El Diccionario de Aprendizaje Automático de A”alto

Alexander Jung and Konstantina Olioumtsevits

May 16, 2025

please cite as: A. Jung and K. Olioumtsevits, *The Aalto Dictionary of Machine Learning*. Espoo, Finland: Aalto University, 2025.

Acknowledgements

Este diccionario de aprendizaje automático evolucionó a través del desarrollo y la enseñanza de varios cursos, incluyendo CS-E3210 Machine Learning: Basic Principles, CS-C3240 Machine Learning, CS-E4800 Artificial Intelligence, CS-EJ3211 Machine Learning with Python, CS-EJ3311 Deep Learning with Python, CS-E4740 Federated Learning, y CS-E407507 Human-Centered Machine Learning. Estos cursos se ofrecieron en Aalto University `https://www.aalto.fi/en`, a estudiantes adultos a travez de The Finnish Institute of Technology (FITech) `https://fitech.io/en/`, y a estudiantes internacionales a través de European University Alliance Unite! `https://www.aalto.fi/en/unite`.

Agradecemos a los estudiantes que brindaron valiosos comentarios que ayudaron a dar forma a este diccionario. Un agradecimiento especial a Mikko Seesto por su meticulosa corrección.

Lists of Symbols

Conjuntos y Funciones

$a \in \mathcal{A}$	El objeto a es un elemento del conjunto $\mathcal{A}$.
$a := b$	Utilizamos a como una abreviatura para b.
$\lvert\mathcal{A}\rvert$	La cardinalidad (es decir, el número de elementos) de un conjunto finito $\mathcal{A}$.
$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$	$\mathcal{A}$ es un subconjunto de $\mathcal{B}$.
$\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$	$\mathcal{A}$ es un subconjunto propio de $\mathcal{B}$.
$\mathbb{N}$	Los números naturales $1, 2, \ldots$.
$\mathbb{R}$	Los números reales x [1].
$\mathbb{R}_+$	Los números reales no negativos $x \geq 0$.
$\mathbb{R}_{++}$	Los números reales positivos $x > 0$.

$\{0, 1\}$	El conjunto que consta de los dos números reales 0 y 1.
$[0, 1]$	El intervalo cerrado de números reales x con $0 \leq x \leq 1$.
$\operatorname{argmin}_{\mathbf{w}} f(\mathbf{w})$	El conjunto de minimizadores para una función de valor real $f(\mathbf{w})$.
$\mathbb{S}^{(n)}$	El conjunto de vectores de norma unitaria en $\mathbb{R}^{n+1}$.
$\log a$	El logaritmo del número positivo $a \in \mathbb{R}_{++}$.
$h(\cdot) : \mathcal{A} \to \mathcal{B} : a \mapsto h(a)$	Una función (aplicación) que acepta cualquier elemento $a \in \mathcal{A}$ de un conjunto $\mathcal{A}$ como entrada y entrega un elemento bien definido $h(a) \in \mathcal{B}$ de un conjunto $\mathcal{B}$. El conjunto $\mathcal{A}$ es el dominio de la función h y el conjunto $\mathcal{B}$ es el codominio de h. El aprendizaje automático (aprendizaje automático) tiene como objetivo encontrar (o aprender) una función h (es decir, una hipótesis) que lea las atributos $\mathbf{x}$ de un punto de datos y entregue una predicción $h(\mathbf{x})$ para su etiqueta y.
$\nabla f(\mathbf{w})$	El gradiente de una función diferenciable de valor real $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ es el vector $\nabla f(\mathbf{w}) = \left(\frac{\partial f}{\partial w_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial w_d}\right)^T \in \mathbb{R}^d$ [2, Ch. 9].

Matrices y Vectores

$\mathbf{x} = \big(x_1, \ldots, x_d\big)^T$	Un vector de longitud d, con su j-ésima entrada siendo x_j.
$\mathbb{R}^d$	El conjunto de vectores $\mathbf{x} = \big(x_1, \ldots, x_d\big)^T$ que consiste en d entradas de valor real $x_1, \ldots, x_d \in \mathbb{R}$.
$\mathbf{I}_{l \times d}$	Una matriz identidad generalizada con l filas y d columnas. Los elementos de $\mathbf{I}_{l \times d} \in \mathbb{R}^{l \times d}$ son iguales a 1 en la diagonal principal y iguales a 0 en los demás casos.
$\mathbf{I}_d, \mathbf{I}$	Una matriz identidad cuadrada de tamaño $d \times d$. Si el tamaño es claro por el contexto, omitimos el subíndice.
$\|\mathbf{x}\|_2$	La norma euclidiana (o ℓ_2) del vector $\mathbf{x} = \big(x_1, \ldots, x_d\big)^T \in \mathbb{R}^d$ definida como $\|\mathbf{x}\|_2 := \sqrt{\sum_{j=1}^{d} x_j^2}$.
$\|\mathbf{x}\|$	Alguna norma del vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ [3]. A menos que se especifique lo contrario, nos referimos a la norma euclidiana $\|\mathbf{x}\|_2$.
$\mathbf{x}^T$	La traspuesta de una matriz que tiene el vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ como su única columna.
$\mathbf{X}^T$	La traspuesta de una matriz $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m \times d}$. Una matriz cuadrada de valores reales $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ se denomina simétrica si $\mathbf{X} = \mathbf{X}^T$.
$\mathbf{0} = \big(0, \ldots, 0\big)^T$	El vector en $\mathbb{R}^d$ con cada entrada igual a cero.
$\mathbf{1} = \big(1, \ldots, 1\big)^T$	El vector en $\mathbb{R}^d$ con cada entrada igual a uno.

$\left(\mathbf{v}^T, \mathbf{w}^T\right)^T$	El vector de longitud $d + d'$ obtenido al concatenar las entradas del vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$ con las entradas de $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{d'}$.
$\text{span}\{\mathbf{B}\}$	El espacio generado (span) por una matriz $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{a \times b}$, que es el subespacio de todas las combinaciones lineales de las columnas de $\mathbf{B}$, $\text{span}\{\mathbf{B}\} = \left\{\mathbf{Ba} : \mathbf{a} \in \mathbb{R}^b\right\} \subseteq \mathbb{R}^a$.
$\det(\mathbf{C})$	El determinante de la matriz $\mathbf{C}$.
$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$	El producto de Kronecker de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ [4].

Teoría de la Probabilidad

$\mathbb{E}_p\{f(\mathbf{z})\}$	La esperanza de una función $f(\mathbf{z})$ de una variable aleatoria (RV) $\mathbf{z}$ cuya probability distribution es $p(\mathbf{z})$. Si la probability distribution es clara por el contexto, simplemente escribimos $\mathbb{E}\{f(\mathbf{z})\}$.
$p(\mathbf{x}, y)$	Una probability distribution conjunta de una RV cuyas realizaciónes son punto de datoss con atributos $\mathbf{x}$ y etiqueta y.
$p(\mathbf{x}\|y)$	Una probability distribution condicional de una RV $\mathbf{x}$ dado el valor de otra RV y [5, Sec. 3.5].
$p(\mathbf{x}; \mathbf{w})$	Una probability distribution parametrizada de una RV $\mathbf{x}$. La probability distribution depende de un vector de parámetros $\mathbf{w}$. Por ejemplo, $p(\mathbf{x}; \mathbf{w})$ podría ser una distribución normal multivariante con el vector de parámetros $\mathbf{w}$ dado por las entradas del vector de media $\mathbb{E}\{\mathbf{x}\}$ y la matriz de covarianza $\mathbb{E}\Big\{\big(\mathbf{x} - \mathbb{E}\{\mathbf{x}\}\big)\big(\mathbf{x} - \mathbb{E}\{\mathbf{x}\}\big)^T\Big\}$.
$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	La probability distribution de una variable aleatoria gaussiana (VA gaussiana) $x \in \mathbb{R}$ con media (o esperanza) $\mu = \mathbb{E}\{x\}$ y varianza $\sigma^2 = \mathbb{E}\big\{(x-\mu)^2\big\}$.
$\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{C})$	La distribución normal multivariante de un vector de valores VA gaussiana $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ con media (o esperanza) $\boldsymbol{\mu} = \mathbb{E}\{\mathbf{x}\}$ y matriz de covarianza $\mathbf{C} = \mathbb{E}\big\{\big(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}\big)\big(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}\big)^T\big\}$.

Aprendizaje Automático

r	Un índice $r = 1, 2, \ldots$ que enumeran los punto de datoss.
m	El número de punto de datoss en (es decir, el tamaño de) un conjunto de datos.
$\mathcal{D}$	Un conjunto de datos $\mathcal{D} = \{\mathbf{z}^{(1)}, \ldots, \mathbf{z}^{(m)}\}$ es una lista de punto de datoss individuales $\mathbf{z}^{(r)}$, para $r = 1, \ldots, m$.
d	El número de atributos que caracterizan un punto de datos.
x_j	La j-ésima característica (feature) de un punto de datos. La primera atributo se denota como x_1, la segunda como x_2, y así sucesivamente.
$\mathbf{x}$	El vector de atributos (feature vector) $\mathbf{x} = \big(x_1, \ldots, x_d\big)^T$ de un punto de datos cuyas entradas son los atributos individuales de un punto de datos.
$\mathcal{X}$	El espacio de atributos $\mathcal{X}$ es el conjunto de todos los valores posibles que las atributos $\mathbf{x}$ de un punto de datos pueden tomar.
$\mathbf{z}$	En lugar del símbolo $\mathbf{x}$, a veces usamos $\mathbf{z}$ como otro símbolo para denotar un vector cuyas entradas son las atributos individuales de un punto de datos. Necesitamos dos símbolos diferentes para distinguir entre atributos (features) crudas y atributos aprendidos [6, Ch. 9].
$\mathbf{x}^{(r)}$	El vector de atributos de el r-ésimo punto de datos dentro de un conjunto de datos.
$x_j^{(r)}$	La j-ésima atributo del r-ésimo punto de datos dentro de un conjunto de datos.

$\mathcal{B}$	Un mini-lote (o subconjunto) de punto de datoss seleccionados aleatoriamente.
B	El tamaño de (es decir, el número de punto de datoss en) un mini-lote.
y	La etiqueta (o cantidad de interés) de un punto de datos.
$y^{(r)}$	La etiqueta del r-ésimo punto de datos.
$\left(\mathbf{x}^{(r)}, y^{(r)}\right)$	Las atributos y la etiqueta del r-ésimo punto de datos.
$\mathcal{Y}$	El espacio de etiquetas $\mathcal{Y}$ de un método de ML consiste en todos los valores potenciales de etiqueta que un punto de datos puede tener. El espacio de etiquetas nominal puede ser más grande que el conjunto de diferentes valores de etiqueta que surgen en un conjunto de datos dado (por ejemplo, un conjunto de entrenamiento). Los problemas (o métodos) de ML que utilizan un espacio de etiquetas numérico, como $\mathcal{Y} = \mathbb{R}$ o $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^3$, se conocen como problemas de regresión. Los problemas (o métodos) de ML que utilizan un espacio de etiquetas discreto, como $\mathcal{Y} = \{0, 1\}$ o $\mathcal{Y} = \{gato, perro, ratón\}$, se conocen como problemas de clasificación.
η	La tasa de aprendizaje (o tamaño de paso) utilizada por los métodos de gradient-based methods.
$h(\cdot)$	Un mapa de hipótesis que toma como entrada las atributos $\mathbf{x}$ de un punto de datos y entrega una predicción $\hat{y} = h(\mathbf{x})$ para su etiqueta y.
$\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$	Dado dos conjuntos $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}$, denotamos por $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ el conjunto de todos los posibles mapas de hipótesis $h : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$.

$\mathcal{H}$	Un espacio de hipótesis o modelo utilizado por un método de ML. El espacio de hipótesis consiste en diferentes mapas de hipótesis $h : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, entre los cuales el método de ML debe elegir.
$d_{\text{eff}}(\mathcal{H})$	La dimensión efectiva de un espacio de hipótesis $\mathcal{H}$.
B^2	El sesgo cuadrado de una hipótesis aprendida $\hat{h}$ producida por un método de ML. El método se entrena con punto de datoss que se modelan como las realizaciónes de RVs. Dado que los datos son una realización de RVs, la hipótesis aprendida $\hat{h}$ también es una realización de una RV.
V	La varianza de los (parameters de la) hipótesis aprendida producida por un método de ML. El método se entrena con punto de datoss que se modelan como las realizaciónes de RVs. Dado que los datos son una realización de RVs, la hipótesis aprendida $\hat{h}$ también es una realización de una RV.
$L((\mathbf{x}, y), h)$	La loss incurrida al predecir la etiqueta y de un punto de datos utilizando la predicción $\hat{y} = h(\mathbf{x})$. La predicción $\hat{y}$ se obtiene al evaluar la hipótesis $h \in \mathcal{H}$ para la vector de atributos $\mathbf{x}$ del punto de datos.
E_v	El error de validación de una hipótesis h, que es su loss promedio incurrida en un conjunto de validación.
$\widehat{L}\big(h\|\mathcal{D}\big)$	El riesgo empírico o loss promedio incurrido por la hipótesis h en un conjunto de datos $\mathcal{D}$.

E_t	El error de entrenamiento de una hipótesis h, que es su loss promedio incurrido en un conjunto de entrenamiento.
t	Un índice de tiempo discreto $t = 0, 1, \ldots$ utilizado para enumerar eventos secuenciales (o instantes de tiempo).
t	Un índice que enumera las tarea de aprendizajes dentro de un problema de aprendizaje multitarea.
α	Un parámetro de regularización que controla la cantidad de regularización.
$\lambda_j\big(\mathbf{Q}\big)$	El j-ésimo eigenvalue (ordenado en forma ascendente o descendente) de una matriz positive semi-definite (psd) $\mathbf{Q}$. También usamos la abreviatura λ_j si la matriz correspondiente es clara por el contexto.
$\sigma(\cdot)$	La función de activación utilizada por una neurona artificial dentro de una artificial neural network (ANN).
$\mathcal{R}_{\hat{y}}$	Una región de decisión dentro de un espacio de atributos.
$\mathbf{w}$	Un vector de parámetros $\mathbf{w} = \big(w_1, \ldots, w_d\big)^T$ de un modelo, por ejemplo, los weights de un modelo lineal o en una ANN.
$h^{(\mathbf{w})}(\cdot)$	Un mapa de hipótesis que involucra model parameters ajustables $w_1, \ldots, w_d$ apilados en el vector $\mathbf{w} = \big(w_1, \ldots, w_d\big)^T$.
$\phi(\cdot)$	Un mapa de atributos $\phi : \mathcal{X} \to \mathcal{X}' : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}' := \phi\big(\mathbf{x}\big) \in \mathcal{X}'$.
$K\big(\cdot, \cdot\big)$	Dado un espacio de atributos $\mathcal{X}$, un kernel es un mapa $K : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{C}$ que es psd.

Aprendizaje Federado

$\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$	Un grafo no dirigido cuyos nodos $i \in \mathcal{V}$ representan devices dentro de un red de aprendizaje federado (red FL). Los bordes ponderados no dirigidos $\mathcal{E}$ representan conectividad entre devices y similitudes estadísticas entre sus conjunto de datoss y tarea de aprendizajes.
$i \in \mathcal{V}$	Un nodo que representa un device dentro de un red de aprendizaje federado (red FL). El dispositivo puede acceder a un local dataset y entrenar un local model.
$\mathcal{G}^{(\mathcal{C})}$	El subgrafo inducido de $\mathcal{G}$ utilizando los nodos en $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{V}$.
$\mathbf{L}^{(\mathcal{G})}$	La matriz laplaciana de un grafo $\mathcal{G}$.
$\mathbf{L}^{(\mathcal{C})}$	La matriz laplaciana del grafo inducido $\mathcal{G}^{(\mathcal{C})}$.
$\mathcal{N}^{(i)}$	La entorno de un nodo i en un grafo $\mathcal{G}$.
$d^{(i)}$	El grado ponderado $d^{(i)} := \sum_{i' \in \mathcal{N}^{(i)}} A_{i,i'}$ de un nodo i en un grafo $\mathcal{G}$.
$d_{\max}^{(\mathcal{G})}$	El máximo grado ponderado de nodo en un grafo $\mathcal{G}$.
$\mathcal{D}^{(i)}$	El local dataset $\mathcal{D}^{(i)}$ que posee el nodo $i \in \mathcal{V}$ de un red de aprendizaje federado (red FL).
m_i	El número de punto de datoss (es decir, el sample size) contenidos en el local dataset $\mathcal{D}^{(i)}$ en el nodo $i \in \mathcal{V}$.

$\mathbf{x}^{(i,r)}$	Las atributos del r-ésimo punto de datos en el local dataset $\mathcal{D}^{(i)}$.
$y^{(i,r)}$	La etiqueta del r-ésimo punto de datos en el local dataset $\mathcal{D}^{(i)}$.
$\mathbf{w}^{(i)}$	Los model parameters locales del device i dentro de un red de aprendizaje federado (red FL).
$L_i\left(\mathbf{w}\right)$	La loss function local utilizada por el device i para medir la utilidad de alguna elección $\mathbf{w}$ para los model parameters locales.
$L^{(\mathrm{d})}\left(\mathbf{x}, h\big(\mathbf{x}\big), h'\big(\mathbf{x}\big)\right)$	La loss incurrida por una hipótesis h' en un punto de datos con atributos $\mathbf{x}$ y etiqueta $h\big(\mathbf{x}\big)$ obtenida de otra hipótesis.
$\mathrm{stack}\big\{\mathbf{w}^{(i)}\big\}_{i=1}^{n}$	El vector $\left(\big(\mathbf{w}^{(1)}\big)^T, \ldots, \big(\mathbf{w}^{(n)}\big)^T\right)^T \in \mathbb{R}^{dn}$ que se obtiene apilando verticalmente los model parameters locales $\mathbf{w}^{(i)} \in \mathbb{R}^d$.

Machine Learning Concepts

k-fold cross-validation (k-fold CV) k-fold CV is a method for learning and validating a hipótesis using a given conjunto de datos. This method divides the conjunto de datos evenly into k subsets or folds and then executes k repetitions of modelo training (e.g., via minimización empírica del riesgo (ERM)) and validación. Each repetition uses a different fold as the conjunto de validación and the remaining $k-1$ folds as a conjunto de entrenamiento. The final output is the average of the error de validacións obtained from the k repetitions.

k-means El algorithm k-medias es un método de hard clustering que asigna cada punto de datos de un conjunto de datos a precisamente uno de k clusters diferentes. El método alterna entre actualizar las asignaciones de cluster (asignando al cluster con el media mas cercano) y, dado estas asignaciones actualizadas recalcular los medias de los cluster [6, Ch. 8].

absolute error loss Consider a punto de datos with atributos $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ and numeric etiqueta $y \in \mathbb{R}$. The absolute error loss incurred by a hipótesis $h : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ is defined as $|y - h(\mathbf{x})|$, i.e., the absolute difference between the predicción $h(\mathbf{x})$ and the true etiqueta y.

agrupamiento basado en densidad para aplicaciones espaciales con ruido (DBSCAN) DBSCAN es un algorithm de clustering para punto de datoss caracterizados por vector de atributoss numéricos. Al igual que k-means

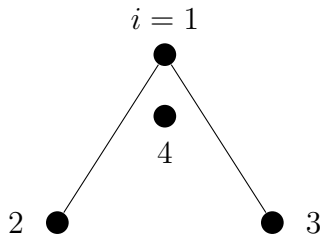
y soft clustering mediante modelo de mezcla gaussiana (GMM), DBSCAN utiliza las distancias euclidianas entre los vector de atributoss para determinar los clusters. Sin embargo, a diferencia de k-means y GMM, DBSCAN emplea una noción diferente de similitud entre punto de datoss. DBSCAN considera que dos punto de datoss son similares si están conectados a través de una secuencia (camino) de punto de datoss intermedios cercanos. Por lo tanto, DBSCAN puede considerar que dos punto de datoss son similares (y, por lo tanto, pertenecen al mismo cluster) incluso si sus vector de atributoss tienen una gran distancia euclidiana.

agrupamiento basado en flujo El clustering basado en flujo agrupa los nodos de un grafo no dirigido aplicando el algoritmo de k-means sobre vector de atributoss específicos para cada nodo. Estos vector de atributoss se construyen a partir de flujos de red entre nodos fuente y destino seleccionados cuidadosamente [7].

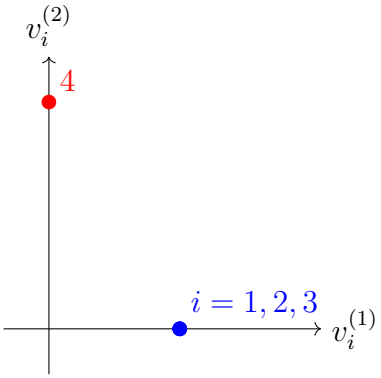
agrupamiento en grafos El clustering en grafos tiene como objetivo agrupar punto de datoss que están representados como nodos de un grafo $\mathcal{G}$. Las aristas del $\mathcal{G}$ representan similitudes por pares entre los punto de datoss. En algunos casos, es posible cuantificar el grado de estas similitudes mediante un edge weight [7, 8].

agrupamiento espectral El clustering espectral es una instancia particular del agrupamiento en grafos, es decir, agrupa punto de datoss representados como los nodos $i = 1, \ldots, n$ de un grafo $\mathcal{G}$. El clustering espectral utiliza los eigenvectors de la matriz laplaciana $\mathbf{L}^{(\mathcal{G})}$ para construir vector

de atributoss $\mathbf{x}^{(i)} \in \mathbb{R}^d$ para cada nodo (es decir, para cada punto de datos) $i = 1, \ldots, n$. Podemos utilizar estos vector de atributoss como entrada para métodos de clustering en espacio euclidiano,como k-means o soft clustering mediante GMM. Mas o menos, los vector de atributoss de los nodos que pertenecen a un subconjunto bien conectado (o cluster) de nodos en $\mathcal{G}$ estan ubicados cerca en el espacio euclidiano $\mathbb{R}^d$ (Vea la Figura 1).



$$\mathbf{L}^{(\mathcal{G})} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^T$$



$$\mathbf{V} = \left(\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}, \mathbf{v}^{(3)}, \mathbf{v}^{(4)}\right)$$

$$\mathbf{v}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; \mathbf{v}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Figure 1: **Arriba.** Izquierda: Un grafo no dirigido $\mathcal{G}$ con cuatro nodos $i = 1, 2, 3, 4$, donde cada nodo representa un punto de datos. Derecha: La matriz laplaciana $\mathbf{L}^{(\mathcal{G})} \in \mathbb{R}^{4\times4}$ y su EVD. **Abajo.** Izquierda: Un diagrama de dispersión de los punto de datoss usando los vector de atributoss $\mathbf{x}^{(i)} = \left(v_i^{(1)}, v_i^{(2)}\right)^T$. Derecha: Dos eigenvectors $\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)} \in \mathbb{R}^d$ correspondientes al eigenvalue $\lambda = 0$ de la matriz laplaciana $\mathbf{L}^{(\mathcal{G})}$.

algorithm An algorithm is a precise, step-by-step specification for how to produce an output from a given input within a finite number of computational steps [9]. For example, an algorithm for training a modelo lineal explicitly describes how to transform a given conjunto de entrenamiento into model parameters through a sequence of paso de gradientes. This informal characterization can be formalized rigorously via different mathematical modelos [10]. One very simple modelo of an algorithm is a collection of possible executions. Each execution is a sequence:

$$\text{input}, s_1, s_2, \ldots, s_T, \text{output}$$

that respects the constraints inherent to the computer executing the algorithm. Algorithms may be deterministic, where each input results uniquely in a single execution, or randomized, where executions can vary probabilistically. Randomized algorithms can thus be analyzed by modeling execution sequences as outcomes of random experiments, viewing the algorithm as a stochastic process [5, 11, 12]. Crucially, an algorithm encompasses more than just a mapping from input to output; it also includes the intermediate computational steps $s_1, \ldots, s_T$.

algoritmo distribuido Un algoritmo distribuido distributed es un algorithm diseñado para un tipo especial de computadora: una colección de dispositivos de cómputo interconectados (o nodos). Estos dispositivos se comunican y coordinan sus cálculos locales intercambiando mensajes a través de una red [13, 14]. A diferencia de un algorithm clásico, que se ejecuta en un solo device, un algoritmo distribuido algorithm se ejecuta de forma concurrente en múltiples devices con capacidades de

cómputo. Cada ejecución involucra tanto cálculos locales como eventos de intercambio de mensajes. Una ejecución genérica podría verse así:

$$\begin{aligned}
&\text{Node 1: } \text{input}_1, s_1^{(1)}, s_2^{(1)}, \ldots, s_{T_1}^{(1)}, \text{output}_1; \\
&\text{Node 2: } \text{input}_2, s_1^{(2)}, s_2^{(2)}, \ldots, s_{T_2}^{(2)}, \text{output}_2; \\
&\quad \vdots \\
&\text{Node N: } \text{input}_N, s_1^{(N)}, s_2^{(N)}, \ldots, s_{T_N}^{(N)}, \text{output}_N.
\end{aligned}$$

Cada device i inicia con su entrada local y ejecuta una secuencia de de cálculos intermedios $s_k^{(i)}$ en instantes de tiempo discretos $k = 1, \ldots, T_i$. Estos cálculos pueden depender tanto de cálculos previos locales como de mensajes recibidos de otros dispositivos. Uno de los usos clave de los algoritmos distribuidos es en aprendizaje federado (FL), donde una red de devices colabora para entrenar un modelo personalizado por dispositivo..

algoritmo en línea Un algoritmo en línea es un algorithm que procesa datos de forma incremental, recibiendo elementos de datos uno por uno y tomando decisiones o generando salidas inmediatamente, sin tener acceso a toda la entrada desde el inicio [15, 16]. A diferencia de un algoritmo fuera de línea, que dispone de toda la entrada desde el comienzo, un algoritmo en línea debe lidiar con la incertidumbre del futuro y no puede cambiar decisiones pasadas. Puede modelarse como una ejecución del tipo:

$$\text{init}, s_1, \text{out}_1, \text{in}_2, s_2, \text{out}_2, \ldots, \text{in}_T, s_T, \text{out}_T.$$

Cada ejecución comienza en un estado inicial y alterna entre cálculos, salidas y nuevas entradas. Un ejemplo importante en ML es el online

gradient descent (online GD), que actualiza model parameters conforme llegan nuevos punto de datoss.

análisis de componentes principales probabilístico (PPCA) El análisis de componentes principales probabilístico (PPCA) extiende el principal component analysis (PCA) básico mediante el uso de un modelo probabilístico para los punto de datoss. El modelo probabilístico de PPCA reduce la tarea de reducción de dimensionalidad a un problema de estimación que se puede resolver utilizando métodos de EM.

application programming interface (API) An API is a formal mechanism for enabling software components to interact in a structured manner [17]. In the context of ML, APIs are frequently used to make a trained ML modelo accessible to different types of users. These users, which can be other computers or humans, can request a predicción for the etiqueta of a punto de datos by providing its atributos. The internal structure of the ML modelo remains hidden from the user. For instance, consider a trained ML modelo $\widehat{h}(x) := 2x + 1$. An API enables a user to submit the atributo value $x = 3$ and obtain the response $\widehat{h}(3) = 7$ without knowledge of the detailed structure of the ML modelo or its training. In practice, the ML modelo is typically hosted on a computer (i.e., a server) connected to the internet. Another computer (i.e., a client) sends the atributos of a punto de datos to the server, which then computes $\widehat{h}(\mathbf{x})$ and returns the result to the external system. APIs help to modularize the development of ML applications by decoupling specific tasks. For instance, one team can focus on developing and

training the modelo, while another team handles user interaction and integration of the modelo into applications.

aprendizaje automático (ML) El aprendizaje automático tiene como objetivo predecir una etiqueta a partir de las atributos de un punto de datos. Los métodos de ML logran esto aprendiendo una hipótesis de un espacio de hipótesis (o modelo) mediante la minimización de una loss function [6, 18]. Una formulación precisa de este principio es el ERM. Diferentes métodos de ML se obtienen de distintas elecciones de diseño para los punto de datoss (sus atributos y etiqueta), el modelo, y la loss function [6, Cap. 3].

aprendizaje automático explicable (explainable ML) El aprendizaje automático explicable (explainable ML) consiste en métodos de ML que tienen como objetivo complementar cada predicción con una explicación explícita de cómo se ha obtenido dicha predicción.La construcción de una explicación explícita puede no ser necesaria si el método de ML utiliza un modelo lo suficientemente simple (o interpretable) [19].

aprendizaje de atributos Consideremos una aplicación de ML con punto de datoss caracterizados por atributos crudas $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$. El aprendizaje de atributos se refiere a la tarea de aprender un mapeo

$$\mathbf{\Phi} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}' : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}',$$

que recibe como entrada los atributos crudos $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ de un punto de datos y entrega nuevos atributos $\mathbf{x}' \in \mathcal{X}'$ de un nuevo espacio de atributos $\mathcal{X}'$. Se obtienen diferentes métodos de aprendizaje de atributos a partir de

diferentes elecciones de $\mathcal{X}, \mathcal{X}'$, de un espacio de hipótesis $\mathcal{H}$ de posibles mapeos $\mathbf{\Phi}$, y de una medida cuantitativa de la utilidad de un mapeo específico $\mathbf{\Phi} \in \mathcal{H}$. Por ejemplo, PCA utiliza $\mathcal{X} := \mathbb{R}^d$, $\mathcal{X}' := \mathbb{R}^{d'}$ con $d' < d$, y un espacio de hipótesis

$$\mathcal{H} := \left\{ \mathbf{\Phi} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d'} : \mathbf{x}' := \mathbf{F}\mathbf{x} \text{ con alguna } \mathbf{F} \in \mathbb{R}^{d' \times d} \right\}.$$

PCA mide la utilidad de un mapeo específico $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}\mathbf{x}$ por el mínimo error de reconstrucción lineal incurrido sobre un conjunto de datos,

$$\min_{\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{d \times d'}} \sum_{r=1}^{m} \left\| \mathbf{G}\mathbf{F}\mathbf{x}^{(r)} - \mathbf{x}^{(r)} \right\|_2^2 .$$

aprendizaje federado (FL) FL es un término general para los métodos de ML que entrenan modelos de manera colaborativa, utilizando datos y computación descentralizadas.

aprendizaje federado agrupado (CFL) El FL agrupado asume que los local datasets están naturalmente organizados en clusters. Los local datasets que pertenecen al mismo cluster comparten propiedades estadísticas similares. El FL agrupado agrega los local datasets dentro del mismo cluster para formar un conjunto de entrenamiento para el entrenamiento de un modelo específico del cluster. Minimización de variación total generalizada (GTVMin) facilita esta agrupación de manera implícita al imponer una similitud aproximada de los model parameters a través de subconjuntos bien conectados del red de aprendizaje federado (red FL).

aprendizaje federado en red (NFL) El aprendizaje federado en red (NFL) se refiere a métodos que aprenden modelos personalizados de manera

distribuida. Estos métodos aprenden a partir de local datasets que están relacionados por una estructura de red intrínseca.

aprendizaje federado horizontal (horizontal FL) El aprendizaje federado horizontal utiliza local datasets constituidos por diferentes punto de datoss, pero emplea las mismas atributos para caracterizarlos [20]. Por ejemplo, la predicción meteorológica utiliza una red de estaciones meteorológicas (observación) distribuidas espacialmente. Cada estación mide las mismas cantidades, como la temperatura diaria, la presión atmosférica y la precipitación. Sin embargo, distintas estaciones miden las características o atributos de diferentes regiones espaciotemporales. Cada región espaciotemporal representa un punto de datos individual, caracterizado por las mismas atributos (por ejemplo, temperatura diaria o presión atmosférica).

aprendizaje federado vertical (FL vertical) El aprendizaje federado vertical utiliza local datasets formados por los mismos punto de datoss, pero caracterizados mediante diferentes atributos [21]. Por ejemplo, diferentes proveedores de salud podrían contener información sobre la misma población de pacientes. Sin embargo, diferentes proveedores de salud recopilan distintas mediciones (por ejemplo, valores sanguíneos, electrocardiogramas, radiografías de tórax) para los mismos pacientes.

aprendizaje multitarea El aprendizaje multitarea tiene como objetivo aprovechar las relaciones entre diferentes tarea de aprendizajes. Considere dos tarea de aprendizajes obtenidas del mismo conjunto de datos de capturas de webcam. La primera tarea consiste en predecir la pres-

encia de un ser humano, mientras que la segunda consiste en predecir la presencia de un automóvil. Podría ser útil utilizar la misma estructura de red profunda para ambas tareas y permitir que solo los weights de la capa de salida final sean diferentes.

aprendizaje semi-supervisado (SSL) El aprendizaje semi-supervisado (SSL) utiliza punto de datoss no etiquetados para apoyar el aprendizaje de una hipótesis a partir de punto de dato etiquetados [22]. Este enfoque es particularmente útil para aplicaciones de ML que ofrecen una gran cantidad de punto de datoss no etiquetados, pero solo un número limitado de punto de dato etiquetados.

arrepentimiento (regret) El arrepentimiento de una hipótesis h en relación con otra hipótesis h', que sirve como referencia referencia (baseline), es la diferencia entre la loss incurrida por h y la loss incurrida por h' [16]. La referencia (baseline) hipótesis de referencia h' también se denomina experto.

artificial intelligence (AI) AI refers to systems that behave rationally in the sense of maximizing a long-term reward. The ML-based approach to AI is to train a modelo for predicting optimal actions. These predictions are computed from observations about the state of the environment. The choice of loss function sets AI applications apart from more basic ML applications. AI systems rarely have access to a labeled conjunto de entrenamiento that allows the average loss to be measured for any possible choice of model parameters. Instead, AI systems use observed reward signals to obtain a (point-wise) estimate for the loss incurred by

the current choice of model parameters.

artificial neural network (ANN) An ANN is a graphical (signal-flow) representation of a function that maps atributos of a punto de datos at its input to a predicción for the corresponding etiqueta at its output. The fundamental unit of an ANN is the artificial neuron, which applies an función de activación to its weighted inputs. The outputs of these neurons serve as inputs for other neurons, forming interconnected layers.

aspectos computacionales Por aspectos computacionales de un método de ML, nos referimos principalmente a los recursos computacionales requeridos para su implementación. Por ejemplo, si un método de ML utiliza técnicas de optimización iterativas para resolver ERM, sus aspectos computacionales incluyen: 1) cuántas many operaciones aritméticas se necesitan para implementar una sola iteración(paso de gradiente); y 2) cuántas iteraciones se requieren para obtener model parameters útiles. Un ejemplo importante de técnica de optimización iterativa es el gradient descent (GD).

aspectos estadísticos Por aspectos estadísticos de un método de ML, nos referimos a las propiedades de la probability distribution de su salida bajo un modelo probabilístico para los datos introducidos en el método.

ataque de denegación de servicio (DoS) Un ataque de denegación de servicio (DoS) tiene como objetivo (por ejemplo, mediante envenenamiento de datos) dirigir el entrenamiento de un modelo para que tenga un rendimiento deficiente con punto de datos típicos.

atributo Un atributo de un punto de datos es una de sus propiedades que se puede medir o calcular fácilmente sin la necesidad de supervisión humana. Por ejemplo, si un punto de datos es una imagen digital (por ejemplo, almacenada como un archivo `.jpeg`), entonces podríamos usar las intensidades rojo-verde-azul de sus píxeles como atributos. Sinónimos específicos del dominio para el término atributo incluyen "covariable", "variable explicativa", "variable independiente", "variable de entrada", "predictor (variable)" o "regresor" [23], [24], [25].

atributo sensible La ML busca aprender una hipótesis que prediga la etiqueta de un punto de datos a partir de sus atributos. En algunas aplicaciones, es crucial garantizar que la salida del sistema no permita inferir atributos sensibles de los punto de datoss. Qué se considera atributo sensible depende del dominio de aplicación y debe definirse explícitamente.

autoencoder Un autoencoder es un método de ML que aprende simultáneamente un mapeo codificador $h(\cdot) \in \mathcal{H}$ y un mapeo decodificador $h^*(\cdot) \in \mathcal{H}^*$. Es una instancia de ERM que utiliza una loss calculada a partir del error de reconstrucción $\mathbf{x} - h^*\big(h\big(\mathbf{x}\big)\big)$.

bagging Bagging (or bootstrap aggregation) is a generic technique to improve (the robustness of) a given ML method. The idea is to use the bootstrap to generate perturbed copies of a given conjunto de datos and then to learn a separate hipótesis for each copy. We then predict the etiqueta of a punto de datos by combining or aggregating the individual predicciónss of each separate hipótesis. For hipótesis maps delivering numeric etiqueta

values, this aggregation could be implemented by computing the average of individual prediccións.

Bayes estimator Consider a modelo probabilístico with a joint probability distribution $p(\mathbf{x}, y)$ for the atributos $\mathbf{x}$ and etiqueta y of a punto de datos. For a given loss function $L(\cdot, \cdot)$, we refer to a hipótesis h as a Bayes estimator if its riesgo $\mathbb{E}\{L((\mathbf{x}, y), h)\}$ is the mínimo [26]. Note that the property of a hipótesis being a Bayes estimator depends on the underlying probability distribution and the choice for the loss function $L(\cdot, \cdot)$.

Bayes risk Consider a modelo probabilístico with a joint probability distribution $p(\mathbf{x}, y)$ for the atributos $\mathbf{x}$ and etiqueta y of a punto de datos. The Bayes riesgo is the mínimo possible riesgo that can be achieved by any hipótesis $h : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$. Any hipótesis that achieves the Bayes risk is referred to as a Bayes estimator [26].

bootstrap Para el análisis de métodos de ML methods, es a menudo útil interpretar un conjunto dado de punto de datoss $\mathcal{D} = \left\{\mathbf{z}^{(1)}, \ldots, \mathbf{z}^{(m)}\right\}$ como realizaciónes de RVsindependientes e idénticamente distribuidos (i.i.d.) con una probability distribution común $p(\mathbf{z})$.En general, no conocemos $p(\mathbf{z})$ exactamente, por lo que necesitamos estimarla. El método bootstrap utiliza el histograma de $\mathcal{D}$ como un estimador para la probability distribution subyacente $p(\mathbf{z})$.

caracterización min-max de Courant–Fischer–Weyl Considere una psd

matriz $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ con EVD (o descomposición espectral),

$$\mathbf{Q} = \sum_{j=1}^{d} \lambda_j \mathbf{u}^{(j)} \left(\mathbf{u}^{(j)}\right)^T.$$

Aquí, utilizamos los eigenvalues ordenados (de forma creciente)

$$\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n.$$

La caracterización min-max de Courant–Fischer–Weyl [3, Th. 8.1.2] representa los eigenvalues de $\mathbf{Q}$ como las soluciones a ciertos problemas de optimización.

clasificación La clasificación es la tarea de determinar una etiqueta y con valor discreto para un punto de datos, basado únicamente en sus atributos $\mathbf{x}$. La etiqueta y pertenece a un conjunto finito, como por ejemplo $y \in \{-1, 1\}$ o $y \in \{1, \ldots, 19\}$, y representa la categoría a la que pertenece el punto de datos.

clasificación multi-etiqueta Los problemas y métodos de clasificación multi-etiqueta utilizan punto de datoss caracterizados por varias etiquetas. Por ejemplo, considere un punto de datos que representa una imagen con dos etiquetas. Una etiqueta indica la presencia de un ser humano en la imagen y otra etiqueta indica la presencia de un aútomovil.

clasificador Un clasificador es una hipótesis (función) $h(\mathbf{x})$ usada para predecir una etiqueta que toma valores de un espacio de etiquetas finito. Podemos usar directamente el valor $h(\mathbf{x})$ como predicción $\hat{y}$ para la etiqueta. pero normalmente se usa una función $h(\cdot)$ que entrega una cantidad numérica. La predicción es obtenida a travez de un paso

de umbral. Por ejemplo, en un problema de clasificación binaria con $\mathcal{Y} \in \{-1, 1\}$, podríamos usar una hipótesis de valores reales $h(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$ como clasificador. Una predicción $\hat{y}$ puede obtenerse mediante:

$$\hat{y} = 1 \text{ for } h(\mathbf{x}) \geq 0 \text{ and } \hat{y} = -1 \text{ otherwise.} \tag{1}$$

Podemos caracterizar un clasificador mediante sus región de decisiónes $\mathcal{R}_a$, para cada valor posible de etiqueta $a \in \mathcal{Y}$.

clasificador lineal Consideremos punto de datoss caracterizados por atributos numéricos $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ y una etiqueta $y \in \mathcal{Y}$ de algún espacio de etiquetas finito $\mathcal{Y}$. Un clasificador lineal se caracteriza por tener región de decisións que están separadas por hiperplanos en $\mathbb{R}^d$ [6, Ch. 2].

cluster A cluster is a subset of punto de datoss that are more similar to each other than to the punto de datoss outside the cluster. The quantitative measure of similarity between punto de datoss is a design choice. If punto de datoss are characterized by Euclidean vector de atributoss $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, we can define the similarity between two punto de datoss via the Euclidean distance between their vector de atributoss.

clustering Clustering methods decompose a given set of punto de datoss into a few subsets, which are referred to as clusters. Each cluster consists of punto de datoss that are more similar to each other than to punto de datoss outside the cluster. Different clustering methods use different measures for the similarity between punto de datoss and different forms of cluster representations. The clustering method k-means uses the average atributo vector (cluster media) of a cluster as its representative.

A popular soft clustering method based on GMM represents a cluster by a distribución normal multivariante.

conjunto de datos Un conjunto de datos se refiere a una colección de punto de datoss. Estos punto de datoss contienen información sobre alguna cantidad de interés (o etiqueta) dentro de una aplicación de ML. Los métodos de ML utilizan conjuntos de datos para el entrenamiento de modelo (por ejemplo, a través de ERM) y para la validación de modelos. Nuestra noción de conjunto de datos es muy flexible, ya que permite diferentes tipos de punto de datoss. De hecho, los punto de datoss pueden ser objetos físicos concretos (como humanos o animales) o objetos abstractos (como números). Como ejemplo, la Figura 2 muestra un conjunto de datos que consiste en vacas como punto de datoss.

Figure 2: “Cows in the Swiss Alps” by User:Huhu Uet is licensed under [CC BY-SA 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/)

Con frecuencia, un ingeniero de ML no tiene acceso directo a un conjunto de datos. De hecho, acceder al conjunto de datos en la Figura requeriría

visitar el rebaño de vacas en los Alpes. En su lugar, necesitamos utilizar una aproximación (o representación) del conjunto de datos que sea más conveniente para trabajar. Se han desarrollado diferentes modelos matemáticos para la representación (o aproximación) de conjuntos de datos [27], [28], [29], [30]. Uno de los modelos de datos más adoptados es el modelo relacional, modelo, que organiza los datos en una tabla (o relación) [31], [27]. Una tabla se compone de filas y columnas:

- Cada fila de la tabla representa un solo punto de datos.
- Cada columna de la tabla corresponde a un atributo específico del punto de datos. Los métodos de ML pueden utilizar estos atributos como atributos y etiquetas del punto de datos.

Por ejemplo, la Tabla 1 muestra una representación del conjunto de datos en la Figura 2. En el modelo relacional, el orden de las filas es irrelevante, y cada atributo (es decir, columna) debe estar definido de manera precisa con un dominio, que especifica el conjunto de valores posibles. En las aplicaciones de ML, estos dominios de atributos se convierten en el espacio de atributos y el espacio de etiquetas.

Name	**Weight**	**Age**	**Height**	**Stomach temp**
Zenzi	100	4	100	25
Berta	140	3	130	23
Resi	120	4	120	31

Table 1: Una relación (o tabla) que representa el conjunto de datos en la Figura .

Si bien el modelo relacional es útil para el estudio de muchas aplicaciones de ML, puede ser insuficiente para cumplir con los requisitos de inteligencia artificial confiable (IA confiable). Enfoques modernos como las hojas de datos para conjuntos de datos proporcionan una documentación más completa, incluyendo detalles sobre el proceso de recolección del conjunto de datos, su uso previsto y otra información contextual [32].

conjunto de entrenamiento Un conjunto de entrenamiento es un conjunto de datos $\mathcal{D}$ que consiste en algunos punto de datoss usados en ERM para aprender unahipótesis $\hat{h}$. La loss promedio de $\hat{h}$ en el conjunto de entrenamiento se denomina error de entrenamiento. La comparación del error de entrenamiento con el error de validación de $\hat{h}$ nos permite diagnosticar el método de ML e informa cómo mejorar el error de validación (por ejemplo, utilizando un espacio de hipótesis diferente o recopilando más punto de datoss) [6, Sec. 6.6].

conjunto de prueba Un conjunto de punto de datoss que no ha sido utilizado ni para entrenar un modelo (por ejemplo, mediante ERM) ni en un conjunto de validación para elegir entre diferentes modelos.

conjunto de validación Un conjunto de punto de datoss usado para estimar el riesgo de una hipótesis $\hat{h}$ que ha sido aprendida mediante algún método de ML (por ejemplo, resolviendo ERM). El loss promedio de $\hat{h}$ en el conjunto de validación validación se denomina error de validación y puede utilizarse para diagnosticar un método de ML (vea [6, Sec. 6.6]). La comparación entre el error de entrenamiento y el error de validación

puede proporcionar información sobre cómo mejorar el método de ML method (como usar unespacio de hipótesis diferente).

convex A subset $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^d$ of the espacio euclidiano $\mathbb{R}^d$ is referred to as convex if it contains the line segment between any two points $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{C}$ in that set. A function $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ is convex if its epigraph $\left\{ \left(\mathbf{w}^T, t \right)^T \in \mathbb{R}^{d+1} : t \geq f(\mathbf{w}) \right\}$ is a convex set [33]. We illustrate one example of a convex set and a convex function in Figure 3.

Figure 3: Left: A convex set $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^d$. Right: A convex function $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$.

convex clustering Consider a conjunto de datos $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(m)} \in \mathbb{R}^d$. Convex clustering learns vectors $\mathbf{w}^{(1)}, \ldots, \mathbf{w}^{(m)}$ by minimizing

$$\sum_{r=1}^{m} \left\| \mathbf{x}^{(r)} - \mathbf{w}^{(r)} \right\|_2^2 + \alpha \sum_{i,i' \in \mathcal{V}} \left\| \mathbf{w}^{(i)} - \mathbf{w}^{(i')} \right\|_p .$$

Here, $\|\mathbf{u}\|_p := \left(\sum_{j=1}^{d} |u_j|^p \right)^{1/p}$ denotes the p-norma (for $p \geq 1$). It turns out that many of the optimal vectors $\widehat{\mathbf{w}}^{(1)}, \ldots, \widehat{\mathbf{w}}^{(m)}$ coincide. A cluster then consists of those punto de datoss $r \in \{1, \ldots, m\}$ with identical $\widehat{\mathbf{w}}^{(r)}$ [34, 35].

data augmentation Datos augmentation methods add synthetic punto de datoss to an existing set of punto de datoss. These synthetic punto

de datoss are obtained by perturbations (e.g., adding noise to physical measurements) or transformations (e.g., rotations of images) of the original punto de datoss. These perturbations and transformations are such that the resulting synthetic punto de datoss should still have the same etiqueta. As a case in point, a rotated cat image is still a cat image even if their vector de atributoss (obtained by stacking pixel color intensities) are very different (see Figure 4). Datos augmentation can be an efficient form of regularización.

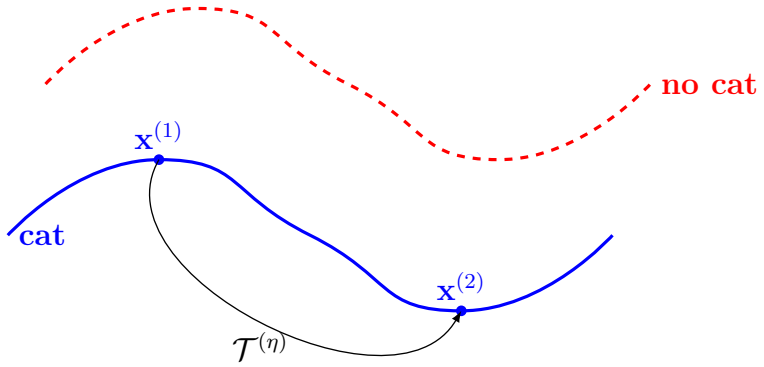


Figure 4: Datos augmentation exploits intrinsic symmetries of punto de datoss in some espacio de atributos $\mathcal{X}$. We can represent a symmetry by an operator $\mathcal{T}^{(\eta)} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, parametrized by some number $\eta \in \mathbb{R}$. For example, $\mathcal{T}^{(\eta)}$ might represent the effect of rotating a cat image by η degrees. A punto de datos with vector de atributos $\mathbf{x}^{(2)} = \mathcal{T}^{(\eta)}\left(\mathbf{x}^{(1)}\right)$ must have the same etiqueta $y^{(2)} = y^{(1)}$ as a punto de datos with vector de atributos $\mathbf{x}^{(1)}$.

data minimization principle European datos protection regulation includes a datos minimization principle. This principle requires a datos controller to limit the collection of personal information to what is

directly relevant and necessary to accomplish a specified purpose. The datos should be retained only for as long as necessary to fulfill that purpose [36, Article 5(1)(c)], [37].

data normalization Datos normalization refers to transformations applied to the vector de atributoss of punto de datoss to improve the ML method's aspectos estadísticos or aspectos computacionales. For example, in regresión lineal with gradient-based methods using a fixed tasa de aprendizaje, convergence depends on controlling the norma of vector de atributoss in the conjunto de entrenamiento. A common approach is to normalize vector de atributoss such that their norma does not exceed one [6, Ch. 5].

datos Los datos se refieren a objetos que llevan información. Estos objetos pueden ser tanto objetos físicos concretos (como personas o animales) como conceptos abstractos (como números). A menudo, utilizamos representaciones (o aproximaciones) de los datos originales que son más convenientes para su procesamiento. Estas aproximaciones se basan en diferentes modelos de datos, siendo el modelo de datos relacional uno de los más utilizados [31].

datos en red Los datos en red consisten en local datasets relacionados por alguna noción de similitud por pares. Podemos representar los datos en red utilizando un grafo cuyos nodos contienen local datasets y cuyas aristas codifican similitudes por pares. Un ejemplo de datos en red surge en las aplicaciones de FL donde los local datasets son generados por devices distribuidos espacialmente.

datos faltantes Considere un conjunto de datos constituido por punto de datoss recopilados a través de algún device físico. Debido a imperfecciones y fallas, algunos de los valores de atributo o etiqueta de los punto de datoss podrían estar corruptos o simplemente faltar. La imputación de Datos tiene como objetivo estimar estos valores faltantes [38]. Podemos interpretar la imputación de datos como un problema de MLdonde la etiqueta de un punto de datos es es el valor de la atributo corrupta.

decision tree A decision tree is a flow-chart-like representation of a hipótesis map h. More formally, a decision tree is a directed grafo containing a root node that reads in the vector de atributos $\mathbf{x}$ of a punto de datos. The root node then forwards the punto de datos to one of its children nodes based on some elementary test on the atributos $\mathbf{x}$. If the receiving child node is not a leaf node, i.e., it has itself children nodes, it represents another test. Based on the test result, the punto de datos is forwarded to one of its descendants. This testing and forwarding of the punto de datos is continued until the punto de datos ends up in a leaf node (having no children nodes).

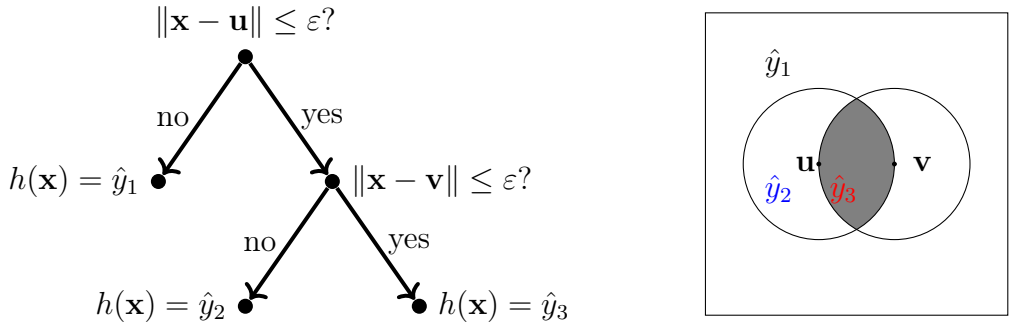


Figure 5: Left: A decision tree is a flow-chart-like representation of a piece-wise constant hipótesis $h : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$. Each piece is a región de decisión $\mathcal{R}_{\hat{y}} := \{\mathbf{x} \in \mathcal{X} : h(\mathbf{x}) = \hat{y}\}$. The depicted decision tree can be applied to numeric vector de atributoss, i.e., $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^d$. It is parametrized by the threshold $\varepsilon > 0$ and the vectors $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$. Right: A decision tree partitions the espacio de atributos $\mathcal{X}$ into región de decisións. Each región de decisión $\mathcal{R}_{\hat{y}} \subseteq \mathcal{X}$ corresponds to a specific leaf node in the decision tree.

descenso por gradiente proyectado (GD proyectado) Consideremos un método basado en ERM que utiliza un modelo parametrizado con un parameter space $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^d$. Aun si la función objetivo de ERM es smooth, no podemos usar el GD básico, ya ya que este no toma en cuenta las restricciones sobre la variable de optimización (es decir, los model parameters). El GD proyectado extiende el GD básico para controlar restricciones sobre la variable de optimización(es decir, los model parameters). Una sola iteración del GD proyectado consiste primero en realizar un paso de gradiente y luego proyectar el resultado sobre el parameter space.

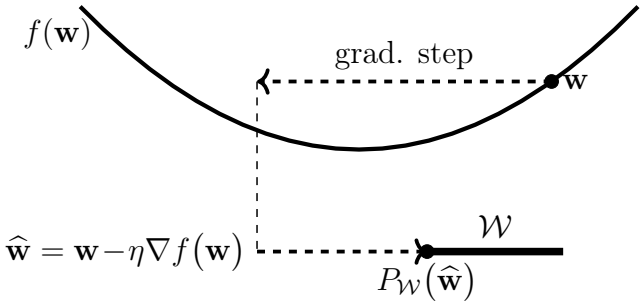


Figure 6: GD proyectado amplía un paso de gradiente básico con una proyección de regreso al conjunto de restricciones $\mathcal{W}$.

device Any physical system that can be used to store and process datos. In the context of ML, we typically mean a computer that is able to read in punto de datoss from different sources and, in turn, to train an ML modelo using these punto de datoss.

diagrama de dispersión Un método de visualización que representa punto de datos mediante marcadores en un plano bidimensional. La Figura 7 depicta un ejemplo de un diagrama de dispersión.

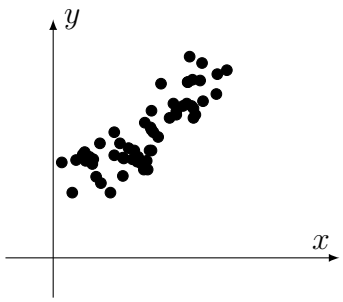


Figure 7: Un diagrama de dispersión de algunos punto de datos que representan las condiciones climáticas diarias en Finlandia. Cada punto de datos se caracteriza por su temperatura mínimo diaria x como atributo y su temperatura máximo diaria y como etiqueta. Las temperaturas se han medido en la estación meteorológica FMI de Helsinki Kaisaniemi durante el período 1.9.2024 - 28.10.2024.

diferenciable Una función real $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ es diferenciable si, en cualquier punto, puede aproximarse localmente mediante una función lineal. La aproximación lineal local en el punto $\mathbf{x}$ es determinada por el gradiente $\nabla f(\mathbf{x})$ [2].

dimensión de Vapnik–Chervonenkis (dimensión VC) La dimensión VC (Vapnik–Chervonenkis) de un espacio de hipótesis infinito es una medida ampliamente utilizada para su tamaño. Nos referimos a la literatura (vea [39]) para una definición precisa de la dimensión VC, y para una discusión de sus propiedades básicas y su uso en ML.

dimensión efectiva La dimensión efectiva $d_{\text{eff}}(\mathcal{H})$ de un espacio de hipótesis infinito $\mathcal{H}$ es una medida de su tamaño. A grandes rasgos,la dimensión efectiva es igual al número efectivo de model parameters independientes

y ajustables. Estos parameters pueden ser los coeficientes utilizados en un mapa lineal o los weights y términos de sesgo de una ANN.

discrepancia Considere una aplicacion de FL con datos en red representada por un red de aprendizaje federado (red FL). Los métodos de FL utilizan una medida de discrepancia para comparar los mapas de hipótesis generados por los local models en los nodos i, i' conectados por una arista en el red de aprendizaje federado (red FL).

distribución normal multivariante La distribución normal multivariante $\mathcal{N}(\mathbf{m}, \mathbf{C})$ es una familia importante de probability distributions para una RV continua $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ [5, 40, 41]. Esta familia está parametrizada por la media $\mathbf{m}$ y la matriz de covarianza $\mathbf{C}$ de $\mathbf{x}$. Si la matriz de covarianza es invertible, la probability distribution de $\mathbf{x}$ es

$$p(\mathbf{x}) \propto \exp\Big(-(1/2)\big(\mathbf{x}-\mathbf{m}\big)^T \mathbf{C}^{-1}\big(\mathbf{x}-\mathbf{m}\big)\Big).$$

divergencia de Kullback-Leibler (divergencia KL) La divergencia KL es una medida cuantitativa de cuánto se diferencia una probability distribution de otra probability distribution [42].

edge weight Each edge $\{i, i'\}$ of an red de aprendizaje federado (red FL) is assigned a non-negative edge weight $A_{i,i'} \geq 0$. A zero edge weight $A_{i,i'} = 0$ indicates the absence of an edge between nodes $i, i' \in \mathcal{V}$.

eigenvalue We refer to a number $\lambda \in \mathbb{R}$ as an eigenvalue of a square matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ if there is a non-zero vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$ such that $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$.

eigenvalue decomposition (EVD) The eigenvalue decomposition for a square matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ is a factorization of the form

$$\mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^{-1}.$$

The columns of the matrix $\mathbf{V} = \left(\mathbf{v}^{(1)}, \ldots, \mathbf{v}^{(d)}\right)$ are the eigenvectors of the matrix $\mathbf{V}$. The diagonal matrix $\mathbf{\Lambda} = \mathrm{diag}\left\{\lambda_1, \ldots, \lambda_d\right\}$ contains the eigenvalues λ_j corresponding to the eigenvectors $\mathbf{v}^{(j)}$. Note that the above decomposition exists only if the matrix $\mathbf{A}$ is diagonalizable.

eigenvector An eigenvector of a matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ is a non-zero vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$ such that $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ with some eigenvalue λ.

embudo de privacidad El embudo de privacidad es un método para aprender atributos amigables con la privacidad de los punto de datoss [43].

entorno El entorno de un nodo $i \in \mathcal{V}$ es el subconjunto de nodos constituido por los vecinos de i.

envenenamiento de datos El envenenamiento de datos se refiere a la manipulación intencional (o fabricación) de punto de datos para influir en el entrenamiento de un modelo de ML [44, 45]. La protección contra el envenenamiento de datos es especialmente importante en aplicaciones distribuidas de ML donde los conjunto de datoss están descentralizados.

error cuadrático medio de estimación (MSEE) Consideremos un método de ML que aprende model parameters $\widehat{\mathbf{w}}$ a partir de un conjunto de datos $\mathcal{D}$. Si interpretamos los punto de datoss en $\mathcal{D}$ como realizacións i.i.d. de una RV $\mathbf{z}$, definimos el error de estimación como $\Delta\mathbf{w} := \widehat{w} - \overline{\mathbf{w}}$.

Aquí, $\overline{\mathbf{w}}$ representa los verdaderos model parameters de la probability distribution de $\mathbf{z}$. El error cuadrático medio de estimación se define como la esperanza $\mathbb{E}\{\|\Delta\mathbf{w}\|^2\}$ del cuadrado de la norma euclidiana del error de estimación [26, 46].

error de entrenamiento El loss promedio de una hipótesis al predecir las etiquetas de los punto de datoss en un conjunto de entrenamiento. A veces también nos referimos al error de entrenamiento como el loss promedio mínimo que se logra mediante una solución de ERM.

error de estimación Consideremos punto de datoss, cada uno con un vector de atributos $\mathbf{x}$ y una etiqueta y. En algunas aplicaciones, podemos modelar la relación entre el vector de atributos y la etiqueta de un punto de datos como $y = \bar{h}(\mathbf{x}) + \varepsilon$. Aquí $\bar{h}$ representa la hipótesis verdadera subyacente y ε es un término de ruido que resume errores de modelado o etiquetado. El error de estimación incurrido por un método de ML que aprende una hipótesis $\widehat{h}$, por ejemplo usando ERM, se define como $\widehat{h}(\mathbf{x}) - \bar{h}(\mathbf{x})$, para algún vector de atributos dado. En un espacio de hipótesis paramétrico, donde las hipótesisse determinan mediante model parameters $\mathbf{w}$, podemos definir el error de estimación como $\Delta\mathbf{w} = \widehat{\mathbf{w}} - \overline{\mathbf{w}}$ [46, 47].

error de validación Consideremos una hipótesis $\hat{h}$ obtenida por algún método de ML, e.g., por ejemplo, utilizando ERM en un conjunto de entrenamiento. El loss promedio de $\hat{h}$ en un conjunto de validación, que es diferente del conjunto de entrenamiento, se denomina error de validación.

espacio de atributos El espacio de atributos de una aplicación o método de ML está constituido por todos los valores potenciales que el vector de atributos de un punto de datos puede asumir. Una elección común para el espacio de atributos es el espacio euclidiano $\mathbb{R}^d$, donde la dimensión d es el número de atributos individuales de un punto de datos.

espacio de etiquetas Consideremos una aplicación de ML que involucra punto de datoss caracterizados por atributos y etiquetas. El espacio de etiqueta etiquetas está constituido por todos los valores potenciales que una etiqueta de un punto de datos puede asumir. Los métodos de Regresión, que buscan predecir etiquetas numéricas etiquetas, a menudo utilizan el espacio de etiquetas etiqueta $\mathcal{Y} = \mathbb{R}$. Los métodos de clasificación binaria utilizan un espacio de etiquetas etiqueta que consiste de dos elementos diferentes, por ejemplo, $\mathcal{Y} = \{-1, 1\}$, $\mathcal{Y} = \{0, 1\}$, o $\mathcal{Y} = \{$"imagen de gato","sin imagen de gato"$\}$.

espacio de hipótesis Cada método práctico deML utiliza un espacio de hipótesis (o modelo) $\mathcal{H}$. El espacio de hipótesis de un método de ML es un subconjunto de todos los posibles mapeos del espacio de atributos al espacio de etiquetas. La elección del diseño del espacio de hipótesis debe considerar los recursos computacionales disponibles y los aspectos estadísticos. Si la infraestructura computacional permite operaciones matriciales eficientes y existe una relación (aproximadamente) lineal entre un conjunto de atributos y una etiqueta, una elección útil para el espacio de hipótesis podria ser el modelo lineal.

espacio euclidiano El espacio euclidiano $\mathbb{R}^d$ de dimensión $d \in \mathbb{N}$ consiste en

vectores $\mathbf{x} = \big(x_1, \ldots, x_d\big)$, con d entradas de valores reales $x_1, \ldots, x_d \in \mathbb{R}$. Dicho espacio euclidiano está equipado con una estructura geométrica definida por el producto interno $\mathbf{x}^T\mathbf{x}' = \sum_{j=1}^{d} x_j x'_j$ entre dos vectores cualesquiera $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^d$ [2].

espectrograma Un espectrograma representa la distribución tiempo-frecuencia de la energía de una señal temporal $x(t)$. Intuitivamente, cuantifica la cantidad de energía de la señal presentedentro de un segmento de tiempo específico $[t_1, t_2] \subseteq \mathbb{R}$ y en un intervalo de frecuencia $[f_1, f_2] \subseteq \mathbb{R}$. Formalmente, el espectrograma de una señal se define como el módulo al cuadrado de su transformada de Fourier de ventana corta (STFT, en inglés) [48]. La Figure 8 muestra una señal temporal junto con su espectrograma.

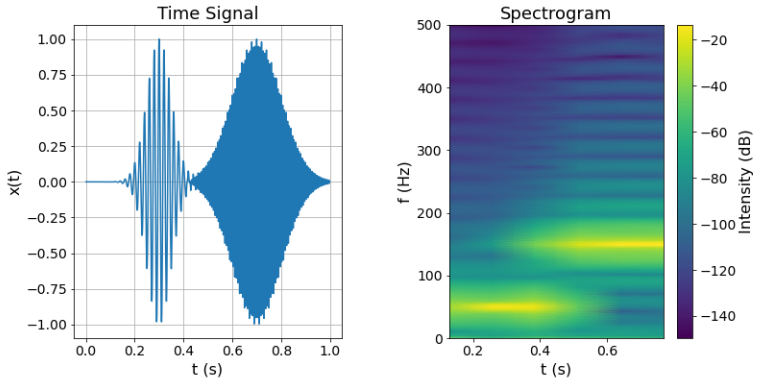


Figure 8: Izquierda: una señal temporal compuesta por dos pulsos gaussianos modulados. Derecha: representación de intensidad de su espectrograma.

La representación de intensidad del espectrograma puede considerarse como una imagen de la señal. Una estrategia sencilla para la clasificación

de señales de audio consiste en introducir esta imagen en una red profunda desarrollada originalmente para tareas de clasificación de imágenes y detección de objetos [49]. Conviene señalar que, además del espectrograma, existen otras representaciones alternativas para describir la distribución tiempo-frecuencia de la energía de una señal [50, 51].

esperanza Consideremos un vector de atributos numérico $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ que interpretamos como la realización de una RV con una probability distribution $p(\mathbf{x})$. La esperanza de $\mathbf{x}$ se define como la integral $\mathbb{E}\{\mathbf{x}\} := \int \mathbf{x} p(\mathbf{x})$ [2, 52, 53]. Nótese que la esperanza solo está definida si esta integral existe, es decir, si la RV es integrable.

esperanza-maximización (EM) Considera un modelo probabilístico $p(\mathbf{z}; \mathbf{w})$ para los punto de datoss $\mathcal{D}$ generados en alguna aplicación de ML. El estimador de máxima verosimilitudpara los model parameters $\mathbf{w}$ se obtienen maximizando $p(\mathcal{D}; \mathbf{w})$. Sin embargo, el problema de optimización resultante puede ser computacionalmente desafiante. El algoritmo de expectativa-maximización (EM) aproxima el estimador de máxima verosimilitud introduciendo una RV latente $\mathbf{z}$ de modo que maximizar $p(\mathcal{D}, \mathbf{z}; \mathbf{w})$ sea más fácil [47, 54, 55]. Dado que no observamos $\mathbf{z}$, necesitamos estimarlo a partir del conjunto de datos observado $\mathcal{D}$ utilizando una esperanza condicional. La estimación resultante $\widehat{\mathbf{z}}$ se utiliza para calcular una nueva estimación $\widehat{\mathbf{w}}$ resolviendo $\max_{\mathbf{w}} p(\mathcal{D}, \widehat{\mathbf{z}}; \mathbf{w})$. El punto clave es que la esperanza condicional $\widehat{\mathbf{z}}$ depende de los model parameters $\widehat{\mathbf{w}}$, que hemos actualizado en función de $\widehat{\mathbf{z}}$. Por lo tanto, debemos volver a calcular $\widehat{\mathbf{z}}$, lo que a su vez resulta en una nueva elección $\widehat{\mathbf{w}}$

para los model parameters. En la práctica, repetimos el cálculo de la esperanza condicional (es decir, el E-step) y la actualización de los model parameters (es decir, the M-step) hasta que se cumpla algún stopping criterion.

etiqueta Una es un hecho de nivel superior o una cantidad de interés asociada a un punto de datos. Por ejemplo, si el punto de datos es una imagen, la etiqueta podría indicar si la imagen contiene un gato o no. Los sinónimos de etiqueta, comúnmente utilizados en dominios específicos, incluyen "variable de respuesta", "variable de salida" y "objetivo" [23], [24], [25].

experto El ML tiene como objetivo aprender una hipótesis h que prediga con precisión la etiqueta de un punto de datos basado en sus atributos. Medimos el error de predicción utilizando una loss function. Idealmente, buscamos una hipótesis que incurra en la loss mínima para cualquier punto de datos. Podemos hacer este objetivo más preciso mediante el suposición de independencia e idéntica distribución (suposición i.i.d.) y utilizando el Bayes risk como referencia referencia (baseline) para la loss promedio de una hipótesis. Una manera alternativa de obtener unareferencia (baseline) es utilizar la hipótesis h' aprendida por un método de ML existente. A esta hipótesis h' la denominamos experto [16]. Los métodos de minimización de Arrepentimiento (regret) aprenden una hipótesis que incurre en una loss comparable a la del mejor experto [15, 16].

explicabilidad Definimos la (subjetiva) explicabilidad de un método de ML como el nivel de simulabilidad [56] de las predicciónes entregadas por

un sistema de ML a un usuario humano. Se pueden construir medidas cuantitativas para la explicabilidad (subjetiva) de un modelo entrenado comparando sus predicciónes con las predicciónes proporcionadas por un usuario en un conjunto de prueba [56, 57]. Alternativamente, podemos usar modelo probabilísticos para los datos y medir la explicabilidad de un modelo de ML entrenado mediante la entropía condicional (diferencial) de sus predicciónes, dadas las predicciónes del usuario [58, 59].

Explicaciones Locales Interpretables e Independientes del Modelo (LIME) Consideremos un modelo entrenado (o una hipótesis aprendida) $\widehat{h} \in \mathcal{H}$, que asigna la vector de atributos de un punto de datos a la predicción $\widehat{y} = \widehat{h}$. Las explicaciones Locales Interpretables e Independientes del Modelo (LIME) son una tecnica para explicar el comportamiento de $\widehat{h}$, localmente, alrededor de un punto de datos con vector de atributos $\mathbf{x}^{(0)}$ [60]. La explicación se da en forma de una aproximación local $g \in \mathcal{H}'$ de $\widehat{h}$ (véa Fig.). Esta aproximación puede obtenerse mediante una instancia de ERM con un conjunto de entrenamiento diseñado cuidadosamente. En particular, el conjunto de entrenamiento consiste en punto de datoss con vector de atributos $\mathbf{x}$ cercana a $\mathbf{x}^{(0)}$ y la (pseudo-)etiqueta $\widehat{h}(\mathbf{x})$. Nótese que podemos utilizar un modelo $\mathcal{H}'$ diferente para la aproximación que el modelo original $\mathcal{H}$. Por ejemplo, podemos usar un decision tree para aproximar (localmente) una red profunda. Otra elección ampliamente utilizada para $\mathcal{H}'$ es el modelo lineal.

explicación Un manera para hacer que los métodos de ML sean transparentes consiste en proporcionar una explicación junto con la predicción

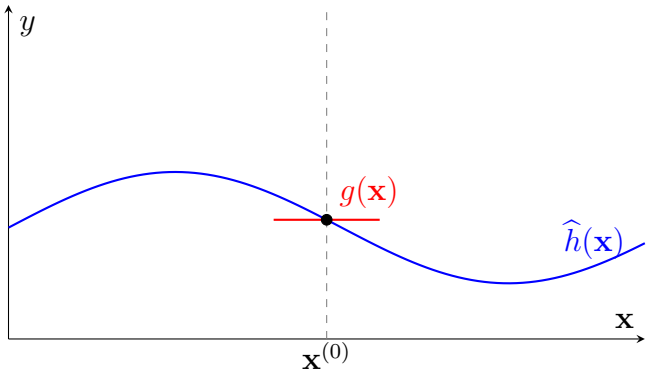


Figure 9: Para explicar un modelo $\widehat{h} \in \mathcal{H}$ entrenado, alrededor de un vector de atributos $\mathbf{x}^{(0)}$, podemos usar una aproximación local $g \in \mathcal{H}'$.

generada por el método ML. Las explicaciones pueden adoptar muchas formas diferentes. Pueden ser un texto natural o una medida cuantitativa que indique la importancia de atributos individuales de un punto de datos [61]. También podemos usar formas visuales, como los mapas de intensidad usados en tareas de clasificación de imágenes [62].

familias exponenciales en red (nExpFam) Una colección de familias exponenciales, cada una de ellas asignada a un nodo de un red de aprendizaje federado (red FL). Los model parameters están acoplados a través de la estructura de la red al requerir que tengan una pequeña GTV [63].

FedProx FedProx se refiere a un algorithm iterativo de FL que alterna entre entrenar local models por separado y combinar los model parameters locales actualizados. A diferencia de FedAvg, que utiliza stochastic gradient descent (SGD) para entrenar los local models, FedProx usa un operador proximal para el entrenamiento [64].

filtración de privacidad Consideremos una aplicacion de ML que procesa un conjunto de datos $\mathcal{D}$ y produce una salida, como las predicciónes obtenidas para nuevos punto de datoss. Se produce una filtración de privacidad cuando la salida contiene información privada sobre un atributo de un punto de datos (que podría representar a una persona) en $\mathcal{D}$. Basado en la modelo probabilístico para la generacion de los datos, podemos medir la filtración de privacidad usando la MI entre la salida y la atributo sensible. Otra medida cuantitativa de la filtración de privacidad es la privacidad diferencial (DP). Las relaciones entre las diferentes medidas de filtración de privacidad han sido estudiadas en la literatura (véa [65]).

frontera de decisión Consideremos un mapa de hipótesis h que recibe un vector de atributo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ y entrega un valor de un conjunto finito $\mathcal{Y}$. La frontera de decisión de h es el conjunto de vectores $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ que se encuentran entre diferentes región de decisións.Más precisamente, un vector $\mathbf{x}$ pertenece a la frontera de decisión si, y solo si, cada entorno $\{\mathbf{x}' : \|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\| \leq \varepsilon\}$, para cualquier $\varepsilon > 0$, contiene al menos dos vectores con diferentes valores de función.

fuertemente convexa Una función real diferenciable de valor continuo $f(\mathbf{x})$es fuertemente convex con coeficiente σ si cumple: $f(\mathbf{y}) \geq f(\mathbf{x}) + \nabla f(\mathbf{x})^T(\mathbf{y}-\mathbf{x}) + (\sigma/2)\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|_2^2$ [66], [67, Sec. B.1.1].

función cuadrática Una función $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ de la forma

$$f(\mathbf{w}) = \mathbf{w}^T\mathbf{Q}\mathbf{w} + \mathbf{q}^T\mathbf{w} + a,$$

donde $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ es una matriz, $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{d}$ es un vector y $a \in \mathbb{R}$ es un escalar.

función de activación Cada neurona artificial dentro de una ANN se le asigna una función de activación $\sigma(\cdot)$ que transforma una combinación ponderada de sus entradas $x_1, \ldots, x_d$ en un único valor de salida: $a = \sigma\big(w_1 x_1 + \ldots + w_d x_d\big)$. Cada neurona está parametrizada por los weights $w_1, \ldots, w_d$.

función objetivo Una función objetivo es un mapa que asigna a cada valor de una variable de optimización, como los model parameters $\mathbf{w}$ de una hipótesis $h^{(\mathbf{w})}$, un valor objetivo $f(\mathbf{w})$. El valor objetivo $f(\mathbf{w})$ podria ser el riesgo o el riesgo empírico de una hipótesis $h^{(\mathbf{w})}$.

generalización Muchos de los sistemas actuales de ML (y AI) se basan en ERM: En esencia, entrenan un modelo (es decir, aprenden una hipótesis $\hat{h} \in \mathcal{H}$) minimizando la loss promedio (o riesgo empírico) en algunos punto de datoss $\mathbf{z}^{(1)}, \ldots, \mathbf{z}^{(m)}$, que sirven como un conjunto de entrenamiento $\mathcal{D}^{(\text{train})}$. La generalización se refiere a la capacidad de un método de ML para desempeñarse bien fuera del conjunto de entrenamiento. Cualquier teoría matemática de la generalización necesita algún concepto matemático para el "fuera del conjunto de entrenamiento." Por ejemplo, la teoría del aprendizaje estadístico utiliza un modelo probabilístico como la suposición i.i.d. para la generacion de datos: los punto de datoss en el conjunto de entrenamiento son i.i.d. realizaciónes de alguna probability distribution subyacente $p(\mathbf{z})$. Un modelo probabilístico nos permite explorar el exterior del conjunto de

entrenamiento generando adicionales i.i.d. realizacións de $p(\mathbf{z})$. Además, el uso de la suposición i.i.d. nos permite definir el riesgo de un modelo entrenado $\hat{h} \in \mathcal{H}$ como la esperanza de la loss $\bar{L}\big(\hat{h}\big)$. Además, podemos utilizar límites de concentración o resultados de convergencia para secuencias de i.i.d. RVs para limitar la desviación entre el riesgo empírico $\widehat{L}\big(\hat{h}|\mathcal{D}^{(\text{train})}\big)$ de un modelo entrenado y su riesgo [39]. También es posible estudiar la generalización sin utilizar modelo probabilísticos. Por ejemplo, podríamos utilizar perturbaciones (determinísticas) de los punto de datos en el conjunto de entrenamiento para estudiar su exterior. En general, deseamos que el modelo entrenado sea robusto, es decir, que sus predicciónes no cambien demasiado ante pequeñas perturbaciones de un punto de datos. Considere un modelo entrenado para detectar un objeto en una imagen capturada por un teléfono inteligente. El resultado de la detección no debería cambiar si enmascaramos un pequeño número de píxeles seleccionados aleatoriamente en la imagen [68].

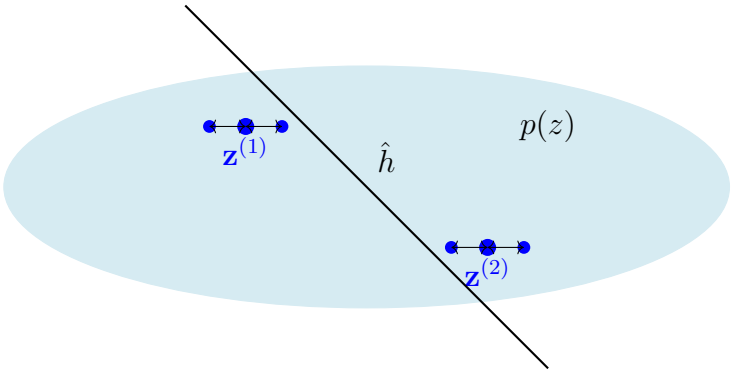


Figure 10: Dos punto de datos $\mathbf{z}^{(1)}, \mathbf{z}^{(2)}$ que se utilizan como un conjunto de entrenamiento para aprender una hipótesis $\hat{h}$ mediante ERM. Podemos evaluar $\hat{h}$ fuera de $\mathcal{D}^{(\text{train})}$ ya sea mediante una suposición i.i.d. con alguna probability distribution subyacente $p(\mathbf{z})$ o mediante la perturbación de los punto de datos.

gradient descent (GD) Gradiente descent is an iterative method for finding the mínimo of a diferenciable function $f(\mathbf{w})$ of a vector-valued argument $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^d$. Consider a current guess or approximation $\mathbf{w}^{(k)}$ for the mínimo of the function $f(\mathbf{w})$. We would like to find a new (better) vector $\mathbf{w}^{(k+1)}$ that has a smaller objective value $f(\mathbf{w}^{(k+1)}) < f\big(\mathbf{w}^{(k)}\big)$ than the current guess $\mathbf{w}^{(k)}$. We can achieve this typically by using a paso de gradiente

$$\mathbf{w}^{(k+1)} = \mathbf{w}^{(k)} - \eta \nabla f(\mathbf{w}^{(k)}) \tag{2}$$

with a sufficiently small tamaño de paso $\eta > 0$. Figure 11 illustrates the effect of a single gradiente descent step (2).

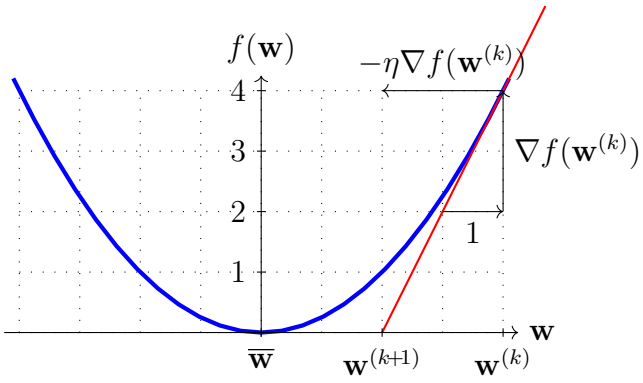


Figure 11: A single paso de gradiente (2) towards the minimizer $\overline{\mathbf{w}}$ of $f(\mathbf{w})$.

gradient-based methods Gradiente-based methods are iterative techniques for finding the mínimo (or máximo) of a diferenciable función objetivo of the model parameters. These methods construct a sequence of approximations to an optimal choice for model parameters that results in

a mínimo (or máximo) value of the función objetivo. As their name indicates, gradiente-based methods use the gradientes of the función objetivo evaluated during previous iterations to construct new, (hopefully) improved model parameters. One important example of a gradiente-based method is GD.

gradiente Para una función de valor real $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} : \mathbf{w} \mapsto f(\mathbf{w})$, un vector $\mathbf{g}$ tal que $\lim_{\mathbf{w}\to\mathbf{w}'} \frac{f(\mathbf{w})-\left(f(\mathbf{w}')+\mathbf{g}^T(\mathbf{w}-\mathbf{w}')\right)}{\|\mathbf{w}-\mathbf{w}'\|} = 0$ se denomina gradiente de f en $\mathbf{w}'$. Si existe tal vector, se denota como $\nabla f(\mathbf{w}')$ o $\nabla f(\mathbf{w})\big|_{\mathbf{w}'}$ [2].

grado de nodo El grado $d^{(i)}$ de un nodo $i \in \mathcal{V}$ en un grafo no dirigido, es el número de sus vecinos, es decir, $d^{(i)} := \left|\mathcal{N}^{(i)}\right|$.

grado de pertenencia El grado de pertenencia es un número que indica en qué medida un punto de datos pertenece a un cluster [6, Ch. 8]. Este grado puede interpretarse como una asignación blanda (*soft*) al cluster.Los métodos de Soft clustering pueden codificar el grado de pertenencia mediante un número real en el intervalo $[0, 1]$. El Hard clustering se obtiene como caso extremo, cuando el grado de pertenencia solo toma los valores 0 o 1.

grafo Un grafo $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ es un par compuesto por un conjunto de nodos $\mathcal{V}$ y un conjunto de aristas $\mathcal{E}$. En su forma màs general, un grafo se específica por una función que asigna a cada arista $e \in \mathcal{E}$ un par de nodos [69]. Un grupo importante de grafos son los grafos no dirigidos. Un grafo simple no dirigido es obtenida identificando cada arista $e \in \mathcal{E}$ con dos nodos diferentes $\{i, i'\}$. Los grafos etiquetados asignan un peso númerico especifico weights A_e a cada arista $e \in \mathcal{E}$.

grafo conexo Un grafo no dirigido $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ es conexo si todo subconjunto no vacío $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}$ tiene al menos una arista que lo conecta con $\mathcal{V} \setminus \mathcal{V}'$.

grafo de similitud Algunas aplicaciones de ML generan punto de datoss que están relacionados por una noción de similitud específica del dominio. Estas similitudes pueden ser representadas convenientemente utilizando un grafo de similitud $\mathcal{G} = \big(\mathcal{V} := \{1, \ldots, m\}, \mathcal{E}\big)$. El nodo $r \in \mathcal{V}$ representa el r-ésimo punto de datos. Dos nodos están conectados por una arista no dirigida si los punto de datos correspondientes son similares.

hard clustering Hard clustering refers to the task of partitioning a given set of punto de datoss into (a few) non-overlapping clusters. The most widely used hard clustering method is k-means.

Hilbert space A Hilbert space is a linear vector space equipped with an inner product between pairs of vectors. One important example of a Hilbert space is the espacio euclidiano $\mathbb{R}^d$, for some dimension d, which consists of Euclidean vectors $\mathbf{u} = \big(u_1, \ldots, u_d\big)^T$ along with the inner product $\mathbf{u}^T\mathbf{v}$.

hipótesis Una hipótesis se refiere a un mapa (o función) $h : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ que va del espacio de atributos $\mathcal{X}$ al espacio de etiquetas $\mathcal{Y}$. Dado un punto de datos con atributos $\mathbf{x}$, utilizamos un mapa de hipótesis h para estimar (o aproximar) la etiqueta y mediante la predicción $\hat{y} = h(\mathbf{x})$. El ML se centra en aprender (o encontrar) un mapa de hipótesis h tal que $y \approx h(\mathbf{x})$ para cualquier punto de datos (con atributos $\mathbf{x}$ y etiqueta y).

histograma Un histograma considera un conjunto de datos $\mathcal{D}$ que consiste en m punto de datoss $\mathbf{z}^{(1)}, \ldots, \mathbf{z}^{(m)}$, cada uno de los cuales pertenece a una celda $[-U, U] \times \ldots \times [-U, U] \subseteq \mathbb{R}^d$ con longitud de lado U. Dividimos esta celda uniformemente en celdas elementales más pequeñas con longitud de lado Δ. El histograma de $\mathcal{D}$ asigna a cada celda elemental la fracción correspondiente de punto de datoss en $\mathcal{D}$ que caen dentro de esa celda.

Huber loss The Huber loss unifies the pérdida de error cuadrático and the absolute error loss.

Huber regression Huber regresión refers to ERM-based methods that use the Huber loss as a measure of the predicción error. Two important special cases of Huber regresión are least absolute deviation regression and regresión lineal. Tuning the threshold parameter of the Huber loss allows the user to trade the robustness of the absolute error loss against the computational benefits of the smooth pérdida de error cuadrático.

independientes e idénticamente distribuidos (i.i.d.) Es útil interpretar los punto de datoss $\mathbf{z}^{(1)}, \ldots, \mathbf{z}^{(m)}$ como realizaciónes de RVs i.i.d., es decir, independientes e idénticamente distribuidos, con una probability distribution común. Si estos RVs son de valor continuo, su probability density function (pdf) conjunta se expresa como $p\big(\mathbf{z}^{(1)}, \ldots, \mathbf{z}^{(m)}\big) = \prod_{r=1}^{m} p\big(\mathbf{z}^{(r)}\big)$, donde $p(\mathbf{z})$ es la pdf marginal común de las RVs subyacentes.

Instituto Meteorológico de Finlandia (FMI) El FMI es una agencia

gubernamental responsable de recopilar y reportar datos meteorológicos en Finlandia.

inteligencia artificial confiable (IA confiable) Además de los aspectos computacionales y los aspectos estadísticos, un tercer aspecto principal en el diseño de métodos de ML es su confiabilidad [70]. La Unión Europea ha propuesto siete requisitos clave (KRs) para una AI confiable (que típicamente se basa en métodos de ML) [71]:

1) KR1 - Agencia y supervisión humana;
2) KR2 - Robustez técnica y seguridad;
3) KR3 - Privacidad y gobernanza de los datos;
4) KR4 - Transparencia;
5) KR5 - Diversidad, no discriminación y equidad;
6) KR6 - Bienestar social y ambiental;
7) KR7 - Responsabilidad.

interpretabilidad Un método de ML es interpretable por un usuario específico si puede anticipar adecuadamente las predicciónes entregadas por el método. La noción de interpretabilidad puede precisarse utilizando medidas cuantitativas de la incertidumbre sobre las predicciónes [58].

kernel Considere punto de datoss caracterizados por un vector de atributos $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ con un espacio de atributos genérico $\mathcal{X}$. Un kernel (de valor real) $K : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ asigna a cada par de vector de atributoss $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathcal{X}$ un número real $K\big(\mathbf{x}, \mathbf{x}'\big)$. El valor $K\big(\mathbf{x}, \mathbf{x}'\big)$ se interpreta a menudo como

una medida de similitud entre $\mathbf{x}$ y $\mathbf{x}'$. Los Método de kernels utilizan un kernel para transformar el vector de atributos $\mathbf{x}$ en un nuevo vector de atributos $\mathbf{z} = K\big(\mathbf{x}, \cdot\big)$. Este nuevo vector de atributos pertenece a un espacio de atributos lineal $\mathcal{X}'$ que (en general) es diferente del espacio de atributos original $\mathcal{X}$. El espacio de atributos $\mathcal{X}'$ tiene una estructura matemática específica, es decir, es un espacio de Hilbert de kernel reproducible Hilbert space [72, 73].

large language model (LLM) Large language modelos is an umbrella term for ML methods that process and generate human-like text. These methods typically use red profundas with billions (or even trillions) of parameters. A widely used choice for the network architecture is referred to as Transformers [74]. The training of large language modelos is often based on the task of predicting a few words that are intentionally removed from a large text corpus. Thus, we can construct punto de dato etiquetados simply by selecting some words of a text as etiquetas and the remaining words as atributos of punto de datoss. This construction requires very little human supervision and allows for generating sufficiently large conjunto de entrenamientos for large language modelos.

law of large numbers The law of large numbers refers to the convergence of the average of an increasing (large) number of i.i.d. RVs to the media of their common probability distribution. Different instances of the law of large numbers are obtained by using different notions of convergence [75].

least absolute deviation regression Least absolute deviation regression is an instance of ERM using the absolute error loss. It is a special case of Huber regression.

local dataset The concept of a local conjunto de datos is in between the concept of a punto de datos and a conjunto de datos. A local conjunto de datos consists of several individual punto de datoss, which are characterized by atributos and etiquetas. In contrast to a single conjunto de datos used in basic ML methods, a local conjunto de datos is also related to other local conjunto de datoss via different notions of similarity. These similarities might arise from modelo probabilísticos or communication infrastructure and are encoded in the edges of an red de aprendizaje federado (red FL).

local model Consider a collection of local datasets that are assigned to the nodes of an red de aprendizaje federado (red FL). A local modelo $\mathcal{H}^{(i)}$ is a espacio de hipótesis assigned to a node $i \in \mathcal{V}$. Different nodes might be assigned different espacio de hipótesiss, i.e., in general $\mathcal{H}^{(i)} \neq \mathcal{H}^{(i')}$ for different nodes $i, i' \in \mathcal{V}$.

loss ML methods use a loss function $L\left(\mathbf{z}, h\right)$ to measure the error incurred by applying a specific hipótesis to a specific punto de datos. With a slight abuse of notation, we use the term loss for both the loss function L itself and the specific value $L\left(\mathbf{z}, h\right)$, for a punto de datos $\mathbf{z}$ and hipótesis h.

loss function A loss function is a map

$$L : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}_{+} : \big(\big(\mathbf{x}, y\big), h\big) \mapsto L\left((\mathbf{x}, y), h\right).$$

It assigns a non-negative real number (i.e., the loss) $L\left((\mathbf{x}, y), h\right)$ to a pair that consists of a punto de datos, with atributos $\mathbf{x}$ and etiqueta y, and a hipótesis $h \in \mathcal{H}$. The value $L\left((\mathbf{x}, y), h\right)$ quantifies the discrepancy between the true etiqueta y and the predicción $h(\mathbf{x})$. Lower (closer to zero) values $L\left((\mathbf{x}, y), h\right)$ indicate a smaller discrepancy between predicción $h(\mathbf{x})$ and etiqueta y. Figure 12 depicts a loss function for a given punto de datos, with atributos $\mathbf{x}$ and etiqueta y, as a function of the hipótesis $h \in \mathcal{H}$.

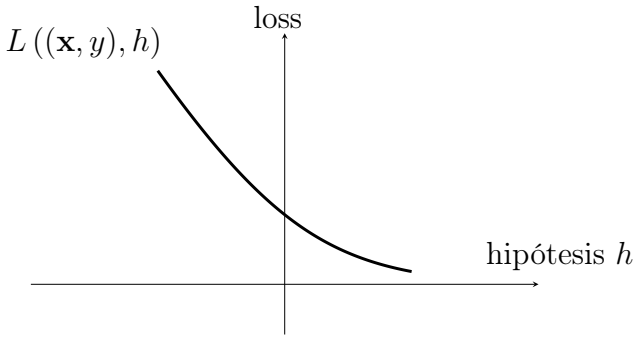


Figure 12: Some loss function $L\left((\mathbf{x}, y), h\right)$ for a fixed punto de datos, with vector de atributos $\mathbf{x}$ and etiqueta y, and a varying hipótesis h. ML methods try to find (or learn) a hipótesis that incurs minimal loss.

lote En el contexto de SGD, un lote se refiere a un subconjunto elegido al azar del conjunto total de conjunto de entrenamiento. Utilizamos los punto de datoss de este subconjunto para estimar el gradiente del error de entrenamiento y, a su vez, actualizar los model parameters.

mapa de atributos Un mapa de atributos se refiere a una transformación que convierte los atributos originales de un punto de datos en nuevos

atributos. Estos nuevos atributos pueden ser preferibles a los originales por diversas razones. Por ejemplo, la disposición de los punto de datos puede volverse más simple (o más lineal) en el nuevo espacio de atributos, permitiendo el uso de modelo lineals en los nuevos atributos. Esta idea es uno de los principales impulsores del desarrollo de método de kernels [73]. Además, las capas ocultas de una red profunda pueden interpretarse como un mapa de atributos entrenable seguido de un modelo lineal en la forma de la capa de salida. Otra razón para aprender un mapa de atributos podría ser que aprender un pequeño número de nuevos atributos ayuda a evitar el sobreajuste y garantiza la interpretabilidad [60]. El caso especial de un mapa de atributos que proporciona dos atributo numéricos es particularmente útil para la visualización de datos. De hecho, podemos representar punto de datos en un diagrama de dispersión usando dos atributos como las coordenadas de un punto de datos.

matriz de atributos Considere un conjunto de datos $\mathcal{D}$ con m punto de datoss caracterizados por vector de atributoss $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(m)} \in \mathbb{R}^d$. Es conveniente agrupar los vector de atributoss individuales en una matriz de atributos matrix $\mathbf{X} := \left(\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(m)}\right)^T$ de tamaño $m \times d$.

matriz de confusión Considere punto de datoss caracterizados por atributos $\mathbf{x}$ y etiqueta y con valores del espacio de etiquetas finito $\mathcal{Y} = \{1, \ldots, k\}$. La matriz de confusión es una matriz de tamaño $k \times k$ donde las filas representan diferentes valores c de la verdadera etiqueta de un punto de datos. Las columnas de la matriz de confusión cor-

responden a diferentes valores c' entregados por una hipótesis $h(\mathbf{x})$. El elemento (c, c') de la matriz de confusión es la fracción de punto de datoss con la etiqueta $y = c$ y la predicción $\hat{y} = c'$ asignada por la hipótesis h.

matriz de covarianza La matriz de covarianza de una RV $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ se define como $\mathbb{E}\Big\{\big(\mathbf{x} - \mathbb{E}\{\mathbf{x}\}\big)\big(\mathbf{x} - \mathbb{E}\{\mathbf{x}\}\big)^T\Big\}$.

matriz de covarianza muestral La matriz de matriz de covarianza muestral $\widehat{\mathbf{\Sigma}} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ para un conjunto dado vector de atributoss $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(m)} \in \mathbb{R}^d$ se define como

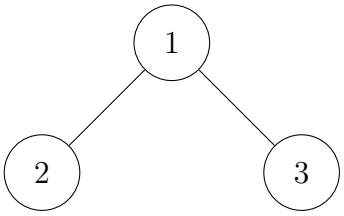
$$\widehat{\mathbf{\Sigma}} = (1/m) \sum_{r=1}^{m} (\mathbf{x}^{(r)} - \widehat{\mathbf{m}})(\mathbf{x}^{(r)} - \widehat{\mathbf{m}})^T.$$

Aqui, usamos la media muestral $\widehat{\mathbf{m}}$.

matriz laplaciana La estructura de un grafo $\mathcal{G}$, con nodos $i = 1, \ldots, n$, se puede analizar utilizando las propiedades de matrices especiales asociadas con $\mathcal{G}$. Una de estas matrices es la matriz laplaciana del grafo $\mathbf{L}^{(\mathcal{G})} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, la cual se define para un grafo no dirigido y ponderado [8, 76]. Se define de forma elemento por elemento como (Vea la Figura 13)

$$L_{i,i'}^{(\mathcal{G})} := \begin{cases} -A_{i,i'} & \text{para } i \neq i', \{i, i'\} \in \mathcal{E}, \\ \sum_{i'' \neq i} A_{i,i''} & \text{para } i = i', \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{3}$$

Aqui, $A_{i,i'}$ denota el edge weight de una arista $\{i, i'\} \in \mathcal{E}$.



$$\mathbf{L}^{(\mathcal{G})} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Figure 13: Izquierda: Un grafo no dirigido $\mathcal{G}$ con tres nodos $i = 1, 2, 3$. Derecha: La matriz laplaciana $\mathbf{L}^{(\mathcal{G})} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ of $\mathcal{G}$.

media La esperanza $\mathbb{E}\{\mathbf{x}\}$ de una RV numérica $\mathbf{x}$.

media muestral La media sample $\mathbf{m} \in \mathbb{R}^d$ para un conjunto de datos dado, con vector de atributoss $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(m)} \in \mathbb{R}^d$, se define como

$$\mathbf{m} = (1/m) \sum_{r=1}^{m} \mathbf{x}^{(r)}.$$

minimización de la pérdida regularizada (RLM) Consulte minimización del riesgo empírico regularizado (RERM).

minimización de variación total generalizada (GTVMin) La minimización de variación total generalizada (GTVMin) es una instancia de RERM que utiliza la GTV de los model parameters locales como un regularizador [77].

minimización del riesgo empírico explicable (EERM) La minimización del riesgo empírico explicable (EERM) es una instancia de SRM que agrega un término de regularización a la loss promedio en la función objetivo de ERM. El término de regularización se elige para favorecer mapas

de hipótesis que sean intrínsecamente explicables para un usuario específico. Este usuario se caracteriza por sus predicciónes proporcionadas para los punto de datoss en un conjunto de entrenamiento [57].

minimización del riesgo empírico regularizado (RERM) El ERM básico aprende una hipótesis (o entrena un modelo) $h \in \mathcal{H}$ basado únicamente en el riesgo empírico $\widehat{L}\big(h|\mathcal{D}\big)$ incurrido en un conjunto de entrenamiento $\mathcal{D}$. Para hacer que ERM sea menos propenso al sobreajuste, podemos implementar la regularización incluyendo un regularizador (escalado) $\mathcal{R}\big\{h\big\}$ en el objetivo de aprendizaje. Esto da lugar a la minimización del riesgo empírico regularizado (RERM),

$$\hat{h} \in \operatorname*{argmin}_{h \in \mathcal{H}} \widehat{L}\big(h|\mathcal{D}\big) + \alpha \mathcal{R}\big\{h\big\}. \tag{4}$$

El parámetro $\alpha \geq 0$ controla la intensidad de la regularización. Para $\alpha = 0$, recuperamos el ERM estándar sin regularización. A medida que α aumenta, la hipótesis aprendida se inclina cada vez más hacia valores pequeños de $\mathcal{R}\big\{h\big\}$. El componente $\alpha\mathcal{R}\big\{h\big\}$ en la función objetivo de (4) se puede entender intuitivamente como un sustituto para el aumento promedio en la loss que puede ocurrir al predecir etiquetas para punto de datoss fuera del conjunto de entrenamiento. Esta intuición se puede precisar en varias maneras. Por ejemplo, considere un modelo lineal entrenado usando pérdida de error cuadrático y el regularizador $\mathcal{R}\big\{h\big\} = \|\mathbf{w}\|_2^2$. En este caso, $\alpha\mathcal{R}\big\{h\big\}$ corresponde al aumento esperado en la loss causado por la adición de VA gaussianas a los vector de atributoss en el conjunto de entrenamiento [6, Ch. 3]. Una construcción basada en principios para el regularizador $\mathcal{R}\big\{h\big\}$ surge de límites superiores

aproximados en el error de generalización. La instancia resultante de RERM se conoce como SRM [78, Sec. 7.2].

minimización del riesgo estructural (SRM) La minimización del riesgo estructural (SRM) es una forma de RERM, en la que el modelo $\mathcal{H}$ se puede expresar como una unión contable de submodelos: $\mathcal{H} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}^{(n)}$. Cada submodelo $\mathcal{H}^{(n)}$ permite la derivación de un límite superior aproximado para el error de generalización que se incurre al aplicar ERM para entrenar $\mathcal{H}^{(n)}$. Estos límites superiores individuales para cada submodelo—se combinan para formar un regularizador utilizado en el objetivo de RERM. Estos límites superiores aproximados (uno para cada $\mathcal{H}^{(n)}$) se combinan para construir un regularizador para RERM [39, Sec. 7.2].

minimización empírica del riesgo (ERM) La minimización del Riesgo empírico es el problema de optimización que consiste en encontrar una hipótesis (dentro de un modelo) con la mínimo loss promedio (o riesgo empírico) en un conjunto de datos dado $\mathcal{D}$ (es decir, el conjunto de entrenamiento). Muchos métodos de ML se obtienen a partir de la riesgo empírico mediante elecciones específicas de diseño para el conjunto de datos, el modelo, y la loss [6, Ch. 3].

model parameters Modelo parameters are quantities that are used to select a specific hipótesis map from a modelo. We can think of a list of modelo parameters as a unique identifier for a hipótesis map, similar to how a social security number identifies a person in Finland.

model selection En ML, la selección de modelo se refiere al proceso de

elegir entre diferentes modelos candidatos. En su forma más básica, la selección de modelo consiste en: 1) entrenar cada modelo candidato; 2) calcular el error de validación para cada modelo entrenado; y 3) elegir el modelo con el menor error de validación [6, Ch. 6].

modelo En el contexto de métodos de ML, el término modelo típicamente se refiere a el espacio de hipótesis empleado por un método de ML [6, 39].

modelo de mezcla gaussiana (GMM) Un GMM es un tipo particular de modelo probabilístico para un vector numérico $\mathbf{x}$ (por ejemplo, las atributos de un punto de datos). Dentro de un GMM, el vector $\mathbf{x}$ se extrae de una distribución normal multivariante $p^{(c)} = \mathcal{N}\left(\boldsymbol{\mu}^{(c)}, \mathbf{C}^{(c)}\right)$ seleccionada aleatoriamente, con $c = I$. El índice $I \in \{1, \ldots, k\}$ es una RV con probabilidades $p(I = c) = p_c$. Ten en cuenta que un GMM se parametriza por la probabilidad p_c, el vector media $\boldsymbol{\mu}^{(c)}$, y la matriz de covarianza $\mathbf{\Sigma}^{(\mathbf{c})}$ para cada $c = 1, \ldots, k$. Los GMM se utilizan ampliamente para clustering, estimación de densidad y como un modelo generativo.

modelo en red Un modelo en red sobre un red de aprendizaje federado (red FL) $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ asigna un local model (es decir, un espacio de hipótesis) a cada nodo $i \in \mathcal{V}$ del red de aprendizaje federado (red FL) $\mathcal{G}$.

modelo estocástico de bloques (SBM) El modelo estocástico de bloques (SBM) es un modelo generativo probabilístico para un grafo no dirigido $\mathcal{G} = \left(\mathcal{V}, \mathcal{E}\right)$ con conjunto de nodos $\mathcal{V}$ [79]. En su forma básica, asigna aleatoriamente cada nodo $i \in \mathcal{V}$ a una cluster $c_i \in \{1, \ldots, k\}$. Cada par de nodos distintos se conecta con probabilidad $p_{i,i'}$ que depende

únicamente de sus etiquetas c_i y $c_{i'}$. La presencia de aristas entre pares de nodos es estadísticamente independiente.

modelo lineal Consideremos punto de datoss, cada uno caracterizado por una vector de atributos numérica $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$. Un modelo lineal es un espacio de hipótesis que consiste en todos los mapeos lineales,

$$\mathcal{H}^{(d)} := \left\{ h(\mathbf{x}) = \mathbf{w}^T \mathbf{x} : \mathbf{w} \in \mathbb{R}^d \right\}. \tag{5}$$

Nótese que (5) define toda una familia de espacio de hipótesiss, parametrizada por el número d de atributos que se combinan linealmente para formar la predicción $h(\mathbf{x})$. La elección de diseño de d se guía por aspectos computacionales (por ejemplo, reducir d implica menor computación), por aspectos estadísticos (por ejemplo, aumentar d podría reducir el error de predicción), y por la interpretabilidad. Un modelo lineal que utiliza pocas atributos cuidadosamente elegidas suele considerarse más interpretable [19, 60].

modelo probabilístico Un modelo probabilístico interpreta los punto de datoss como realizaciónes de RVs con una probability distribution conjunta. Esta probability distribution conjunta típicamente incluye parameters que deben seleccionarse manualmente or o aprenderse usando métodos de inferencia estadística como la estimación por máxima verosimilitud [26].

multi-armed bandit A multi-armed bandit (MAB) problem models a repeated decision-making scenario in which, at each time step k, a learner must choose one out of several possible actions, often referred to as

arms, from a finite set $\mathcal{A}$. Each arm $a \in \mathcal{A}$ yields a stochastic reward $r^{(a)}$ drawn from an unknown probability distribution with media $\mu^{(a)}$. The learner's goal is to maximize the cumulative reward over time by strategically balancing exploration (gathering information about uncertain arms) and exploitation (selecting arms known to perform well). This balance is quantified by the notion of arrepentimiento (regret), which measures the performance gap between the learner's strategy and the optimal strategy that always selects the best arm. MAB problems form a foundational model in online learning, reinforcement learning, and sequential experimental design [80].

mutual information (MI) The MI $I(\mathbf{x}; y)$ between two RVs $\mathbf{x}$, y defined on the same probability space is given by [42]

$$I(\mathbf{x}; y) := \mathbb{E}\left\{\log \frac{p(\mathbf{x}, y)}{p(\mathbf{x})p(y)}\right\}.$$

It is a measure of how well we can estimate y based solely on $\mathbf{x}$. A large value of $I(\mathbf{x}; y)$ indicates that y can be well predicted solely from $\mathbf{x}$. This predicción could be obtained by a hipótesis learned by an ERM-based ML method.

máxima verosimilitud Considera punto de datoss $\mathcal{D} = \left\{\mathbf{z}^{(1)}, \ldots, \mathbf{z}^{(m)}\right\}$ que se interpretan como las realizacións de i.i.d. RVs con una probability distribution común $p(\mathbf{z}; \mathbf{w})$ que depende de los model parameters $\mathbf{w} \in \mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^n$. Los métodos de máxima verosimilitud aprenden los model parameters $\mathbf{w}$ al maximizar la probabilidad (densidad) $p(\mathcal{D}; \mathbf{w}) = \prod_{r=1}^{m} p(\mathbf{z}^{(r)}; \mathbf{w})$ del conjunto de datos observado. Por lo tanto,

el estimador de máxima verosimilitud es una solución al problema de optimización $\max_{\mathbf{w} \in \mathcal{W}} p(\mathcal{D}; \mathbf{w})$.

máximo El máximo de un conjunto $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}$ de números reales es el elemento más grande en ese conjunto, si tal elemento existe. Un conjunto $\mathcal{A}$ tiene un máximo si está acotado superiormente y alcanza su supremo (o mínimo de las cotas superiores) [2, Sec. 1.4].

método de kernel Un método de kernel es un método de ML que utiliza un kernel K para mapear el vector de atributos original (crudo) $\mathbf{x}$ de un punto de datos a un nuevo (transformado) vector de atributos $\mathbf{z} = K\big(\mathbf{x}, \cdot\big)$ [72, 73]. La motivación para transformar los vector de atributoss es que, al utilizar un kernel adecuado, los punto de datoss presentan una geometría "más conveniente" en el espacio de atributos. Por ejemplo, en un problema de clasificación binaria, el uso de vector de atributoss transformados $\mathbf{z}$ podría permitirnos utilizar modelo lineals, incluso si los punto de datoss no son linealmente separables en el espacio de atributos original (Vea la Figura 14).

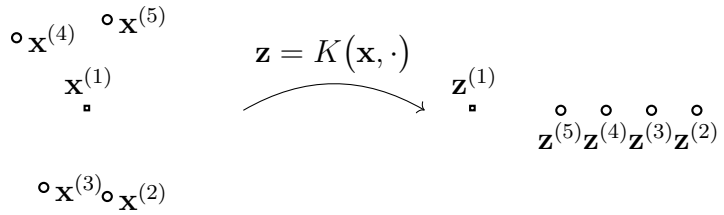


Figure 14: Cinco punto de datoss caracterizados por vector de atributoss $\mathbf{x}^{(r)}$ y etiquetas $y^{(r)} \in \{\circ, \square\}$, para $r = 1, \ldots, 5$. Con estos vector de atributoss, no hay forma de separar las dos clases mediante una línea recta (rque representa la frontera de decisión de un clasificador lineal). En contraste, los vector de atributoss transformados $\mathbf{z}^{(r)} = K(\mathbf{x}^{(r)}, \cdot)$ permiten separar los punto de datoss usando un clasificador lineal.

mínimo Dado un conjunto de números reales, el mínimo es el menor de esos números.

non-smooth We refer to a function as non-smooth if it is not smooth [66].

norma Una norma es una función que asigna a cada elemento (vectorial) de un espacio vectorial lineal un número real no negativo. Esta función debe ser homogénea, definida positiva y debe cumplir la desigualdad triangular [81].

número de condición El número de condición $\kappa(\mathbf{Q}) \geq 1$ de una matriz definida positiva $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ es el cociente α/β entre el mayor α y el menor β eigenvalue de $\mathbf{Q}$. El número de condición es útil para el análisis de métodos de ML. La complejidad computacional de los gradient-based methods para regresión lineal depende críticamente del número

de condición de la matriz $\mathbf{Q} = \mathbf{X}\mathbf{X}^T$, donde $\mathbf{X}$ es la matriz de atributos del conjunto de entrenamiento. Es por eso que desde una perspectiva computacional, preferimos atributos de los punto de datoss que hagan que $\mathbf{Q}$ tenga un número de condición cercano a 1.

online gradient descent (online GD) Consider an ML method that learns model parameters $\mathbf{w}$ from some parameter space $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^d$. The learning process uses punto de datoss $\mathbf{z}^{(t)}$ that arrive at consecutive time-instants $t = 1, 2, \ldots$. Let us interpret the punto de datoss $\mathbf{z}^{(t)}$ as i.i.d. copies of an RV $\mathbf{z}$. The riesgo $\mathbb{E}\{L\left(\mathbf{z}, \mathbf{w}\right)\}$ of a hipótesis $h^{(\mathbf{w})}$ can then (under mild conditions) be obtained as the limit $\lim_{T\to\infty}(1/T)\sum_{t=1}^{T} L\left(\mathbf{z}^{(t)}, \mathbf{w}\right)$. We might use this limit as the función objetivo for learning the model parameters $\mathbf{w}$. Unfortunately, this limit can only be evaluated if we wait infinitely long in order to collect all punto de datoss. Some ML applications require methods that learn online: as soon as a new punto de datos $\mathbf{z}^{(t)}$ arrives at time t, we update the current model parameters $\mathbf{w}^{(t)}$. Note that the new punto de datos $\mathbf{z}^{(t)}$ contributes the component $L\left(\mathbf{z}^{(t)}, \mathbf{w}\right)$ to the riesgo. As its name suggests, online GD updates $\mathbf{w}^{(t)}$ via a (projected) paso de gradiente

$$\mathbf{w}^{(t+1)} := P_{\mathcal{W}}\big(\mathbf{w}^{(t)} - \eta_t \nabla_{\mathbf{w}} L\left(\mathbf{z}^{(t)}, \mathbf{w}\right)\big). \tag{6}$$

Note that (6) is a paso de gradiente for the current component $L\left(\mathbf{z}^{(t)}, \cdot\right)$ of the riesgo. The update (6) ignores all the previous components $L\left(\mathbf{z}^{(t')}, \cdot\right)$, for $t' < t$. It might therefore happen that, compared to $\mathbf{w}^{(t)}$, the updated model parameters $\mathbf{w}^{(t+1)}$ increase the retrospective average loss $\sum_{t'=1}^{t-1} L\left(\mathbf{z}^{(t')}, \cdot\right)$. However, for a suitably chosen tasa de aprendizaje

η_t, online GD can be shown to be optimal in practically relevant settings. By optimal, we mean that the model parameters $\mathbf{w}^{(T+1)}$ delivered by online GD after observing T punto de datoss $\mathbf{z}^{(1)}, \ldots, \mathbf{z}^{(T)}$ are at least as good as those delivered by any other learning method [15, 82].

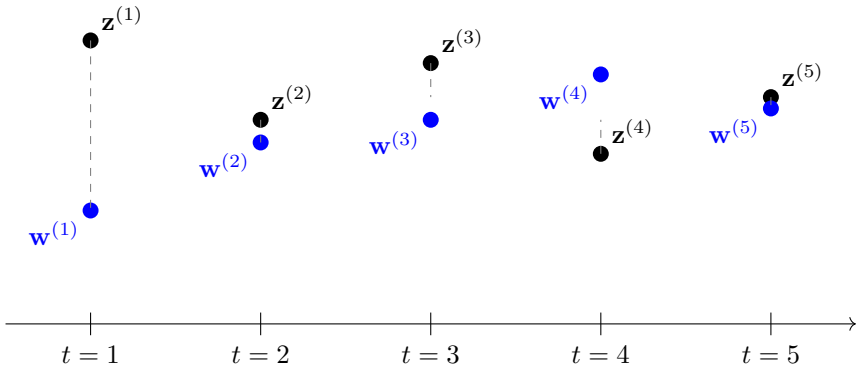


Figure 15: An instance of online GD that updates the model parameters $\mathbf{w}^{(t)}$ using the punto de datos $\mathbf{z}^{(t)} = x^{(t)}$ arriving at time t. This instance uses the pérdida de error cuadrático $L\left(\mathbf{z}^{(t)}, w\right) = (x^{(t)} - w)^2$.

operador de reducción y selección absoluta mínima (Lasso) El Lasso es una implementación de SRM. Aprende los weights $\mathbf{w}$ de un mapa lineal $h(\mathbf{x}) = \mathbf{w}^T\mathbf{x}$ basado en un conjunto de entrenamiento. El Lasso se obtiene a partir de regresión lineal al agregar la norma ℓ_1 escalado $\alpha \|\mathbf{w}\|_1$ al promedio de la pérdida de error cuadrático en el conjunto de entrenamiento.

operador proximal Dada una funcion convex $f(\mathbf{w}')$, definimos su operador

proximal como [83, 84]

$$\mathbf{prox}_{f(\cdot),\rho}(\mathbf{w}) := \underset{\mathbf{w}' \in \mathbb{R}^d}{\operatorname{argmin}} \left[f(\mathbf{w}') + (\rho/2) \left\| \mathbf{w} - \mathbf{w}' \right\|_2^2 \right] \text{ with } \rho > 0.$$

Como se ilustra en la Figura 16, evaluar el operador proximal equivale a minimizar una variante penalizada de $f(\mathbf{w}')$. El término de penalización es la distancia euclidiana cuadrada escalada hacia un vector dado $\mathbf{w}$ (que es la entrada del operador proximal). El operador proximal puede interpretarse como una generalización del paso de gradiente, definido para una función smooth y convex $f(\mathbf{w}')$. De hecho, realizar un paso de gradiente con tamaño de paso η en el vector actual $\mathbf{w}$ es lo mismo que aplicar el operador proximalde la función $\tilde{f}(\mathbf{w}') = \big(\nabla f(\mathbf{w})\big)^T(\mathbf{w}' - \mathbf{w})$ y usar $\rho = 1/\eta$.

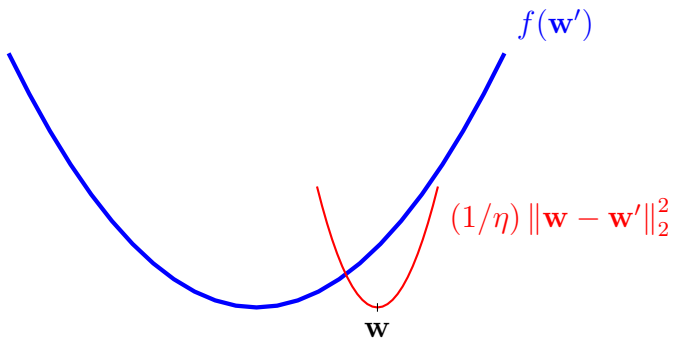


Figure 16: Un paso de gradiente generalizado actualiza un vector $\mathbf{w}$ minimizando una versión penalizada de la función $f(\cdot)$. El término de penalización es la distancia euclidiana cuadrada escalada entre la variable de optimización $\mathbf{w}'$ y el vector dado $\mathbf{w}$.

optimismo ante la incertidumbre Los metodos de ML aprenden model

parameters $\mathbf{w}$ de acuerdo con algún criterio de desempeño $\bar{f}(\mathbf{w})$. Sin embargo, normalmente no pueden acceder directamente a $\bar{f}(\mathbf{w})$ pero dependen de una estimación (o aproximación) de $f(\mathbf{w})$. Por ejemplo, los métodos basados en ERM usan la loss promedio en un conjunto de datos (por ejemplo, el conjunto de entrenamiento) como estimación del riesgo de una hipótesis. Usando un modelo probabilístico, se puede construir un intervalo de confianza. $\left[l^{(\mathbf{w})}, u^{(\mathbf{w})}\right]$ para cada elección $\mathbf{w}$ de los model parameters. Una construcción simple es $l^{(\mathbf{w})} := f(\mathbf{w}) - \sigma/2$, $u^{(\mathbf{w})} := f(\mathbf{w}) + \sigma/2$, donde σ representa una medida de la desviación entre $f(\mathbf{w})$ y $\bar{f}(\mathbf{w})$. También se pueden usar otras construcciones del intervalo, mientras se aseguren que $\bar{f}(\mathbf{w}) \in \left[l^{(\mathbf{w})}, u^{(\mathbf{w})}\right]$ con un probabilidad suficientemente alta. Siendo optimistas, elegimos los model parameters según el valor más favorable - pero realista - del criterio de desempeño $\tilde{f}(\mathbf{w}) := l^{(\mathbf{w})}$. Dos ejemplos de métodos de ML que usan una construcción optimista de una función objetivo son métodos de SRM [39, Ch. 11] y upper confidence bound (UCB) para decisiones secuenciales [80, Sec. 2.2].

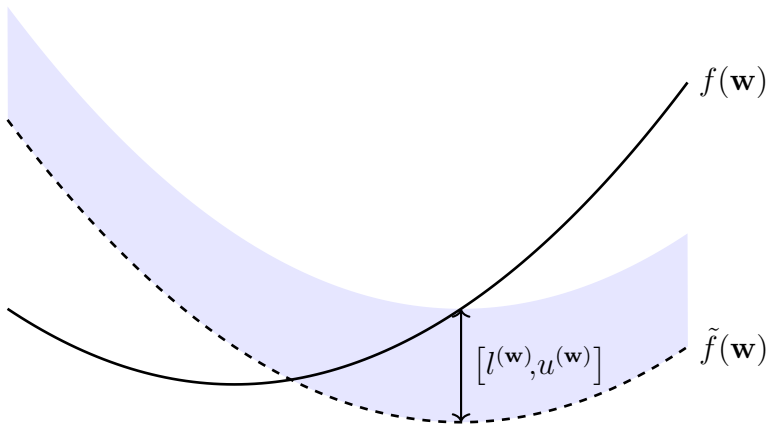


Figure 17: Los métodos de ML aprenden model parameters $\mathbf{w}$ usando una estimación de $f(\mathbf{w})$ como aproximación del criterio de desempeño $\bar{f}(\mathbf{w})$. Usando un modelo probabilístico, se pueden construir intervalos de confianza $\left[l^{(\mathbf{w})}, u^{(\mathbf{w})}\right]$ que contienen $\bar{f}(\mathbf{w})$ con alta probabilidad. La mejor medida plausible del desempeño para una elección especifica $\mathbf{w}$ es $\tilde{f}(\mathbf{w}) := l^{(\mathbf{w})}$.

parameter space The parameter space $\mathcal{W}$ of an ML modelo $\mathcal{H}$ is the set of all feasible choices for the model parameters (see Figure 18). Many important ML methods use a modelo that is parametrized by vectors of the espacio euclidiano $\mathbb{R}^d$. Two widely used examples of parametrized modelos are modelo lineals and red profundas. The parameter space is then often a subset $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^d$, e.g., all vectors $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^d$ with a norma smaller than one.

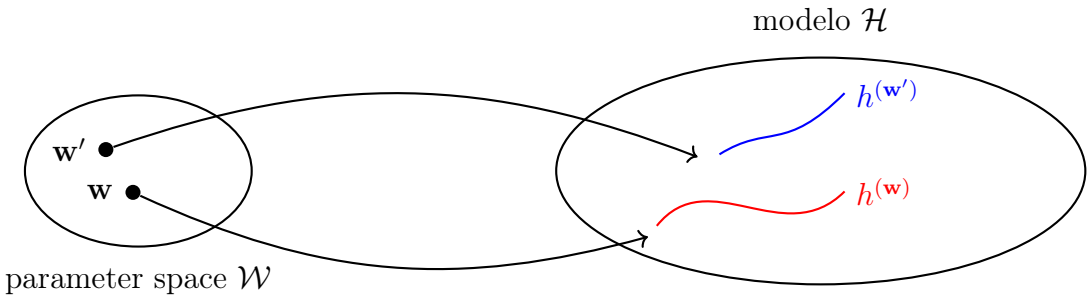


Figure 18: The parameter space $\mathcal{W}$ of an ML modelo $\mathcal{H}$ consists of all feasible choices for the model parameters. Each choice $\mathbf{w}$ for the model parameters selects a hipótesis map $h^{(\mathbf{w})} \in \mathcal{H}$.

parameters The parameters of an ML modelo are tunable (i.e., learnable or adjustable) quantities that allow us to choose between different hipótesis maps. For example, the modelo lineal $\mathcal{H} := \{h^{(\mathbf{w})} : h^{(\mathbf{w})}(x) = w_1 x + w_2\}$ consists of all hipótesis maps $h^{(\mathbf{w})}(x) = w_1 x + w_2$ with a particular choice for the parameters $\mathbf{w} = \big(w_1, w_2\big)^T \in \mathbb{R}^2$. Another example of parameters is the weights assigned to the connections between neurons of an ANN.

paso de gradiente Dada una función diferenciable diferenciable de valores reales $f(\cdot) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ y un vector $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^d$, el paso de gradiente actualiza $\mathbf{w}$ sumándole el negativo escalado del gradiente $\nabla f(\mathbf{w})$ para obtener el nuevo vector (véase la Figura 19)

$$\widehat{\mathbf{w}} := \mathbf{w} - \eta \nabla f(\mathbf{w}). \tag{7}$$

Matemáticamente, el paso de gradiente es un operador (típicamente no

lineal) $\mathcal{T}^{(f,\eta)}$ que está parametrizado por la función f y el tamaño de paso η.

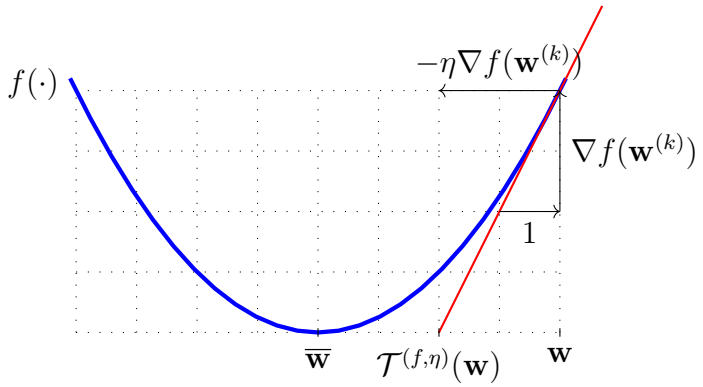


Figure 19: El paso básico de gradiente (7) mapea un vector $\mathbf{w}$ al vector actualizado $\mathbf{w}'$. Define un operador $\mathcal{T}^{(f,\eta)}(\cdot) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d : \mathbf{w} \mapsto \widehat{\mathbf{w}}$.

Nótese que el paso de gradiente (7) optimiza localmente - en una entorno cuyo tamaño está determinado por el tamaño de paso η - una aproximación lineal de la función $f(\cdot)$. Un generalización natural de (7) es optimizar localmente la función misma - en lugar de su aproximación lineal - de tal manera que:

$$\widehat{\mathbf{w}} = \underset{\mathbf{w}' \in \mathbb{R}^d}{\operatorname{argmin}} f(\mathbf{w}') + (1/\eta) \left\| \mathbf{w} - \mathbf{w}' \right\|_2^2 . \tag{8}$$

Intencionalmente usamos el mismo símbolo η para el parámetro en (8) que en el tamaño de paso de (7). Mientras mayor sea el valor de η en (8), más progreso hará la actualización en la reducción del valor de la función $f(\widehat{\mathbf{w}})$. Nótese que, al igual que el paso de gradiente (7), la actualización (8) también define un operador (típicamente no lineal)

parametrizado por la función $f(\cdot)$ y el parámetro η. Para una función convex $f(\cdot)$, este operador es conocido como el operador proximal de $f(\cdot)$ [83].

positive semi-definite (psd) A (real-valued) symmetric matrix $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T \in \mathbb{R}^{d \times d}$ is referred to as psd if $\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} \geq 0$ for every vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$. The property of being psd can be extended from matrices to (real-valued) symmetric kernel maps $K : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ (with $K(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = K(\mathbf{x}', \mathbf{x})$) as follows: For any finite set of vector de atributoss $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(m)}$, the resulting matrix $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ with entries $Q_{r,r'} = K\big(\mathbf{x}^{(r)}, \mathbf{x}^{(r')}\big)$ is psd [73].

precisión (accuracy) Consideremos punto de datoss caracterizados poratributos $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ y una etiqueta categórica y que toma valores de un conjunto finito espacio de etiquetas $\mathcal{Y}$. La precisión de una hipótesis $h : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$, cuando se aplica a los punto de datoss en un conjunto de datos $\mathcal{D} = \big\{\big(\mathbf{x}^{(1)}, y^{(1)}\big), \ldots, \big(\mathbf{x}^{(m)}, y^{(m)}\big)\big\}$, se define como $1 - (1/m) \sum_{r=1}^{m} L^{(0/1)}\left(\big(\mathbf{x}^{(r)}, y^{(r)}\big), h\right)$ usando la 0/1 loss $L^{(0/1)}(\cdot, \cdot)$.

predicción Una predicción es una estimación o aproximación de una cantidad de interés. El ML se centra en aprender o encontrar un mapa de hipótesis h que recibe las atributos $\mathbf{x}$ de un punto de datos and y produce una predicción $\widehat{y} := h(\mathbf{x})$ para su etiqueta y.

predictor Un predictor es un mapa de hipótesis con valores reales. Dado unpunto de datos con atributos $\mathbf{x}$, el valor $h(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$ se utiliza como una predicción para la verdadera etiqueta numérica $y \in \mathbb{R}$ del punto de datos.

principal component analysis (PCA) PCA determines a linear mapa de atributos such that the new atributos allow us to reconstruct the original atributos with the mínimo reconstruction error [6].

privacidad diferencial (DP) Consideremos un método de ML $\mathcal{A}$ que recibe como entrada un conjunto de datos (por ejemplo, el conjunto de entrenamiento usado para ERM) y entrega una salida $\mathcal{A}(\mathcal{D})$. La salida puede ser los model parameters aprendidos o las predicciónes para ciertos punto de datoss. DP es una medida precisa de la filtración de privacidad ocasionada al revelar dicha salida. Aproximadamente, un método de ML es diferencialmente privado si la probability distribution de la salida $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ no cambia significativamente cuando se modifica el atributo sensible de un solo punto de datos del conjunto de entrenamiento. Nótese que la DP se basa en un modelo probabilístico para un método de ML, es decir, interpretamos su salida $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ como la realización de un RV. La aleatoriedad en la salida puede asegurarse añadiendo intencionalmente la realización de una RV auxiliar (ruido) a la salida del método de ML.

probabilidad Asignamos un valor de probabilidad, típicamente elegido en el intervalo $[0, 1]$, a cada evento que pueda ocurrir en un experimento aleatorio [5, 52, 53, 85].

probability density function (pdf) The probabilidad density function $p(x)$ of a real-valued RV $x \in \mathbb{R}$ is a particular representation of its probability distribution. If the probabilidad density function exists, it can be used to compute the probabilidad that x takes on a value from a (measurable) set $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}$ via $p(x \in \mathcal{B}) = \int_{\mathcal{B}} p(x')dx'$ [5, Ch. 3]. The

probabilidad density function of a vector-valued RV $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ (if it exists) allows us to compute the probabilidad of $\mathbf{x}$ belonging to a (measurable) region $\mathcal{R}$ via $p(\mathbf{x} \in \mathcal{R}) = \int_{\mathcal{R}} p(\mathbf{x}')dx'_1 \ldots dx'_d$ [5, Ch. 3].

probability distribution To analyze ML methods, it can be useful to interpret punto de datoss as i.i.d. realizacións of an RV. The typical properties of such punto de datoss are then governed by the probabilidad distribution of this RV. The probabilidad distribution of a binary RV $y \in \{0, 1\}$ is fully specified by the probabilities $p(y = 0)$ and $p(y = 1) = 1 - p(y = 0)$. The probabilidad distribution of a real-valued RV $x \in \mathbb{R}$ might be specified by a pdf $p(x)$ such that $p(x \in [a, b]) \approx p(a)|b - a|$. In the most general case, a probabilidad distribution is defined by a probabilidad measure [40, 53].

probability space A probabilidad space is a mathematical modelo of a physical process (a random experiment) with an uncertain outcome. Formally, a probabilidad space $\mathcal{P}$ is a triplet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ where

- Ω is a sample space containing all possible elementary outcomes of a random experiment;
- $\mathcal{F}$ is a sigma-algebra, a collection of subsets of Ω (called events) that satisfies certain closure properties under set operations;
- P is a probabilidad measure, a function that assigns a probabilidad $P(\mathcal{A}) \in [0, 1]$ to each event $\mathcal{A} \in \mathcal{F}$. The function must satisfy $P(\Omega) = 1$ and $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{A}_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\mathcal{A}_i)$ for any countable sequence of pairwise disjoint events $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots$ in $\mathcal{F}$.

Probabilidad spaces provide the foundation for defining RVs and to reason about uncertainty in ML applications [40, 53, 86].

promedio federado (FedAvg) El promedio federado (FedAvg)se refiere a un algorithm iterativo de FL que alterna entre entrenar local models por separado y combinar los model parameters locales actualizados. El entrenamiento de los local models se implementa a través de varios pasos de SGD [87].

protección de la privacidad Consideremos un método de ML $\mathcal{A}$ que recibe como entrada una conjunto de datos $\mathcal{D}$ y entega una salida $\mathcal{A}(\mathcal{D})$. La salida puede ser los model parameters aprendidos $\widehat{\mathbf{w}}$ o una predicción $\hat{h}(\mathbf{x})$ obtenida para un punto de datos específico con atributos $\mathbf{x}$. Muchas aplicaciones importantes de ML involucran punto de datoss que representan a personas. Cada punto de datos se caracteriza por atributos $\mathbf{x}$, posiblemente una etiqueta y, y un atributo sensible s (por ejemplo, un diagnóstico medico). Mas o menos, la protección de la privacidad significa que debería ser imposible inferir, de la salida $\mathcal{A}(\mathcal{D})$, cualquier atributo sensibles de los punto de datoss en $\mathcal{D}$. Matemáticamente, la protección de privacidad requiere que el mapeo $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ no sea invertible. En general, el solo hacer que $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ no sea invertible no es suficiente. Necesitamos que sea suficientemente no invertible.

proximable Una funcion convex para la cual el operador proximal puede calcularse de manera eficiente se denomina a veces proximable o simple [88].

proyección Consideremos un subconjunto $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^d$ del espacio euclidiano

de dimensión d. Definimos la proyección $P_{\mathcal{W}}\big(\mathbf{w}\big)$ de un vector $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^d$ sobre $\mathcal{W}$ como

$$P_{\mathcal{W}}\big(\mathbf{w}\big) = \operatorname*{argmin}_{\mathbf{w}' \in \mathcal{W}} \|\mathbf{w} - \mathbf{w}'\|_2 \,. \tag{9}$$

En otras palabras, $P_{\mathcal{W}}\big(\mathbf{w}\big)$ es el vector en $\mathcal{W}$ más cercano a $\mathbf{w}$. La proyección está bien definida solo para aquellos subconjuntos $\mathcal{W}$ para los cuales existe el mínimo anterior [33].

puerta trasera (backdoor) Un ataque de puerta trasera (backdoor) se refiere a la manipulación intencional del proceso de entrenamiento de un método de ML. Esta manipulación se puede implementar perturbando el conjunto de entrenamiento (envenenamiento de datos) o el algorithm de optimización utilizado por un método basado en ERM-based method. El objetivo de un ataque de puerta trasera es inclinar la hipótesis aprendida $\hat{h}$ hacia predicciónes específicas para un rango determinado de valores de atributo. Este rango de atributo actúa como una clave (o desencadenante) que desbloquea una puerta trasera en el sentido de generar predicciónes anómalas. La clave $\mathbf{x}$ y la predicción anómala correspondiente $\hat{h}(\mathbf{x})$ son conocidas únicamente por el atacante.

punto de dato etiquetado Un punto de datos cuya etiqueta es conocida o ha sido determinada por algún medio, lo que podría requerir trabajo humano.

punto de datos Un punto de datos es cualquier objeto que transmite información [42]. Los puntos de datos pueden ser estudiantes, señales de radio, árboles, bosques, imágenes, RVs, números reales o proteínas. Caracterizamos los puntos de datos utilizando dos tipos de propiedades. Un

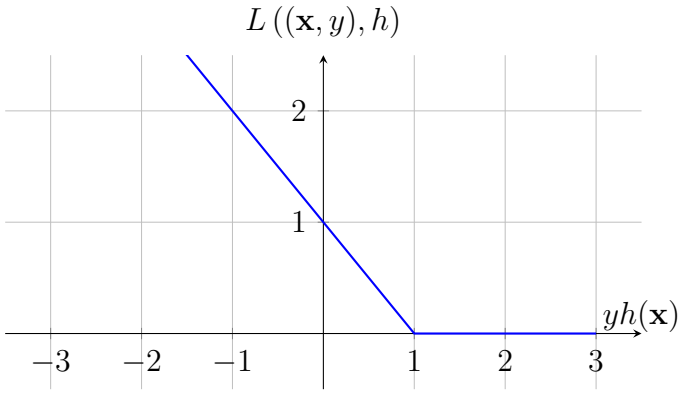
tipo de propiedad se denomina atributo. Las Atributos son propiedades de un punto de datos que se pueden medir o calcular de manera automatizada. Un tipo diferente de propiedad se denomina etiqueta. La etiqueta de un punto de datos representa algún hecho de mayor nivel (o cantidad de interés). A diferencia de las atributos, determinar la etiqueta de un punto de datos suele requerir expertos humanos (expertos en dominio). En términos generales, el ML tiene como objetivo predecir la etiqueta of a datos de un punto de datos únicamente a partir de sus atributos.

pérdida de error cuadrático La loss de error cuadrático mide el error de predicción de una hipótesis h al predecir una etiqueta numérica $y \in \mathbb{R}$ a partir de las atributos $\mathbf{x}$ de un punto de datos. Se define como

$$L\left((\mathbf{x}, y), h\right) := \big(y - \underbrace{h(\mathbf{x})}_{=\hat{y}}\big)^2.$$

pérdida de hinge Consideremos un punto de datos caracterizado por un vector de atributos $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ y una etiqueta binaria $y \in \{-1, 1\}$. La loss de hinge incurrida por un mapa de hipótesis $h(\mathbf{x})$ se define como

$$L\left((\mathbf{x}, y), h\right) := \max\{0, 1 - yh(\mathbf{x})\}. \tag{10}$$



Una variante regularizada de la loss de hinge es utilizada por las support vector machine (SVM) [72].

pérdida logística Consideremos un punto de datos caracterizado por los atributos $\mathbf{x}$ y una etiqueta $y \in \{-1, 1\}$. Utilizamos una hipótesis con valores reales h para predecir la etiqueta y a partir de los atributos $\mathbf{x}$. La loss logística incurrida por esta predicción se define como

$$L\left((\mathbf{x}, y), h\right) := \log(1 + \exp(-yh(\mathbf{x}))). \tag{11}$$

Nótese cuidadosamente que la expresión (11) para la loss logística aplica solo para el espacio de etiquetas $\mathcal{Y} = \{-1, 1\}$ y cuando se usa la regla de umbralización (1).

random forest A random forest is a set (or ensemble) of different decision trees. Each of these decision trees is obtained by fitting a perturbed copy of the original conjunto de datos.

realización Consideremos una RV x que asigna cada elemento (es decir, resultado o evento elemental) $\omega \in \mathcal{P}$ de un probability space $\mathcal{P}$ a un

elemento a de un espacio medible $\mathcal{N}$ [2, 52, 53]. Una realización de x es cualquier elemento $a' \in \mathcal{N}$ tal que existe un elemento $\omega' \in \mathcal{P}$ con $x(\omega') = a'$.

red de aprendizaje federado (red FL) Una red federada es un grafo no dirigido y ponderado, cuyos nodos representan generadores de datos que buscan entrenar un modelo local (o personalizado). Cada nodo de una red federada representa un device capaz de recopilar un local dataset y, a su vez, entrenar un local model. Los métodos de FL aprenden una hipótesis local $h^{(i)}$ para cada nodo $i \in \mathcal{V}$, de manera que incurra en una loss baja sobre su local dataset. ,first=red de aprendizaje federado (red FL),text=red FL

red profunda Una red profunda es una ANN con un número (relativamente) grande de capas ocultas. El aprendizaje profundo (deep learning) es un término general para los métodos de ML que utilizan una red profunda como modelo [89].

reducción de dimensionalidad Los métodos de reducción de dimensionalidad mapean (normalmente muchos) atributos originales a un conjunto (relativamente pequeño) de nuevos atributos. Estos métodos pueden utilizarse para visualizar punto de datoss aprendiendo dos atributos que sirvan como coordenadas de una representación en un diagrama de dispersión.

referencia (baseline) Consideremos un método de ML que produce una hipótesis aprendida (o un modelo entrenado) $\hat{h} \in \mathcal{H}$. Evaluamos la calidad del modelo entrenado mediante el cálculo de la loss promedio

en un conjunto de prueba.Pero, ¿cómo saber si ese rendimiento es lo suficientemente bueno? ¿Cómo saber si el modelo entrenado se acerca al óptimo y si tiene sentido o no invertir más recursos (como recopilación de datos o potencia computacional) para mejorarlo? Para ello, es útil contar con un valor de referencia (o *baseline*) con el cual comparar el rendimiento del modelo modelo entrenado. Este valor puede provenir del rendimiento humano, como la tasa de error de dermatólogos que diagnostican cáncer mediante inspección visual de la piel [90]. Otra fuente de referencia puede ser un método de ML ya existente que, por alguna razón, no sea adecuado para la aplicación (por ejemplo, por ser computacionalmente costoso), pero cuya tasa de error en el conjunto de prueba puede servir como baseline. Un enfoque más fundamentado para construir una baseline es utilizar un modelo probabilístico. En muchos casos, dado un modelo probabilístico modelo probabilístico $p(\mathbf{x}, y)$, podemos determinar con precisión el mínimo riesgo alcanzable entre todas las hipótesis (incluso aquellas que no pertenecen al espacio de hipótesis $\mathcal{H}$) [26]. Este mínimo alcanzable se conoce como Bayes risk y corresponde al riesgo del Bayes estimator para la etiqueta y de un punto de datos, dados sus atributos $\mathbf{x}$. Dado un loss function específico, el Bayes estimator (si existe) está completamente determinado por la probability distribution $p(\mathbf{x}, y)$ [26, Cap. 4]. Calcular el Bayes estimator y el Bayes risk presenta dos desafíos principales:

1) La probability distribution $p(\mathbf{x}, y)$ desconocida y debe estimarse.
2) Incluso si se conoce $p(\mathbf{x}, y)$ calcular el Bayes risk puede ser computacionalmente muy costoso [91].

Un modelo probabilístico ampliamente utilizado es la distribución normal multivariante $(\mathbf{x}, y) \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ para punto de datoss caracterizados por atributos y etiquetas numéricos. En este caso, bajo la pérdida de error cuadrático, el Bayes estimator corresponde a la media posterior $\mu_{y|\mathbf{x}}$ de la etiqueta y, dado atributos $\mathbf{x}$ [26, 40]. El Bayes risk asociado es la varianza posterior $\sigma^2_{y|\mathbf{x}}$ (see Figure 20).

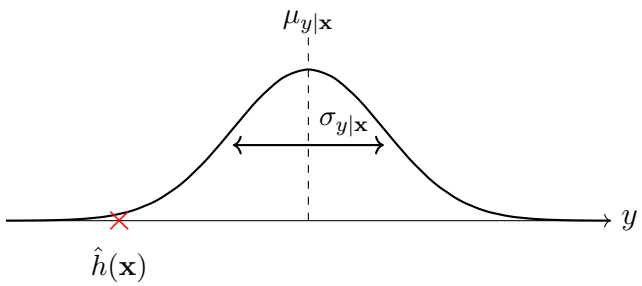


Figure 20: Si los atributos y la etiqueta de un punto de datos siguen una distribución normal multivariante, we podemos alcanzar el mínimo riesgo (bajo pérdida de error cuadrático) usando el Bayes estimator $\mu_{y|\mathbf{x}}$ para predecir el etiqueta y de un punto de datos con atributos $\mathbf{x}$. El mínimo riesgo es dada por la varianza posterior $\sigma^2_{y|\mathbf{x}}$. Podemos usar esta cantidad como baseline para evaluar la loss promedio del modelo $\hat{h}$ entrenado.

región de decisión Consideremos un mapa de hipótesis h que entrega valores de un conjunto finito $\mathcal{Y}$. Para cada valor de etiqueta (categoría) $a \in \mathcal{Y}$, la hipótesis h determina un subconjunto de valores de atributo $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ que resultan en el mismo resultado $h(\mathbf{x}) = a$. Nos referimos a este subconjunto como una región de decisión de la hipótesis h.

reglamento general de protección de datos (RGPD) El RGPD fue promulgado por la Union Europea (EU), y entró en efecto el 25 de Mayo de 2018 [36]. Protege la privacidad y los derechos sobre los datos de los individuos dentro de la EU. El RGPD tiene implicaciones significativas sobre cómo se recopilan, almacenan y utilizan los datos en aplicaciones de ML. Las disposiciones clave incluyen:

- Data minimization principle: los sistemas de ML deben utilizar únicamente la cantidad necesaria de datos personal para su propósito.
- Transparencia y explicabilidad: los sistemas de ML deben permitir a sus usuarios comprender cómo se toman las decisiones que los afectan.
- Derechos del titular de los datos Datos:los usuarios deben tener la posibilidad de acceder, rectificar y eliminar sus datos, así como oponerse a decisiones automatizadas y perfiles.
- Responsabilidad: las organizaciones deben garantizar una seguridad robusta de los datos y demostrar cumplimiento mediante documentación y auditorías periódicas.

regresión Los problemas de regresión se centran en la predicción de una etiqueta numérica basada únicamente en las atributos de un punto de datos [6, Ch. 2].

regresión lineal La regresión lineal tiene como objetivo aprender un mapa de hipótesis lineal para predecir una etiqueta numérica basada en los atributos numéricos de un punto de datos. La calidad de un mapa

de hipótesis lineal se mide utilizando el promedio de pérdida de error cuadrático incurrido en un conjunto de punto de dato etiquetados, al que nos referimos como el conjunto de entrenamiento.

regresión logística La regresión logística aprende un mapeo hipótesis lineal (o clasificador) $h(\mathbf{x}) = \mathbf{w}^T\mathbf{x}$ para predecir una etiqueta binaria y basada en el vector de atributos númerico $\mathbf{x}$ de algun punto de datos. La calidad de un mapeo hipótesis lineal se mide por el promedio de la pérdida logística sobre algunos punto de dato etiquetados (es decir, el conjunto de entrenamiento).

regresión polinómica La regresión polinómica tiene como objetivo aprender un mapa de hipótesis polinómico para predecir una etiqueta numérica en función de los atributos numéricos de un punto de datos. Para punto de datoss caracterizados por un único atributo numérico, la regresión polinómica utiliza el espacio de hipótesis $\mathcal{H}_d^{(\text{poly})} := \{h(x) = \sum_{j=0}^{d-1} x^j w_j\}$. La calidad de un mapa de hipótesis polinómico se mide utilizando el promedio de pérdida de error cuadrático incurrido en un conjunto de punto de dato etiquetados (al que nos referimos como el conjunto de entrenamiento).

regresión ridge La regresión ridge aprende los weights $\mathbf{w}$ de un mapa de hipótesis lineal $h^{(\mathbf{w})}(\mathbf{x}) = \mathbf{w}^T\mathbf{x}$. La calidad de una elección particular para los model parameters $\mathbf{w}$ se mide por la suma de dos componentes. El primer componente es el promedio de pérdida de error cuadrático incurrido por $h^{(\mathbf{w})}$ en un conjunto de punto de dato etiquetados (es decir, el conjunto de entrenamiento). El segundo componente es el

cuadrado de la norma Euclidiana escalada $\alpha\|\mathbf{w}\|_2^2$ con un parámetro de regularización $\alpha > 0$. Agregar $\alpha\|\mathbf{w}\|_2^2$ al promedio de pérdida de error cuadrático es equivalente a reemplazar cada punto de datoss original por la realización de (infinitos) i.i.d. RVs centrados alrededor de estos punto de datoss (vea regularización).

regularización Un desafío clave de aplicaciones modernas de ML es que a menudo utilizan modelos grandes, con una dimensión efectiva del orden de miles de millones. Entrenar un modelo de alta dimension métodos basicos basados en ERM es propenso al sobreajuste: la hipótesis aprendida funciona bien en el conjunto de entrenamiento pero mal fuera de él conjunto de entrenamiento. La regularización se refiere a las modificaciones de una instancia dada de ERM para evitar el sobreajuste, es decir, para garantizar que la hipótesis aprendida no funcione mucho peor fuera del conjunto de entrenamiento. Existen tres rutas routes para implementar la regularización:

1) Modelo de poda: Se reduce el modelo original $\mathcal{H}$ para obtener un modelo mas pequeño $\mathcal{H}'$. Para un modelo paramétrico, la poda se puede implementar mediante restricciones en los model parameters (como $w_1 \in [0.4, 0.6]$ para el peso de atributo x_1 en regresión lineal).

2) Loss con penalización: Se modifica la función objetivo de ERM añadiendo un término de penalización al error de entrenamiento. Este término cuanto mayor es la loss esperada (o riesgo) en comparación con la loss promedio en el conjunto de entrenamiento.

3) Data augmentation: Se amplía el conjunto de entrenamiento $\mathcal{D}$ añadiendo copias perturbadas de los punto de datoss originales en $\mathcal{D}$. Un ejemplo de dicha perturbación es añadir la realización de un RV al vector de atributos de un punto de datos.

La Figura 21 ilustra las tres rutas anteriores para la regularización. Estas rutas están relacionadas y, en ocasiones, son equivalentes: data augmentation utilizando VA gaussianas para perturbar los vector de atributoss en el conjunto de entrenamiento de regresión lineal tiene el mismo efecto que añadir el término de penalización. $\lambda \|\mathbf{w}\|_2^2$ al error de entrenamiento (que no es más que regresión ridge). La decisión sobre qué ruta usar para la regularización puede basarse en la infraestructura computacional disponible. Por ejemplo, podría ser mucho mas fácil implementar data augmentation que la poda del modelo.

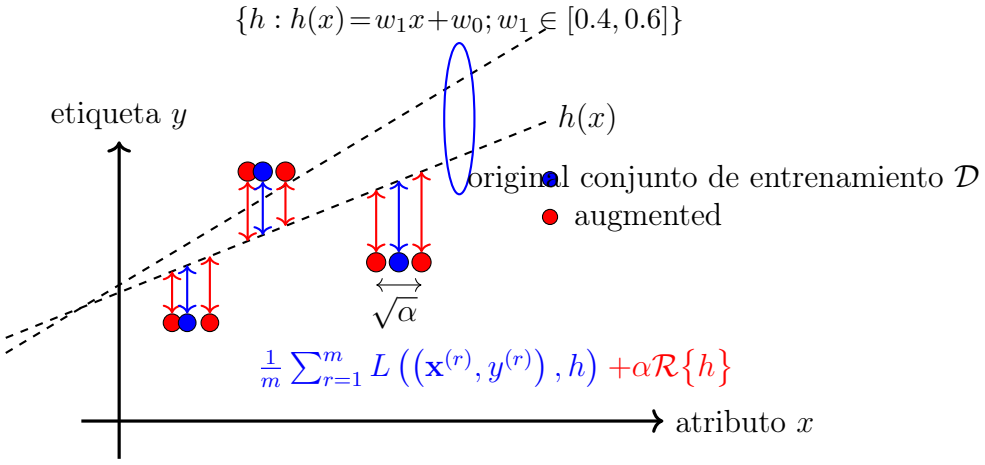


Figure 21: Tres enfoques para la regularización: 1) data augmentation; 2) penalización de loss ; y 3) poda del modelo (a través de restricciones en los model parameters).

regularizador Un regularizador asigna a cada hipótesis h de un espacio de hipótesis $\mathcal{H}$ una medida cuantitativa $\mathcal{R}\big\{h\big\}$ que indica cuánto podría diferir su error de predicción en un conjunto de entrenamiento de sus errores de predicción en punto de datoss fuera del conjunto de entrenamiento. Regresión ridge utiliza el regularizador $\mathcal{R}\big\{h\big\} := \|\mathbf{w}\|_2^2$ para mapas de hipótesis lineales $h^{(\mathbf{w})}(\mathbf{x}) := \mathbf{w}^T\mathbf{x}$ [6, Ch. 3]. Lasso utiliza el regularizador $\mathcal{R}\big\{h\big\} := \|\mathbf{w}\|_1$ para mapas de hipótesis lineales $h^{(\mathbf{w})}(\mathbf{x}) := \mathbf{w}^T\mathbf{x}$ [6, Ch. 3].

Rényi divergence The Rényi divergence measures the (dis)similarity between two probability distributions [92].

reward A reward refers to some observed (or measured) quantity that allows us to estimate the loss incurred by the predicción (or decision) of a hipótesis $h(\mathbf{x})$. For example, in an ML application to self-driving vehicles, $h(\mathbf{x})$ could represent the current steering direction of a vehicle. We could construct a reward from the measurements of a collision sensor that indicate if the vehicle is moving towards an obstacle. We define a low reward for the steering direction $h(\mathbf{x})$ if the vehicle moves dangerously towards an obstacle.

riesgo Consideremos una hipótesis h que se utiliza para predecir la etiqueta y de un punto de datos a partir de sus atributos $\mathbf{x}$. Evaluamos la calidad de una predicción específica usando una loss function $L\left((\mathbf{x}, y), h\right)$. Si interpretamos los punto de datoss como realizaciónes de RVs i.i.d., entonces $L\left((\mathbf{x}, y), h\right)$ también se convierte en unarealización de una RV. El suposición i.i.d. nos permite definir el riesgo de una hipótesis como

la esperanza de la loss $\mathbb{E}\big\{ L\left((\mathbf{x}, y), h\right) \big\}$. El riesgo de h depende tanto de la loss function elegida como de la probability distribution de los punto de datoss.

riesgo empírico El riesgo empírico $\widehat{L}\big(h|\mathcal{D}\big)$ de una hipótesis sobre un conjunto de datos $\mathcal{D}$ es la loss promedio incurrida por h al aplicarse a los punto de datoss en el $\mathcal{D}$.

régimen de alta dimensión El régimen de alta dimensión de ERM se caracteriza por que la dimensión efectiva del modelo es mayor que el sample size, es decir, el número de punto de datoss etiquetados en el conjunto de entrenamiento. Por ejemplo, los métodos de regresión lineal operan en el régimen de alta dimensión cuando el número d de atributos utilizados para caracterizar los punto de datoss excede el número de punto de datoss en el conjunto de entrenamiento. Otro ejemplo de métodos de ML que operan en el régimen de alta dimensión son las ANNs grandes, que tienen muchos más weights ajustables (y términos de sesgo) que el número total de punto de datoss en el conjunto de entrenamiento. La estadística de alta dimensión es una línea principal reciente de la teoría de probabilidad que estudia el comportamiento de los métodos de ML en el régimen de alta dimensión [93, 94].

sample A finite sequence (or list) of punto de datoss $\mathbf{z}^{(1)}, \ldots, \mathbf{z}^{(m)}$ that is obtained or interpreted as the realización of m i.i.d. RVs with a common probability distribution $p(\mathbf{z})$. The length m of the sequence is referred to as the sample size.

sample size The number of individual punto de datoss contained in a conjunto de datos.

sesgo Consideremos un método de ML que utiliza un espacio de hipótesis $\mathcal{H}$ parametrizado. Este aprende los model parameters $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^d$ utilizando el conjunto de datos

$$\mathcal{D} = \left\{ \left(\mathbf{x}^{(r)}, y^{(r)}\right) \right\}_{r=1}^{m}.$$

Para analizar las propiedades del método de ML, típicamente interpretamos los punto de datoss como realizaciónes de i.i.d. RVs,

$$y^{(r)} = h^{(\overline{\mathbf{w}})}\left(\mathbf{x}^{(r)}\right) + \boldsymbol{\varepsilon}^{(r)}, r = 1, \ldots, m.$$

Entonces podemos interpetar el método de ML como un estimador $\widehat{\mathbf{w}}$ calculado a partir de $\mathcal{D}$ (por ejemplo, resolviendo ERM). El sesgo (cuadrado) del estimador $\widehat{\mathbf{w}}$ se define como $B^2 := \left\|\mathbb{E}\{\widehat{\mathbf{w}}\} - \overline{\mathbf{w}}\right\|_2^2$.

singular value decomposition (SVD) The SVD for a matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times d}$ is a factorization of the form

$$\mathbf{A} = \mathbf{V}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{U}^T,$$

with orthonormal matrices $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ and $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ [3]. The matrix $\boldsymbol{\Lambda} \in \mathbb{R}^{m \times d}$ is only non-zero along the main diagonal, whose entries $\Lambda_{j,j}$ are non-negative and referred to as singular values.

smooth A real-valued function $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ is smooth if it is diferenciable and its gradiente $\nabla f(\mathbf{w})$ is continuous at all $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^d$ [66, 95]. A smooth

function f is referred to as β-smooth if the gradiente $\nabla f(\mathbf{w})$ is Lipschitz continuous with Lipschitz constant β, i.e.,

$$\|\nabla f(\mathbf{w}) - \nabla f(\mathbf{w}')\| \leq \beta \|\mathbf{w} - \mathbf{w}'\|, \text{ for any } \mathbf{w}, \mathbf{w}' \in \mathbb{R}^d.$$

The constant β quantifies the amount of smoothness of the function f: the smaller the β, the smoother f is. Optimization problems with a smooth función objetivo can be solved effectively by gradient-based methods. Indeed, gradient-based methods approximate the función objetivo locally around a current choice $\mathbf{w}$ using its gradiente. This approximation works well if the gradiente does not change too rapidly. We can make this informal claim precise by studying the effect of a single paso de gradiente with tamaño de paso $\eta = 1/\beta$ (see Figure 22).

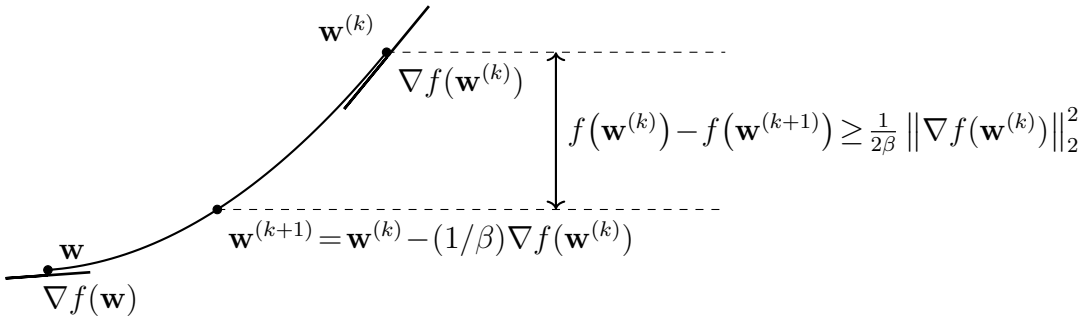


Figure 22: Consider an función objetivo $f(\mathbf{w})$ that is β-smooth. Taking a paso de gradiente, with tamaño de paso $\eta = 1/\beta$, decreases the objective by at least $\frac{1}{2\beta} \big\|\nabla f(\mathbf{w}^{(k)})\big\|_2^2$ [66, 67, 95]. Note that the tamaño de paso $\eta = 1/\beta$ becomes larger for smaller β. Thus, for smoother función objetivos (i.e., those with smaller β), we can take larger steps.

sobreajuste Consideremos un método de ML que utiliza ERM para aprender

una hipótesis con el mínimo riesgo empírico en un conjunto de entrenamiento dado. Dicho método presenta sobreajuste del conjunto de entrenamiento si aprende una hipótesis con un riesgo empírico pequeño sobre el conjunto de entrenamiento pero una loss significativamente mayor fuera de él conjunto de entrenamiento.

soft clustering Soft clustering refers to the task of partitioning a given set of punto de datoss into (a few) overlapping clusters. Each punto de datos is assigned to several different clusters with varying degrees of belonging. Soft clustering methods determine the grado de pertenencia (or soft cluster assignment) for each punto de datos and each cluster. A principled approach to soft clustering is by interpreting punto de datoss as i.i.d. realizacións of a GMM. We then obtain a natural choice for the grado de pertenencia as the conditional probabilidad of a punto de datos belonging to a specific mixture component.

stability Stability is a desirable property of a ML method $\mathcal{A}$ that maps a conjunto de datos $\mathcal{D}$ (e.g., a conjunto de entrenamiento) to an output $\mathcal{A}(\mathcal{D})$, such as learned model parameters or the predicción for a specific punto de datos. Intuitively, $\mathcal{A}$ is stable if small changes in the input conjunto de datos $\mathcal{D}$ lead to small changes in the output $\mathcal{A}(\mathcal{D})$. Several formal notions of stability exist that enable bounds on the generalización error or riesgo of the method; see [39, Ch. 13]. To build intuition, consider the three datasets depicted in Fig. 23, each of which is equally likely under the same datos-generating probability distribution. Since the optimal model parameters are determined by this underlying probability

distribution, an accurate ML method $\mathcal{A}$ should return the same (or very similar) output $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ for all three conjunto de datos. In other words, any useful $\mathcal{A}$ must be robust to variability in sample realizacións from the same probability distribution, i.e., it must be stable.

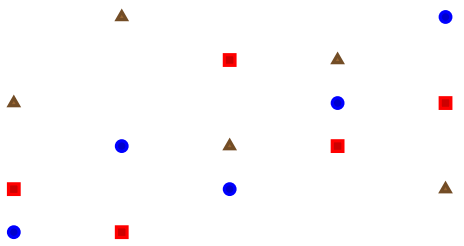


Figure 23: Three conjunto de datoss $\mathcal{D}^{(*)}$, $\mathcal{D}^{(\square)}$, and $\mathcal{D}^{(\triangle)}$, each sampled independently from the same datos-generating probability distribution. A stable ML method should return similar outputs when trained on any of these conjunto de datoss.

stochastic gradient descent (SGD) Stochastic GD is obtained from GD by replacing the gradiente of the función objetivo with a stochastic approximation. A main application of stochastic GD is to train a parametrized modelo via ERM on a conjunto de entrenamiento $\mathcal{D}$ that is either very large or not readily available (e.g., when punto de datoss are stored in a database distributed all over the planet). To evaluate the gradiente of the riesgo empírico (as a function of the model parameters $\mathbf{w}$), we need to compute a sum $\sum_{r=1}^{m} \nabla_{\mathbf{w}} L\left(\mathbf{z}^{(r)}, \mathbf{w}\right)$ over all punto de

datoss in the conjunto de entrenamiento. We obtain a stochastic approximation to the gradiente by replacing the sum $\sum_{r=1}^{m} \nabla_{\mathbf{w}} L\left(\mathbf{z}^{(r)}, \mathbf{w}\right)$ with a sum $\sum_{r \in \mathcal{B}} \nabla_{\mathbf{w}} L\left(\mathbf{z}^{(r)}, \mathbf{w}\right)$ over a randomly chosen subset $\mathcal{B} \subseteq \{1, \ldots, m\}$ (see Figure 24). We often refer to these randomly chosen punto de datoss as a lote. The lote size $|\mathcal{B}|$ is an important parameter of stochastic GD. Stochastic GD with $|\mathcal{B}| > 1$ is referred to as mini-lote stochastic GD [96].

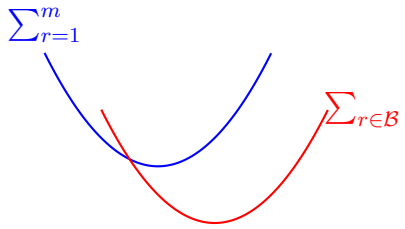


Figure 24: Stochastic GD for ERM approximates the gradiente $\sum_{r=1}^{m} \nabla_{\mathbf{w}} L\left(\mathbf{z}^{(r)}, \mathbf{w}\right)$ by replacing the sum over all punto de datoss in the conjunto de entrenamiento (indexed by $r = 1, \ldots, m$) with a sum over a randomly chosen subset $\mathcal{B} \subseteq \{1, \ldots, m\}$.

stopping criterion Many ML methods use iterative algorithms that construct a sequence of model parameters (such as the weights of a linear map or the weights of an ANN). These parameters (hopefully) converge to an optimal choice for the model parameters. In practice, given finite computational resources, we need to stop iterating after a finite number of repetitions. A stopping criterion is any well-defined condition required for stopping the iteration.

subajuste Consideremos un método de ML que utiliza ERM para apren-

der una hipótesis con el mínimo riesgo empírico en un conjunto de entrenamiento dado. Dicho método presenta subajuste del conjunto de entrenamiento si no es capaz de aprender una hipótesis con un riesgo empírico suficientemente pequeño sobre el conjunto de entrenamiento. Si un método sufre de subajuste, típicamente tampoco podrá aprender una hipótesis con un riesgo pequeño.

subgradient descent Subgradiente descent is a generalización of GD that does not require differentiability of the function to be minimized. This generalización is obtained by replacing the concept of a gradiente with that of a subgradiente. Similar to gradientes, also subgradientes allow us to construct local approximations of an función objetivo. The función objetivo might be the riesgo empírico $\widehat{L}\big(h^{(\mathbf{w})}\big|\mathcal{D}\big)$ viewed as a function of the model parameters $\mathbf{w}$ that select a hipótesis $h^{(\mathbf{w})} \in \mathcal{H}$.

subgradiente Para una función de valor real $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} : \mathbf{w} \mapsto f(\mathbf{w})$, un vector $\mathbf{a}$ tal que $f(\mathbf{w}) \geq f(\mathbf{w}') + \big(\mathbf{w} - \mathbf{w}'\big)^T \mathbf{a}$ se se denomina subgradiente de f en $\mathbf{w}'$ [97, 98].

suposición de agrupamiento La suposición de agrupamiento postula que los punto de datos en un conjunto de datos forman un (pequeño) número de grupos o clusters. Los Punto de datoss en el mismo clusterson más similares entre sí que aquellos que están fuera del cluster [22]. Obtenemos diferentes métodos de clustering utilizando diferentes nociones de similitud entre punto de datoss.

suposición de independencia e idéntica distribución (suposición i.i.d.) La suposición i.i.d. interpreta los punto de datoss de unconjunto de

datos como las realizacións de RVs i.i.d..

support vector machine (SVM) The SVM is a binary clasificación method that learns a linear hipótesis map. Thus, like regresión lineal and regresión logística, it is also an instance of ERM for the modelo lineal. However, the SVM uses a different loss function from the one used in those methods. As illustrated in Figure 25, it aims to maximally separate punto de datoss from the two different classes in the espacio de atributos (i.e., máximo margin principle). Maximizing this separation is equivalent to minimizing a regularized variant of the pérdida de hinge (10) [54, 72, 99].

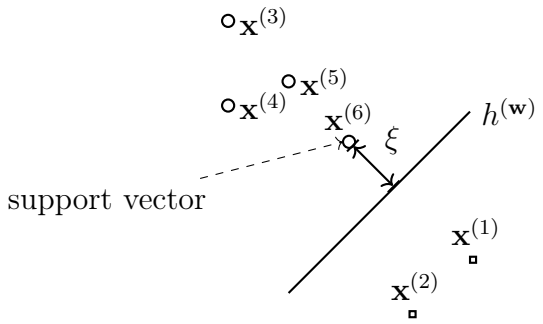


Figure 25: The SVM learns a hipótesis (or clasificador) $h^{(\mathbf{w})}$ with minimal average soft-margin pérdida de hinge. Minimizing this loss is equivalent to maximizing the margin ξ between the frontera de decisión of $h^{(\mathbf{w})}$ and each class of the conjunto de entrenamiento.

The above basic variant of SVM is only useful if the punto de datoss from different categories can be (approximately) linearly separated. For an ML application where the categories are not derived from a kernel.

supremo (o mínimo de las cotas superiores) El supremo de un conjunto de números reales es el número más pequeño que es mayor o igual que todos los elementos del conjunto. Formalmente, un número real a es el supremo de un conjunto $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}$ si: 1) a es una cota superior de $\mathcal{A}$; y 2) ningún número menor que a es una cota superior de $\mathcal{A}$. Todo conjunto no vacío de números reales que esté acotado superiormente tiene un supremo,aun si no contiene su supremo como un elemento [2, Sec. 1.4].

tamaño de paso Consulte tasa de aprendizaje.

tarea de aprendizaje Consideremos un conjunto de datos $\mathcal{D}$ constituido por varios punto de datoss, cada uno caracterizado por atributos $\mathbf{x}$. Por ejemplo, el conjunto de datos $\mathcal{D}$ podría estar constituido por imágenes de una base de datos particular. A veces puede ser útil representar un conjunto de datos $\mathcal{D}$, junto con la elección de atributos, por un probability distribution $p(\mathbf{x})$. Una tarea de aprendizaje asociada a $\mathcal{D}$ consiste en una elección específica de la etiqueta de un punto de datos y el correspondiente espacio de etiquetas. Dada una elección de la loss function y el modelo, una tarea de aprendizaje da lugar a una instancia de ERM. Así, también podríamos definir una tarea de aprendizaje mediante una instancia de ERM, es decir, mediante una función objetivo. Nótese que, para el mismo conjunto de datos, obtenemos diferentes tareas de aprendizaje utilizando distintas elecciones de atributos y etiqueta de un punto de datos. Estas tareas de aprendizaje están relacionadas, ya que se basan en el mismo conjunto de datos, y resolverlas conjuntamente (usando métodos de aprendizaje multitarea)

es preferible a resolverlas de forma independiente [100], [101], [102].

tasa de aprendizaje Considere un método iterativo de ML para encontrar o aprender una hipótesis útil $h \in \mathcal{H}$. Dicho método iterativo repite pasos computacionales similares (de actualización) que ajustan o modifican la hipótesis actual para obtener una hipótesis mejorada. Un ejemplo bien conocido de este tipo de método de aprendizaje iterativo es el GD y sus variantes, SGD y descenso por gradiente proyectado (GD proyectado). Un parámetro clave de un método iterativo es la tasa de aprendizaje. La tasa de aprendizaje controla la magnitud en que la hipótesis actual puede modificarse durante una sola iteración. Un ejemplo conocido de este parámetro es el tamaño de paso utilizado en GD [6, Ch. 5].

total variation See GTV.

transparencia La transparencia es un requisito fundamental para una trustworthy AI confiable [103]. En ML, suele utilizarse como sinónimo de explicabilidad [58, 104] pero en el contexto más amplio de sistemas de AI, incluye también información sobre limitaciones, confiabilidad y uso previsto. En sistemas de diagnóstico médico, se requiere informar el nivel de confianza de una predicción. En aplicaciones financieras como la puntuación crediticia, las decisiones automatizadas basadas en AI deben ir acompañadas de explicaciones sobre los factores que influyeron en ellas, como el nivel de ingresos o el historial crediticio. These explanations Estas explicaciones permiten que las personas (por ejemplo, un solicitante de crédito) comprendan y, si es necesario, impugnen decisiones automatizadas.. Algunos métodos de ML ofrecen

transparencia de manera intrínseca. Por ejemplo, la regresión logística permite interpretar la fiabilidad de una clasificación mediante el valor absoluto $|h(\mathbf{x})|$. Las decision trees, también son consideradas transparentes porque generan reglas comprensibles para los humanos. [19]. La transparencia también requiere que se informe explícitamente cuando una persona está interactuando con un sistema AI. Por ejemplo, los chatbots impulsados por AI deben indicar claramente que no son humanos. For example, AI-powered chatbots should notify users that they are interacting with an automated system rather than a human. Furthermore, transparency encompasses comprehensive documentation detailing the purpose and design choices underlying the AI system. Además, la transparencia incluye documentación exhaustiva que detalle el propósito, las decisiones de diseño y los casos de uso previstos del sistema. Ejemplos de esto son las hojas de datos de modelos [32] y las tarjetas de sistemas de AI [105], que ayudan a los desarrolladores y usuarios a entender las limitaciones y aplicaciones adecuadas de un sistema AI [106].

uncertainty Uncertainty refers to the degree of confidence—or lack thereof—associated with a quantity such as a model prediction, parameter estimate, or observed data point. In ML, uncertainty arises from various sources, including noisy data, limited training samples, or ambiguity in model assumptions. Probability theory offers a principled framework for representing and quantifying such uncertainty.

unidad lineal rectificada (ReLU) La unidad lineal rectificada (ReLU) es

una elección popular para la función de activación de una neurona dentro de una ANN. Se define como $\sigma(z) = \max\{0, z\}$, donde z es la entrada ponderada de la neurona artificial.

upper confidence bound (UCB) Consider a ML application that requires selecting, at each time step k, an action a_k from a finite set of alternatives $\mathcal{A}$. The utility of selecting action a_k is quantified by a numeric reward signal $r^{(a_k)}$. A widely used modelo probabilístico for this type of sequential decision-making problem is the stochastic multi-armed bandit setting [80]. In this model, the reward $r^{(a)}$ is viewed as the realización of a RV with unknown media $\mu^{(a)}$. Ideally, we would always choose the action with the largest expected reward $\mu^{(a)}$, but these means are unknown and must be estimated from observed datos. Simply choosing the action with the largest estimate $\widehat{\mu}^{(a)}$ can lead to suboptimal outcomes due to estimation uncertainty. The UCB strategy addresses this by selecting actions not only based on their estimated means but also by incorporating a term that reflects the uncertainty in these estimates—favouring actions with high potential reward and high uncertainty. Theoretical guarantees for the performance of UCB strategies,including logarithmic regret bounds, are established in [80].

validación La validación se refiere a la práctica de evaluar el loss incurrido por una hipótesis $\hat{h}$ que ha sido aprendida mediante algún método de ML, por ejemplo, resolviendo ERM en un conjunto de entrenamiento $\mathcal{D}$. La validación implica evaluar el desempeño de la hipótesis en un conjunto de punto de datoss que no están contenidos en el conjunto de

entrenamiento $\mathcal{D}$.

valor atípico (outlier) Muchos métodos de ML están motivados por la suposición i.i.d., que interpreta los punto de datoss como realizacións de i.i.d. RVs con una probability distribution común. La suposición i.i.d. es útil en aplicaciones donde las propiedades estadísticas del proceso de generación de datos son estacionarias (o invariantes en el tiempo) [107]. Sin embargo, en algunas aplicaciones, los datos están compuestos por una mayoría de punto de datoss regulares que cumplen con la suposición i.i.d. y un pequeño número de punto de datoss que presentan propiedades estadísticas fundamentalmente diferentes en comparación con los punto de datoss regulares. Nos referimos a un punto de datos que se desvía significativamente de las propiedades estadísticas de la mayoría como un valor atípico (outlier). Los diferentes métodos de detección de valores atípicos utilizan distintas medidas para evaluar esta desviación.La teoría del aprendizaje estadístico estudia los límites fundamentales sobre la capacidad de mitigar valores atípicos de manera confiable [108, 109].

variable aleatoria (RV) Una RV es una función que mapea desde un probability space $\mathcal{P}$ a un espacio de valores [40, 53]. El probability space consiste en eventos elementales y está equipado con una medida de probabilidad que asigna probabilidades a subconjuntos de $\mathcal{P}$. Existen diferentes tipos de variables aleatorias (RV), que incluyen:

- RVs binarias, que asignan eventos elementales a un conjunto de dos valores distintos, como $\{-1, 1\}$ o $\{\text{cat}, \text{no cat}\}$;

- RVs de valor real, que toman valores en los números reales $\mathbb{R}$;
- RVs de valor vectorial, que mapean eventos elementales al espacio euclidiano $\mathbb{R}^d$.

La teoría de Probabilidad utiliza el concepto de espacios medibles para definir rigurosamente y estudiar las propiedades de (grandes) colecciones de RVs [53].

variable aleatoria gaussiana (VA gaussiana) Una RV gaussiana estándar es una RV real x con pdf [5, 40, 75]

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp^{-x^2/2}.$$

Dada una RV gaussiana estándar x, podemos construir una RV gaussiana general x' con media μ y varianza σ^2 mediante $x' := \sigma(x + \mu)$. La probability distribution de una RV gaussiana se conoce como distribución normal, denotada $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$.

Un vector aleatorio gaussiano $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ con matriz de covarianza $\mathbf{C}$ y media $\boldsymbol{\mu}$ puede construirse como $\mathbf{x} := \mathbf{A}\big(\mathbf{z} + \boldsymbol{\mu}\big)$. Aquí, $\mathbf{A}$ es cualquier matriz que satisface $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{C}$ y $\mathbf{z} := \big(z_1, \ldots, z_d\big)^T$ es un vector cuyos elementos son i.i.d. gaussianas estándar RVs $z_1, \ldots, z_d$. Los procesos aleatorios gaussianos generalizan los vectores aleatorios gaussianos aplicando transformaciones lineales a a secuencias infinitas de RVs gaussianas estándar [110].

Las RVs gaussianas se utilizan ampliamente como modelo probabilísticos en el análisis estadístico de métodos de ML. Su importancia se debe, en parte, al teorema del límite central, que establece que el promedio de un

número creciente de RVs independientes (aunque no sean gaussianas) converge a una RV gaussiana [86].

variación total generalizada (GTV) GTV es una medida de la variación de los local models entrenados $h^{(i)}$ (o de sus model parameters $\mathbf{w}^{(i)}$) asignados a los nodos $i = 1, \ldots, n$ de un grafo no dirigido ponderado $\mathcal{G}$ con aristas $\mathcal{E}$. Dada una medida $d^{(h,h')}$ para la discrepancia entre mapas de hipótesis h, h', la GTV se define como:

$$\sum_{\{i,i'\} \in \mathcal{E}} A_{i,i'} d^{(h^{(i)}, h^{(i')})}.$$

Here, $A_{i,i'} > 0$ denota el peso de la arista no dirigida $\{i, i'\} \in \mathcal{E}$.

varianza La varianza de una RV real x se define como la esperanza $\mathbb{E}\big\{\big(x - \mathbb{E}\{x\}\big)^2\big\}$ de la diferencia cuadrada entre x y su esperanza $\mathbb{E}\{x\}$. Extendemos esta definición a RVs vectoriales$\mathbf{x}$ como $\mathbb{E}\big\{\big\|\mathbf{x} - \mathbb{E}\{\mathbf{x}\}\big\|_2^2\big\}$.

vecino más cercano (NN) Los métodos de vecino más cerano (NN) aprenden una hipótesis $h : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ cuyo valor $h(\mathbf{x})$ se determina únicamente por los vecinos más cercanos dentro de un conjunto de datos. Distintos métodos usan diferentes medidas para determinar los vecinos más cercanos. Si los punto de datoss se caracterizan por vector de atributoss numéricos, podemos usar la distancia euclidiana como medida. the metric.

vecinos Los vecinos de un nodo $i \in \mathcal{V}$ dentro de un red de aprendizaje federado (red FL) son los nodos $i' \in \mathcal{V} \setminus \{i\}$ conectados con i por una arista.

vector de atributos El vector de atributos se refiere a un vector $\mathbf{x} = \big(x_1, \ldots, x_d\big)^T$ cuyos elementos son atributos individuales $x_1, \ldots, x_d$. Muchos métodos de ML utilizan vectores de atributos que pertenecen a algún espacio euclidiano de dimensión finita $\mathbb{R}^d$. Sin embargo, para algunos métodos de ML, puede ser más conveniente trabajar con vectores de atributos que pertenezcan a un espacio vectorial de dimensión infinita (por ejemplo, ver método de kernel).

weights Consider a parametrized espacio de hipótesis $\mathcal{H}$. We use the term weights for numeric model parameters that are used to scale atributos or their transformations in order to compute $h^{(\mathbf{w})} \in \mathcal{H}$. A modelo lineal uses weights $\mathbf{w} = \big(w_1, \ldots, w_d\big)^T$ to compute the linear combination $h^{(\mathbf{w})}(\mathbf{x}) = \mathbf{w}^T\mathbf{x}$. Weights are also used in ANNs to form linear combinations of atributos or the outputs of neurons in hidden layers.

zero-gradient condition Consider the unconstrained optimization problem $\min_{\mathbf{w}\in\mathbb{R}^d} f(\mathbf{w})$ with a smooth and convex función objetivo $f(\mathbf{w})$. A necessary and sufficient condition for a vector $\widehat{\mathbf{w}} \in \mathbb{R}^d$ to solve this problem is that the gradiente $\nabla f\big(\widehat{\mathbf{w}}\big)$ is the zero vector,

$$\nabla f\big(\widehat{\mathbf{w}}\big) = \mathbf{0} \Leftrightarrow f\big(\widehat{\mathbf{w}}\big) = \min_{\mathbf{w}\in\mathbb{R}^d} f(\mathbf{w}).$$

0/1 loss La loss 0/1 $L^{(0/1)}\left((\mathbf{x}, y), h\right)$ mide la calidad de un clasificador $h(\mathbf{x})$ que genera una predicción $\hat{y}$ (por ejemplo, mediante un umbral como en (1)) para la etiqueta y de un punto de datos con atributos $\mathbf{x}$. Es igual a 0 si la predicción es correcta, es decir, $L^{(0/1)}\left((\mathbf{x}, y), h\right) = 0$ cuando $\hat{y} = y$.

Es igual a 1 si la predicción es incorrecta, es decir, $L^{(0/1)}\left(\left(\mathbf{x}, y\right), h\right) = 1$ cuando $\hat{y} \neq y$.

Index

References

[1] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, 3rd ed. New York, NY, USA: McGraw-Hill, 1987.

[2] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, 3rd ed. New York, NY, USA: McGraw-Hill, 1976.

[3] G. H. Golub and C. F. Van Loan, *Matrix Computations*, 4th ed. Baltimore, MD, USA: The Johns Hopkins Univ. Press, 2013.

[4] G. H. Golub and C. F. Van Loan, "An analysis of the total least squares problem," *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 17, no. 6, pp. 883–893, Dec. 1980, doi: 10.1137/0717073.

[5] D. P. Bertsekas and J. N. Tsitsiklis, *Introduction to Probability*, 2nd ed. Belmont, MA, USA: Athena Scientific, 2008.

[6] A. Jung, *Machine Learning: The Basics*. Singapore, Singapore: Springer Nature, 2022.

[7] Y. SarcheshmehPour, Y. Tian, L. Zhang, and A. Jung, "Flow-based clustering and spectral clustering: A comparison," in *2021 55th Asilomar Conf. Signals, Syst., Comput.*, M. B. Matthews, Ed. pp. 1292–1296, doi: 10.1109/IEEECONF53345.2021.9723162.

[8] U. von Luxburg, "A tutorial on spectral clustering," *Statist. Comput.*, vol. 17, no. 4, pp. 395–416, Dec. 2007, doi: 10.1007/s11222-007-9033-z.

[9] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest, and C. Stein, *Introduction to Algorithms*. Cambridge, MA, USA: MIT Press, 2022. [Online].

Available: http://ebookcentral.proquest.com/lib/aalto-ebooks/detail.action?docID=6925615

[10] M. Sipser, *Introduction to the Theory of Computation*, 3rd ed. Andover, U.K.: Cengage Learning, 2013.

[11] R. Motwani and P. Raghavan, *Randomized Algorithms*. Cambridge, U.K.: Cambridge Univ. Press, 1995.

[12] R. G. Gallager, *Stochastic Processes: Theory for Applications*. New York, NY, USA: Cambridge Univ. Press, 2013.

[13] G. Tel, *Introduction to Distributed Algorithms*, 2nd ed. Cambridge, U.K.: Cambridge Univ. Press, 2000.

[14] D. P. Bertsekas and J. N. Tsitsiklis, *Parallel and Distributed Computation: Numerical Methods*. Belmont, MA, USA: Athena Scientific, 2015.

[15] E. Hazan, "Introduction to online convex optimization," *Found. Trends Optim.*, vol. 2, no. 3–4, pp. 157–325, Aug. 2016, doi: 10.1561/2400000013.

[16] N. Cesa-Bianchi and G. Lugosi, *Prediction, Learning, and Games*. New York, NY, USA: Cambridge Univ. Press, 2006.

[17] L. Richardson and M. Amundsen, *RESTful Web APIs*. Sebastopol, CA, USA: O'Reilly Media, 2013.

[18] T. Hastie, R. Tibshirani, and M. Wainwright, *Statistical Learning with Sparsity: The Lasso and Generalizations*. Boca Raton, FL, USA: CRC Press, 2015.

[19] C. Rudin, "Stop explaining black box machine learning models for high-stakes decisions and use interpretable models instead," *Nature Mach. Intell.*, vol. 1, no. 5, pp. 206–215, May 2019, doi: 10.1038/s42256-019-0048-x.

[20] Q. Yang, Y. Liu, Y. Cheng, Y. Kang, T. Chen, and H. Yu, "Horizontal federated learning," in *Federated Learning*. Cham, Switzerland: Springer Nature, 2020, ch. 4, pp. 49–67.

[21] Q. Yang, Y. Liu, Y. Cheng, Y. Kang, T. Chen, and H. Yu, "Vertical federated learning," in *Federated Learning*. Cham, Switzerland: Springer Nature, 2020, ch. 5, pp. 69–81.

[22] O. Chapelle, B. Schölkopf, and A. Zien, Eds. *Semi-Supervised Learning*. Cambridge, MA, USA: MIT Press, 2006.

[23] D. N. Gujarati and D. C. Porter, *Basic Econometrics*, 5th ed. New York, NY, USA: McGraw-Hill/Irwin, 2009.

[24] Y. Dodge, Ed. *The Oxford Dictionary of Statistical Terms*. New York, NY, USA: Oxford Univ. Press, 2003.

[25] B. S. Everitt, *The Cambridge Dictionary of Statistics*, 2nd ed. Cambridge, U.K.: Cambridge Univ. Press, 2002.

[26] E. L. Lehmann and G. Casella, *Theory of Point Estimation*, 2nd ed. New York, NY, USA: Springer-Verlag, 1998.

[27] A. Silberschatz, H. F. Korth, and S. Sudarshan, *Database System*

Concepts, 7th ed. New York, NY, USA: McGraw-Hill Education, 2019. [Online]. Available: https://db-book.com/

[28] S. Abiteboul, R. Hull, and V. Vianu, *Foundations of Databases*. Reading, MA, USA: Addison-Wesley Publishing Company, 1995.

[29] S. Hoberman, *Data Modeling Made Simple: A Practical Guide for Business and IT Professionals*, 2nd ed. Basking Ridge, NJ, USA: Technics Publications, 2009.

[30] R. Ramakrishnan and J. Gehrke, *Database Management Systems*, 3rd ed. New York, NY, USA: McGraw-Hill, 2002.

[31] E. F. Codd, "A relational model of data for large shared data banks," *Commun. ACM*, vol. 13, no. 6, pp. 377–387, Jun. 1970, doi: 10.1145/362384.362685.

[32] T. Gebru et al., "Datasheets for datasets," *Commun. ACM*, vol. 64, no. 12, pp. 86–92, Nov. 2021, doi: 10.1145/3458723.

[33] S. Boyd and L. Vandenberghe, *Convex Optimization*. Cambridge, U.K.: Cambridge Univ. Press, 2004.

[34] D. Sun, K.-C. Toh, and Y. Yuan, "Convex clustering: Model, theoretical guarantee and efficient algorithm," *J. Mach. Learn. Res.*, vol. 22, no. 9, pp. 1–32, Jan. 2021. [Online]. Available: http://jmlr.org/papers/v22/18-694.html

[35] K. Pelckmans, J. De Brabanter, J. A. K. Suykens, and B. De Moor,

"Convex clustering shrinkage," presented at the PASCAL Workshop Statist. Optim. Clustering Workshop, 2005.

[36] European Union, "Regulation (EU) 2016/679 of the European Parliament and of the Council of 27 April 2016 on the protection of natural persons with regard to the processing of personal data and on the free movement of such data, and repealing Directive 95/46/EC (General Data Protection Regulation) (Text with EEA relevance)," L 119/1, May 4, 2016. [Online]. Available: https://eur-lex.europa.eu/eli/reg/2016/679/oj

[37] European Union, "Regulation (EU) 2018/1725 of the European Parliament and of the Council of 23 October 2018 on the protection of natural persons with regard to the processing of personal data by the Union institutions, bodies, offices and agencies and on the free movement of such data, and repealing Regulation (EC) No 45/2001 and Decision No 1247/2002/EC (Text with EEA relevance)," L 295/39, Nov. 21, 2018. [Online]. Available: https://eur-lex.europa.eu/eli/reg/2018/1725/oj

[38] K. Abayomi, A. Gelman, and M. Levy, "Diagnostics for multivariate imputations," *J. Roy. Statist. Soc.: Ser. C (Appl. Statist.)*, vol. 57, no. 3, pp. 273–291, Jun. 2008, doi: 10.1111/j.1467-9876.2007.00613.x.

[39] S. Shalev-Shwartz and S. Ben-David, *Understanding Machine Learning: From Theory to Algorithms*. New York, NY, USA: Cambridge Univ. Press, 2014.

[40] R. M. Gray, *Probability, Random Processes, and Ergodic Properties*, 2nd ed. New York, NY, USA: Springer Science+Business Media, 2009.

[41] A. Lapidoth, *A Foundation in Digital Communication*. Cambridge, U.K.: Cambridge Univ. Press, 2009.

[42] T. M. Cover and J. A. Thomas, *Elements of Information Theory*, 2nd ed. Hoboken, NJ, USA: Wiley, 2006.

[43] A. Makhdoumi, S. Salamatian, N. Fawaz, and M. Médard, "From the information bottleneck to the privacy funnel," in *2014 IEEE Inf. Theory Workshop*, pp. 501–505, doi: 10.1109/ITW.2014.6970882.

[44] X. Liu, H. Li, G. Xu, Z. Chen, X. Huang, and R. Lu, "Privacy-enhanced federated learning against poisoning adversaries," *IEEE Trans. Inf. Forensics Security*, vol. 16, pp. 4574–4588, 2021, doi: 10.1109/TIFS.2021.3108434.

[45] J. Zhang, B. Chen, X. Cheng, H. T. T. Binh, and S. Yu, "PoisonGAN: Generative poisoning attacks against federated learning in edge computing systems," *IEEE Internet Things J.*, vol. 8, no. 5, pp. 3310–3322, Mar. 2021, doi: 10.1109/JIOT.2020.3023126.

[46] S. M. Kay, *Fundamentals of Statistical Signal Processing: Estimation Theory*. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice Hall PTR, 1993.

[47] T. Hastie, R. Tibshirani, and J. Friedman, *The Elements of Statistical Learning: Data Mining, Inference, and Prediction*. New York, NY, USA: Springer Science+Business Media, 2001.

[48] L. Cohen, *Time-Frequency Analysis*. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice Hall PTR, 1995.

[49] J. Li, L. Han, X. Li, J. Zhu, B. Yuan, and Z. Gou, "An evaluation of deep neural network models for music classification using spectrograms," *Multimedia Tools Appl.*, vol. 81, no. 4, pp. 4621–4647, Feb. 2022, doi: 10.1007/s11042-020-10465-9.

[50] B. Boashash, Ed. *Time Frequency Signal Analysis and Processing: A Comprehensive Reference*. Oxford, U.K.: Elsevier, 2003.

[51] S. Mallat, *A Wavelet Tour of Signal Processing: The Sparse Way*, 3rd ed. Burlington, MA, USA: Academic, 2009.

[52] P. R. Halmos, *Measure Theory.* New York, NY, USA: Springer-Verlag, 1974.

[53] P. Billingsley, *Probability and Measure*, 3rd ed. New York, NY, USA: Wiley, 1995.

[54] C. M. Bishop, *Pattern Recognition and Machine Learning.* New York, NY, USA: Springer Science+Business Media, 2006.

[55] M. J. Wainwright and M. I. Jordan, "Graphical models, exponential families, and variational inference," *Found. Trends Mach. Learn.*, vol. 1, no. 1–2, pp. 1–305, Nov. 2008, doi: 10.1561/2200000001.

[56] J. Colin, T. Fel, R. Cadène, and T. Serre, "What I cannot predict, I do not understand: A human-centered evaluation framework for explainability methods," in *Adv. Neural Inf. Process. Syst.*, S. Koyejo, S. Mohamed, A. Agarwal, D. Belgrave, K. Cho, and A. Oh, Eds. vol. 35, 2022, pp. 2832–2845. [Online].

Available: https://proceedings.neurips.cc/paper_files/paper/2022/hash/13113e938f2957891c0c5e8df811dd01-Abstract-Conference.html

[57] L. Zhang, G. Karakasidis, A. Odnoblyudova, L. Dogruel, Y. Tian, and A. Jung, "Explainable empirical risk minimization," *Neural Comput. Appl.*, vol. 36, no. 8, pp. 3983–3996, Mar. 2024, doi: 10.1007/s00521-023-09269-3.

[58] A. Jung and P. H. J. Nardelli, "An information-theoretic approach to personalized explainable machine learning," *IEEE Signal Process. Lett.*, vol. 27, pp. 825–829, 2020, doi: 10.1109/LSP.2020.2993176.

[59] J. Chen, L. Song, M. J. Wainwright, and M. I. Jordan, "Learning to explain: An information-theoretic perspective on model interpretation," in *Proc. 35th Int. Conf. Mach. Learn.*, J. Dy and A. Krause, Eds. vol. 80, 2018, pp. 883–892. [Online]. Available: https://proceedings.mlr.press/v80/chen18j.html

[60] M. T. Ribeiro, S. Singh, and C. Guestrin, "Why should i trust you?: Explaining the predictions of any classifier," in *Proc. 22nd ACM SIGKDD Int. Conf. Knowl. Discovery Data Mining*, Aug. 2016, pp. 1135–1144, doi: 10.1145/2939672.2939778.

[61] C. Molnar, *Interpretable Machine Learning: A Guide for Making Black Box Models Explainable*, 3rd ed., 2025. [Online]. Available: https://christophm.github.io/interpretable-ml-book/

[62] R. R. Selvaraju, M. Cogswell, A. Das, R. Vedantam, D. Parikh, and D. Batra, "Grad-CAM: Visual explanations from deep networks via

gradient-based localization," in *2017 IEEE Int. Conf. Comput. Vis.*, pp. 618–626, doi: 10.1109/ICCV.2017.74.

[63] A. Jung, "Networked exponential families for big data over networks," *IEEE Access*, vol. 8, pp. 202 897–202 909, Nov. 2020, doi: 10.1109/ACCESS.2020.3033817.

[64] T. Li, A. K. Sahu, M. Zaheer, M. Sanjabi, A. Talwalkar, and V. Smith, "Federated optimization in heterogeneous networks," in *Proc. Mach. Learn. Syst.*, I. Dhillon, D. Papailiopoulos, and V. Sze, Eds. vol. 2, 2020. [Online]. Available: https://proceedings.mlsys.org/paper_files/paper/2020/hash/1f5fe83998a09396ebe6477d9475ba0c-Abstract.html

[65] A. Ünsal and M. Önen, "Information-theoretic approaches to differential privacy," *ACM Comput. Surv.*, vol. 56, no. 3, Oct. 2023, Art. no. 76, doi: 10.1145/3604904.

[66] Y. Nesterov, *Introductory Lectures on Convex Optimization: A Basic Course*. Boston, MA, USA: Kluwer Academic Publishers, 2004.

[67] D. P. Bertsekas, *Convex Optimization Algorithms*. Belmont, MA, USA: Athena Scientific, 2015.

[68] J. Su, D. V. Vargas, and K. Sakurai, "One pixel attack for fooling deep neural networks," *IEEE Trans. Evol. Comput.*, vol. 23, no. 5, pp. 828–841, Oct. 2019, doi: 10.1109/TEVC.2019.2890858.

[69] R. T. Rockafellar, *Network Flows and Monotropic Optimization*. Belmont, MA, USA: Athena Scientific, 1998.

[70] D. Pfau and A. Jung, "Engineering trustworthy AI: A developer guide for empirical risk minimization," Nov. 2024. [Online]. Available: https://arxiv.org/abs/2410.19361

[71] High-Level Expert Group on Artificial Intelligence, "The assessment list for trustworthy artificial intelligence (ALTAI): For self assessment," European Commission, Jul. 17, 2020. [Online]. Available: https://digital-strategy.ec.europa.eu/en/library/assessment-list-trustworthy-artificial-intelligence-altai-self-assessment

[72] C. H. Lampert, "Kernel methods in computer vision," *Found. Trends Comput. Graph. Vis.*, vol. 4, no. 3, pp. 193–285, Sep. 2009, doi: 10.1561/0600000027.

[73] B. Schölkopf and A. J. Smola, *Learning with Kernels: Support Vector Machines, Regularization, Optimization, and Beyond*. Cambridge, MA, USA: MIT Press, 2002.

[74] A. Vaswani et al., "Attention is all you need," in *Adv. Neural Inf. Process. Syst.*, I. Guyon, U. von Luxburg, S. Bengio, H. Wallach, R. Fergus, S. Vishwanathan, and R. Garnett, Eds. vol. 30, 2017, pp. 5998–6008. [Online]. Available: https://papers.nips.cc/paper_files/paper/2017/hash/3f5ee243547dee91fbd053c1c4a845aa-Abstract.html

[75] A. Papoulis and S. U. Pillai, *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*, 4th ed. New York, NY, USA: McGraw-Hill Higher Education, 2002.

[76] A. Y. Ng, M. I. Jordan, and Y. Weiss, "On spectral clustering: Analysis and an algorithm," in *Adv. Neural Inf. Process. Syst.*, T. Dietterich, S. Becker, and Z. Ghahramani, Eds. vol. 14, 2001, pp. 849–856. [Online]. Available: https://papers.nips.cc/paper_files/paper/2001/hash/801272ee79cfde7fa5960571fee36b9b-Abstract.html

[77] Y. SarcheshmehPour, Y. Tian, L. Zhang, and A. Jung, "Clustered federated learning via generalized total variation minimization," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 71, pp. 4240–4256, 2023, doi: 10.1109/TSP.2023.3322848.

[78] S. Shalev-Shwartz and A. Tewari, "Stochastic methods for ℓ_1 regularized loss minimization," in *Proc. 26th Annu. Int. Conf. Mach. Learn.*, L. Bottou and M. Littman, Eds. Jun. 2009, pp. 929–936.

[79] E. Abbe, "Community detection and stochastic block models: Recent developments," *J. Mach. Learn. Res.*, vol. 18, no. 177, pp. 1–86, Apr. 2018. [Online]. Available: http://jmlr.org/papers/v18/16-480.html

[80] S. Bubeck and N. Cesa-Bianchi, "Regret analysis of stochastic and nonstochastic multi-armed bandit problems," *Found. Trends Mach. Learn.*, vol. 5, no. 1, pp. 1–122, Dec. 2012, doi: 10.1561/2200000024.

[81] R. A. Horn and C. R. Johnson, *Matrix Analysis*, 2nd ed. New York, NY, USA: Cambridge Univ. Press, 2013.

[82] A. Rakhlin, O. Shamir, and K. Sridharan, "Making gradient descent optimal for strongly convex stochastic optimization," in *Proc. 29th Int.*

Conf. Mach. Learn., J. Langford and J. Pineau, Eds. 2012, pp. 449–456. [Online]. Available: https://icml.cc/Conferences/2012/papers/261.pdf

[83] N. Parikh and S. Boyd, "Proximal algorithms," *Found. Trends Optim.*, vol. 1, no. 3, pp. 127–239, Jan. 2014, doi: 10.1561/2400000003.

[84] H. H. Bauschke and P. L. Combettes, *Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces*, 2nd ed. New York, NY, USA: Springer Science+Business Media, 2017.

[85] O. Kallenberg, *Foundations of Modern Probability*. New York, NY, USA: Springer-Verlag, 1997.

[86] S. Ross, *A First Course in Probability*, 9th ed. Boston, MA, USA: Pearson Education, 2014.

[87] H. B. McMahan, E. Moore, D. Ramage, S. Hampson, and B. A. y Arcas, "Communication-efficient learning of deep networks from decentralized data," in *Proc. 20th Int. Conf. Artif. Intell. Statist.*, A. Singh and J. Zhu, Eds. vol. 54, 2017, pp. 1273–1282. [Online]. Available: https://proceedings.mlr.press/v54/mcmahan17a.html

[88] L. Condat, "A primal–dual splitting method for convex optimization involving lipschitzian, proximable and linear composite terms," *J. Optim. Theory Appl.*, vol. 158, no. 2, pp. 460–479, Aug. 2013, doi: 10.1007/s10957-012-0245-9.

[89] I. Goodfellow, Y. Bengio, and A. Courville, *Deep Learning*. Cambridge, MA, USA: MIT Press, 2016.

[90] M. P. Salinas et al., "A systematic review and meta-analysis of artificial intelligence versus clinicians for skin cancer diagnosis," *npj Digit. Med.*, vol. 7, no. 1, May 2024, Art. no. 125, doi: 10.1038/s41746-024-01103-x.

[91] G. F. Cooper, "The computational complexity of probabilistic inference using bayesian belief networks," *Artif. Intell.*, vol. 42, no. 2–3, pp. 393–405, Mar. 1990, doi: 10.1016/0004-3702(90)90060-D.

[92] I. Csiszar, "Generalized cutoff rates and Renyi's information measures," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 41, no. 1, pp. 26–34, Jan. 1995, doi: 10.1109/18.370121.

[93] M. J. Wainwright, *High-Dimensional Statistics: A Non-Asymptotic Viewpoint*. Cambridge, U.K.: Cambridge Univ. Press, 2019.

[94] P. Bühlmann and S. van de Geer, *Statistics for High-Dimensional Data: Methods, Theory and Applications*. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 2011.

[95] S. Bubeck, "Convex optimization: Algorithms and complexity," *Found. Trends Mach. Learn.*, vol. 8, no. 3–4, pp. 231–357, Nov. 2015, 10.1561/2200000050.

[96] L. Bottou, "On-line learning and stochastic approximations," in *On-Line Learning in Neural Networks*, D. Saad, Ed. New York, NY, USA: Cambridge Univ. Press, 1999, ch. 2, pp. 9–42.

[97] D. P. Bertsekas, A. Nedic, and A. E. Ozdaglar, *Convex Analysis and Optimization*. Belmont, MA, USA: Athena Scientific, 2003.

[98] D. P. Bertsekas, *Nonlinear Programming*, 2nd ed. Belmont, MA, USA: Athena Scientific, 1999.

[99] N. Cristianini and J. Shawe-Taylor, *An Introduction to Support Vector Machines and Other Kernel-based Learning Methods*. New York, NY, USA: Cambridge Univ. Press, 2000.

[100] R. Caruana, "Multitask learning," *Mach. Learn.*, vol. 28, pp. 41–75, Jul. 1997, doi: 10.1023/A:1007379606734.

[101] A. Jung, G. Hannak, and N. Goertz, "Graphical lasso based model selection for time series," *IEEE Signal Process. Lett.*, vol. 22, no. 10, pp. 1781–1785, Oct. 2015, doi: 10.1109/LSP.2015.2425434.

[102] A. Jung, "Learning the conditional independence structure of stationary time series: A multitask learning approach," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 63, no. 21, Nov. 2015, doi: 10.1109/TSP.2015.2460219.

[103] High-Level Expert Group on Artificial Intelligence, "Ethics guidelines for trustworthy AI," European Commission, Apr. 8, 2019. [Online]. Available: https://digital-strategy.ec.europa.eu/en/library/ethics-guidelines-trustworthy-ai

[104] C. Gallese, "The AI act proposal: A new right to technical interpretability?," *SSRN Electron. J.*, Feb. 2023. [Online]. Available: https://ssrn.com/abstract=4398206

[105] M. Mitchell et al., "Model cards for model reporting," in *Proc. Conf. Fairness, Accountability, Transparency*, 2019, pp. 220–229, doi: 10.1145/3287560.3287596.

[106] K. Shahriari and M. Shahriari, "IEEE standard review — Ethically aligned design: A vision for prioritizing human wellbeing with artificial intelligence and autonomous systems," in *2017 IEEE Canada Int. Humanitarian Technol. Conf.*, pp. 197–201, doi: 10.1109/IHTC.2017.8058187.

[107] P. J. Brockwell and R. A. Davis, *Time Series: Theory and Methods*, 2nd ed. New York, NY, USA: Springer-Verlag, 1991.

[108] M. Kearns and M. Li, "Learning in the presence of malicious errors," *SIAM J. Comput.*, vol. 22, no. 4, pp. 807–837, Aug. 1993, doi: 10.1137/0222052.

[109] G. Lugosi and S. Mendelson, "Robust multivariate mean estimation: The optimality of trimmed mean," *Ann. Statist.*, vol. 49, no. 1, pp. 393–410, Feb. 2021, doi: 10.1214/20-AOS1961.

[110] C. E. Rasmussen and C. K. I. Williams, *Gaussian Processes for Machine Learning*. Cambridge, MA, USA: MIT Press, 2006.