Домашняя работа 1

Александр Петровский, M3239

April 2018

Задача 1

По определению последовательности чисел Фиббоначи строится следующим образом:
$F_0 = 0$
$F_1 = 1$
$F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$
Докажем по индукции: База:
$gcd(F_0, F1) = gcd(0, 1) = 1$
$gcd(F_1, F2) = gcd(1, 1) = 1$
$gcd(F_2, F3) = gcd(1, 2) = 1$
$gcd(F_3, F4) = gcd(2, 3) = 1$
Шаг индукци: Пусть верно $gcd(F_i, F_{i-1}) = 1$, тогда
$gcd(F_{i+1}, F_i) = gcd(F_i + F_{i-1}, F_i) = gcd(F_{i-1}, F_i) = gcd(F_i, F_{i-1}) = 1$, что и требовалось показать.

Задача 2

.

1. Так как x - делитель чисел a и b, то $a = kx$ и $b = lx$, тогда рассмотрим их разность. $a - b = kx - lx = x(k - l)$, очевидно, что она делится на x, а b делится на x по условию.

2. x - делитель $(a - b)$ и b, значит $(a - b) = kx$ и $b = lx$. Тогда $a = (a - b) + b = kx + lx = x(r + l)$, что, очевидно, делится на x. b делится на x по условию

Задача 3

. Пусть p и q взаимно простые числа и $n = pq$, тогда $\sigma_k(n) = \sigma_k(pq) = \sum_{d|pq} d^k$. Рассмторим разложение всех d из этой суммы. Так как p и q взаимно простые числа, то разложение d состоит только из чисел, которые являются делителями p либо q. То есть $d = d_1 d_2$, $gcd(d_1, q) = 1$ и $gcd(d_2, p) = 1$, $gcd(d_1, q) = d_1$ и $gcd(d_2, p) = d_2$. А значит Тогда $\sigma_k(p) * \sigma_k(q) = \sum_{d_1|p} d_1^k * \sum_{d_2|q} d_2^k = \sum_{d_1|p, d_2|q} d_1 d_2^k = \sum_{d|pq} d^k = \sigma_k(n)$

Задача 4

.

Дано: $n = pq$; $\phi(n)$

Найти: p, q

$\phi(n) = \phi(pq) = \phi(p)\phi(q) = (p-1)(q-1)$

$p = n/q$

$\phi(n) = (n/q - 1)(q-1) = n - q - n/q + 1$

$\phi(n)q = nq - q^2 - n + q$

$q^2 + q(\phi(n) - n - 1) + n = 0$

$p, q = ((n + 1 - \phi(n)) \pm \sqrt{(n + 1 - \phi(n))^2 - 4n})/2$