

Задача 1

1) Если мы нашли какую-то раскраску, то мы можем инвертировать цвета и получить вторую раскраску, поэтому кол-во раскрасок из двух цветов четно.

2) Заметим, что раскрасить граф двумя красками можно только в том случае, если он является двудольным. Действительно, пусть это не так, тогда существует цикл, длина которого является нечетным числом (по отрицанию определения для двудольного графа), но мы никак не сможем покрасить нечетное вершин двумя красками, так как всегда найдутся две соседние, которые имеют одинаковый цвет.

Отсюда следует, что невозможно раскрасить граф в два цвета более чем 2-мя способами.

Задача 2

Для того, чтобы свести задачу к 2-SAT давайте один цвет обозначим за 1, другой за 0. Тогда мы можем построить табличку для расцветок, которые нам подходят (R — отношение, которое равно 1, если ребро xy может иметь такие цвета, и 0 — иначе).

x	y	$x R y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Заметим, что соответствует бинарной операции xor.

Построим СКНФ для нее: $x \wedge y = (\neg x \vee \neg y) \wedge (x \vee y)$, заметим, что такая форма решается 2-SAT.

Для каждой пары вершин, между которым есть ребро, мы хотим, чтобы функция себя реализовала, то есть $\forall (uv)$ — ребро $\text{color}(u) \wedge \text{color}(v) = \text{true}$, что, если расписать, представляет собой 2-КНФ, что решается 2-SAT.