7.3

1. ΔABC और ΔDBC एक ही आधार BC पर बने दो समद्विबाहु त्रिभुज इस प्रकार हैं कि A और D भुजा BC के एक ही ओर स्थित हैं (देखिए आकृति 7.39)। यदि AD बढ़ाने पर BC को P पर प्रतिच्छेद करे, तो दर्शाइए कि



आकृति 7.39

(i) $\Delta ABD \cong \Delta ACD$

(ii) $\Delta ABP \cong \Delta ACP$

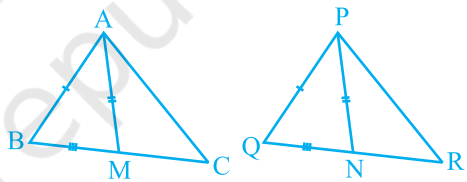
(iii) AP कोण A और कोण D दोनों को समद्विभाजित करता है।

(iv) AP रेखाखंड BC का लम्ब समद्विभाजक है।

2. AD एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC का एक शीर्षलम्ब है, जिसमें AB = AC है। दर्शाइए कि

(i) AD रेखाखंड BC को समद्विभाजित करता है। (ii) AD कोण A को समद्विभाजित करता है।

3. एक त्रिभुज ABC की दो भुजाएँ AB और BC तथा माध्यिका AM क्रमश: एक दूसरे त्रिभुज की भुजाओं PQ और QR तथा माध्यिका PN के बराबर हैं (देखिए आकृति 7.40)। दर्शाइए कि



आकृति 7.40

(i) $\Delta ABM \cong \Delta PQN$

(ii) $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

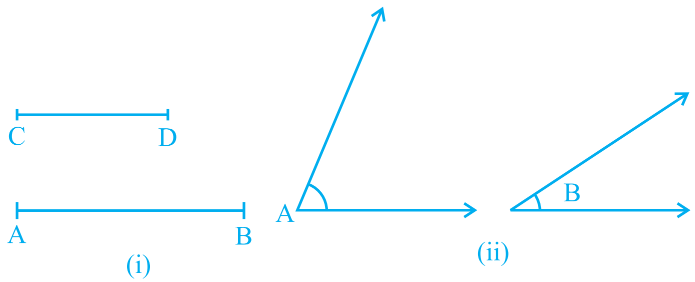
4. BE और CF एक त्रिभुज ABC के दो बराबर शीर्षलम्ब हैं। RHS सर्वांगसमता नियम का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए कि ΔABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है।

5. ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें AB = AC है। $AP \perp BC$ खींच कर दर्शाइए कि $\angle B = \angle C$ है।

7.6 एक त्रिभुज में असमिकाएँ

अभी तक, आपने मुख्यत: एक त्रिभुज (अथवा त्रिभुजों) की भुजाओं और कोणों की समताओं (समिकाओं) के बारे में ही पढ़ा है। कभी-कभी हमारे सम्मुख असमान (जो बराबर नहीं हैं)

वस्तुएँ भी आती हैं और हमें इनकी तुलना भी करनी पड़ती है। उदाहरणार्थ, आकृति 7.41 (i) में, रेखाखंड AB रेखाखंड CD से बड़ा है और आकृति 7.41 (ii) में, $\angle A$, $\angle B$ से बड़ा है।

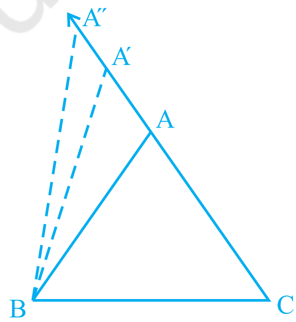


आकृति 7.41

आइए अब इसकी जाँच करें कि क्या किसी त्रिभुज में असमान भुजाओं और असमान कोणों में कुछ सम्बन्ध होता है। इसके लिए, आइए निम्न क्रियाकलाप करें :

क्रियाकलाप : एक ड्राइंग बोर्ड पर दो स्थानों (बिंदुओं) B और C पर दो पिन लगाइए और उनको एक धागे से बाँध कर त्रिभुज की भुजा BC बनाइए।

एक अन्य धागे के एक सिरे को C पर लगाइए और दूसरे (मुक्त) सिरे पर एक पेंसिल बाँध लीजिए। पेंसिल से एक बिंदु A अंकित कीजिए और Δ ABC खींचिए (देखिए आकृति 7.42)। अब पेंसिल को हटा कर CA पर A के आगे एक अन्य बिंदु A′ (A की नई स्थिति) अंकित कीजिए।



आकृति 7.42

अत:, $A'C > AC$ (लम्बाइयों की तुलना करने पर)

A′ को B से मिलाकर Δ A′BC पूरा कीजिए। आप $\angle A'BC$ और $\angle ABC$ के बारे में क्या कह सकते हैं? इनकी तुलना कीजिए। आप क्या देखते हैं?

स्पष्टत:, $\angle A'BC > \angle ABC$ है।

CA (बढ़ाई हुई) पर और अधिक बिंदु अंकित करते रहिए, तथा अंकित बिंदुओं और भुजा BC के साथ त्रिभुज खींचते रहिए।

आप देखेंगे कि जैसे-जैसे AC बढ़ती जाती है (A की विभिन्न स्थितियों को अंकित करने पर), वैसे-वैसे इसका सम्मुख कोण, अर्थात् $\angle B$ भी बढ़ता जाता है।

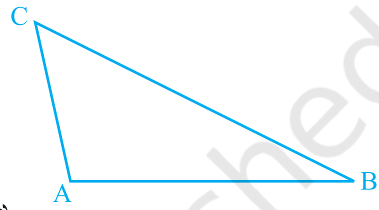
आइए अब एक अन्य क्रियाकलाप करें :

क्रियाकलाप : एक विषमबाहु त्रिभुज खींचिए (अर्थात् ऐसा त्रिभुज जिसमें सभी भुजाओं की लम्बाइयाँ भिन्न-भिन्न हों)।

इस त्रिभुज की भुजाओं की लम्बाइयाँ मापिए और इसके कोण भी मापिए। आप क्या देखते हैं?

आकृति 7.43 के Δ ABC में, BC सबसे लम्बी भुजा है और AC सबसे छोटी भुजा है।

साथ ही, $\angle A$ सबसे बड़ा है और $\angle B$ सबसे छोटा है।



आकृति 7.43

कुछ और त्रिभुज खींच कर इस क्रियाकलाप को दोहराइए।

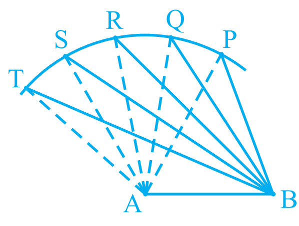
हम त्रिभुजों की असमिकाओं के एक अति महत्वपूर्ण गुण पर पहुँच जाते हैं। इसे एक प्रमेय के रूप में नीचे व्यक्त किया जा रहा है :

प्रमेय 7.6 : *यदि किसी त्रिभुज की दो भुजाएँ असमान हों, तो लम्बी भुजा के सामने का सम्मुख कोण बड़ा होता है।*

आप आकृति 7.43 में, BC पर एक बिंदु P इस प्रकार लेकर कि CA = CP हो, इस प्रमेय को सिद्ध कर सकते हैं।

आइए अब एक और क्रियाकलाप करें :

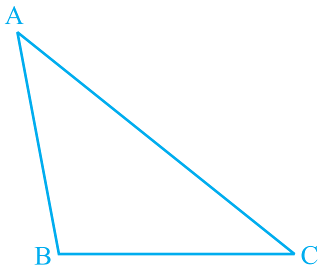
क्रियाकलाप : एक रेखाखंड AB खींचिए। A को केन्द्र मानकर और कोई त्रिज्या लेकर एक चाप लगाइए। इस चाप पर विभिन्न बिंदु P, Q, R, S, T अंकित कीजिए।



आकृति 7.44

इन बिंदुओं को A और B दोनों से जोड़िए (देखिए आकृति 7.44)। ध्यान दीजिए कि जैसे-जैसे हम P से T की ओर चलते हैं, वैसे-वैसे $\angle A$ बढ़ता जाता है। इसकी सम्मुख भुजाओं की लम्बाइयों को क्या होता जा रहा है। ध्यान दीजिए कि सम्मुख भुजाओं की लम्बाइयाँ भी बढ़ती जा रही हैं। अर्थात् $\angle TAB > \angle SAB > \angle RAB > \angle QAB > \angle PAB$ और $TB > SB > RB > QB > PB$ है।

अब कोई ऐसा त्रिभुज खींचिए जिसके सभी कोण असमान हों। इस त्रिभुज की भुजाओं को मापिए (देखिए आकृति 7.45)।



आकृति 7.45

देखिए कि सबसे बड़े कोण की सम्मुख भुजा सबसे लम्बी है। आकृति 7.45 में, $\angle$ B सबसे बड़ा कोण है और AC सबसे लम्बी भुजा है।

कुछ और त्रिभुज खींच कर इस क्रियाकलाप को दोहराइए और देखिए कि प्रमेय 7.6 का विलोम भी सत्य है। इस प्रकार, हम निम्न प्रमेय पर पहुँचते हैं :

प्रमेय 7.7 : *किसी त्रिभुज में, बड़े कोण की सम्मुख भुजा बड़ी (लम्बी) होती है।*

इस प्रमेय को विरोधाभास की विधि (method of contradiction) से सिद्ध किया जा सकता है।

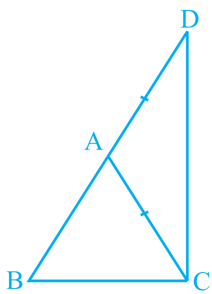
अब एक त्रिभुज ABC खींचिए और इसमें AB + BC, BC + AC और AC + AB ज्ञात कीजिए। आप क्या देखते हैं?

आप देखेंगे कि AB + BC > AC, BC + AC > AB और AC + AB > BC है।

कुछ अन्य त्रिभुज लेकर, इस क्रियाकलाप को दोहराइए और निम्न प्रमेय पर पहुँचिए :

प्रमेय 7.8 : *त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से बड़ा होता है।*

आकृति 7.46 में, देखिए कि Δ ABC की भुजा BA को एक बिंदु D तक इस प्रकार बढ़ाया गया है कि AD = AC है। क्या आप दर्शा सकते हैं कि $\angle$ BCD > $\angle$ BDC है और BA + AC > BC है?



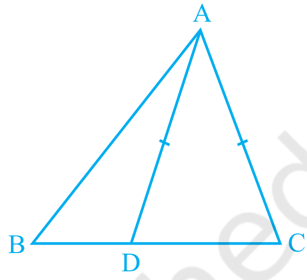
आकृति 7.46

क्या आप उपरोक्त प्रमेय की उत्पत्ति पर पहुँच गए हैं?

आइए इन परिणामों पर आधारित कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 9 : ΔABC की भुजा BC पर D एक ऐसा बिंदु है कि AD = AC है (देखिए आकृति 7.47)। दर्शाइए कि AB > AD है।

हल : Δ DAC में,



आकृति 7.47

$$AD = AC \quad \text{(दिया है)}$$

इसलिए, $\angle ADC = \angle ACD$

(बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण)

अब, $\angle ADC$ त्रिभुज ABD का एक बहिष्कोण है।

इसलिए, $\angle ADC > \angle ABD$

या, $\angle ACD > \angle ABD$

या, $\angle ACB > \angle ABC$

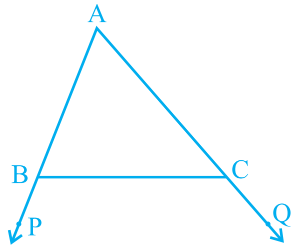
अतः, $AB > AC$ (ΔABC में बड़े कोण की सम्मुख भुजा)

या, $AB > AD$ (AD = AC)

प्रश्नावली 7.4

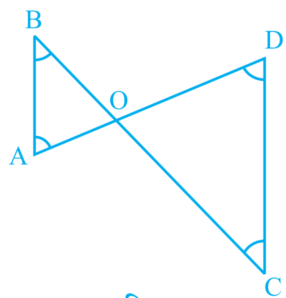
1. दर्शाइए कि समकोण त्रिभुज में कर्ण सबसे लंबी भुजा होती है।

2. आकृति 7.48 में, ΔABC की भुजाओं AB और AC को क्रमशः बिंदुओं P और Q तक बढ़ाया गया है। साथ ही, $\angle PBC < \angle QCB$ है। दर्शाइए कि $AC > AB$ है।



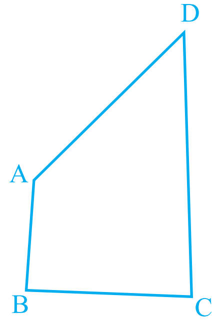
आकृति 7.48

3. आकृति 7.49 में $\angle B < \angle A$ और $\angle C < \angle D$ है। दर्शाइए कि $AD < BC$ है।



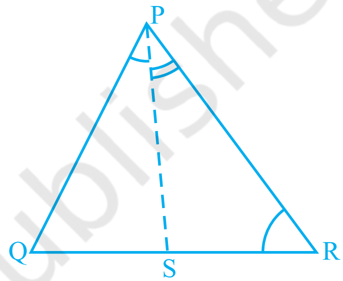
आकृति 7.49

4. AB और CD क्रमशः एक चतुर्भुज ABCD की सबसे छोटी और सबसे बड़ी भुजाएँ हैं (देखिए आकृति 7.50)। दर्शाइए कि $\angle A > \angle C$ और $\angle B > \angle D$ है।



आकृति 7.50

5. आकृति 7.51 में, PR > PQ है और PS कोण QPR को समद्विभाजित करता है। सिद्ध कीजिए कि $\angle PSR > \angle PSQ$ है।



आकृति 7.51

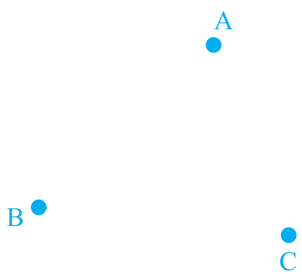
6. दर्शाइए कि एक रेखा पर एक दिए हुए बिंदु से, जो उस रेखा पर स्थित नहीं है, जितने रेखाखंड खींचे जा सकते हैं उनमें लम्ब रेखाखंड सबसे छोटा होता है।

प्रश्नावली 7.5 (ऐच्छिक)*

1. ABC एक त्रिभुज है। इसके अभ्यंतर में एक ऐसा बिंदु ज्ञात कीजिए जो ΔABC के तीनों शीर्षों से समदूरस्थ है।
2. किसी त्रिभुज के अभ्यंतर में एक ऐसा बिंदु ज्ञात कीजिए जो त्रिभुज की सभी भुजाओं से समदूरस्थ है।
3. एक बड़े पार्क में, लोग तीन बिंदुओं (स्थानों) पर केन्द्रित हैं (देखिए आकृति 7.52):

   A: जहाँ बच्चों के लिए फिसल पट्टी और झूले हैं।

   B: जिसके पास मानव-निर्मित एक झील है।



आकृति 7.52

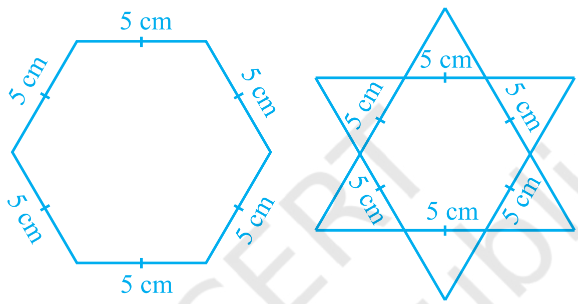
* यह प्रश्नावली परीक्षा की दृष्टि से नहीं दी गई है।

C: जो एक बड़े पार्किंग स्थल और बाहर निकलने के रास्ते के निकट है।

एक आइसक्रीम का स्टॉल कहाँ लगाना चाहिए ताकि वहाँ लोगों की अधिकतम संख्या पहुँच सके?

(*संकेत*: स्टॉल को A, B और C से समदूरस्थ होना चाहिए।)

4. षडभुजीय और तारे के आकार की रंगोलियों [देखिए आकृति 7.53 (i) और (ii)] को 1 cm भुजा वाले समबाहु त्रिभुजों से भर कर पूरा कीजिए। प्रत्येक स्थिति में, त्रिभुजों की संख्या गिनिए। किसमें अधिक त्रिभुज हैं?



आकृति 7.53

7.7 सारांश

इस अध्याय में, आपने निम्न बिंदुओं का अध्ययन किया है:

1. दो आकृतियाँ सर्वांगसम होती हैं, यदि उनका एक ही आकार हो और एक ही माप हो।

2. समान त्रिज्याओं वाले दो वृत्त सर्वांगसम होते हैं।

3. समान भुजाओं वाले दो वर्ग सर्वांगसम होते हैं।

4. यदि त्रिभुज ABC और PQR संगतता $A \leftrightarrow P, B \leftrightarrow Q$ और $C \leftrightarrow R$, के अंतर्गत सर्वांगसम हों, तो उन्हें सांकेतिक रूप में $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ लिखते हैं।

5. यदि एक त्रिभुज की दो भुजाएँ और अंतर्गत कोण दूसरे त्रिभुज की दो भुजाओं और अंतर्गत कोण के बराबर हों, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं (SAS सर्वांगसमता नियम)।

6. यदि एक त्रिभुज के दो कोण और अंतर्गत भुजा दूसरे त्रिभुज के दो कोणों और अंतर्गत भुजा के बराबर हों, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं (ASA सर्वांगसमता नियम)।

7. यदि एक त्रिभुज के दो कोण और एक भुजा दूसरे त्रिभुज के दो कोणों और संगत भुजा के बराबर हों, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं (AAS सर्वांगसमता नियम)।

8. त्रिभुज की बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।
9. त्रिभुज के बराबर कोणों की सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं।
10. किसी समबाहु त्रिभुज का प्रत्येक कोण 60° का होता है।
11. यदि एक त्रिभुज की तीनों भुजाएँ दूसरे त्रिभुज की तीनों भुजाओं के बराबर हों, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं (SSS सर्वांगसमता नियम)।
12. यदि दो समकोण त्रिभुजों में, एक त्रिभुज का कर्ण और एक भुजा क्रमश: दूसरे त्रिभुज के कर्ण और एक भुजा के बराबर हों, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं (RHS सर्वांगसमता नियम)।
13. किसी त्रिभुज में, लंबी (बड़ी) भुजा का सम्मुख कोण बड़ा होता है।
14. किसी त्रिभुज में, बड़े कोण की सम्मुख भुजा लंबी (बड़ी) होती है।
15. किसी त्रिभुज में, दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से बड़ा होता है।

0963CH08

अध्याय 8

चतुर्भुज

8.1 भूमिका

आप अध्यायों 6 और 7 में त्रिभुजों के अनेक गुणों के बारे में अध्ययन कर चुके हैं। आप यह भी जानते हैं कि तीन असंरेख बिंदुओं को युग्मों में जोड़ने पर जो आकृति प्राप्त होती है, त्रिभुज कहलाती है। अब, आइए चार बिंदु अंकित करें और देखें कि क्रमानुसार युग्मों में इनको जोड़ने पर क्या आकृति प्राप्त होती है।

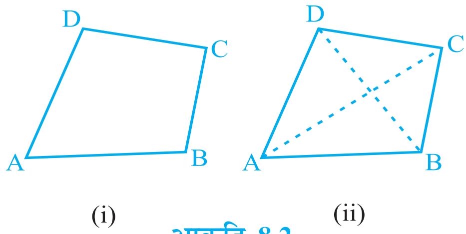
(i) (ii) (iii) (iv)

आकृति 8.1

ध्यान दीजिए कि यदि सभी बिंदु संरेख हों (एक ही रेखा में हों), तो हमें एक रेखाखंड प्राप्त होता है [देखिए आकृति 8.1 (i)]। यदि चार बिंदुओं में से तीन संरेख हों, तो हमें एक त्रिभुज प्राप्त होता है [देखिए आकृति 8.1 (ii)] और यदि चार में से कोई तीन बिंदु संरेख न हों, तो हमें चार भुजाओं वाली एक आकृति प्राप्त होती है [देखिए आकृति 8.1 (iii) और (iv)]।

चारों बिन्दुओं को एक क्रम में जोड़ने से इस प्रकार प्राप्त आकृति *चतुर्भुज* (*quadrilateral*) कहलाती है। इस पुस्तक में हम केवल आकृति 8.1 (iii) में दिए गए जैसे चतुर्भुजों का ही अध्ययन करेंगे और आकृति 8.1 (iv) में दिए गए जैसे चतुर्भुजों का नहीं।

एक चतुर्भुज की चार भुजाएँ, चार कोण और चार शीर्ष होते हैं [देखिए आकृति 8.2 (i)]।



आकृति 8.2

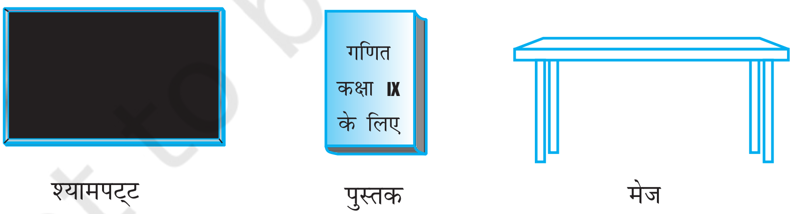
चतुर्भुज ABCD में, AB, BC, CD और DA चार भुजाएँ हैं; A, B, C और D चार शीर्ष हैं तथा $\angle$ A, $\angle$ B, $\angle$ C और $\angle$ D शीर्षों पर बने चार कोण हैं।

अब सम्मुख शीर्षों A और C तथा B और D को जोड़िए [देखिए आकृति 8.2 (ii)]।

AC और BD चतुर्भुज ABCD के दो *विकर्ण* (*diagonals*) कहलाते हैं।

इस अध्याय में, हम विभिन्न प्रकार के चतुर्भुजों और उनके गुणों के बारे में अध्ययन करेंगे। विशेष तौर पर हम समांतर चतुर्भुजों के बारे में पढ़ेंगे।

आप सोच सकते हैं कि हम चतुर्भुजों (या समांतर चतुर्भुजों) का क्यों अध्ययन करें। अपने परिवेश में देखिए। आप अपने आस-पास चतुर्भुज के आकार की अनेक वस्तुएँ देख सकते हैं, जैसे- आपकी कक्षा का फर्श, दीवार, छत, खिड़कियाँ, श्यामपट्ट, डस्टर (duster) का प्रत्येक फलक, आपकी पुस्तक का प्रत्येक पृष्ठ, पढ़ने की मेज का ऊपरी पृष्ठ, इत्यादि। इनमें से कुछ को नीचे दिखाया गया है (देखिए आकृति 8.3)।



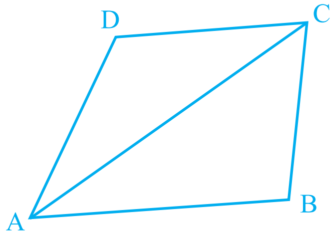
आकृति 8.3

यद्यपि हमारे आस-पास दिखने वाली अधिकांश वस्तुएँ आयत के आकार की हैं, फिर भी हम चतुर्भुजों और विशेषकर समांतर चतुर्भुजों के बारे में और अधिक अध्ययन करेंगे, क्योंकि एक आयत एक समांतर चतुर्भुज ही है और समांतर चतुर्भुज के सभी गुण आयत के लिए भी सत्य होते हैं।

8.2 चतुर्भुज का कोण योग गुण

अब, आइए एक चतुर्भुज के कोण योग गुण का पुनर्विलोकन करें।

चतुर्भुज के कोणों का योग 360^0 होता है। हम इसकी जाँच चतुर्भुज का एक विकर्ण खींच कर उसे दो त्रिभुजों में विभाजित करके कर सकते हैं।



आकृति 8.4

मान लीजिए ABCD एक चतुर्भुज है और AC उसका एक विकर्ण है (देखिए आकृति 8.4)।

Δ ADC के कोणों का क्या योग है?

हम जानते हैं कि

$$\angle DAC + \angle ACD + \angle D = 180° \qquad (1)$$

इसी प्रकार, Δ ABC में,

$$\angle CAB + \angle ACB + \angle B = 180° \qquad (2)$$

(1) और (2) को जोड़ने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$\angle DAC + \angle ACD + \angle D + \angle CAB + \angle ACB + \angle B = 180° + 180° = 360°$$

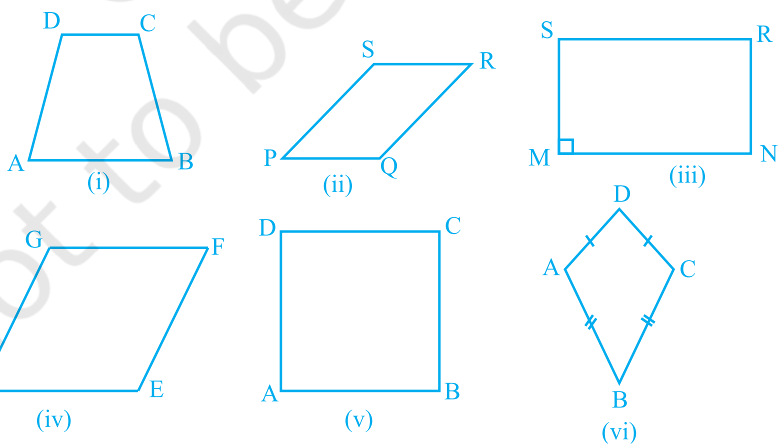
साथ ही, $\angle DAC + \angle CAB = \angle A$ और $\angle ACD + \angle ACB = \angle C$

अत:, $\angle A + \angle D + \angle B + \angle C = 360°$ है।

अर्थात् चतुर्भुज के कोणों का योग 360° होता है।

8.3 चतुर्भुज के प्रकार

नीचे दिए गए विभिन्न चतुर्भुजों को देखिए :



आकृति 8.5

ध्यान दीजिए कि :

- आकृति 8.5 (i) में, चतुर्भुज ABCD की सम्मुख भुजाओं AB और CD का एक युग्म समांतर है। आप जानते हैं कि यह एक *समलंब* (*trapezium*) कहलाता है।

- आकृतियों 8.5 (ii), (iii) , (iv) और (v) में दिए सभी चतुर्भुजों में सम्मुख भुजाओं के दोनों युग्म *समांतर हैं।* ये चतुर्भुज *समांतर चतुर्भुज* (*parallelograms*) कहलाते हैं। अत:, आकृति 8.5 (ii) का चतुर्भुज PQRS एक समांतर चतुर्भुज है। इसी प्रकार, आकृतियों 8.5 (iii), (iv) और (v) में दिए सभी चतुर्भुज समांतर चतुर्भुज हैं।

- ध्यान दीजिए कि आकृति 8.5 (iii) के समांतर चतुर्भुज MNRS में एक कोण M समकोण है। यह विशेष समांतर चतुर्भुज क्या कहलाता है? याद कीजिए, यह एक *आयत* (*rectangle*) कहलाता है।

- आकृति 8.5 (iv) में दिए समांतर चतुर्भुज DEFG की सभी भुजाएँ बराबर हैं और हम जानते हैं कि यह एक *समचतुर्भुज* (*rhombus*) कहलाता है।

- आकृति 8.5 (v) के समांतर चतुर्भुज ABCD में, $\angle A = 90°$ और सभी भुजाएँ बराबर हैं। यह एक वर्ग (*square*) कहलाता है।

- आकृति 8.5 (vi) के चतुर्भुज ABCD में, AD = CD और AB = CB है, अर्थात् आसन्न भुजाओं के दो युग्म बराबर हैं। यह एक समांतर चतुर्भुज *नहीं* है। यह एक *पतंग* (*kite*) कहलाता है।

  ध्यान दीजिए कि वर्ग, आयत और समचतुर्भुज में से प्रत्येक एक समांतर चतुर्भुज होता है।

- एक वर्ग एक आयत है और एक समचतुर्भुज भी है।

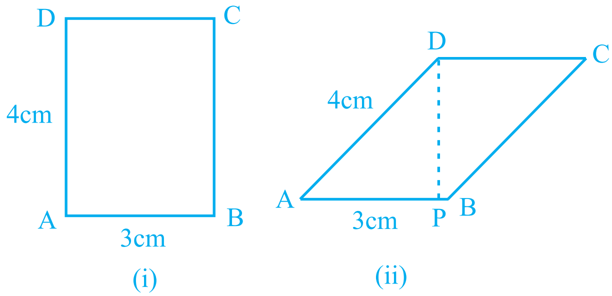
- एक समांतर चतुर्भुज एक समलंब है।

- पतंग एक समांतर चतुर्भुज नहीं है।

- समलंब एक समांतर चतुर्भुज नहीं है (क्योंकि इसमें सम्मुख भुजाओं का एक युग्म ही समांतर है और समांतर चतुर्भुज के लिए सम्मुख भुजाओं के दोनों युग्म समांतर होने चाहिए)।

- एक आयत अथवा एक समचतुर्भुज एक वर्ग नहीं है।

आकृति 8.6 को देखिए। इसमें समान परिमाप 14 cm वाला एक आयत और एक समांतर चतुर्भुज दिया है।



आकृति 8.6

यहाँ समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल $DP \times AB$ है और यह आयत के क्षेत्रफल $AB \times AD$ से कम है, क्योंकि $DP < AD$ है। सामान्यतः, मिठाई के दुकानदार 'बरफी' को समांतर चतुर्भुज के आकार में काटते हैं, ताकि एक ही ट्रे (परात) में बरफी के अधिक टुकड़े आ सकें (अगली बार जब आप बरफी खाएँ, तो उसका आकार देख लें)।

आइए अब पिछली कक्षाओं में पढ़े हुए समांतर चतुर्भुजों के कुछ गुणों का पुनर्विलोकन करें।

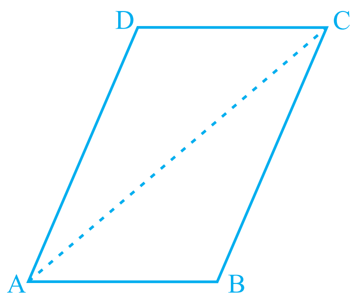
8.4 समांतर चतुर्भुज के गुण

आइए एक क्रियाकलाप करें।

कागज पर एक समांतर चतुर्भुज खींच कर उसे काट लीजिए। अब इसे विकर्ण के अनुदिश काट लीजिए (देखिए आकृति 8.7)। आप दो त्रिभुज प्राप्त करते हैं। इन त्रिभुजों के बारे में आप क्या कह सकते हैं?

एक त्रिभुज को दूसरे त्रिभुज पर रखिए। यदि आवश्यक हो, तो त्रिभुज को घुमाइए भी। आप क्या देखते हैं?

देखिए कि दोनों त्रिभुज परस्पर सर्वांगसम हैं।



आकृति 8.7

कुछ और समांतर चतुर्भुज खींच कर इस क्रियाकलाप को दोहराइए। प्रत्येक बार आप पाएँगे कि समांतर चतुर्भुज का एक विकर्ण उसे दो सर्वांगसम त्रिभुजों में विभाजित करता है।

अब आइए इस परिणाम को सिद्ध करें।

प्रमेय 8.1 : *किसी समांतर चतुर्भुज का एक विकर्ण उसे दो सर्वांगसम त्रिभुजों में विभाजित करता है।*

उपपत्ति : मान लीजिए ABCD एक समांतर चतुर्भुज है और AC उसका एक विकर्ण है (देखिए आकृति 8.8)। देखिए कि विकर्ण AC समांतर चतुर्भुज ABCD को दो त्रिभुजों ABC और CDA में विभाजित करता है। हमें सिद्ध करना है कि ये दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं।

Δ ABC और Δ CDA के लिए ध्यान दीजिए कि BC $\parallel$ AD है और AC एक तिर्यक रेखा है।

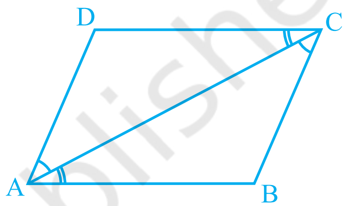
इसलिए, $\angle$ BCA = $\angle$ DAC (एकांतर कोणों का युग्म)

साथ ही, AB $\parallel$ DC और AC एक तिर्यक रेखा है।

इसलिए, $\angle$ BAC = $\angle$ DCA (एकांतर कोणों का युग्म)

और AC = CA (उभयनिष्ठ)

अतः, Δ ABC $\cong$ Δ CDA (ASA नियम)



आकृति 8.8

अर्थात् विकर्ण AC समांतर चतुर्भुज ABCD को दो सर्वांगसम त्रिभुजों ABC और CDA में विभाजित करता है।

अब समांतर चतुर्भुज ABCD की सम्मुख भुजाओं को मापिए। आप क्या देखते हैं?

आप पाएँगे कि AB = DC और AD = BC है।

यह समांतर चतुर्भुज का एक अन्य गुण है, जिसे नीचे दिया जा रहा है :

प्रमेय 8.2 : *एक समांतर चतुर्भुज में सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं।*

आप पहले ही सिद्ध कर चुके हैं कि समांतर चतुर्भुज का विकर्ण उसे दो सर्वांगसम त्रिभुजों में विभाजित करता है। अतः, आप इनके संगत भागों, मान लीजिए भुजाओं, के बारे में क्या कह सकते हैं? ये बराबर हैं।

इसलिए, AB = DC और AD = BC है।

अब इस परिणाम का विलोम क्या है? आप जानते हैं कि जो प्रमेय (किसी कथन) में दिया हो, तो उसके विलोम में उसे सिद्ध करना होता है और जो प्रमेय में दिया गया है उसे

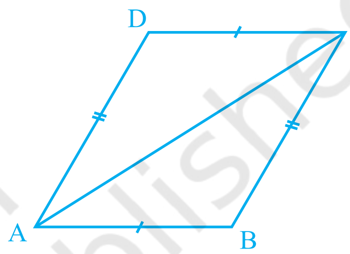
विलोम में दिया हुआ माना जाता है। ध्यान दीजिए कि प्रमेय 8.2 को निम्न रूप में भी लिखा जा सकता है :

यदि एक चतुर्भुज एक समांतर चतुर्भुज है, तो उसकी सम्मुख भुजाओं का प्रत्येक युग्म बराबर होता है। इसलिए, इसका विलोम निम्न होगा :

प्रमेय 8.3 : *यदि एक चतुर्भुज की सम्मुख भुजाओं का प्रत्येक युग्म बराबर हो, तो वह एक समांतर चतुर्भुज होता है।*

क्या आप इसके कारण दे सकते हैं?

मान लीजिए चतुर्भुज ABCD की भुजाएँ AB और CD बराबर हैं और साथ ही AD = BC है (देखिए आकृति 8.9)। विकर्ण AC खींचिए।



आकृति 8.9

स्पष्टत:, Δ ABC $\cong$ Δ CDA (क्यों?)

अत:, $\angle$ BAC = $\angle$ DCA

और $\angle$ BCA = $\angle$ DAC (क्यों?)

क्या अब आप कह सकते हैं कि ABCD एक समांतर चतुर्भुज है? (क्यों?)

आपने अभी देखा है कि एक समांतर चतुर्भुज में सम्मुख भुजाओं का प्रत्येक युग्म बराबर होता है और विलोमत: यदि किसी चतुर्भुज में सम्मुख भुजाओं का प्रत्येक युग्म बराबर हो, तो वह एक समांतर चतुर्भुज होता है। क्या हम यही परिणाम सम्मुख कोणों के युग्मों के बारे में भी निकाल सकते हैं?

एक समांतर चतुर्भुज खींचिए और उसके कोणों को मापिए। आप क्या देखते हैं?

सम्मुख कोणों का प्रत्येक युग्म बराबर है।

इसे कुछ और समांतर चतुर्भुज लेकर दोहराइए। इससे हम एक अन्य परिणाम पर पहुँचते हैं, जो निम्न है :

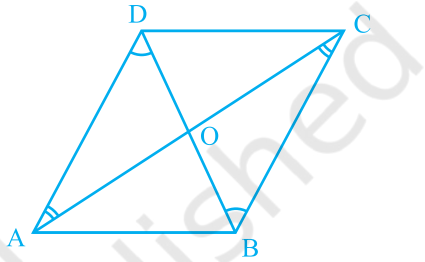
प्रमेय 8.4 : *एक समांतर चतुर्भुज में सम्मुख कोण बराबर होते हैं।*

अब, क्या इस परिणाम का विलोम भी सत्य है? हाँ, ऐसा ही है। चतुर्भुज के कोण योग गुण और तिर्यक रेखा द्वारा प्रतिच्छेदित समांतर रेखाओं के गुणों का प्रयोग करके, हम देख

सकते हैं कि उपरोक्त का विलोम भी सत्य है। इस प्रकार, हमें निम्न प्रमेय प्राप्त होती है:

प्रमेय 8.5 : *यदि एक चतुर्भुज में सम्मुख कोणों का प्रत्येक युग्म बराबर हो, तो वह एक समांतर चतुर्भुज होता है।*

समांतर चतुर्भुज का एक गुण और भी है। आइए इसका अध्ययन करें। एक समांतर चतुर्भुज ABCD खींचिए और उसके दोनों विकर्ण AC और BD खींचिए, जो परस्पर O पर प्रतिच्छेद करते हैं (देखिए आकृति 8.10)।



आकृति 8.10

OA, OB, OC और OD की लम्बाइयाँ मापिए।

आप क्या देखते हैं? आप देखेंगे कि

$$OA = OC \quad \text{और} \quad OB = OD$$

है। अर्थात् O दोनों विकर्णों का मध्य-बिंदु है।

कुछ और समांतर चतुर्भुज लेकर इस क्रियाकलाप को दोहराइए।

प्रत्येक बार, आप प्राप्त करेंगे कि O दोनों विकर्णों का मध्य-बिंदु है।

इस प्रकार, हम निम्न प्रमेय प्राप्त करते हैं :

प्रमेय 8.6 : *समांतर चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को (परस्पर) समद्विभाजित करते हैं।*

अब, यदि एक चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करें, तो क्या होगा? क्या यह एक समांतर चतुर्भुज होगा? वास्तव में, यह सत्य है।

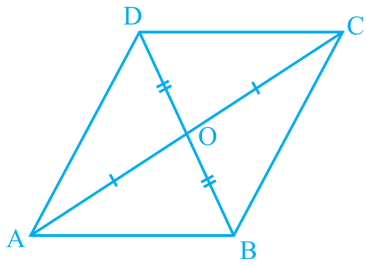
यह प्रमेय 8.6 के परिणाम का विलोम है। इसे नीचे दिया जा रहा है :

प्रमेय 8.7 : *यदि एक चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करें, तो वह एक समांतर चतुर्भुज होता है।*

आप इस परिणाम के लिए तर्क निम्न प्रकार दे सकते हैं :

ध्यान दीजिए कि आकृति 8.11 में, यह दिया है कि OA = OC और OB = OD है।

अत:, $\Delta\, AOB \cong \Delta\, COD$ (क्यों?)



आकृति 8.11

इसलिए, $\angle ABO = \angle CDO$ (क्यों?)

इससे हमें $AB \parallel CD$ प्राप्त होता है।

इसी प्रकार, $BC \parallel AD$ है।

अतः, ABCD एक समांतर चतुर्भुज है।

आइए अब कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 1 : दर्शाइए कि एक आयत का प्रत्येक कोण एक समकोण होता है।

हल : याद कीजिए कि एक आयत क्या होता है।

आकृति 8.12

एक आयत वह समांतर चतुर्भुज होता है जिसका एक कोण समकोण हो।

मान लीजिए ABCD एक आयत है, जिसमें $\angle A = 90°$ है।

हमें दर्शाना है कि $\angle B = \angle C = \angle D = 90°$ है।

$AD \parallel BC$ और AB एक तिर्यक रेखा है (देखिए आकृति 8.12)।

इसलिए, $\angle A + \angle B = 180°$ (तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अंतः कोण)

परन्तु, $\angle A = 90°$ है।

इसलिए, $\angle B = 180° - \angle A = 180° - 90° = 90°$

अब $\angle C = \angle A$ और $\angle D = \angle B$ (समांतर चतुर्भुज के सम्मुख कोण)

इसलिए, $\angle C = 90°$ और $\angle D = 90°$

अतः, आयत का प्रत्येक कोण 90^0 है।

उदाहरण 2 : दर्शाइए कि एक समचतुर्भुज के विकर्ण परस्पर लम्ब होते हैं।

हल : समचतुर्भुज ABCD पर विचार कीजिए (देखिए आकृति 8.13)।

आप जानते हैं कि AB = BC = CD = DA (क्यों?)

अब, Δ AOD और Δ COD में,

OA = OC (समांतर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं)

OD = OD (उभयनिष्ठ)

$AD = CD$ (दिया है)

अतः, $\Delta\ AOD \cong \Delta\ COD$ (SSS सर्वांगसमता नियम)

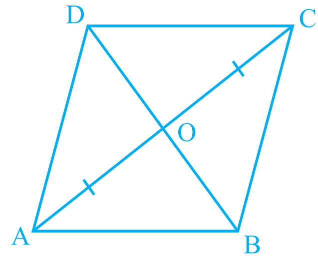
इसलिए, $\angle\ AOD = \angle\ COD$ (CPCT)

परन्तु, $\angle\ AOD + \angle\ COD = 180°$ (रैखिक युग्म)

इसलिए, $2\angle\ AOD = 180°$

या, $\angle\ AOD = 90°$

अतः, समचर्तुभुज के विकर्ण परस्पर लम्ब हैं।



आकृति 8.13

उदाहरण 3 : ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है, जिसमें $AB = AC$ है। AD बहिष्कोण PAC को समद्विभाजित करता है और $CD \parallel BA$ है (देखिए आकृति 8.14)। दर्शाइए कि

(i) $\angle\ DAC = \angle\ BCA$ और (ii) ABCD एक समांतर चतुर्भुज है।

हल : (i) ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है, जिसमें $AB = AC$ है। (दिया है)

इसलिए, $\angle\ ABC = \angle\ ACB$ (बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण)

साथ ही, $\angle\ PAC = \angle\ ABC + \angle\ ACB$

(त्रिभुज का बहिष्कोण)

या, $\angle\ PAC = 2\angle\ ACB$ (1)

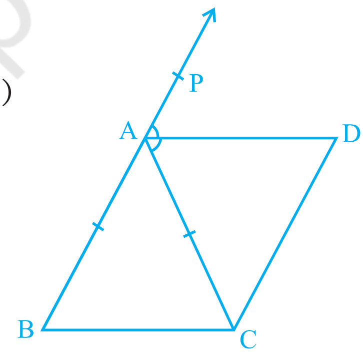
अब, AD कोण PAC को समद्विभाजित करती है।

इसलिए, $\angle\ PAC = 2\angle\ DAC$ (2)

अतः,

$2\angle\ DAC = 2\angle\ ACB$ [(1) और (2) से]

या, $\angle\ DAC = \angle\ ACB$



आकृति 8.14

(ii) अब ये दोनों बराबर कोण वे एकांतर कोण हैं जो रेखाखंडों BC और AD को तिर्यक रेखा AC द्वारा प्रतिच्छेद करने से बनते हैं।

इसलिए, $BC \parallel AD$

साथ ही, BA || CD है।

इस प्रकार, चतुर्भुज ABCD की सम्मुख भुजाओं के दोनों युग्म समांतर हैं।

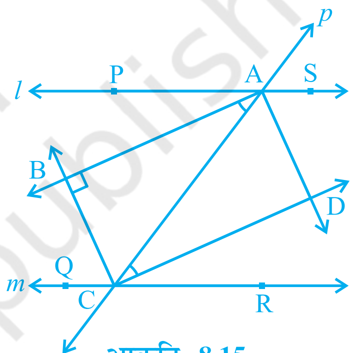
अतः, ABCD एक समांतर चतुर्भुज है।

उदाहरण 4 : दो समांतर रेखाओं l और m को एक तिर्यक रेखा p प्रतिच्छेद करती है (देखिए आकृति 8.15)। दर्शाइए कि अंतः कोणों के समद्विभाजकों से बना चतुर्भुज एक आयत है।

हल : यह दिया है कि $l \parallel m$ है और तिर्यक रेखा p इन्हें क्रमशः बिंदुओं A और C पर प्रतिच्छेद करती है।

$\angle$ PAC और $\angle$ ACQ के समद्विभाजक B पर प्रतिच्छेद करते हैं और $\angle$ ACR और $\angle$ SAC के समद्विभाजक D पर प्रतिच्छेद करते हैं।

हमें दर्शाना है कि चतुर्भुज ABCD एक आयत है।



आकृति 8.15

अब, $\angle \text{PAC} = \angle \text{ACR}$

($l \parallel m$ और तिर्यक रेखा p से बने एकांतर कोण)

इसलिए, $\frac{1}{2}\angle \text{PAC} = \frac{1}{2}\angle \text{ACR}$

अर्थात्, $\angle \text{BAC} = \angle \text{ACD}$

ये बराबर कोण रेखाओं AB और DC के तिर्यक रेखा AC द्वारा प्रतिच्छेदित करने से बनते हैं और ये एकांतर कोण हैं।

इसलिए, AB || DC

इसी प्रकार, BC || AD ($\angle$ ACB और $\angle$ CAD लेने पर)

अतः, ABCD एक समांतर चतुर्भुज है।

साथ ही, $\angle \text{PAC} + \angle \text{CAS} = 180°$ (रैखिक युग्म)

इसलिए, $\frac{1}{2}\angle \text{PAC} + \frac{1}{2}\angle \text{CAS} = \frac{1}{2} \times 180° = 90°$

या, $\angle \text{BAC} + \angle \text{CAD} = 90°$

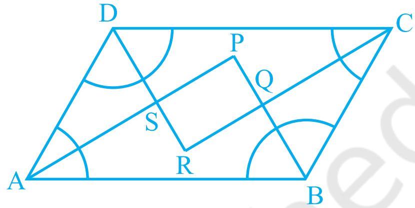
या, $\angle \text{BAD} = 90°$

इसलिए, ABCD एक समांतर चतुर्भुज है जिसका एक कोण समकोण है।

अतः ABCD एक आयत है।

उदाहरण 5 : दर्शाइए कि एक समांतर चतुर्भुज के कोणों के समद्विभाजक एक आयत बनाते हैं।

हल : मान लीजिए P, Q, R और S क्रमशः समांतर चतुर्भुज ABCD के $\angle A$ और $\angle B$, $\angle B$ और $\angle C$, $\angle C$ और $\angle D$ तथा $\angle D$ और $\angle A$ के समद्विभाजकों के प्रतिच्छेद बिंदु हैं (देखिए आकृति 8.16)।



आकृति 8.16

Δ ASD में आप क्या देख सकते हैं?

चूँकि DS कोण D को और AS कोण A को समद्विभाजित करते हैं, इसलिए

$$\angle DAS + \angle ADS = \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle D$$

$$= \frac{1}{2}(\angle A + \angle D)$$

$$= \frac{1}{2} \times 180^\circ$$

($\angle A$ और $\angle D$ तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अंतः कोण हैं)

$$= 90^\circ$$

साथ ही, $\angle DAS + \angle ADS + \angle DSA = 180^\circ$ (त्रिभुज का कोण योग गुण)

या, $90^\circ + \angle DSA = 180^\circ$

या, $\angle DSA = 90^\circ$

अतः, $\angle PSR = 90^\circ$ ($\angle DSA$ का शीर्षाभिमुख कोण)

इसी प्रकार, यह दर्शाया जा सकता है कि $\angle APB = 90^\circ$ या $\angle SPQ = 90^\circ$ (जैसा कि $\angle DSA$ के लिए किया था)। इसी प्रकार, $\angle PQR = 90^\circ$ और $\angle SRQ = 90^\circ$ है।

इसलिए, PQRS एक ऐसा चतुर्भुज है जिसके सभी कोण समकोण हैं।

क्या हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि यह एक आयत है? आइए इसकी जाँच करें।

हम दर्शा चुके हैं कि $\angle PSR = \angle PQR = 90^\circ$ और $\angle SPQ = \angle SRQ = 90^\circ$ है, अर्थात् सम्मुख कोणों के दोनों युग्म बराबर हैं।

अतः PQRS एक समांतर चतुर्भुज है, जिसमें एक कोण (वास्तव में सभी कोण) समकोण हैं। इसलिए, PQRS एक आयत है।

8.5 चतुर्भुज के समांतर चतुर्भुज होने के लिए एक अन्य प्रतिबन्ध

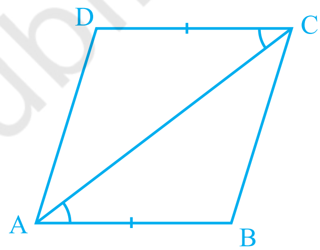
इस अध्याय में, आपने समांतर चतुर्भुजों के अनेक गुणों का अध्ययन किया है और आपने यह भी जाँच की है कि यदि एक चतुर्भुज इन गुणों में से किसी एक गुण को भी संतुष्ट करे, तो वह एक समांतर चतुर्भुज होता है।

अब हम एक और प्रतिबन्ध का अध्ययन करेंगे, जो एक चतुर्भुज के समांतर चतुर्भुज होने के लिए न्यूनतम प्रतिबन्ध है।

इसे एक प्रमेय के रूप में नीचे दिया जा रहा है :

प्रमेय 8.8 : *कोई चतुर्भुज एक समांतर चतुर्भुज होता है, यदि उसकी सम्मुख भुजाओं का एक युग्म बराबर हो और समांतर हो।*

आकृति 8.17 को देखिए, जिसमें AB = CD और AB || CD है। आइए एक विकर्ण AC खींचें। आप SAS सर्वांगसमता नियम से दर्शा सकते हैं कि $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ है।

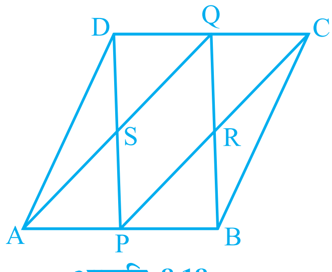


आकृति 8.17

इसलिए, BC || AD है। (क्यों?)

आइए अब समांतर चतुर्भुज के इस गुण के प्रयोग के लिए, एक उदाहरण लें।

उदाहरण 6 : ABCD एक समांतर चतुर्भुज है, जिसमें P और Q क्रमशः सम्मुख भुजाओं AB और CD के मध्य-बिंदु हैं (देखिए आकृति 8.18)। यदि AQ, DP को S पर प्रतिच्छेद करे और BQ, CP को R पर प्रतिच्छेद करे, तो दर्शाइए कि:



आकृति 8.18

(i) APCQ एक समांतर चतुर्भुज है।

(ii) DPBQ एक समांतर चतुर्भुज है।

(iii) PSQR एक समांतर चतुर्भुज है।

हल : (i) चतुर्भुज APCQ में,

$$AP \parallel QC \qquad (\text{चूँकि } AB \parallel CD) \quad (1)$$

$$AP = \frac{1}{2} AB, \quad CQ = \frac{1}{2} CD \qquad (\text{दिया है})$$

साथ ही, $AB = CD$ (क्यों?)

इसलिए, $AP = QC$ (2)

अतः, APCQ एक समांतर चतुर्भुज है। [(1) और (2) तथा प्रमेय 8.8 से]

(ii) इसी प्रकार, DPBQ एक समांतर चतुर्भुज है, क्योंकि $DQ \parallel PB$ और $DQ = PB$ है।

(iii) चतुर्भुज PSQR में,

$SP \parallel QR$ (SP, DP का एक भाग है और QR, QB का एक भाग है)

इसी प्रकार, $SQ \parallel PR$ है।

अतः, PSQR एक समांतर चतुर्भुज है।

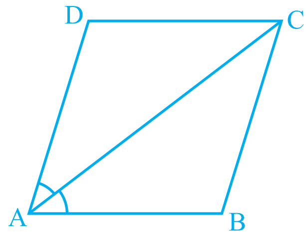
प्रश्नावली 8.1

1. एक चतुर्भुज के कोण 3 : 5 : 9 : 13 के अनुपात में हैं। इस चतुर्भुज के सभी कोण ज्ञात कीजिए।
2. यदि एक समांतर चतुर्भुज के विकर्ण बराबर हों, तो दर्शाइए कि वह एक आयत है।
3. दर्शाइए कि यदि एक चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समकोण पर समद्विभाजित करें, तो वह एक समचतुर्भुज होता है।
4. दर्शाइए कि एक वर्ग के विकर्ण बराबर होते हैं और परस्पर समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।
5. दर्शाइए कि यदि एक चतुर्भुज के विकर्ण बराबर हों और परस्पर समद्विभाजित करें, तो वह एक वर्ग होता है।

6. समांतर चतुर्भुज ABCD का विकर्ण AC कोण A को समद्विभाजित करता है (देखिए आकृति 8.19)। दर्शाइए कि

(i) यह $\angle C$ को भी समद्विभाजित करता है।

(ii) ABCD एक समचतुर्भुज है।



आकृति 8.19

7. ABCD एक समचतुर्भुज है। दर्शाइए कि विकर्ण AC कोणों A और C दोनों को समद्विभाजित करता है तथा विकर्ण BD कोणों B और D दोनों को समद्विभाजित करता है।

8. ABCD एक आयत है जिसमें विकर्ण AC दोनों कोणों A और C को समद्विभाजित करता है। दर्शाइए कि (i) ABCD एक वर्ग है (ii) विकर्ण BD दोनों कोणों B और D को समद्विभाजित करता है

9. समांतर चतुर्भुज ABCD के विकर्ण BD पर दो बिंदु P और Q इस प्रकार स्थित हैं कि DP = BQ है (देखिए आकृति 8.20)। दर्शाइए कि

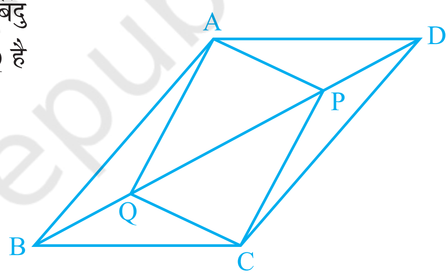
(i) $\Delta APD \cong \Delta CQB$

(ii) AP = CQ

(iii) $\Delta AQB \cong \Delta CPD$

(iv) AQ = CP

(v) APCQ एक समांतर चतुर्भुज है।

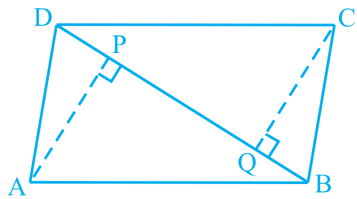


आकृति 8.20

10. ABCD एक समांतर चतुर्भज है तथा AP और CQ शीर्षों A और C से विकर्ण BD पर क्रमशः लम्ब हैं (देखिए आकृति 8.21)। दर्शाइए कि

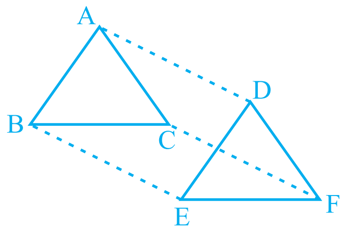
(i) $\Delta APB \cong \Delta CQD$

(ii) AP = CQ



आकृति 8.21

11. Δ ABC और Δ DEF में, AB = DE, AB $\parallel$ DE, BC = EF और BC $\parallel$ EF है। शीर्षों A, B और C को क्रमश: शीर्षों D, E और F से जोड़ा जाता है (देखिए आकृति 8.22)। दर्शाइए कि



आकृति 8.22

(i) चतुर्भुज ABED एक समांतर चतुर्भुज है।

(ii) चतुर्भुज BEFC एक समांतर चतुर्भुज है।

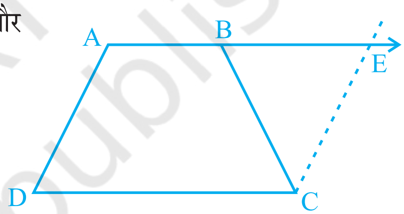
(iii) AD $\parallel$ CF और AD = CF है।

(iv) चतुर्भुज ACFD एक समांतर चतुर्भुज है।

(v) AC = DF है।

(vi) Δ ABC $\cong$ Δ DEF है।

12. ABCD एक समलंब है, जिसमें AB $\parallel$ DC और AD = BC है (देखिए आकृति 8.23)। दर्शाइए कि



आकृति 8.23

(i) $\angle A = \angle B$

(ii) $\angle C = \angle D$

(iii) Δ ABC $\cong$ Δ BAD

(iv) विकर्ण AC = विकर्ण BD है।

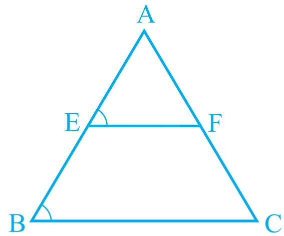
[**संकेत**: AB को बढ़ाइए और C से होकर DA के समांतर एक रेखा खींचिए जो बढ़ी हुई भुजा AB को E पर प्रतिच्छेद करे।]

8.6 मध्य-बिंदु प्रमेय

आप एक त्रिभुज और एक चतुर्भुज के अनेक गुणों का अध्ययन कर चुके हैं। आइए त्रिभुज के एक अन्य गुण का अध्ययन करें, जो एक त्रिभुज की भुजाओं के मध्य-बिंदुओं से संबंधित है। इसके लिए, निम्नलिखित क्रियाकलाप कीजिए :

एक त्रिभुज ABC खींचिए और उसकी दो भुजाओं AB और AC के मध्य-बिंदु E और F अंकित कीजिए। E और F को मिलाइए (देखिए आकृति 8.24)।

EF और BC को मापिए। साथ ही, $\angle$ AEF और $\angle$ ABC को भी मापिए। आप क्या देखते हैं?



आकृति 8.24

आप पाएँगे कि

$$EF = \frac{1}{2} BC \text{ और } \angle AEF = \angle ABC$$

है। अतः, $EF \parallel BC$ है।

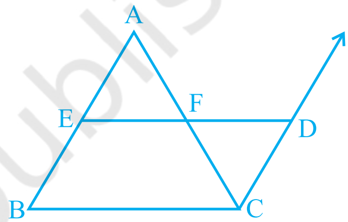
कुछ अन्य त्रिभुज लेकर, इस क्रियाकलाप को दोहराइए।

इस प्रकार, आप सरलता से निम्न प्रमेय पर पहुँच सकते हैं:

प्रमेय 8.9 : *किसी त्रिभुज की किन्ही दो भुजाओं के मध्य-बिंदुओं को मिलाने वाला रेखाखंड तीसरी भुजा के समांतर होता है।*

आप इस प्रमेय को निम्नलिखित संकेत की सहायता से सिद्ध कर सकते हैं।

आकृति 8.25 को देखिए, जिसमें E और F क्रमशः ΔABC की भुजाओं AB और AC के मध्य-बिंदु हैं तथा $CD \parallel BA$ है।



आकृति 8.25

$$\Delta\, AEF \cong \Delta\, CDF \qquad \text{(ASA नियम)}$$

इसलिए, $EF = DF$ और $BE = AE = DC$ (क्यों?)

अतः, BCDE एक समांतर चतुर्भुज है। (क्यों?)

इससे $EF \parallel BC$ प्राप्त होता है।

ध्यान दीजिए कि $EF = \frac{1}{2}\, ED = \frac{1}{2} BC$ है।

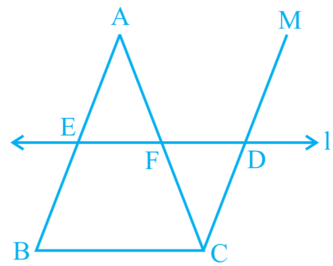
क्या आप प्रमेय 8.9 का विलोम लिख सकते हैं? क्या यह विलोम सत्य है?

आप देखेंगे कि ऊपर दिए गए प्रमेय का विलोम भी सत्य है। इसे नीचे दिया जा रहा है :

प्रमेय 8.10 : *किसी त्रिभुज की एक भुजा के मध्य-बिंदु से दूसरी भुजा के समांतर खींची गई रेखा तीसरी भुजा को समद्विभाजित करती है।*

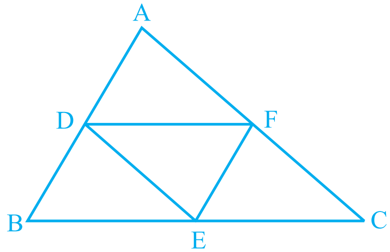
आकृति 8.26 में देखिए कि भुजा AB का मध्य-बिंदु E है और E से होकर जाने वाली रेखा l भुजा BC के समांतर है। साथ ही, $CM \parallel BA$ है।

Δ AEF और Δ CDF की सर्वांगसमता का प्रयोग करके, AF = CF सिद्ध कीजिए।



आकृति 8.26

उदाहरण 7 : Δ ABC में, D, E और F क्रमशः भुजाओं AB, BC और CA के मध्य-बिंदु हैं (देखिए आकृति 8.27)। दर्शाइए कि बिन्दुओं D, E और F को मिलाने पर Δ ABC चार सर्वांगसम त्रिभुजों में विभाजित हो जाता है।



आकृति 8.27

हल : चूँकि D और E क्रमशः भुजाओं AB और BC के मध्य-बिंदु हैं, इसलिए प्रमेय 8.9 द्वारा

DE || AC

इसी प्रकार, DF || BC और EF || AB है।

इसलिए, ADEF, BDFE और DFCE में से प्रत्येक एक समांतर चतुर्भुज है।

अब, DE समांतर चतुर्भुज BDFE का एक विकर्ण है।

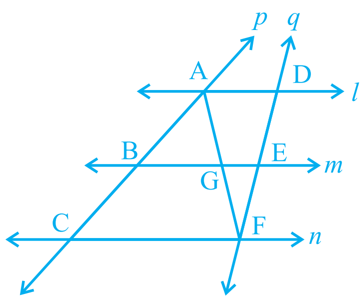
इसलिए, Δ BDE $\cong$ Δ FED

इसी प्रकार, Δ DAF $\cong$ Δ FED

और Δ EFC $\cong$ Δ FED

अतः, चारों त्रिभुज सर्वांगसम हैं।

उदाहरण 8 : l, m और n तीन समांतर रेखाएँ हैं, जो तिर्यक रेखाओं p और q द्वारा इस प्रकार प्रतिच्छेदित हैं कि l, m और n रेखा p पर समान अंतः खंड AB और BC काटती हैं (देखिए आकृति 8.28)। दर्शाइए कि l, m और n रेखा q पर भी समान अंतः खंड DE और EF काटती हैं।



आकृति 8.28

हल : हमें AB = BC दिया है और हमें DE = EF सिद्ध करना है।

आइए A को F से मिलाएँ और इससे AF रेखा m को G पर प्रतिच्छेद करती है।

समलंब ACFD दो त्रिभुजों ACF और AFD में विभाजित हो जाता है।

Δ ACF में यह दिया है कि B, भुजा AC का मध्य-बिंदु है। (AB = BC)

साथ ही, BG ॥ CF (चूँकि $m \parallel n$ है)

अत:, G भुजा AF का मध्य-बिंदु है। (प्रमेय 8.10 द्वारा)

अब, Δ AFD में भी हम इसी तर्क का प्रयोग कर सकते हैं। क्योंकि G भुजा AF का मध्य-बिंदु है और GE ॥ AD है, इसलिए प्रमेय 8.10 से E भुजा DF का मध्य-बिंदु है।

अर्थात् DE = EF है।

दूसरे शब्दों में, l, m और n तिर्यक रेखा q पर भी बराबर अंत: खंड काटती हैं।

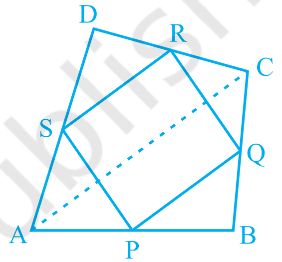
प्रश्नावली 8.2

1. ABCD एक चतुर्भुज है जिसमें P, Q, R और S क्रमश: भुजाओं AB, BC, CD और DA के मध्य-बिंदु हैं (देखिए आकृति 8.29)। AC उसका एक विकर्ण है। दर्शाइए कि

   (i) SR ॥ AC और SR = $\frac{1}{2}$ AC है।

   (ii) PQ = SR है।

   (iii) PQRS एक समांतर चतुर्भुज है।

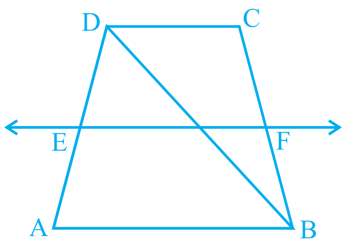


आकृति 8.29

2. ABCD एक समचतुर्भुज है और P, Q, R और S क्रमश: भुजाओं AB, BC, CD और DA के मध्य-बिंदु है। दर्शाइए कि चतुर्भुज PQRS एक आयत है।

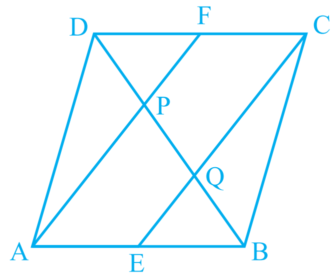
3. ABCD एक आयत है, जिसमें P, Q, R और S क्रमश: भुजाओं AB, BC, CD और DA के मध्य-बिंदु हैं। दर्शाइए कि चतुर्भुज PQRS एक समचतुर्भुज है।

4. ABCD एक समलंब है, जिसमें AB ॥ DC है। साथ ही, BD एक विकर्ण है और E भुजा AD का मध्य-बिंदु है। E से होकर एक रेखा AB के समांतर खींची गई है, जो BC को F पर प्रतिच्छेद करती है (देखिए आकृति 8.30)। दर्शाइए कि F भुजा BC का मध्य-बिंदु है।



आकृति 8.30

5. एक समांतर चतुर्भुज ABCD में E और F क्रमशः भुजाओं AB और CD के मध्य-बिंदु हैं (देखिए आकृति 8.31)। दर्शाइए कि रेखाखंड AF और EC विकर्ण BD को समत्रिभाजित करते हैं।



आकृति 8.31

6. दर्शाइए कि किसी चतुर्भुज की सम्मुख भुजाओं के मध्य-बिंदुओं को मिलाने वाले रेखाखंड परस्पर समद्विभाजित करते हैं।

7. ABC एक त्रिभुज है जिसका कोण C समकोण है। कर्ण AB के मध्य-बिंदु M से होकर BC के समांतर खींची गई रेखा AC को D पर प्रतिच्छेद करती है। दर्शाइए कि

   (i) D भुजा AC का मध्य-बिंदु है। (ii) $MD \perp AC$ है।

   (iii) $CM = MA = \frac{1}{2}AB$ है।

8.7 सारांश

इस अध्याय में, आपने निम्नलिखित बिंदुओं का अध्ययन किया है :

1. किसी चतुर्भुज के कोणों का योग 360° होता है।
2. समांतर चतुर्भुज का एक विकर्ण उसे दो सर्वांगसम त्रिभुजों में विभाजित करता है।
3. एक समांतर चतुर्भुज में,

   (i) सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं। (ii) सम्मुख कोण बराबर होते हैं।

   (iii) विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं।
4. एक चतुर्भुज समांतर चतुर्भुज होता है, यदि

   (i) सम्मुख भुजाएँ बराबर हों; या (ii) सम्मुख कोण बराबर हों;

   या (iii) विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हों;

   या (iv) सम्मुख भुजाओं का एक युग्म बराबर हो और समांतर हो।

5. आयत के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं और बराबर होते हैं। इसका विलोम भी सत्य है।

6. समचतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समकोण पर समद्विभाजित करते हैं। इसका विलोम भी सत्य है।

7. वर्ग के विकर्ण परस्पर समकोण पर समद्विभाजित करते हैं और बराबर होते हैं। इसका विलोम भी सत्य है।

8. किसी त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं के मध्य-बिंदुओं को मिलाने वाला रेखाखंड तीसरी भुजा के समांतर होता है और उसका आधा होता है।

9. किसी त्रिभुज की एक भुजा के मध्य-बिंदु से दूसरी भुजा के समांतर खींची गई रेखा तीसरी भुजा को समद्विभाजित करती है।

10. किसी चतुर्भुज की भुजाओं के मध्य-बिंदुओं को एक क्रम से मिलाने वाले रेखाखंडों द्वारा बना चतुर्भुज एक समांतर चतुर्भुज होता है।

0963CH09

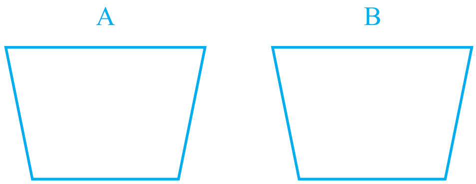
अध्याय 9

समांतर चतुर्भुजों और त्रिभुजों के क्षेत्रफल

9.1 भूमिका

अध्याय 5 में, आप देख चुके हैं कि ज्यामिति के अध्ययन का उद्‌गम खेतों की परिसीमाओं को पुनःनिर्मित करने और उन्हें उपयुक्त भागों में बाँटने की प्रक्रिया में निहित भूमि मापनों के साथ हुआ। उदाहरणार्थ, एक किसान *बुधिया* के पास एक त्रिभुजाकार खेत था और वह उसको अपनी दो पुत्रियों और एक पुत्र को बराबर-बराबर बाँटना चाहती थी। उसने त्रिभुजाकार खेत का क्षेत्रफल परिकलित किए बिना, केवल एक भुजा को तीन बराबर भागों में बाँट लिया और इस भुजा को विभाजित करने वाले दोनों बिंदुओं को सम्मुख शीर्ष बिंदु से मिला दिया। इस प्रकार, खेत तीन बराबर भागों में विभाजित हो गया और उसने अपने प्रत्येक बच्चे को एक-एक भाग दे दिया। क्या आप सोचते हैं कि इस प्रकार जो उसने तीन भाग प्राप्त किए थे वे वास्तव में क्षेत्रफल में बराबर थे? इस प्रकार के प्रश्नों और अन्य संबंधित समस्याओं के उत्तर प्राप्त करने के लिए, यह आवश्यक है कि समतल आकृतियों के क्षेत्रफलों पर पुनर्विचार किया जाए, जिन्हें आप पिछली कक्षाओं में पहले ही पढ़ चुके हैं।

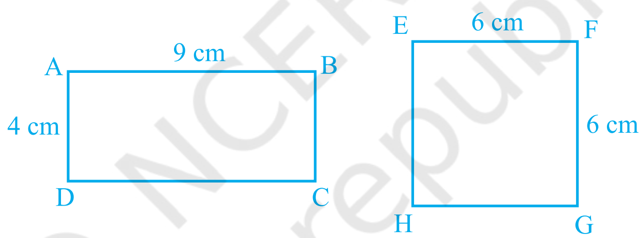
आपको याद होगा कि एक सरल बंद आकृति (simple closed figure) द्वारा तल का घेरा हुआ भाग उस आकृति का संगत *तलीय क्षेत्र* (*planar region*) कहलाता है। इस तलीय क्षेत्र का परिमाण (magnitude) या माप (measure) उस आकृति का *क्षेत्रफल* (*area*) कहलाता है। इस परिमाण या माप को सदैव एक संख्या [किसी मात्रक (unit) में] की सहायता से व्यक्त किया जाता है, जैसे 5 cm^2, 8 m^2, 3 हेक्टेयर, इत्यादि। अतः, हम कह सकते हैं



आकृति 9.1

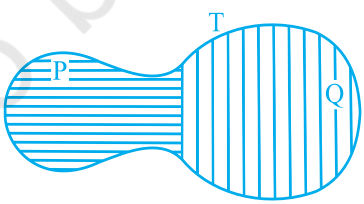
कि किसी आकृति का क्षेत्रफल (किसी मात्रक में) एक संख्या है जो उस आकृति द्वारा घेरे गए तल के भाग से संबद्ध (जुड़ी) होती है।

हम पिछली कक्षाओं और अध्याय 7 के अध्ययन द्वारा सर्वांगसम आकृतियों की अवधारणा से परिचित हैं। *'दो आकृतियाँ सर्वांगसम कही जाती हैं, यदि उनके आकार और माप समान हों।'* दूसरे शब्दों में, *यदि दो आकृतियाँ* A *और* B *सर्वांगसम हों* (देखिए आकृति 9.1), तो आप एक अक्स कागज़ (tracing paper) का प्रयोग करके, एक आकृति को दूसरी आकृति पर इस प्रकार रख सकते हैं कि एक आकृति दूसरी को पूरा-पूरा ढक ले। अत:, *यदि दो आकृतियाँ* A *और* B *सर्वांगसम हैं, तो उनके क्षेत्रफल अवश्य ही बराबर (समान) होने चाहिए।* परन्तु इस कथन का विलोम सत्य *नहीं* है। दूसरे शब्दों में, *बराबर क्षेत्रफलों वाली दो आकृतियों का सर्वांगसम होना आवश्यक नहीं है।* उदाहरणार्थ, आकृति 9.2 में, आयतों ABCD और EFGH के क्षेत्रफल (9×4 cm^2 और 6×6 cm^2) बराबर हैं, परन्तु स्पष्टत: ये सर्वांगसम नहीं हैं। (क्यों)?



आकृति 9.2

आइए अब नीचे दी आकृति 9.3 को देखें :



आकृति 9.3

आप देख सकते हैं कि आकृति T द्वारा निर्मित तलीय क्षेत्र आकृतियों P और Q द्वारा निर्मित दो तलीय क्षेत्रों से मिल कर बना है। आप सरलता से देख सकते हैं कि

आकृति T का क्षेत्रफल = आकृति P का क्षेत्रफल + आकृति Q का क्षेत्रफल

आप आकृति A के क्षेत्रफल को ar(A), आकृति B के क्षेत्रफल को ar(B), आकृति T के क्षेत्रफल को ar(T), इत्यादि से व्यक्त कर सकते हैं। अब आप कह सकते हैं कि *किसी आकृति का क्षेत्रफल उस आकृति द्वारा घेरे गए तल के भाग से संबद्ध (किसी मात्रक में) नीचे दिए दो गुणों के साथ एक संख्या है :*

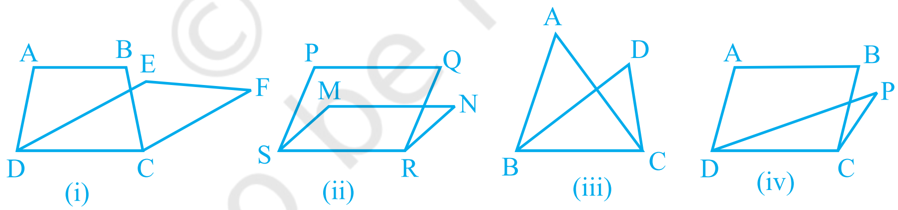
(1) *यदि* A *और* B *दो सर्वांगसम आकृतियाँ हैं, तो* ar (A) = ar (B) है तथा

(2) *यदि एक आकृति* T *द्वारा निर्मित क्षेत्र दो आकृतियों* P *और* Q *द्वारा निर्मित अनातिव्यापी* (*non-overlapping*) *तलीय क्षेत्रों से मिल कर बना है, तो* ar (T) = ar (P) + ar (Q) होगा।

आप अपनी पिछली कक्षाओं से विभिन्न आकृतियों, जैसे आयत, वर्ग, समांतर चतुर्भुज, त्रिभुज, इत्यादि के क्षेत्रफलों को ज्ञात करने वाले कुछ सूत्रों के बारे में भी जानते हैं। इस अध्याय में, इन ज्यामितीय आकृतियों के क्षेत्रफलों के बीच संबंध का उस प्रतिबंध के अंतर्गत अध्ययन करके जब ये एक ही आधार पर स्थित हों और एक ही समांतर रेखाओं के बीच में हों उपरोक्त सूत्रों के ज्ञान को अधिक प्रबल बनाने का प्रयत्न किया जाएगा। यह अध्ययन त्रिभुजों की समरूपता के कुछ परिणामों को समझने में भी बहुत उपयोगी रहेगा।

9.2 एक ही आधार पर और एक ही समांतर रेखाओं के बीच आकृतियाँ

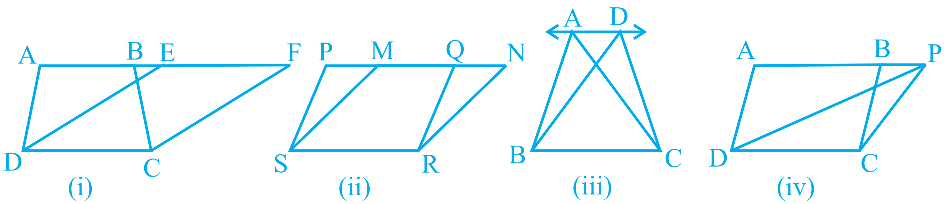
नीचे दी हुई आकृतियों को देखिए :



आकृति 9.4

आकृति 9.4(i) में, समलंब ABCD और समांतर चतुर्भुज EFCD में एक भुजा DC उभयनिष्ठ है। हम कहते हैं कि समलंब ABCD और समांतर चतुर्भुज EFCD *एक ही आधार* (*same base*) DC *पर स्थित हैं।* इसी प्रकार, आकृति 9.4 (ii) में, समांतर चतुर्भुज PQRS और MNRS एक ही आधार SR पर स्थित हैं; आकृति 9.4(iii) में, त्रिभुज ABC और DBC एक ही आधार BC पर स्थित हैं तथा आकृति 9.4(iv) में, समांतर चतुर्भुज ABCD और त्रिभुज PDC एक ही आधार DC पर स्थित हैं।

अब नीचे दी गई आकृतियों को देखिए :

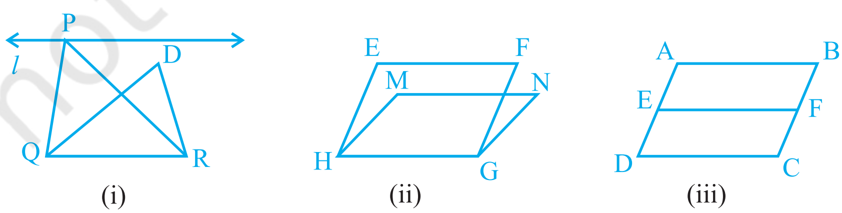


आकृति 9.5

आकृति 9.5(i) में, स्पष्टतः समलंब ABCD और समांतर चतुर्भुज EFCD एक ही आधार DC पर स्थित हैं। उपरोक्त के अतिरिक्त, (समलंब ABCD के) आधार DC के सम्मुख शीर्ष A और B तथा (समांतर चतुर्भुज EFCD के) आधार DC के सम्मुख शीर्ष E और F, DC के समांतर एक रेखा AF पर स्थित हैं। हम कहते हैं कि समलंब ABCD और समांतर चतुर्भुज EFCD *एक ही आधार* DC *तथा एक ही समांतर रेखाओं* AF *और* DC *के बीच स्थित हैं।* इसी प्रकार, समांतर चतुर्भुज PQRS और MNRS एक ही आधार SR तथा एक ही समांतर रेखाओं PN और SR के बीच स्थित हैं [देखिए आकृति 9.5 (ii)], जिसमें PQRS के शीर्ष P और Q तथा MNRS के शीर्ष M और N आधार SR के समांतर रेखा PN पर स्थित हैं। इसी प्रकार, त्रिभुज ABC और DBC एक ही आधार BC और एक ही समांतर रेखाओं AD और BC के बीच स्थित हैं [देखिए आकृति 9.5 (iii)] तथा समांतर चतुर्भुज ABCD और त्रिभुज PCD एक ही आधार DC और एक ही समांतर रेखाओं AP और DC के बीच स्थित हैं [देखिए आकृति 9.5(iv)]।

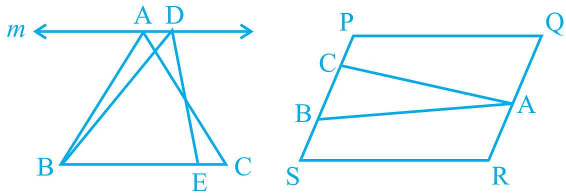
इसीलिए, *दो आकृतियाँ एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित कही जाती हैं, यदि उनका एक उभयनिष्ठ आधार (भुजा) हो तथा उभयनिष्ठ आधार के सम्मुख प्रत्येक आकृति के शीर्ष (या का शीर्ष) उस आधार के समांतर किसी रेखा पर स्थित हों।*

उपरोक्त कथन को दृष्टिगत रखते हुए, आप यह *नहीं* कह सकते कि आकृति 9.6 (i) के Δ PQR और Δ DQR एक ही समांतर रेखाओं l और QR के बीच स्थित हैं। इसी प्रकार, आप यह नहीं कह सकते कि आकृति 9.6 (ii) के समांतर चतुर्भुज EFGH और MNGH



आकृति 9.6

एक ही समांतर रेखाओं EF और HG के बीच स्थित हैं तथा यह कि आकृति 9.6 (iii) के समांतर चतुर्भुज ABCD और EFCD एक ही समांतर रेखाओं AB और DC के बीच स्थित हैं (यद्यपि इनमें एक उभयनिष्ठ आधार DC है और ये समांतर रेखाओं AD और BC के बीच स्थित हैं)। अत:, *यह स्पष्ट रूप से ध्यान रखना चाहिए कि दोनों समांतर रेखाओं में से एक उभयनिष्ठ आधार को अंतर्विष्ट करने वाली रेखा होनी चाहिए।* ध्यान दीजिए कि आकृति 9.7(i) के ΔABC और ΔDBE उभयनिष्ठ आधार पर स्थित नहीं हैं। इसी प्रकार, आकृति 9.7(ii) के ΔABC और समांतर चतुर्भुज PQRS एक ही आधार पर स्थित नहीं हैं।

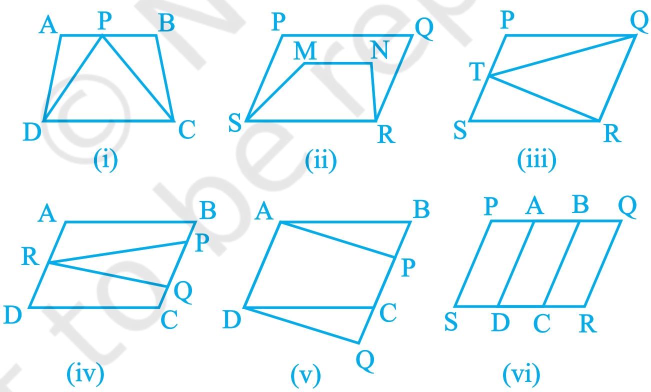


(i) (ii)

आकृति 9.7

प्रश्नावली 9.1

1. निम्नलिखित आकृतियों में से कौन-सी आकृतियाँ एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित हैं? ऐसी स्थिति में, उभयनिष्ठ आधार और दोनों समांतर रेखाएँ लिखिए।

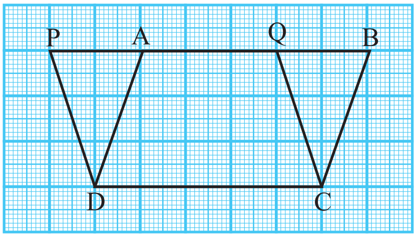


आकृति 9.8

9.3 एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के बीच समांतर चतुर्भुज

आइए अब एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित दो समांतर चतुर्भुजों के क्षेत्रफलों के मध्य एक संबंध, यदि कोई है तो, ज्ञात करने का प्रयत्न करें। इसके लिए, आइए निम्नलिखित क्रियाकलाप करें :

क्रियाकलाप 1 : आइए एक आलेख (graph) कागज लें और उस पर आकृति 9.9 में दर्शाए अनुसार दो समांतर चतुर्भुज ABCD और PQCD खींचें।

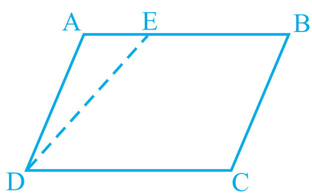


आकृति 9.9

उपरोक्त दोनों समांतर चतुर्भुज एक ही आधार DC और एक ही समांतर रेखाओं PB और DC के बीच स्थित हैं। आपको याद होगा कि इन समांतर चतुर्भुजों का क्षेत्रफल वर्गों को गिनकर किस प्रकार ज्ञात किया जा सकता है।

इस विधि में, दी हुई आकृति द्वारा घेरे गए पूर्ण वर्गों की संख्या, उन वर्गों की संख्या जिसका आधे से अधिक भाग इस आकृति से घिरा हुआ है तथा उन वर्गों की संख्या जिनका आधा भाग इस आकृति से घिरा हुआ है गिनकर इस दी हुई आकृति का क्षेत्रफल ज्ञात किया जा सकता है। उन वर्गों को छोड़ दिया जाता है जिनका आधे से कम भाग इस आकृति से घिरा हुआ है। आप पाएँगे कि इन दोनों समांतर चतुर्भुजों का क्षेत्रफल लगभग 15 वर्ग मात्रक है। आलेख कागज़ पर कुछ और समांतर चतुर्भुज खींचकर इस क्रियाकलाप* को दोहराइए। आप क्या देखते हैं? क्या दोनों समांतर चतुर्भुजों के क्षेत्रफल भिन्न-भिन्न हैं या बराबर हैं? वास्तव में, ये बराबर हैं। इसलिए, इससे आप इस निष्कर्ष पर पहुँच सकते हैं कि *एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के बीच बने समांतर चतुर्भुज क्षेत्रफल में बराबर होते हैं।* परन्तु, ध्यान रखिए यह केवल एक सत्यापन ही है।

क्रियाकलाप 2 : कागज़ की एक मोटी शीट या गत्ते पर एक समांतर चतुर्भुज ABCD खींचिए। अब, एक रेखाखंड DE आकृति 9.10 में दर्शाए अनुसार खींचिए।

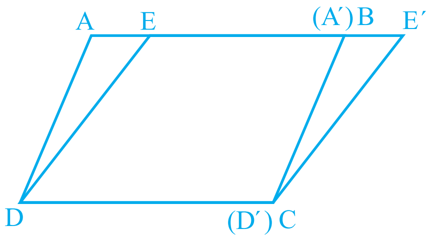


आकृति 9.10

अब एक अलग शीट या गत्ते पर एक अक्स कागज की सहायता से त्रिभुज A′ D′ E′ त्रिभुज

*इस क्रियाकलाप को एक जियोबोर्ड (geoboard) का प्रयोग करके भी किया जा सकता है।

ADE के सर्वांगसम खींचिए और शीट में से इसे काट लीजिए। अब $\Delta A'D'E'$ को इस प्रकार रखिए कि $A'D'$ भुजा BC के संपाती हो, जैसा कि आकृति 9.11 में दर्शाया गया है। ध्यान दीजिए कि यहाँ दो समांतर चतुर्भुज ABCD और $EE'CD$ हैं, जो एक ही आधार DC और एक ही समांतर रेखाओं AE' और DC के बीच स्थित हैं। इनके क्षेत्रफलों के बारे में आप क्या कह सकते हैं?



आकृति 9.11

चूंकि $\Delta\ ADE \cong \Delta\ A'D'E'$

अतः, $ar\ (ADE) = ar\ (A'D'E')$

साथ ही, $ar\ (ABCD) = ar\ (ADE) + ar\ (EBCD)$

$= ar\ (A'D'E') + ar\ (EBCD)$

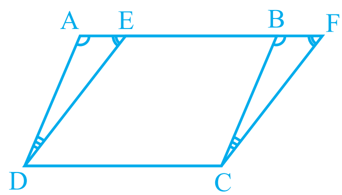
$= ar\ (EE'CD)$

अतः, दोनों समांतर चतुर्भुज क्षेत्रफल में बराबर हैं।

आइए अब ऐसे दो समांतर चतुर्भुजों के बीच में इस संबंध को सिद्ध करने का प्रयत्न करें।

प्रमेय 9.1 : *एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित समांतर चतुर्भुज क्षेत्रफल में बराबर होते हैं।*

उपपत्ति : दो समांतर चतुर्भुज ABCD और EFCD दिए हुए हैं, जो एक ही आधार DC और एक ही समांतर रेखाओं AF और DC के बीच स्थित हैं (देखिए आकृति 9.12)।



आकृति 9.12

हमें $ar\ (ABCD) = ar\ (EFCD)$ सिद्ध करना है।

$\Delta\ ADE$ और $\Delta\ BCF$ में,

$\angle DAE = \angle CBF$ ($AD \parallel BC$ और तिर्यक रेखा AF से संगत कोण) (1)

$\angle AED = \angle BFC$ ($ED \parallel FC$ और तिर्यक रेखा AF से संगत कोण) (2)

इसलिए, $\angle ADE = \angle BCF$ (त्रिभुज का कोण योग गुण) (3)

साथ ही, $AD = BC$ (समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ) (4)

अतः, $\Delta ADE \cong \Delta BCF$ [ASA नियम तथा (1), (3) और (4) द्वारा]

इसलिए, ar (ADE) = ar (BCF) (सर्वांगसम आकृतियों के क्षेत्रफल बराबर होते हैं) (5)

अब, ar (ABCD) = ar (ADE) + ar (EDCB)

= ar (BCF) + ar (EDCB) [(5) से]

= ar (EFCD)

अतः, समांतर चतुर्भुज ABCD और EFCD क्षेत्रफल में बराबर हैं।

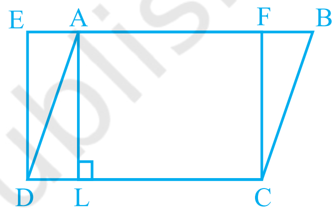
आइए अब इस प्रमेय का उपयोग दर्शाने के लिए कुछ उदाहरण लें :

उदाहरण 1 : आकृति 9.13 में, ABCD एक समांतर चतुर्भुज है और EFCD एक आयत है।

साथ ही, $AL \perp DC$ है। सिद्ध कीजिए कि

(i) ar (ABCD) = ar (EFCD)

(ii) ar (ABCD) = DC × AL



आकृति 9.13

हल : (i) चूँकि आयत एक समांतर चतुर्भुज भी होता है, इसलिए

ar (ABCD) = ar (EFCD) (प्रमेय 9.1)

(ii) उपरोक्त परिणाम से,

ar (ABCD) = DC × FC (आयत का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई) (1)

चूँकि $AL \perp DC$ है, इसलिए AFCL एक आयत है।

अतः, AL = FC (2)

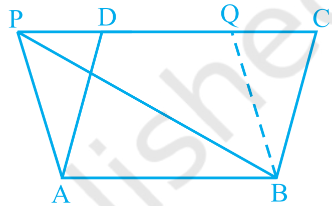
इसलिए, ar (ABCD) = DC × AL [(1) और (2) से]

क्या आप उपरोक्त परिणाम (ii) से यह देख सकते हैं कि *एक समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल उसकी एक भुजा और संगत शीर्षलम्ब का गुणनफल होता है?* क्या आपको याद है कि समांतर चतुर्भुज के क्षेत्रफल के इस सूत्र को आप कक्षा VII में पढ़ चुके हैं? इस सूत्र के आधार पर, प्रमेय 9.1 को इस रूप में लिखा जा सकता है : *एक ही आधार या बराबर आधारों और एक ही समांतर रेखाओं के बीच बने समांतर चतुर्भुज क्षेत्रफल में बराबर होते हैं।*

क्या आप उपरोक्त कथन का विलोम लिख सकते हैं? यह इस प्रकार है : *एक ही आधार (या बराबर आधारों) और बराबर क्षेत्रफलों वाले समांतर चतुर्भुज एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित होते हैं।* क्या यह विलोम सत्य है? समांतर चतुर्भुज के क्षेत्रफल के सूत्र का प्रयोग करके, इस विलोम को सिद्ध कीजिए।

उदाहरण 2 : यदि एक त्रिभुज और एक समांतर चतुर्भुज एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित हों, तो सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज का क्षेत्रफल समांतर चतुर्भुज के क्षेत्रफल का आधा होता है।

हल : मान लीजिए Δ ABP और समांतर चतुर्भुज ABCD एक ही आधार AB और एक ही समांतर रेखाओं AB और PC के बीच स्थित हैं (देखिए आकृति 9.14)।



आकृति 9.14

आप सिद्ध करना चाहते हैं कि ar (PAB) = $\frac{1}{2}$ ar (ABCD) है।

एक अन्य समांतर चतुर्भुज ABQP प्राप्त करने के लिए, BQ $\parallel$ AP खींचिए। अब समांतर चतुर्भुज ABQP और ABCD एक ही आधार AB और एक ही समांतर रेखाओं AB और PC के बीच स्थित हैं।

अत:, ar (ABQP) = ar (ABCD) (प्रमेय 9.1 द्वारा) (1)

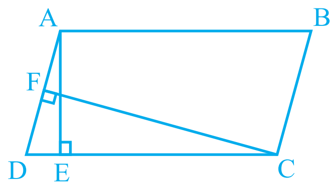
परन्तु Δ PAB $\cong$ Δ BQP (विकर्ण PB समांतर चतुर्भुज ABQP को दो सर्वांगसम त्रिभुजों में बाँटता है)

अत:, ar (PAB) = ar (BQP) (2)

इसलिए, ar (PAB) = $\frac{1}{2}$ ar (ABQP) [(2) से] (3)

इससे प्राप्त होता है ar (PAB) = $\frac{1}{2}$ ar (ABCD) [(1) और (3) से]

प्रश्नावली 9.2

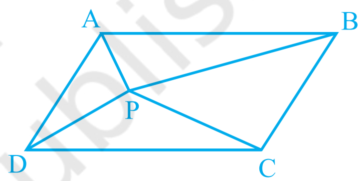


आकृति 9.15

1. आकृति 9.15 में, ABCD एक समांतर चतुर्भुज है, $AE \perp DC$ और $CF \perp AD$ है। यदि $AB = 16$ cm, $AE = 8$ cm और $CF = 10$ cm है, तो AD ज्ञात कीजिए।

2. यदि E,F,G और H क्रमशः समांतर चतुर्भुज ABCD की भुजाओं के मध्य-बिन्दु हैं, तो दर्शाइए कि $\text{ar (EFGH)} = \frac{1}{2}\text{ ar (ABCD)}$ है।

3. P और Q क्रमशः समांतर चतुर्भुज ABCD की भुजाओं DC और AD पर स्थित बिन्दु हैं। दर्शाइए कि ar (APB) = ar (BQC) है।



आकृति 9.16

4. आकृति 9.16 में, P समांतर चतुर्भुज ABCD के अभ्यंतर में स्थित कोई बिन्दु है। दर्शाइए कि

   (i) $\text{ar (APB)} + \text{ar (PCD)} = \frac{1}{2}\text{ ar (ABCD)}$

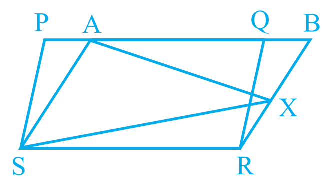
   (ii) ar (APD) + ar (PBC) = ar (APB) + ar (PCD)

   [*संकेत*: P से होकर AB के समांतर एक रेखा खींचिए।]

5. आकृति 9.17 में, PQRS और ABRS समांतर चतुर्भुज हैं तथा X भुजा BR पर स्थित कोई बिन्दु है। दर्शाइए कि

   (i) ar (PQRS) = ar (ABRS)

   (ii) $\text{ar (AXS)} = \frac{1}{2}\text{ ar (PQRS)}$

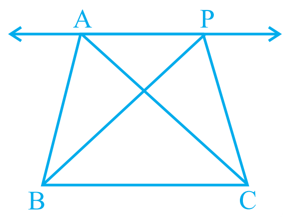


आकृति 9.17

6. एक किसान के पास समांतर चतुर्भुज PQRS के रूप का एक खेत था। उसने RS पर स्थित कोई बिन्दु A लिया और उसे P और Q से मिला दिया। खेत कितने भागों में विभाजित हो गया है? इन भागों के आकार क्या हैं? वह किसान खेत में गेहूँ और दालें बराबर-बराबर भागों में अलग-अलग बोना चाहती है। वह ऐसा कैसे करे?

9.4 एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित त्रिभुज

आइए आकृति 9.18 को देखें। इसमें आप दो त्रिभुज ABC और PBC ऐसे देखेंगे जो एक ही आधार BC और एक ही समांतर रेखाओं BC और AP के बीच स्थित हैं। ऐसे त्रिभुजों के क्षेत्रफलों के बारे में आप क्या कह सकते हैं? इस प्रश्न का उत्तर देने के लिए, आप एक आलेख कागज पर एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के बीच त्रिभुजों के कई युग्म बनाकर और वर्गों को गिनकर उनके क्षेत्रफलों को ज्ञात करने का क्रियाकलाप कर सकते हैं। प्रत्येक बार आप पाएँगे कि ऐसे दोनों त्रिभुजों के क्षेत्रफल (लगभग) बराबर हैं। इस क्रियाकलाप को एक जियोबोर्ड लेकर भी किया जा सकता है। आप पुन: पाएँगे कि दोनो क्षेत्रफल (लगभग) बराबर हैं।

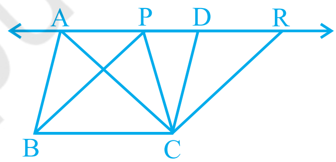


आकृति 9.18

इस प्रश्न का एक तर्कसंगत उत्तर प्राप्त करने के लिए, आप निम्न प्रकार आगे बढ़ सकते हैं :

आकृति 9.18 में, CD ‖ BA और CR ‖ BP इस प्रकार खींचिए कि D और R रेखा AP पर स्थित हों (देखिए आकृति 9.19)।

इससे आप दो समांतर चतुर्भुज PBCR और ABCD प्राप्त करते हैं, जो एक ही आधार BC और एक ही समांतर रेखाओं BC और AR के बीच स्थित हैं।



आकृति 9.19

अत:, ar (ABCD) = ar (PBCR) (क्यों?)

अब, Δ ABC $\cong$ Δ CDA और Δ PBC $\cong$ Δ CRP (क्यों?)

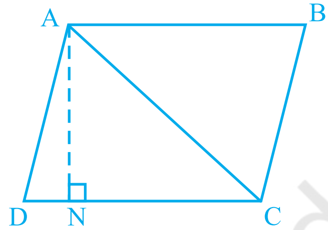
अत:, ar (ABC) = $\frac{1}{2}$ ar (ABCD) और ar (PBC) = $\frac{1}{2}$ ar (PBCR) (क्यों?)

इसलिए, ar (ABC) = ar (PBC)

इस प्रकार, आप निम्न प्रमेय पर पहुँच गए हैं :

प्रमेय 9.2 : *एक ही आधार (या बराबर आधारों) और एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित त्रिभुज क्षेत्रफल में बराबर होते हैं।*

अब, मान लीजिए ABCD एक समांतर चतुर्भुज है जिसका एक विकर्ण AC है (देखिए आकृति 9.20)। आइए मान लें कि $AN \perp DC$ है। ध्यान दीजिए कि



आकृति 9.20

$\Delta ADC \cong \Delta CBA$ (क्यों?)

अतः, $ar(ADC) = ar(CBA)$ (क्यों?)

इसलिए, $ar(ADC) = \frac{1}{2} ar(ABCD)$

$= \frac{1}{2}(DC \times AN)$ (क्यों?)

अतः, ΔADC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ आधार $DC \times$ संगत शीर्षलम्ब AN

दूसरे शब्दों में, *किसी त्रिभुज का क्षेत्रफल उसके आधार (एक भुजा) और संगत शीर्षलम्ब (या ऊँचाई) के गुणनफल के आधे के बराबर होता है।* क्या आपको याद है कि आप त्रिभुज के क्षेत्रफल के इस सूत्र के बारे में कक्षा VII में पढ़ चुके हैं? इस सूत्र से, आप देख सकते हैं कि एक ही *आधार (या बराबर आधारों) वाले और बराबर क्षेत्रफलों वाले त्रिभुज बराबर संगत शीर्षलम्बों वाले होंगे।*

बराबर संगत शीर्षलंब होने के लिए, त्रिभुजों को एक ही समांतर भुजाओं के बीच स्थित होना चाहिए। इससे आप प्रमेय 9.2 के निम्न विलोम पर पहुँच जाएँगे :

प्रमेय 9.3 : *एक ही आधार (या बराबर आधारों) वाले और बराबर क्षेत्रफलों वाले त्रिभुज एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित होते हैं।*

आइए अब इन परिणामों का प्रयोग दर्शाने के लिए कुछ उदाहरण लें।

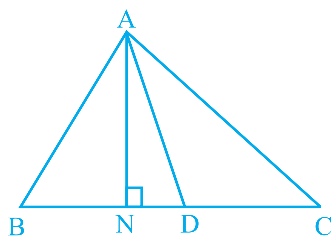
उदाहरण 3 : दर्शाइए कि त्रिभुज की एक माध्यिका उसे बराबर क्षेत्रफलों वाले दो त्रिभुजों में विभाजित करती है।

हल : मान लीजिए ABC एक त्रिभुज है और AD उसकी एक माध्यिका है (देखिए आकृति 9.21)।

आप यह दर्शाना चाहते हैं कि

$ar(ABD) = ar(ACD)$

चूँकि त्रिभुज के क्षेत्रफल में शीर्षलम्ब समबद्ध होता है, इसलिए आइए $AN \perp BC$ खींचें।



आकृति 9.21

अब, $ar(ABD) = \frac{1}{2} \times$ आधार $\times$ शीर्षलम्ब (ΔABD का)

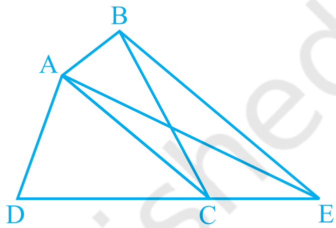
$$= \frac{1}{2} \times BD \times AN$$

$$= \frac{1}{2} \times CD \times AN \qquad \text{(चूँकि } BD = CD)$$

$$= \frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{शीर्षलम्ब} \ (\Delta\, ACD \text{ का})$$

$$= \text{ar}(ACD)$$

उदाहरण 4 : आकृति 9.22 में, ABCD एक चतुर्भुज है और $BE \parallel AC$ इस प्रकार है कि BE बढ़ाई गई DC को E पर मिलती है। दर्शाइए कि त्रिभुज ADE का क्षेत्रफल चतुर्भुज ABCD के क्षेत्रफल के बराबर है।



आकृति 9.22

हल : आकृति को ध्यानपूर्वक देखिए।

Δ BAC और Δ EAC एक ही आधार AC और एक ही समांतर रेखाओं AC और BE के बीच स्थित हैं।

अत:, ar (BAC) = ar (EAC) (प्रमेय 9.2 द्वारा)

इसलिए, ar (BAC) + ar (ADC) = ar (EAC) + ar (ADC)

(एक ही क्षेत्रफल दोनों पक्षों में जोड़ने पर)

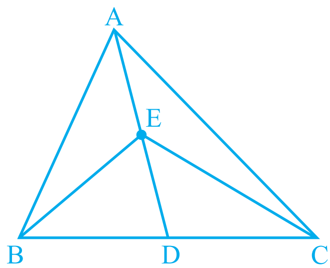
या ar (ABCD) = ar (ADE)

प्रश्नावली 9.3

1. आकृति 9.23 में, Δ ABC की एक माध्यिका AD पर स्थित E कोई बिन्दु है। दर्शाइए कि ar (ABE) = ar (ACE) है।

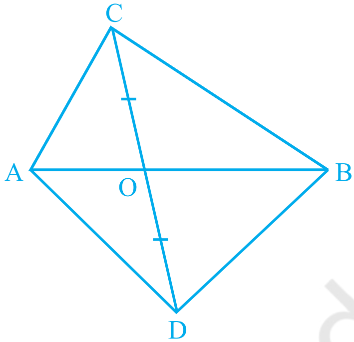
2. Δ ABC में, E माध्यिका AD का मध्य-बिन्दु है। दर्शाइए कि ar (BED) = $\frac{1}{4}$ ar(ABC) है।

3. दर्शाइए कि समांतर चतुर्भुज के दोनों विकर्ण उसे बराबर क्षेत्रफलों वाले चार त्रिभुजों में बाँटते हैं।



आकृति 9.23

4. आकृति 9.24 में, ABC और ABD एक ही आधार AB पर बने दो त्रिभुज हैं। यदि रेखाखंड CD रेखाखंड AB से बिन्दु O पर समद्विभाजित होता है, तो दर्शाइए कि ar (ABC) = ar (ABD) है।



आकृति 9.24

5. D, E और F क्रमशः त्रिभुज ABC की भुजाओं BC, CA और AB के मध्य-बिन्दु हैं। दर्शाइए कि

(i) BDEF एक समांतर चतुर्भुज है

(ii) ar (DEF) = $\frac{1}{4}$ ar (ABC)

(iii) ar (BDEF) = $\frac{1}{2}$ ar (ABC)

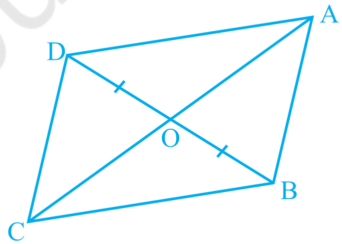
6. आकृति 9.25 में, चतुर्भुज ABCD के विकर्ण AC और BD परस्पर बिन्दु O पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करते हैं कि OB = OD है। यदि AB = CD है, तो दर्शाइए कि

(i) ar (DOC) = ar (AOB)

(ii) ar (DCB) = ar (ACB)

(iii) DA || CB या ABCD एक समांतर चतुर्भुज है।

[*संकेत*: D और B से AC पर लम्ब खींचिए।]



आकृति 9.25

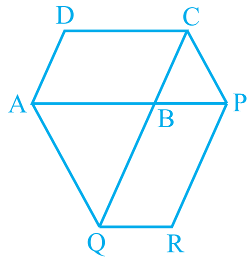
7. बिन्दु D और E क्रमशः Δ ABC की भुजाओं AB और AC पर इस प्रकार स्थित हैं कि ar (DBC) = ar (EBC) है। दर्शाइए कि DE || BC है।

8. XY त्रिभुज ABC की भुजा BC के समांतर एक रेखा है। यदि BE || AC और CF || AB रेखा XY से क्रमशः E और F पर मिलती हैं, तो दर्शाइए कि:

$$\text{ar (ABE)} = \text{ar (ACF)}$$

9. समांतर चतुर्भुज ABCD की एक भुजा AB को एक बिन्दु P तक बढ़ाया गया है। A से होकर CP के समांतर खींची गई रेखा बढ़ाई गई CB को Q पर मिलती है और फिर समांतर चतुर्भुज PBQR को पूरा किया गया है (देखिए आकृति 9.26)। दर्शाइए कि ar (ABCD) = ar (PBQR) है।

[*संकेत*: AC और PQ को मिलाइए। अब ar (ACQ) और ar (APQ) की तुलना कीजिए।]



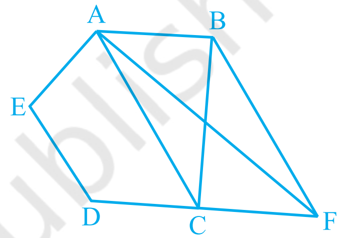
आकृति 9.26

10. एक समलंब ABCD, जिसमें AB ∥ DC है, के विकर्ण AC और BD परस्पर O पर प्रतिच्छेद करते हैं। दर्शाइए कि ar (AOD) = ar (BOC) है।

11. आकृति 9.27 में, ABCDE एक पंचभुज है। B से होकर AC के समांतर खींची गई रेखा बढ़ाई गई DC को F पर मिलती है। दर्शाइए कि

(i) ar (ACB) = ar (ACF)

(ii) ar (AEDF) = ar (ABCDE)



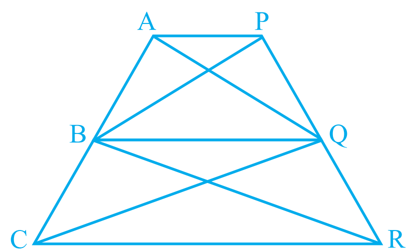
आकृति 9.27

12. गाँव के एक निवासी इतवारी के पास एक चतुर्भुजाकार भूखंड था। उस गाँव की ग्राम पंचायत ने उसके भूखंड के एक कोने से उसका कुछ भाग लेने का निर्णय लिया ताकि वहाँ एक स्वास्थ्य केन्द्र का निर्माण कराया जा सके। इतवारी इस प्रस्ताव को इस प्रतिबन्ध के साथ स्वीकार कर लेता है कि उसे इस भाग के बदले उसी भूखंड के संलग्न एक भाग ऐसा दे दिया जाए कि उसका भूखंड त्रिभुजाकार हो जाए। स्पष्ट कीजिए कि इस प्रस्ताव को किस प्रकार कार्यान्वित किया जा सकता है।

13. ABCD एक समलंब है, जिसमें AB ∥ DC है। AC के समांतर एक रेखा AB को X पर और BC को Y पर प्रतिच्छेद करती है। सिद्ध कीजिए कि ar (ADX) = ar (ACY) है।

[*संकेत*: CX को मिलाइए।]

14. आकृति 9.28 में, AP ∥ BQ ∥ CR है। सिद्ध कीजिए कि ar (AQC) = ar (PBR) है।

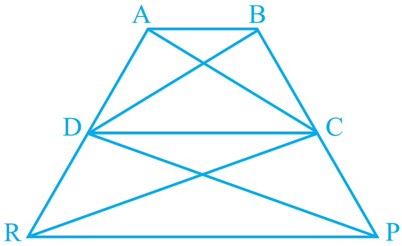


आकृति 9.28

15. चतुर्भुज ABCD के विकर्ण AC और BD परस्पर बिन्दु O पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करते हैं कि

ar (AOD) = ar (BOC) है। सिद्ध कीजिए कि ABCD एक समलंब है।

16. आकृति 9.29 में, ar (DRC) = ar (DPC) है और ar (BDP) = ar (ARC) है। दर्शाइए कि दोनों चतुर्भुज ABCD और DCPR समलंब हैं।



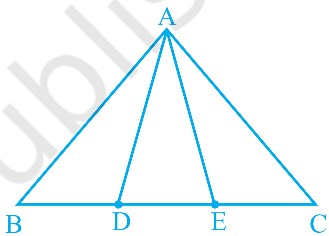
आकृति 9.29

प्रश्नावली 9.4 (ऐच्छिक)*

1. समांतर चतुर्भुज ABCD और आयत ABEF एक ही आधार पर स्थित हैं और उनके क्षेत्रफल बराबर हैं। दर्शाइए कि समांतर चतुर्भुज का परिमाप आयत के परिमाप से अधिक है।

2. आकृति 9.30 में, भुजा BC पर दो बिन्दु D और E इस प्रकार स्थित हैं कि BD = DE = EC है। दर्शाइए कि ar (ABD) = ar (ADE) = ar (AEC) है।

क्या आप अब उस प्रश्न का उत्तर दे सकते हैं, जो आपने इस अध्याय की 'भूमिका' में छोड़ दिया था कि "क्या *बुधिया* का खेत वास्तव में बराबर क्षेत्रफलों वाले तीन भागों में विभाजित हो गया है"?



आकृति 9.30

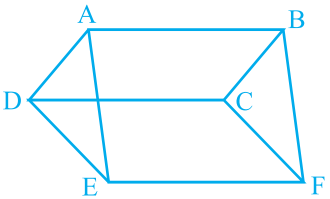
[**टिप्पणी:** ध्यान दीजिए कि BD = DE = EC लेने से ΔABC तीन त्रिभुजों ABD, ADE और AEC में विभाजित हो जाता है जिनके क्षेत्रफल बराबर हैं। इसी प्रकार, BC को n बराबर भागों में विभाजित करके और इस भुजा को विभाजित करने वाले बिन्दुओं को सम्मुख शीर्ष A से मिला कर आप इस त्रिभुज को बराबर क्षेत्रफलों वाले n त्रिभुजों में विभाजित कर सकते हैं।

3. आकृति 9.31 में, ABCD, DCFE और ABFE समांतर चतुर्भुज हैं। दर्शाइए कि ar (ADE) = ar (BCF) है।

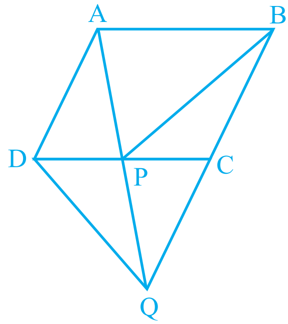
4. आकृति 9.32 में, ABCD एक समांतर चतुर्भुज है और BC को एक बिन्दु Q तक इस प्रकार बढ़ाया गया है कि AD = CQ है। यदि AQ भुजा DC को P पर प्रतिच्छेद करती है, तो दर्शाइए कि ar (BPC) = ar (DPQ) है।

[*संकेत*: AC को मिलाइए।]

*यह प्रश्नावली परीक्षा की दृष्टि से नहीं दी गई है।



आकृति 9.31



आकृति 9.32

5. आकृति 9.33 में, ABC और BDE दो समबाहु त्रिभुज इस प्रकार हैं कि D भुजा BC का मध्य-बिन्दु है। यदि AE भुजा BC को F पर प्रतिच्छेद करती है, तो दर्शाइए कि

(i) $\text{ar (BDE)} = \frac{1}{4} \text{ ar (ABC)}$

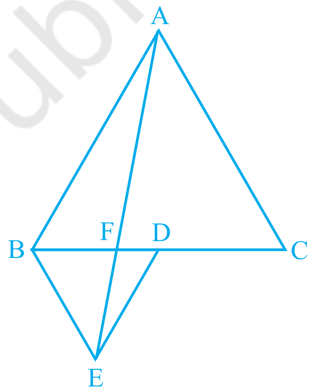
(ii) $\text{ar (BDE)} = \frac{1}{2} \text{ ar (BAE)}$

(iii) ar (ABC) = 2 ar (BEC)

(iv) ar (BFE) = ar (AFD)

(v) ar (BFE) = 2 ar (FED)

(vi) $\text{ar (FED)} = \frac{1}{8} \text{ ar (AFC)}$



आकृति 9.33

[*संकेत*: EC और AD को मिलाइए। दर्शाइए कि BE || AC और DE || AB है, इत्यादि।]

6. चतुर्भुज ABCD के विकर्ण AC और BD परस्पर बिन्दु P पर प्रतिच्छेद करते हैं। दर्शाइए कि ar (APB) × ar (CPD) = ar (APD) × ar (BPC) है।

[*संकेत*: A और C से BD पर लम्ब खींचिए।]

7. P और Q क्रमश: त्रिभुज ABC की भुजाओं AB और BC के मध्य-बिन्दु हैं तथा R रेखाखंड

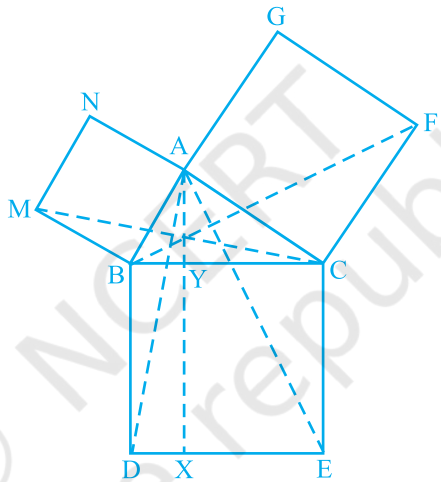
AP का मध्य-बिन्दु है। दर्शाइए कि:

(i) $ar(PRQ) = \frac{1}{2} ar(ARC)$

(ii) $ar(RQC) = \frac{3}{8} ar(ABC)$

(iii) $ar(PBQ) = ar(ARC)$

8. आकृति 9.34 में, ABC एक समकोण त्रिभुज है जिसका कोण A समकोण है। BCED, ACFG और ABMN क्रमशः भुजाओं BC, CA और AB पर बने वर्ग हैं। रेखाखंड $AX \perp DE$ भुजा BC को बिन्दु Y पर मिलता है। दर्शाइए कि:



आकृति 9.34

(i) $\Delta MBC \cong \Delta ABD$

(ii) $ar(BYXD) = 2\, ar(MBC)$

(iii) $ar(BYXD) = ar(ABMN)$

(iv) $\Delta FCB \cong \Delta ACE$

(v) $ar(CYXE) = 2\, ar(FCB)$

(vi) $ar(CYXE) = ar(ACFG)$

(vii) $ar(BCED) = ar(ABMN) + ar(ACFG)$

टिप्पणी : परिणाम (vii) प्रसिद्ध (सुपरिचित) पाइथागोरस प्रमेय है। इस प्रमेय की एक सरलतम उपपत्ति आप कक्षा X में पढ़ेंगे।

9.5 सारांश

इस अध्याय में, आपने निम्नलिखित बिन्दुओं का अध्ययन किया है :

1. एक आकृति का क्षेत्रफल उस आकृति द्वारा घेरे गए तल के भाग से संबद्ध (किसी मात्रक में) एक संख्या होती है।
2. दो सर्वांगसम आकृतियों के क्षेत्रफल बराबर होते हैं, परन्तु इसका विलोम आवश्यक रूप से सत्य नहीं है।
3. यदि एक आकृति T द्वारा निर्मित कोई तलीय क्षेत्र किन्हीं दो आकृतियों P और Q द्वारा निर्मित दो अनातिव्यापी तलीय क्षेत्रों से मिल कर बना है, तो $ar\ (T) = ar\ (P) + ar\ (Q)$ है, जहाँ $ar\ (X)$ आकृति X का क्षेत्रफल व्यक्त करता है।
4. दो आकृतियाँ एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित कही जाती हैं, यदि उनमें एक उभयनिष्ठ आधार (एक भुजा) हो तथा उभयनिष्ठ आधार के सम्मुख प्रत्येक आकृति के शीर्ष (का शीर्ष) उस आधार के समांतर किसी रेखा पर स्थित हों।
5. एक ही आधार (या बराबर आधारों) वाले और एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित समांतर चतुर्भुज क्षेत्रफल में बराबर होते हैं।
6. समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल उसके आधार और संगत शीर्षलम्ब का गुणनफल होता है।
7. एक ही आधार (या बराबर आधारों) वाले और बराबर क्षेत्रफलों वाले समांतर चतुर्भुज एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित होते हैं।
8. यदि एक त्रिभुज और एक समांतर चतुर्भुज एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित हों, तो त्रिभुज का क्षेत्रफल समांतर चतुर्भुज के क्षेत्रफल का आधा होता है।
9. एक ही आधार (या बराबर आधारों) वाले और एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित त्रिभुज क्षेत्रफल में बराबर होते हैं।
10. त्रिभुज का क्षेत्रफल उसके आधार और संगत शीर्षलम्ब के गुणनफल का आधा होता है।
11. एक ही आधार (या बराबर आधारों) वाले और बराबर क्षेत्रफलों वाले त्रिभुज एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित होते हैं।
12. त्रिभुज की एक माध्यिका उसे बराबर क्षेत्रफलों वाले दो त्रिभुजों में विभाजित करती है।

0963CH10

अध्याय 10

वृत्त

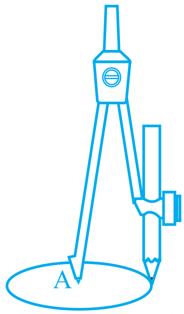
10.1 भूमिका

आप अपने दैनिक जीवन में, बहुत सी ऐसी वस्तुओं के संपर्क में अवश्य आए होंगे जिनके आकार गोल हों : जैसे किसी गाड़ी का पहिया, चूड़ियाँ, कई घड़ियों के डायल, 50 पैसे, एक रुपया और पाँच रुपए मूल्य के सिक्के, चाबी के गुच्छे, कमीज के बटन आदि (देखिए आकृति 10.1)। घड़ी में आपने ध्यान दिया होगा कि सेकेंड की सुई घड़ी के डायल के ऊपर जल्दी-जल्दी चक्कर लगाती है तथा इसका एक सिरा एक गोल पथ में चलता है। सेकेंड की सुई के सिरे से बनता हुआ पथ एक **वृत्त** (circle) कहलाता है। इस अध्याय में, आप वृत्त, इससे संबंधित अन्य पदों तथा वृत्त के कुछ गुणों के बारे में अध्ययन करेंगे।

आकृति 10.1

10.2 वृत्त और इससे संबंधित पद : एक पुनरावलोकन

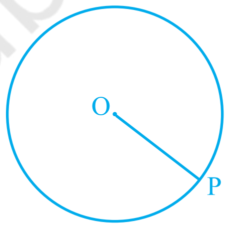
एक परकार लीजिए तथा इसमें एक पेंसिल लगाइए। इसका नुकीला सिरा एक कागज के पृष्ठ के एक बिन्दु पर रखिए। दूसरी भुजा को कुछ दूरी तक खोलिए। नुकीले सिरे को उसी बिन्दु पर स्थिर कर दूसरी भुजा को एक चक्कर घुमाइए। पेंसिल से कागज पर बनी आकृति क्या है? जैसा कि आप जानते हैं कि यह एक वृत्त है (देखिए आकृति 10.2)। आपने वृत्त कैसे प्राप्त किया? आपने एक बिन्दु A को स्थिर रखा तथा वे सभी बिन्दु बनाए जो A से एक स्थिर दूरी पर हैं। इस प्रकार, हमें निम्न परिभाषा प्राप्त हुई :



आकृति 10.2

एक तल पर उन सभी बिन्दुओं का समूह, जो तल के एक स्थिर बिन्दु से एक स्थिर दूरी पर स्थित हों, एक वृत्त कहलाता है।

स्थिर बिन्दु को वृत्त का *केन्द्र* (*centre*) कहते हैं तथा स्थिर दूरी को वृत्त की *त्रिज्या* (*radius*) कहते हैं। आकृति 10.3 में, O वृत्त का केन्द्र तथा लम्बाई OP वृत्त की त्रिज्या है।

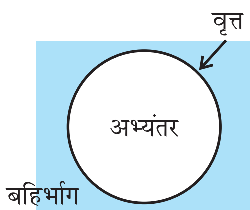


आकृति 10.3

टिप्पणी : ध्यान दीजिए कि केन्द्र को वृत्त के किसी बिन्दु से मिलाने वाला रेखाखंड भी वृत्त की त्रिज्या कहलाता है। अर्थात् 'त्रिज्या' को दो अर्थों में प्रयोग किया जाता है – रेखाखंड के रूप में तथा इसकी लम्बाई के रूप में।

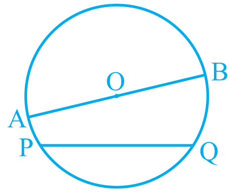
आपको कक्षा 6 से निम्न में से कुछ अवधारणाओं का ज्ञान है। हम केवल उनका पुनः स्मरण करते हैं।

एक वृत्त उस तल को, जिस पर वह स्थित है, तीन भागों में विभाजित करता है। ये हैं : (i) वृत्त के अन्दर का भाग, जिसे *अभ्यंतर* (*interior*) भी कहते हैं, (ii) वृत्त एवं (iii) वृत्त के बाहर का भाग, जिसे *बहिर्भाग* (*exterior*) भी कहते हैं (देखिए आकृति 10.4)। वृत्त तथा इसका अभ्यंतर मिलकर *वृत्तीय क्षेत्र* (*circular region*) बनाते हैं।



आकृति 10.4

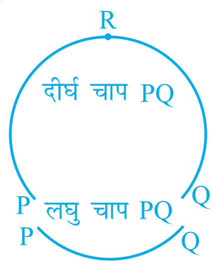
यदि एक वृत्त पर दो बिन्दु P तथा Q लें, तो रेखाखंड PQ वृत्त की एक *जीवा* कहलाता है। (देखिए आकृति 10.5)। उस जीवा को जो वृत्त के केन्द्र से होकर जाती है, वृत्त का *व्यास* कहते हैं। त्रिज्या के समान शब्द 'व्यास' को भी दो अर्थों में प्रयुक्त किया जाता है, अर्थात् एक रेखाखंड के रूप में तथा इसकी लम्बाई के रूप में। क्या आपको वृत्त में व्यास से बड़ी कोई और जीवा प्राप्त हो सकती है? नहीं। आप देख सकते हैं कि व्यास वृत्त की सबसे लम्बी जीवा होती है तथा सभी व्यासों की लम्बाई समान होती है जो त्रिज्या की दो गुनी होती है। आकृति 10.5 में, AOB वृत्त का एक व्यास है। एक वृत्त में कितने व्यास हो सकते हैं? एक वृत्त खींचिए और देखिए कि आप कितने व्यास बना सकते हैं?



आकृति 10.5

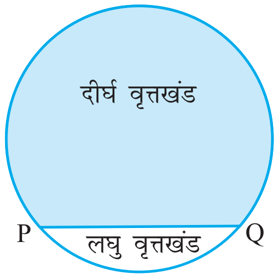
दो बिन्दुओं के बीच के वृत्त के भाग को एक *चाप* (*arc*) कहते हैं। आकृति 10.6 में, बिन्दुओं P तथा Q के बीच के वृत्त के भागों को देखिए। आप पाएँगे कि दोनों भागों में से एक बड़ा है तथा एक छोटा है (देखिए आकृति 10.7)। बड़े भाग को *दीर्घ चाप* (*major arc*) PQ कहते हैं तथा छोटे भाग को *लघु चाप* (*minor arc*) कहते हैं। लघु चाप PQ को $\overset{\frown}{PQ}$ से व्यक्त करते हैं तथा दीर्घ चाप PQ को $\overset{\frown}{PRQ}$ से, जहाँ R चाप पर P तथा Q के बीच में कोई बिन्दु है। जब तक अन्यथा कहा न जाए, चाप PQ या $\overset{\frown}{PQ}$ लघु चाप को प्रदर्शित करता है। जब P और Q एक व्यास के सिरे हों, तो दोनों चाप बराबर हो जाते हैं और प्रत्येक चाप को *अर्धवृत्त* (*semicircle*) कहते हैं।

आकृति 10.6

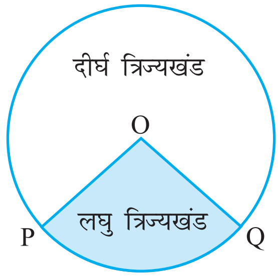


आकृति 10.7

संपूर्ण वृत्त की लम्बाई को उसकी *परिधि* (*circumference*) कहते हैं। जीवा तथा प्रत्येक चाप के मध्य क्षेत्र को वृत्तीय क्षेत्र का खंड या सरल शब्दों में *वृत्तखंड* कहते हैं। आप पाएँगे कि दो प्रकार के वृत्तखंड होते हैं। ये हैं: *दीर्घ वृत्तखंड* (*major segment*) तथा *लघु वृत्तखंड* (*minor segment*) (देखिए आकृति 10.8)। केन्द्र को एक चाप के सिरों से मिलाने वाली त्रिज्याओं एवं चाप के बीच के क्षेत्र को *त्रिज्यखंड* (*sector*) कहते हैं। वृत्तखंड की तरह, आप पाते हैं कि लघु चाप लघु त्रिज्यखंड के तथा दीर्घ चाप दीर्घ त्रिज्यखंड के संगत है। आकृति 10.9 में, क्षेत्र OPQ *लघु त्रिज्यखंड* (*minor sector*) तथा शेष वृत्तीय क्षेत्र *दीर्घ त्रिज्यखंड* (*major sector*) है। जब दोनों चाप बराबर हो जाते हैं, अर्थात् प्रत्येक अर्धवृत्त होता है, तो दोनों वृत्तखंड तथा दोनों त्रिज्यखंड एक समान हो जाते हैं और प्रत्येक को *अर्धवृत्तीय क्षेत्र* (*semi circular region*) कहते हैं।



आकृति 10.8



आकृति 10.9

प्रश्नावली 10.1

1. खाली स्थान भरिए :

(i) वृत्त का केन्द्र वृत्त के ______________ में स्थित है (बहिर्भाग/अभ्यंतर)।

(ii) एक बिन्दु, जिसकी वृत्त के केन्द्र से दूरी त्रिज्या से अधिक हो, वृत्त के ______________ में स्थित होता है (बहिर्भाग/अभ्यंतर)।

(iii) वृत्त की सबसे बड़ी जीवा वृत्त का ______________ होता है।

(iv) एक चाप ______________ होता है, जब इसके सिरे एक व्यास के सिरे हों।

(v) वृत्तखंड एक चाप तथा ___________ के बीच का भाग होता है।

(vi) एक वृत्त, जिस तल पर स्थित है, उसे ______________ भागों में विभाजित करता है।

2. लिखिए, सत्य या असत्य। अपने उत्तर के कारण दीजिए।

(i) केन्द्र को वृत्त पर किसी बिन्दु से मिलाने वाला रेखाखंड वृत्त की त्रिज्या होती है।

(ii) एक वृत्त में समान लंबाई की परिमित जीवाएँ होती हैं।

(iii) यदि एक वृत्त को तीन बराबर चापों में बाँट दिया जाए, तो प्रत्येक भाग दीर्घ चाप होता है।

(iv) वृत्त की एक जीवा, जिसकी लम्बाई त्रिज्या से दो गुनी हो, वृत्त का व्यास है।

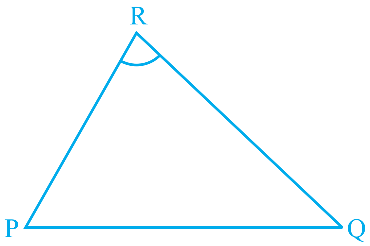
(v) त्रिज्यखंड, जीवा एवं संगत चाप के बीच का क्षेत्र होता है।

(vi) वृत्त एक समतल आकृति है।

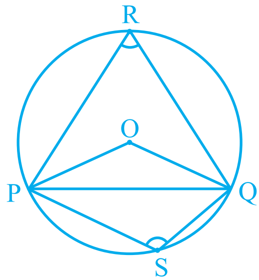
10.3 जीवा द्वारा एक बिन्दु पर अंतरित कोण

एक रेखाखंड PQ तथा एक बिन्दु R, जो रेखा PQ पर स्थित न हो, लीजिए। PR तथा QR को मिलाइए (देखिए आकृति 10.10)। तब कोण PRQ, रेखाखंड PQ द्वारा बिन्दु R पर

अंतरित कोण कहलाता है। आकृति 10.11 में कोण POQ, PRQ तथा PSQ क्या कहलाते हैं? $\angle$ POQ जीवा PQ द्वारा केन्द्र O पर अंतरित कोण है, $\angle$ PRQ तथा $\angle$ PSQ क्रमशः PQ द्वारा दीर्घ चाप PQ तथा लघु चाप PQ पर स्थित बिन्दुओं R और S पर अंतरित कोण हैं।

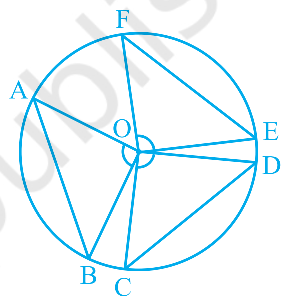


आकृति 10.10



आकृति 10.11

आइए हम जीवा की माप तथा उसके द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण में संबंध की जाँच करें। आप एक वृत्त में विभिन्न जीवाएँ खींचकर तथा उनके द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोणों को बनाकर देख सकते हैं कि जीवा यदि बड़ी होगी, तो उसके द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण भी बड़ा होगा। क्या होगा यदि आप दो बराबर जीवाएँ लेंगे? क्या केन्द्र पर अंतरित कोण समान होंगे या नहीं?



आकृति 10.12

एक वृत्त की दो या अधिक बराबर जीवाएँ खींचिए तथा केन्द्र पर उनके द्वारा अंतरित कोणों को मापिए (देखिए आकृति 10.12)। आप पाएँगे कि उनके द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण बराबर हैं। आइए इस तथ्य की हम उपपत्ति दें।

प्रमेय 10.1 : *वृत्त की बराबर जीवाएँ केन्द्र पर बराबर कोण अंतरित करती हैं।*

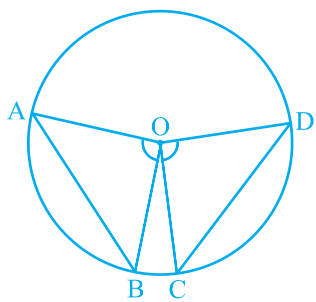
उपपत्ति : आपको एक वृत्त, जिसका केन्द्र O है, की दो बराबर जीवाएँ AB और CD दी हुई हैं (देखिए आकृति 10.13) तथा आप सिद्ध करना चाहते हैं कि $\angle$ AOB = $\angle$ COD है।

त्रिभुजों AOB तथा COD में,

OA = OC (एक वृत्त की त्रिज्याएँ)

OB = OD (एक वृत्त की त्रिज्याएँ)

AB = CD (दिया है)



आकृति 10.13

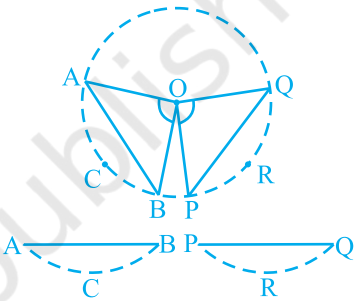
अत:, $\Delta\, AOB \cong \Delta\, COD$ (SSS नियम)

इस प्रकार, हम पाते हैं कि $\angle\, AOB = \angle\, COD$ (सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग) ■

टिप्पणी : सुविधा के लिए 'सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग' के स्थान पर संक्षेप में CPCT का प्रयोग किया जाएगा, क्योंकि जैसा कि आप देखेंगे कि इसका हम बहुधा प्रयोग करते हैं।

अब यदि एक वृत्त की दो जीवाएँ केन्द्र पर बराबर कोण अंतरित करें, तो उन जीवाओं के बारे में आप क्या कह सकते हैं? क्या वे बराबर हैं अथवा नहीं? आइए हम इसकी निम्न क्रियाकलाप द्वारा जाँच करें।

एक अक्स कागज़ (tracing paper) लीजिए और इस पर एक वृत्त खींचिए। इसे वृत्त के अनुदिश काटकर एक चकती (disc) प्राप्त कीजिए। इसके केन्द्र O पर एक कोण AOB बनाइए, जहाँ A, B वृत्त पर स्थित बिन्दु हैं। केन्द्र पर, एक दूसरा कोण POQ कोण AOB के बराबर बनाइए। चकती को इन कोणों के सिरों को मिलाने वाली जीवाओं के अनुदिश काटें (देखिए आकृति 10.14)। आप दो वृत्तखंड ACB तथा PRQ प्राप्त करेंगे। यदि आप एक को दूसरे के ऊपर रखेंगे, तो आप क्या अनुभव करेंगे? वे एक दूसरे को पूर्णतया ढक लेंगे, अर्थात् वे सर्वांगसम होंगे। इसलिए AB = PQ है।



आकृति 10.14

यद्यपि आपने इसे एक विशेष दशा में ही देखा है, इसे आप अन्य समान कोणों के लिए दोहराइए। निम्न प्रमेय के कारण सभी जीवाएँ बराबर होंगी:

प्रमेय 10.2 : *यदि एक वृत्त की जीवाओं द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण बराबर हों, तो वे जीवाएँ बराबर होती हैं।*

उपर्युक्त प्रमेय, प्रमेय 10.1 का विलोम है। ध्यान दीजिए कि आकृति 10.13 में यदि आप $\angle\, AOB = \angle\, COD$ लें, तो

$$\Delta\, AOB \cong \Delta\, COD \text{ (क्यों?)}$$

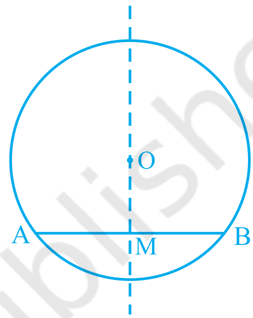
क्या अब आप देख सकते हैं कि AB = CD है?

प्रश्नावली 10.2

1. याद कीजिए कि दो वृत्त सर्वांगसम होते हैं, यदि उनकी त्रिज्याएँ बराबर हों। सिद्ध कीजिए कि सर्वांगसम वृत्तों की बराबर जीवाएँ उनके केन्द्रों पर बराबर कोण अंतरित करती हैं।
2. सिद्ध कीजिए कि यदि सर्वांगसम वृत्तों की जीवाएँ उनके केन्द्रों पर बराबर कोण अंतरित करें, तो जीवाएँ बराबर होती हैं।

10.4 केन्द्र से जीवा पर लम्ब

क्रियाकलाप : एक अक्स कागज पर एक वृत्त खींचिए। माना इसका केन्द्र O है। एक जीवा AB खींचिए। कागज को O से जाने वाली एक रेखा के अनुदिश इस प्रकार मोड़िए कि जीवा का एक भाग दूसरे भाग पर पड़े। मान लीजिए कि मोड़ का निशान AB को M पर काटता है। तब $\angle OMA = \angle OMB = 90°$ अथवा OM, AB पर लम्ब है (देखिए आकृति 10.15)। क्या बिन्दु B, A के संपाती होता है?



आकृति 10.15

हाँ, यह होगा। इसलिए MA = MB है।

OA और OB को मिलाकर तथा समकोण त्रिभुजों OMA और OMB को सर्वांगसम सिद्ध कर इसकी उपपत्ति स्वयं दीजिए। यह उदाहरण निम्न परिणाम का विशेष दृष्टांत है:

प्रमेय 10.3 : *एक वृत्त के केन्द्र से एक जीवा पर डाला गया लम्ब जीवा को समद्विभाजित करता है।*

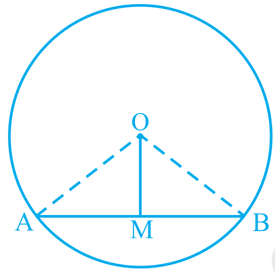
इस प्रमेय का विलोम क्या है? इसको लिखने के लिए, सर्वप्रथम हमें स्पष्ट होना है कि प्रमेय 10.3 में क्या दिया गया है और क्या सिद्ध करना है। दिया है कि केन्द्र से जीवा पर लंब खींचा गया है और सिद्ध करना है कि वह जीवा को समद्विभाजित करता है। अतः विलोम में परिकल्पना है 'यदि एक केन्द्र से जाने वाली रेखा वृत्त की एक जीवा को समद्विभाजित करे' और सिद्ध करना है 'रेखा जीवा पर लम्ब है'। इस प्रकार, विलोम है :

प्रमेय 10.4 : *एक वृत्त के केन्द्र से एक जीवा को समद्विभाजित करने के लिए खींची गई रेखा जीवा पर लंब होती है।*

क्या यह सत्य है? इसको कुछ स्थितियों में प्रयत्न करके देखिए। आप देखेंगे कि यह इन सभी स्थितियों में सत्य है। निम्न अभ्यास करके देखिए कि क्या यह कथन व्यापक रूप में सत्य

है। हम इसके कुछ कथन देंगे और आप इनके कारण दीजिए।

मान लीजिए कि एक वृत्त, जिसका केन्द्र O है, की AB एक जीवा है और O को AB के मध्य-बिन्दु M से मिलाया गया है। आपको सिद्ध करना है कि $OM \perp AB$ है। OA और OB को मिलाइए (देखिए आकृति 10.16)। त्रिभुजों OAM तथा OBM में,



आकृति 10.16

$$OA = OB \qquad \text{(क्यों?)}$$

$$AM = BM \qquad \text{(क्यों?)}$$

$$OM = OM \qquad \text{(उभयनिष्ठ)}$$

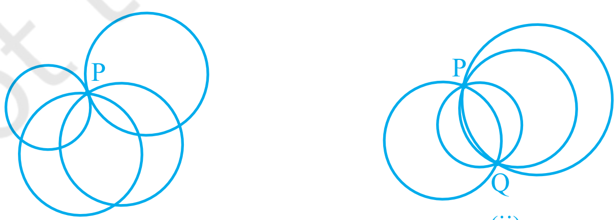
अत:, $\Delta OAM \cong \Delta OBM$ (क्यों?)

इससे प्राप्त होता है: $\angle OMA = \angle OMB = 90°$ (क्यों?)

10.5 तीन बिन्दुओं से जाने वाला वृत्त

अध्याय 6 में आपने पढ़ा है कि एक रेखा को निर्धारित करने के लिए दो बिन्दु पर्याप्त हैं। अर्थात् दो बिन्दुओं से होकर जाने वाली एक और केवल एक ही रेखा है। एक स्वाभाविक प्रश्न उठता है: एक वृत्त को बनाने के लिए कितने बिन्दु पर्याप्त हैं?

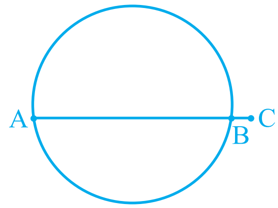
एक बिन्दु P लीजिए। इस बिन्दु से होकर जाने वाले कितने वृत्त खींचे जा सकते हैं? आप देखते हैं कि इस बिन्दु से होकर जाने वाले जितने चाहें उतने वृत्त खींचे जा सकते हैं [देखिए आकृति 10.17(i)]। अब दो बिन्दु P और Q लीजिए। आप फिर से देखेंगे कि P तथा Q से होकर जाने वाले अनगिनत वृत्त खींचे जा सकते हैं [आकृति 10.17(ii)]। क्या होगा यदि आप तीन बिन्दु A, B और C लें?



(i) (ii)

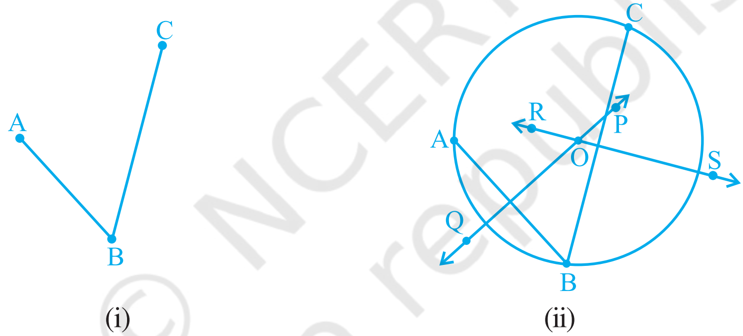
आकृति 10. 17

क्या आप तीन संरेखी बिन्दुओं से एक वृत्त खींच सकते हैं? नहीं। यदि बिन्दु एक रेखा पर स्थित हों, तो तीसरा बिन्दु दो बिन्दुओं से होकर जाने वाले वृत्त के अंदर या बाहर होगा (देखिए आकृति 10.18)।



आकृति 10.18

अतः आइए हम तीन बिन्दु A, B और C लें, जो एक रेखा पर स्थित न हों या दूसरे शब्दों में, वे संरेखी न हों [देखिए आकृति 10.19(i)]। AB तथा BC के क्रमशः लम्ब समद्विभाजक PQ और RS खींचिए। मान लीजिए ये लम्ब समद्विभाजक एक बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करते हैं (ध्यान दीजिए कि PQ और RS परस्पर प्रतिच्छेद करेंगे, क्योंकि वे समांतर नहीं हैं) [देखिए आकृति 10.19(ii)]।



आकृति 10.19

अब क्योंकि O, AB के लम्ब समद्विभाजक PQ पर स्थित है, इसलिए OA = OB है। [ध्यान दीजिए कि अध्याय 7 में सिद्ध किया गया है कि रेखाखंड के लम्ब समद्विभाजक का प्रत्येक बिन्दु उसके अंत बिन्दुओं से बराबर दूरी पर होता है।]

इसी प्रकार, क्योंकि O, BC के लम्ब समद्विभाजक RS पर स्थित हैं, इसलिए आप पाते हैं कि

$$OB = OC$$

इसीलिए OA = OB = OC है, जिसका अर्थ है कि बिन्दु A, B और C बिन्दु O से समान दूरी पर हैं। अतः यदि आप O को केन्द्र तथा OA त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचे, तो वह B और C से भी होकर जाएगा। यह दर्शाता है कि तीन बिन्दुओं A, B और C से होकर जाने वाला एक वृत्त है। आप जानते हैं कि दो रेखाएँ (लम्ब समद्विभाजक) केवल एक बिन्दु पर

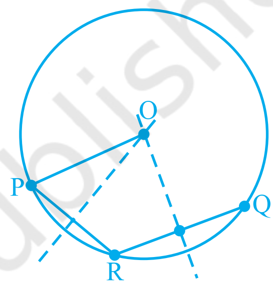
प्रतिच्छेद कर सकती हैं। दूसरे शब्दों में, A, B और C से होकर जाने वाला एक अद्वितीय वृत्त है। आपने अब निम्न प्रमेय को सिद्ध कर लिया है:

प्रमेय 10.5 : *तीन दिए हुए असरेखी बिन्दुओं द्वारा होकर जाने वाला एक और केवल एक वृत्त है।*

टिप्पणी : यदि ABC एक त्रिभुज हो, तो प्रमेय 10.5 से शीर्षों A, B और C से होकर एक अद्वितीय वृत्त खींचा जा सकता है। इस वृत्त को Δ ABC का *परिवृत्त* कहते हैं। इसका केन्द्र तथा त्रिज्या क्रमशः त्रिभुज के *परिकेन्द्र* तथा *परित्रिज्या* कहलाते हैं।

उदाहरण 1 : एक वृत्त का चाप दिया हुआ है। इस वृत्त को पूरा कीजिए।

हल : मान लीजिए एक वृत्त का चाप PQ दिया हुआ है। हमें वृत्त को पूरा करना है। इसका अर्थ है कि हमें इसका केन्द्र एवं त्रिज्या ज्ञात करनी है। चाप पर एक बिन्दु R लीजिए। PR तथा RQ को मिलाइए। प्रमेय 10.5 को सिद्ध करने के लिए की गई रचना का उपयोग करके केन्द्र तथा त्रिज्या ज्ञात कीजिए।



आकृति 10.20

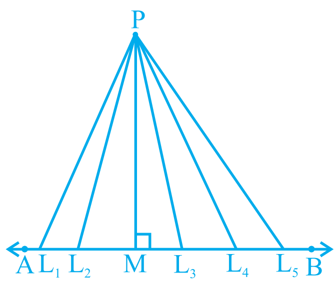
इन्हीं केन्द्र तथा त्रिज्या को लेकर वृत्त को पूरा कीजिए (देखिए आकृति 10.20)।

प्रश्नावली 10.3

1. वृत्तों के कई जोड़े (युग्म) खींचिए। प्रत्येक जोड़े में कितने बिन्दु उभयनिष्ठ हैं? उभयनिष्ठ बिन्दुओं की अधिकतम संख्या क्या है?
2. मान लीजिए आपको एक वृत्त दिया है। एक रचना इसके केन्द्र को ज्ञात करने के लिए दीजिए।
3. यदि दो वृत्त परस्पर दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करें, तो सिद्ध कीजिए कि उनके केन्द्र उभयनिष्ठ जीवा के लम्ब समद्विभाजक पर स्थित हैं।

10.6 समान जीवाएँ और उनकी केन्द्र से दूरियाँ

मान लीजिए AB एक रेखा है और P कोई बिन्दु है। क्योंकि एक रेखा पर असंख्य बिन्दु होते हैं, इसलिए यदि आप इन सभी को P से मिलाएँ तो आपको असंख्य रेखाखंड PL_1, PL_2, PM, PL_3, PL_4, आदि मिलेंगे। इनमें से कौन सी बिन्दु P से AB की दूरी है? आप थोड़ा सोचकर



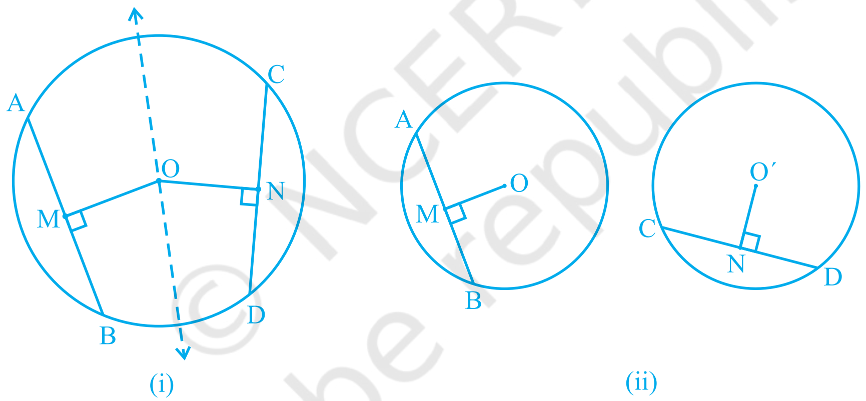
आकृति 10.21

इसका उत्तर प्राप्त कर सकते हैं। इन रेखाखंडों, में से P से AB पर लम्ब रेखाखंड अर्थात् आकृति 10.21 में PM सबसे छोटा होगा। गणित में इस सबसे छोटी लम्बाई PM को **P से AB की दूरी** के रूप में परिभाषित करते हैं। अत:, आप कह सकते हैं कि :

एक बिन्दु से एक रेखा पर लम्ब की लम्बाई रेखा की बिन्दु से दूरी होती है।

ध्यान दीजिए कि यदि बिन्दु रेखा पर स्थित है, तो रेखा की इससे दूरी शून्य है।

एक वृत्त में असंख्य जीवाएँ हो सकती हैं। आप एक वृत्त में जीवाएँ खींचकर जाँच कर सकते हैं कि लंबी जीवा, छोटी जीवा की तुलना में केन्द्र के निकट होती है। इसकी आप विभिन्न लम्बाई की कई जीवाएँ की खींचकर तथा उनकी केन्द्र से दूरियाँ मापकर जाँच कर सकते हैं। व्यास, जो वृत्त की सबसे बड़ी जीवा है, की केन्द्र से क्या दूरी है? क्योंकि केन्द्र इस पर स्थित है, अत: इसकी दूरी शून्य है। क्या आप सोचते हैं कि जीवा की लम्बाई और उसकी केन्द्र से दूरी में कोई संबंध है? आइए देखें कि क्या ऐसा है।

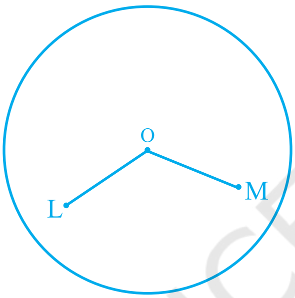


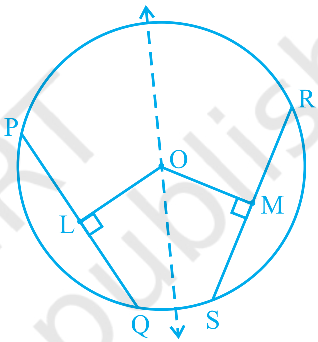
आकृति 10.22

क्रियाकलाप : किसी त्रिज्या का अक्स कागज पर एक वृत्त खींचिए। इसकी दो बराबर जीवाएँ AB तथा CD खींचिए तथा इन पर केन्द्र O से लम्ब OM तथा ON भी बनाइए। आकृति को इस प्रकार मोड़िए कि D, B पर तथा C, A पर पड़े [देखिए आकृति 10.22 (i)]। आप पाएँगे कि O मोड़ के निशान पर पड़ता है और N, M पर पड़ता है। अत:, OM = ON है। इस क्रियाकलाप को केन्द्रों O तथा O′ के सर्वांगसम वृत्त खींचकर और अलग-अलग बराबर जीवाएँ AB तथा CD लेकर दोहराएँ। उन पर लम्ब OM तथा O′N खींचिए [देखिए आकृति 10.22 10.22(ii)]। इनमें से एक वृत्ताकार चकती को काटकर दूसरे वृत्त पर इस प्रकार रखें कि AB, CD को पूर्ण रूप से ढक ले। तब आप पाएँगे कि O, O′ पर पड़ता है तथा M, N पर पड़ता है। इस प्रकार, आपने निम्न को सत्यापित किया है:

प्रमेय 10.6 : *एक वृत्त की (या सर्वांगसम वृत्तों की) बराबर जीवाएँ केन्द्र से (या केन्द्रों से) समान दूरी पर होती है।*

अब यह देखा जाए कि क्या इसका विलोम सत्य है अथवा नहीं। इसके लिए केन्द्र O वाला एक वृत्त खींचिए। केन्द्र O से वृत्त के भीतर रहने वाले दो बराबर लम्बाई के रेखाखंड OL तथा OM खींचिए [देखिए आकृति 10.23 (i)]। अब क्रमशः दो जीवाएँ PQ और RS खींचिए जो OL और OM पर लम्ब हों [देखिए आकृति 10.23(ii)]। PQ और RS की लम्बाइयाँ मापिए। क्या ये असमान हैं? नहीं, दोनों बराबर हैं। क्रियाकलाप को और अधिक समान रेखाखंडों तथा उन पर लम्ब जीवाएँ खींचकर दोहराइए। इस प्रकार, प्रमेय 10.6 का विलोम





आकृति 10.23

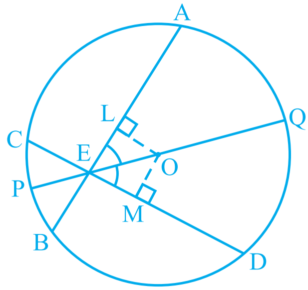
सत्यापित हो जाता है, जिसका कथन नीचे दिया गया है:

प्रमेय 10.7 : *एक वृत्त के केन्द्र से समदूरस्थ जीवाएँ लम्बाई में समान होती हैं।*

अब हम उपर्युक्त परिणामों पर आधारित एक उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 2 : यदि एक वृत्त की दो प्रतिच्छेदी जीवाएँ प्रतिच्छेद बिन्दु से जाने वाले व्यास से समान कोण बनाएँ, तो सिद्ध कीजिए कि वे जीवाएँ बराबर हैं।

हल : दिया है कि एक वृत्त, जिसका केन्द्र O है, की दो जीवाएँ AB और CD बिन्दु E पर प्रतिच्छेद करती हैं। E से जाने वाला PQ एक ऐसा व्यास है कि $\angle AEQ = \angle DEQ$ है (देखिए आकृति 10.24)। आपको सिद्ध करना है कि AB = CD है। जीवाओं AB और CD पर क्रमशः OL तथा OM लम्ब खींचिए। अब,



आकृति 10.24

$\angle$ LOE = 180° – 90° – $\angle$ LEO = 90° – $\angle$ LEO (त्रिभुज के कोणों के योग का गुण)

= 90° – $\angle$ AEQ = 90° – $\angle$ DEQ

= 90° – $\angle$ MEO = $\angle$ MOE

त्रिभुजों OLE तथा OME में,

$\angle$ LEO = $\angle$ MEO (दिया है)

$\angle$ LOE = $\angle$ MOE (ऊपर सिद्ध किया है)

EO = EO (उभयनिष्ठ)

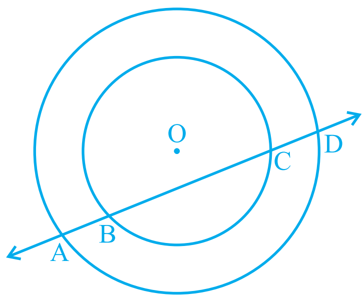
अतः, Δ OLE $\cong$ Δ OME (क्यों?)

इससे प्राप्त होता है: OL = OM (CPCT)

इसलिए, AB = CD (क्यों?)

प्रश्नावली 10.4

1. 5 cm तथा 3 cm त्रिज्या वाले दो वृत्त दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करते हैं तथा उनके केन्द्रों के बीच की दूरी 4 cm है। उभयनिष्ठ जीवा की लम्बाई ज्ञात कीजिए।
2. यदि एक वृत्त की दो समान जीवाएँ वृत्त के अन्दर प्रतिच्छेद करें, तो सिद्ध कीजिए कि एक जीवा के खंड दूसरी जीवा के संगत खंडों के बराबर हैं।
3. यदि एक वृत्त की दो समान जीवाएँ वृत्त के अन्दर प्रतिच्छेद करें, तो सिद्ध कीजिए कि प्रतिच्छेद बिन्दु को केन्द्र से मिलाने वाली रेखा जीवाओं से बराबर कोण बनाती है।
4. यदि एक रेखा दो संकेन्द्री वृत्तों (एक ही केन्द्र वाले वृत्त) को, जिनका केन्द्र O है, A, B, C और D पर प्रतिच्छेद करे, तो सिद्ध कीजिए AB = CD है (देखिए आकृति 10.25)।



आकृति 10.25

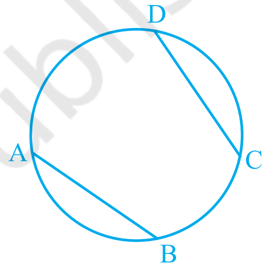
5. एक पार्क में बने 5 m त्रिज्या वाले वृत्त पर खड़ी तीन लड़कियाँ रेशमा, सलमा एवं मनदीप खेल रही हैं। रेशमा एक गेंद को सलमा के पास, सलमा मनदीप के पास तथा मनदीप रेशमा के पास फेंकती है। यदि रेशमा तथा सलमा के बीच और सलमा तथा मनदीप के बीच की प्रत्येक दूरी 6 m हो, तो रेशमा और मनदीप के बीच की दूरी क्या है?

6. 20 m त्रिज्या का एक गोल पार्क (वृत्ताकार) एक कालोनी में स्थित है। तीन लड़के अंकुर, सैय्यद तथा डेविड इसकी परिसीमा पर बराबर दूरी पर बैठे हैं और प्रत्येक के हाथ में एक खिलौना टेलीफोन आपस में बात करने के लिए है। प्रत्येक फोन की डोरी की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

10.7 एक वृत्त के चाप द्वारा अंतरित कोण

आपने देखा है कि एक जीवा के अंत बिन्दु (व्यास के अतिरिक्त) वृत्त को दो चापों में एक (दीर्घ तथा दूसरा लघु) विभाजित करते हैं। यदि आप बराबर जीवाएँ लें, तो आप उन चापों की मापों के बारे में क्या कह सकते हैं? क्या एक जीवा द्वारा बना चाप दूसरी जीवा के द्वारा बने चाप के बराबर है? वास्तव में, ये बराबर लम्बाई से भी कुछ अधिक है। यह इस अर्थ में, कि यदि एक चाप को दूसरे चाप के ऊपर रखा जाए, तो बिना ऐंठे या मोड़े वे एक दूसरे को पूर्णतया ढक लेंगे।

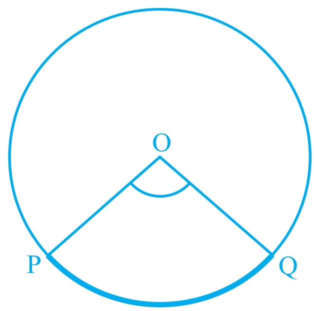
इस तथ्य को आप जीवा CD के संगत चाप को वृत्त से CD के अनुदिश काटकर तथा उसे बराबर जीवा AB के संगत चाप पर रखकर सत्यापित कर सकते हैं। आप पाएँगे कि चाप CD, चाप AB को पूर्णरूप से ढक लेता है (देखिए आकृति 10.26)। यह दर्शाता है कि बराबर जीवाएँ सर्वांगसम चाप बनाती हैं तथा विलोमतः सर्वांगसम चाप वृत्त की बराबर जीवाएँ बनाते हैं। इसका निम्न प्रकार से कथन दे सकते हैं:



आकृति 10.26

यदि किसी वृत्त की दो जीवाएँ बराबर हों, तो उनके संगत चाप सर्वांगसम होते हैं तथा विलोमतः यदि दो चाप सर्वांगसम हों, तो उनके संगत जीवाएँ बराबर होती हैं।

चाप द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण भी संगत जीवा द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण से इस अर्थ में परिभाषित किया जाता है कि लघु चाप कोण को अंतरित करता है और दीर्घ चाप संगत प्रतिवर्ती कोण अंतरित करता है। अतः आकृति 10.27 में, लघु चाप PQ द्वारा O पर अंतरित कोण POQ है तथा दीर्घ चाप PQ द्वारा O पर अंतरित संगत प्रतिवर्ती कोण POQ है।



आकृति 10.27

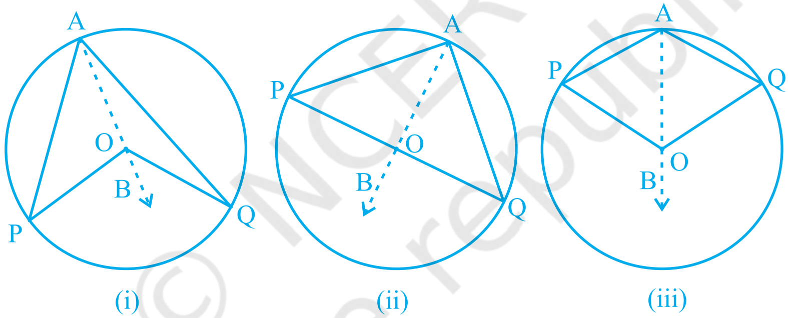
उपरोक्त गुण एवं प्रमेय 10.1 के संदर्भ में निम्न परिणाम सत्य है :

किसी वृत्त के सर्वांगसम चाप (या बराबर चाप) केन्द्र पर बराबर कोण अंतरित करते हैं।

अत:, किसी वृत्त की जीवा द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण संगत (लघु) चाप द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण के बराबर होता है। निम्न प्रमेय एक चाप द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण तथा वृत्त के किसी बिन्दु पर अंतरित कोण में संबंध देती है।

प्रमेय 10.8 : *एक चाप द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण वृत्त के शेष भाग के किसी बिन्दु पर अंतरित कोण का दुगुना होता है।*

उपपत्ति : एक वृत्त का चाप PQ दिया है, जो केन्द्र O पर ∠POQ तथा वृत्त के शेष भाग के एक बिन्दु A पर ∠ PAQ अंतरित करता है। हमें सिद्ध करना है कि ∠POQ = 2 ∠ PAQ है।



आकृति 10.28

आकृति 10.28 में दी गई तीन विभिन्न स्थितियों पर विचार कीजिए।

(i) में चाप PQ लघु है, (ii) में चाप PQ अर्धवृत्त है तथा (iii) में चाप PQ दीर्घ है।

आइए हम AO को मिलाकर एक बिन्दु B तक बढ़ाएँ।

सभी स्थितियों में,

$$\angle BOQ = \angle OAQ + \angle AQO$$

(क्योंकि त्रिभुज का बहिष्कोण उसके दो अभिमुख अंत: कोणों के योग के बराबर होता है।)

साथ ही $\Delta\, OAQ$ में,

$$OA = OQ \qquad \text{(एक वृत्त की त्रिज्याएँ)}$$

अत:,

$$\angle OAQ = \angle AQO \qquad \text{(प्रमेय 7.5)}$$

इससे प्राप्त होता है: $\angle BOQ = 2\angle OAQ$ (1)

इसी प्रकार, $\angle BOP = 2\angle OAP$ (2)

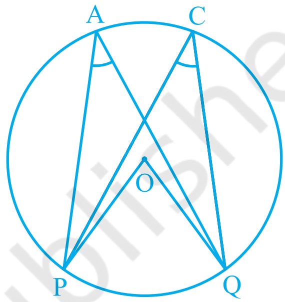
(1) और (2) से, $\angle BOP + \angle BOQ = 2(\angle OAP + \angle OAQ)$

अर्थात्, $\angle POQ = 2\angle PAQ$ (3)

स्थिति (iii) के लिए, जहाँ PQ दीर्घ चाप है, (3) के स्थान पर

प्रतिवर्ती कोण $POQ = 2\angle PAQ$ होगा। ■

टिप्पणी : मान लीजिए कि उपर्युक्त आकृतियों में हम P और Q को मिलाकर जीवा PQ बनाते हैं। तब, $\angle PAQ$ *को वृत्तखंड PAQP में बना कोण भी कहते हैं।*



आकृति 10.29

प्रमेय 10.8 में वृत्त के शेष भाग पर कोई भी बिन्दु A हो सकता है। इसलिए यदि आप वृत्त के शेष भाग पर एक और बिन्दु C लें (देखिए आकृति 10.29), तो आप पाएँगे:

$$\angle POQ = 2\angle PCQ = 2\angle PAQ$$

अत:, $\angle PCQ = \angle PAQ$

यह निम्न को सिद्ध करता है :

प्रमेय 10.9 : *एक ही वृत्तखंड के कोण बराबर होते हैं।*

आइए अब प्रमेय 10.8 की स्थिति (ii) की अलग से विवेचना करें। यहाँ $\angle PAQ$ उस वृत्तखंड में एक कोण है जो अर्धवृत्त है। साथ ही, $\angle PAQ = \frac{1}{2}\angle POQ = \frac{1}{2} \times 180° = 90°$ है। यदि आप कोई और बिन्दु C अर्धवृत्त पर लें, तो भी आप पाते हैं कि

$$\angle PCQ = 90°$$

इस प्रकार, आप वृत्त का एक और गुण पाते हैं जो निम्न है:

अर्धवृत्त का कोण समकोण होता है।

प्रमेय 10.9 का विलोम भी सत्य है, जिसका इस प्रकार कथन दिया जा सकता है:

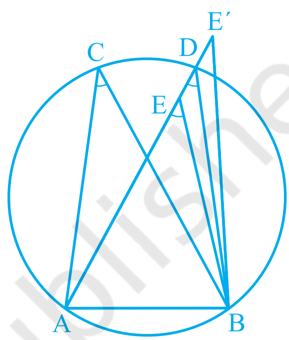
प्रमेय 10.10 : *यदि दो बिन्दुओं को मिलाने वाला रेखाखंड, उसको अंतर्विष्ट करने वाली रेखा के एक ही ओर स्थित दो अन्य बिन्दुओं पर समान कोण अंतरित करे, तो चारों बिन्दु एक वृत्त पर स्थित होते हैं (अर्थात् वे चक्रीय होते हैं)।*

आप इस कथन की सत्यता निम्न प्रकार से देख सकते हैं :

आकृति 10.30 में AB एक रेखाखंड है, जो दो बिन्दुओं C और D पर समान कोण अंतरित करता है। अर्थात्

$$\angle ACB = \angle ADB$$

यह दर्शाने के लिए कि बिन्दु A, B, C और D एक वृत्त पर स्थित हैं, बिन्दुओं A, C और B से जाने वाला एक वृत्त खींचिए। मान लीजिए कि वह D से होकर नहीं जाता है। तब, वह AD (अथवा बढ़ी हुई AD) को एक बिन्दु E (अथवा E′) पर काटेगा।



आकृति 10.30

यदि बिन्दु A, C, E और B एक वृत्त पर स्थित हैं, तो

$$\angle ACB = \angle AEB \quad (\text{क्यों?})$$

परन्तु दिया है कि $\angle ACB = \angle ADB$

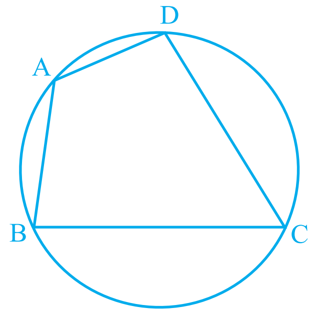
अतः, $\angle AEB = \angle ADB$

यह तब तक संभव नहीं है जब तक E, D के संपाती न हो। (क्यों?)

इसी प्रकार, E′ भी D के संपाती होना चाहिए।

10.8 चक्रीय चतुर्भुज

एक चतुर्भुज ABCD *चक्रीय* कहलाता है, यदि इसके चारों शीर्ष एक वृत्त पर स्थित होते हैं (देखिए आकृति 10.31)। इन चतुर्भुजों में आप एक विशेष गुण पाएँगे। अलग-अलग भुजाओं वाले कई चक्रीय चतुर्भुज खींचिए और प्रत्येक का नाम ABCD रखिए (इसको विभिन्न त्रिज्याओं के कई वृत्त खींचकर तथा प्रत्येक पर चार बिन्दु लेकर किया जा सकता है)। सम्मुख कोणों को मापिए और आप अपने प्रेक्षण आगे दी गई सारणी में लिखिए :



आकृति 10.31

चतुर्भुज की क्रम संख्या	$\angle A$	$\angle B$	$\angle C$	$\angle D$	$\angle A + \angle C$	$\angle B + \angle D$
1.						
2.						
3.						
4.						
5.						
6.						

इस सारणी से आप क्या निष्कर्ष निकालते हैं?

यदि मापने में कोई त्रुटि न हुई हो, तो यह निम्न को सत्यापित करता है:

प्रमेय 10.11 : *चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों के प्रत्येक युग्म का योग 180° होता है।*

वास्तव में इस प्रमेय का विलोम, जिसका कथन निम्न प्रकार से है, भी सत्य है:

प्रमेय 10.12 : *यदि किसी चतुर्भुज के सम्मुख कोणों के एक युग्म का योग 180° हो, तो चतुर्भुज चक्रीय होता है।*

इस प्रमेय की सत्यता आप प्रमेय 10.10 में दी गई विधि की तरह से जाँच सकते हैं।

उदाहरण 3 : आकृति 10.32 में, AB वृत्त का एक व्यास है और CD त्रिज्या के बराबर एक जीवा है। AC और BD बढ़ाए जाने पर एक बिन्दु E पर मिलती हैं। सिद्ध कीजिए कि $\angle AEB = 60°$ है।

हल : OC, OD और BC को मिलाइए।

त्रिभुज ODC एक समबाहु त्रिभुज है। (क्यों?)

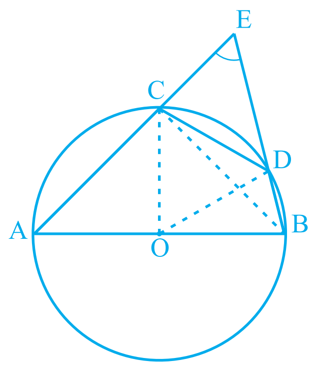
अतः, $\angle COD = 60°$

अब, $\angle CBD = \frac{1}{2} \angle COD$ (प्रमेय 10.8)

इससे प्राप्त होता है: $\angle CBD = 30°$

पुनः, $\angle ACB = 90°$ (क्यों?)

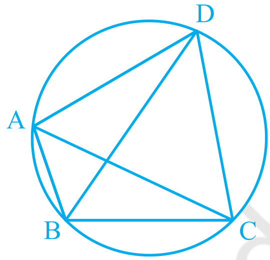
इसलिए, $\angle BCE = 180° - \angle ACB = 90°$



आकृति 10.32

जिससे $\angle$ CEB =90° – 30° = 60°, अर्थात् $\angle$ AEB = 60° प्राप्त होता है।

उदाहरण 4 : आकृति 10.33 में, ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है, जिसमें AC और BD विकर्ण हैं। यदि $\angle$ DBC = 55° तथा $\angle$ BAC = 45° हो, तो $\angle$ BCD ज्ञात कीजिए।



आकृति 10.33

हल : $\angle$ CAD = $\angle$ DBC = 55° (एक वृत्तखंड के कोण)

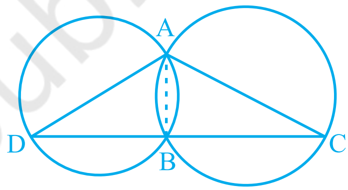
अतः, $\angle$ DAB = $\angle$ CAD + $\angle$ BAC

= 55° + 45° = 100°

परन्तु, $\angle$ DAB + $\angle$ BCD = 180° (चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोण)

इसलिए, $\angle$ BCD = 180° – 100° = 80°

उदाहरण 5 : दो वृत्त दो बिन्दुओं A और B पर प्रतिच्छेद करते हैं। AD और AC दोनों वृत्तों के व्यास हैं (देखिए आकृति 10.34)। सिद्ध कीजिए कि B रेखाखंड DC पर स्थित हैं।



आकृति 10.34

हल : AB को मिलाइए। अब,

$\angle$ ABD = 90° (अर्धवृत्त का कोण)

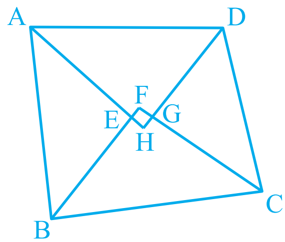
$\angle$ ABC = 90° (अर्धवृत्त का कोण)

इसलिए, $\angle$ ABD + $\angle$ ABC = 90° + 90° = 180°

अतः, DBC एक रेखा है। अर्थात् B रेखाखंड DC पर स्थित है।

उदाहरण 6 : सिद्ध कीजिए कि किसी चतुर्भुज के अंतः कोणों के समद्विभाजकों से बना चतुर्भुज (यदि संभव हो) चक्रीय होता है।

हल : आकृति 10.35 में, ABCD एक चतुर्भुज है जिसके अंतःकोणों A, B, C और D के क्रमशः कोण समद्विभाजक AH, BF, CF और DH एक चतुर्भुज EFGH बनाते हैं।



आकृति 10.35

अब, $\angle$ FEH = $\angle$ AEB = 180° – $\angle$ EAB – $\angle$ EBA (क्यों?)

$$= 180° - \frac{1}{2}\,(\angle A + \angle B)$$

तथा $\angle FGH = \angle CGD = 180° - \angle GCD - \angle GDC$ (क्यों?)

$$= 180° - \frac{1}{2}\,(\angle C + \angle D)$$

अत:, $\angle FEH + \angle FGH = 180° - \frac{1}{2}\,(\angle A + \angle B) + 180° - \frac{1}{2}\,(\angle C + \angle D)$

$$= 360° - \frac{1}{2}\,(\angle A + \angle B + \angle C + \angle D) = 360° - \frac{1}{2} \times 360°$$

$$= 360° - 180° = 180°$$

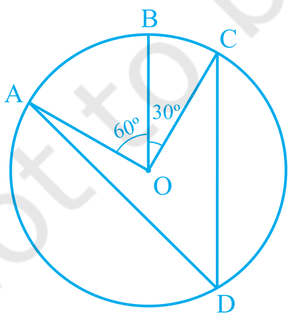
इसलिए, प्रमेय 10.12 से चतुर्भुज EFGH चक्रीय है।

प्रश्नावली 10.5

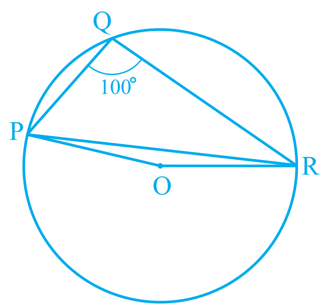
1. आकृति 10.36 में, केन्द्र O वाले एक वृत्त पर तीन बिन्दु A,B और C इस प्रकार हैं कि $\angle BOC = 30°$ तथा $\angle AOB = 60°$ है। यदि चाप ABC के अतिरिक्त वृत्त पर D एक बिन्दु है, तो $\angle ADC$ ज्ञात कीजिए।

2. किसी वृत्त की एक जीवा वृत्त की त्रिज्या के बराबर है। जीवा द्वारा लघु चाप के किसी बिन्दु पर अंतरित कोण ज्ञात कीजिए तथा दीर्घ चाप के किसी बिन्दु पर भी अंतरित कोण ज्ञात कीजिए।

3. आकृति 10.37 में, $\angle PQR = 100°$ है, जहाँ P, Q तथा R, केन्द्र O वाले एक वृत्त पर स्थित बिन्दु हैं। $\angle OPR$ ज्ञात कीजिए।

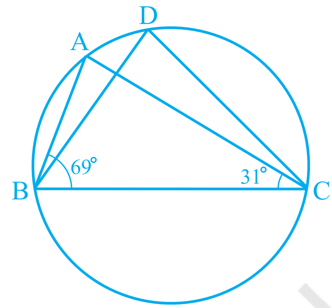


आकृति 10.36



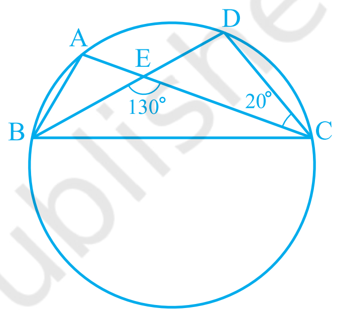
आकृति 10.37

4. आकृति 10.38 में, $\angle ABC = 69°$ और $\angle ACB = 31°$ हो, तो $\angle BDC$ ज्ञात कीजिए।



आकृति 10.38

5. आकृति 10.39 में, एक वृत्त पर A, B, C और D चार बिन्दु हैं। AC और BD एक बिन्दु E पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करते हैं कि $\angle BEC = 130°$ तथा $\angle ECD = 20°$ है। $\angle BAC$ ज्ञात कीजिए।



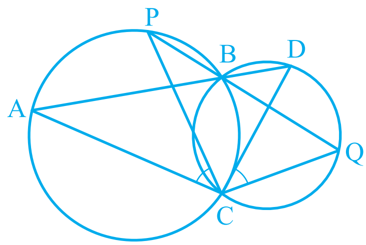
आकृति 10.39

6. ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है जिसके विकर्ण एक बिन्दु E पर प्रतिच्छेद करते हैं। यदि $\angle DBC = 70°$ और $\angle BAC = 30°$ हो, तो $\angle BCD$ ज्ञात कीजिए। पुनः यदि AB = BC हो, तो $\angle ECD$ ज्ञात कीजिए।

7. यदि एक चक्रीय चतुर्भुज के विकर्ण उसके शीर्षों से जाने वाले वृत्त के व्यास हों, तो सिद्ध कीजिए कि वह एक आयत है।

8. यदि एक समलंब की असमांतर भुजाएँ बराबर हों, तो सिद्ध कीजिए कि वह चक्रीय है।

9. दो वृत्त दो बिन्दुओं B और C पर प्रतिच्छेद करते हैं। B से जाने वाले दो रेखाखंड ABD और PBQ वृत्तों को A, D और P, Q पर क्रमशः प्रतिच्छेद करते हुए खींचे गए हैं (देखिए आकृति 10.40)। सिद्ध कीजिए कि $\angle ACP = \angle QCD$ है।



आकृति 10.40

10. यदि किसी त्रिभुज की दो भुजाओं को व्यास मानकर वृत्त खींचे जाएँ, तो सिद्ध कीजिए कि इन वृत्तों का प्रतिच्छेद बिन्दु तीसरी भुजा पर स्थित है।

11. उभयनिष्ठ कर्ण AC वाले दो समकोण त्रिभुज ABC और ADC हैं। सिद्ध कीजिए कि $\angle CAD = \angle CBD$ है।

12. सिद्ध कीजिए कि चक्रीय समांतर चतुर्भुज आयत होता है।

प्रश्नावली 10.6 (ऐच्छिक)*

1. सिद्ध कीजिए कि दो प्रतिच्छेद करते हुए वृत्तों की केन्द्रों की रेखा दोनों प्रतिच्छेद बिन्दुओं पर समान कोण अंतरित करती है।

2. एक वृत्त की 5 cm तथा 11 cm लम्बी दो जीवाएँ AB और CD समांतर हैं और केन्द्र की विपरीत दिशा में स्थित हैं। यदि AB और CD के बीच की दूरी 6 cm हो, तो वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

3. किसी वृत्त की दो समांतर जीवाओं की लम्बाइयाँ 6 cm और 8 cm हैं। यदि छोटी जीवा केन्द्र से 4 cm की दूरी पर हो, तो दूसरी जीवा केन्द्र से कितनी दूर है?

4. मान लीजिए कि कोण ABC का शीर्ष एक वृत्त के बाहर स्थित है और कोण की भुजाएँ वृत्त से बराबर जीवाएँ AD और CE काटती हैं। सिद्ध कीजिए कि $\angle ABC$ जीवाओं AC तथा DE द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोणों के अंतर का आधा है।

5. सिद्ध कीजिए कि किसी समचतुर्भुज की किसी भुजा को व्यास मानकर खींचा गया वृत्त उसके विकर्णों के प्रतिच्छेद बिन्दु से होकर जाता है।

6. ABCD एक समांतर चतुर्भुज है। A, B और C से जाने वाला वृत्त CD (यदि आवश्यक हो तो बढ़ाकर) को E पर प्रतिच्छेद करता है। सिद्ध कीजिए कि $AE = AD$ है।

7. AC और BD एक वृत्त की जीवाएँ हैं जो परस्पर समद्विभाजित करती हैं। सिद्ध कीजिए
(i) AC और BD व्यास हैं, (ii) ABCD एक आयत है।

8. एक त्रिभुज ABC के कोणों A, B और C के समद्विभाजक इसके परिवृत्त को क्रमश: D, E और F पर प्रतिच्छेद करते हैं। सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज DEF के कोण $90° - \frac{1}{2}A$, $90° - \frac{1}{2}B$ तथा $90° - \frac{1}{2}C$ हैं।

9. दो सर्वांगसम वृत्त परस्पर बिन्दुओं A और B पर प्रतिच्छेद करते हैं। A से होकर कोई रेखाखंड

*यह प्रश्नावली परीक्षा की दृष्टि से नहीं दी गई है।

PAQ इस प्रकार खींचा गया है कि P और Q दोनों वृत्तों पर स्थित हैं। सिद्ध कीजिए कि BP = BQ है।

10. किसी त्रिभुज ABC में, यदि $\angle A$ का समद्विभाजक तथा BC का लम्ब समद्विभाजक प्रतिच्छेद करें, तो सिद्ध कीजिए कि वे ΔABC के परिवृत्त पर प्रतिच्छेद करेंगे।

10.9 सारांश

इस अध्याय में, आपने निम्न बिन्दुओं का अध्ययन किया है :

1. एक वृत्त किसी तल के उन सभी बिन्दुओं का समूह होता है, जो तल के एक स्थिर बिन्दु से समान दूरी पर हों।
2. एक वृत्त की (या सर्वांगसम वृत्तों की) बराबर जीवाएँ केन्द्र (या संगत केन्द्रों) पर बराबर कोण अंतरित करती हैं।
3. यदि किसी वृत्त की (या सर्वांगसम वृत्तों की) दो जीवाएँ केन्द्र पर (या संगत केन्द्रों पर) बराबर कोण अंतरित करें, तो जीवाएँ बराबर होती हैं।
4. किसी वृत्त के केन्द्र से किसी जीवा पर डाला गया लम्ब उसे समद्विभाजित करता है।
5. केन्द्र से होकर जाने वाली और किसी जीवा को समद्विभाजित करने वाली रेखा जीवा पर लम्ब होती है।
6. तीन असरेखीय बिन्दुओं से जाने वाला एक और केवल एक वृत्त होता है।
7. एक वृत्त की (या सर्वांगसम वृत्तों की) बराबर जीवाएँ केन्द्र से (या संगत केन्द्रों से) समान दूरी पर होती हैं।
8. एक वृत्त के केन्द्र (या सर्वांगसम वृत्तों के केन्द्रों) से समान दूरी पर स्थित जीवाएं बराबर होती हैं।
9. यदि किसी वृत्त के दो चाप सर्वांगसम हों, तो उनकी संगत जीवाएँ बराबर होती हैं और विलोमत: यदि किसी वृत्त की दो जीवाएँ बराबर हों, तो उनके संगत चाप (लघु, दीर्घ) सर्वांगसम होते हैं।
10. किसी वृत्त की सर्वांगसम चाप केन्द्र पर बराबर कोण अंतरित करते हैं।
11. किसी चाप द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण उसके द्वारा वृत्त के शेष भाग के किसी बिन्दु पर अंतरित कोण का दुगुना होता है।
12. एक वृत्तखंड में बने कोण बराबर होते हैं।
13. अर्धवृत्त का कोण समकोण होता है।
14. यदि दो बिन्दुओं को मिलाने वाला रेखाखंड उसको अंतर्विष्ट करने वाली रेखा के एक ही ओर स्थित दो अन्य बिन्दुओं पर समान कोण अंतरित करे, तो चारों बिन्दु एक वृत्त पर स्थित होते हैं।
15. चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों के प्रत्येक युग्म का योग 180^0 होता है।
16. यदि किसी चतुर्भुज के सम्मुख कोणों के किसी एक युग्म का योग 180^0 हो, तो चतुर्भुज चक्रीय होता है।

0963CH11

अध्याय 11

रचनाएँ

11.1 भूमिका

पिछले अध्यायों में आकृतियाँ, जो किसी प्रमेय को सिद्ध करने या प्रश्नों को हल करने में आवश्यक थीं, वे यथार्थ नहीं थीं। वे केवल आपको स्थिति का अनुभव करने तथा सही तर्क देने की सहायता के लिए खींची गई थीं। तथापि, कभी-कभी शुद्ध आकृति की आवश्यकता होती है। उदाहरण के लिए, किसी बनने वाले भवन का मानचित्र बनाना, औजारों और मशीनों के विभिन्न भागों का खाका बनाना, सड़क का मानचित्र बनाना आदि। इन आकृतियों को बनाने के लिए कुछ आधारभूत ज्यामितीय उपकरणों की आवश्यकता होती है। आपके पास ज्योमेट्री बाक्स अवश्य होगा, जिसमें निम्न उपकरण होते हैं :

(i) अंशाकित पटरी (ruler), जिसके एक ओर सेंटीमीटर तथा मिलीमीटर चिन्हित होते हैं तथा दूसरी ओर इंच और उसके भाग चिन्हित होते हैं।

(ii) सेट-स्क्वायर का एक युग्म जिसमें एक के कोण 90°, 60°, तथा 30° तथा दूसरे के कोण 90°, 45° तथा 45° होते हैं।

(iii) डिवाइडर, जिसकी दोनों भुजाओं में दो नुकीले सिरे होते हैं। इन भुजाओं को समायोजित किया जा सकता है।

(iv) परकार, जिसमें पेंसिल लगाने का विधान होता है।

(v) चाँदा

सामान्यतः एक ज्यामितीय आकृति, जैसे कि त्रिभुज, वृत्त, चतुर्भुज, बहुभुज आदि जिनमें मापें दी हों को बनाने में इन सभी उपकरणों की आवश्यकता होती है, परन्तु ज्यामितीय रचना ज्यामितीय आकृति बनाने की वह प्रक्रिया है जिसमें केवल दो उपकरण– *एक अंशांकनहीन*

पटरी (*ungraduated*) और एक *परकार* का प्रयोग होता है। उन रचनाओं में जिनमें माप भी दिए हों, आप अंशाकित पटरी और चाँदे का भी प्रयोग कर सकते हैं। इस अध्याय में, कुछ आधारभूत रचनाएँ बताई जाएँगी। इनका प्रयोग करके कुछ विशेष त्रिभुजों की रचना की जाएगी।

11.2 आधारभूत रचनाएँ

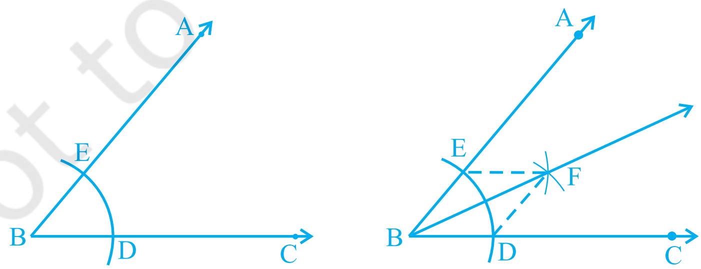
कक्षा VI में, आपने अध्ययन किया है कि किस प्रकार एक वृत्त, एक रेखाखंड का लंब समद्विभाजक, 30°, 45°, 60°, 90° और 120° के कोणों तथा एक दिए गए कोण के समद्विभाजक की रचना की जाती है। परन्तु इन रचनाओं के लिए उचित कारण नहीं बताए गए थे। इस अनुच्छेद में, आप इनमें से कुछ की रचनाएँ, कारण बताते हुए कि क्यों ये रचनाएँ प्रामाणिक हैं, करेंगे।

रचना 11.1 : *एक दिए हुए कोण के समद्विभाजक की रचना करना।*

एक कोण ABC दिया है। हम इसके समद्विभाजक की रचना करना चाहते हैं।

रचना के चरण :

1. B को केन्द्र मानकर तथा कोई त्रिज्या लेकर एक चाप लगाइए जो किरण BA और BC को क्रमशः, मान लीजिए, E और D पर प्रतिच्छेद करता है [देखिए आकृति 11.1(i)]।
2. पुनः D और E को केन्द्र मानकर तथा $\frac{1}{2}$ DE से बड़ी त्रिज्या लेकर चाप लगाइए, जो (मान लीजिए) एक दूसरे को F पर प्रतिच्छेद करते हैं।
3. किरण BF खींचिए [देखिए आकृति 11.1(ii)]।
   यही किरण BF, कोण ABC का अभीष्ट समद्विभाजक है।



(i) (ii)

आकृति 11.1

आइए हम देखें कि इस विधि से कोण समद्विभाजक किस प्रकार प्राप्त हुआ है।

DF और EF को मिलाइए। अब त्रिभुजों BEF तथा BDF में,

$BE = BD$ (एक ही चाप की त्रिज्याएँ)

$EF = DF$ (समान त्रिज्या वाले चाप)

$BF = BF$ (उभयनिष्ठ)

अतः, $\Delta BEF \cong \Delta BDF$ (SSS नियम)

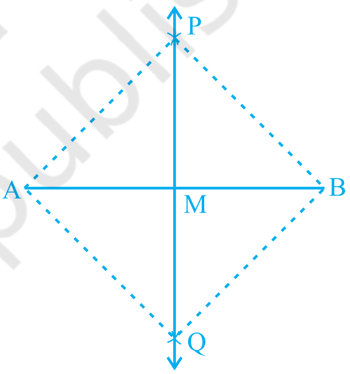
इससे प्राप्त होता है : $\angle EBF = \angle DBF$ (CPCT)

रचना 11.2 : *एक दिए गए रेखाखंड के लम्ब समद्विभाजक (लम्बार्धक) की रचना करना।*

एक रेखाखंड AB दिया है। हम इसके लम्ब समद्विभाजक की रचना करना चाहते हैं।

रचना के चरण :

1. A और B को केन्द्र मानकर तथा $\frac{1}{2}$ AB से अधिक त्रिज्या लेकर रेखाखंड AB के दोनों ओर (एक दूसरे को प्रतिच्छेद करते हुए)। चाप लगाइए
2. मान लीजिए कि ये चाप एक दूसरे को P और Q पर प्रतिच्छेद करते हैं। PQ को मिलाइए (देखिए आकृति 11.2)।
3. मान लीजिए PQ, AB को बिन्दु M पर प्रतिच्छेद करती है।



आकृति 11.2

तब रेखा PMQ, AB का अभीष्ट लम्ब समद्विभाजक है।

आइए हम देखें कि यह विधि किस प्रकार AB का लम्ब समद्विभाजक देती है।

A और B को P और Q से मिलाइए जिससे AP, AQ, BP तथा BQ प्राप्त होते हैं।

त्रिभुजों PAQ तथा PBQ में,

$AP = BP$ (समान त्रिज्या वाले चाप)

$AQ = BQ$ (समान त्रिज्या वाले चाप)

$PQ = PQ$ (उभयनिष्ठ)

अतः, $\Delta\ PAQ \cong \Delta\ PBQ$ (SSS नियम)

इसलिए, $\angle\ APM = \angle\ BPM$ (CPCT)

अब त्रिभुजों PMA तथा PMB में,

$AP = BP$ (पहले की तरह)

$PM = PM$ (उभयनिष्ठ)

$\angle APM = \angle BPM$ (ऊपर सिद्ध किया जा चुका है)

अतः, $\Delta PMA \cong \Delta PMB$ (SAS नियम)

इसलिए, $AM = BM$ और $\angle PMA = \angle PMB$ (CPCT नियम)

क्योंकि $\angle PMA + \angle PMB = 180^\circ$ (रैखिक युग्म अभिगृहीत)

हम पाते हैं:

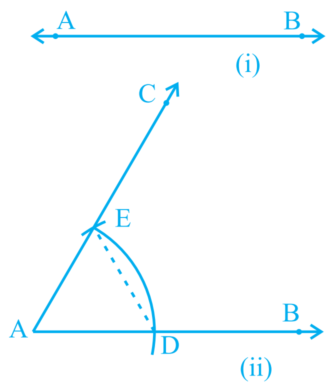
$$\angle PMA = \angle PMB = 90^\circ$$

अतः PM, अर्थात् PMQ, रेखाखंड AB का लम्ब समद्विभाजक है।

रचना 11.3 : *एक दी गई किरण के प्रारंभिक बिन्दु पर 60° के कोण की रचना करना।*

आइए हम प्रारंभिक बिन्दु A वाली किरण AB लें [देखिए आकृति 11.3(i)]। हम एक किरण AC की रचना करना चाहते हैं, जिससे कि $\angle CAB = 60^\circ$ हो। इसको करने की एक विधि नीचे दी है।

रचना के चरण :



आकृति 11.3

1. A को केन्द्र मानकर और कोई त्रिज्या लेकर एक वृत्त का चाप खींचिए, जो AB को मान लीजिए एक बिन्दु D पर प्रतिच्छेद करता है।
2. D को केन्द्र मानकर और उसी त्रिज्या, जो पहले ली गई थी, से एक चाप खींचिए, जो चरण 1 में खींचें गए चाप को बिन्दु E पर प्रतिच्छेद करता है।
3. E से जाने वाली किरण AC खींचिए [देखिए आकृति 11.3 (ii)]।

   तब $\angle CAB$ ही 60° का अभीष्ट कोण है।

   अब आइए देखें कि यह विधि कैसे 60° का कोण देती है।

   DE को मिलाइए।

तब, AE = AD = DE (रचना से)

अत:, Δ EAD एक समबाहु त्रिभुज है और $\angle$ EAD, जो कि $\angle$ CAB के बराबर है, 60° का है।

प्रश्नावली 11.1

1. एक दी हुई किरण के प्रारंभिक बिन्दु पर 90^0 के कोण की रचना कीजिए और कारण सहित रचना की पुष्टि कीजिए।
2. एक दी हुई किरण के प्रारंभिक बिन्दु पर 45^0 के कोण की रचना कीजिए और कारण सहित रचना की पुष्टि कीजिए।
3. निम्न मापों के कोणों की रचना कीजिए :

   (i) 30° (ii) $22\frac{1}{2}^{\circ}$ (iii) 15°
4. निम्न कोणों की रचना कीजिए और चाँदे द्वारा मापकर पुष्टि कीजिए :

   (i) 75° (ii) 105° (iii) 135°
5. एक समबाहु त्रिभुज की रचना कीजिए, जब इसकी भुजा दी हो तथा कारण सहित रचना कीजिए।

11.3 त्रिभुजों की कुछ रचनाएँ

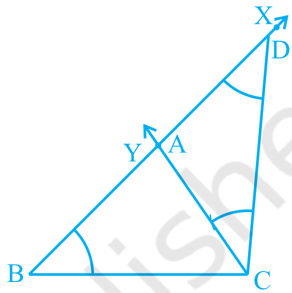
अभी तक कुछ आधारभूत रचनाओं पर विचार किया गया है। पिछली कक्षाओं में की गई रचनाओं और उपर्युक्त वर्णित रचनाओं का प्रयोग कर, अब कुछ त्रिभुजों की रचनाएँ की जाएँगी। अध्याय 7 से स्मरण कीजिए कि SAS, SSS, ASA तथा RHS दो त्रिभुजों की सर्वांगसमता के नियम हैं। अत: एक त्रिभुज अद्वितीय होता है, यदि (i) दो भुजाएँ और बीच का कोण दिए हों, (ii) तीनों भुजाएँ दी हों, (iii) दो कोण और बीच की भुजा दी हो तथा (iv) समकोण त्रिभुज में कर्ण और एक भुजा दी हो। आपने कक्षा VII में इन त्रिभुजों की रचना करना सीखा है। आइए, अब हम त्रिभुजों की कुछ और रचनाओं पर विचार करें। आपने ध्यान दिया होगा कि किसी त्रिभुज की रचना के लिए, कम से कम उसके तीन भाग दिए होने चाहिए। परन्तु तीन भागों के सभी संचय (combinations) इसके लिए पर्याप्त नहीं हैं। उदाहरण के लिए, यदि दो भुजाएँ तथा एक कोण (बीच का कोण नहीं) दिए हों। तो अद्वितीय रूप से त्रिभुज की रचना सदैव संभव नहीं है।

रचना 11.4 : *दिए हुए आधार, एक आधार कोण तथा अन्य दो भुजाओं के योग से त्रिभुज की रचना करना।*

एक त्रिभुज ABC में आधार BC, एक आधार कोण माना $\angle B$ तथा अन्य दो भुजाओं का योग AB + AC दिया है। आपको त्रिभुज ABC की रचना करनी है।

रचना के चरण :

1. आधार BC खींचिए और बिन्दु B पर दिए गए कोण के बराबर $\angle XBC$ बनाइए।
2. किरण BX से AB + AC के बराबर रेखाखंड BD काटिए।
3. DC को मिलाइए तथा $\angle BDC$ के बराबर कोण DCY बनाइए।
4. मान लीजिए CY, BX को A पर प्रतिच्छेदित करती है (देखिए आकृति 11.4)।



आकृति 11.4

तब, ABC अभीष्ट त्रिभुज है।

आइए देखें कि आपने अभीष्ट त्रिभुज कैसे प्राप्त किया।

दिए गए मापन अनुसार, आधार BC तथा $\angle B$ बनाए गए हैं। पुनः त्रिभुज ACD में,

$$\angle ACD = \angle ADC \qquad \text{(रचना से)}$$

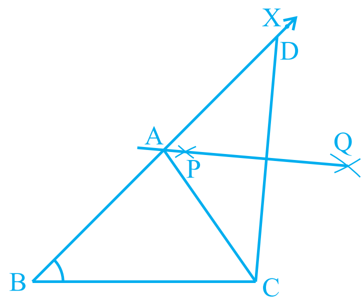
अतः AC = AD होगा, और फिर

$$AB = BD - AD = BD - AC$$

अर्थात् $\qquad AB + AC = BD$

वैकल्पिक विधि :

उपर्युक्त दो चरणों की पुनरावृत्ति कीजिए। पुनः CD का समद्विभाजक PQ खींचिए जो BD को बिन्दु A पर प्रतिच्छेद करता है (देखिए आकृति 11.5)। AC को मिलाइए। तब, ABC अभीष्ट त्रिभुज है। ध्यान दीजिए कि A, CD के लंब समद्विभाजक पर स्थित है, अतः AD = AC है।



आकृति 11.5

टिप्पणी : त्रिभुज की रचना संभव नहीं होगी यदि योग $AB + AC \leq BC$ हो।

रचना 11.5 : *एक त्रिभुज की रचना करना जिसका आधार, एक आधार कोण तथा अन्य दो भुजाओं का अन्तर दिया हो।*

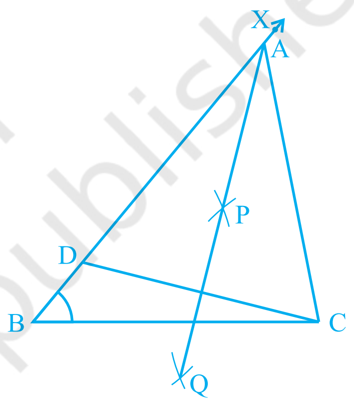
आधार BC, एक कोण, माना $\angle B$, तथा अन्य दो भुजाओं का अन्तर $(AB - AC)$ या $(AC - AB)$ दिया है। आपको त्रिभुज ABC की रचना करनी है। स्पष्टत: निम्न दो स्थितियाँ हैं:

स्थिति (i) : मान लीजिए $AB > AC$ है, अर्थात् $AB - AC$ दिया है।

रचना के चरण :

1. आधार BC खींचिए और बिन्दु B पर दिए गए कोण के बराबर एक कोण, मान लीजिए कोण XBC, बनाइए।
2. किरण BX से $AB - AC$ के बराबर रेखाखंड BD काटिए।
3. DC को मिलाइए और DC का लम्ब समद्विभाजक PQ खींचिए।
4. माना कि वह BX को बिन्दु A पर प्रतिच्छेद करता है। AC को मिलाइए (देखिए आकृति 11.6)।

   तब, ABC अभीष्ट त्रिभुज है।



आकृति 11.6

आइए अब हम देखें कि किस प्रकार आपने अभीष्ट त्रिभुज प्राप्त किया है।

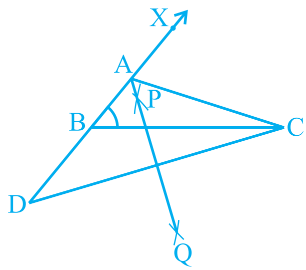
दिए गए मापन के अनुसार आधार BC और $\angle B$ बनाए गए हैं। बिन्दु A, DC के लंब समद्विभाजक पर स्थित है।

अत:, $AD = AC$

इसलिए, $BD = AB - AD = AB - AC$

स्थिति (ii) : मान लीजिए $AB < AC$ है, अर्थात् $AC - AB$ दिया हुआ है।

रचना के चरण :



आकृति 11.7

1. वही जैसा स्थिति (i) में।
2. विपरीत दिशा में बढ़ी हुई रेखा BX से AC – AB के बराबर एक रेखाखंड BD काटिए।
3. DC को मिलाइए तथा DC का लम्ब समद्विभाजक PQ खींचिए।
4. मान लीजिए कि PQ, BX को A पर प्रतिच्छेद करती है। AC को मिलाइए (देखिए आकृति 11.7)।

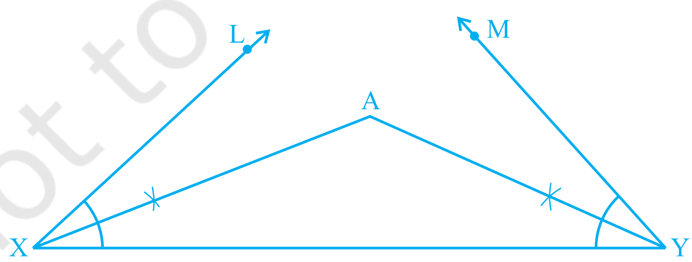
तब, ABC अभीष्ट त्रिभुज है।

आप रचना की पुष्टि स्थिति (i) की तरह ही कर सकते हैं।

रचना 11.6 : *एक त्रिभुज की रचना कीजिए जिसका परिमाप तथा दोनों आधार कोण दिए हों।*
आधार के कोण ∠ B तथा ∠ C और (BC + CA + AB) दिए हैं। आपको त्रिभुज ABC की रचना करनी है।

रचना के चरण :

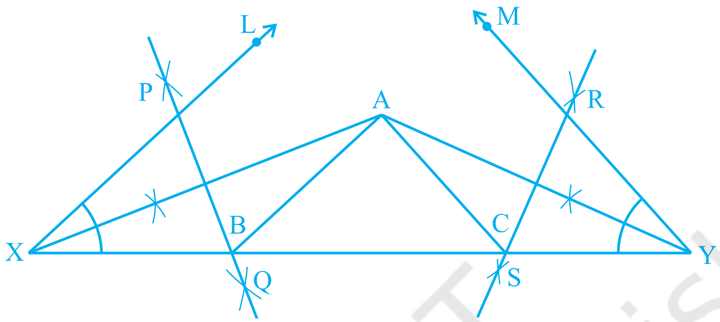
1. BC + CA + AB के बराबर एक रेखाखंड XY, खींचिए।
2. ∠LXY कोण B के बराबर तथा ∠MYX कोण C के बराबर बनाइए।
3. ∠ LXY तथा ∠ MYX को समद्विभाजित कीजिए। माना ये समद्विभाजक एक बिन्दु A पर प्रतिच्छेद करते हैं [देखिए आकृति 11.8(i)]।



आकृति 11.8 (i)

4. AX का लंब समद्विभाजक PQ तथा AY का लंब समद्विभाजक RS खींचिए।

5. मान लीजिए कि PQ, XY को बिंदु B पर तथा RS, XY को बिंदु C पर प्रतिच्छेद करता है। AB और AC को मिलाइए [देखिए आकृति 11.8(ii)]।



आकृति 11.8 (ii)

तब ABC अभीष्ट त्रिभुज है। रचना के समर्थन के लिए, आप पाते हैं कि B, AX के लंब समद्विभाजक पर स्थित है।

अत:, XB = AB है। इसी प्रकार, CY = AC है।

इससे प्राप्त होता है: $BC + CA + AB = BC + XB + CY = XY$

पुन: $\angle BAX = \angle AXB$ (क्योंकि Δ AXB में, AB = XB)

तथा $\angle ABC = \angle BAX + \angle AXB = 2\,\angle AXB = \angle LXY$

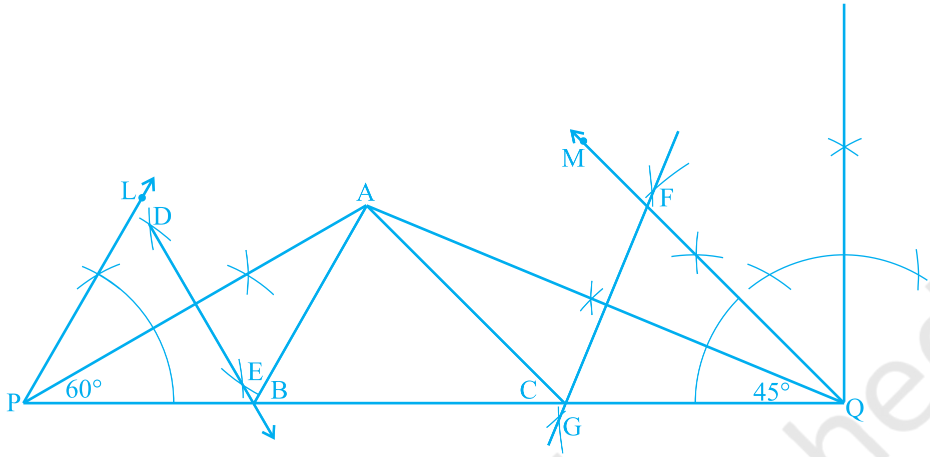
इसी प्रकार, $\angle ACB = \angle MYX$, जैसा चाहिए था।

उदाहरण 1 : एक त्रिभुज ABC की रचना कीजिए जिसमें $\angle B = 60°$, $\angle\, C = 45°$ और $AB + BC + CA = 11$ cm है।

रचना के चरण :

1. एक रेखाखंड PQ = 11 cm है (= AB + BC + CA) खींचिए।

2. P पर 60° का कोण तथा Q पर 45° का कोण बनाइए।



आकृति 11.9

3. इन कोणों को समद्विभाजित कीजिए। मान लीजिए कि ये समद्विभाजक एक बिन्दु A पर प्रतिच्छेद करते हैं।

4. AP का लंब समद्विभाजक DE खींचिए जो PQ को बिंदु B पर प्रतिच्छेद करता है और AQ का लंब समद्विभाजक खींचिए जो PQ को बिंदु C पर प्रतिच्छेद करता है।

5. AB को और AC को मिलाइए (देखिए आकृति 11.9)।

तब, ABC अभीष्ट त्रिभुज है।

प्रश्नावली 11.2

1. एक त्रिभुज ABC की रचना कीजिए, जिसमें BC = 7 cm, $\angle B = 75°$ और AB + AC = 13 cm हो।

2. एक त्रिभुज ABC की रचना कीजिए, जिसमें BC = 8 cm, $\angle B = 45°$ और AB – AC = 3.5 cm हो।

3. एक त्रिभुज PQR की रचना कीजिए, जिसमें QR = 6 cm, $\angle Q = 60°$ और PR – PQ = 2 cm हो।

4. एक त्रिभुज XYZ की रचना कीजिए, जिसमें $\angle Y = 30°$, $\angle Z = 90°$ और XY + YZ + ZX = 11 cm हो।

5. एक समकोण त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसका आधार 12 cm और कर्ण तथा अन्य भुजा का योग 18 cm है।

11.4 सारांश

इस अध्याय में, आपने पटरी और परकार की सहायता से निम्न रचनाएँ की हैं:

1. एक दिए हुए कोण को समद्विभाजित करना।
2. एक दिए हुए रेखाखंड का लंब समद्विभाजक खींचना।
3. $60°$ इत्यादि के कोण बनाना।
4. एक त्रिभुज की रचना करना, जिसमें आधार, एक आधार कोण तथा अन्य दो भुजाओं का योग दिया हो।
5. एक त्रिभुज की रचना करना, जिसमें आधार, एक आधार कोण तथा अन्य दो भुजाओं का अन्तर दिया हो।
6. एक त्रिभुज की रचना करना, जिसका परिमाप एवं दो आधार कोण दिए हों।

0963CH12

अध्याय 12

हीरोन का सूत्र

12.1 भूमिका

आप पिछली कक्षाओं में, विभिन्न आकारों की आकृतियों जैसे कि वर्ग, आयत, त्रिभुज और चतुर्भुज के बारे में पढ़ चुके हैं। आप इनमें से कुछ आकृतियों जैसे कि आयत, वर्ग इत्यादि के परिमाप और क्षेत्रफल भी परिकलित कर चुके हैं। उदाहरणार्थ, आप अपनी कक्षा के कमरे के फर्श का क्षेत्रफल और परिमाप ज्ञात कर सकते हैं।

आइए कमरे के फर्श का, उसकी भुजाओं के अनुदिश एक बार चलकर, चक्कर लगाएँ। ऐसा करने में आपने जो दूरी तय की है, वह फर्श का परिमाप है। कमरे के फर्श का परिमाप या माप (size) उसका क्षेत्रफल होता है।

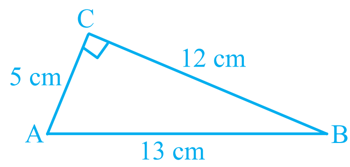
इस प्रकार, यदि आपकी कक्षा का कमरा आयताकार है तथा इसकी लम्बाई और चौड़ाई क्रमशः 10 m और 8 m हैं, तो उसका परिमाप $2(10 + 8)$ m = 36 m होगा तथा उसका क्षेत्रफल 10 m × 8 m, अर्थात् 80 m^2 होगा।

लम्बाई या चौड़ाई मापने का मात्रक (unit) मीटर (m) या सेन्टीमीटर (cm), इत्यादि लिया जाता है।

किसी समतल आकृति के क्षेत्रफल को मापने का मात्रक वर्ग मीटर (m^2) या वर्ग सेंटीमीटर (cm^2), इत्यादि लिया जाता है।

मान लीजिए आप एक त्रिभुजाकार बाग में बैठे हुए हैं। आप इसका क्षेत्रफल किस प्रकार ज्ञात करेंगे? अध्याय 9 और अपनी पिछली कक्षाओं से, आप जानते हैं कि

$$\boxed{\textbf{त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times \textbf{आधार} \times \textbf{ऊँचाई}} \qquad \text{(I)}$$



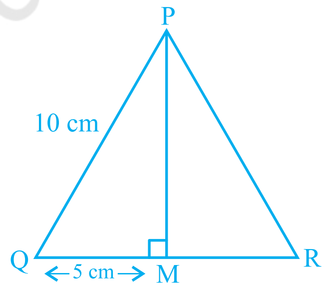
आकृति 12.1

हम देखते हैं कि यदि त्रिभुज एक **समकोण त्रिभुज** हो, तो हम समकोण को अंतर्विष्ट करने वाली भुजाओं को आधार और ऊँचाई लेकर सूत्र का सीधा प्रयोग करके क्षेत्रफल ज्ञात कर सकते हैं। उदाहरणार्थ, मान लीजिए कि एक समकोण त्रिभुज ABC की भुजाएँ क्रमश: 5 cm, 12 cm और 13 cm हैं। तब हम आधार 12 cm और ऊँचाई 5 cm लेते हैं। (देखिए आकृति 12.1)। अब, त्रिभुज का क्षेत्रफल निम्न होगा :

$$\frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{ऊँचाई} = \frac{1}{2} \times 12 \times 5 \text{ cm}^2$$

ध्यान दीजिए कि हम आधार 5cm और ऊँचाई 12 cm भी ले सकते थे।

अब मान लीजिए कि हम एक **समबाहु त्रिभुज** PQR का क्षेत्रफल ज्ञात करना चाहते हैं, जिसकी प्रत्येक भुजा 10 cm है (देखिए आकृति 12.2)। इस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए, हमें इसकी ऊँचाई ज्ञात होनी चाहिए। क्या आप इस त्रिभुज की ऊँचाई ज्ञात कर सकते हैं?



आकृति 12.2

आइए हम याद करें कि त्रिभुज की भुजाएँ ज्ञात होने पर उसकी ऊँचाई कैसे ज्ञात करते हैं। यह एक समबाहु त्रिभुज में संभव है। QR का मध्य-बिन्दु M लेकर उसे P से मिलाइए। हम जानते हैं कि ΔPMQ एक समकोण त्रिभुज है। अत:, पाइथागोरस प्रमेय का प्रयोग करके, हम लम्बाई PM नीचे दर्शाए अनुसार ज्ञात कर सकते हैं :

$$PQ^2 = PM^2 + QM^2$$

अर्थात् $(10)^2 = PM^2 + (5)^2$, चूँकि $QM = MR$ है।

अत:, हमें प्राप्त होता है : $PM^2 = 75$

अर्थात् $PM = \sqrt{75}\ \text{cm} = 5\sqrt{3}\ \text{cm}$

तब, Δ PQR का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ आधार $\times$ ऊँचाई $= \frac{1}{2} \times 10 \times 5\sqrt{3}\ \text{cm}^2 = 25\sqrt{3}\ \text{cm}^2$

आइए अब देखें कि इस सूत्र का प्रयोग करके एक **समद्विबाहु त्रिभुज** का क्षेत्रफल किस प्रकार परिकलित किया जा सकता है। उदाहरणार्थ, हम एक त्रिभुज XYZ लेते हैं, जिसकी दोनों बराबर भुजाओं XY और XZ में से प्रत्येक भुजा 5 cm है तथा वह भुजा जो बराबर नहीं है, अर्थात् YZ, 8 cm लम्बाई की है (देखिए आकृति 12.3)।

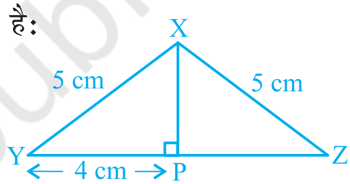
इस स्थिति में भी हम त्रिभुज की ऊँचाई जानना चाहते हैं। इसलिए, हम X से भुजा YZ पर लम्ब XP खींचते हैं। आप देख सकते हैं कि यह लम्ब XP त्रिभुज के आधार YZ को दो बराबर भागों में विभाजित करता है (RHS सर्वांगसम प्रतिबंध)।

अत:, $$YP = PZ = \frac{1}{2}\ YZ = 4\ \text{cm}$$

फिर, पाइथागोरस प्रमेय के प्रयोग द्वारा, हमें प्राप्त होता है:

$$XP^2 = XY^2 - YP^2$$
$$= 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$$

अत:, $$XP = 3\ \text{cm}$$



आकृति 12.3

अब, Δ XYZ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ (आधार YZ) $\times$ (ऊँचाई XP)

$$= \frac{1}{2} \times 8 \times 3\ \text{cm}^2 = 12\ \text{cm}^2$$

अब मान लीजिए कि हमें एक **विषमबाहु त्रिभुज** की भुजाओं की लम्बाइयाँ ज्ञात हैं, परन्तु ऊँचाई ज्ञात नहीं है। क्या आप अब भी इसका क्षेत्रफल ज्ञात कर सकते हैं? उदाहरणार्थ, आपके पास एक त्रिभुजाकार पार्क है, जिसकी भुजाएँ 40 m, 32 m और 24 m मापी गई हैं। आप इसका क्षेत्रफल किस प्रकार ज्ञात करेंगे? निश्चित रूप से, यदि आप सूत्र (I) का प्रयोग करके क्षेत्रफल ज्ञात करना चाहेंगे, तो आपको इसकी ऊँचाई ज्ञात करनी होगी। परन्तु हमें इसकी ऊँचाई ज्ञात करने का कोई संकेत नहीं मिल रहा है। ऐसा करने का प्रयत्न कीजिए। यदि आप ऐसा नहीं कर पाते हैं, तो अगले अनुच्छेद पर चले जाइए।

12.2 त्रिभुज का क्षेत्रफल – हीरोन के सूत्र द्वारा

हीरोन का जन्म संभवत: मिस्र में अलेक्जेंड्रिया नामक स्थान पर हुआ। उन्होंने अनुप्रायोगिक गणित (applied mathematics) पर कार्य किया। उनका गणितीय और भौतिकीय विषयों पर कार्य इतना अधिक और विभिन्न प्रकार का था कि उन्हें इन क्षेत्रों का एक विश्वकोण संबंधी (encyclopedic) लेखक समझा जाता था। उनका ज्यामितीय कार्य मुख्यत: मेन्सुरेशन (क्षेत्रमिति) की समस्याओं से संबंधित था। यह कार्य तीन पुस्तकों में लिखा गया है। पुस्तक 1 में, वर्गों, आयतों, त्रिभुजों, समलंबों, अनेक प्रकार के विशिष्ट चतुर्भुजों, सम बहुभुजों, वृत्तों के क्षेत्रफलों, बेलनों, शंकुओं, गोलों, इत्यादि के पृष्ठीय क्षेत्रफलों का वर्णन है। इसी पुस्तक में, हीरोन ने त्रिभुज की तीनों भुजाओं के पदों में उसके क्षेत्रफल का प्रसिद्ध (या सुपरिचित) सूत्र प्रतिपादित किया है।

हीरोन
(10 सा०यू०पू०–75 सा०यू०पू०)
आकृति 12.4

हीरोन के इस सूत्र को *हीरो का सूत्र* (*Hero's formula*) भी कहा जाता है। इसे नीचे दिया जा रहा है:

$$\boxed{\textbf{त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}} \qquad \text{(II)}$$

जहाँ a, b और c त्रिभुज की भुजाएँ हैं तथा

$$s = \textit{त्रिभुज का अर्धपरिमाप (semi-perimeter)} = \frac{a+b+c}{2} \text{ है।}$$

यह सूत्र उस स्थिति में सहायक होता है, जब त्रिभुज की ऊँचाई सरलता से ज्ञात न हो सकती हो। आइए ऊपर बताए गए त्रिभुजाकार पार्क ABC का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए, इस सूत्र का प्रयोग करें (देखिए आकृति 12.5)।

आइए $a = 40$ m, $b = 24$ m, $c = 32$ m लें ताकि हमें

$$s = \frac{40+24+32}{2} \text{ m} = 48 \text{ m}$$

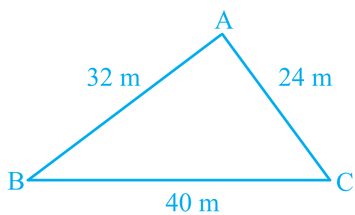
प्राप्त होगा।

अब, $s - a = (48 - 40)$ m $= 8$ m,

$s - b = (48 - 24)$ m $= 24$ m,

और $s - c = (48 - 32)$ m $= 16$ m

हैं।



आकृति 12.5

अतः, पार्क ABC का क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$

$$= \sqrt{48 \times 8 \times 24 \times 16}\ \text{m}^2 = 384\,\text{m}^2$$

हम यह भी देखते हैं कि $32^2 + 24^2 = 1024 + 576 = 1600 = 40^2$ है। अतः, इस पार्क की भुजाएँ एक समकोण त्रिभुज बनाती हैं। सबसे बड़ी, अर्थात् BC, जिसकी लम्बाई 40 m है, इस त्रिभुज का कर्ण है तथा AB और AC के बीच का कोण 90° होगा।

इसलिए, सूत्र I से हम जाँच कर सकते हैं कि पार्क का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times 32 \times 24\ \text{m}^2$

$$= 384\ \text{m}^2$$

हम पाते हैं कि यह क्षेत्रफल वही है जो हमें हीरोन के सूत्र से प्राप्त हुआ था।

अब आप पहले चर्चित किए गए अन्य त्रिभुजों के क्षेत्रफलों को हीरोन के सूत्र से ज्ञात करके जाँच कीजिए कि क्षेत्रफल पहले जैसे ही प्राप्त होते हैं। ये त्रिभुज हैं :

(i) 10 cm भुजा वाला समबाहु त्रिभुज

और (ii) असमान भुजा 8 cm और बराबर भुजाएँ 5 cm वाला समद्विबाहु त्रिभुज।

आप देखेंगे कि

(i) के लिए, $s = \dfrac{10 + 10 + 10}{2}\ \text{cm} = 15\ \text{cm}$

इसलिए, त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \sqrt{15(15-10)(15-10)(15-10)}\ \text{cm}^2$

$$= \sqrt{15 \times 5 \times 5 \times 5}\,\text{cm}^2 = 25\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

(ii) के लिए, $s = \dfrac{8 + 5 + 5}{2}\text{cm} = 9\ \text{cm}$

इसलिए, त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \sqrt{9(9-8)\,(9-5)\,(9-5)}\ \text{cm}^2$

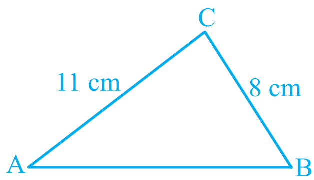
$$= \sqrt{9 \times 1 \times 4 \times 4}\ \text{cm}^2 = 12\ \text{cm}^2$$

आइए अब कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 1 : एक त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी दो भुजाएँ 8 cm और 11 cm हैं और जिसका परिमाप 32 cm है (देखिए आकृति 12.6)।

हल : यहाँ, परिमाप = 32 cm, a = 8 cm और b = 11 cm है।

इसलिए, तीसरी भुजा c = 32 cm – (8 + 11) cm = 13 cm



आकृति 12.6

अब, $2s = 32$ है। इसलिए s = 16 cm,

$s - a$ = (16 – 8) cm = 8 cm,

$s - b$ = (16 – 11) cm = 5 cm,

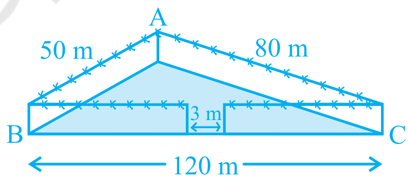
$s - c$ = (16 – 13) cm = 3 cm

इसलिए, त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$= \sqrt{16 \times 8 \times 5 \times 3} \text{ cm}^2 = 8\sqrt{30} \text{ cm}^2$$

उदाहरण 2 : एक त्रिभुजाकार पार्क ABC की भुजाएँ 120 m, 80 m और 50 m हैं (देखिए आकृति 12.7)। एक मालिन *धनिया* को इसके चारों ओर एक बाड़ लगानी है और इसके अंदर घास उगानी है। उसे कितने क्षेत्रफल में घास उगानी है? एक ओर 3 m चौड़े एक फाटक के लिए स्थान छोड़ते हुए इसके चारों ओर ₹ 20 प्रति मीटर की दर से काँटेदार बाड़ लगाने का व्यय भी ज्ञात कीजिए।

हल : पार्क का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए, हमें प्राप्त है :



आकृति 12.7

$2s$ = 50 m + 80 m + 120 m = 250 m

अर्थात् s = 125 m

इसलिए, $s - a$ = (125 – 120) m = 5 m,

$s - b$ = (125 – 80) m = 45 m,

$s - c$ = (125 – 50) m = 75 m

अतः, घास उगाने के लिए क्षेत्रफल = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$= \sqrt{125 \times 5 \times 45 \times 75} \text{ m}^2$$

$$= 375\sqrt{15} \text{ m}^2$$

साथ ही, पार्क का परिमाप = AB + BC + CA = 250 m

अतः, बाड़ लगाने के लिए आवश्यक तार की लम्बाई = 250 m – 3 m (फाटक के लिए)

= 247 m

इसलिए, बाड़ लगाने का व्यय = ₹ 20 × 247 = ₹ 4940

उदाहरण 3 : एक त्रिभुजाकार भूखंड (plot) की भुजाओं का अनुपात 3 : 5 : 7 है और उसका परिमाप 300 m है। इस भूखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए भुजाएँ (मीटरों में) $3x$, $5x$ और $7x$ हैं (देखिए आकृति 12.8)।

तब, हम जानते हैं कि $3x + 5x + 7x = 300$ (त्रिभुज का परिमाप)

इसलिए, $15x = 300$ है, जिससे $x = 20$ प्राप्त होता है।

इसलिए, त्रिभुज की भुजाएँ 3×20 m, 5×20 m और 7×20 m हैं।

अर्थात् ये भुजाएँ 60 m, 100 m और 140 m हैं।

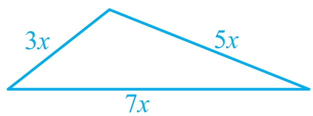
क्या आप अब (हीरोन का सूत्र प्रयोग करके) क्षेत्रफल ज्ञात कर सकते हैं?

अब, $$s = \frac{60+100+140}{2} \text{ m} = 150 \text{ m}$$

इसलिए, क्षेत्रफल $$= \sqrt{150(150-60)(150-100)(150-140)} \text{ m}^2$$

$$= \sqrt{150 \times 90 \times 50 \times 10} \text{ m}^2$$

$$= 1500\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

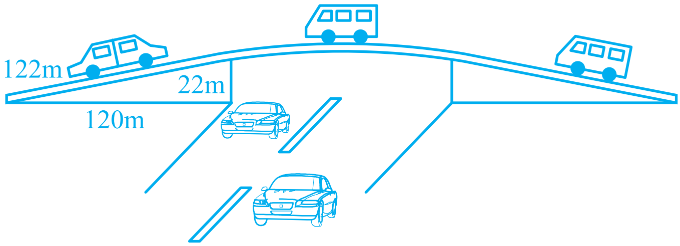


आकृति 12.8

प्रश्नावली 12.1

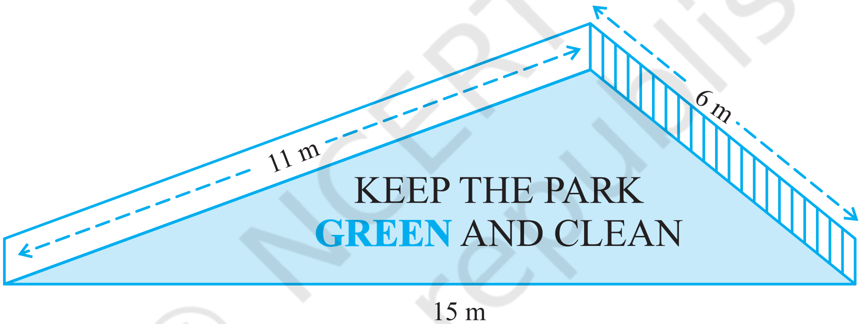
1. एक यातायात संकेत बोर्ड पर 'आगे स्कूल है' लिखा है और यह भुजा 'a' वाले एक समबाहु त्रिभुज के आकार का है। हीरोन के सूत्र का प्रयोग करके इस बोर्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। यदि संकेत बोर्ड का परिमाप 180 cm है, तो इसका क्षेत्रफल क्या होगा?

2. किसी फ्लाईओवर (flyover) की त्रिभुजाकार दीवार को विज्ञापनों के लिए प्रयोग किया जाता है। दीवार की भुजाओं की लंबाइयाँ 122 m, 22 m और 120 m हैं (देखिए आकृति 12.9)। इस विज्ञापन से प्रति वर्ष ₹5000 प्रति m^2 की प्राप्ति होती है। एक कम्पनी ने एक दीवार को विज्ञापन देने के लिए 3 महीने के लिए किराए पर लिया। उसने कुल कितना किराया दिया?



आकृति 12.9

3. किसी पार्क में एक फिसल पट्टी (slide) बनी हुई है। इसकी पार्श्वीय दीवारों (side walls) में से एक दीवार पर किसी रंग से पेंट किया गया है और उस पर "पार्क को हरा-भरा और साफ रखिए" लिखा हुआ है (देखिए आकृति 12.10)। यदि इस दीवार की विमाएँ 15 m, 11 m और 6 m हैं, तो रंग से पेंट हुए भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



आकृति 12.10

4. उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी दो भुजाएँ 18 cm और 10 cm हैं तथा उसका परिमाप 42 cm है।

5. एक त्रिभुज की भुजाओं का अनुपात 12 : 17 : 25 है और उसका परिमाप 540 cm है। इस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

6. एक समद्विबाहु त्रिभुज का परिमाप 30 cm है और उसकी बराबर भुजाएँ 12 cm लम्बाई की हैं। इस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

12.3 चतुर्भुजों के क्षेत्रफल ज्ञात करने में हीरोन के सूत्र का अनुप्रयोग

मान लीजिए एक किसान के पास खेती के लिए भूमि है और वह इसे खेती करवाने के लिए कुछ मजदूरों को नियुक्त करती है और उन्हें प्रति वर्ग मीटर खेती किए गए क्षेत्रफल की दर से मजदूरी देती है। वह ऐसा कैसे करेगी? अनेक बार खेत चतुर्भुजों के आकार के होते हैं।

हमें चतुर्भुजाकार को त्रिभुजाकार भागों में विभाजित करना पड़ता है और फिर त्रिभुज के क्षेत्रफल के सूत्र का प्रयोग करके चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात हो जाता है। आइए नीचे दी हुई समस्या को देखें :

उदाहरण 4 : कमला के पास 240 m, 200 m और 360 m भुजाओं वाला एक त्रिभुजाकार खेत है, जहाँ वह गेहूँ उगाना चाहती है। इसी खेत से संलग्न 240 m, 320 m और 400 m भुजाओं वाला एक अन्य खेत है, जहाँ वह आलू और प्याज उगाना चाहती है (देखिए आकृति 12.11)। उसने इस खेत की सबसे लम्बी भुजा के मध्य-बिन्दु को सम्मुख शीर्ष से जोड़कर उसे दो भागों में विभाजित कर दिया। इनमें से एक भाग में उसने आलू उगाए और दूसरे भाग में प्याज उगाई। गेहूँ, आलू और प्याज के लिए कितने-कितने क्षेत्रफलों (हेक्टेयर में) का प्रयोग किया गया है? (1 हेक्टेयर = 10000 m^2 है)

हल : मान लीजिए ABC वह खेत है, जहाँ गेहूँ उगाया गया है। साथ ही, ACD वह खेत है जिसकी भुजा AD के मध्य-बिन्दु E को C से जोड़कर इस खेत को दो भागों में विभाजित किया गया है।

$$a = 200 \text{ m}, b = 240 \text{ m}, c = 360 \text{ m}$$

अत:, $s = \dfrac{200 + 240 + 360}{2} \text{ m} = 400 \text{ m}$

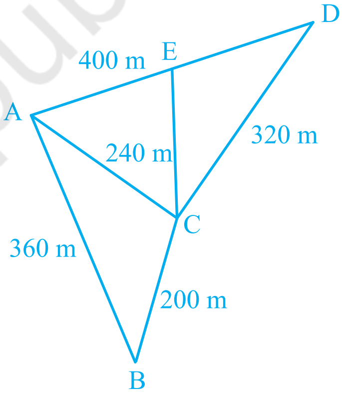
इसलिए, गेहूँ उगाने के लिए क्षेत्रफल

$$= \sqrt{400(400 - 200)(400 - 240)(400 - 360)} \text{ m}^2$$

$$= \sqrt{400 \times 200 \times 160 \times 40} \text{ m}^2$$

$$= 16000\sqrt{2} \text{ m}^2 = 1.6 \times \sqrt{2} \text{ हेक्टेयर}$$

$$= 2.26 \text{ हेक्टेयर (लगभग)}$$



आकृति 12.11

आइए अब ΔACD का क्षेत्रफल परिकलित करें।

यहाँ, $s = \dfrac{240 + 320 + 400}{2} \text{ m} = 480 \text{ m}$

अत:, Δ ACD का क्षेत्रफल $= \sqrt{480(480 - 240)(480 - 320)(480 - 400)} \text{ m}^2$

$$= \sqrt{480 \times 240 \times 160 \times 80} \text{ m}^2 = 38400 \text{ m}^2 = 3.84 \text{ हेक्टेयर}$$

ध्यान दीजिए कि AD के मध्य-बिन्दु E को सम्मुख शीर्ष C से जोड़ने वाला रेखाखंड त्रिभुज ACD को बराबर क्षेत्रफलों वाले दो भागों में विभाजित करता है। क्या आप इसका कारण बता सकते हैं? वास्तव में, इन दोनों भागों के बराबर आधार AE और ED हैं तथा नि:संदेह इनकी संगत ऊँचाइयाँ भी बराबर हैं।

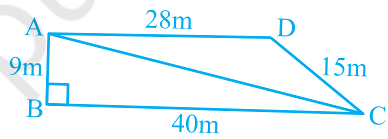
अत:, आलू उगाने के लिए क्षेत्रफल = प्याज उगाने के लिए क्षेत्रफल

$$= (3.84 \div 2) \text{ हेक्टेयर} = 1.92 \text{ हेक्टेयर}$$

उदाहरण 5 : किसी स्कूल के विद्यार्थियों ने सफाई अभियान के लिए एक रैली निकाली। उन्होंने दो समूहों में, विभिन्न गलियों में चलकर मार्च किया। एक समूह ने गलियों AB, BC और CA में मार्च किया तथा अन्य समूह ने गलियों AC, CD और DA में मार्च किया (देखिए आकृति 12.12)। फिर उन्होंने इन गलियों द्वारा घेरे गए भागों को साफ किया। यदि AB = 9 m, BC = 40 m, CD = 15 m, DA = 28 m और $\angle B = 90°$ है, तो किस समूह ने अधिक सफाई की और कितनी अधिक? विद्यार्थियों द्वारा सफाई किया गया कुल क्षेत्रफल भी ज्ञात कीजिए। (यह मान कर चलिए कि गलियों की चौड़ाइयों को छोड़ा जा सकता है।)

हल : चूँकि AB = 9 m और BC = 40 m, $\angle B = 90°$ है, इसलिए

$$AC = \sqrt{9^2 + 40^2} \text{ m} = \sqrt{81 + 1600} \text{ m} = \sqrt{1681} \text{ m} = 41\text{m}$$



आकृति 12.12

अब, पहले समूह ने समकोण त्रिभुज ABC के क्षेत्रफल के बराबर सफाई की है।

अत:, क्षेत्रफल Δ ABC = $\frac{1}{2}$ × आधार × ऊँचाई

$$= \frac{1}{2} \times 40 \times 9 \text{ m}^2 = 180 \text{ m}^2$$

दूसरे समूह ने ΔACD के क्षेत्रफल के बराबर सफाई की है। इसकी भुजाएँ 41 m, 15 m और 28 m हैं।

यहाँ, $$s = \frac{41 + 15 + 28}{2} \text{ m} = 42 \text{ m}$$

अत:, Δ ACD का क्षेत्रफल = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$= \sqrt{42(42-41)(42-15)(42-28)}\ \text{m}^2$$

$$= \sqrt{42 \times 1 \times 27 \times 14}\ \text{m}^2 = 126\ \text{m}^2$$

इसलिए, पहले समूह ने 180 m^2 सफाई की जो दूसरे समूह की सफाई से (180–126) m^2, अर्थात् 54 m^2 अधिक है।

सभी विद्यार्थियों द्वारा की गई सफाई का कुल क्षेत्रफल = (180 + 126) m^2 = 306 m^2

उदाहरण 6 : सानया के पास एक खेत है जो एक समचतुर्भुज के आकार का है (देखिए आकृति 12.13)। वह अपनी एक पुत्री और एक पुत्र से यह चाहती थी कि वे इस खेत पर काम करके अलग-अलग फसलों (या उपजों) का उत्पादन करें। उसने इस खेत को दो बराबर भागों में विभाजित कर दिया। यदि इस खेत का परिमाप 400 m है और एक विकर्ण 160 m है, तो प्रत्येक को खेती के लिए कितना क्षेत्रफल प्राप्त होगा?

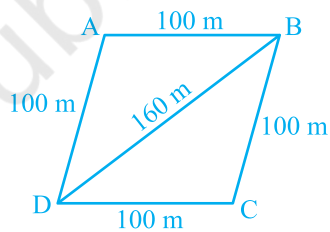
हल : मान लीजिए ABCD खेत है। इसका

परिमाप = 400 m

इसलिए, प्रत्येक भुजा = 400 m ÷ 4 = 100 m

अर्थात् AB = AD = 100 m

मान लीजिए विकर्ण BD = 160 m है। तब



आकृति 12.13

Δ ABD का अर्धपरिमाप

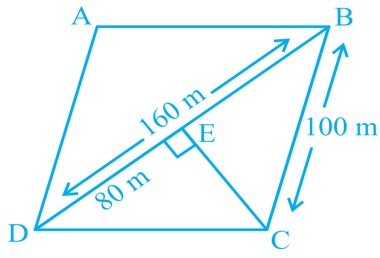
$$s = \frac{100 + 100 + 160}{2}\ \text{m} = 180\ \text{m}$$

अतः, Δ ABD का क्षेत्रफल $= \sqrt{180(180-100)(180-100)(180-160)}\ \text{m}^2$

$$= \sqrt{180 \times 80 \times 80 \times 20}\ \text{m}^2 = 4800\ \text{m}^2$$

इसलिए, प्रत्येक को खेती करने के लिए 4800 m^2 क्षेत्रफल प्राप्त होगा।

वैकल्पिक विधि : $CE \perp BD$ खींचिए (देखिए आकृति 12.14)।



आकृति 12.14

चूँकि BD = 160 है, इसलिए

DE = 160 m ÷ 2 m = 80 m

साथ ही, $DE^2 + CE^2 = DC^2$ है।

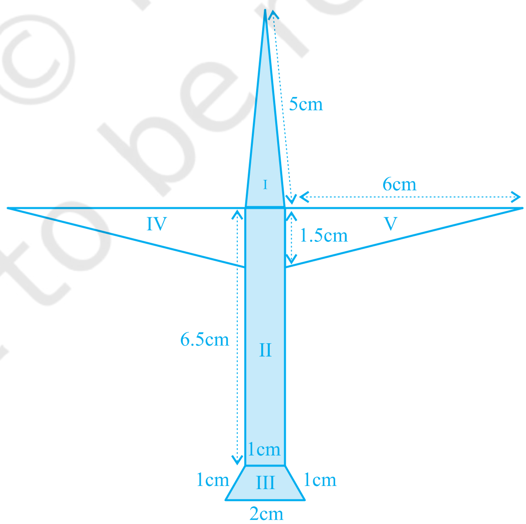
इसलिए, $CE = \sqrt{DC^2 - DE^2}$

अतः, $CE = \sqrt{100^2 - 80^2}\ m = 60\,m$

इसलिए, Δ BCD का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times 160 \times 60\ m^2 = 4800\ m^2$

प्रश्नावली 12.2

1. एक पार्क चतुर्भुज ABCD के आकार का है, जिसमें $\angle C = 90°$, AB = 9 m, BC = 12 m, CD = 5 m और AD = 8 m है। इस पार्क का कितना क्षेत्रफल है?
2. एक चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसमें AB = 3 cm, BC = 4 cm, CD = 4 cm, DA = 5 cm और AC = 5 cm है।
3. राधा ने एक रंगीन कागज से एक हवाईजहाज का चित्र बनाया, जैसा कि आकृति 12.15 में दिखाया गया है। प्रयोग किए गए कागज का कुल क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



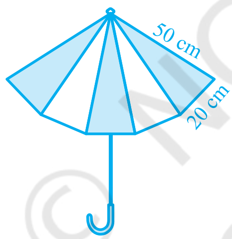
आकृति 12.15

4. एक त्रिभुज और एक समांतर चतुर्भुज का एक ही आधार है और क्षेत्रफल भी एक ही है। यदि त्रिभुज की भुजाएँ 26 cm, 28 cm और 30 cm हैं तथा समांतर चतुर्भुज 28 cm के आधार पर स्थित है, तो उसकी संगत ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

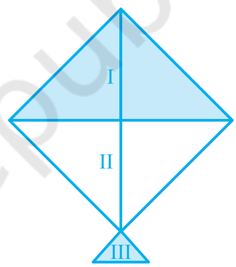
5. एक समचतुर्भुजाकार घास के खेत में 18 गायों के चरने के लिए घास है। यदि इस समचतुर्भुज की प्रत्येक भुजा 30 m है और बड़ा विकर्ण 48 m है, तो प्रत्येक गाय को चरने के लिए इस घास के खेत का कितना क्षेत्रफल प्राप्त होगा?

6. दो विभिन्न रंगों के कपड़ों के 10 त्रिभुजाकार टुकड़ों को सीकर एक छाता बनाया गया है (देखिए आकृति 12.16)। प्रत्येक टुकड़े के माप 20 cm, 50 cm और 50 cm हैं। छाते में प्रत्येक रंग का कितना कपड़ा लगा है?

7. एक पतंग तीन भिन्न-भिन्न शेडों (shades) के कागजों से बनी है। इन्हें आकृति 12.17 में I, II और III से दर्शाया गया है। पतंग का ऊपरी भाग 32 cm विकर्ण का एक वर्ग है और निचला भाग 6 cm, 6 cm और 8 cm भुजाओं का एक समद्विबाहु त्रिभुज है। ज्ञात कीजिए कि प्रत्येक शेड का कितना कागज प्रयुक्त किया गया है।



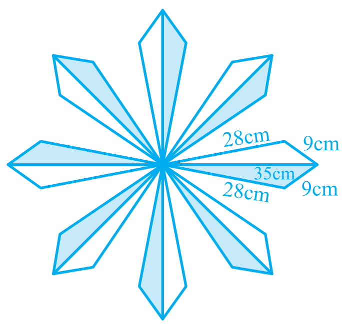
आकृति 12.16



आकृति 12.17

8. फर्श पर एक फूलों का डिज़ाइन 16 त्रिभुजाकार टाइलों से बनाया गया है, जिनमें से प्रत्येक की भुजाएँ 9 cm, 28 cm और 35 cm हैं (देखिए आकृति 12.18)। इन टाइलों को 50 पैसे प्रति cm^2 की दर से पालिश कराने का व्यय ज्ञात कीजिए।

9. एक खेत समलंब के आकार का है जिसकी समांतर भुजाएँ 25 m और 10 m हैं। इसकी असमांतर भुजाएँ 14 m और 13 m हैं। इस खेत का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



आकृति 12.18

12.4 सारांश

इस अध्याय में, आपने निम्नलिखित बिंदुओं का अध्ययन किया है :

1. यदि त्रिभुज की भुजाएँ a, b और c हों, तो हीरोन के सूत्र द्वारा त्रिभुज का क्षेत्रफल $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ होता है जहाँ $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ है।

2. एक चतुर्भुज जिसकी भुजाएँ तथा एक विकर्ण दिए हों, तो उसका क्षेत्रफल उसे दो त्रिभुजों में विभाजित करके और फिर हीरोन के सूत्र का प्रयोग करके ज्ञात किया जा सकता है।

0963CH13

अध्याय 13

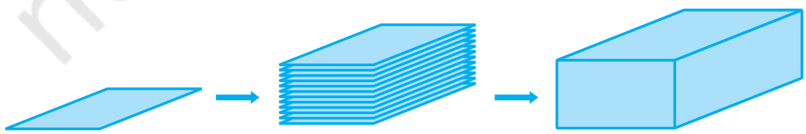
पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन

13.1 भूमिका

हम जिस ओर भी देखें, प्राय: हमें ठोस (solid) ही दिखाई देते हैं। अभी तक हम उन्हीं आकृतियों का अध्ययन करते आ रहे हैं, जिन्हें हम अपनी अभ्यासपुस्तिका अथवा श्यामपट्ट (blackboard) पर खींच सकते हैं। ये *समतल आकृतियाँ* (*plane figures*) कहलाती हैं। हम समझ गए हैं कि आयत, वर्ग, वृत्त इत्यादि क्या हैं, उनके परिमाप और क्षेत्रफलों का क्या तात्पर्य है तथा हम इन्हें किस प्रकार ज्ञात कर सकते हैं। हम इनके बारे में पिछली कक्षाओं में पढ़ चुके हैं। यह देखना रोचक होगा कि यदि हम एक ही आकार और एक ही माप की अनेक समतल आकृतियों को गत्ते में से काट कर एक के ऊपर एक रख कर एक ऊर्ध्वाधर ढेरी बनाएँ, तो क्या होता है। इस प्रक्रिया से, हम कुछ *ठोस आकृतियाँ* (*solid figures*) प्राप्त करेंगे (जिन्हे प्राय: ठोस कहा जाता है), जैसे कि एक घनाभ (cuboid), एक बेलन (cylinder), इत्यादि। पिछली कक्षाओं में, हम घनाभ, घन और बेलनों के पृष्ठीय क्षेत्रफलों और आयतनों को ज्ञात करना भी सीख चुके हैं। अब हम घनाभों और बेलनों के पृष्ठीय क्षेत्रफलों और आयतनों के बारे में विस्तार से अध्ययन करेंगे तथा इस अध्ययन को कुछ अन्य ठोसों, जैसे कि शंकु और गोले, के लिए विस्तृत करेंगे।

13.2 घनाभ और घन के पृष्ठीय क्षेत्रफल

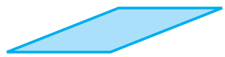
क्या आपने कागज के अनेक पन्नों (शीटों) के एक बंडल को देखा है? यह कैसा दिखता है? क्या यह ऐसा दिखाई देता है, जैसा कि आप आकृति 13.1 में देख रहे हैं?



आकृति 13.1

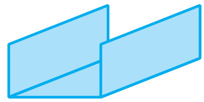
इससे घनाभ बनता है। यदि आप इस घनाभ को ढकना चाहते हैं, तो कितने रंगीन कागज की आवश्यकता पड़ेगी? आइए देखें!

पहले हमें इस बंडल के तल (bottom) को ढकने के लिए एक आयताकार टुकड़े की आवश्यकता होगी। यह आकृति 13.2 (a) जैसा होगा।



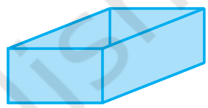
(a)

फिर हमें इधर-उधर के दो सिरों को ढकने के दो लंबे आयताकार टुकड़ों की आवश्यकता होगी। अब यह आकृति 13.2 (b) जैसा दिखाई देगा।



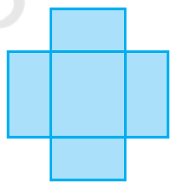
(b)

अब, सामने और पीछे के सिरों को ढकने के लिए, हमें एक भिन्न माप के दो और आयताकार टुकड़ों की आवश्यकता होगी। इनके साथ, हमें आकृति 13.2(c) जैसी आकृति प्राप्त होगी।



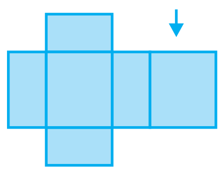
(c)

यह आकृति खोलने पर आकृति 13.2 (d) जैसी दिखाई देगी।



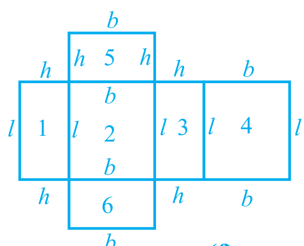
(d)

अंत में, बंडल के ऊपरी सिरे को ढकने के लिए, हमें एक अन्य आयताकार टुकड़े की आवश्यकता होगी, जो ठीक तल (आधार) के टुकड़े जैसा होगा, जिसे उपरोक्त आकृति में दाईं ओर लगाने पर, हमें आकृति 13.2(e) प्राप्त होगी।



(e)

इस प्रकार, घनाभ की ऊपरी पृष्ठ को पूर्णतया: ढकने के लिए, हमने छः आयताकार टुकड़ों का प्रयोग किया है।



(f)

आकृति 13.2

उपरोक्त चर्चा यह दर्शाती है कि एक घनाभ की बाहरी पृष्ठ छः आयतों (वास्तव में, आयताकार क्षेत्रों, जो घनाभ के फलक कहलाते हैं) से मिल कर बनी है, जिनमें से प्रत्येक का क्षेत्रफल उसकी लंबाई और चौड़ाई का गुणा करके प्राप्त किया जा सकता है और फिर सभी छः क्षेत्रफलों को जोड़ लिया जाता है।

अब, यदि हम घनाभ की लम्बाई l, चौड़ाई b और ऊँचाई h मान लें, तो इन विमाओं (dimensions) के साथ यह आकृति ऐसे आकार की दिखाई देगी, जैसी कि आकृति 13.2(f) में दर्शाई गई है।

अत: सभी छः आयतों के क्षेत्रफलों का योग निम्न है :

आयत 1 का क्षेत्रफल $(= l \times h)$

$+$

आयत 2 का क्षेत्रफल $(= l \times b)$

$+$

आयत 3 का क्षेत्रफल $(= l \times h)$

$+$

आयत 4 का क्षेत्रफल $(= l \times b)$

$+$

आयत 5 का क्षेत्रफल $(= b \times h)$

$+$

आयत 6 का क्षेत्रफल $(= b \times h)$

$$= 2(l \times b) + 2(b \times h) + 2(l \times h)$$

$$= 2(lb + bh + hl)$$

इससे हमें प्राप्त होता है :

$$\boxed{\textbf{घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल} = \mathbf{2(}\boldsymbol{lb + bh + hl}\mathbf{)}}$$

जहाँ l, b और h क्रमशः घनाभ के तीन किनारे (कोर) हैं।

टिप्पणी : क्षेत्रफल के मात्रक (unit) को वर्ग इकाई (वर्ग मात्रक) लिया जाता है, क्योंकि हम एक क्षेत्र के परिमाण को मापने के लिए उसे मात्रक (या इकाई) लम्बाई की भुजा वाले वर्गों से भरते हैं।

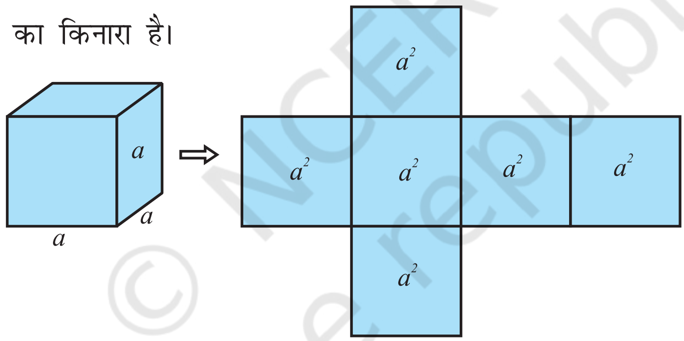
उदाहरण के तौर पर, यदि हमारे पास एक घनाभ जिसकी लंबाई, चौड़ाई तथा ऊँचाई क्रमशः 15 cm, 10 cm तथा 20 cm हों, तो इसका पृष्ठीय क्षेत्रफल होगाः

$$2[(15 \times 10) + (10 \times 20) + (20 \times 15)] \text{ cm}^2$$
$$= 2(150 + 200 + 300) \text{ cm}^2$$
$$= 2 \times 650 \text{ cm}^2$$
$$= 1300 \text{ cm}^2$$

याद कीजिए कि घनाभ जिसकी लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई बराबर हों एक *घन* (*cube*) कहलाता है। यदि घन का प्रत्येक किनारा या कोर (edge) या भुजा (side) a हो, तो उसका पृष्ठीय क्षेत्रफल $2(a \times a + a \times a + a \times a)$ अर्थात् $2\ (a^2 + a^2 + a^2)$, अर्थात् $6a^2$ होगा (देखिए आकृति 13.3), जिससे हमें प्राप्त होता है :

घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल = $6a^2$

जहाँ a घन का किनारा है।

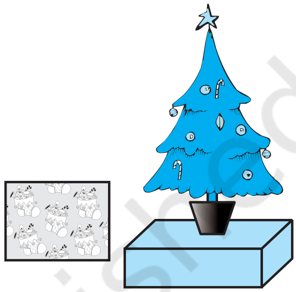


आकृति 13.3

मान लीजिए हम घनाभ के छः फलकों (faces) में से केवल चार फलकों के क्षेत्रफल, निचले और ऊपरी फलकों को छोड़कर, ज्ञात करें। ऐसी स्थिति में, इन चारों फलकों का क्षेत्रफल घनाभ का **पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल (lateral surface area)** कहलाता है। अतः, *एक घनाभ जिसकी लम्बाई* l, *चौड़ाई* b और ऊँचाई h *हो, तो उसका पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल* $2lh + 2bh$, *अर्थात्* $2(l + b)h$ होता है। इसी प्रकार, *किनारे* a *वाले एक घन का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल* $4a^2$ *होता है।* उपरोक्त को दृष्टिगत रखते हुए, घनाभ (या घन) के पृष्ठीय क्षेत्रफल को कभी-कभी **सम्पूर्ण** या **कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल (total surface area)** भी कहा जाता है। आइए कुछ उदाहरण हल करें।

उदाहरण 1 : मैरी अपने क्रिसमस वृक्ष को सजाना चाहती है। वह इस वृक्ष को लकड़ी के एक घनाभाकार बॉक्स (box) पर रखना चाहती है, जिसे सान्ता क्लॉज के चित्र के साथ एक रंगीन कागज़ से ढका जाना है (देखिए आकृति 13.4)। उसका यह जानना आवश्यक है कि उसे कितना कागज़ खरीदना चाहिए। यदि उपरोक्त बॉक्स की लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रमश: 80 cm, 40 cm और 20 cm हैं, तो उसे 40 cm भुजा वाली कागज की कितनी वर्गाकार शीटों की आवश्यकता होगी?

हल: चूँकि मैरी बॉक्स के ऊपरी पृष्ठ को कागज से ढकना चाहती है, इसलिए इस कार्य के लिए आवश्यक कागज़ इस बॉक्स के पृष्ठीय क्षेत्रफल के बराबर होगा, जो एक घनाभ के आकार का है।



आकृति 13.4

बॉक्स की लंबाई 80 cm, चौड़ाई 40 cm और ऊँचाई 20 cm है।

अत:, बॉक्स का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2(lb + bh + hl)$

$= 2[(80 \times 40) + (40 \times 20) + (20 \times 80)]\ \text{cm}^2$

$= 2[3200 + 800 + 1600]\ \text{cm}^2$

$= 2 \times 5600\ \text{cm}^2 = 11200\ \text{cm}^2$

अब, प्रत्येक शीट का क्षेत्रफल $= 40 \times 40\ \text{cm}^2 = 1600\ \text{cm}^2$

अत:, वांछित शीटों की संख्या $= \dfrac{\text{बक्स का पृष्ठीय क्षेत्रफल}}{\text{एक शीट का क्षेत्रफल}}$

$$= \frac{11200}{1600} = 7$$

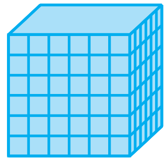
इसलिए मैरी को कागज़ की 7 शीटों की आवश्यकता है।

उदाहरण 2 : हमीद ने अपने घर के लिए, ढक्कन वाली एक घनाकार (cubical) पानी की टंकी बनवाई है, जिसका प्रत्येक बाहरी किनारा 1.5m लम्बा है। वह इस टंकी के बाहरी पृष्ठ पर, तली को छोड़ते हुए, 25 cm भुजा वाली वर्गाकार टाइलें (tiles) लगवाता है (देखिए आकृति 13.5)। यदि टाइलों की लागत ₹ 360 प्रति दर्जन है, तो उसे टाइल लगवाने में कितना व्यय करना पड़ेगा?

हल : हमीद पाँच बाहरी फलकों पर टाइलें लगवाता है। टाइलों की संख्या ज्ञात करने के लिए, इन पाँचों फलकों का क्षेत्रफल ज्ञात करना आवश्यक है।

अब, घनाकार टंकी का एक किनारा = 1.5 m = 150 cm

अतः, टंकी का पृष्ठीय क्षेत्रफल = $5 \times 150 \times 150\ \text{cm}^2$



आकृति 13.5

एक टाइल का क्षेत्रफल = भुजा × भुजा = $25 \times 25\ \text{cm}^2$

$$\text{अतः, टाइलों की वांछित संख्या} = \frac{\text{टंकी का पृष्ठीय क्षेत्रफल}}{\text{एक टाइल का क्षेत्रफल}}$$

$$= \frac{5 \times 150 \times 150}{25 \times 25} = 180$$

अब 1 दर्जन, अर्थात् 12 टाइलों की लागत = ₹360

$$\text{इसलिए, 1 टाइल की लागत} = ₹\frac{360}{12} = ₹30$$

अतः, 180 टाइलों की लागत = ₹180 × 30 = ₹5400

प्रश्नावली 13.1

1. 1.5 m लंबा, 1.25 m चौड़ा और 65 cm गहरा प्लास्टिक का एक डिब्बा बनाया जाना है। इसे ऊपर से खुला रखना है। प्लास्टिक शीट की मोटाई को नगण्य मानते हुए, निर्धारित कीजिए:
   (i) डिब्बा बनाने के लिए आवश्यक प्लास्टिक शीट का क्षेत्रफल।
   (ii) इस शीट का मूल्य, यदि 1 m^2 शीट का मूल्य ₹20 है।
2. एक कमरे की लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रमशः 5 m, 4 m और 3 m हैं। ₹7.50 प्रति m^2 की दर से इस कमरे की दीवारों और छत पर सफेदी कराने का व्यय ज्ञात कीजिए।
3. किसी आयताकार हॉल के फर्श का परिमाप 250 m है। यदि ₹10 प्रति m^2 की दर से चारों दीवारों पर पेंट कराने की लागत ₹15000 है, तो इस हॉल की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
   [**संकेत :** चारों डिब्बों का क्षेत्रफल = पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल]
4. किसी डिब्बे में भरा हुआ पेंट 9.375 m^2 के क्षेत्रफल पर पेंट करने के लिए पर्याप्त है। इस डिब्बे के पेंट से 22.5 cm × 10 cm × 7.5 cm विमाओं वाली कितनी ईंट पेंट की जा सकती हैं?

5. एक घनाकार डिब्बे का एक किनारा 10 cm लंबाई का है तथा एक अन्य घनाभाकार डिब्बे की लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रमशः 12.5 cm, 10 cm और 8 cm हैं।

(i) किस डिब्बे का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल अधिक है और कितना अधिक है?

(ii) किस डिब्बे का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल कम है और कितना कम है?

6. एक छोटा पौधा घर (green house) सम्पूर्ण रूप से शीशे की पट्टियों से (आधार भी सम्मिलित है) घर के अंदर ही बनाया गया है और शीशे की पट्टियों को टेप द्वारा चिपका कर रोका गया है। यह पौधा घर 30 cm लंबा, 25 cm चौड़ा और 25 cm ऊँचा है।

(i) इसमें प्रयुक्त शीशे की पट्टियों का क्षेत्रफल क्या है?

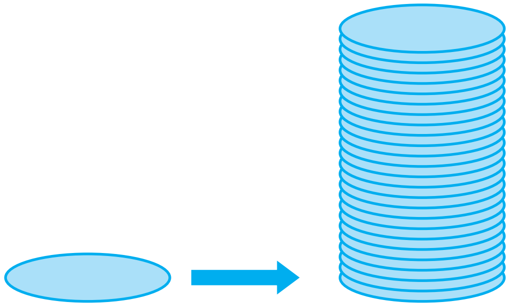
(ii) सभी 12 किनारों के लिए कितने टेप की आवश्यकता है?

7. शांति स्वीट स्टाल अपनी मिठाइयों को पैक करने के लिए गत्ते के डिब्बे बनाने का ऑर्डर दे रहा था। दो मापों के डिब्बों की आवश्यकता थी। बड़े डिब्बों की माप 25 cm × 20 cm × 5 cm और छोटे डिब्बों की माप 15 cm × 12 cm × 5 cm थीं। सभी प्रकार की अतिव्यापिकता (overlaps) के लिए कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल के 5% के बराबर अतिरिक्त गत्ता लगेगा। यदि गत्ते की लागत ₹ 4 प्रति 1000 cm^2 है, तो प्रत्येक प्रकार के 250 डिब्बे बनवाने की कितनी लागत आएगी?

8. परवीन अपनी कार खड़ी करने के लिए, एक संदूक के प्रकार के ढाँचे जैसा एक अस्थाई स्थान तिरपाल की सहायता से बनाना चाहती है, जो कार को चारों ओर से और ऊपर से ढक ले (सामने वाला फलक लटका हुआ होगा जिसे घुमाकर ऊपर किया जा सकता है)। यह मानते हुए कि सिलाई के समय लगा तिरपाल का अतिरिक्त कपड़ा नगण्य होगा, आधार विमाओं 4 मीटर × 3 मीटर और ऊँचाई 2.5 मीटर वाले इस ढाँचे को बनाने के लिए कितने तिरपाल की आवश्यकता होगी?

13.3 एक लंब वृत्तीय बेलन का पृष्ठीय क्षेत्रफल

यदि हम कागज की अनेक वृत्ताकार शीट लें और उन्हें उसी प्रकार एक के ऊपर एक रखकर एक उर्ध्वाधर ढेरी बनाएँ जैसी पहले आयताकार कागज की शीटों से बनाई थी, तो हमें क्या प्राप्त होगा (देखिए आकृति 13.6)?

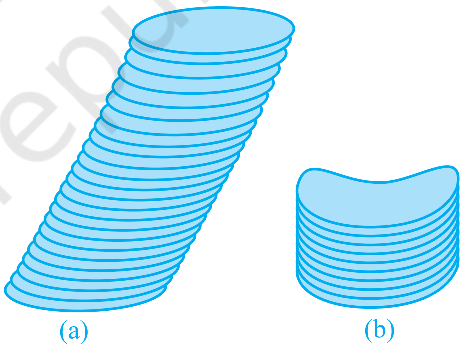


आकृति 13.6

यदि हम इस ढेरी को सीधा ऊर्ध्वाधर रखते हैं, तो जो हमें प्राप्त होगा वह एक *लम्ब वृत्तीय बेलन (right circular cylinder)* कहलाता है। इसका कारण यह है कि इसका आधार वृत्ताकार है और ढेरी को आधार से लाम्बिक रूप (समकोण बनाते हुए) से रखा गया है। आइए देखें कि किस प्रकार का बेलन लम्ब वृत्तीय बेलन *नहीं* होता है।

आकृति 13.7 (a) में, आप एक बेलन को देख रहे हैं, जो निश्चित रूप से वृत्ताकार है, परंतु आधार से समकोण पर नहीं है। इसलिए, हम इसे लम्ब वृत्तीय बेलन नहीं कह सकते।

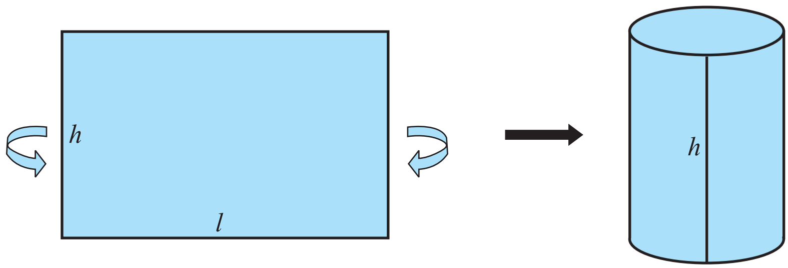
नि:संदेह, यदि बेलन का आधार वृत्तीय न हो, जैसा कि आप आकृति 13.7 (b) में देख रहे हैं, तो भी हम इसे लंब वृत्तीय बेलन नहीं कह सकते हैं।



आकृति 13.7

टिप्पणी : यहाँ हम केवल लंब वृत्तीय बेलनों का ही अध्ययन करेंगे। अत:, जब तक अन्यथा न कहा जाए, 'बेलन' से हमारा तात्पर्य लंब वृत्तीय बेलन से होगा।

अब, यदि किसी बेलन को एक रंगीन कागज से ढकना हो, तो हम कागज की न्यूनतम मात्रा से इसे कैसे करेंगे? पहले कागज की एक आयताकार शीट ऐसी लीजिए जिसकी लंबाई ऐसी हो कि कागज बेलन के चारों ओर बस एक बार घूम जाए और उसकी चौड़ाई बेलन की ऊँचाई के बराबर हो, जैसा कि आकृति 13.8 में दर्शाया गया है।



आकृति 13.8

इस शीट का क्षेत्रफल हमें बेलन के वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल देगा। ध्यान दीजिए कि शीट की लंबाई वृत्तीय आधार की परिधि के बराबर है, जो $2\pi r$ है।

अतः, बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = आयताकार शीट का क्षेत्रफल = लंबाई × चौड़ाई

= बेलन के आधार का परिमाप × ऊँचाई

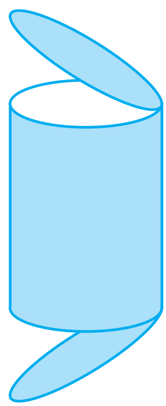
$= 2\pi r \times h$

इसलिए, **बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2\pi rh$**

जहाँ r बेलन के आधार की त्रिज्या है और h उसकी ऊँचाई है।

टिप्पणी : बेलन की स्थिति में, जब तक अन्यथा न कहा जाए, 'बेलन की त्रिज्या' से हमारा तात्पर्य उसके आधार की त्रिज्या से होगा।

यदि बेलन के ऊपरी और निचले सिरों को भी ढकना हो, तो हमें दो वृत्तों (वास्तव में वृत्ताकार क्षेत्रों) की और आवश्यकता पड़ेगी, जिनमें से प्रत्येक की त्रिज्या r होगी और क्षेत्रफल πr^2 होगा (देखिए आकृति 13.9)। तब इससे हमें बेलन का संपूर्ण या कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(r + h)$ प्राप्त होगा।



आकृति 13.9

इसलिए, **बेलन का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2\pi r(r + h)$**

जहाँ r और h बेलन की क्रमशः त्रिज्या और ऊँचाई हैं।

टिप्पणी : आपको अध्याय 1 से यह याद होगा कि π एक अपरिमेय संख्या है। इसलिए, π

का एक असांत और अनावर्ती दशमलव निरूपण होता है। परन्तु जब हम इसका मान अपने परिकलनों में प्रयोग करते हैं, तो प्राय: हम यह मान लगभग $\frac{22}{7}$ या 3.14 के बराबर लेते हैं।

उदाहरण 3 : सावित्री को अपने विज्ञान के प्रोजेक्ट के लिए एक बेलनाकार केलिडोस्कोप (kaleidoscope) का मॉडल बनाना था। वह इस केलिडोस्कोप की वक्र पृष्ठ बनाने के लिए चार्ट कागज़ (chart paper) का प्रयोग करना चाहती थी (देखिए आकृति 13.10)। यदि वह 25 cm लम्बाई और 3.5 cm त्रिज्या का केलिडोस्कोप बनाना चाहती है, तो उसे चार्ट कागज के कितने क्षेत्रफल की आवश्यकता होगी? $\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए

हल : बेलनाकार केलिडोस्कोप की त्रिज्या $(r) = 3.5$ cm

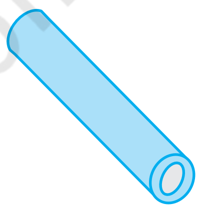
केलिडोस्कोप की ऊँचाई (लंबाई) $(h) = 25$ cm

अत:, आवश्यक चार्ट कागज़ का क्षेत्रफल = बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

$$= 2\pi rh$$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 25 \text{ cm}^2$$

$$= 550 \text{ cm}^2$$



आकृति 13.10

प्रश्नावली 13.2

जब तक अन्यथा न कहा जाए, $\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए।

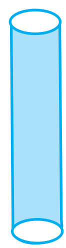
1. ऊँचाई 14 cm वाले एक लम्ब वृत्तीय बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल 88 cm^2 है। बेलन के आधार का व्यास ज्ञात कीजिए।
2. धातु की एक चादर से 1 m ऊँची और 140 cm व्यास के आधार वाली एक बंद बेलनाकार टंकी बनाई जानी है। इस कार्य के लिए कितने वर्ग मीटर चादर की आवश्यकता होगी?
3. धातु का एक पाइप 77 cm लम्बा है। इसके एक अनुप्रस्थकाट का आंतरिक व्यास 4 cm है और बाहरी व्यास 4.4 cm है (देखिए आकृति 13.11)।

   ज्ञात कीजिए :

   (i) आंतरिक वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

   (ii) बाहरी वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

   (iii) कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल



आकृति 13.11

4. एक रोलर (roller) का व्यास 84 cm है और लंबाई 120 cm है। एक खेल के मैदान को एक बार समतल करने के लिए 500 चक्कर लगाने पड़ते हैं। खेल के मैदान का m^2 में क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

5. किसी बेलनाकार स्तंभ का व्यास 50 cm है और ऊँचाई 3.5 m है। ₹12.50 प्रति m^2 की दर से इस स्तंभ के वक्र पृष्ठ पर पेंट कराने का व्यय ज्ञात कीजिए।

6. एक लंब वृत्तीय बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल 4.4 m^2 है। यदि बेलन के आधार की त्रिज्या 0.7 m है, तो उसकी ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

7. किसी वृत्ताकार कुएँ का आंतरिक व्यास 3.5 m है और यह 10 m गहरा है। ज्ञात कीजिए:

   (i) आंतरिक वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल।

   (ii) ₹40 प्रति m^2 की दर से इसके वक्र पृष्ठ पर प्लास्टर कराने का व्यय।

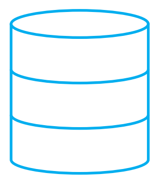
8. गरम पानी द्वारा गरम रखने वाले एक संयत्र में 28 m लंबाई और 5 cm व्यास वाला एक बेलनाकार पाइप है। इस संयत्र में गर्मी देने वाला कुल कितना पृष्ठ है?

9. ज्ञात कीजिए :

   (i) एक बेलनाकार पेट्रोल की बंद टंकी का पार्श्व या वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल, जिसका व्यास 4.2 m है और ऊँचाई 4.5 m है।

   (ii) इस टंकी को बनाने में कुल कितना इस्पात (steel) लगा होगा, यदि कुल इस्पात का $\frac{1}{12}$ भाग बनाने में नष्ट हो गया है?

10. आकृति 13.12 में, आप एक लैंपशेड का फ्रेम देख रहे हैं। इसे एक सजावटी कपड़े से ढका जाना है। इस फ्रेम के आधार का व्यास 20 cm है और ऊँचाई 30 cm है। फ्रेम के ऊपर और नीचे मोड़ने के लिए दोनों ओर 2.5 cm अतिरिक्त कपड़ा भी छोड़ा जाना है। ज्ञात कीजिए कि लैंपशेड को ढकने के लिए कुल कितने कपड़े की आवश्यकता होगी।



आकृति 13.12

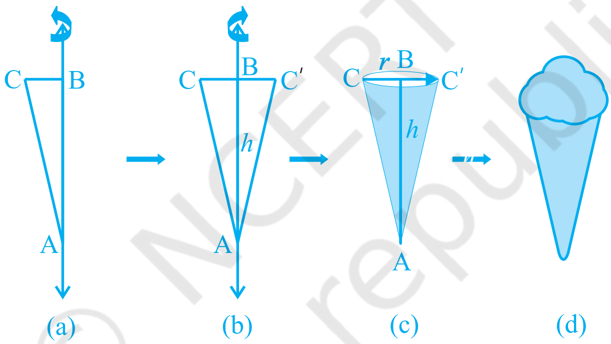
11. किसी विद्यालय के विद्यार्थियों से एक आधार वाले बेलनाकार कलमदानों को गत्ते से बनाने और सजाने की प्रतियोगिता में भाग लेने के लिए कहा गया। प्रत्येक कलमदान को 3 cm त्रिज्या और 10.5 cm ऊँचाई का होना था। विद्यालय को इसके लिए प्रतिभागियों को गत्ता देना था। यदि इसमें 35 प्रतिभागी थे, तो विद्यालय को कितना गत्ता खरीदना पड़ा होगा?

13.4 एक लंब वृत्तीय शंकु का पृष्ठीय क्षेत्रफल

अभी तक हम सर्वांगसम आकृतियों को एक के ऊपर एक रख कर ठोस जनित कर रहे थे।

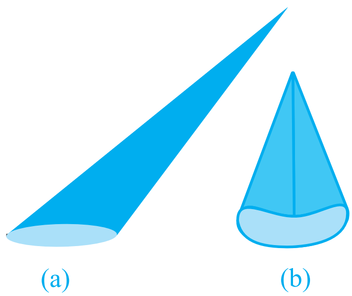
संयोग से इन आकृतियों को *प्रिज्म* (*prism*) कहते हैं। अब एक अन्य प्रकार के ठोसों को देखें जो प्रिज्म नहीं हैं। (इस प्रकार के ठोस पिरामिड (pyramids) कहलाते हैं।) आइए देखें कि इनको किस प्रकार जनित किया (बनाया) जाता है।

क्रियाकलाप : एक समकोण त्रिभुज ABC जिसका कोण B समकोण हो, काट लीजिए। दोनों लंब भुजाओं में से किसी एक, मान लीजिए AB, के अनुदिश एक लंबी और मोटी डोरी चिपका दीजिए [देखिए आकृति 13.13(a)]। डोरी को दोनों हाथों से त्रिभुज के दोनों ओर से पकड़े हुए, त्रिभुज को डोरी के अनुदिश कई बार घुमाइए। आप क्या देखते हैं? जब त्रिभुज डोरी के अनुदिश घूम रहा है, तो जो वह आकृति बना रहा है, क्या आप उसे पहचानते हैं [देखिए आकृति 13.13(b)]? क्या आपको इस बात की याद दिलाती है कि इसी आकार के एक छोटे बर्तन (पात्र) में भरी आपने कभी आइसक्रीम खाई थी [देखिए आकृति 13.13 (c) और (d)]?



आकृति 13.13

यह आकृति एक *लंब वृत्तीय शंकु* (*right circular cone*) कहलाती है। आकृति 13.13(c) में बिन्दु A इस लम्ब वृत्तीय शंकु का *शीर्ष* (*vertex*) कहलाता है, AB इसकी *ऊँचाई* कहलाती है और BC आधार की *त्रिज्या* कहलाती है। AC इस शंकु की *तिर्यक ऊँचाई* (*slant height*) कहलाती है। यहाँ B वृत्तीय आधार का केंद्र (centre) है। शंकु की ऊँचाई, त्रिज्या और तिर्यक ऊँचाई को प्रायः क्रमशः h, r और l से व्यक्त किया जाता है। एक बार पुनः देखें कि किस प्रकार के शंकु को हम लंब वृत्तीय शंकु *नहीं* कह सकते हैं। आप आकृति 13.14 को देखिए। इनमें जो आप



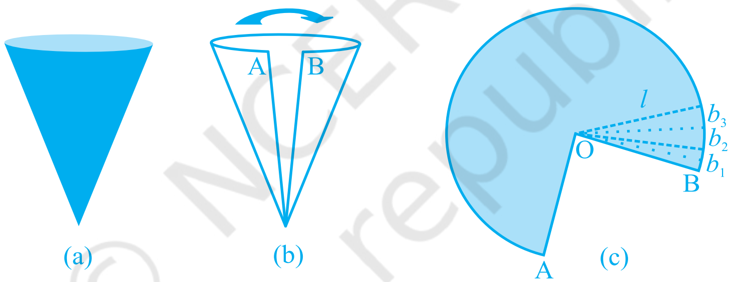
आकृति 13.14

शंकु देख रहे हैं वे लंब वृत्तीय शंकु नहीं हैं। (a) में, शीर्ष को आधार के केंद्र से मिलाने वाली रेखा आधार पर लंब नहीं है और (b) में, आधार वृत्तीय नहीं है।

जैसा कि बेलन की स्थिति में था, जब तक अन्यथा न कहा जाए, 'शंकु' से हमारा तात्पर्य लंब वृत्तीय 'शंकु' से ही होगा।

क्रियाकलाप : (i) एक साफ बने हुए कागज़ के शंकु को उसके शीर्ष से जाने वाली किसी भुजा या किनारे के अनुदिश काटिए जिसमें कोई अतिव्यापिकता न हो तथा खोल कर देखिए कि किस आकार के कागज़ से शंकु का पृष्ठ बना था। (जिस भुजा या किनारे के अनुदिश आप शंकु को काटेंगे वह उसकी *तिर्यक ऊँचाई* होगी जिसे l से व्यक्त किया जाता है।) खोला हुआ कागज़ आपको एक गोल केक के भाग की तरह दिखाई देगा।

(ii) यदि आप उन भुजाओं, जिनके सिरों पर A और B अंकित है, को मोड़ कर मिला लें, तो आप देखेंगे कि आकृति 13.15 (c) का वक्रित भाग शंकु का वृत्तीय आधार बनाता है।



आकृति 13.15

(iii) यदि आकृति 13.15 (c) में दिए कागज़ को O से जाती हुई रेखाओं द्वारा सैकड़ों छोटे-छोटे टुकड़ों में विभाजित कर लिया जाए, तो ये कटे हुए भाग लगभग त्रिभुज के आकारों के हैं और इनमें से प्रत्येक की ऊँचाई शंकु की तिर्यक ऊँचाई l के बराबर है।

(iv) अब प्रत्येक त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ प्रत्येक त्रिभुज का आधार $\times\, l$

अतः, पूरे कागज़ का क्षेत्रफल

= सभी त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का योग

$$= \frac{1}{2}b_1 l + \frac{1}{2}b_2 l + \frac{1}{2}b_3 l + \cdots = \frac{1}{2}l\,(b_1 + b_2 + b_3 + \cdots)$$

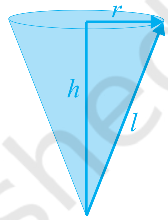
$= \frac{1}{2} \times l \times$ [आकृति 13.15(c) की पूरी वक्रित परिसीमा की लंबाई]

(चूँकि $b_1 + b_2 + b_3 + \ldots$ मिलकर इस आकृति के वक्रित भाग को बनाते हैं)

परन्तु इस वक्रित भाग से शंकु का आधार बनता है।

साथ ही, इस आधार की परिधि = $2\pi r$, जहाँ r आधार की त्रिज्या है।

इसलिए, $\boxed{\textbf{शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times l \times 2\pi r = \pi r l}$



आकृति 13.16

जहाँ r आधार की त्रिज्या है और l तिर्यक ऊँचाई हैं।

ध्यान दीजिए कि $l^2 = r^2 + h^2$ होता है, जिसे हम आकृति 13.16 से देख सकते हैं (पाइथागोरस प्रमेय से)। यहाँ h शंकु की ऊँचाई है।

अत:, $l = \sqrt{r^2 + h^2}$ होगा।

अब यदि शंकु के आधार को बंद रखा जाता है, तो ढकने के लिए r त्रिज्या वाले एक वृत्ताकार कागज के टुकड़े की आवश्यकता और होगी। इसका क्षेत्रफल स्पष्टत: πr^2 है।

इसलिए, $\boxed{\textbf{शंकु का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल} = \pi r l + \pi r^2 = \pi r(l + r)}$

उदाहरण 4 : एक लंब वृत्तीय शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसकी तिर्यक ऊँचाई 10 cm है और आधार की त्रिज्या 7 cm है।

हल : वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = $\pi r l$

$$= \frac{22}{7} \times 7 \times 10 \text{ cm}^2$$

$$= 220 \text{ cm}^2$$

उदाहरण 5 : एक शंकु की ऊँचाई 16 cm है और आधार की त्रिज्या 12 cm है। इस शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$ का प्रयोग कीजिए)

हल : यहाँ, $h = 16$ cm और $r = 12$cm है।

इसलिए, $l^2 = h^2 + r^2$ से हमें प्राप्त होता है :

$$l = \sqrt{16^2 + 12^2} \text{ cm} = 20 \text{ cm}$$

अतः, वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi rl$

$$= 3.14 \times 12 \times 20 \text{ cm}^2$$

$$= 753.6 \text{ cm}^2$$

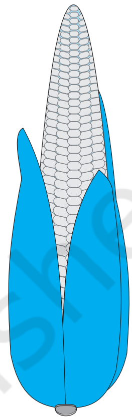
साथ ही, कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi rl + \pi r^2$

$$= (753.6 + 3.14 \times 12 \times 12) \text{ cm}^2$$

$$= (753.6 + 452.16) \text{ cm}^2$$

$$= 1205.76 \text{ cm}^2$$

उदाहरण 6 : एक भुट्टा कुछ-कुछ शंकु जैसे आकार का है (देखिए आकृति 13.17) जिसके सबसे चौड़े सिरे की त्रिज्या 2.1 cm है और इसकी लम्बाई (ऊँचाई) 20 cm है। यदि भुट्टे के प्रत्येक 1 cm^2 पृष्ठ पर औसतन चार दानें हों, तो ज्ञात कीजिए कि पूरे भुट्टे पर कुल कितने दानें होंगे?.



आकृति 13.17

हल : चूँकि भुट्टे के दानें उसके वक्र पृष्ठ पर ही होते हैं, इसलिए हमें दानों की संख्या ज्ञात करने के लिए भुट्टे के वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल को ज्ञात करना होगा। यहाँ हमें शंकु की ऊँचाई दी है। इसलिए, हमें पहले शंकु की तिर्यक ऊँचाई ज्ञात करनी पड़ेगी।

अब, $l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{(2.1)^2 + 20^2}$ cm

$$= \sqrt{404.41} \text{ cm} = 20.11 \text{ cm}$$

अतः, भुट्टे का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi rl$

$$= \frac{22}{7} \times 2.1 \times 20.11 \text{ cm}^2 = 132.726 \text{ cm}^2 = 132.73 \text{ cm}^2 \text{ (लगभग)}$$

अतः 1 cm^2 क्षेत्रफल पर दानों की संख्या = 4

इसलिए, पूरे भुट्टे पर कुल दानों की संख्या $= 132.73 \times 4 = 530.92 = 531$ (लगभग)
अतः, इस भुट्टे पर लगभग 531 दानें होंगे।

प्रश्नावली 13.3

जब तक अन्यथा न कहा जाए, $\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए।

1. एक शंकु के आधार का व्यास 10.5 cm है और इसकी तिर्यक ऊँचाई 10 cm है। इसका वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

2. एक शंकु का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसकी तिर्यक ऊँचाई 21 m है और आधार का व्यास 24 m है।

3. एक शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल 308 cm^2 है और इसकी तिर्यक ऊँचाई 14 cm है। ज्ञात कीजिए :

(i) आधार की त्रिज्या (ii) शंकु का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल

4. शंकु के आकार का एक तंबू 10 m ऊँचा है और उसके आधार की त्रिज्या 24 m है। ज्ञात कीजिए :

(i) तंबू की तिर्यक ऊँचाई

(ii) तंबू में लगे केनवास (canvas) की लागत, यदि 1 m^2 केनवास की लागत 70 रुपए है।

5. 8 m ऊँचाई और आधार की त्रिज्या 6 m वाले एक शंकु के आकार का तंबू बनाने में 3 m चौड़े तिरपाल की कितनी लंबाई लगेगी? यह मान कर चलिए कि इसकी सिलाई और कटाई में 20 cm तिरपाल अतिरिक्त लगेगा। ($\pi = 3.14$ का प्रयोग कीजिए।)

6. शंकु के आधार की एक गुंबज की तिर्यक ऊँचाई और आधार व्यास क्रमशः 25 m और 14 m हैं। इसकी वक्र पृष्ठ पर ₹ 210 प्रति 100 m^2 की दर से सफेदी कराने का व्यय ज्ञात कीजिए।

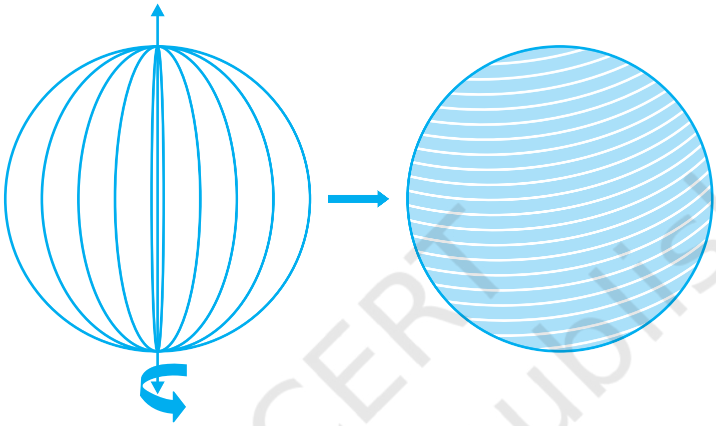
7. एक जोकर की टोपी एक शंकु के आकार की है, जिसके आधार की त्रिज्या 7 cm और ऊँचाई 24 cm है। इसी प्रकार की 10 टोपियाँ बनाने के लिए आवश्यक गत्ते का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

8. किसी बस स्टाप को पुराने गत्ते से बने 50 खोखले शंकुओं द्वारा सड़क से अलग किया हुआ है। प्रत्येक शंकु के आधार का व्यास 40 cm है और ऊँचाई 1 m है। यदि इन शंकुओं की बाहरी पृष्ठों को पेंट करवाना है और पेंट की दर ₹ 12 प्रति m^2 है, तो इनको पेंट कराने में कितनी लागत आएगी? ($\pi = 3.14$ और $\sqrt{1.04} = 1.02$ का प्रयोग कीजिए।)

13.5 गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल

एक गोला (sphere) क्या होता है? क्या यह एक वृत्त की तरह ही है? क्या आप एक कागज पर वृत्त खींच सकते हैं? हाँ, आप खींच सकते हैं, क्योंकि यह एक बंद समतल आकृति है

जिसका प्रत्येक बिंदु एक निश्चित बिंदु (जिसे वृत्त का केंद्र कहते हैं) से एक निश्चित दूरी पर रहता है (जिसे वृत्त की *त्रिज्या* कहते हैं)। अब यदि आप एक वृत्ताकार चकती (disc) के एक व्यास के अनुदिश एक डोरी चिपका दें और इसे वैसे ही घुमाएँ जैसे आपने पिछले अनुच्छेद में त्रिभुज को घुमाया था, तो आप एक नया ठोस देखेंगे (देखिए आकृति 13.18)। यह किस वस्तु से मिलता-जुलता लगता है? एक गेंद? हाँ, ऐसा ही है। यह एक **गोला (sphere)** कहलाता है।



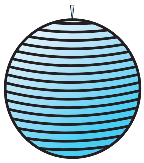
आकृति 13.18

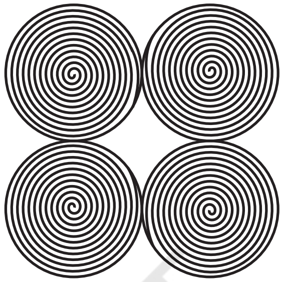
क्या आप अनुमान लगा सकते हैं कि उस वृत्त के केंद्र का क्या होता है जिसे आपने घुमाया है। निःसंदेह, यह गोले का केंद्र भी हो जाता है। इस प्रकार, *गोला एक त्रिविमीय आकृति (three dimensional figure) (ठोस आकृति) है, जो आकाश (स्पेस) (space) में स्थित उन सभी बिंदुओं से मिल कर बनी है जो एक निश्चित बिंदु से (जो गोले का केन्द्र कहलाता है) से एक* ***अचर*** *या निश्चित दूरी पर होते हैं (जो गोले की* ***त्रिज्या*** *कहलाती है)।*

टिप्पणी : गोला एक गेंद की पृष्ठ की तरह होता है। *ठोस गोला* उस ठोस के लिए प्रयोग होता है जिसका पृष्ठ एक गोला हो।

क्रियाकलाप : क्या आप कभी लट्टू के साथ खेले हैं या कभी आपने किसी व्यक्ति को लट्टू के साथ खेलते देखा है? आप यह जानते होंगे कि उस पर डोरी किस प्रकार लपेटी जाती है। अब आइए एक रबर की गेंद लें और उसके ऊपर एक कील लगा दें। कील की सहायता लेते हुए, गेंद पर डोरी लपेटना प्रारम्भ कर दीजिए। जब आप ऐसा कर रहे हों, तो डोरी को थामे रखने के लिए, बीच-बीच में पिन लगाते रहिए और डोरी लपेटना तब तक जारी रखिए जब तक कि पूरी गेंद पर डोरी न लिपट जाए [देखिए आकृति 13.19(a)]। डोरी पर प्रारम्भिक और अंतिम बिंदु अंकित कर लीजिए और धीरे-धीरे गेंद से डोरी को हटा

लीजिए। अब अपने शिक्षक से गेंद का व्यास मापने के लिए सहायता देने के लिए कहिए। इससे आपको गेंद की त्रिज्या ज्ञात हो जाएगी। इसके बाद, कागज पर गेंद की त्रिज्या के बराबर चार वृत्त खींच लीजिए। अब जो डोरी आपने गेंद पर लपेटी थी उसी को एक-एक करके इन वृत्तों पर रखकर वृत्तों को भरिए [देखिए आकृति 13.19(b)]।


(a)


(b)

आकृति 13.19

इन सबसे आपको क्या प्राप्त होता है?

वह डोरी जिसने एक गोले के पृष्ठ को पूरा-पूरा ढक दिया था अब उसी गोले की त्रिज्या वाले चार वृत्तों के क्षेत्रों को भर रही है। इसका क्या अर्थ हुआ? इससे यह सुझाव मिलता है कि त्रिज्या r वाले एक गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल

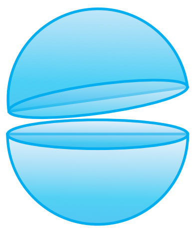
$$= \text{त्रिज्या } r \text{ वाले चार वृत्तों का क्षेत्रफल} = 4 \times (\pi r^2)$$

इसलिए, **गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल = $4 \pi r^2$**

जहाँ r गोले की त्रिज्या है।

गोले के पृष्ठ पर आप कितने फलक देखते हैं? केवल एक। यह वक्रीय है।

आइए एक ठोस गोला लें और इसे बीच से इसके केंद्र से जाते हुए एक तल द्वारा दो भागों में काट लें। गोले का क्या होता है? यह दो बराबर भागों में विभाजित हो गया है (देखिए आकृति 13.20)। प्रत्येक आधा भाग क्या कहलाता है यह एक **अर्धगोला (hemisphere)** कहलाता है (क्योंकि hemi का अर्थ आधा है।)।



आकृति 13.20

अर्धगोले के पृष्ठ के बारे में आप क्या कह सकते हैं? इसके कितने फलक हैं? दो!, इनमें एक वक्रीय है और एक समतल फलक है (आधार)।

अर्धगोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल गोले के पृष्ठीय क्षेत्रफल का आधा, अर्थात् $\frac{1}{2} \times 4\pi r^2$ है।

अतः, **अर्धगोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2\pi r^2$**

जहाँ r उस गोले की त्रिज्या है जिसका अर्धगोला एक भाग है।

अब दोनों फलकों को लेने पर, इसका कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2\pi r^2 + \pi r^2$ है।

अतः, **अर्धगोले का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = $3\pi r^2$**

उदाहरण 7 : 7 cm त्रिज्या वाले एक गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : 7 cm त्रिज्या वाले गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल

$$= 4\pi r^2 = 4 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \text{ cm}^2 = 616 \text{ cm}^2$$

उदाहरण 8 : त्रिज्या 21 cm वाले एक अर्धगोले के लिए, ज्ञात कीजिए:

(i) वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल (ii) कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल

हल : (i) त्रिज्या 21 cm वाले अर्धगोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

$$= 2\pi r^2 = 2 \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 \text{ cm}^2 = 2772 \text{ cm}^2$$

(ii) अर्धगोले का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल

$$= 3\pi r^2 = 3 \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 \text{ cm}^2 = 4158 \text{ cm}^2$$

उदाहरण 9 : सर्कस का एक मोटरसाइकिल सवार जिस खोखले गोले के अंदर अपने करतब (खेल) दिखाता है उसका व्यास 7 m है। मोटरसाइकिल सवार के पास ये करतब दिखाने के लिए कितना क्षेत्रफल उपलब्ध है?

हल : गोले का व्यास = 7 m है। इसलिए त्रिज्या 3.5m हुई। अब, करतब दिखाने के लिए,

मोटरसाइकिल सवार को उपलब्ध स्थान इस गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल है।

$$\text{गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल} = 4\pi r^2 = 4 \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 3.5 \text{ m}^2 = 154 \text{ m}^2$$

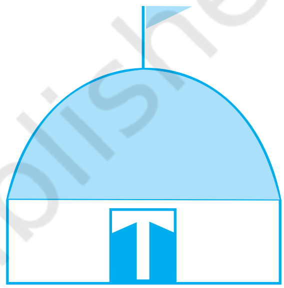
उदाहरण 10 : किसी भवन का ऊपरी भाग अर्धगोलाकार है और इस पर पेंट किया जाना है (देखिए आकृति 13.21)। यदि इस अर्धगोले के आधार की परिधि 17.6 m है, तो ₹5 प्रति 100 cm^2 की दर से इसे पेंट कराने का व्यय ज्ञात कीजिए।

हल : चूँकि केवल गोलाकार पृष्ठ पर ही पेंट होगा, इसलिए हमें अर्धगोले के वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल को ज्ञात करने की आवश्यकता है।

अब, आधार की परिधि = 17.6 m है।

इसलिए, $2\pi r = 17.6$

अर्थात्, $r = \frac{17.6 \times 7}{2 \times 22}$ m = 2.8 m



आकृति 13.21

इसलिए, भवन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2\pi r^2$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 2.8 \times 2.8 \text{ m}^2$$

$$= 49.28 \text{ m}^2$$

अब, 100 cm^2 पेंटिंग की लागत = ₹5

इसलिए, 1 m^2 पेंटिंग की लागत = ₹500

अतः, 49.28 m^2 पेंटिंग की लागत = ₹500 × 49.28 = ₹24640

प्रश्नावली 13.4

जब तक अन्यथा न कहा जाए, $\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए।

1. निम्न त्रिज्या वाले गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए :

(i) 10.5 cm (ii) 5.6 cm (iii) 14 cm

2. निम्न व्यास वाले गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए :

(i) 14 cm (ii) 21 cm (iii) 3.5 m

3. 10 cm त्रिज्या वाले एक अर्धगोले का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$ लीजिए।)

4. एक गोलाकार गुब्बारे में हवा भरने पर, उसकी त्रिज्या 7 cm से 14 cm हो जाती है। इन दोनों स्थितियों में, गुब्बारे के पृष्ठीय क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

5. पीतल से बने एक अर्धगोलाकार कटोरे का आंतरिक व्यास 10.5 cm है। ₹16 प्रति 100 cm^2 की दर से इसके आंतरिक पृष्ठ पर कलई कराने का व्यय ज्ञात कीजिए।

6. उस गोले की त्रिज्या ज्ञात कीजिए जिसका पृष्ठीय क्षेत्रफल 154 cm^2 है।

7. चन्द्रमा का व्यास पृथ्वी के व्यास का लगभग एक-चौथाई है। इन दोनों के पृष्ठीय क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

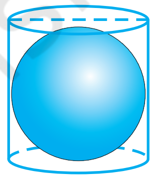
8. एक अर्धगोलाकार कटोरा 0.25 cm मोटी स्टील से बना है। इस कटोरे की आंतरिक त्रिज्या 5 cm है। कटोरे का बाहरी वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

9. एक लंब वृत्तीय बेलन त्रिज्या r वाले एक गोले को पूर्णतया घेरे हुए है (देखिए आकृति 13.22)। ज्ञात कीजिए:

(i) गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल

(ii) बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

(iii) ऊपर (i) और (ii) में प्राप्त क्षेत्रफलों का अनुपात



आकृति 13.22

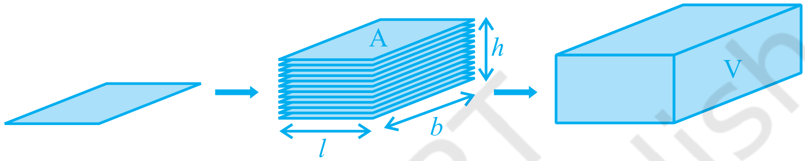
13.6 घनाभ का आयतन

आप पिछली कक्षाओं में, कुछ आकृतियों (वस्तुओं) के आयतनों (volumes) के बारे में पहले ही पढ़ चुके हैं। आपको याद होगा कि ठोस वस्तुएँ स्थान घेरती हैं। इस घेरे गए स्थान के माप को उस वस्तु का **आयतन** कहते हैं।

टिप्पणी : यदि कोई वस्तु ठोस है, तो उस वस्तु द्वारा घेरे गए स्थान को मापा जा सकता है और उस माप को वस्तु का **आयतन** कहा जाता है। दूसरी ओर, यदि वस्तु खोखली है, तो उसका अभ्यंतर (interior) रिक्त होता है, जिसे हवा या द्रव से भरा जा सकता है। यह द्रव उस वस्तु (बर्तन) के आकार का हो जाता है। इस स्थिति में, बर्तन के अभ्यंतर में (अंदर) जितनी वस्तु (या द्रव) भरा जाता है वह उसकी *धारिता* (*capacity*) कहलाती है। दूसरे शब्दों में, किसी वस्तु का आयतन उस वस्तु द्वारा घेरे गए स्थान की माप है और किसी वस्तु की धारिता उस वस्तु के अभ्यंतर में भरे जा सकने वाले द्रव (या अन्य वस्तु) का आयतन है। इसलिए इन दोनों के ही मात्रक **घन मात्रक** (cubic units) हैं।

इसलिए यदि हम घनाभ के आयतन की बात करेंगे, तो उसका अर्थ उस घनाभ द्वारा घेरे गए स्थान के माप से होगा।

साथ ही, क्षेत्रफल अथवा आयतन को एक क्षेत्र (region) के परिमाण के रूप में मापा जाता है। इसलिए, यदि सही तौर पर कहा जाए, तो हम वृत्तीय क्षेत्र का क्षेत्रफल या एक घनाभाकार क्षेत्र का आयतन या एक गोलाकार क्षेत्र का आयतन, इत्यादि ही ज्ञात कर रहे होते हैं। परन्तु सरलता के लिए, प्रायः हम यह कहा करते हैं कि वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए या एक घनाभ का आयतन ज्ञात कीजिए या एक गोले का आयतन कीजिए, इत्यादि। ये केवल इन क्षेत्रों की परिसीमाएँ ही हैं।



आकृति 13.23

आकृति 13.23 को देखिए। मान लीजिए, हम कहते हैं कि प्रत्येक आयत का क्षेत्रफल A है, जिस ऊँचाई तक आयतों का ढेर लगाया गया है वह h है और घनाभ का आयतन V है। क्या आप बता सकते हैं कि V, A और h के बीच में क्या संबंध होगा?

प्रत्येक आयत द्वारा घेरे गए क्षेत्र का क्षेत्रफल × ऊँचाई

= उस घनाभ द्वारा घेरे गए क्षेत्र का आयतन (माप)

इसलिए, हमें $A \times h = V$ प्राप्त होता है।

अतः, **घनाभ का आयतन = आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई = लम्बाई × चौड़ाई × ऊँचाई**

$= l \times b \times h$

जहाँ l, b और h क्रमशः घनाभ की लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई हैं।

टिप्पणी : जब हम त्रिविमीय आकाश (space) में घेरे गए क्षेत्र के परिमाण को मापते हैं, अर्थात् ठोस द्वारा घेरे गए क्षेत्र (स्थान) को मापते हैं, तो हम ऐसा उस क्षेत्र में मात्रक लंबाई के घनों की वह संख्या गिनके करते हैं जो उसमें पूर्णतया समाए जा सकते हैं। अतः, आयतन का मात्रक (या घन इकाई) ही लिया जाता है।

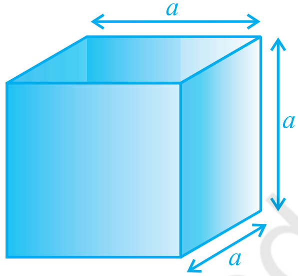
साथ ही, $\boxed{\textbf{घन का आयतन} = \textbf{किनारा} \times \textbf{किनारा} \times \textbf{किनारा} = a^3}$

जहाँ a घन का किनारा है (देखिए आकृति 13.24)।

इसलिए, यदि एक घन का किनारा 12 cm है, तो

उसका आयतन = $12 \times 12 \times 12$ cm^3 = 1728 cm^3

याद कीजिए कि आप इन सूत्रों के बारे में पिछली कक्षाओं में पढ़ चुके हैं। आइए इनके प्रयोग को स्पष्ट करने के लिए कुछ उदाहरण लें।



आकृति 13.24

उदाहरण 11 : एक खुले मैदान में 10 m लंबी एक दीवार का निर्माण किया जाना था। दीवार की ऊँचाई 4 m है और उसकी मोटाई 24 cm है। यदि इस दीवार को 24 cm × 12 cm × 8 cm विमाओं वाली ईंटों से बनाया जाना है, तो इसके लिए कितनी ईंटों की आवश्यकता होगी?

हल : चूँकि दीवार द्वारा घेरा गया स्थान सभी ईंटों द्वारा घेरे गए स्थान के बराबर होगा, इसलिए आइए दीवार का आयतन ज्ञात करें, जो एक घनाभ है।

यहाँ, लंबाई = 10 m = 1000 cm,

मोटाई = 24 cm

और ऊँचाई = 4 m = 400 cm

अतः, दीवार का आयतन = लंबाई × मोटाई × ऊँचाई

$= 1000 \times 24 \times 400$ cm^3

अब प्रत्येक ईंट विमाओं 24 cm × 12 cm × 8 cm का एक घनाभ है।

इसलिए, एक ईंट का आयतन = लंबाई × चौड़ाई × ऊँचाई

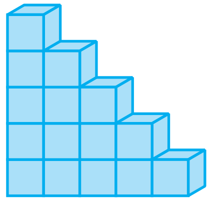
$= 24 \times 12 \times 8$ cm^3

अतः, वाँछित ईंटों की संख्या $= \dfrac{\text{दीवार का आयतन}}{\text{एक ईंट का आयतन}}$

$$= \frac{1000 \times 24 \times 400}{24 \times 12 \times 8} = 4166.6$$

इसलिए, दीवार बनाने में 4167 ईंटें लगेंगी।

उदाहरण 12 : एक बच्चा भवन ब्लॉकों से खेल रहा है, जो एक घन के आकार के हैं। उसने इनसे आकृति 13.25 में दर्शाए अनुसार एक ढाँचा बना लिया है। प्रत्येक घन का किनारा 3 cm है। उस बच्चे द्वारा बनाए गए ढाँचे का आयतन ज्ञात कीजिए।



आकृति 13.25

हल : प्रत्येक घन का आयतन = किनारा × किनारा × किनारा

$= 3 \times 3 \times 3 \text{ cm}^3 = 27 \text{ cm}^3$

ढाँचे में घनों की संख्या = 15

अत:, ढाँचे का आयतन $= 27 \times 15 \text{ cm}^3 = 405 \text{ cm}^3$

प्रश्नावली 13.5

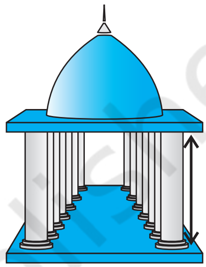
1. माचिस की डिब्बी के माप $4 \text{ cm} \times 2.5 \text{ cm} \times 1.5 \text{ cm}$ हैं। ऐसी 12 डिब्बियों के एक पैकेट का आयतन क्या होगा?
2. एक घनाभाकार पानी की टंकी 6 m लंबी, 5 m चौड़ी और 4.5 m गहरी है। इसमें कितने लीटर पानी आ सकता है?
   ($1 \text{ m}^3 = 1000 \, l$)
3. एक घनाभाकार बर्तन 10 m लंबा और 8 m चौड़ा है। इसको कितना ऊँचा बनाया जाए कि इसमें 380 घन मीटर द्रव आ सके?
4. 8 m लंबा, 6 m चौड़ा और 3 m गहरा एक घनाभाकार गढ्ढा खुदवाने में 30 रुपए प्रति m^3 की दर से होने वाला व्यय ज्ञात कीजिए।
5. एक घनाभाकार टंकी की धारिता 50000 लीटर पानी की है। यदि इस टंकी की लंबाई और गहराई क्रमश: 2.5 m और 10 m हैं, तो इसकी चौड़ाई ज्ञात कीजिए।
6. एक गाँव जिसकी जनसंख्या 4000 है, को प्रतिदिन प्रति व्यक्ति 150 लीटर पानी की आवश्यकता है। इस गाँव में $20 \text{ m} \times 15 \text{ m} \times 6 \text{ m}$ मापों वाली एक टंकी बनी हुई है। इस टंकी का पानी वहाँ कितने दिन के लिए पर्याप्त होगा?
7. किसी गोदाम की माप $40 \text{ m} \times 25 \text{ m} \times 15 \text{ m}$ हैं। इस गोदाम में $1.5 \text{ m} \times 1.25 \text{ m} \times 0.5 \text{ m}$ की माप वाले लकड़ी के कितने अधिकतम क्रेट (crate) रखे जा सकते हैं?
8. 12 cm भुजा वाले एक ठोस घन को बराबर आयतन वाले 8 घनों में काटा जाता है। नए घन की क्या भुजा होगी? साथ ही, इन दोनों घनों के पृष्ठीय क्षेत्रफलों का अनुपात भी ज्ञात कीजिए।
9. 3 m गहरी और 40 m चौड़ी एक नदी 2 km प्रति घंटा की चाल से बह कर समुद्र में गिरती है। एक मिनट में समुद्र में कितना पानी गिरेगा?

13.7 बेलन का आयतन

हम देख चुके हैं कि जैसे समान मापों के आयतों को एक के ऊपर एक रखकर घनाभ बनाया जाता है, उसी प्रकार समान मापों के वृत्तों को एक के ऊपर एक रखकर एक बेलन बनाया जा सकता है। इसलिए, उसी तर्क द्वारा जो हमने घनाभ के लिए दिया था, हम कह सकते हैं कि बेलन का आयतन, आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई होता है। अर्थात् यह आयतन वृत्तीय आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई = $\pi r^2 h$ है।

इसलिए, **बेलन का आयतन = $\pi r^2 h$**

जहाँ r आधार की त्रिज्या और h बेलन की ऊँचाई है।



आकृति 13.26

उदाहरण 13 : किसी मंदिर के खंभे बेलनाकार हैं (देखिए आकृति 13.26)। यदि प्रत्येक खंभे का आधार 20 cm त्रिज्या का एक वृत्तीय क्षेत्र है और ऊँचाई 10 m है, तो ऐसे 14 खंभे बनाने में कितने कंक्रीट मिश्रण की आवश्यकता होगी?

हल : चूँकि कंक्रीट मिश्रण जिससे खंभा बनाया जाएगा उस पूरे खंभे के स्थान को भर देगा, इसलिए हमें बेलनों के आयतनों को ज्ञात करने की आवश्यकता है।

बेलन के आधार की त्रिज्या = 20 cm

बेलनाकार खंभे की ऊँचाई = 10 m = 1000 cm

इसलिए, एक खंभे का आयतन = $\pi r^2 h$

$$= \frac{22}{7} \times 20 \times 20 \times 1000 \text{ cm}^3$$

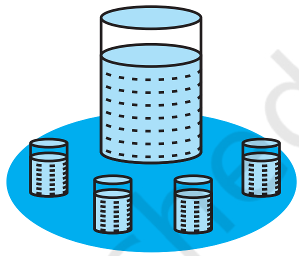
$$= \frac{8800000}{7} \text{ cm}^3$$

$$= \frac{8.8}{7} \text{ m}^3 \; (1000000 \text{ cm}^3 = 1\text{m}^3)$$

अतः, 14 खंभों का आयतन $= \frac{8.8}{7} \times 14 \text{ m}^3$

$= 17.6 \text{ m}^3$

इसलिए, 14 खंभों के लिए 17.6 m^3 कंक्रीट मिश्रण की आवश्यकता होगी।



आकृति 13.27

उदाहरण 14 : रमजान के एक मेले में, भोज्य पदार्थों के एक स्टॉल पर दुकानदार के पास आधार त्रिज्या 15 cm वाला एक बर्तन था जो 32 cm की ऊँचाई तक संतरे के जूस से भरा हुआ था। जूस को 3 cm त्रिज्या वाले बेलनाकार गिलासों में 8 cm ऊँचाई तक भर कर ₹ 3 प्रति गिलास की दर से बेचा जाता है (देखिए आकृति 13.27)। जूस को पूरा बेचने पर दुकानदार को कुल कितनी राशि प्राप्त हुई?

हल : बड़े बर्तन में जूस का आयतन = बेलनाकार बर्तन का आयतन

$= \pi R^2 H$

(जहाँ R और H क्रमशः बर्तन की त्रिज्या और ऊँचाई हैं)

$= \pi \times 15 \times 15 \times 32 \text{ cm}^3$

इसी प्रकार, एक गिलास जूस का आयतन $= \pi r^2 h$

(जहाँ r और h क्रमशः गिलास की त्रिज्या और ऊँचाई हैं)

$= \pi \times 3 \times 3 \times 8 \text{ cm}^3$

इसलिए, जूस के बेचे गए गिलासों की संख्या

$$= \frac{\text{बर्तन का आयतन}}{\text{एक गिलास का आयतन}}$$

$$= \frac{\pi \times 15 \times 15 \times 32}{\pi \times 3 \times 3 \times 8}$$

$$= 100$$

अतः, दुकानदार द्वारा प्राप्त की गई राशि = ₹3 × 100

= ₹300

प्रश्नावली 13.6

जब तक अन्यथा न कहा जाए, $\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए।

1. एक बेलनाकार बर्तन के आधार की परिधि 132 cm और उसकी ऊँचाई 25 cm है। इस बर्तन में कितने लीटर पानी आ सकता है? ($1000 \text{ cm}^3 = 1$ लीटर)

2. लकड़ी के एक बेलनाकार पाइप का आंतरिक व्यास 24 cm है और बाहरी व्यास 28 cm है। इस पाइप की लंबाई 35cm है। इस पाइप का द्रव्यमान ज्ञात कीजिए, यदि 1 cm^3 लकड़ी का द्रव्यमान 0.6 ग्राम है।

3. एक सोफ्ट ड्रिंक (soft drink) दो प्रकार के पैकों में उपलब्ध है :– (i) लंबाई 5 cm और चौड़ाई 4 cm वाले एक आयताकार आधार का टिन का डिब्बा जिसकी ऊँचाई 15 cm है और (ii) व्यास 7 cm वाले वृत्तीय आधार और 10 cm ऊँचाई वाला एक प्लास्टिक का बेलनाकार डिब्बा। किस डिब्बे की धारिता अधिक है और कितनी अधिक है?

4. यदि एक बेलन का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल 94.2 cm^2 है और उसकी ऊँचाई 5 cm है, तो ज्ञात कीजिए :

(i) आधार की त्रिज्या (ii) बेलन का आयतन ($\pi = 3.14$ लीजिए)

5. 10 m गहरे एक बेलनाकार बर्तन की आंतरिक वक्र पृष्ठ को पेंट कराने का व्यय ₹ 2200 है। यदि पेंट कराने की दर ₹ 20 प्रति m^2 है, तो ज्ञात कीजिए :

(i) बर्तन का आंतरिक वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

(ii) आधार की त्रिज्या

(iii) बर्तन की धारिता

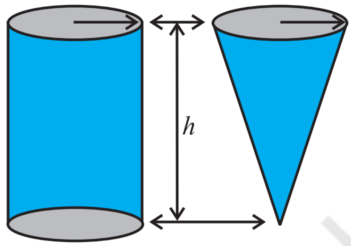
6. ऊँचाई 1 m वाले एक बेलनाकार बर्तन की धारिता 15.4 लीटर है। इसको बनाने के लिए कितने वर्ग मीटर धातु की शीट की आवश्यकता होगी?

7. सीसे की एक पेंसिल (lead pencil) लकड़ी के एक बेलन के अभ्यंतर में ग्रेफाइट (graphite) से बने ठोस बेलन को डाल कर बनाई गई है। पेंसिल का व्यास 7 mm है और ग्रेफाइट का व्यास 1 mm है। यदि पेंसिल की लंबाई 14 cm है, तो लकड़ी का आयतन और ग्रेफाइट का आयतन ज्ञात कीजिए।

8. एक अस्पताल (hospital) के एक रोगी को प्रतिदिन 7 cm व्यास वाले एक बेलनाकार कटोरे में सूप (soup) दिया जाता है। यदि यह कटोरा सूप से 4 cm ऊँचाई तक भरा जाता है, तो इस अस्पताल में 250 रोगियों के लिए प्रतिदिन कितना सूप तैयार किया जाता है?

13.8 लम्ब वृत्तीय शंकु का आयतन

आकृति 13.28 में, आप देखते हैं कि इसमें एक ही आधार त्रिज्या वाले और एक ही ऊँचाई वाले बेलन और शंकु दिए हुए हैं।



आकृति 13.28

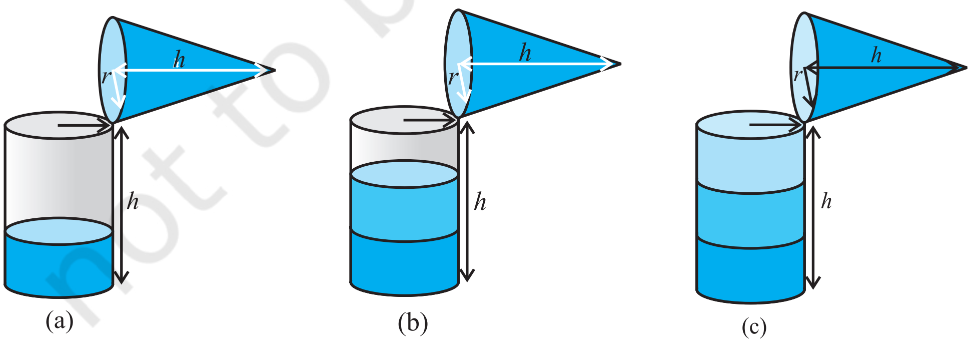
क्रियाकलाप : उपरोक्त आकृतियों की ही तरह, एक ही आधार त्रिज्या और एक ही ऊँचाई वाला एक खोखला बेलन और एक खोखला शंकु बनाने का प्रयत्न कीजिए (देखिए आकृति 13.28)। फिर हम एक प्रयोग द्वारा यह ज्ञात करेंगे कि एक शंकु का आयतन क्या है।

आइए इस प्रयोग को प्रारम्भ करें।

शंकु को रेत से एक बार ऊपर तक भरिए और इस रेत को बेलन में डाल दीजिए। हम देखते हैं कि इससे बेलन का कुछ भाग भर गया है [देखिए आकृति 13.29 (a)]।

फिर हम दुबारा शंकु को रेत से भर कर बेलन में रेत को डाल देते हैं। हम देखते हैं कि बेलन अभी भी पूरा नहीं भरा है [देखिए आकृति 13.29(b)]।

अब शंकु को तीसरी बार रेत से भर कर बेलन में डालिए। हम देखते हैं कि बेलन पूरा रेत से भर गया है [देखिए आकृति 13.29(c)]।



आकृति 13.29

इस प्रयोग से, हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि तीन शंकुओं का आयतन बेलन के आयतन के बराबर है। इसका अर्थ है कि यदि शंकु और बेलन की आधार त्रिज्या एक ही हो और ऊँचाई भी एक ही हो, तो शंकु का आयतन बेलन के आयतन का एक-तिहाई होता है।

अतः, $\boxed{\textbf{शंकु का आयतन} = \frac{1}{3}\pi r^2 h}$

जहाँ r आधार त्रिज्या है और h शंकु की ऊँचाई है।

उदाहरण 15 : किसी शंकु की ऊँचाई और तिर्यक ऊँचाई क्रमशः 21 cm और 28 cm हैं। इसका आयतन ज्ञात कीजिए।

हल : $l^2 = r^2 + h^2$ से हमें प्राप्त होता है :

$$r = \sqrt{l^2 - h^2} = \sqrt{28^2 - 21^2}\text{ cm} = 7\sqrt{7}\text{ cm}$$

अतः, शंकु का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7\sqrt{7} \times 7\sqrt{7} \times 21\ \text{cm}^3$

$= 7546\ \text{cm}^3$

उदाहरण 16 : मोनिका के पास केनवास का एक टुकड़ा है जिसका क्षेत्रफल 551 m^2 है। वह इससे 7 m आधार त्रिज्या वाला एक शंकु का आपतन का तंबू बनवाती है। यह मानते हुए कि सिलाई और कटाई में लगभग 1 m^2 केनवास नष्ट हुआ होगा, इससे बनाए जाने वाले शंकु का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल : केनवास का क्षेत्रफल = 551 m^2 है और 1 m^2 केनवास सिलाई, इत्यादि में नष्ट हो जाता है।

अतः, तंबू के लिए उपलब्ध केनवास $= (551 - 1)\ \text{m}^2 = 550\ \text{m}^2$

इसलिए, तंबू का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 550\ \text{m}^2$

अब, तंबू के आधार की त्रिज्या = 7 m

ध्यान दीजिए कि तंबू की केवल वक्र पृष्ठ ही होती है (तंबू के फर्श को ढका नहीं जाता है)।

अतः, तंबू का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 550\ \text{m}^2$

अर्थात्, $\pi rl = 550$

या, $\frac{22}{7} \times 7 \times l = 550$

या, $l = \frac{550}{22}$ m = 25 m

अब, $l^2 = r^2 + h^2$

इसलिए, $h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{25^2 - 7^2}$ m $= \sqrt{625 - 49}$ m $= \sqrt{576}$ m

= 24 m

अत:, तंबू का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 24 \text{ m}^3 = 1232 \text{ m}^3$

प्रश्नावली 13.7

जब तक अन्यथा न कहा जाए, $\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए।

1. उस लंब वृत्तीय शंकु का आयतन ज्ञात कीजिए, जिसकी
(i) त्रिज्या 6 cm और ऊँचाई 7 cm है। (ii) त्रिज्या 3.5 cm और ऊँचाई 12 cm है।

2. शंकु के आकार के उस बर्तन की लीटरों में धारिता ज्ञात कीजिए जिसकी
(i) त्रिज्या 7 cm और तिर्यक ऊँचाई 25 cm है।
(ii) ऊँचाई 12 cm और तिर्यक ऊँचाई 13 cm है।

3. एक शंकु की ऊँचाई 15 cm है। यदि इसका आयतन 1570 cm^3 है, तो इसके आधार की त्रिज्या ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$ प्रयोग कीजिए।)

4. यदि 9 cm ऊँचाई वाले एक लंब वृत्तीय शंकु का आयतन $48\pi \text{ cm}^3$ है, तो इसके आधार का व्यास ज्ञात कीजिए।

5. ऊपरी व्यास 3.5 m वाले शंकु के आकार का एक गढ्ढा 12 m गहरा है। इसकी धारिता किलोलीटरों में कितनी है?

6. एक लंब वृत्तीय शंकु का आयतन 9856 cm^3 है। यदि इसके आधार का व्यास 28 cm है, तो ज्ञात कीजिए :
(i) शंकु की ऊँचाई (ii) शंकु की तिर्यक ऊँचाई
(iii) शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

7. भुजाओं 5 cm, 12 cm और 13 cm वाले एक समकोण त्रिभुज ABC को भुजा 12 cm के परित घुमाया जाता है। इस प्रकार प्राप्त ठोस का आयतन ज्ञात कीजिए।

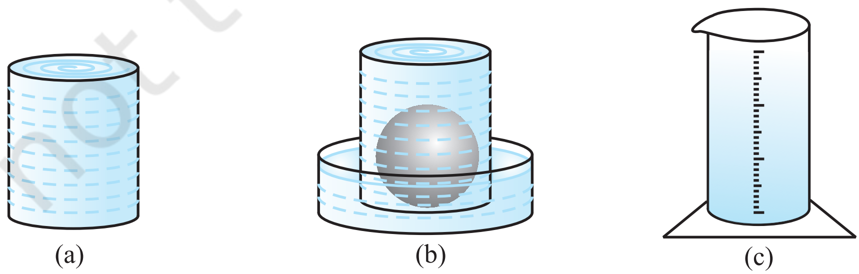
8. यदि प्रश्न 7 के त्रिभुज ABC को यदि भुजा 5 cm के परित घुमाया जाए, तो इस प्रकार प्राप्त ठोस का आयतन ज्ञात कीजिए। प्रश्नों 7 और 8 में प्राप्त किए गए दोनों ठोसों के आयतनों का अनुपात भी ज्ञात कीजिए।

9. गेहूँ की एक ढेरी 10.5 m व्यास और ऊँचाई 3 m वाले एक शंकु के आकार की है। इसका आयतन ज्ञात कीजिए। इस ढेरी को वर्षा से बचाने के लिए केनवास से ढका जाना है। वाँछित केनवास का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

13.9 गोले का आयतन

आइए अब देखें कि एक गोले का आयतन कैसे मापा जाए। पहले विभिन्न त्रिज्याओं वाले दो या तीन गोले लीजिए। फिर एक बर्तन लीजिए, जिसके अंदर इन गोलों को (केवल एक बार में एक) रखा जा सके। साथ ही, एक बड़ी नाँद (trough) लीजिए जिसमें इस बर्तन को रखा जा सके। अब बर्तन को पूरा ऊपर तक पानी से भरिए [देखिए आकृति 13.30(a)]।

अब लिए गए गोलों में से एक को बर्तन में सावधानीपूर्वक डालिए। बर्तन में से कुछ पानी बाहर निकल कर उस नाँद में जाएगा जिसमें वह बर्तन रखा हुआ है [देखिए आकृति 13.30(b)]। अब नाँद में आए इस पानी को सावधानीपूर्वक एक नापने वाले बेलन [अर्थात् अशांकित बेलनाकार गिलास (graduated cylindrical jar)] में डालिए। मान लीजिए पानी में डुबाए गए गोले की त्रिज्या r है (आप गोले का व्यास माप कर उसकी त्रिज्या ज्ञात कर सकते हैं)। अब $\frac{4}{3}\pi r^3$ का मान निकालिए। क्या आप यह पाते हैं कि यह मान बर्तन से बाहर निकले पानी के आयतन के लगभग बराबर है?



आकृति 13.30

एक बार फिर इसी प्रक्रिया को एक अन्य माप का गोला लेकर दोहराइए। इस गोले की त्रिज्या R ज्ञात करके $\frac{4}{3}\pi R^3$ का मान निकालिए। एक बार फिर यह मान बर्तन से बाहर निकले पानी के आयतन के लगभग बराबर है। यह हमें क्या बताता है? हम जानते हैं कि गोले का आयतन उसके द्वारा हटाए गए पानी के आयतन के बराबर है। इस प्रयोग को बार-बार करने पर, हम प्राप्त करते हैं कि एक गोले का आयतन गोले की त्रिज्या के घन का $\frac{4}{3}\pi$ गुना है। इससे हमें निम्न सुझाव प्राप्त होता है :

गोले का आयतन = $\frac{4}{3}\pi r^3$

जहाँ r गोले की त्रिज्या है।

उच्चतर कक्षाओं में इसे सिद्ध भी किया जा सकता है। परन्तु इस समय तो हम इसे सत्य मान लेते हैं।

अब अर्धगोले के आयतन के बारे में आप क्या अनुमान लगा सकते हैं? हाँ, यह $\frac{4}{3}\pi r^3$ का $\frac{1}{2} = \frac{2}{3}\pi r^3$ है।

अतः, अर्धगोले का आयतन = $\frac{2}{3}\pi r^3$

जहाँ r अर्धगोले की त्रिज्या है।

आइए इन सूत्रों का प्रयोग दर्शाने के लिए कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 17 : 11.2 cm त्रिज्या वाले गोले का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल : वाँछित आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 11.2 \times 11.2 \times 11.2 \ \text{cm}^3 = 5887.32 \ \text{cm}^3$$

उदाहरण 18 : एक शॉट-पट्ट (shot-putt) 4.9 cm त्रिज्या वाला एक धातु का गोला है। यदि इस धातु का घनत्व (density) 7.8 ग्राम प्रति cm^3 है, तो शॉट-पट्ट का द्रव्यमान ज्ञात कीजिए।

हल : चूँकि शॉट-पट्ट (shot-putt) धातु का एक ठोस गोला है तथा द्रव्यमान आयतन और घनत्व के गुणनफल के बराबर होता है, इसलिए पहले हमें शॉट-पट्ट का आयतन ज्ञात करना चाहिए।

अब, गोले का आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 4.9 \times 4.9 \times 4.9 \text{ cm}^3$$

$= 493 \text{ cm}^3$ (लगभग)

साथ ही, 1 cm^3 धातु का द्रव्यमान = 7.8 ग्राम

अत:, शॉट-पट्ट का द्रव्यमान = 7.8 × 493 ग्राम

= 3845.44 ग्राम = 3.85 किलोग्राम (लगभग)

उदाहरण 19 : एक अर्धगोलाकार कटोरे की त्रिज्या 3.5 cm है। इसके अंदर भरे जा सकने वाले पानी का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल : कटोरे में भरे जा सकने वाले पानी का आयतन

$$= \frac{2}{3}\pi r^3$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 3.5 \times 3.5 \text{ cm}^3 = 89.8 \text{ cm}^3$$

प्रश्नावली 13.8

जब अन्यथा न कहा जाए, $\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए।

1. उस गोले का आयतन ज्ञात कीजिए जिसकी त्रिज्या निम्न है :

(i) 7 cm (ii) 0.63 m

2. उस ठोस गोलाकार गेंद द्वारा हटाए गए (विस्थापित) पानी का आयतन ज्ञात कीजिए, जिसका व्यास निम्न है :

(i) 28 cm (ii) 0.21 m

3. धातु की एक गेंद का व्यास 4.2 cm है। यदि इस धातु का घनत्व 8.9 ग्राम प्रति cm^3 है, तो इस गेंद का द्रव्यमान ज्ञात कीजिए।

4. चंद्रमा का व्यास पृथ्वी के व्यास का लगभग एक-चौथाई है। चंद्रमा का आयतन पृथ्वी के आयतन की कौन-सी भिन्न है?

5. व्यास 10.5 cm वाले एक अर्धगोलाकार कटोरे में कितने लीटर दूध आ सकता है?

6. एक अर्धगोलाकार टंकी 1 cm मोटी एक लोहे की चादर (sheet) से बनी है। यदि इसकी आंतरिक त्रिज्या 1 m है, तो इस टंकी के बनाने में लगे लोहे का आयतन ज्ञात कीजिए।

7. उस गोले का आयतन ज्ञात कीजिए जिसका पृष्ठीय क्षेत्रफल 154 cm^2 है।

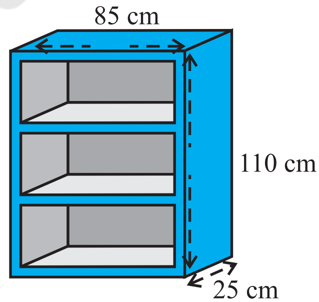
8. किसी भवन का गुंबद एक अर्धगोले के आकार का है। अंदर से, इसमें सफेदी कराने में ₹498.96 व्यय हुए। यदि सफेदी कराने की दर ₹2 प्रति वर्ग मीटर है, तो ज्ञात कीजिए:
(i) गुंबद का आंतरिक वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल (ii) गुंबद के अंदर की हवा का आयतन

9. लोहे के सत्ताइस ठोस गोलों को पिघलाकर, जिनमें से प्रत्येक की त्रिज्या r है और पृष्ठीय क्षेत्रफल S है, एक बड़ा गोला बनाया जाता है जिसका पृष्ठीय क्षेत्रफल S′ है। ज्ञात कीजिए:
(i) नए गोले की त्रिज्या r' (ii) S और S′ का अनुपात

10. दवाई का एक कैपसूल (capsule) 3.5 mm व्यास का एक गोला (गोली) है। इस कैपसूल को भरने के लिए कितनी दवाई (mm^3 में) की आवश्यकता होगी?

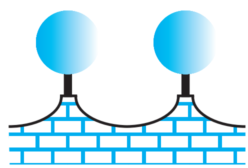
प्रश्नावली 13.9 (ऐच्छिक)*

1. एक लकड़ी के बुकशैल्फ (book-shelf) की बाहरी विमाएँ निम्न हैं:
ऊँचाई = 110 cm, गहराई = 25 cm, चौड़ाई = 85 cm (देखिए आकृति 13.31)। प्रत्येक स्थान पर तख्तों की मोटाई 5 cm है। इसके बाहरी फलकों पर पालिश कराई जाती है और आंतरिक फलकों पर पेंट किया जाना है। यदि पालिश कराने की दर 20 पैसे प्रति cm^2 है और पेंट कराने की दर 10 पैसे प्रति cm^2 है, तो इस बुक-शैल्फ पर पालिश और पेंट कराने का कुल व्यय ज्ञात कीजिए।



आकृति 13.31

2. किसी घर के कंपाउंड की सामने की दीवार को 21 cm व्यास वाले लकड़ी के गोलों को छोटे आधारों पर टिका कर सजाया जाता है, जैसा कि आकृति 13.32 में दिखाया गया है। इस प्रकार के आठगोलों का प्रयोग इस कार्य के लिए किया जाना है


आकृति 13.32

*यह प्रश्नावली परीक्षा की दृष्टि से नहीं दी गई है।

और इन गोलों को चाँदी वाले रंग में पेंट करवाना है। प्रत्येक आधार 1.5 cm त्रिज्या और ऊँचाई 7 cm का एक बेलन है तथा इन्हें काले रंग से पेंट करवाना है। यदि चाँदी के रंग का पेंट करवाने की दर 25 पैसे प्रति cm^2 है तथा काले रंग के पेंट करवाने की दर 5 पैसे प्रति cm^2 हो, तो पेंट करवाने का कुल व्यय ज्ञात कीजिए।

3. एक गोले के व्यास में 25% की कमी हो जाती है। उसका वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल कितने प्रतिशत कम हो गया है?

13.10 सारांश

इस अध्याय में, आपने निम्नलिखित बिंदुओं का अध्ययन किया है:

1. **घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल** $= 2\,(lb + bh + hl)$
2. **घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल** $= 6a^2$
3. **बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल** $= 2\pi rh$
4. **बेलन का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल** $= 2\pi r\,(r + h)$
5. **शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल** $= \pi rl$
6. **शंकु का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल** $= \pi rl + \pi r^2$, **अर्थात्** $\pi r\,(l + r)$
7. **गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल** $= 4\,\pi\, r^2$
8. **अर्धगोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल** $= 2\pi r^2$
9. **अर्धगोले का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल** $= 3\pi r^2$
10. **घनाभ का आयतन** $= l \times b \times h$
11. **घन का आयतन** $= a^3$
12. **बेलन का आयतन** $= \pi r^2 h$
13. **शंकु का आयतन** $= \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$
14. **गोले का आयतन** $= \dfrac{4}{3}\pi r^3$
15. **अर्धगोले का आयतन** $= \dfrac{2}{3}\pi r^3$

[यहाँ अक्षरों l, b, h, a, r, इत्यादि का प्रयोग, अपने संदर्भ के अनुसार, सामान्य अर्थों में प्रयोग किया गया है।]

0963CH14

अध्याय 14

सांख्यिकी

14.1 भूमिका

प्रतिदिन हमें तथ्यों, संख्यात्मक अंकों, सारणियों, आलेखों (ग्राफों) आदि के रूप में विभिन्न प्रकार की सूचनाएँ देखने को मिलती रहती हैं। ये सूचनाएँ हमें समाचार पत्रों, टेलीविजनों, पत्रिकाओं और संचार के अन्य साधनों से उपलब्ध होती रहती हैं। ये सूचनाएँ क्रिकेट की बल्लेबाजी या गेंदबाजी के औसतों, कंपनी के लाभों, नगरों के तापमान, पंचवर्षीय योजना के विभिन्न क्षेत्र एवं मदों में किए गए खर्चों, मतदान के परिणामों आदि से संबंधित हो सकते हैं। एक निश्चित उद्देश्य से एकत्रित किए गए इन तथ्यों या अंकों को, जो संख्यात्मक या अन्य रूप में हो सकते हैं, *आंकड़े* (data) कहा जाता है। अंग्रेजी शब्द "data" लैटिन शब्द *datum* का बहुवचन है। हाँ, यह बात अवश्य है कि आपके लिए 'आंकड़ा' एक नया शब्द नहीं है। पिछली कक्षाओं में आप आंकड़ों और आंकड़ों के प्रबंधन के बारे में पढ़ चुके हैं।

आज हमारी दुनिया अधिक से अधिक सूचना-अभिविन्यास होती जा रही है। हम जीवन पर्यंत किसी न किसी रूप में आंकड़ों का प्रयोग करते रहते हैं। अतः हमारे लिए यह आवश्यक हो जाता है कि इन आंकड़ों से हम अपनी इच्छानुसार अर्थपूर्ण सूचनाएँ उपलब्ध करना जान जाएँ। अर्थपूर्ण सूचनाएँ उपलब्ध करने से संबंधित अध्ययन गणित की एक शाखा में किया जाता है जिसे *सांख्यिकी* (*statistics*) कहा जाता है।

ऐसा प्रतीत होता है कि सांख्यिकी के अंग्रेजी शब्द "statistics" की व्युत्पत्ति लैटिन शब्द "status", जिसका अर्थ एक (राजनैतिक) राज्य है, से हुई है। अपने मूल रूप में सांख्यिकी लोगों के जीवन के विभिन्न पहलुओं से संबंधित उन आंकड़ों का ही संग्रह होता था जो राज्य के लिए उपयोगी होते थे। समय के साथ-साथ इसका कार्य क्षेत्र बढ़ता चला गया और सांख्यिकी का संबंध केवल आंकड़ों के संग्रह और प्रस्तुतिकरण से ही नहीं रह गया है, अपितु

इसका संबंध आंकड़ों से अनुमिति (inference) निकालने और उनका निर्वचन (interpretation) करने से भी हो गया। सांख्यिकी में आंकड़ों के संग्रह करने, व्यवस्थित करने, विश्लेषण करने और निर्वचन करने के बारे में अध्ययन किया जाता है। भिन्न-भिन्न संदर्भों में शब्द 'statistics' का अर्थ भिन्न-भिन्न होता है। आइए हम इस संबंध में निम्नलिखित वाक्यों पर ध्यान दें :

1. क्या मुझे 'भारत के शैक्षिक आंकड़ों' की एक नवीनतम संस्करण की प्रति मिल सकती है।
2. मैं 'सांख्यिकी' का अध्ययन करना चाहता हूँ, क्योंकि इसका प्रयोग दैनिक जीवन में व्यापक रूप से होता रहता है।

ऊपर दिए गए पहले वाक्य में आंकड़ों (statistics) का प्रयोग बहुवचन में किया गया है, जिसका अर्थ है संख्यात्मक आंकड़े। इसके अंतर्गत भारत की विभिन्न शैक्षिक संस्थाएँ, विभिन्न राज्यों की साक्षरता-दर, आदि हो सकती हैं। दूसरे वाक्य में, शब्द सांख्यिकी (statistics) का प्रयोग एकवचन में किया गया है, जिसका अर्थ वह विषय है जिसमें आंकड़ों के संग्रह, प्रस्तुतिकरण, विश्लेषण का अध्ययन करने के साथ-साथ आंकड़ों से अर्थपूर्ण निष्कर्ष निकालने के बारे में भी अध्ययन किया जाता है।

इस अध्याय में हम आंकड़ों से संबंधित इन सभी पहलुओं पर संक्षेप में चर्चा करेंगे।

14.2 आंकड़ों का संग्रह

आइए हम निम्नलिखित क्रियाकलाप करके आंकड़ों को एकत्रित करने का कार्य प्रारम्भ करें।

क्रियाकलाप 1 : अपनी कक्षा के विद्यार्थियों को चार समूहों में बाँट दीजिए। प्रत्येक समूह को निम्न प्रकार के आंकड़ों में से एक प्रकार के आंकड़ों को संग्रह करने का काम दे दीजिए।

(i) अपनी कक्षा के 20 विद्यार्थियों की लंबाई।

(ii) अपनी कक्षा में किसी एक महीने के प्रत्येक दिन अनुपस्थित रहे विद्यार्थियों की संख्या।

(iii) आपके कक्षा मित्रों के परिवारों के सदस्यों की संख्या।

(iv) आपके विद्यालय में या उसके आस-पास के 15 पौधों की लंबाइयाँ।

आइए अब हम विद्यार्थियों द्वारा एकत्रित किए गए परिणामों को देखें। प्रत्येक समूह ने आंकड़ों का संग्रह किस प्रकार किया है?

(i) क्या सूचनाएँ एकत्रित करने के लिए उन्होंने संबंधित प्रत्येक विद्यार्थी, मकान या व्यक्ति से सूचनाएँ एकत्रित की हैं?

(ii) क्या उन्होंने विद्यालय में उपलब्ध रिकार्ड जैसे कुछ स्रोतों से सूचनाएँ एकत्रित की हैं?

पहली स्थिति में स्वयं अंवेषक ने अपने दिमाग में एक निश्चित उद्देश्य रखकर सूचनाओं को एकत्रित किया है। इस प्रकार एकत्रित किए गए आंकड़ों को *प्राथमिक आंकड़े* (*primary data*) कहा जाता है।

दूसरी स्थिति में, जहाँ किसी स्रोत से, जिसमें सूचनाएँ पहले से ही एकत्रित हैं, आंकड़े प्राप्त किए गए हों उन आंकड़ों को *गौण आंकड़े* (*secondary data*) कहा जाता है। इस प्रकार के आंकड़ों का प्रयोग, जिसे किसी और ने इन्हें अन्य संदर्भ में एकत्रित किया है, यह सुनिश्चित करने के बाद ही कि ये स्रोत विश्वसनीय हैं, काफी सावधानी के साथ करना चाहिए।

अभी तक आप यह अवश्य समझ गए होंगे कि आंकड़े किस प्रकार एकत्रित किए जाते हैं और प्राथमिक आंकड़ों और गौण आंकड़ों में क्या अंतर है।

प्रश्नावली 14.1

1. उन आंकड़ों के पाँच उदाहरण दीजिए जिन्हें आप अपने दैनिक जीवन से एकत्रित कर सकते हैं।

2. ऊपर दिए गए प्रश्न 1 के आंकड़ों को प्राथमिक आंकड़ों या गौण आंकड़ों में वर्गीकृत कीजिए।

14.3 आंकड़ों का प्रस्तुतिकरण

आंकड़ों को एकत्रित करने का काम समाप्त होने के उपरांत ही अंवेषक को इन आंकड़ों को ऐसे रूप में प्रस्तुत करने की विधियों को ज्ञात करना होता है जो अर्थपूर्ण हो, सरलता से समझी जा सकती हों और एक ही झलक में उसके मुख्य लक्षणों को जाना जा सकता हो। आइए अब हम कुछ उदाहरण लेकर आंकड़ों को प्रस्तुत करने की विभिन्न विधियों पर पुनः विचार करें।

उदाहरण 1 : गणित की परीक्षा में 10 विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त किए गए अंक लीजिए :

55 36 95 73 60 42 25 78 75 62

इस रूप में प्रस्तुत किए गए आंकड़ों को *यथाप्राप्त आंकड़े* (*raw data*) कहा जाता है।

क्या इस रूप में इसे देखकर आप अधिकतम और न्यूनतम अंक ज्ञात कर सकते हैं?

क्या अधिकतम प्राप्तांक और न्यूनतम प्राप्तांक ज्ञात करने में आपको कुछ समय लगा है? यदि इन प्राप्तांकों को आरोही (ascending) या अवरोही (descending) क्रम में रखा जाए, तो अधिकतम अंक और न्यूनतम अंक ज्ञात करने में काफी कम समय लगेगा? अतः आइए हम प्राप्तांकों को आरोही क्रम में इस प्रकार रखें:

25 36 42 55 60 62 73 75 78 95

इस प्रकार हम स्पष्टतया देख सकते हैं कि न्यूनतम प्राप्तांक 25 और अधिकतम प्राप्तांक 95 हैं। आंकड़ों के अधिकतम और न्यूनतम मानों के अंतर को आंकड़ों का *परिसर* (*range*) कहा जाता है। अत: यहाँ पर परिसर 95 – 25 = 70 है।

आंकड़ों को आरोही क्रम या अवरोही क्रम में लिखने पर काफी समय लग सकता है, विशेष रूप से तब, जबकि प्रयोग में प्रेक्षणों की संख्या अधिक हो, जैसा कि अगले उदाहरण में आप देख सकते हैं।

उदाहरण 2 : एक विद्यालय की नवीं कक्षा के 30 विद्यार्थियों द्वारा (100 अंकों में से) प्राप्त किए गए अंक लीजिए:

10	20	36	92	95	40	50	56	60	70
92	88	80	70	72	70	36	40	36	40
92	40	50	50	56	60	70	60	60	88

आपको याद होगा कि एक निश्चित अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थियों की संख्या को इस अंक की *बारंबारता* (*frequency*) कहा जाता है। उदाहरण के लिए, यहाँ 4 विद्यार्थियों ने 70 अंक प्राप्त किए हैं। अत: 70 अंक की बारंबारता 4 है। आंकड़ों को और अधिक सरल रूप में समझने के लिए इन्हें हम एक सारणी के रूप में लिखते हैं, जैसा कि नीचे दिया गया है:

सारणी 14.1

अंक	विद्यार्थियों की संख्या (अर्थात् बारंबारता)
10	1
20	1
36	3
40	4
50	3
56	2
60	4
70	4
72	1
80	1
88	2
92	3
95	1
कुल योग	30

सारणी 14.1 को *अवर्गीकृत बारंबारता बंटन सारणी* (*ungrouped frequency distribution table*) या केवल *बारंबारता बंटन सारणी* (*frequency distribution table*) कहा जाता है। ध्यान दीजिए कि इन सारणियों को बनाने में आप *मिलान चिह्नों* (*tally marks*) का प्रयोग कर सकते हैं, जैसा कि अगले उदाहरण में दिखाया गया है।

उदाहरण 3 : वन महोत्सव के दौरान 100 विद्यालयों में से प्रत्येक विद्यालय में 100 पौधे लगाए गए। एक महीने बाद लगाए गए पौधों में से बच गए पौधों की संख्याएँ निम्न थीं:

95	67	28	32	65	65	69	33	98	96
76	42	32	38	42	40	40	69	95	92
75	83	76	83	85	62	37	65	63	42
89	65	73	81	49	52	64	76	83	92
93	68	52	79	81	83	59	82	75	82
86	90	44	62	31	36	38	42	39	83
87	56	58	23	35	76	83	85	30	68
69	83	86	43	45	39	83	75	66	83
92	75	89	66	91	27	88	89	93	42
53	69	90	55	66	49	52	83	34	36

इतनी बड़ी संख्या में आंकड़ों को इस प्रकार प्रस्तुत करने के लिए कि पाठक इसका सरलता से अर्थ निकाल सकें, हम इन आंकड़ों को 20-29, 30-39, . . ., 90-99 जैसे समूहों में रखकर इन्हें छोटा कर लेते हैं (क्योंकि हमारे आंकड़े 23 से 98 के बीच हैं)। इन समूहों को '*वर्ग*' (*classes*) या '*वर्ग अंतराल*' (*class intervals*) कहा जाता है और इनके माप (size) को *वर्ग-माप* (*class size*) या *वर्ग चौड़ाई* (*class width*) कहा जाता है, जो कि यहाँ 10 है। प्रत्येक वर्ग की निम्नतम संख्या को *निम्न वर्ग सीमा* (*lower class limit*) और अधिकतम संख्या को *उपरि वर्ग सीमा* (*upper class limit*) कहा जाता है। जैसे, वर्ग 20–29 में 20 निम्न वर्ग सीमा है और 29 उपरि वर्ग सीमा है।

साथ ही, आप यह भी जानते हैं कि मिलान चिह्नों का प्रयोग करके ऊपर दिए गए आंकड़ों को सारणी रूप में प्रस्तुत किया जा सकता है, जैसा कि सारिणी 14.2 में दिखाया गया है।

सारणी 14.2

बचे हुए पौधों की संख्या	मिलान चिह्न	विद्यालयों की संख्या (बारंबारता)
20 - 29	|||	3
30 - 39	𝍸 𝍸 ||||	14
40 - 49	𝍸 𝍸 ||	12
50 - 59	𝍸 |||	8
60 - 69	𝍸 𝍸 𝍸 |||	18
70 - 79	𝍸 𝍸	10
80 - 89	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 |||	23
90 - 99	𝍸 𝍸 ||	12
कुल योग		100

आंकड़ों को इस रूप में प्रस्तुत करने से आंकड़े सरल और छोटे रूप में हो जाते हैं और हम एक ही दृष्टि में उनके मुख्य लक्षणों को देख सकते हैं। इस प्रकार की सारणी को *वर्गीकृत बारंबारता बंटन सारणी* (*grouped frequency distribution table*) कहा जाता है। यहाँ हम यह सरलता से देख सकते हैं कि $8 + 18 + 10 + 23 + 12 = 71$ विद्यालयों में 50% या इससे अधिक पौधे बच गए हैं।

यहाँ हम यह देखते हैं कि ऊपर की सारणी में वर्ग अनतिव्यापी (non-overlapping) हैं। ध्यान दीजिए कि यहाँ हम छोटे माप लेकर अधिक संख्या में वर्ग ले सकते थे या बड़े माप लेकर कम संख्या में वर्ग ले सकते थे। उदाहरण के लिए, अंतराल 22-26, 27-31, आदि हो सकते थे। इस कार्य के लिए कोई विशेष नियम नहीं है। नियम केवल यही है कि वर्ग अतिव्यापी (overlapping) नहीं होने चाहिए।

उदाहरण 4 : आइए अब हम निम्नलिखित बारंबारता बंटन सारणी लें, जिसमें एक कक्षा के 38 विद्यार्थियों के भार दिए गए हैं:

सारणी 14.3

भार (kg में)	विद्यार्थियों की संख्या
31 - 35	9
36 - 40	5
41 - 45	14
46 - 50	3
51 - 55	1
56 - 60	2
61 - 65	2
66 - 70	1
71 - 75	1
कुल योग	38

अब, यदि 35.5 kg और 40.5 kg के भार वाले दो और विद्यार्थी इस कक्षा में आ जाएँ, तो उन्हें किस वर्ग अंतराल में रखा जाएगा? उन्हें न तो हम उन अंतरालों में रख सकते हैं जिनकी अंतिम संख्या 35 या 40 हैं और न ही इन्हें हम उन अंतरालों में रख सकते हैं जो इनके बाद आते हैं। ऐसा इसलिए है, क्योंकि दो क्रमागत वर्गों (consecutive classes) की उपरि और निम्न सीमाओं के बीच रिक्त स्थान है। अत: इस स्थिति में हमें अंतरालों को विभक्त करना होता है, जिससे कि क्रमागत अंतरालों की उपरि और निम्न सीमाएँ समान हो जाएँ। इसके लिए हमें एक वर्ग की उपरि सीमा और उसके बाद के वर्ग की निम्न सीमा के बीच का अंतर ज्ञात करना होता है। तब हम इस अंतर के आधे भाग को प्रत्येक उपरि सीमा में जोड़ देते हैं और इसी राशि को प्रत्येक निम्न सीमा में से घटा देते हैं।

उदाहरण के लिए, वर्ग 31 - 35 और 36 - 40 लीजिए।

36 - 40 की निम्न सीमा = 36

31 - 35 की उपरि सीमा = 35

अंतर = 36 – 35 = 1

अत:, अंतर का आधा = $\frac{1}{2} = 0.5$

इस प्रकार, वर्ग 31 – 35 से बना नया वर्ग अंतराल (31 – 0.5) – (35 + 0.5) = 30.5 – 35.5 है।

इसी प्रकार, 36 – 40 से बना नया वर्ग अंतराल

$= (36 – 0.5) - (40 + 0.5)$

$= 35.5 - 40.5$

इस प्रक्रिया को आगे बढ़ाने पर निम्नलिखित संतत वर्ग (continuous classes) प्राप्त होते हैं: 30.5-35.5, 35.5-40.5, 40.5-45.5, 45.5-50.5, 50.5-55.5, 55.5-60.5, 60.5 - 65.5, 65.5 - 70.5, 70.5 - 75.5

अब हम इन वर्गों में नए विद्यार्थियों के भार सम्मिलित कर सकते हैं। परन्तु, ऐसा करने से एक और समस्या आती है। वह यह है कि 35.5 दोनों ही वर्गों 30.5–35.5 और 35.5–40.5 में है। वह यह है कि आपके विचार से इस भार को किस वर्ग में रखना चाहिए?

यदि इसे दोनों वर्गों में रखा जाए, तो इसकी गिनती दो बार करनी होगी।

अतः परंपरा के अनुसार, हम 35.5 को वर्ग 35.5–40.5 में रखते हैं न कि वर्ग 30.5–35.5 में। इसी प्रकार, 40.5 को वर्ग 40.5–45.5 में रखा जाता है न कि वर्ग 35.5–40.5 में।

अतः, नए भार 35.5 kg और 40.5 kg को क्रमशः 35.5–40.5 और 40.5–45.5 में सम्मिलित किया जाएगा। अब इन कल्पनाओं को ध्यान में रखने पर एक नई बारंबारता बंटन सारणी प्राप्त होगी, जैसा कि नीचे दिखाई गई है :

सारणी 14.4

भार (kg में)	विद्यार्थियों की संख्या
30.5-35.5	9
35.5-40.5	6
40.5-45.5	15
45.5-50.5	3
50.5-55.5	1
55.5-60.5	2
60.5-65.5	2
65.5-70.5	1
70.5-75.5	1
कुल योग	40

आइए अब हम क्रियाकलाप 1 में आपके द्वारा एकत्रित किए गए आंकड़ों को लें। इस बार हम चाहेंगे कि आप इन आंकड़ों को एक बारंबारता बंटन सारणी के रूप में प्रस्तुत करें।

क्रियाकलाप 2 : उन्हीं चार समूहों को लेकर आप अपने आंकड़ों को बारंबारता बंटन सारणियों में परिवर्तित करें। आंकड़ों के परिसर और आंकड़ों के प्रकार को ध्यान में रखकर उपयुक्त वर्ग-माप वाले सुविधाजनक वर्ग लीजिए।

प्रश्नावली 14.2

1. आठवीं कक्षा के 30 विद्यार्थियों के रक्त समूह ये हैं:

A, B, O, O, AB, O, A, O, B, A, O, B, A, O, O,
A, AB, O, A, A, O, O, AB, B, A, O, B, A, B, O

इन आंकड़ों को एक बारंबारता बंटन सारणी के रूप में प्रस्तुत कीजिए। बताइए कि इन विद्यार्थियों में कौन-सा रक्त समूह अधिक सामान्य है और कौन-सा रक्त समूह विरलतम रक्त समूह है।

2. 40 इंजीनियरों की उनके आवास से कार्य-स्थल की (किलोमीटर में) दूरियाँ ये हैं:

5	3	10	20	25	11	13	7	12	31
19	10	12	17	18	11	32	17	16	2
7	9	7	8	3	5	12	15	18	3
12	14	2	9	6	15	15	7	6	12

0-5 को (जिसमें 5 सम्मिलित नहीं है) पहला अंतराल लेकर ऊपर दिए हुए आंकड़ों से वर्ग-माप 5 वाली एक वर्गीकृत बारंबारता बंटन सारणी बनाइए। इस सारणी बद्ध निरूपण में आपको कौन-से मुख्य लक्षण देखने को मिलते हैं?

3. 30 दिन वाले महीने में एक नगर की सापेक्ष आर्द्रता (%में) यह रही है:

98.1	98.6	99.2	90.3	86.5	95.3	92.9	96.3	94.2	95.1
89.2	92.3	97.1	93.5	92.7	95.1	97.2	93.3	95.2	97.3
96.2	92.1	84.9	90.2	95.7	98.3	97.3	96.1	92.1	89

(i) वर्ग 84-86, 86-88 आदि लेकर एक वर्गीकृत बारंबारता बंटन बनाइए।

(ii) क्या आप बता सकते हैं कि ये आंकड़े किस महीने या ऋतु से संबंधित हैं?

(iii) इन आंकड़ों का परिसर क्या है?

4. निकटतम सेंटीमीटरों में मापी गई 50 विद्यार्थियों की लंबाइयाँ ये हैं:

161	150	154	165	168	161	154	162	150	151
162	164	171	165	158	154	156	172	160	170
153	159	161	170	162	165	166	168	165	164
154	152	153	156	158	162	160	161	173	166
161	159	162	167	168	159	158	153	154	159

(i) 160-165, 165-170 आदि का वर्ग अंतराल लेकर ऊपर दिए गए आंकड़ों को एक वर्गीकृत बारंबारता बंटन सारणी के रूप में निरूपित कीजिए।

(ii) इस सारणी की सहायता से आप विद्यार्थियों की लंबाइयों के संबंध में क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं?

5. एक नगर में वायु में सल्फर डाई-ऑक्साइड का सांद्रण भाग प्रति मिलियन [parts per million (ppm)] में ज्ञात करने के लिए एक अध्ययन किया गया। 30 दिनों के प्राप्त किए गए आंकड़े ये हैं:

0.03	0.08	0.08	0.09	0.04	0.17
0.16	0.05	0.02	0.06	0.18	0.20
0.11	0.08	0.12	0.13	0.22	0.07
0.08	0.01	0.10	0.06	0.09	0.18
0.11	0.07	0.05	0.07	0.01	0.04

(i) 0.00-0.04, 0.04-0.08 आदि का वर्ग अंतराल लेकर इन आंकड़ों की एक वर्गीकृत बारंबारता बंटन सारणी बनाइए।

(ii) सल्फर डाई-ऑक्साइड की सांद्रता कितने दिन 0.11 भाग प्रति मिलियन से अधिक रही?

6. तीन सिक्कों को एक साथ 30 बार उछाला गया। प्रत्येक बार चित (Head) आने की संख्या निम्न है :

0	1	2	2	1	2	3	1	3	0
1	3	1	1	2	2	0	1	2	1
3	0	0	1	1	2	3	2	2	0

ऊपर दिए गए आंकड़ों के लिए एक बारंबारता बंटन सारणी बनाइए।

7. 50 दशमलव स्थान तक शुद्ध π का मान नीचे दिया गया है :

3.14159265358979323846264338327950288419716939937510

(i) दशमलव बिंदु के बाद आने वाले 0 से 9 तक के अंकों का एक बारंबारता बंटन बनाइए।

(ii) सबसे अधिक बार और सबसे कम बार आने वाले अंक कौन-कौन से हैं?

8. तीस बच्चों से यह पूछा गया कि पिछले सप्ताह उन्होंने कितने घंटों तक टी.वी. के प्रोग्राम देखे। प्राप्त परिणाम ये रहे हैं :

1	6	2	3	5	12	5	8	4	8
10	3	4	12	2	8	15	1	17	6
3	2	8	5	9	6	8	7	14	12

(i) वर्ग-चौड़ाई 5 लेकर और एक वर्ग अंतराल को 5-10 लेकर इन आंकड़ों की एक वर्गीकृत बारंबारता बंटन सारणी बनाइए।

(ii) कितने बच्चों ने सप्ताह में 15 या अधिक घंटों तक टेलीविजन देखा?

9. एक कंपनी एक विशेष प्रकार की कार-बैट्री बनाती है। इस प्रकार की 40 बैट्रियों के जीवन-काल (वर्षों में) ये रहे हैं :

2.6	3.0	3.7	3.2	2.2	4.1	3.5	4.5
3.5	2.3	3.2	3.4	3.8	3.2	4.6	3.7
2.5	4.4	3.4	3.3	2.9	3.0	4.3	2.8
3.5	3.2	3.9	3.2	3.2	3.1	3.7	3.4
4.6	3.8	3.2	2.6	3.5	4.2	2.9	3.6

0.5 माप के वर्ग अंतराल लेकर तथा अंतराल 2-2.5 से प्रारंभ करके इन आंकड़ों की एक वर्गीकृत बारंबारता बंटन सारणी बनाइए।

14.4 आंकड़ों का आलेखीय निरूपण

सारणियों से आंकड़ों का निरूपण करने के बारे में हम चर्चा कर चुके हैं। आइए अब हम आंकड़ों के अन्य निरूपण, अर्थात् आलेखीय निरूपण (graphical representation) की ओर अपना ध्यान केंद्रित करें। इस संबंध में एक कहावत यह रही है कि एक चित्र हजार शब्द से भी उत्तम होता है। प्राय: अलग-अलग मदों की तुलनाओं को आलेखों (graphs) की सहायता से अच्छी तरह से दर्शाया जाता है। तब वास्तविक आंकड़ों की तुलना में इस निरूपण को समझना अधिक सरल हो जाता है। इस अनुच्छेद में, हम निम्नलिखित आलेखीय निरूपणों का अध्ययन करेंगे।

(A) दंड आलेख (Bar Graph)

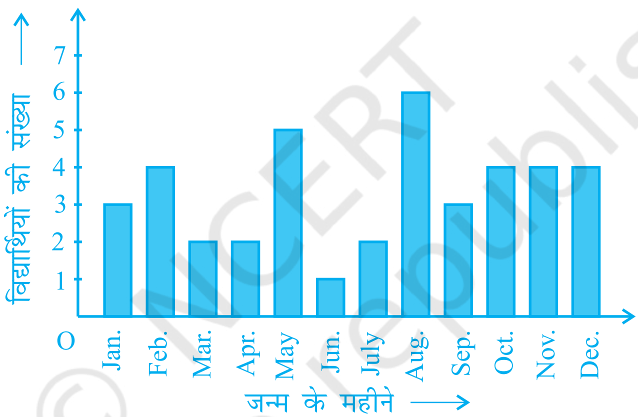
(B) एकसमान चौड़ाई और परिवर्ती चौड़ाइयों वाले आयतचित्र (Histograms)

(C) बारंबारता बहुभुज (Frequency Polygons)

(A) दंड आलेख

पिछली कक्षाओं में, आप दंड आलेख का अध्ययन कर चुके हैं और उन्हें बना भी चुके हैं। यहाँ हम कुछ अधिक औपचारिक दृष्टिकोण से इन पर चर्चा करेंगे। आपको याद होगा कि दंड आलेख आंकड़ों का एक चित्रीय निरूपण होता है जिसमें प्रायः एक अक्ष (मान लीजिए x-अक्ष) पर एक चर को प्रकट करने वाले एक समान चौड़ाई के दंड खींचे जाते हैं जिनके बीच में बराबर-बराबर दूरियाँ छोड़ी जाती हैं। चर के मान दूसरे अक्ष (मान लीजिए y-अक्ष) पर दिखाए जाते हैं और दंडों की ऊँचाइयाँ चर के मानों पर निर्भर करती हैं।

उदाहरण 5 : नवीं कक्षा के 40 विद्यार्थियों से उनके जन्म का महीना बताने के लिए कहा गया। इस प्रकार प्राप्त आंकड़ों से निम्नलिखित आलेख बनाया गया:



आकृति 14.1

ऊपर दिए गए आलेख को देखकर निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(i) नवंबर के महीने में कितने विद्यार्थियों का जन्म हुआ?

(ii) किस महीने में सबसे अधिक विद्यार्थियों का जन्म हुआ?

हल : ध्यान दीजिए कि यहाँ चर 'जन्म दिन का महीना' है और चर का मान 'जन्म लेने वाले विद्यार्थियों की संख्या' है।

(i) नवंबर के महीने में 4 विद्यार्थियों का जन्म हुआ।

(ii) अगस्त के महीने में सबसे अधिक विद्यार्थियों का जन्म हुआ।

आइए अब हम निम्नलिखित उदाहरण लेकर इनका पुनर्विलोकन करें कि एक दंड आलेख किस प्रकार बनाया जाता है।

उदाहरण 6 : एक परिवार ने जिसकी मासिक आय ₹ 20000 है, विभिन्न मदों के अंतर्गत हर महीने होने वाले खर्च की योजना बनाई थी:

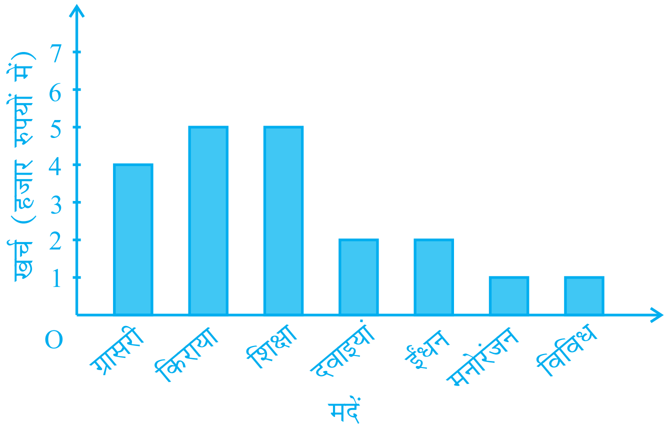
सारणी 14.5

मद	खर्च (हजार रुपयों में)
ग्रॉसरी (परचून का सामान)	4
किराया	5
बच्चों की शिक्षा	5
दवाइयाँ	2
ईंधन	2
मनोरंजन	1
विविध	1

ऊपर दिए गए आंकड़ों का एक दंड आलेख बनाइए।

हल : हम इन आंकड़ों का दंड आलेख निम्नलिखित चरणों में बनाते हैं। ध्यान दीजिए कि दूसरे स्तंभ में दिया गया मात्रक (unit) 'हजार रुपयों में' है। अत:, ग्रॉसरी (परचून का सामान) के सामने लिखा अंक 4 का अर्थ ₹ 4000 है।

1. कोई भी पैमाना (scale) लेकर हम क्षैतिज अक्ष पर मदों (चर) को निरूपित करते हैं, क्योंकि यहाँ दंड की चौड़ाई का कोई महत्व नहीं होता। परन्तु स्पष्टता के लिए हम सभी दंड समान चौड़ाई के लेते हैं और उनके बीच समान दूरी बनाए रखते हैं। मान लीजिए एक मद को एक सेंटीमीटर से निरूपित किया गया है।
2. हम खर्च (मूल्य) को ऊर्ध्वाधर अक्ष पर निरूपित करते हैं। क्योंकि अधिकतम खर्च ₹ 5000 है, इसलिए हम पैमाना 1 मात्रक = ₹ 1000 ले सकते हैं।
3. अपने पहले मद अर्थात् ग्रॉसरी को निरूपित करने के लिए, हम 1 मात्रक की चौड़ाई 4 मात्रक की ऊँचाई वाला एक आयताकार दंड बनाते हैं।
4. इसी प्रकार, दो क्रमागत दंडों के बीच 1 मात्रक का खाली स्थान छोड़कर अन्य मदों को निरूपित किया जाता है (देखिये आकृति 14.2)।



आकृति 14.2

यहाँ आप एक दृष्टि में ही आंकड़ों के सापेक्ष अभिलक्षणों को सरलता से देख सकते हैं। उदाहरण के लिए, आप यह सरलता से देख सकते हैं कि ग्रॉसरी पर किया गया खर्च दवाइयों पर किए गए खर्च का दो गुना है। अतः, कुछ अर्थों में सारणी रूप की अपेक्षा यह आंकड़ों का एक उत्तम निरूपण है।

क्रियाकलाप 3 : क्रियाकलाप 1 के चार समूहों द्वारा प्राप्त आंकड़ों को उपयुक्त दंड आलेखों से निरूपित कीजिए।

आइए अब हम देखें कि किस प्रकार संतत वर्ग अंतरालों की बारंबारता बंटन सारणी को आलेखीय रूप में निरूपित किया जाता है।

(B) आयतचित्र

यह संतत वर्ग अंतरालों के लिए प्रयुक्त दंड आलेख की भाँति निरूपण का एक रूप है। उदाहरण के लिए, बारंबारता बंटन सारणी 14.6 लीजिए, जिसमें एक कक्षा के 36 विद्यार्थियों के भार दिए गए हैं:

सारणी 14.6

भार (kg में)	विद्यार्थियों की संख्या
30.5 - 35.5	9
35.5 - 40.5	6
40.5 - 45.5	15
45.5 - 50.5	3
50.5 - 55.5	1
55.5 - 60.5	2
कुल योग	36

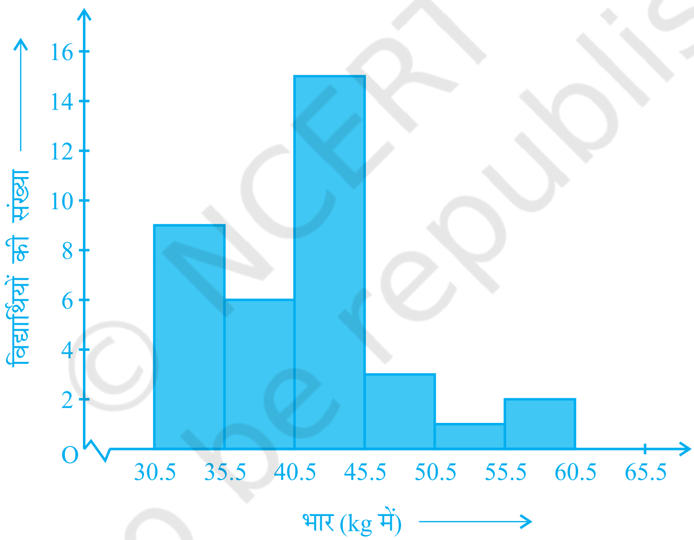
आइए हम ऊपर दिए गए आंकड़ों को आलेखीय रूप में इस प्रकार निरूपित करें:

(i) हम एक उपयुक्त पैमाना लेकर भार को क्षैतिज अक्ष पर निरूपित करें। हम पैमाना 1 सेंटीमीटर = 5 kg ले सकते हैं। साथ ही, क्योंकि पहला वर्ग अंतराल 30.5 से प्रारंभ हो रहा है न कि शून्य से, इसलिए एक निकुंच (kink) का चिह्न बनाकर या अक्ष में एक विच्छेद दिखा कर, इसे हम आलेख पर दर्शा सकते हैं।

(ii) हम एक उपयुक्त पैमाने के अनुसार विद्यार्थियों की संख्या (बारंबारता) को ऊर्ध्वाधर अक्ष पर निरूपित करते हैं। साथ ही, क्योंकि अधिकतम बारंबारता 15 है, इसलिए हमें एक ऐसे पैमाने का चयन करना होता है जिससे कि उसमें यह अधिकतम बारंबारता आ सके।

(iii) अब हम वर्ग अंतराल के अनुसार समान चौड़ाई और संगत वर्ग अंतरालों की बारंबारताओं को लंबाइयाँ मानकर आयत (या आयताकार दंड) बनाते हैं। उदाहरण के लिए, वर्ग अंतराल 30.5–35.5 का आयत 1 सेंटीमीटर की चौड़ाई और 4.5 सेंटीमीटर की लंबाई वाला आयत होगा।

(iv) इस प्रकार हमें जो आलेख प्राप्त होता है, उसे आकृति 14.3 में दिखाया गया है।



आकृति 14.3

ध्यान दीजिए कि क्योंकि क्रमागत आयतों के बीच कोई रिक्त स्थान नहीं है, इसलिए परिणामी आलेख एक ठोस आकृति के समान दिखाई पड़ेगा। इस आलेख को *आयतचित्र* (histogram) कहा जाता है, जो कि संतत वर्गों वाले वर्गीकृत बारंबारता बंटन का एक आलेखीय निरूपण होता है। साथ ही, दंड आलेख के विपरीत, इसकी रचना में दंड की चौड़ाई की एक महत्वपूर्ण भूमिका होती है।

वास्तव में, यहाँ खड़े किए गए आयतों के क्षेत्रफल संगत बारंबारताओं के समानुपाती होते हैं। फिर भी, क्योंकि सभी आयतों की चौड़ाईयाँ समान हैं, इसलिए आयतों की लंबाइयाँ बारंबारताओं के समानुपाती होती हैं। यही कारण है कि हम लंबाइयाँ ऊपर (iii) के अनुसार ही लेते हैं।

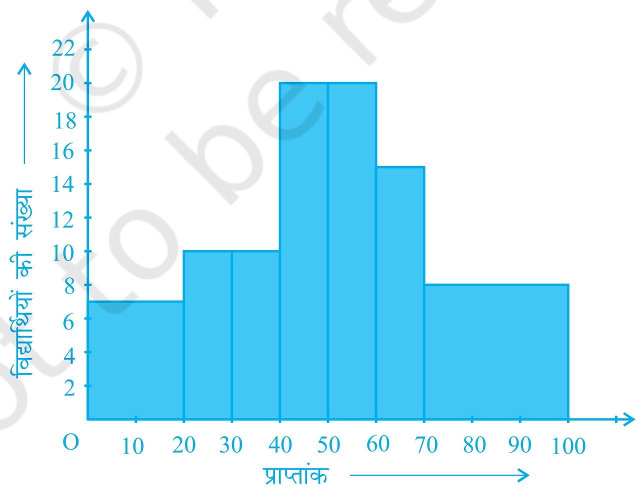
अब, हम पीछे दिखाई गई स्थिति से अलग एक स्थिति लेते हैं।

उदाहरण 7 : एक अध्यापिका दो सेक्शनों के विद्यार्थियों के प्रदर्शनों का विश्लेषण 100 अंक की गणित की परीक्षा लेकर करना चाहती है। उनके प्रदर्शनों को देखने पर वह यह पाती है कि केवल कुछ ही विद्यार्थियों के प्राप्तांक 20 से कम है और कुछ विद्यार्थियों के प्राप्तांक 70 या उससे अधिक हैं। अतः, उसने विद्यार्थियों को 0 - 20, 20 - 30, . . ., 60 - 70, 70 - 100 जैसे विभिन्न माप वाले अंतरालों में वर्गीकृत करने का निर्णय लिया। तब उसने निम्नलिखित सारणी बनाई।

सारणी 14.7

अंक	विद्यार्थियों की संख्या
0 - 20	7
20 - 30	10
30 - 40	10
40 - 50	20
50 - 60	20
60 - 70	15
70 - और उससे अधिक	8
कुल योग	90

किसी विद्यार्थी ने इस सारणी का एक आयतचित्र बनाया, जिसे आकृति 14.4 में दिखाया गया है।



आकृति 14.4

इस आलेखीय निरूपण की जाँच सावधानी से कीजिए। क्या आप समझते हैं कि यह आलेख आंकड़ों का सही-सही निरूपण करता है? इसका उत्तर है: नहीं। यह आलेख आंकड़ों का

एक गलत चित्र प्रस्तुत कर रहा है। जैसा कि हम पहले बता चुके हैं आयतों के क्षेत्रफल आयतचित्र की बारंबारताओं के समानुपाती होते हैं। पहले इस प्रकार के प्रश्न हमारे सामने नहीं उठे थे, क्योंकि सभी आयतों की चौड़ाइयाँ समान थीं। परन्तु, क्योंकि यहाँ आयतों की चौड़ाइयाँ बदल रही हैं, इसलिए ऊपर दिया गया आयतचित्र आंकड़ों का एक सही-सही चित्र प्रस्तुत नहीं करता। उदाहरण के लिए, यहाँ अंतराल 60–70 की तुलना में अंतराल 70–100 की बारंबारता अधिक है।

अतः, आयतों की लंबाइयों में कुछ परिवर्तन (modifications) करने की आवश्यकता होती है, जिससे कि क्षेत्रफल पुनः बारंबारताओं के समानुपाती हो जाए।

इसके लिए निम्नलिखित चरण लागू करने होते हैं :

1. न्यूनतम वर्ग चौड़ाई वाला एक वर्ग अंतराल लीजिए। ऊपर के उदाहरण में, न्यूनतम वर्ग चौड़ाई 10 है।
2. तब आयतों की लंबाइयों में इस प्रकार परिवर्तन कीजिए जिससे कि वह वर्ग चौड़ाई 10 के समानुपाती हो जाए।

उदाहरण के लिए, जब वर्ग चौड़ाई 20 होती है, तब आयत की लंबाई 7 होती है। अतः जब वर्ग चौड़ाई 10 हो, तो आयत की लंबाई $\frac{7}{20} \times 10 = 3.5$ होगी।

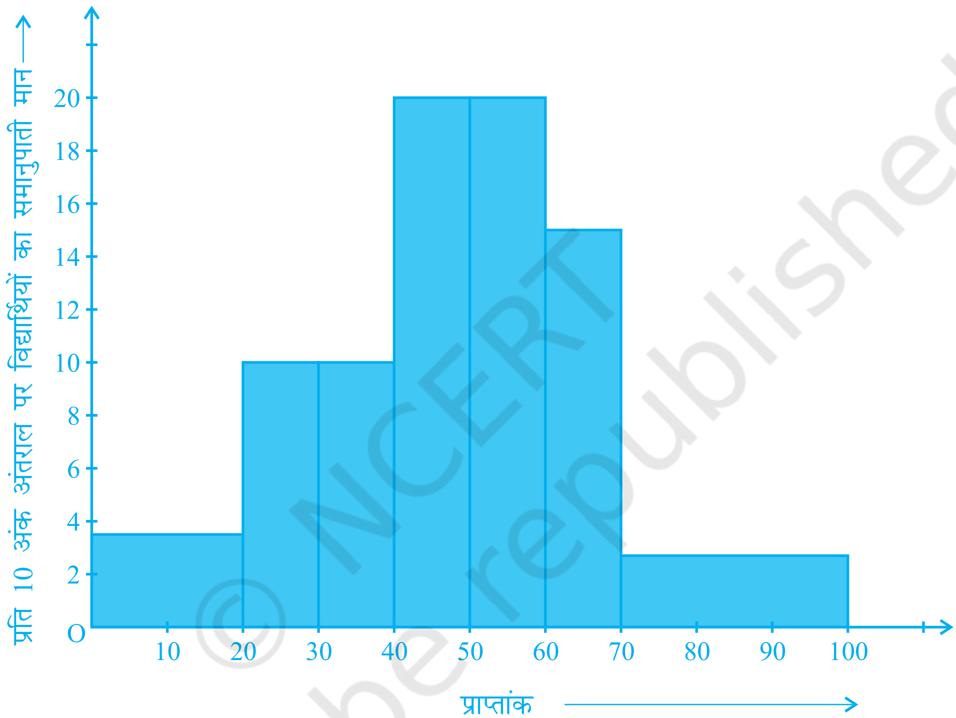
इस प्रक्रिया को लागू करते रहने पर, हमें निम्नलिखित सारणी प्राप्त होती है :

सारणी 14.8

अंक	बारंबारता	वर्ग की चौड़ाई	आयत की लंबाई
0 - 20	7	20	$\frac{7}{20} \times 10 = 3.5$
20 - 30	10	10	$\frac{10}{10} \times 10 = 10$
30 - 40	10	10	$\frac{10}{10} \times 10 = 10$
40 - 50	20	10	$\frac{20}{10} \times 10 = 20$
50 - 60	20	10	$\frac{20}{10} \times 10 = 20$
60 - 70	15	10	$\frac{15}{10} \times 10 = 15$
70 -100	8	30	$\frac{8}{30} \times 10 = 2.67$

क्योंकि हमने प्रत्येक स्थिति में 10 अंकों के अंतराल पर ये लंबाइयाँ परिकलित की हैं, इसलिए आप यह देख सकते हैं कि हम इन लंबाइयों को 'प्रति 10 अंक अंतराल पर विद्यार्थियों के समानुपाती मान' सकते हैं।

परिवर्ती चौड़ाई वाला सही आयतचित्र आकृति 14.5 में दिखाया गया है।

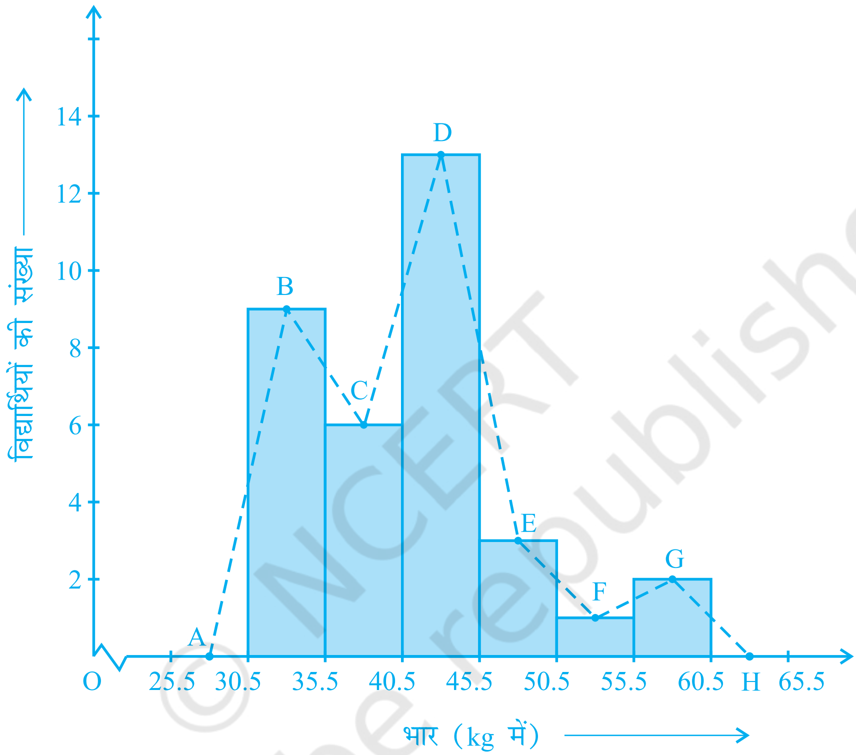


आकृति 14.5

(C) बारंबारता बहुभुज

मात्रात्मक आंकड़ों (quantitative data) और उनकी बारंबारताओं को निरूपित करने की एक अन्य विधि भी है। वह है एक बहुभुज (polygon)। बहुभुज का अर्थ समझने के लिए, आइए हम आकृति 14.3 में निरूपित आयतचित्र लें। आइए हम इस आयतचित्र के संगत आयतों की ऊपरी भुजाओं के मध्य-बिंदुओं को रेखाखंडों से जोड़ दें। आइए हम इन मध्य-बिंदुओं को B, C, D, E, F और G से प्रकट करें। जब इन मध्य-बिंदुओं को हम रेखाखंडों से जोड़ देते हैं, तो हमें आकृति BCDEFG (देखिए आकृति 14.6) प्राप्त होती है। बहुभुज को पूरा करने के लिए यहाँ हम यह मान लेते हैं कि 30.5–35.5 के पहले और 55.5–60.5 के बाद शून्य

बारंबारता वाले एक एक वर्ग अंतराल हैं और इनके मध्य-बिंदु क्रमशः A और H हैं। आकृति 14.3 में दर्शाए गए आंकड़ों का संगत बारंबारता बहुभुज ABCDEFGH (frequency polygon) है। इसे हमने आकृति 14.6 में दर्शाया है।



आकृति 14.6

यद्यपि न्यूनतम वर्ग के पहले और उच्चतम वर्ग के बाद कोई वर्ग नहीं है, फिर भी शून्य बारंबारता वाले दो वर्ग अंतरालों को बढ़ा देने से बारंबारता बहुभुज का क्षेत्रफल वही रहता है, जो आयतचित्र का क्षेत्रफल है। क्या आप बता सकते हैं कि क्यों बांरबारता बहुभुज का क्षेत्रफल वही रहता है जो कि आयतचित्र का क्षेत्रफल है? (**संकेत** : सर्वांगसम त्रिभुजों वाले गुणों का प्रयोग कीजिए।)

अब प्रश्न यह उठता है कि जब प्रथम वर्ग अंतराल के पहले कोई वर्ग अंतराल नहीं होता, तब बहुभुज को हम कैसे पूरा करेंगे? आइए हम ऐसी ही एक स्थिति लें और देखें कि किस प्रकार हम बारंबारता बहुभुज बनाते हैं।

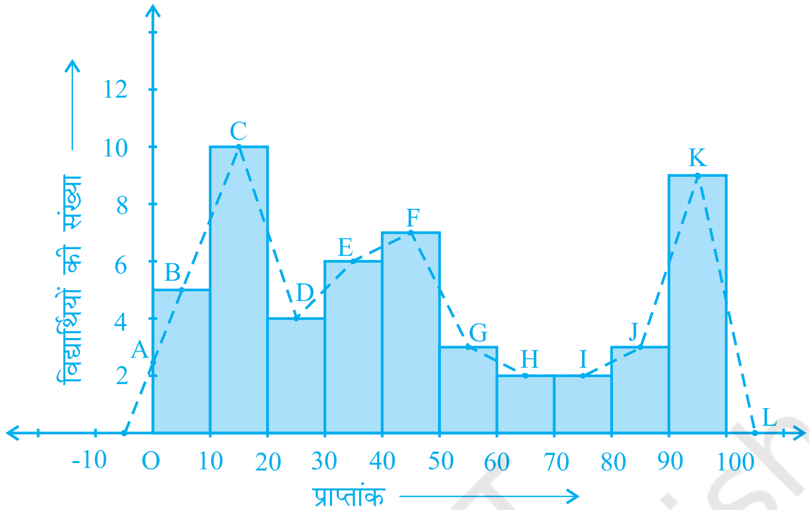
उदाहरण 8 : एक परीक्षा में एक कक्षा के 51 विद्यार्थियों द्वारा 100 में से प्राप्त किए अंक सारणी 14.9 में दिए गए हैं :

सारणी 14.9

अंक	विद्यार्थियों की संख्या
0 - 10	5
10 - 20	10
20 - 30	4
30 - 40	6
40 - 50	7
50 - 60	3
60 - 70	2
70 - 80	2
80 - 90	3
90 - 100	9
कुल योग	51

इस बारंबारता बंटन सारणी के संगत बारंबारता बहुभुज बनाइए।

हल : आइए पहले हम इन आंकड़ों से एक आयतचित्र बनाएँ और आयतों की ऊपरी भुजाओं के मध्य-बिन्दुओं को क्रमशः B, C, D, E, F, G, H, I, J, K से प्रकट करें। यहाँ पहला वर्ग 0–10 है। अतः 0–10 से ठीक पहले का वर्ग ज्ञात करने के लिए, हम क्षैतिज अक्ष को ऋणात्मक दिशा में बढ़ाते हैं और काल्पनिक वर्ग अंतराल (–10)–0 का मध्य-बिंदु ज्ञात करते हैं। प्रथम अंत बिंदु (end point), अर्थात् B को क्षैतिज अक्ष की ऋणात्मक दिशा में शून्य बारंबारता वाले इस मध्य-बिंदु से मिला दिया जाता है। वह बिंदु जहाँ यह रेखाखंड ऊर्ध्वाधर अक्ष से मिलता है, उसे A से प्रकट करते हैं। मान लीजिए दिए हुए आंकड़ों के अंतिम वर्ग के ठीक बाद वाले वर्ग का मध्य-बिंदु L है। तब OABCDEFGHIJKL वाँछित बारंबारता बहुभुज है, जिसे आकृति 14.7 में दिखाया गया है।



आकृति 14.7

आयतचित्र बनाए बिना ही बारंबारता बहुभुजों को स्वतंत्र रूप से भी बनाया जा सकता है। इसके लिए हमें आंकड़ों में प्रयुक्त वर्ग अंतरालों के मध्य-बिन्दुओं की आवश्यकता होती है। वर्ग अंतरालों के इन मध्य-बिंदुओं को **वर्ग-चिह्न (class-marks)** कहा जाता है।

किसी वर्ग अंतराल का वर्ग-चिह्न ज्ञात करने के लिए, हम उस वर्ग अंतराल की उपरि सीमा (upper limit) और निम्न सीमा (lower limit) का योग ज्ञात करते हैं और इस योग को 2 से भाग दे देते हैं। इस तरह,

$$\text{वर्ग-चिह्न} = \frac{\text{उपरि सीमा} + \text{निम्न सीमा}}{2}$$

आइए अब हम एक उदाहरण लें।

उदाहरण 9 : एक नगर में निर्वाह खर्च सूचकांक (cost of living index) का अध्ययन करने के लिए निम्नलिखित साप्ताहिक प्रेक्षण किए गए :

सारणी 14.10

निर्वाह खर्च सूचकांक	सप्ताहों की संख्या
140 - 150	5
150 - 160	10
160 - 170	20
170 - 180	9
180 - 190	6
190 - 200	2
कुल योग	52

ऊपर दिए गए आंकड़ों का एक बारंबारता बहुभुज (आयतचित्र बनाए बिना) खींचए।

हल : क्योंकि आयतचित्र बनाए बिना हम एक बारंबारता बहुभुज खींचना चाहते हैं, इसलिए आइए हम ऊपर दिए हुए वर्ग अंतरालों, अर्थात् 140 - 150, 150 - 160,.... के वर्ग-चिह्न ज्ञात करें।

वर्ग अंतराल 140 - 150 की उपरि सीमा = 150 और निम्न सीमा = 140 है।

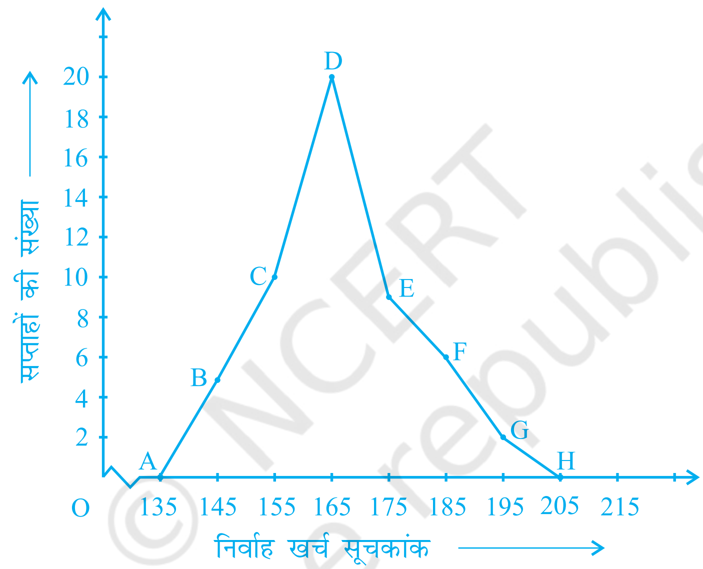
अत:, वर्ग-चिह्न $= \dfrac{150 + 140}{2} = \dfrac{290}{2} = 145$

इसी प्रकार, हम अन्य वर्ग अंतरालों के वर्ग-चिह्न ज्ञात कर सकते हैं। इस प्रकार प्राप्त नई सारणी नीचे दिखाई गई है:

सारणी 14.11

वर्ग	वर्ग-चिह्न	बारंबारता
140 - 150	145	5
150 - 160	155	10
160 - 170	165	20
170 - 180	175	9
180 - 190	185	6
190 - 200	195	2
कुल योग		52

अब क्षैतिज अक्ष पर वर्ग-हचह्न आलेखित करके, ऊर्ध्वाधर अक्ष पर बारंबारताएँ आलेखित करके और फिर बिन्दुओं B(145, 5), C(155, 10), D(165, 20), E(175, 9), F(185, 6) और G(195, 2) को आलेखित करके और उन्हें रेखाखंडों से मिलाकर हम बारंबारता बहुभुज खींच सकते हैं। हमें शून्य बारंबारता के साथ वर्ग 130–140 (जो निम्नतम वर्ग 140–150 के ठीक पहले है) के वर्ग चिह्न के संगत बिंदु A(135, 0) को और G(195, 2) के तुरन्त बाद में आने वाले बिंदु H(205, 0) को आलेखित करना भूलना नहीं चाहिए। इसलिए परिणामी बारंबारता बहुभुज ABCDEFGH होगा (देखिए आकृति 14.8)।



आकृति 14.8

बारंबारता बहुभुज का प्रयोग तब किया जाता है जबकि आंकड़ें संतत और बहुत अधिक होते हैं। यह समान प्रकृति के दो अलग-अलग आंकड़ों की तुलना करने में, अर्थात् एक ही कक्षा के दो अलग-अलग सेक्शनों के प्रदर्शनों की तुलना करने में अधिक उपयोगी होता है।

प्रश्नावली 14.3

1. एक संगठन ने पूरे विश्व में 15–44 (वर्षों में) की आयु वाली महिलाओं में बीमारी और मृत्यु के कारणों का पता लगाने के लिए किए गए सर्वेक्षण से निम्नलिखित आंकड़े (% में) प्राप्त किए:

क्र. सं.	कारण	महिला मृत्यु दर (%)
1.	जनन स्वास्थ्य अवस्था	31.8
2.	तंत्रिका मनोविकारी अवस्था	25.4
3.	क्षति	12.4
4.	हृदय वाहिका अवस्था	4.3
5.	श्वसन अवस्था	4.1
6.	अन्य कारण	22.0

(i) ऊपर दी गई सूचनाओं को आलेखीय रूप में निरूपित कीजिए।

(ii) कौन-सी अवस्था पूरे विश्व की महिलाओं के खराब स्वास्थ्य और मृत्यु का बड़ा कारण है?

(iii) अपनी अध्यापिका की सहायता से ऐसे दो कारणों का पता लगाने का प्रयास कीजिए जिनकी ऊपर (ii) में मुख्य भूमिका रही हो।

2. भारतीय समाज के विभिन्न क्षेत्रों में प्रति हजार लड़कों पर लड़कियों की (निकटतम दस तक की) संख्या के आंकड़े नीचे दिए गए हैं:

क्षेत्र	प्रति हजार लड़कों पर लड़कियों की संख्या
अनुसूचित जाति	940
अनुसूचित जनजाति	970
गैर अनुसूचित जाति/जनजाति	920
पिछड़े जिले	950
गैर पिछड़े जिले	920
ग्रामीण	930
शहरी	910

(i) ऊपर दी गई सूचनाओं को एक दंड आलेख द्वारा निरूपित कीजिए।

(ii) कक्षा में चर्चा करके, बताइए कि आप इस आलेख से कौन-कौन से निष्कर्ष निकाल सकते हैं।

3. एक राज्य के विधान सभा के चुनाव में विभिन्न राजनैतिक पार्टियों द्वारा जीती गई सीटों के परिणाम नीचे दिए गए हैं :

राजनैतिक पार्टी	A	B	C	D	E	F
जीती गई सीटें	75	55	37	29	10	37

(i) मतदान के परिणामों को निरूपित करने वाला एक दंड आलेख खींचिए।

(ii) किस राजनैतिक पार्टी ने अधिकतम सीटें जीती हैं?

4. एक पौधे की 40 पत्तियों की लंबाइयाँ एक मिलीमीटर तक शुद्ध मापी गई हैं और प्राप्त आंकड़ों को निम्नलिखित सारणी में निरूपित किया गया है :

लंबाई (मिलीमीटर में)	पत्तियों की संख्या
118 - 126	3
127 - 135	5
136 - 144	9
145 - 153	12
154 - 162	5
163 - 171	4
172 - 180	2

(i) दिए हुए आंकड़ों को निरूपित करने वाला एक आयतचित्र खींचिए।

(ii) क्या इन्हीं आंकड़ों को निरूपित करने वाला कोई अन्य उपयुक्त आलेख है?

(iii) क्या यह सही निष्कर्ष है कि 153 मिलीमीटर लम्बाई वाली पत्तियों की संख्या सबसे अधिक है? क्यों?

5. नीचे की सारणी में 400 नियॉन लैम्पों के जीवन काल दिए गए हैं :

जीवन काल (घंटों में)	लैम्पों की संख्या
300 - 400	14
400 - 500	56
500 - 600	60
600 - 700	86
700 - 800	74
800 - 900	62
900 - 1000	48

(i) एक आयतचित्र की सहायता से दी हुई सूचनाओं को निरूपित कीजिए।

(ii) कितने लैम्पों के जीवन काल 700 घंटों से अधिक हैं?

6. नीचे की दो सारणियों में प्राप्त किए गए अंकों के अनुसार दो सेक्शनों के विद्यार्थियों का बंटन दिया गया है :

सेक्शन A		सेक्शन B	
अंक	**बारंबारता**	**अंक**	**बारंबारता**
0 - 10	3	0 - 10	5
10 - 20	9	10 - 20	19
20 - 30	17	20 - 30	15
30 - 40	12	30 - 40	10
40 - 50	9	40 - 50	1

दो बारंबारता बहुभुजों की सहायता से एक ही आलेख पर दोनों सेक्शनों के विद्यार्थियों के प्राप्तांक निरूपित कीजिए। दोनों बहुभुजों का अध्ययन करके दोनों सेक्शनों के निष्पादनों की तुलना कीजिए।

7. एक क्रिकेट मैच में दो टीमों A और B द्वारा प्रथम 60 गेंदों मे बनाए गए रन नीचे दिए गए हैं:

गेदों की संख्या	टीम A	टीम B
1 - 6	2	5
7 - 12	1	6
13 - 18	8	2
19 - 24	9	10
25 - 30	4	5
31 - 36	5	6
37 - 42	6	3
43 - 48	10	4
49 - 54	6	8
55 - 60	2	10

बारंबारता बहुभुजों की सहायता से एक ही आलेख पर दोनों टीमों के आंकड़े निरूपित कीजिए।

(**संकेत :** पहले वर्ग अंतरालों को संतत बनाइए)

8. एक पार्क में खेल रहे विभिन्न आयु वर्गों के बच्चों की संख्या का एक यादृच्छिक सर्वेक्षण (random survey) करने पर निम्नलिखित आंकड़े प्राप्त हुए :

आयु (वर्षों में)	बच्चों की संख्या
1 - 2	5
2 - 3	3
3 - 5	6
5 - 7	12
7 - 10	9
10 - 15	10
15 - 17	4

ऊपर दिए आंकड़ों को निरूपित करने वाला एक आयतचित्र खींचिए।

9. एक स्थानीय टेलीफोन निर्देशिका से 100 कुलनाम (surname) यदृच्छया लिए गए और उनसें अंग्रेजी वर्णमाला के अक्षरों की संख्या का निम्न बारंबारता बंटन प्राप्त किया गया :

वर्णमाला के अक्षरों की संख्या	कुलनामों की संख्या
1 - 4	6
4 - 6	30
6 - 8	44
8 - 12	16
12 - 20	4

(i) दी हुई सूचनाओं को निरूपित करने वाला एक आयतचित्र खींचिए।

(ii) वह वर्ग अंतराल बताइए जिसमें अधिकतम संख्या में कुलनाम हैं।

14.5 केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप

अभी तक इस अध्याय में, हमने बारंबारता बंटन सारणियों, दंड-आलेखों, आयतचित्रों और बारंबारता बहुभुजों की सहायता से आंकड़ों को विभिन्न रूपों में प्रस्तुत किया है। अब प्रश्न यह उठता है कि क्या आंकड़ों को अर्थपूर्ण बनाने के लिए हमें सदैव ही सभी आंकड़ों का अध्ययन करने की आवश्यकता होती है या क्या हम इन आंकड़ों के केवल कुछ प्रतिनिधि लेकर इनके कुछ महत्वपूर्ण अभिलक्षणों का पता लगा सकते हैं। केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापों (measures of central tendency) या औसतों की सहायता से ऐसा किया जा सकता है।

एक ऐसी स्थिति लीजिए जहाँ दो विद्यार्थियों मैरी और हरि को उनकी परीक्षा कापियाँ दी गई हैं। परीक्षा में 10–10 अंकों के पाँच प्रश्न थे। इस परीक्षा में उनके प्राप्तांक ये थे:

प्रश्न की क्रम संख्या	1	2	3	4	5
मैरी के प्राप्तांक	10	8	9	8	7
हरि के प्राप्तांक	4	7	10	10	10

परीक्षा की कापियाँ प्राप्त होने पर दोनों के औसत प्राप्तांक ये थे :

$$\text{मैरी का औसत प्राप्तांक} = \frac{42}{5} = 8.4$$

$$\text{हरि का औसत प्राप्तांक} = \frac{41}{5} = 8.2$$

क्योंकि मैरी का औसत प्राप्तांक हरि के औसत प्राप्तांक से अधिक था, इसलिए मैरी का कहना था कि परीक्षा में हरि की तुलना में उसका प्रदर्शन अच्छा रहा है। परन्तु हरि इससे सहमत नहीं था। उसने दोनों के प्राप्तांकों को आरोही क्रम में रखा और मध्य प्राप्तांक इस प्रकार प्राप्त किया:

मैरी का प्राप्तांक	7	8	8	9	10
हरि का प्राप्तांक	4	7	10	10	10

हरि का कहना था कि उसका सबसे मध्य का प्राप्तांक 10 था, जो कि मैरी के सबसे मध्य के प्राप्तांक अर्थात् 8 से अधिक था। इसलिए परीक्षा में उसके प्रदर्शन को उत्तम माना जाना चाहिए।

परन्तु मैरी उसके तर्क से सहमत नहीं थी। मैरी को अपने कथन से सहमत कराने के लिए हरि ने एक अन्य युक्ति अपनाई। उसने बताया कि उसने 10 अंक अधिक बार (3 बार) प्राप्त किए हैं जबकि मैरी ने 10 अंक केवल एक बार प्राप्त किए हैं। अत:, परीक्षा में उसका प्रदर्शन उत्तम रहा है।

हरि और मैरी के इस विवाद को सुलझाने के लिए उनके द्वारा अपनाए गए तीन मापों को देखें और यह पता लगाएँ कि इन तीनों मापों में से कौन-सा माप निर्णायक सिद्ध होता है।

पहली स्थिति में मैरी ने जो औसत प्राप्तांक प्राप्त किया था वह *माध्य* (*mean*) है। मध्य प्राप्तांक जिसको हरि ने अपने तर्क में प्रयोग किया था वह *माध्यक* (*median*) है। अपनी दूसरी युक्ति में हरि ने अधिक बार अधिक अंक प्राप्त करने की बात कही थी वह *बहुलक* (*mode*) है।

आइए पहले हम माध्य पर विस्तार से चर्चा करें।

अनेक प्रेक्षणों का **माध्य** (या **औसत**) सभी प्रेक्षणों के मानों के योग को प्रेक्षणों की कुल संख्या से भाग देने पर प्राप्त होता है।

इसे प्रतीक $\overline{x}$ से, जिसे x दंड (x *bar*) पढ़ा जाता है, प्रकट किया जाता है।

आइए हम एक उदाहरण लें:

उदाहरण 10 : 5 व्यक्तियों से यह पूछा गया कि अपने समुदाय के सामाजिक कार्य करने में वे एक सप्ताह में कितना समय देते हैं। उनका कहना था: क्रमशः 10, 7, 13, 20 और 15 घंटे। एक सप्ताह में उनके द्वारा सामाजिक कार्य में लगाए समयों का माध्य (या औसत) ज्ञात कीजिए।

हल : हम अपनी पिछली कक्षाओं में यह पढ़ चुके हैं कि प्रेक्षणों का माध्य

$$= \frac{\text{सभी प्रेक्षणों का योग}}{\text{प्रेक्षणों की कुल संख्या}}$$

माध्य ज्ञात करने की विधि को सरल बनाने के लिए आइए हम एक चर x_i लें, जो i वें प्रेक्षण को प्रकट करता है। यहाँ पर i, 1 से 5 तक कोई भी मान ले सकता है। अतः हमारा पहला प्रेक्षण x_1 है, दूसरा प्रेक्षण x_2 है और इस प्रकार पाँचवा प्रेक्षण x_5 है।

साथ ही, $x_1 = 10$ का अर्थ यह है कि पहले प्रेक्षण का मान, जिसे x_1 से प्रकट किया गया है, 10 है। इसी प्रकार, $x_2 = 7, x_3 = 13, x_4 = 20$ और $x_5 = 15$ है।

अतः, $$\text{माध्य } \overline{x} = \frac{\text{सभी प्रेक्षणों का योग}}{\text{प्रेक्षणों की कुल संख्या}}$$

$$= \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5}$$

$$= \frac{10 + 7 + 13 + 20 + 15}{5} = \frac{65}{5} = 13$$

अतः, 5 व्यक्तियों द्वारा एक सामाजिक कार्य करने में एक सप्ताह में लगाया गया माध्य समय 13 घंटे था।

अब 30 व्यक्तियों द्वारा सामाजिक कार्य करने में लगाया गया माध्य समय ज्ञात करने के लिए, हमें $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{30}$ लिखना होगा, जो एक कठिन कार्य है। हम संकलन (summation) के लिए ग्रीक प्रतीक Σ (अक्षर सिग्मा के लिए) का प्रयोग करते हैं। अतः

$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{30}$ के स्थान पर, हम $\sum_{i=1}^{30} x_i$ लिखते हैं, जिसे x_i का योग पढ़ा जाता है, जबकि i का मान 1 से 30 तक विचरण करता है।

अत:, $$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{30} x_i}{30}$$

इसी प्रकार, यदि प्रेक्षणों की संख्या n हो, तो

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

उदाहरण 11 : एक विद्यालय की नवीं कक्षा के 30 विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त किए गए अंकों, जो उदाहरण 2 में दिए गए हैं, का माध्य ज्ञात कीजिए।

हल : $\bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{30}}{30}$ का प्रयोग करने पर, माध्य इस प्रकार ज्ञात किया जाएगा:

$$\sum_{i=1}^{30} x_i = 10 + 20 + 36 + 92 + 95 + 40 + 50 + 56 + 60 + 70 + 92 + 88 + 80 + 70 + 72 + 70 + 36 + 40 + 36 + 40 + 92 + 40 + 50 + 50 + 56 + 60 + 70 + 60 + 60 + 88 = 1779$$

अत:, $$\bar{x} = \frac{1779}{30} = 59.3$$

क्या इस प्रक्रिया को लागू करने में काफी समय नहीं लगता है? क्या हम इस प्रक्रिया को सरल बना सकते हैं? ध्यान दीजिए कि हम इन आंकड़ों की एक बारंबारता सारणी पहले ही बना चुके हैं (देखिए सारणी 14.1)।

इस सारणी को देखने से यह पता चलता है कि 1 विद्यार्थी ने 10 अंक प्राप्त किए थे, 1 विद्यार्थी ने 20 अंक प्राप्त किए थे, 3 विद्यार्थियों ने 36 अंक प्राप्त किए थे, 4 विद्यार्थियों ने 40 अंक प्राप्त किए थे, 3 विद्यार्थियों ने 50 अंक प्राप्त किए थे, 2 विद्यार्थियों ने 56 अंक प्राप्त किए थे, 4 विद्यार्थियों ने 60 अंक प्राप्त किए थे, 4 विद्यार्थियों ने 70 अंक प्राप्त किए थे, 1 विद्यार्थी ने 72 अंक प्राप्त किए थे, 1 विद्यार्थी ने 80 अंक प्राप्त किए थे, 2 विद्यार्थियों ने 88 अंक प्राप्त किए थे, 3 विद्यार्थियों ने 92 अंक प्राप्त किए थे और 1 विद्यार्थी ने 95 अंक प्राप्त किए थे।

अत: प्राप्त किए गए कुल अंक $= (1 \times 10) + (1 \times 20) + (3 \times 36) + (4 \times 40) + (3 \times 50) + (2 \times 56) + (4 \times 60) + (4 \times 70) + (1 \times 72) + (1 \times 80) + (2 \times 88) + (3 \times 92) + (1 \times 95)$

$= f_1 x_1 + \ldots + f_{13} x_{13}$, जबकि f_i सारणी 14.1 में i वीं प्रविष्टि की बारंबारता है।

संक्षेप में, हम इसे $\sum_{i=1}^{13} f_i x_i$ लिख सकते हैं।

इसलिए, प्राप्त किए गए कुल अंक $= \sum_{i=1}^{13} f_i x_i = f_1 x_1 + \ldots + f_{13} x_{13}$

$$= 10 + 20 + 108 + 160 + 150 + 112 + 240 + 280 + 72 + 80 + 176 + 276 + 95 = 1779$$

अब, प्रेक्षणों की कुल संख्या $= f_1 + f_2 + \ldots + f_{13}$ $(= \sum_{i=1}^{13} f_i)$

$$= 1 + 1 + 3 + 4 + 3 + 2 + 4 + 4 + 1 + 1 + 2 + 3 + 1 = 30$$

अत:, माध्य $\overline{x} = \dfrac{\text{सभी प्रेक्षणों का योग}}{\text{प्रेक्षणों की कुल संख्या}} = \left(\dfrac{\sum_{i=1}^{13} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{13} f_i} \right)$

$$= \frac{1779}{30}$$

इस प्रक्रम को सारणी के रूप में इस प्रकार प्रदर्शित किया जा सकता है, जो कि सारणी 14.1 का परिवर्तित रूप है:

सारणी 14.12

अंक (x_i)	विद्यार्थियों की संख्या (f_i)	$f_i x_i$
10	1	10
20	1	20
36	3	108
40	4	160
50	3	150
56	2	112
60	4	240
70	4	280
72	1	72
80	1	80
88	2	176
92	3	276
95	1	95
	$\sum_{i=1}^{13} f_i = 30$	$\sum_{i=1}^{13} f_i x_i = 1779$

अतः, अवर्गीकृत बारंबारता बंटन में माध्य परिकलित करने के लिए, आप सूत्र

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

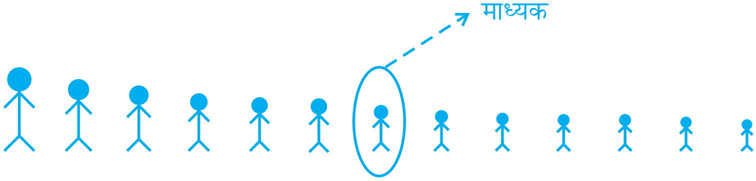
का प्रयोग कर सकते हैं।

आइए अब हम हरि और मैरी के बीच हुए विवाद वाली स्थिति पर पुनः लौट आएँ और उस दूसरी स्थिति पर विचार करें जिसमें अधिकतम मध्य अंक प्राप्त करके हरि ने अपना प्रदर्शन उत्तम बताया था। जैसा कि पहले बताया जा चुका है, केन्द्रीय प्रवृत्ति (central tendency) के इस माप को *माध्यक* (*median*) कहा जाता है।

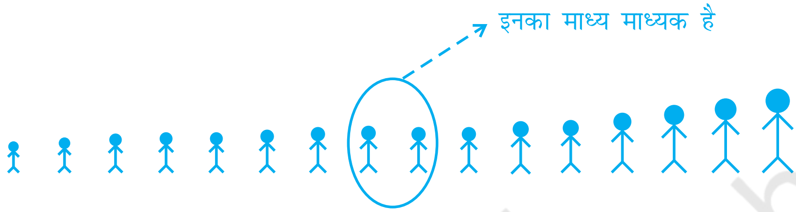
माध्यक दिए हुए प्रेक्षणों में वह मान होता हैं जो इसे ठीक-ठीक दो भागों में विभक्त कर देता है। अतः जब आंकड़ों को आरोही (या अवरोही) क्रम में लिखते हैं, तब अवर्गीकृत आंकड़ों के माध्यक का परिकलन इस प्रकार किया जाता है :

(i) जब प्रेक्षणों की संख्या (n) विषम होती है, तब माध्यक $\left(\frac{n+1}{2}\right)$वें प्रेक्षण का मान होता है। उदाहरण के लिए, यदि n है, = 13, तो $\left(\frac{13+1}{2}\right)$वें, अर्थात् 7वें प्रेक्षण का मान माध्यक होगा [देखिए आकृति 14.9 (i)]।

(ii) जब प्रेक्षणों की संख्या (n) सम होती है, तब माध्यक $\left(\frac{n}{2}\right)$वें और $\left(\frac{n}{2}+1\right)$वें प्रेक्षणों का माध्य होता है। उदाहरण के लिए, यदि $n = 16$ है, तो $\left(\frac{16}{2}\right)$वें और $\left(\frac{16}{2}+1\right)$वें प्रेक्षणों के मानों का माध्य, अर्थात् 8वें और 9वें प्रेक्षणों के मानों का माध्य ही माध्यक होगा [देखिए आकृति 14.9 (ii)]।



(i)



(ii)

आकृति 14.9

आइए अब हम कुछ उदाहरणों की सहायता से इसे और अच्छी तरह से समझने का प्रयास करें।

उदाहरण 12 : एक कक्षा के 9 विद्यार्थियों की (सेंटीमीटरों में) लंबाइयाँ ये हैं:

155 160 145 149 150 147 152 144 148

इन आंकड़ों का माध्यक ज्ञात कीजिए।

हल : सबसे पहले हम इन आंकड़ों को आरोही क्रम में इस प्रकार लिखते हैं:

144 145 147 148 149 150 152 155 160

क्योंकि विद्यार्थियों की संख्या 9 है, अर्थात् विषम है, इसलिए हम $\frac{n+1}{2}$ वें $= \frac{9+1}{2}$ वें $= 5$ वें विद्यार्थी की लंबाई, जो कि 149 सेंटीमीटर है, ज्ञात करके माध्यक प्राप्त कर लेते हैं।

अतः माध्यक लंबाई 149 सेंटीमीटर है।

उदाहरण 13 : कबड्डी की एक टीम द्वारा अनेक मैचों में प्राप्त किए गए अंक ये हैं:

17, 2, 7, 27, 15, 5, 14, 8, 10, 24, 48, 10, 8, 7, 18, 28

टीम द्वारा प्राप्त किए गए अंकों का माध्यक ज्ञात कीजिए।

हल : टीम द्वारा प्राप्त किए गए अंकों को आरोही क्रम में लिखने पर, हमें यह प्राप्त होता है :

2, 5, 7, 7, 8, 8, 10, 10, 14, 15, 17, 18, 24, 27, 28, 48.

यहाँ 16 पद हैं। इसलिए यहाँ दो मध्य पद हैं। ये $\frac{16}{2}$ वें और $\left(\frac{16}{2}+1\right)$वें अर्थात् 8 वें और 9 वें पद हैं।

अतः, 8वें और 9वें पदों के मानों का माध्य ही माध्यक होगा है।

इसलिए, माध्यक $= \frac{10+14}{2} = 12$

अतः, कबड्डी टीम द्वारा प्राप्त किए गए माध्यक अंक 12 हैं।

आइए अब हम पुनः हेरि और मैरी के बीच हुए विवादों वाली स्थिति को लें।

औसत ज्ञात करने के लिए हरि द्वारा अपनाया गया तीसरा माप *बहुलक* (*mode*) था।

बहुलक प्रेक्षण का वह मान होता है जो बार–बार घटित होता रहता है, अर्थात् अधिकतम बारंबारता वाले प्रेक्षण को बहुलक कहा जाता है।

रेडीमेड गार्मेन्ट (सिले सिलाए वस्त्र) उद्योग और जूता उद्योग केन्द्रीय प्रवृत्ति के इस माप का प्रयोग काफी करते हैं। बहुलक की सहायता से ये उद्योग यह निर्णय ले लेते हैं कि किस साइज या माप का उत्पादन अधिक वृहत् संख्या में करनी चाहिए।

इसे और अच्छी तरह से समझने के लिए आइए हम एक उदाहरण लें।

उदाहरण 14 : 20 विद्यार्थियों द्वारा (10 में से) प्राप्त किए गए निम्नलिखित अंकों का बहुलक ज्ञात कीजिए

4, 6, 5, 9, 3, 2, 7, 7, 6, 5, 4, 9, 10, 10, 3, 4, 7, 6, 9,9

हल : हम इन आंकड़ों को निम्न रूप में लिखते हैं :

2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 9, 9, 9, 9, 10, 10

यहाँ 9 सबसे अधिक बार, अर्थात् चार बार आया है। अतः, बहुलक 9 है।

उदाहरण 15 : एक फैक्टरी की एक छोटी इकाई लीजिए जहाँ 5 व्यक्ति काम करते हैं, जिनमें एक सुपरवाइजर है और चार मजदूर हैं। प्रत्येक मजदूर को प्रति माह ₹5000 वेतन मिलता है, जबकि सुपरवाइजर को प्रति माह ₹15000 वेतन मिलता है। फैक्टरी की इस इकाई के वेतनों के माध्य, माध्यक और बहुलक परिकलित कीजिए।

हल : माध्य $= \dfrac{5000 + 5000 + 5000 + 5000 + 15000}{5} = \dfrac{35000}{5} = 7000$

अतः, माध्य वेतन ₹7000 प्रति माह है।

माध्यक ज्ञात करने के लिए, हम वेतनों को इस प्रकार आरोही क्रम में इस प्रकार रखते हैं:

5000, 5000, 5000, 5000, 15000

क्योंकि फैक्टरी की इकाई में काम करने वाले लोगों की संख्या 5 है, इसलिए माध्यक प्रेक्षण $\dfrac{5+1}{2}$ वाँ $= \dfrac{6}{2}$ वाँ = तीसरा प्रेक्षण होगा। अतः, माध्यक तीसरे प्रेक्षण का मान, अर्थात् 5000 रु प्रति माह होगा।

वेतनों का बहुलक, अर्थात् बहुलक वेतन ज्ञात करने के लिए, यहाँ हम यह पाते हैं कि आंकड़ों 5000, 5000, 5000, 5000, 15000 में 5000 अधिकतम बार आता है। इसलिए, बहुलक वेतन ₹5000 प्रति माह है।

अब ऊपर के उदाहरण में दिए गए आंकड़ों के केन्द्रीय प्रवृत्ति के तीनों मापों की तुलना कीजिए। यहाँ आप यह देख सकते हैं कि ₹7000 के माध्य वेतन से मजदूरों की मजदूरियों का कोई भी सन्निकट आकलन (approximate estimate) प्राप्त नहीं होता। जबकि ₹5000 के माध्यक और बहुलक वेतनों से आंकड़ों का एक निरूपण अधिक प्रभावशाली ढंग से प्राप्त हो जाता है।

आंकड़ों के चरम मानों से माध्य प्रभावित होता है। यह माध्य की एक दुर्बलता है। यदि आंकड़ों के कुछ अंकों में अंतर बहुत अधिक हो (जैसे 1, 7, 8, 9, 9), तो इस स्थिति में माध्य इन आंकड़ों का उत्तम प्रतिनिधित्व नहीं करता। क्योंकि आंकड़ों में उपस्थित चरम मानों से माध्यक और बहुलक प्रभावित नहीं होते हैं, इसलिए इस स्थिति में इनसेदिए हुए आंकड़ों का एक उत्तम प्रतिनिधित्व होता है।

आइए अब हम पुनः हरि और मैरी वाली स्थिति लें और केन्द्रीय प्रवृत्ति के तीन मापों की तुलना करें।

केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापक	हरि	मैरी
माध्य	8.2	8.4
माध्यक	10	8
बहुलक	10	8

इस हल की सहायता से केन्द्रीय प्रवृत्ति के केवल इन तीन मापों के ज्ञान से यह नहीं बताया जा सकता है कि हरि और मैरी में किसका प्रदर्शन अधिक उत्तम है। इसके लिए कुछ और अधिक जानकारी का होना आवश्यक है, जिनका अध्ययन आप उच्च कक्षाओं में करेंगे।

प्रश्नावली 14.4

1. एक टीम ने फुटबाल के 10 मैचों में निम्नलिखित गोल किए :

2, 3, 4, 5, 0, 1, 3, 3, 4, 3

इन गोलों के माध्य, माध्यक और बहुलक ज्ञात कीजिए।

2. गणित की परीक्षा में 15 विद्यार्थियों ने (100 में से) निम्नलिखित अंक प्राप्त किए :

41, 39, 48, 52, 46, 62, 54, 40, 96, 52, 98, 40, 42, 52, 60

इन आंकड़ों के माध्य, माध्यक और बहुलक ज्ञात कीजिए।

3. निम्नलिखित प्रेक्षणों को आरोही क्रम में व्यवस्थित किया गया है। यदि आंकड़ों का माध्यक 63 हो, तो x का मान ज्ञात कीजिए :

29, 32, 48, 50, x, $x+2$, 72, 78, 84, 95

4. आंकड़ों 14, 25, 14, 28, 18, 17, 18, 14, 23, 22, 14, 18 का बहुलक ज्ञात कीजिए।

5. निम्न सारणी से एक फैक्टरी में काम कर रहे 60 कर्मचारियों का माध्य वेतन ज्ञात कीजिए:

वेतन (रुपयों में)	कर्मचारियों की संख्या
3000	16
4000	12
5000	10
6000	8
7000	6
8000	4
9000	3
10000	1
कुल योग	60

6. निम्न स्थिति पर आधारित एक उदाहरण दीजिए

(i) माध्य ही केन्द्रीय प्रवृत्ति का उपयुक्त माप है।

(ii) माध्य केन्द्रीय प्रवृत्ति का उपयुक्त माप नहीं है, जबकि माध्यक एक उपयुक्त माप है।

14.6 सारांश

इस अध्याय में, आपने निम्नलिखित बिंदुओं का अध्ययन किया है:

1. एक निश्चित उद्देश्य से एकत्रित किए गए तथ्यों या अंकों को आंकड़े कहा जाता है।

2. सांख्यिकी अध्ययन का वह क्षेत्र है जिसमें आंकड़ों के प्रति प्रस्तुतिकरण, विश्लेषण तथा निर्वचन पर विचार किया जाता है।

3. किस प्रकार आंकड़ों को आलेखों, आयतचित्रों तथा बारंबारता बहुभुजों द्वारा आलेखीय रूप में प्रस्तुत किया जा सकता है।

4. अवर्गीकृत आंकड़ों की केन्द्रीय प्रवृत्ति के तीन माप हैं :

(i) माध्य: प्रेक्षणों के सभी मानों के योग को प्रेक्षणों की कुल संख्या से भाग देने पर यह प्राप्त हो जाता है। इसे $\bar{x}$ से प्रकट किया जाता है।

अत:, $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ है। अवर्गीकृत बारंबारता बंटन के लिए यह $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$ होता है।

(ii) माध्यक : यह सबसे मध्य वाले प्रेक्षण का मान होता है।

यदि n विषम संख्या है, तो माध्यक $= \left(\dfrac{n+1}{2}\right)$वें प्रेक्षण का मान

यदि n सम संख्या है, तो माध्यक $= \left(\dfrac{n}{2}\right)$वें और $\left(\dfrac{n}{2}+1\right)$ वें प्रेक्षणों के मानों का माध्य।

(iii) बहुलक : बहुलक सबसे अधिक बार आने वाला प्रेक्षण का मान होता है।

0963CH15

अध्याय 15

प्रायिकता

It is remarkable that a science, which began with the consideration of games of chance, should be elevated to the rank of the most important subject of human knowledge.
(उल्लेखनीय है कि वह विज्ञान जिसकी व्युत्पत्ति संयोग के खेल से हुई है, वह मानव ज्ञान के अति महत्वपूर्ण विषय की ऊँचाइयों तक पहुँच जाती है।)

—Pierre Simon Laplace

15.1 भूमिका

हमें अपने दैनिक जीवन में इस प्रकार के कथन सुनने को मिलते रहते हैं :

(1) **संभवत:** आज वर्षा होगी।

(2) मुझे **संदेह** है कि वह इस परीक्षा में उत्तीर्ण होगा।

(3) वार्षिक परीक्षा में कविता के प्रथम आने की **संभावना सबसे अधिक** है।

(4) डीजल की कीमत बढ़ने का **संयोग** काफी अधिक है।

(5) आज के मैच में भारत के टॉस जीतने का **संयोग** 50-50 है।

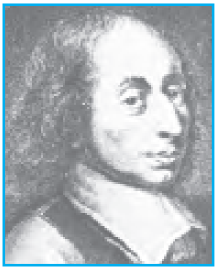
यहाँ ऊपर के कथनों में प्रयुक्त 'संभवत:', 'संदेह', 'संयोग' आदि शब्दों में अनिश्चितता की भावना बनी रहती है। उदाहरण के लिए, (1) में 'संभवत: वर्षा होगी' का अर्थ यह होगा कि वर्षा हो भी सकती है और नहीं भी हो सकती है। वर्षा होने की प्रागुक्ति (prediction) हम अपने उन पिछले अनुभवों से करते हैं जबकि इसी प्रकार की अवस्थाओं के होने पर वर्षा हुई थी। इसी प्रकार की प्रागुक्तियाँ (2) से (5) तक की स्थितियों के संबंध में भी की जाती है।

अनेक स्थितियों में 'प्रायिकता' (probability) की सहायता से 'संभवत:' आदि जैसी अनिश्चितता का संख्यात्मक रूप से मापन किया जा सकता है।

यद्यपि प्रायिकता की व्युत्पत्ति जुए के खेल से हुई थी, फिर भी इसका व्यापक प्रयोग भौतिक विज्ञान, वाणिज्य, जैविक विज्ञान, आयुर्विज्ञान, मौसम का पूर्वानुमान आदि क्षेत्रों में हो रहा है।

15.2 प्रायिकता – एक प्रायोगिक दृष्टिकोण

पिछली कक्षाओं में आप प्रायिकता का आभास कुछ प्रयोग जैसे सिक्के उछालना, पासा फेंकना आदि में कर चुके हैं और उनके *परिणाम* (outcome) देख चुके हैं। अब आप देखेंगे कि एक प्रयोग में एक विशेष परिणाम के घटने का संयोग (chance) किस प्रकार मापा जाता है।



ब्लेज पास्कल
(1623–1662)
आकृति 15.1

प्रायिकता (probability) की संकल्पना का विकास एक आश्चर्यजनक ढंग से हुआ था। 1654 में शेवेलियर डि मेरे नामक जुआरी पासा संबंधी कुछ समस्याओं को लेकर सत्रहवीं शताब्दी के एक सुप्रसिद्ध फ्रांसीसी दार्शनिक और गणितज्ञ ब्लेज पास्कल के पास पहुँचा। पास्कल को इन समस्याओं को हल करने में काफी रूचि आने लगी, वह इन समस्याओं पर अध्ययन करने लगा और एक अन्य फ्रांसीसी गणितज्ञ पियरे दि फर्मा के साथ चर्चा भी की। पास्कल और फर्मा ने इन समस्याओं को स्वतंत्र रूप से अलग-अलग हल किया। यह कार्य ही प्रायिकता सिद्धांत (probability theory) का प्रारंभ था।

पियरे डि फर्मा
(1601–1665)
आकृति 15.2

इस विषय पर पहली पुस्तक इतालवी गणितज्ञ जे. कार्डन (1501–1576) ने लिखी थी। इस पुस्तक का शीर्षक 'Book on Games of Chance' (Liber de Ludo Aleae) था जोकि 1663 में प्रकाशित हुई थी। इस विषय पर गणितज्ञों जे. बर्नूली (1654–1705), पी. लाप्लास (1749–1827), ए.ए. मार्कोव (1856–1922) और ए.एन. कोल्मोगोरोव (जन्म 1903) का भी महत्वपूर्ण योगदान रहा है।

क्रियाकलाप 1 : (i) एक सिक्का लीजिए, उसे दस बार उछालिए और देखिए कि कितनी बार चित आता है और कितनी बार पट आता है। आप अपने प्रेक्षणों को आगे आने वाली सारणी के रूप में लिखिए।

सारणी 15.1

सिक्का उछालने की संख्या	चित आने की संख्या	पट आने की संख्या
10	—	—

नीचे दी गई भिन्नों के मान लिखिए :

$$\frac{\text{चित आने की संख्या}}{\text{सिक्का उछालने की कुल संख्या}}$$

और

$$\frac{\text{पट आने की संख्या}}{\text{सिक्का उछालने की कुल संख्या}}$$

(ii) सिक्के को बीस बार उछालिए और ऊपर की भाँति आप अपने प्रेक्षण लिख लीजिए। प्रेक्षणों के इस संग्रह के लिए ऊपर दिए गए भिन्नों के मान पुनः ज्ञात कीजिए।

(iii) सिक्के को और अधिक बार उछालकर इस प्रयोग को पुनः कीजिए और चित और पट आने की संख्या लिख लीजिए। इसके बाद संगत भिन्नों के मान ज्ञात कीजिए।

आप देखेंगे कि आप जैसे-जैसे सिक्का उछालने की संख्या बढ़ाते जाएँगे, उतना ही भिन्नों का मान 0.5 के निकट होता जाएगा। यह देखने के लिए कि सिक्के को अधिक से अधिक उछालने पर क्या होता है, निम्नलिखित सामूहिक क्रियाकलाप भी किया जा सकता है।

क्रियाकलाप 2 : आप कक्षा को 2 या 3 विद्यार्थियों के वर्गों में बाँट दीजिए। मान लीजिए प्रत्येक वर्ग का एक विद्यार्थी सिक्के को 15 बार उछालता है। प्रत्येक वर्ग के अन्य विद्यार्थी को चाहिए कि वह चित और पट आने के प्रेक्षणों को लिखता जाए (ध्यान दीजिए कि सभी वर्गों को समान मूल्य के सिक्कों का ही प्रयोग करना चाहिए। सिक्कों को उछालते समय ऐसा प्रतीत होना चाहिए कि सभी वर्गों द्वारा केवल एक ही सिक्का उछाला जा रहा है।)

अब श्यामपट्ट पर सारणी 15.2 की भाँति एक सारणी बनाइए। पहले वर्ग 1 अपना प्रेक्षण लिख सकता है और परिणामी भिन्नों का परिकलन कर सकता है। इसके बाद वर्ग 2 अपना प्रेक्षण लिख सकता है, परन्तु उसे भिन्नों का परिकलन वर्ग 1 और वर्ग 2 के संयोजित

आंकड़ों के लिए करना होगा, और इसी प्रकार इस प्रक्रिया को आगे बढ़ाते जाइए। [हम इन भिन्नों को *संचयी भिन्न* (cumulative fractions) कह सकते हैं।] हमने एक कक्षा के विद्यार्थियों द्वारा किए गए प्रेक्षणों के आधार पर सारणी में प्रथम तीन पंक्तियाँ लिखी हैं।

सारणी 15.2

वर्ग (1)	चितों की संख्या (2)	पटों की संख्या (3)	चितों की संचयी संख्या / सिक्का उछालने की कुल संख्या (4)	पटों की संचयी संख्या / सिक्का उछालने की कुल संख्या (5)
1	3	12	$\frac{3}{15}$	$\frac{12}{15}$
2	7	8	$\frac{7+3}{15+15}=\frac{10}{30}$	$\frac{8+12}{15+15}=\frac{20}{30}$
3	7	8	$\frac{7+10}{15+30}=\frac{17}{45}$	$\frac{8+20}{15+30}=\frac{28}{45}$
4	⋮	⋮	⋮	⋮

इस सारणी में आप क्या देखते हैं? आप देखते हैं कि सिक्के के उछालने की संख्या में वृद्धि होने पर स्तंभ (4) और (5) के भिन्नों के मान 0.5 के और निकट होते जाते हैं।

क्रियाकलाप 3 : (i) एक पासे* को 20 बार फेंकिए और पासे पर जो संख्या जैसे 1, 2, 3, 4, 5, 6 जितनी बार आती है उसे लिखते जाइए। अपने प्रेक्षणों को सारणी में लिखिए जैसा, कि सारणी 15.3 में दिया है।

सारणी 15.3

पासा फेंकने की संख्या	पासे पर इन अंकों के आने की संख्या					
	1	2	3	4	5	6
20						

*पासा एक संतुलित घन होता है जिसमें छः फलक होते हैं, जिन पर 1 से 6 तक की संख्या अंकित होती है। एक फलक पर केवल एक संख्या अंकित होती है। कभी-कभी फलकों पर संख्या के स्थान पर उतने ही बिन्दु बने होते हैं।

निम्नलिखित भिन्नों के मान ज्ञात कीजिए :

$$\frac{\text{पासे पर 1 के आने की संख्या}}{\text{पासा फेंकने की कुल संख्या}}$$

$$\frac{\text{पासे पर 2 के आने की संख्या}}{\text{पासा फेंकने की कुल संख्या}}$$

⋮

$$\frac{\text{पासे पर 6 के आने की संख्या}}{\text{पासा फेंकने की कुल संख्या}}$$

(ii) अब पासे को 40 बार फेंकिए, प्रेक्षणों को लिख लीजिए और (i) की भांति भिन्नों को परिकलित कीजिए।

आप देखेंगे कि पासे के फेंकने की संख्या में वृद्धि होने के साथ-साथ (i) और (ii) में परिकलित किए गए प्रत्येक भिन्न का मान $\frac{1}{6}$ के और निकट आता जाता है।

इसे देखने के लिए आप एक सामूहिक क्रियाकलाप उसी प्रकार कर सकते हैं जिस प्रकार आपने क्रियाकलाप 2 में किया है। आप अपनी कक्षा के विद्यार्थियों को छोटे-छोटे वर्गों में बाँट दीजिए। प्रत्येक वर्ग के एक विद्यार्थी को एक पासा दस बार फेंकने के लिए कहिए। प्रेक्षणों को लिख लीजिए और संचयी भिन्न परिकलित कर लीजिए।

संख्या 1 के लिए भिन्नों के मान सारणी 15.4 में लिखे जा सकते हैं। इस सारणी में ही दूसरी संख्याओं से संबंधित भिन्नों को भी लिखा जा सकता है या अन्य संख्याओं के लिए इसी प्रकार की अन्य सारणियाँ भी बनाई जा सकती हैं।

सारणी 15.4

वर्ग (1)	**एक वर्ग में एक पासे के फेंके जाने की कुल संख्या** (2)	$\frac{\textbf{1 के आने की संचयी संख्या}}{\textbf{पासे के फेंके जाने की कुल संख्या}}$ (3)
1	—	—
2	—	—
3	—	—
4	—	—

सभी वर्गों में प्रयुक्त पासे लगभग समान रूप और समान साइज के होना चाहिए। तब ऐसा मान लिया जाएगा कि फेंके गए सभी पासे एक ही पासे द्वारा फेंके गए हैं।

इन सारणियों में आप क्या देखते हैं?

आप देखेंगे कि जैसे-जैसे पासा फेंके जाने की संख्या बढ़ती जाएगी, वैसे-वैसे स्तंभ (3) की भिन्नें $\frac{1}{6}$ के निकट होती जाएँगी।

क्रियाकलाप 4 : (i) दो सिक्कों को एक साथ दस बार उछालिए और अपने प्रेक्षणों को नीचे दी गई सारणी के रूप में लिखिए:

सारणी 15.5

दो सिक्कों को उछालने की संख्या	चित न आने की संख्या	एक चित आने की संख्या	दो चित आने की संख्या
10	—	—	—

भिन्नों के मान लिखिए :

$$A = \frac{\text{चित न आने की संख्या}}{\text{दो सिक्कों को उछालने की कुल संख्या}}$$

$$B = \frac{\text{एक चित आने की संख्या}}{\text{दो सिक्कों को उछालने की कुल संख्या}}$$

$$C = \frac{\text{दो चित आने की संख्या}}{\text{दो सिक्कों को उछालने की कुल संख्या}}$$

इन भिन्नों के मान परिकलित कीजिए।

अब (क्रियाकलाप 2 की भाँति) सिक्का उछालने की संख्या बढ़ाइए। आप देखेंगे कि उछालने की संख्या जितनी बढ़ती जाएगी, उतने ही A, B और C के मान क्रमशः 0.25, 0.5 और 0.25 के निकट होते जाएँगे।

क्रियाकलाप 1 में, सिक्के की प्रत्येक उछाल को एक *अभिप्रयोग* (trial) कहा जाता है। इसी प्रकार, क्रियाकलाप 3 में पासे की प्रत्येक फेंक को एक *अभिप्रयोग* कहा जाता है तथा क्रियाकलाप 4 में दो सिक्कों को एक साथ उछालने की प्रत्येक उछाल को भी एक अभिप्रयोग कहा जाता है।

अत:, *अभिप्रयोग एक क्रिया है जिससे एक या अधिक परिणाम प्राप्त होते हैं।* क्रियाकलाप 1 में संभव परिणाम चित और पट थे, जबकि क्रियाकलाप 3 में संभव परिणाम 1, 2, 3, 4, 5 और 6 थे।

क्रियाकलाप 1 में, एक विशेष उछाल पर एक चित का आना *परिणाम चित वाली एक घटना* (*event*) है। इसी प्रकार, *एक पट का आना परिणाम पट वाली एक घटना है।* क्रियाकलाप 2 में, एक विशेष संख्या, मान लीजिए 1, का आना परिणाम 1 वाली एक घटना है।

यदि हमारा प्रयोग पासा फेंकने पर एक सम संख्या प्राप्त करना हो, तो घटना में तीन परिणाम 2, 4 और 6 होंगे।

अत:, *एक प्रयोग में घटना प्रयोग के कुछ परिणामों का संग्रह होती है।* उच्च कक्षाओं में, आप घटना की औपचारिक परिभाषा का अध्ययन करेंगे।

अत:, क्या अब आप यह बता सकते हैं कि क्रियाकलाप 4 में घटनाएँ कौन-कौन सी हैं?

इस पृष्ठभूमि के साथ, आइए अब हम देखें कि प्रायिकता क्या होती है। अपने अभिप्रयोगों के परिणामों को सीधे देखने पर हम *प्रायोगिक* (*experimental*) या *आनुभविक* (*empirical*) प्रायिकता प्राप्त करते हैं।

मान लीजिए अभिप्रयोगों की कुल संख्या n है। घटना E के घटने की *आनुभविक प्रायिकता* (*empirical probability*) निम्न से परिभाषित है :

$$P(E) = \frac{\text{अभिप्रयोगों की संख्या जिनमें घटना घटी है}}{\text{अभिप्रयोगों की कुल संख्या}}$$

इस अध्याय में, हम आनुभविक प्रायिकता ज्ञात करेंगे। तथा सुविधा के लिए आनुभविक प्रायिकता के स्थान पर केवल 'प्रायिकता' का प्रयोग करेंगे।

आइए हम कुछ उदाहरण लें।

आइए सबसे पहले हम क्रियाकलाप 2 पर वापिस आ जाएँ और सारणी 15.2 लें। इस सारणी के स्तंभ (4) में वह भिन्न क्या है जिसे आपने परिकलित किया है? जो परिकलित किया है वह और कुछ नहीं है, अपितु चित प्राप्त करने की आनुभविक प्रायिकता है। ध्यान दीजिए कि अभिप्रयोगों की संख्या और इन अभिप्रयोगों में चित आने की संख्या के अनुसार प्रायिकता में परिवर्तन होता रहता है। इसी प्रकार, पट आने की आनुभविक प्रायिकता सारणी 15.2 के स्तंभ (5) में प्राप्त की गई है। प्रारंभ में यह $\frac{12}{15}$ है, इसके बाद $\frac{2}{3}$ है और फिर $\frac{28}{45}$ है, आदि-आदि।

अत:, आनुभविक प्रायिकता किए गए अभिप्रयोगों की संख्या और इन अभिप्रयोगों में प्राप्त हुए परिणामों की संख्या पर निर्भर करती है।

क्रियाकलाप 5 : आगे अध्ययन करने से पहले, उन सारणियों को देखें जिन्हें आपने क्रियाकलाप 3 करते समय बनाया था। एक पासे को अनेक बार फेंकने पर 3 के आने की प्रायिकताएँ ज्ञात कीजिए। साथ ही, यह भी दिखाइए कि अभिप्रयोगों की संख्या बढ़ाने पर इसमें किस प्रकार परिवर्तन होता है।

आइए अब हम कुछ अन्य उदाहरण लें।

उदाहरण 1 : एक सिक्के को 1000 बार उछालने पर निम्नलिखित बारंबारताएँ प्राप्त होती हैं:

चित : 455, पट : 545

प्रत्येक घटना की प्रायिकता अभिकलित कीजिए।

हल : क्योंकि सिक्के को 1000 बार उछाला गया है, इसलिए अभिप्रयोगों की कुल संख्या 1000 है। मान लीजिए हम एक चित के आने की घटना को E से और एक पट के आने की घटना को F से प्रकट करते हैं। तब E के घटने की संख्या, अर्थात् चित के आने की संख्या 455 है।

इसलिए, $$\text{E की प्रायिकता} = \frac{\text{चितों के आने की संख्या}}{\text{अभिप्रयोगों की कुल संख्या}}$$

अर्थात् $$P(E) = \frac{455}{1000} = 0.455$$

इसी प्रकार, $$\text{एक पट के आने की घटना की प्रायिकता} = \frac{\text{पटों के आने की संख्या}}{\text{अभिप्रयोगों की कुल संख्या}}$$

अर्थात् $$P(F) = \frac{545}{1000} = 0.545$$

ध्यान दीजिए कि $P(E) + P(F) = 0.455 + 0.545 = 1$ है, तथा प्रत्येक अभिप्रयोग में E और F ही केवल दो संभव परिणाम हैं।

उदाहरण 2 : दो सिक्कों को एक साथ 500 बार उछालने पर, हमें यह प्राप्त होता है

दो चित	: 105 बार
एक चित	: 275 बार
कोई भी चित नहीं	: 120 बार

इनमें से प्रत्येक घटना के घटने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल : आइए हम दो चितों के आने की घटना को E_1 से, एक चित के आने की घटना को E_2 से और कोई भी चित न आने की घटना को E_3 से प्रकट करें।

अतः,
$$P(E_1) = \frac{105}{500} = 0.21$$
$$P(E_2) = \frac{275}{500} = 0.55$$
$$P(E_3) = \frac{120}{500} = 0.24$$

यहाँ आप यह देख सकते हैं कि $P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) = 1$ है। साथ ही, E_1, E_2 और E_3 में एक अभिप्रयोग के सभी परिणाम आ जाते हैं।

उदाहरण 3 : एक पासे को 1000 बार फेंकने पर प्राप्त परिणामों 1, 2, 3, 4, 5 और 6 की बारंबारताएँ सारणी 15.6 में दी गई हैं :

सारणी 15.6

परिणाम	1	2	3	4	5	6
बारंबारता	179	150	157	149	175	190

प्रत्येक परिणाम के प्राप्त होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए E_i परिणाम i के प्राप्त होने की घटना को प्रकट करता है, जहाँ $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ है। तब,

$$\text{परिणाम 1 की प्रायिकता} = P(E_1) = \frac{\text{1 की बारंबारता}}{\text{पासा फेंकने की कुल संख्या}}$$
$$= \frac{179}{1000} = 0.179$$

इसी प्रकार, $P(E_2) = \frac{150}{1000} = 0.15$, $P(E_3) = \frac{157}{1000} = 0.157$, $P(E_4) = \frac{149}{1000} = 0.149$, $P(E_5) = \frac{175}{1000} = 0.175$ और $P(E_6) = \frac{190}{1000} = 0.19$ है।

ध्यान दीजिए कि $P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + P(E_4) + P(E_5) + P(E_6) = 1$ है।

साथ ही, यह भी देखिए कि:

(i) प्रत्येक घटना की प्रायिकता 0 और 1 के बीच होती है।

(ii) सभी प्रायिकताओं का योगफल 1 होता है।

(iii) $E_1, E_2, \ldots, E_6$ में एक अभिप्रयोग के सभी संभव परिणाम आ जाते हैं।

उदाहरण 4 : एक टेलीफोन निर्देशिका के एक पृष्ठ पर 200 टेलीफोन नंबर हैं। उनके इकाई स्थान वाले अंक का बारंबारता बंटन (उदाहरण के लिए संख्या 25828573 में इकाई के स्थान पर अंक 3 है) सारणी 15.7 में दिया गया है :

सारणी 15.7

अंक	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
बारंबारता	22	26	22	22	20	10	14	28	16	20

पृष्ठ को देखे बिना, इन संख्याओं में से किसी एक संख्या पर अपनी पेंसिल रख दीजिए, अर्थात् संख्या को यादृच्छया चुना गया है। इकाई के स्थान पर अंक 6 के होने की प्रायिकता क्या होगी?

हल : इकाई के स्थान पर अंक 6 के होने की प्रायिकता

$$= \frac{\text{6 की बारंबारता}}{\text{चुनी गए टेलीफोन नंबरों की कुल संख्या}}$$

$$= \frac{14}{200} = 0.07$$

इसी प्रकार, आप उन संख्याओं के आने की प्रायिकता प्राप्त कर सकते हैं जिनमें इकाई के स्थान पर कोई अन्य अंक हो।

उदाहरण 5 : एक मौसम केंद्र के रिकार्ड को देखने से पता चलता है कि पिछले 250 क्रमागत दिनों में किए गए मौसम पूर्वानुमानों में से 175 बार उसके पूर्वानुमान सही रहे हैं।

(i) एक दिए हुए दिन पर पूर्वानुमान के सही होने की प्रायिकता क्या होगी?

(ii) दिए हुए दिन पर पूर्वानुमान के सही न होने की प्रायिकता क्या होगी?

हल : दिनों की कुल संख्या जिनके रिकार्ड उपलब्ध हैं = 250

(i) P(दिए हुए दिन पर पूर्वानुमान सही था)

$$= \frac{\text{उन दिनों की संख्या जिस दिन का पूर्वानुमान सही था}}{\text{उन दिनों की कुल संख्या जिनके रिकार्ड उपलब्ध हैं}}$$

$$= \frac{175}{250} = 0.7$$

(ii) उन दिनों की संख्या जिस दिन का पूर्वानुमान सही नहीं था = 250 – 175 = 75

अत:, P(दिए हुए दिन पर पूर्वानुमान सही नहीं था) = $\frac{75}{250} = 0.3$

ध्यान दीजिए कि :

P(दिए हुए दिन का पूर्वानुमान सही था) + P(दिए हुए दिन का पूर्वानुमान सही नहीं था)

$$= 0.7 + 0.3 = 1$$

उदाहरण 6 : टायर बनाने वाली एक कंपनी तय की गई उन दूरियों का एक रिकार्ड रखती थी, जिसके पहले टायर को बदल देने की आवश्यकता पड़ी। सारणी में 1000 स्थितियों के परिणाम दिखाए गए हैं।

सारणी 15.8

दूरी (km में)	4000 से कम	4000 से 9000 तक	9001 से 14000 तक	14000 से अधिक
बारंबारता	20	210	325	445

यदि आप इस कंपनी से एक टायर खरीदते हैं, तो इस बात की प्रायिकता क्या होगी कि

(i) 4000 km की दूरी तय करने से पहले ही इसे बदलना आवश्यक होगा?

(ii) यह 9000 km से भी अधिक दूरी तक चलेगा?

(iii) 4000 km और 14000 km के बीच की कोई दूरी तय करने के बाद इसे बदलना आवश्यक होगा?

हल : अभिप्रयोगों की कुल संख्या = 1000

(i) उस टायर की बारंबारता, जिसे 4000 km की दूरी तय करने से पहले बदलना आवश्यक हो, 20 है।

अत:, P(4000 km की दूरी तय करने से पहले टायर बदलना आवश्यक हो)

$$= \frac{20}{1000} = 0.02$$

(ii) उस टायर की बारंबारता जो 9000 km से भी अधिक दूरी तय करेगा

$$= 325 + 445 = 770$$

अत:, P(टायर 9000 km से भी अधिक दूरी तक चलेगा) $= \frac{770}{1000} = 0.77$

(iii) उस टायर की बारंबारता जिसे 4000 km और 14000 km के बीच की कोई दूरी तय कर लेने के बाद बदलना आवश्यक होगा $= 210 + 325 = 535$

अत:, P(4000 km और 14000 km के बीच की कोई दूरी तय करने के बाद टायर को बदलना आवश्यक हो) $= \frac{535}{1000} = 0.535$

उदाहरण 7 : एक विद्यार्थी द्वारा मासिक यूनिट परीक्षा में प्राप्त किए गए अंकों का प्रतिशत नीचे दिया गया है:

सारणी 15.9

यूनिट परीक्षा	I	II	III	IV	V
प्राप्त अंकों का प्रतिशत	69	71	73	68	74

इन आंकड़ों के आधार पर इस बात की प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि एक यूनिट परीक्षा में वह विद्यार्थी 70% से अधिक अंक प्राप्त करता है।

हल : ली गई यूनिट परीक्षाओं की कुल संख्या 5 है।

उन यूनिट परीक्षाओं की संख्या, जिनमें विद्यार्थी 70% से अधिक अंक प्राप्त करता है, 3 है।

अत:, P(70% से अधिक अंक प्राप्त करना) $= \frac{3}{5} = 0.6$

उदाहरण 8 : एक बीमा कंपनी ने आयु और दुर्घटनाओं के बीच के संबंध को ज्ञात करने के लिए एक विशेष नगर के 2000 ड्राइवरों का यदृच्छया चयन किया (किसी ड्राइवर को कोई विशेष वरीयता दिए बिना)। प्राप्त किए गए आंकड़े नीचे सारणी में दिए गए हैं :

सारणी 15.10

ड्राइवरों की आयु (वर्षों में)	एक वर्ष में घटी दुर्घटनाएँ				
	0	**1**	**2**	**3**	**3 से अधिक**
18 - 29	440	160	110	61	35
30 - 50	505	125	60	22	18
50 से अधिक	360	45	35	15	9

नगर से यदृच्छया चुने गए एक ड्राइवर के लिए निम्नलिखित घटनाओं की प्रायिकताएँ ज्ञात कीजिए :

(i) 18–29 वर्ष की आयु का जिसके साथ एक वर्ष में ठीक–ठीक 3 दुर्घटनाएँ घटी हैं।

(ii) 30–50 वर्ष की आयु का जिसके साथ एक वर्ष में एक या अधिक दुर्घटनाएँ घटी हैं।

(iii) जिसके साथ एक वर्ष में कोई दुर्घटना नहीं घटी।

हल : ड्राइवरों की कुल संख्या = 2000

(i) उन ड्राइवरों की संख्या, जिनकी आयु 18–29 वर्ष है और जिनके साथ एक वर्ष में ठीक–ठीक तीन दुर्घटनाएँ घटी हैं, 61 है।

अत:, P (ड्राइवर 18–29 वर्ष का हो जिसके साथ ठीक–ठीक तीन दुर्घटनाएँ घटी)

$$= \frac{61}{2000}$$

$$= 0.0305 \approx 0.031$$

(ii) उन ड्राइवरों की संख्या, जिनकी आयु 30–50 वर्ष है और जिनके साथ एक वर्ष में एक या अधिक दुर्घटनाएँ घटी हैं, 125 + 60 + 22 + 18, अर्थात् 225 है।

अतः, P (ड्राइवर 35–50 वर्ष का हो और जिसके साथ एक या अधिक दुर्घटनाएँ घटी हैं)

$$= \frac{225}{2000} = 0.1125 \approx 0.113$$

(iii) उन ड्राइवरों की संख्या जिनके साथ एक वर्ष में कोई दुर्घटना नहीं घटी $= 440 + 505 + 360 = 1305$

अतः, P(ड्राइवर जिनके साथ कोई दुर्घटना नहीं घटी) $= \dfrac{1305}{2000} = 0.653$

उदाहरण 9 : बारंबारता बंटन सारणी (अध्याय 14 के उदाहरण 4 की सारणी 14.3) लीजिए जिसमें एक कक्षा के 38 विद्यार्थियों के भार दिए गए हैं।

(i) इस बात की प्रायिकता ज्ञात कीजिए जिसमें कक्षा के एक विद्यार्थी का भार (kg में) अंतराल 46–50 स्थित हो।

(ii) इस संदर्भ में ऐसी दो घटनाएँ बताइए जिनमें एक की प्रायिकता 0 हो और दूसरी की प्रायिकता 1 हो।

हल : (i) विद्यार्थियों की कुल संख्या 38 है और 40–50 kg के भार वाले विद्यार्थियों की संख्या 3 है।

अतः, P (विद्यार्थी का भार 46–50 kg है) $= \dfrac{3}{38} = 0.079$

(ii) उदाहरण के लिए वह घटना लीजिए जिसमें विद्यार्थी का भार 30 kg है। क्योंकि किसी भी विद्यार्थी का भार 30 kg नहीं है, इसलिए इस घटना के घटने की प्रायिकता 0 होगी। इसी प्रकार, एक विद्यार्थी का 30 kg से अधिक भार होने की प्रायिकता $\dfrac{38}{38} = 1$ है।

उदाहरण 10 : बीजों के 5 थैलों में से प्रत्येक थैले से पचास बीज यदृच्छया चुनकर उन्हें ऐसी मानकीकृत अवस्थाओं में रखा गया जो अंकुरण के अनुकूल हैं। 20 दिन बाद प्रत्येक संग्रह में अंकुरित हुए बीजों की संख्या गिन कर नीचे दर्शाए अनुसार एक सारणी में लिखी गई।

सारणी 15.11

थैला	1	2	3	4	5
अंकुरित बीजों की संख्या	40	48	42	39	41

निम्नलिखित बीजों के अंकुरण की प्रायिकता क्या है?

(i) एक थैले में 40 से अधिक बीज?

(ii) एक थैले में 49 बीज

(iii) एक थैले में 35 से अधिक बीज

हल : थैलों की कुल संख्या 5 है।

(i) उन थैलों की संख्या, जिनमें 50 बीजों में से 40 से अधिक बीज अंकुरित हुए है, 3 हैं।

अतः, P(एक थैले में 40 से अधिक बीजों का अंकुरण) = $\frac{3}{5} = 0.6$

(ii) उन थैलों की संख्या जिनमें 49 बीज अंकुरित हुए हैं, 0 है।

अतः, P(एक थैले के 49 बीजों का अंकुरण) = $\frac{0}{5} = 0$

(iii) उन थैलों की संख्या, जिनमें 35 से अधिक बीज अंकुरित हुए हैं, 5 है।

अतः, अपेक्षित प्रायिकता = $\frac{5}{5} = 1$

टिप्पणी : ऊपर दिए गए सभी उदाहरणों में इस बात की ओर आपने अवश्य ध्यान दिया होगा कि किसी घटना की प्रायिकता 0 से 1 तक की कोई भी भिन्न हो सकती है।

प्रश्नावली 15.1

1. एक क्रिकेट मैच में, एक महिला बल्लेबाज खेली गई 30 गेदों में 6 बार चौका मारती है। चौका न मारे जाने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

2. 2 बच्चों वाले 1500 परिवारों का यदृच्छया चयन किया गया है और निम्नलिखित आंकड़े लिख लिए गए हैं :

परिवार में लड़कियों की संख्या	2	1	0
परिवारों की संख्या	475	814	211

यदृच्छया चुने गए उस परिवार की प्रायिकता ज्ञात कीजिए, जिसमें

(i) दो लड़कियाँ हों (ii) एक लड़की हो (iii) कोई लड़की न हो

साथ ही, यह भी जाँच कीजिए कि इन प्रायिकताओं का योगफल 1 है या नहीं।

3. अध्याय 14 के अनुच्छेद 14.4 का उदाहरण 5 लीजिए। कक्षा के किसी एक विद्यार्थी का जन्म अगस्त में होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

4. तीन सिक्कों को एक साथ 200 बार उछाला गया है तथा इनमें विभिन्न परिणामों की बारंबारताएँ ये हैं:

परिणाम	3 चित	2 चित	1 चित	कोई भी चित नहीं
बारंबारता	23	72	77	28

यदि तीनों सिक्कों को पुन: एक साथ उछाला जाए, तो दो चित के आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

5. एक कंपनी ने यदृच्छया 2400 परिवार चुनकर एक घर की आय स्तर और वाहनों की संख्या के बीच संबंध स्थापित करने के लिए उनका सर्वेक्षण किया। एकत्रित किए गए आंकड़े नीचे सारणी में दिए गए हैं:

मासिक आय (₹ में)	**प्रति परिवार वाहनों की संख्या**			
	0	**1**	**2**	**2 से अधिक**
7000 से कम	10	160	25	0
7000 – 10000	0	305	27	2
10000 – 13000	1	535	29	1
13000 – 16000	2	469	59	25
16000 या इससे अधिक	1	579	82	88

मान लीजिए एक परिवार चुना गया है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि चुने गए परिवार

(i) की आय ₹10000–13000 के अंतराल में है और उसके पास केवल दो वाहन हैं।

(ii) की आय प्रति माह ₹16000 या इससे अधिक है और उसके पास केवल 1 वाहन है।

(iii) की आय ₹7000 प्रति माह से कम है और उसके पास कोई वाहन नहीं है।

(iv) की आय ₹13000–16000 के अंतराल में है और उसके पास 2 से अधिक वाहन है।

(v) जिसके पास 1 से अधिक वाहन नहीं है।

6. अध्याय 14 की सारणी 14.7 लीजिए।

(i) गणित की परीक्षा में एक विद्यार्थी द्वारा 20% कम अंक प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

(ii) एक विद्यार्थी द्वारा 60 या इससे अधिक अंक प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

7. *सांख्यिकी* के बारे में विद्यार्थियों का मत जानने के लिए 200 विद्यार्थियों का सर्वेक्षण किया गया। प्राप्त आंकड़ों को नीचे दी गई सारणी में लिख लिया गया है:

मत	विद्यार्थियों की संख्या
पसंद करते हैं	135
पसंद नहीं करते हैं	65

प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि यदृच्छया चुना गया विद्यार्थी

(i) सांख्यिकी पसंद करता है (ii) सांख्यिकी पसंद नहीं करता है।

8. प्रश्नावली 14.2 का प्रश्न 2 देखिए। इसकी आनुभविक प्रायिकता क्या होगी कि इंजीनियर

(i) अपने कार्यस्थल से 7 km से कम दूरी पर रहती है?

(ii) अपने कार्यस्थल से 7 km या इससे अधिक दूरी पर रहती है?

(iii) अपने कार्यस्थल से $\frac{1}{2}$ km या इससे कम दूरी पर रहती है?

9. **क्रियाकलाप :** अपने विद्यालय के गेट के सामने से एक समय-अंतराल में गुजरने वाले दो पहिया, तीन पहिया और चार पहिया वाहनों की बारंबारता लिख लीजिए। आप द्वारा देखे गए वाहनों में से किसी एक वाहन का दो पहिया वाहन होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

10. **क्रियाकलाप :** आप अपनी कक्षा के विद्यार्थियों से एक 3 अंक वाली संख्या लिखने को कहिए। आप कक्षा से एक विद्यार्थी को यदृच्छया चुन लीजिए। इस बात की प्रायिकता क्या होगी कि उसके द्वारा लिखी गई संख्या 3 से भाज्य है? याद रखिए कि कोई संख्या 3 से भाज्य होती है, यदि उसके अंकों का योग 4 से भाज्य हो।

11. आटे की उन ग्यारह थैलियों में, जिन पर 5 kg अंकित है, वास्तव में आटे के निम्नलिखित भार (kg में) हैं:

4.97 5.05 5.08 5.03 5.00 5.06 5.08 4.98 5.04 5.07 5.00

यदृच्छया चुनी गई एक थैली में 5 kg से अधिक आटा होने की प्रायिकता क्या होगी?

12. प्रश्नावली 14.2 के प्रश्न 5 में आपसे 30 दिनों तक एक नगर की प्रति वायु में सल्फर डाईऑक्साइड की भाग प्रति मिलियन में सांद्रता से संबंधित एक बारंबारता बंटन सारणी बनाने के लिए कहा गया था। इस सारणी की सहायता से इनमें से किसी एक दिन अंतराल (0.12–0.16) में सल्फर डाईऑक्साइड के सांद्रण होने की की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

13. प्रश्नावली 14.2 के प्रश्न 1 में आपसे एक कक्षा के 30 विद्यार्थियों के रक्त-समूह से संबंधित बारंबारता बंटन सारणी बनाने के लिए कहा गया था। इस सारणी की सहायता से इस कक्षा से यदृच्छया चुने गए एक विद्यार्थी का रक्त समूह AB होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

15.3 सारांश

इस अध्याय में, आपने निम्नलिखित बिंदुओं का अध्ययन किया है:

1. एक प्रयोग की एक घटना प्रयोग के कुछ परिणामों का संग्रह होती है।

2. एक घटना E की आनुभविक (या प्रायोगिक) प्रायिकता P(E) है:

$$P(E) = \frac{\text{अभिप्रयोगों की संख्या जिनमें E घटी है}}{\text{अभिप्रयोगों की कुल संख्या}}$$

3. किसी घटना के घटने की प्रायिकता 0 और 1 के बीच (जिसमें 0 और 1 सम्मिलित हैं) होती है।