



ECOLE
POLYTECHNIQUE
DE BRUXELLES

UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES

SYNTHÈSE

Physique des lasers

PHYS-H-410

Auteur :
Nicolas ENGLEBERT

Professeur :
Simon-Pierre GORZA

Année 2016 - 2017

Appel à contribution

Synthèse Open Source



Ce document est grandement inspiré de l'excellent cours donné par Simon-Pierre GORZA à l'EPB (École Polytechnique de Bruxelles), faculté de l'ULB (Université Libre de Bruxelles). Il est écrit par les auteurs susnommés avec l'aide de tous les autres étudiants et votre aide est la bienvenue ! En effet, il y a toujours moyen de l'améliorer

surtout que si le cours change, la synthèse doit être changée en conséquence. On peut retrouver le code source à l'adresse suivante

<https://github.com/nenglebert/Syntheses>

Pour contribuer à cette synthèse, il vous suffira de créer un compte sur *Github.com*. De légères modifications (petites coquilles, orthographe, ...) peuvent directement être faites sur le site ! Vous avez vu une petite faute ? Si oui, la corriger de cette façon ne prendra que quelques secondes, une bonne raison de le faire !

Pour de plus longues modifications, il est intéressant de disposer des fichiers : il vous faudra pour cela installer \LaTeX , mais aussi *git*. Si cela pose problème, nous sommes évidemment ouverts à des contributeurs envoyant leur changement par mail ou n'importe quel autre moyen.

Le lien donné ci-dessus contient aussi un README contenant de plus amples informations, vous êtes invités à le lire si vous voulez faire avancer ce projet !

Licence Creative Commons

Le contenu de ce document est sous la licence Creative Commons : *Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International (CC BY-NC-SA 4.0)*. Celle-ci vous autorise à l'exploiter pleinement, compte- tenu de trois choses :



1. *Attribution* ; si vous utilisez/modifiez ce document vous devez signaler le(s) nom(s) de(s) auteur(s).
2. *Non Commercial* ; interdiction de tirer un profit commercial de l'œuvre sans autorisation de l'auteur
3. *Share alike* ; partage de l'œuvre, avec obligation de rediffuser selon la même licence ou une licence similaire

Si vous voulez en savoir plus sur cette licence :

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Merci !

Table des matières

I	Partie S-P. Gorza	1
1	Introduction	2
1.1	Principe des lasers	2
1.2	Caractéristiques des sources lasers	4
1.2.1	Cohérence temporelle	5
1.2.2	Cohérence spatiale	5
2	Interactions lumière-matière	7
2.1	Propagation d'onde EM dans un milieu diélectrique	7
2.1.1	Approche "particulaire"	7
2.1.2	Modèle de l'oscillateur harmonique	9
2.2	Particule de lumière	12
2.2.1	Équations de Maxwell : onde électromagnétique	12
2.2.2	Lumière : un ensemble de photons	12
2.2.3	Description simplifiée de la quantification des champs EM	12
2.2.4	Flux de photon \mathcal{J} et densité n_p	13
2.3	Cavité radiative	14
2.3.1	Spectre de la cavité radiative	15
2.4	Interactions dans un milieu à deux niveaux atomiques	17
2.4.1	Coefficients d'Einstein	17
2.4.2	Lien avec le temps de vie spontané	18
2.4.3	Gain optique et forme de raie	18
2.4.4	Fonction forme de raie et mécanismes d'élargissement	20
3	Théorie semi-classique des laser	26
3.1	Équations de Maxwell-Bloch du laser	26
3.1.1	Équations du champ électromagnétique dans la cavité	26
3.1.2	Équation de Bloch du milieu	29
3.2	État stationnaire d'un laser	33
3.2.1	Intensité laser et inversion de population	34
3.2.2	Susceptibilité électrique et gain	35
3.2.3	Fréquence du champ laser	36
4	Équations de bilan du laser et du mécanisme de pompe	39
4.1	Équation de bilan du laser et équations de Maxwell-Bloch	39
4.2	Systèmes à deux niveaux	40
4.3	Laser à trois niveaux d'énergie	42
4.4	Laser à quatre niveaux d'énergie	44
4.5	Rendement laser	46

5	Diodes lasers à semi-conducteurs	49
5.1	Propriétés électroniques des semi-conducteurs	49
5.1.1	Modèle de l'électron libre	49
5.1.2	Modèle de l'électron quasi-libre	50
5.1.3	Densité électronique d'états ρ_e	53
5.1.4	Probabilité d'occupation et densité de porteurs	54
5.2	Transitions radiatives électroniques	56
5.2.1	Taux d'absorption et de transmission (semi-conducteurs à gap direct) . .	56
5.2.2	Absorption dans les semi-conducteurs à gap direct	59
5.2.3	Saturation de l'absorption	60
5.2.4	Gain optique	62
5.3	Transition électroniques non radiatives	64
5.3.1	Recombinaisons en surface et par défauts	64
5.3.2	Recombinaisons d'Auger	64
5.4	Matériaux et structures pour les diodes lasers	65
5.4.1	Taux de recombinaison total	65
5.4.2	Longueur d'onde d'émission	66
5.4.3	Structures des diodes laser	67
5.5	Modèle simple des lasers à semi-conducteurs	70
5.5.1	Équation de bilan d'une diode laser	70
5.5.2	Puissance laser et rendement	73
5.5.3	Propriétés spectrales des diodes lasers	75

Première partie

Partie S-P. Gorza

Chapitre 1

Introduction

1.1 Principe des lasers

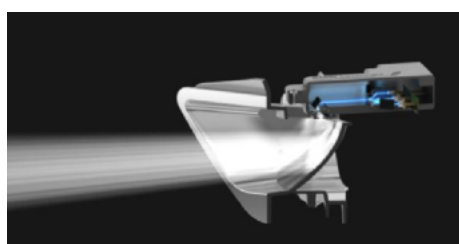


FIGURE 1.1

Avant d'en venir au principe des lasers, demandons-nous ce qu'est un laser, et qu'est-ce qu'une "lumière laser"? Le "phare laser" utilisé dans les Audi est-il une émission laser? En réalité non car la lumière est non monochromatique et non cohérente : l'appellation vient du fait que ce phare utilise un laser bleu pour pomper, la conversion optique/électrique étant importante.

Un **laser** est un *oscillateur optique faisant recours à l'émission stimulée*. Afin de clarifier la notion d'oscillateur, voici un exemple d'oscillateur acoustique avec l'effet Larsen. L'effet Larsen est une oscillation acoustique auto-entretenue dans une boucle constituée d'un microphone et d'un haut-parleur. Si le microphone est trop près du haut-parleur, une partie va être captée et amplifiée (seulement les fréquences de 20 à 20 kHz) via la rétroaction.

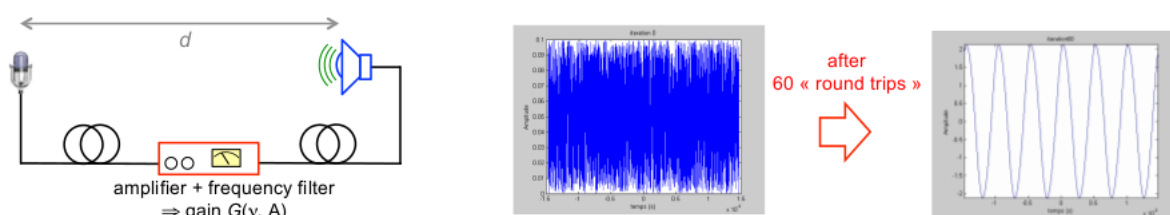


FIGURE 1.2

En modélisant numériquement le système et en lui fournissant un bruit en entrée, après une soixantaine de passages dans la boucle on observe un signal sinusoïdal : c'est le sens strident entendu. Ceci n'est possible que si il y a amplification, le "bruit" ayant une faible amplitude.

Essayons de modéliser une telle boucle. Si le gain sur une boucle est supérieur aux pertes, nous aurons bien une amplification même si les perturbations sont petites. Cependant, le gain ne peut pas augmenter de façon infinie. On modélise cette **saturation**

$$G = \frac{G_0}{1 + \frac{A}{A_S}} \quad (1.1)$$

où A_0 est le gain à petit signaux. Limiter le gain n'est pas suffisant : il faut que le système se stabilise vers un état stationnaire. Imaginons qu'à un moment, le microphone capte une onde acoustique monofréquence :

$$\delta P_n = A \cos(2\pi\nu t) \quad (1.2)$$

Après un premier tour dans la boucle, on obtient

$$\delta P_{n+1} = A \cos(2\pi\nu t + \delta\varphi) G(\nu) \alpha(\nu, d) \quad (1.3)$$

où l'on a pris un certain déphasage qui peut s'exprimer

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi d}{\lambda} + \phi_{elec} \quad (1.4)$$

où ϕ_{elec} est le déphasage induit par l'amplificateur et où $\lambda_0\nu_0 = c$. Ce déphasage est multiplié par un gain G mais nous avons aussi une certaine atténuation par propagation (seule une petite partie est captée par le microphone).

Nous serons en condition stationnaire à la fréquence ν_0 lorsque

$$\delta P_n = \delta P_{n+1} \quad (1.5)$$

Ceci n'est possible que si les gains sont équivalents aux pertes et si le déphasage est un multiple de 2π .

$$\begin{cases} \text{Amplitude} & : G(\nu_0)\alpha(\nu_0, d) & = 1 \\ \text{Phase} & : \Delta\varphi & = m2\pi \\ & : (m - \phi_{elec}/2\pi)\lambda_0 & = d \end{cases} \quad (1.6)$$

Un laser en régime sera dans une telle situation. Mais pour avoir un laser, il faut un gain et une rétroaction positive. Pour avoir du *feedback* en acoustique, on utilise un microphone. En optique, nous l'obtiendrons à l'aide de miroirs formant une cavité optique (*résonateur*). Deux d'entre eux sont largement répandus : la cavité linéaire de Fabry-Perot et la cavité circulaire

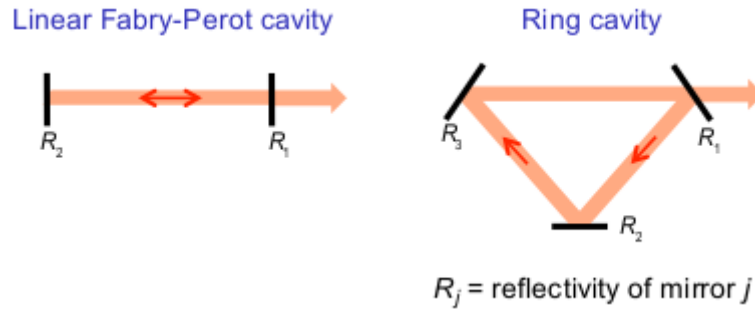


FIGURE 1.3

Avec un Fabry-Perot, on peut placer un milieu à gain pour avoir un effet de rétroaction. De façon générale, Fabry-Perot désigne un résonateur où la lumière fait des allers-retours.

La *condition de résonance* s'énonce

$$kL = \frac{2\pi}{\lambda}L = m2\pi \quad \Leftrightarrow \quad \nu = l \frac{c}{L} \quad (1.7)$$

où L est la longueur de la cavité¹ Dans un laser, seulement quelques fréquences optiques peuvent en sortir : ce sont celles qui satisfont cette condition. Ils portent le nom de *modes*. Ainsi, cette condition établit la fréquence des modes longitudinaux dans le résonateur optique. Notons que pour être dans le visible, les ordres doivent être très élevés.

1. Prendre le double de la longueur entre deux miroirs pour un Fabry-Perot.

Une cavité n'est pas suffisante pour avoir un laser, il faut aussi un gain optique. En effet, 'Laser' est l'acronyme de **l**ight **a**mplification by **s**timulated **e**mission **r**adiation. Or, il manque quelque chose dans cet acronyme; l'émission stimulée, postulée par Einstein. Si les atomes peuvent capturer de la lumière, ils peuvent également en émettre. Dès lors, si l'énergie d'un photon est proche de la différence entre deux niveaux d'énergie (E_1 et E_2), il est émis un photon indistinguishable du photon incident (même fréquence, même direction, même état de polarisation et phase identique).

En pratique, on utilise un milieu à gain : un paquet d'atomes excité dans l'état E_2 grâce à un mécanisme de pompage.

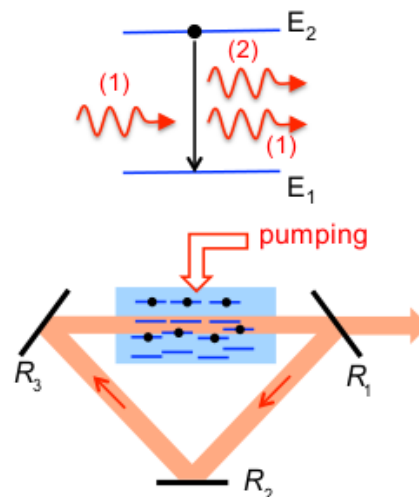


FIGURE 1.4

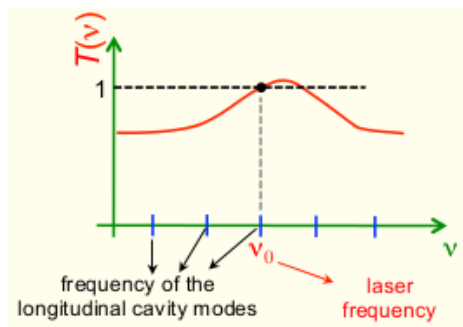


FIGURE 1.5

Considérons le produit pertes-gain

$$T(\nu) = R_1 R_2 R_3 \exp(-\alpha_i L) \exp(\mathcal{G}d) = 1 \quad (1.8)$$

où d est la longueur du milieu à gain, α_i les pertes internes (diffusion d'un laser dans l'eau, ...), R_i les coefficients de réflectivité et \mathcal{G} le gain.

Si $T(\nu) > 1$, il y a plus de gain que de perte : amplification du gain dans la cavité. L'intensité va augmenter mais le gain diminuer (saturation) de sorte à évoluer vers le cas stationnaire.

Cependant, il faut que l'effet laser démarre : ceci sera possible grâce à l'émission spontanée. Ce principe est très général mais est applicable à tous lasers. La diversité de lasers est donc très importante :

Taille du laser : quelques micromètres à des centaines de kilomètres

Milieu à gain : gaz, ions, semi-conducteurs, ...

Pompage : pompage laser (on utilise un laser pour exciter les atomes du milieu à gain le temps qu'un photon arrive pour provoquer une émission), électrique (énergie des électrons), ...

1.2 Caractéristiques des sources lasers

Une source laser n'est certainement pas équivalente à une source thermique. On retrouve pour les sources laser :

- Quasi-monochromatique²
- Grande directivité

Ces deux caractéristiques se cachent sous le nom de *cohérence spatiale et temporelle*.

2. Pas nécessairement monochromatique, mais dépasse le cadre du cours.

1.2.1 Cohérence temporelle

Soit $\cos(\omega t)$. Si après certains temps on ne peut plus prédire la phase de l'onde, la lumière n'est plus *temporellement cohérente*. Si on observe des sauts de phase, elle sera dite *partiellement cohérente*. La cohérence temporelle est donc l'intervalle temporel dans lequel on peut prédire la phase.

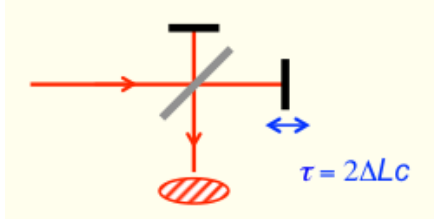


FIGURE 1.6

Si les deux bras d'un interféromètre n'ont pas la même longueur, un délai temporel va apparaître et il est possible d'observer des franges d'interférences. Mais plus on éloigne le miroir, plus cette visibilité diminue jusqu'à ce que l'on observe plus rien³. Ceci est la longueur de cohérence L_C , liée par la relation

$$\tau_c = L_C c \quad (1.9)$$

Il existe un lien entre τ_c et la largeur spectrale de la source :

$$\delta\nu \approx \frac{1}{\tau_c} \quad (1.10)$$

Pour le soleil $\Delta\nu = 4 * 10^{14} \text{ Hz} \rightarrow \tau_c = 2.5 \text{ fs}, L_c = 0.7 \text{ }\mu\text{m}$. Pour l'émission d'une raie Néon à 633 nm, on trouve une longueur de cohérence de 2 cm. Ces deux longueurs sont trop court pour des applications comme de l'interférométrie. Par contre, à l'aide d'un laser qui possède une largeur spectrale de $\Delta\nu = 500 \text{ Hz}$, on trouve $L_c = 600 \text{ km}$ ce qui est beaucoup plus intéressant !

1.2.2 Cohérence spatiale

Nous regardons cette fois-ci dans l'espace. Connaissant le champ à un endroit, sommes-nous capable de le prédire à un autre ? Considérons une source composée de points sources indépendants les uns des autres et plaçons un plan Σ possédant deux trous à une distance D de la source. Plaçons ensuite un écran Σ_0 comme le suggère l'image ci-dessous

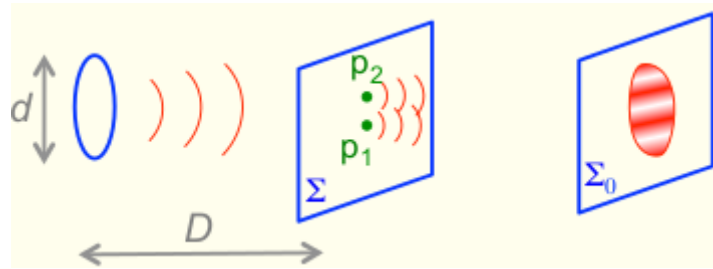


FIGURE 1.7

3. Ceci est du à un défilement trop rapide des franges d'interférences.

Si les franges sur Σ_0 sont fixes, c'est que la phase est constante : si ce n'est pas le cas, les franges défilent et les points p_1 et p_2 seront dit incohérent l'un par rapport à l'autre. Il est possible de démontrer que les franges sont visibles sur Σ_0 si

$$\nu = 2 \left| \frac{J_1 \left(\frac{\pi \Delta x d}{\bar{\lambda} D} \right)}{\left(\frac{\pi \Delta x d}{\bar{\lambda} D} \right)} \right| \quad (1.11)$$

où J_1 est la fonction de Bessel, $\overline{p_1 p_2} = \Delta x$ et $\bar{\lambda}$ est la longueur d'onde moyenne.

Si à $D = 1m$ et $|p_1 - p_2| < 30 \mu m$ on verra les franges de Young : ce n'est pas très cohérent. Par contre en grossissant la sortie d'un laser on peut avoir deux mètres d'écart pour Δx ce qui est bien mieux.

Application

La fin du chapitre illustre les différentes applications que l'on peut trouver avec des lasers.

Chapitre 2

Interactions lumière-matière

Ce modèle est loin de la réalité mais "correct" en pratique. Il est donc intéressant pour développer une certaine intuition du problème.

2.1 Propagation d'onde EM dans un milieu diélectrique

2.1.1 Approche "particulaire"

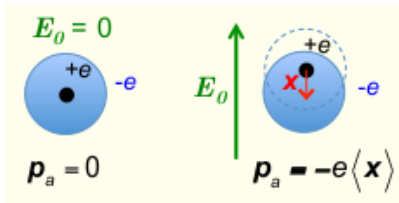


FIGURE 2.1

Si la lumière se propage dans un milieu non vide, il y aura des interactions : comment on pourrait décrire ces interactions et d'où elles viennent ? Lorsque l'on applique un champ électrique \vec{E} à un système de charges, elles ont la possibilité de bouger : le nuage électronique se déforme et il apparaît un moment dipolaire électrique

$$\vec{p}_a = - \int e|\psi|^2 \vec{r} d\vec{r} \quad (2.1)$$

où $-e|\psi|^2 d\vec{r}$ est l'élément de charge à la position \vec{r} donnant lieu à une intégrale non nulle¹. Dans un milieu contenant N atome par unité de volume, la polarisation (macroscopique) est donnée par

$$\vec{P} = N\vec{p}_a \quad (2.2)$$

soit la densité atomique multiplié par le moment dipolaire de chaque atome (on suppose que tous les dipôles sont orientés dans le même sens).

Pour illustrer, penchons-nous sur le cas du condensateur en prenant l'hypothèse d'un milieu linéaire et isotrope (sans quoi la susceptibilité χ serait un tenseur). Dans ce cas, la polarisation va être proportionnelle à l'amplitude du champ total $E = E_0 + E'_0$ où E_0 est le champ initial et E'_0 le champ induit.

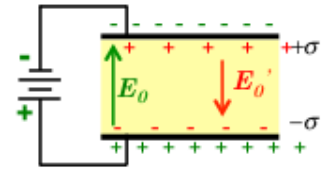


FIGURE 2.2 (2.3)

$$\begin{cases} \vec{E}'_0 &= -\vec{P}/\epsilon_0 \\ \vec{E} &= \vec{E}_0 - \vec{P}/\epsilon_0 \end{cases} \Rightarrow \vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$$

où χ est la **susceptibilité électrique**.

Calculons la divergence de ce champ électrique total

$$\nabla \cdot \vec{E} = \nabla \cdot (\vec{E}_0 - \vec{P}/\epsilon_0) \Leftrightarrow \nabla \cdot (\vec{E} + \vec{P}/\epsilon_0) = \nabla \cdot (\vec{E}_0) \quad (2.4)$$

1. Si cette intégrale est nulle lorsque $\vec{E} = \vec{0}$, c'est dû au fait que la fonction d'onde est antisymétrique.

Dans le vide $\nabla \cdot (\vec{E}_0) = \rho_{libre}/\epsilon_0$. Pour tenir compte de l'apparition des dipôles, on introduit un **champ de déplacement** \vec{D} de sorte à pouvoir écrire une formule de divergence "classique". Par définition

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0(1 + \chi) \vec{E} = \epsilon \vec{E} \quad (2.5)$$

où $\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0 = (1 + \chi)$. On peut alors écrire

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_{libre} \quad (2.6)$$

En toute généralité, cette susceptibilité χ sera complexe : absorption, gain, ... en découleront. En toute généralité, le champ électrique peut varier dans le temps. On définit alors la **densité de courant** (densité d'électron * charge * variation de la position de cette charge) : \vec{J}

$$J_{liee} = -Ne \frac{d}{dt} \langle x \rangle \Leftrightarrow J_{liee} = N \frac{d}{dt} p_a = \frac{d}{dt} \vec{P} \quad (2.7)$$

Il y aura toujours un dipôle accompagné d'un moment dipolaire atomique mais cette fois-ci dépendant du temps.

Partons maintenant des équations de Maxwell et des équations constitutives. Considérons un milieu diélectrique ($\rho_{libre} = 0$) et non magnétique ($\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rôt } \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \\ \text{rôt } \vec{B} = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} \\ \nabla \cdot \vec{D} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{D} = \epsilon \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \\ \vec{B} = \mu_0 \vec{H} \end{array} \right. \quad (2.8)$$

En calculant le rotationnel du rotationnel du champ électrique², on trouve l'équation d'onde

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} = \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{P} \quad (2.9)$$

où $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ est la vitesse de la lumière dans le vide.

Trois cas sont particulièrement intéressants

1. Dans le vide : $\vec{P} = \vec{0}$ et on retrouve la solution harmonique, décrite par des ondes planes

$$\vec{E} = \frac{1}{2} (\mathcal{E} \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) \vec{e} + c.c.) \quad (2.10)$$

où \vec{e} est le vecteur de polarisation. Pour que ce soit bien solutions des équations de Maxwell, il faut que $\vec{k} \cdot \vec{e} = 0$ (polarisation transverse) et $|\vec{k}| = \omega/c = 2\pi/\lambda_0$.

2. Dans un diélectrique, la polarisation varie dans le temps : effets de réfractions, de perte et de gain

3. **Indice de réfraction complexe** \mathcal{N} .

Soit la solution harmonique et $\vec{k} = \mathcal{K} \cdot \vec{1}_z$. Jusqu'ici, nous avons toujours considéré que l'indice de réfraction n'était du qu'à des effets de phase.

Adoptons des notations en phaseurs

$$\vec{E} = \frac{1}{2} (\mathcal{E} \exp(i(\mathcal{K}z - \omega t)) \vec{e} + c.c.) = \frac{1}{2} (\hat{E} + c.c.), \quad \vec{P} = \frac{1}{2} (\hat{P} + c.c.) \quad (2.11)$$

2. $\text{rôt} \text{rôt} = \nabla \cdot \nabla - \Delta$

où nous avons cette fois-ci autorisé \mathcal{K} à être complexe. En faisant de même pour $\hat{\vec{P}}$ (par identification) :

$$\hat{\vec{P}} = \varepsilon_0 \chi \hat{\vec{E}} = \varepsilon_0 (\chi' + i\chi'') \hat{\vec{E}} \quad (2.12)$$

Après substitution de ces équations dans l'équation de propagation (la dérivée en z fait apparaître un \mathcal{K}^2).

$$\mathcal{K}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} (1 + \chi' + i\chi'') \quad (2.13)$$

où l'on note $\mathcal{K} = k + i\alpha_E$ où α_E est le coefficient d'atténuation du champ électrique. Si l'on substitue cette nouvelle expression de \mathcal{K} dans l'expression de \vec{E} , on fait apparaître une exponentielle négative

$$\vec{E} = \mathcal{E} \exp(-\alpha_E z) \cos(kz - \omega t) \quad (2.14)$$

On définit le coefficient d'absorption en énergie $\alpha = 2\alpha_E$. Si $\alpha > 0$ il s'agit d'un milieu à pertes (à gain, inversement).

Venons-en à ce qui nous intéresse ici : l'**indice de réfraction complexe** défini

$$\mathcal{N} = \eta + i\kappa \quad (2.15)$$

tel que $\mathcal{K} = \frac{\omega}{c} \mathcal{N}$. Le champ électrique établi ci-dessus devient alors

$$\vec{E} = \vec{\mathcal{E}} \exp\left[-\frac{\omega}{c} \kappa z\right] \cos\left(\frac{\omega}{c} \eta z - \omega t\right) \quad (2.16)$$

L'absorption vaut alors $\alpha = 2\frac{\omega}{c} \kappa$ et la vitesse de phase $v_\phi = \frac{\omega}{c} = \frac{c}{\eta} \rightarrow \lambda = \frac{\lambda_0}{\eta}$. En identifiant la partie réelle et imaginaire :

$$\begin{cases} \eta^2 - \kappa^2 &= 1 + \chi' \\ \eta\kappa &= \chi''/2 \end{cases} \quad (2.17)$$

Souvent on peut entendre que la partie réelle correspond à des effets de phase (\vec{k}) alors que la partie imaginaire correspond à des pertes/gain : ce n'est pas exact, les deux sont "mélangés". Cependant, si $\kappa \ll 1$

$$\begin{cases} \eta &\approx \sqrt{1 + \chi'} \\ \kappa &\approx \chi''/(2\sqrt{1 + \chi'}) \end{cases} \quad (2.18)$$

On remarque que η, κ dépendent de ω . On nomme alors **relation de dispersion** l'équation $\eta = f(\omega)$.

2.1.2 Modèle de l'oscillateur harmonique

Le souci est que nous ne connaissons pas les expressions de η, κ, χ' et χ'' , tous fonction de ω . On va utiliser un modèle qualitativement correct (mais assez loin de la réalité) pour les obtenir dans un milieu diélectrique isotrope (gaz, ions dans un solide, ...)

Considérons un électron élastiquement (constante de rappel k) lié à un noyau infiniment lourd sur lequel on applique $E(t)$. On introduit un terme de relaxation (damping) $m\gamma\dot{x}(t)$ si on veut

une description assez fidèle, le nuage électronique ne peut osciller infiniment³. Il faut donc perdre de l'énergie, ce qui est le rôle de ce terme. Nous obtenons alors

$$\ddot{x}(t) + \omega_a^2(t) + \gamma\dot{x}(t) = -\frac{eE(t)}{m} \quad (2.19)$$

où $\omega_a = \sqrt{k/m}$, $\frac{1}{\gamma}$ est le temps caractéristique de relaxation pour la polarisation \vec{P} et le membre de droite comporte le terme d'oscillation forcée. En utilisant les deux phaseurs

$$E(t) = \frac{\mathcal{E} \exp(-i\omega t) + c.c.}{2}, \quad x(t) = \frac{X \exp(-i\omega t) + c.c.}{2} \quad (2.20)$$

On trouve

$$(\omega_a^2 - \omega^2 - i\gamma\omega)X \exp(-i\omega t) + c.c. = \frac{e\mathcal{E}}{m} \exp(-i\omega t) + c.c. \quad (2.21)$$

Sachant que $\vec{P} = -eN\vec{x}(t) = \frac{\hat{P} + c.c.}{2}$ où $\hat{P} = \varepsilon_0\chi\hat{E}$, on trouve

$$\chi(\omega) = \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m} \frac{1}{\omega_a^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \quad (2.22)$$

Comme χ est complexe, il peut y avoir un déphasage entre l'excitation et la position du système masse-ressort. Les parties réelles et imaginaires valent alors

$$\chi'(\omega) = \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m} \frac{\omega_a^2 - \omega^2}{(\omega_a^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}, \quad \chi''(\omega) = \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m} \frac{\gamma\omega}{(\omega_a^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \quad (2.23)$$

Jusqu'ici, nous travaillons sans approximations mais ces résultats ne sont pas évidents à interpréter. Pour se faire, nous allons faire l'hypothèse que l'amortissement est lent. Dès lors, \vec{E} fait un grand nombre d'oscillation avant une atténuation totale du système masse-ressort

$$\omega_a^2 - \omega^2 = 2\omega_a(\omega_a - \omega) \quad (2.24)$$

Avec cette hypothèse, χ'' devient directement proportionnel à α et on le montrera. Il s'agit d'une *lorentzienne*

$$\chi''(\omega) = \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m \gamma \omega_a} \frac{1}{1 + \frac{(\omega_a - \omega)^2}{(\gamma/2)^2}} > 0 \quad (2.25)$$

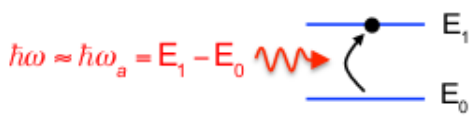


FIGURE 2.3

Cette fonction est positive $\forall \omega$, ce qui implique que α sera toujours positif ce qui correspond à de l'absorption : passage d'un niveau fondamental vers un état excité.

Pour $\chi'(\omega)$, on trouve

$$\chi'(\omega) = \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m \gamma \omega_a} \frac{(\omega_a - \omega)/(\gamma/2)}{1 + \frac{(\omega_a - \omega)^2}{(\gamma/2)^2}} \quad (2.26)$$

Ceci met en évidence une variation de l'indice de réfraction : c'est une relation de dispersion.

3. Une densité de charge liée bougeant agit comme une antenne : émission d'onde EM.

 K 

2.2 Particule de lumière

2.2.1 Équations de Maxwell : onde électromagnétique

Jusqu'ici nous avons utilisé une approche électromagnétique : passons cette fois-ci à une approche corpusculaire. Intéressons-nous à l'énergie (ce qui est quantifié). On s'intéresse à l'intensité (W/m^2) qui est liée au vecteur de Poyting $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ et on en prend la moyenne⁴

$$I = \langle |\vec{S}| \rangle = \langle |\vec{E} \times \vec{H}| \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 \eta \mathcal{E}^2 \quad (2.27)$$

La solution harmonique des équations de Maxwell étant

$$\vec{E} = \mathcal{E} \cos(kz - \omega t) \vec{e} \quad (2.28)$$

Nous remarquons qu'il n'y a aucune condition sur l'amplitude \mathcal{E} qui peut varier de façon continue : de même pour l'intensité. Toutes les énergies seraient alors possibles ce qui est faux expérimentalement (effet photoélectrique notamment).

2.2.2 Lumière : un ensemble de photons

Planck par l'étude du corps noir et Einstein avec l'effet photoélectrique ont proposés une quantification du champ électromagnétique : les quanta de lumières ont une énergie $\Delta E = \hbar \omega$.

2.2.3 Description simplifiée de la quantification des champs EM

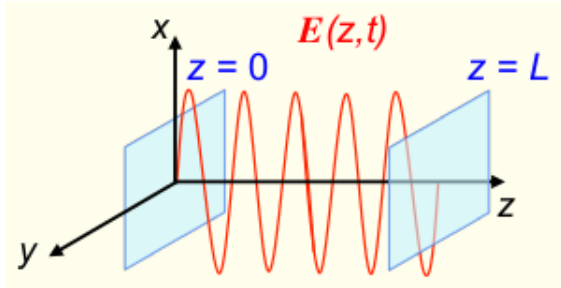


FIGURE 2.6

Supposons une cavité vide (pas de radiation, charge, milieu diélectrique), unidimensionnelle selon z formée de murs parfaitement conducteurs (un miroir parfait, rien ne sort de la cavité) en $z = 0, L$ où passe un champ \vec{E} polarisé selon x . Nous allons toujours appliquer les équations de Maxwell, mais avec ces conditions de cavité

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} E_x(z, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_x(z, t) = 0 \quad (2.29)$$

avec comme CL $E_x = 0$ en $z = 0, L$. La solution n'est rien d'autre que l'harmonique

$$E_x(z, t) = f_0 \sin(kz) q(t), \quad k = \frac{m\pi}{L}; \quad m = 1, 2, \dots \quad (2.30)$$

où E_x dépend de z et t , f_0 est l'amplitude multipliée par la variation spatiale et par une fonction non définie. C'est exactement ce que nous avons obtenu (et heureusement, nous décrivons la même chose). On en tire facilement le champ magnétique

$$B_y(z, t) = \frac{\mu_0 \epsilon_0}{k} f_0 \cos(kz) \dot{q} \quad (2.31)$$

où $\dot{q} = \frac{dq}{dt}$. Ces deux équations, pour m fixé, forment un **mode de cavité** pour le champ électromagnétique de fréquence angulaire $\omega = m\pi c/L$.

4. Un flux d'énergie oscillant n'a pas de sens.

Intéressons-nous à l'énergie totale d'un mode : il s'agit de la densité d'énergie du champ magnétique et du champ électrique.

$$H = \int \left[\frac{1}{2} \varepsilon_0 E_x^2 + \frac{1}{2\mu_0} B_y^2 \right] dV \quad (2.32)$$

Sachant que V est le volume effectif de la cavité, on trouve

$$H = \frac{1}{4} f_0^2 \varepsilon_0 V \left[\frac{\varepsilon_0 \mu_0}{k^2} \dot{q}^2 \right] \quad (2.33)$$

Pour simplifier, on considère la constante de normalisation $f_0 = \left(\frac{2\omega^2}{\varepsilon_0 V} \right)^2$:

$$H = \frac{1}{2} (p^2 + \omega^2 q^2) \quad (2.34)$$

Ce qui n'est rien d'autre que l'Hamiltonien de l'oscillateur harmonique où q est la position de la masse et où la force de rappel est $F = -\omega^2 q$ (et $p = \dot{q}$). Par analogie, un mode de champ électromagnétique est équivalent à un oscillateur harmonique qui aurait une masse unitaire et où les champs \vec{E} et \vec{B} jouent le même rôle que la position et le moment. L'idée venant naturellement est alors d'essayer de quantifier cette O.H. en utilisant le principe de correspondance $p \rightarrow \hat{p}, q \rightarrow \hat{q}$ tel que $\hat{p} = -i\hbar\nabla$.

Passons donc en mécanique quantique sans se soucier que H est l'énergie d'un cas classique. L'équation de Schrödinger indépendante du temps s'écrit

$$\left(\frac{\hbar^2}{2} \frac{d}{dq^2} + \frac{\omega^2}{2} q^2 \right) \phi(q) = E \phi(q) \quad (2.35)$$

On trouve comme énergie quantifiée

$$E_n = \left(n_p + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega \quad (2.36)$$

où on va interpréter n_p comme le nombre de photons contenus dans la cavité considérée. On nomme E_0 les *fluctuations du vide* qui peuvent être utiles mais pas ici : comme nous allons sommer une infinité de modes, on obtiendrait une énergie infinie. On n'en tiendra donc pas compte.

Nous n'avons pas défini $q(t)$: il s'agit d'une fonction évoluant au cours du temps : celle-ci donnera l'amplitude du champ. L'énergie contenue dans le champ est ainsi proportionnelle au carré de l'amplitude de ce champ ce qui n'est rien d'autre que le cas classique où chaque oscillateur est défini par ω, \vec{k} .

$$\langle q \rangle = \langle \phi | q | \phi \rangle = 0, \quad \langle q^2 \rangle \propto E_n \quad (2.37)$$

2.2.4 Flux de photon \mathcal{J} et densité n_p

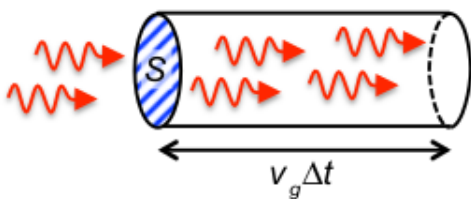


FIGURE 2.7

Nous allons suivre la démarche de Planck, à savoir tenter de quantifier le corps noir. Supposons que les photons soient monochromatiques et qu'ils se déplacent à la vitesse de groupe

$$v_g = \frac{c}{n_g} = \left(\frac{\partial k}{\partial \omega} \right)^{-1} \quad (2.38)$$

Il est dès lors utile de s'intéresser au flux du photon car l'intensité peut facilement s'en déduire : l'intensité est donnée par le produit de l'énergie d'un photon par le flux photonique. La valeur moyenne du vecteur de Poynting donne l'intensité⁵

$$\langle |\vec{S}| \rangle = \mathcal{J} \hbar \omega = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c \eta \mathcal{E}^2 = I \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{J} = \frac{\eta \varepsilon_0 c}{2 \hbar \omega} \mathcal{E}^2 \quad (2.39)$$

où \mathcal{J} est le **flux de photon** [$m^{-2}.s^{-1}$]. On a donc un lien direct entre le flux de photon et le module carré de l'amplitude du champ. A l'aide du schéma ci-dessus, nous pouvons montrer que la **densité de photon** [m^{-3}] vaut

$$\mathcal{J} S \Delta t = n_p S v_G \Delta t \quad \Leftrightarrow \quad n_p = \frac{\mathcal{J}}{v_g} = \frac{\eta n_g \varepsilon_0}{2 \hbar \omega} \mathcal{E}^2 \quad (2.40)$$

ce qui n'est **pas** n_p (nombre de photons).

2.3 Cavité radiative

Le but est d'obtenir la densité d'énergie par unité de fréquence d'un corps noir. Ce que l'on va faire pour y parvenir, c'est faire un tout petit trou en supposant que l'équilibre thermique n'est pas perturbé, et observer ce qui sort. Planck a ainsi trouvé que la probabilité de trouver un mode à une certaine énergie donnée est donnée par la loi de Boltzmann.

La probabilité p_{n_p} qu'un mode (oscillateur) soit dans l'état n_p est donnée par

$$p_{n_p} = \frac{\exp(-E_{n_p}/k_B T)}{\sum_{n_p=0}^{\infty} \exp(-E_{n_p}/k_B T)} \quad (2.41)$$

où la division par la série permet la normalisation et où $E_{n_p} = (n_p + 1/2) \hbar \omega$. Après substitution

$$p_{n_p} = \frac{\exp(-n_p \hbar \omega / k_B T)}{\sum_{n_p=0}^{\infty} \exp(-n_p \hbar \omega / k_B T)} \quad (2.42)$$

Le nombre moyen de photon est donnée par l'espérance mathématique. En adoptant la notation

$$\langle n_p \rangle = \sum_{n_p=0}^{\infty} n_p p_{n_p}, \quad x = \frac{\hbar \omega}{k_B T} \quad (2.43)$$

On trouve

$$\langle n_p \rangle = \frac{\sum_{n_p=0}^{\infty} n_p \exp(-n_p \hbar \omega / k_B T)}{\sum_{n_p=0}^{\infty} \exp(-n_p \hbar \omega / k_B T)} \quad (2.44)$$

Le résultat (numérique et graphique) après résolution des séries est donné ci-dessous.

5. Pq $\mathcal{J} \hbar \omega$?

Average number of photons in the mode

$$\langle n_p \rangle = \frac{1}{\exp(\hbar\omega / k_B T) - 1}$$

Average energy of the mode

$$\langle E \rangle = \frac{\hbar\omega}{\exp(\hbar\omega / k_B T) - 1}$$

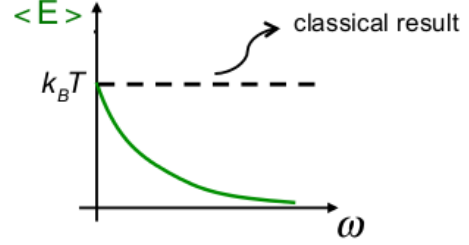
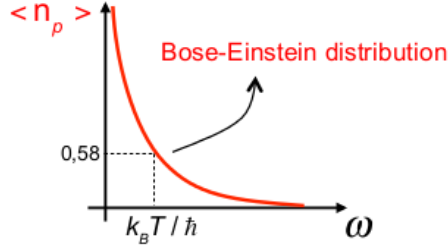


FIGURE 2.8

Le nombre moyen de photons dans un mode est donné par la distribution de Bose-Einstein : sa multiplication par $\hbar\omega$ donne l'énergie moyenne du mode. Il s'agit d'une fonction décroissante tendant vers $k_B T$ lorsque $\omega \rightarrow 0$.

Si l'on effectue le calcul, à température ambiante, il y a à peu près e^{-100} photons visible : ceci est cohérent avec le fait que la lumière ne rayonne pas. Dans un cadre classique, Rayleigh-Jeans avaient obtenu (variation continue d'énergie)

$$\langle E \rangle = \frac{\int_0^\infty E e^{-E/k_B T} dE}{\int_0^\infty e^{-E/k_B T} dE} = k_B T \quad (2.45)$$

Ceci est vrai à faible fréquences, mais totalement faux à hautes fréquences.

2.3.1 Spectre de la cavité radiative

Connaître l'énergie dans un mode n'est que peu intéressant si l'on ne sait pas combien il y a de mode par unité de fréquence. On va émettre l'hypothèse que le spectre de la radiation du corps noir est proportionnel à la **densité spectrale d'énergie** $u(\omega)$ dans la cavité. On va utiliser

$$u(\omega) d\omega \quad (2.46)$$

Il s'agit de la multiplication entre l'énergie moyenne dans un mode par la densité spectrale⁶ en énergie, soit le nombre de mode par unité de volume dans un intervalle $[\omega, \omega + d\omega]$. Dès lors

$$u(\omega) d\omega = \langle E \rangle \rho(\omega) d\omega \quad (2.47)$$

où $\rho(\omega)$ est la densité spectrales des mode dans le champ EM. Intéressons-nous aux nombres de mode par unité de fréquence par unité de volume $\rho(\omega)$ d'une cavité rectangulaire de volume $V = L_1 L_2 L_3$ (on va montrer que c'est indépendant de la géométrie) composée de murs parfaitement conducteurs et à l'équilibre thermique à la température T .

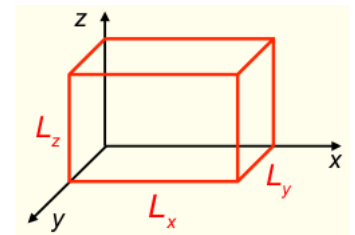


FIGURE 2.9

6. "Combien j'ai de mode par unité de volume par fréquence ω "

Le slide 19 donne la résolution (par séparation de variable) de ce problèmes aux limites. Si l'on fixe l, m et n le vecteur d'onde est fixé : il y aura deux solutions possibles correspondant à deux polarisations orthogonales.

$$k_x = \frac{l\pi}{L_x}, \quad k_y = \frac{m\pi}{L_y}, \quad k_z = \frac{n\pi}{L_z} \quad (2.48)$$

où $l, m, n = 0, 1, 2, \dots$. Nous pouvons maintenant calculer le nombre de mode présent dans l'intervalle de fréquences $[\omega, \omega + d\omega]$: ce calcul est plus simple dans l'espace réciproque car une cellule de cette espace à les dimensions $\pi/L_x, \pi/L_y, \pi/L_z$. En notant ce nombre de mode N_k , on trouve

$$N_k = 2 \frac{1}{8} \frac{4\pi k^2 dk}{\frac{\pi}{L_x} \frac{\pi}{L_y} \frac{\pi}{L_z}} = \frac{k^2 dk}{\pi^2} V \quad (2.49)$$

où nous avons deux états de polarisation, le facteur $1/8$ correspond au huitième de sphère et où l'on a divisé le volume de la calotte sphérique par le volume d'une cellule élémentaire. Sachant que $k^2 = \omega^2/c^2 \rightarrow k dk = \omega d\omega/c^2$

$$\frac{N_\omega}{V} = \rho(\omega) d\omega = \frac{\omega}{c} \frac{\omega d\omega}{\pi^2 c^2} \quad (2.50)$$

où nous avons divisé par le volume, voulant une densité. Après intégration, on trouve la densité spectrale de mode

$$\rho(\omega) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \quad (2.51)$$

En multipliant par l'énergie moyenne (espérance mathématique), on trouve la **loi de radiation de Planck**

$$u(\omega) = \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{\hbar \omega / k_B T} - 1} \quad (2.52)$$

Cette expression est en excellent accord avec l'expérience, impliquant une quantification du champ EM. Cette loi n'est strictement valable que pour une cavité fermée en équilibre thermique. Cependant, elle décrit bien les radiations de sources thermiques non nécessairement à l'équilibre thermique, comme le soleil. Si la cavité n'est pas vide (diélectrique) il suffit de remplacer c par c/η . La généralisation est immédiate

$$u(\omega) = \frac{\hbar \omega^3 \eta^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{\hbar \omega / k_B T} - 1} \quad (2.53)$$

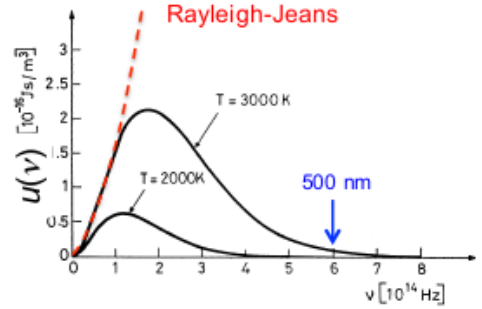


FIGURE 2.10

Il est possible d'obtenir une telle courbe pour le spectre du soleil. Le seul paramètre libre étant la température, il a été possible de mesurer la température du soleil sans devoir y tremper son doigt. Si l'on regarde la courbe de radiation du corps noir à $T = 2.726 K$ on se rend compte que la courbe ne peut pas plus coller les prédictions expérimentales.

2.4 Interactions dans un milieu à deux niveaux atomiques

2.4.1 Coefficients d'Einstein

Nous allons maintenant considérer le point de vue d'A. Einstein et ses coefficients. Soit un système atomique avec seulement deux niveaux d'énergies E_1 et E_2 et soit N_1, N_2 le nombre d'atome par unité de volume dans chacun de ces niveaux.

Il existe plusieurs interactions possibles entre ce système et un champ électromagnétique : nous allons commencer par supposer que tout photon que l'on trouve dans ce système possède une énergie proche de l'écart énergétique entre les deux niveaux : $\hbar\omega_a = E_2 - E_1$ où ω_a est la fréquence de Bohr de la transition. On suppose également que le champ EM a une densité spectrale de radiation $\omega_a : u(\omega_a)$.

Notons que $u(\omega_a)$ ne vaut pas forcément celle que nous venons d'obtenir pour le corps noir. Pour un laser, nous aurions

$$u(\omega_a) = \delta(\omega - \omega_a) \hbar \omega n_p \quad (2.54)$$

où n_p est la densité de photon. Trois interactions sont possibles

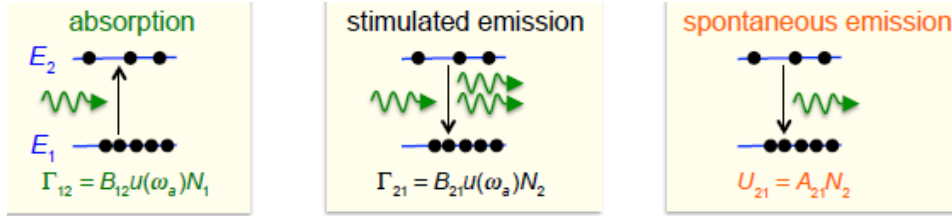


FIGURE 2.11

où $\Gamma_{12}(\Gamma_{21})$ est le taux d'absorption (d'émission stimulée) par unité de volume ($s^{-1}.m^{-3}$), U_{21} est le taux d'émission spontanée par unité de volume et A_{ij}, B_{ij} sont les coefficients d'Einstein.

On peut alors se demander que vaut Γ_{21} pour un photon/mode à ω_a . La seule inconnue est $u(\omega_a)$ qui est une énergie par unité de fréquence par unité de volume

$$u(\omega_a) = 1 * \hbar \omega_a * \left(\frac{\omega_a^2}{\hbar^2 2c^3} * \eta^3 \right) \quad (2.55)$$

où 1 est le nombre de photon que l'on multiplie par l'énergie et la densité spectrale de mode.

Intéressons-nous au cas particulier d'atomes à l'équilibre thermique dans une cavité à la température T . A l'équilibre, le taux de création doit correspondre au taux d'annihilation

$$B_{12}u(\omega_a)N_1 = B_{21}u(\omega_a)N_2 + A_{21}N_2 \quad (2.56)$$

On peut en déduire la densité spectrale d'énergie du champ qui permet d'être à cet équilibre

$$u(\omega_a) = \frac{A_{21}}{\frac{N_1}{N_2} B_{12} - B_{21}} \quad (2.57)$$

Comme nous sommes en situation d'équilibre, le rapport de N_1 et N_2 est donné par la statistique de Boltzmann

$$\frac{N_1}{N_2} = \exp[(E_2 - E_1)/k_B T] = \exp(\hbar\omega_a/k_B T) \quad (2.58)$$

Plank nous donne une autre expression de $u(\omega_a)$:

$$u(\omega_a) = \frac{A_{21}/B_{21}}{B_{12}/B_{21} \exp(\hbar\omega_a/k_B T) - 1} = \frac{\hbar\omega_a^3 \eta^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{\exp(\hbar\omega_a/k_B T) - 1} \quad (2.59)$$

Ces deux expressions de $u(\omega_a)$ décrivent une cavité fermée à l'équilibre : il s'agit de corps noirs, nous pouvons évaluer les deux expressions. On en tire que

$$B_{12} = B_{21}, \quad \frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{\hbar\omega_a^3 \eta^3}{\pi^2 c^3} \quad (2.60)$$

Dès lors

$$\Rightarrow U_{21} = B_{21} \rho(\omega_a) \hbar\omega_a N_2 \quad (2.61)$$

On peut interpréter l'émission spontanée comme étant une émission stimulée par l'émission du vide : le taux d'émission spontanée correspond au taux d'émission stimulée à 1 photon/mode.

À l'équilibre thermique, il y a plus d'atomes dans E_1 que E_2 car le taux d'émission spontanée est bien plus important que le stimulé à l'équilibre thermique.

$$R = \frac{\text{spontaneous emission rate}}{\text{stimulated emission rate}} = \exp(\hbar\omega_a/k_B T) - 1 \quad (2.62)$$

2.4.2 Lien avec le temps de vie spontanée

La variation de la densité d'atome dans le niveau excité s'écrit

$$\frac{dN_2}{dt} = -A_{21}N_2 \quad (2.63)$$

Ce qui correspond à un photon émis pour un atome désexciter. Après résolution

$$N_2(t) = N_{20} e^{-A_{21}t} \quad (2.64)$$

On parle alors de *temps de vie radiatif* (temps de vie avant une émission spontanée)

$$t_{sp} = 1/A_{21} \quad (2.65)$$

Il s'agit de l'inverse de A_{21} et cela correspond au temps de vie de notre atome dans l'état d'énergie supérieure. Ceci n'est valable que pour deux niveaux, mais on peut généraliser à plusieurs niveaux

$$\frac{dN_2}{dt} = -\sum_k A_{2k}N_2 = -N_2/t_{sp} \quad (2.66)$$

2.4.3 Gain optique et forme de raie

Jusqu'ici nous avons considéré que les niveaux d'énergies sont bien déterminés : $\hbar\omega_a = E_2 - E_1$ ce qui correspond à un delta de Dirac en fréquence. Ceci signifierait une onde continue temporellement ce qui n'est pas possible

$$\text{Temps de vie spontanée } t_{sp} \neq \infty \quad \Rightarrow \quad \text{spectre d'émission} \neq \delta(\omega - \omega_a)$$

En conclusion, l'atome interagit avec un continuum de fréquences de radiation centrée sur la fréquence atomique ν_a et la probabilité de transition dépend de la fréquence. On définit la **forme de raie normalisée** $g(\omega)$ tel que

$$\int g(\omega) d\omega = 1 \quad (2.67)$$

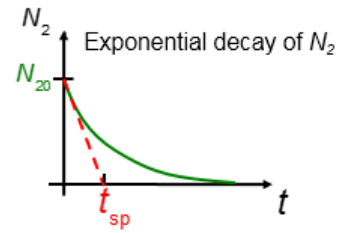


FIGURE 2.12

- Le taux d'absorption par unité de volume dans l'intervalle de fréquence angulaire $[\omega, \omega + \delta\omega]$ vaut

$$\Gamma_{12}(\omega)\delta\omega = B_{12}N_1g(\omega)u(\omega)\delta\omega \quad (2.68)$$

On en tire le taux d'absorption total

$$\Gamma_{12} = \int B_{12}u(\omega)g(\omega)N_1d\omega \quad (2.69)$$

- Taux d'émission stimulée total

$$\Gamma_{21} = \int B_{21}u(\omega)g(\omega)N_2d\omega \quad (2.70)$$

A la fréquence ω , le système réagit avec une certaine intensité pondérée par $g(\omega)$.

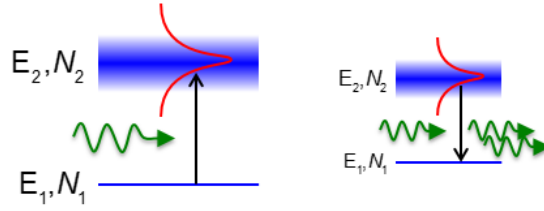
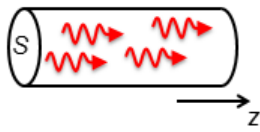


FIGURE 2.13 – Absorption à ω_a à l'énergie E_2 (gauche) et émission stimulée (droite)

(1 mode, z direction)



Penchons-nous sur l'absorption d'une onde monochromatique à ω_0 . La densité spectrale d'énergie s'obtient facilement : proportionnel à un delta de Dirac centré en ω_0 , à l'énergie des photons et à la densité de photon

$$u(\omega) = \hbar\omega_0 n_p \delta(\omega - \omega_0) \quad (2.71)$$

FIGURE 2.14

Sachant que $B_{21} = B_{12} = B = \frac{\pi^2 c^3}{\hbar\omega_0^3 \eta^3} A_{21}$, avec les deux relations intégrales que nous venons d'obtenir, on trouve

$$\Gamma_{12} = B\hbar\omega_0 n_p g(\omega_0) N_1, \quad \Gamma_{21} = B\hbar\omega_0 n_p g(\omega_0) N_2 \quad (2.72)$$

Considérons le taux de variation de la densité de photon n_p : celle-ci peut augmenter (absorption) ou diminuer (émission spontanée et stimulée)

$$\frac{dn_p}{dt} = (\Gamma_{21} - \Gamma_{12}) + \underbrace{\text{spontaneous emission}}_{\approx 0} \quad (2.73)$$

La contribution de l'émission spontanée peut être négligée : elle se produit dans toutes les directions et dans toutes les fréquences, peu de chance de jouer un rôle dans l'émission laser. Après ré-écriture

$$\frac{dn_p}{dt} = B\hbar\omega_0 n_p g(\omega_0) (N_2 - N_1) \quad (2.74)$$

En laboratoire, nous avons accès à l'intensité ($I = \langle S_z \rangle$ ($W.m^{-2}$)). Sachant que I est le flux de photon (flux*énergie photon) et \mathcal{J} est le courant (densité de photon * vitesse de groupe) :

$$\left. \begin{aligned} I &= \mathcal{J}\hbar\omega_0 \\ \mathcal{J} &= n_p v_g \end{aligned} \right\} \Rightarrow I = \hbar\omega_0 n_p v_g \quad (2.75)$$

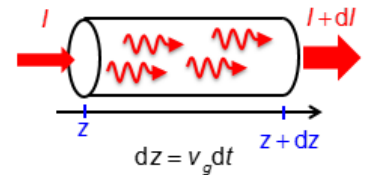


FIGURE 2.15

La variation de l'intensité en fonction de la position dans la cavité s'exprime alors

$$\frac{dI}{dz} = \hbar\omega_0 v_g \frac{dn_p}{dz} = \hbar\omega_0 \frac{dn_p}{dt} = \hbar\omega_0 B \hbar\omega_0 g(\omega_0) (N_2 - N_1) \frac{I}{\hbar\omega_0 v_g} = -\alpha I \quad (2.76)$$

où $\frac{I}{\hbar\omega_0 v_g} = n_p$. Il s'agit d'une simple relation constante*intensité : cela donne lieu à une exponentielle décroissante de l'intensité lors de la propagation dans un milieu. Dès lors, α est proportionnel au coefficient d'Einstein (échange matière-lumière) mais aussi à la différence $N_1 - N_2$

$$\alpha = \frac{\hbar\omega_0 B n_g}{c} g(\omega_0) (N_1 - N_2) = -\mathcal{G} \quad (2.77)$$

Dans un laser, on cherche à obtenir $N_2 > N_1$ de façon à avoir \mathcal{G} positif, soit un milieu à gain.

La seule chose qui peut changer est le $N_1 - N_2$ (densité atomique en m^{-3}). On introduit alors la section efficace σ (m^2)

$$\alpha = \frac{\pi^2 c^2 n_g}{\eta^3 t_{sp} \omega_0^2} g(\omega_0) (N_1 - N_2) = -\mathcal{G} = \sigma(\omega_0) (N_1 - N_2) \quad (2.78)$$

- A l'équilibre thermique

$$N_2/N_1 = \exp(-\hbar\omega_a/k_B T) \ll 1 \quad \Rightarrow \quad N_1 > N_2 \rightarrow \alpha > 0 : \text{atténuation} \quad (2.79)$$

- Lors d'une *inversion de la population*, loin de l'équilibre

$$N_2 > N_1 \Rightarrow \mathcal{G} > 0 : \text{amplification} \quad (2.80)$$



FIGURE 2.16 – Commentaires intéressants slide 30

2.4.4 Fonction forme de raie et mécanismes d'élargissement

Le but de cette sous-section est d'établir une expression de $g(\omega)$ à partir des calculs des spectres d'émission et d'absorptions.

Largeur naturelle

Il s'agit du cas le plus simple, celui où l'atome se désexcite en émettant une radiation à ω_a . Plusieurs hypothèses sont faites

1. Système à deux niveaux, le retour vers l'état fondamental n'est possible que par émission radiative
2. Le temps d'excitation des atomes est petite par rapport à $t_{sp} \Rightarrow N_2(t=0) = N_{20}$ et $N_2(t < 0) \approx 0$
3. Faible excitation : $1 \ll R$ (émission spontanée prédominante)

L'énergie émise au cours du temps varie car la densité fait de même : l'énergie émise par unité de temps par unité de volume W s'exprime⁷

$$W(t) = -\hbar\omega_a \frac{dN_2}{dt} = \frac{\hbar\omega_a}{t_{sp}} N_{20} \exp(-t/t_{sp}) (t \geq 0) \quad (2.81)$$

Le champ EM classique associé à cette désexcitation est un champ oscillant à ω_a et dont l'amplitude décroît au cours du temps.

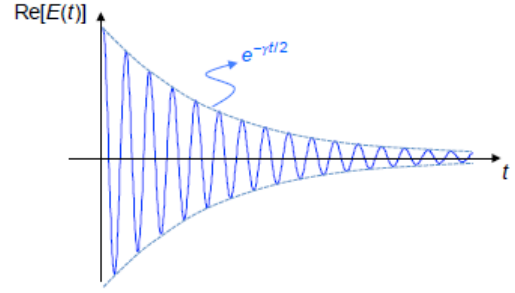


FIGURE 2.17

Calculons l'amplitude spectrale (transformée de Fourier, le tilde désigne le domaine des fréquences)

$$\tilde{E}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(t) \exp(i\omega t) dt = \int_0^{+\infty} E_0 \exp(-t/2t_{sp} - i\omega_a t) \exp(i\omega t) dt = \int_0^{+\infty} E_0 \exp\{t[i(\omega - \omega_a) - 1/2t_{sp}]\} dt \quad (2.82)$$

Après intégration

$$\tilde{E}(\omega) = \frac{E_0}{-i(\omega - \omega_a) + 1/2t_{sp}} \quad (2.83)$$

Le spectre vaut alors

$$\tilde{I}(\omega) = |\tilde{E}(\omega)|^2 \Rightarrow \tilde{I}(\omega) = \frac{E_0^2}{(\omega - \omega_a)^2 + \gamma^2/4} \quad (2.84)$$

Ceci n'est rien d'autre qu'une lorentzienne avec un profil d'épaisseur $\gamma = 1/t_{sp} = A_{21}$ (spectre d'émission). Si l'atome reste très peu longtemps dans son état excité $g(\omega)$ sera important mais s'il reste très longtemps dans le niveau excité $g(\omega)$ sera très petit⁸

$$g(\omega) = \frac{K}{1 + (\frac{\omega - \omega_a}{\gamma/2})^2} \quad (2.85)$$

où $K = \frac{2}{\pi\gamma}$, $\gamma = 1/t_{sp}$ (largeur spectrale (largeur totale à la moitié du maximum) : $\Delta\omega = \gamma$).

Jusqu'ici nous n'avons travaillé qu'à deux niveaux : il est possible de généraliser l'expression de γ (forme de raie) avec le principe d'incertitude temps-énergie : il suffit de considérer plusieurs coefficients d'Einstein, un pour chaque transition possible

1. Pour le niveau supérieur : $\Delta E_s = \hbar\Delta t_s^{-1} = \hbar \sum_k A_{sk}$
2. Pour le niveau inférieur : $\Delta E_i = \hbar\Delta t_i^{-1} = \hbar \sum_l A_{il}$

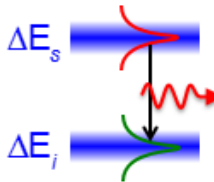


FIGURE 2.18

En effet, le système ne reste qu'un certain temps sur les niveaux excités : il y a une incertitude sur les niveaux d'énergie et donc une incertitude sur les photons émis, c'est ce que traduit $g(\omega)$. La largeur de raie naturelle tient compte de ceci

$$\gamma_n = \Delta\omega = \frac{\Delta E_s + \Delta E_i}{\hbar} = \gamma_s + \gamma_i = \sum_{\substack{l \text{ t.q.} \\ E_k < E_s}} A_{sk} + \sum_{\substack{l \text{ t.q.} \\ E_l < E_i}} A_{il} \quad (2.86)$$

7. Seulement un photon émis par chaque atome.

8. Calcul de la normalisation slide 33 passé

Mécanisme d'élargissement homogène

Il existe des principes physiques qui vont "agrandir" la grandeur naturelle (qui est la plus petite que possible). Il en existe deux type (selon le type de laser)

1. Homogène : tous les atomes sont impactés de la même façon par ce mécanisme, ils subissent tous le même "élargissement".
2. Inhomogène : le milieu atomique est divisé en classe d'atomes qui interagissent tous un peu différemment.

Voyons ici différents mécanismes homogènes.

TRANSITION NON-RADIATIVE

Celles-ci sont dues à des collisions entre les atomes (laser à gaz comme dans le laser He-Ne) où les interactions avec des photons (laser solide)⁹

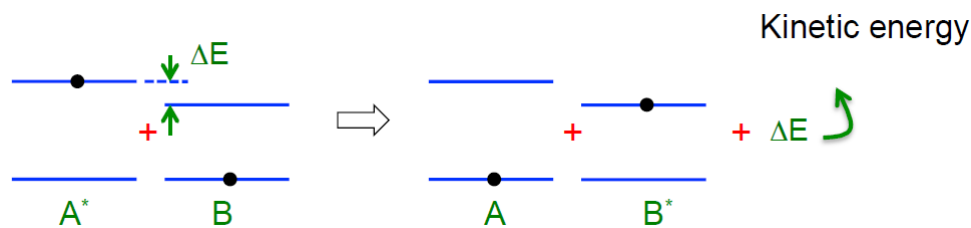


FIGURE 2.19 – La différence entre les deux niveaux part en énergie cinétique

$$\gamma = \gamma_n + 1/t_{nr-low} + 1/t_{nr-up} \quad (2.87)$$

avec $t_{nr-low/up}$ le temps de vie non radiatif de l'état haut/bas.

COLLISIONS (SANS TRANSITIONS)

Cet effet est plus subtil : il se déroule entre les atomes pour les gaz et avec les phonons pour les solides (pas de modification du temps de vie). Considérons un atome oscillant. Si un second atome arrive dans son environnement avec son propre champ électrique, il va modifier les écarts d'énergie entre les niveaux : effet Stark. Ceci se traduit par un déphasage durant l'émission radiative, qui est aléatoire.

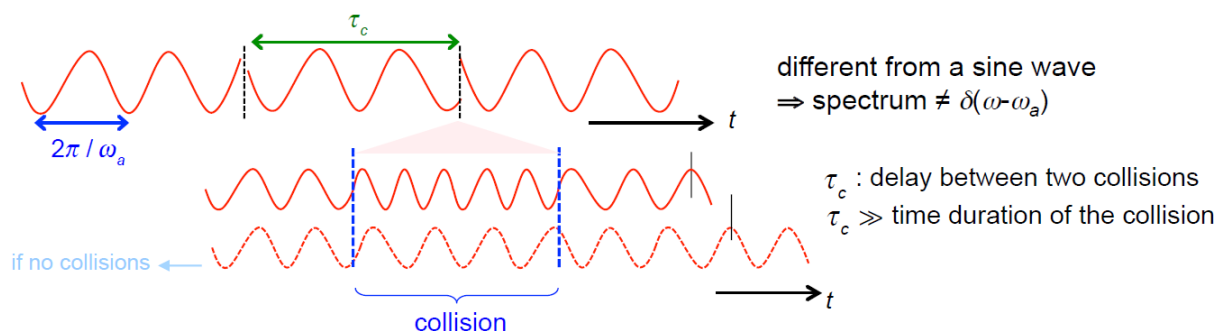


FIGURE 2.20

9. Nous avons vu l'incertitude temps-énergie : plus un atome reste longtemps dans un état, plus cet état est incertain.

La solution est entrecoupée de sauts de phase : τ_c est l'intervalle entre deux collisions qui est supposé beaucoup plus grand que le temps de la collision. Si l'on a une onde continue le spectre n'est qu'un Delta de Dirac mais comme la solution est entrecoupée de sauts de phase, le spectre se voit élargi.

Durant l'intervalle τ_c , le dipôle atomique oscille à ω_a , le champ est donc une exponentielle proportionnelle à ce temps

$$E(t) \propto \exp(-i\omega_a t') \quad t < t' < t + \tau \quad (2.88)$$

Le spectre correspondant vaut

$$\tilde{E}(\omega; \tau_c) \propto \int_t^{t+\tau_c} e^{-i\omega_a t'} e^{i\omega t'} dt' = \frac{\exp(i\Delta\omega\tau_c) - 1}{i\Delta\omega} e^{i\Delta\omega t} \quad (2.89)$$

où $\Delta\omega = \omega - \omega_a$. L'intensité spectrale est donnée par le module carré de cette transformée de Fourier

$$\tilde{I}(\omega; \tau_c) \propto \frac{(\cos[\Delta\omega\tau_c] - 1)^2 + \sin^2[\Delta\omega\tau_c]}{\Delta\omega^2} = \frac{2 - 2\cos[\Delta\omega\tau_c]}{\Delta\omega^2} \quad (2.90)$$

Nous allons sommer sur tous les spectres en tenant compte du poids de chaque spectre : probabilité. On suppose que le saut de phase est aléatoire et que $p(\tau_c)$ est la probabilité que le temps entre deux collisions soit τ_c :

$$\tilde{I}(\omega) \propto \int_0^\infty \tilde{I}(\omega; \tau_c) p(\tau_c) d\tau_c \quad (2.91)$$

La théorie cinétique nous donne une expression de la distribution de probabilité du délai entre deux collisions

$$p(\tau_c) d\tau_c = 1/\tau_0 \exp(-\tau_c/\tau_0) d\tau_c \quad (2.92)$$

Pour calculer l'intensité, on s'intéresse à la valeur moyenne de ce délai entre deux collisions

$$\int_0^\infty \tau_c p(\tau_c) d\tau_c = \tau_0 \quad (2.93)$$

Il ne reste plus qu'à calculer

$$\tilde{I}(\omega) \propto \int_0^\infty \frac{1 - \cos[\Delta\omega\tau_c]}{\Delta\omega^2} e^{-\tau_c/\tau_0} d\tau_c = \frac{1}{2\Delta\omega^2} \int_0^\infty (2e^{-\tau_c/\tau_0} - e^{-(1/\tau_0 - i\Delta\omega)\tau_c} - e^{-(1/\tau_0 + i\Delta\omega)\tau_c}) d\tau_c \quad (2.94)$$

Après intégration

$$\tilde{I}(\omega) \propto \frac{1}{2\Delta\omega^2} \left[2\tau_0 - \frac{1}{1/\tau_0 - i\Delta\omega} - \frac{1}{1/\tau_0 + i\Delta\omega} \right] = \frac{\tau_0}{(1/\tau_0)^2 + \Delta\omega^2} \quad (2.95)$$

Il s'agit d'une lorentzienne ! En normalisant à l'unité, on peut trouver la forme de raie $g(\omega)$ ¹⁰

$$g(\omega) = \frac{\tau_0}{\pi} \frac{1}{1 + \Delta\omega^2/(\gamma_{co}/2)^2} \quad (2.96)$$

C'est également un profil lorentzien de largeur $\gamma_{co} = 2/\tau_0$.

10. Si on considère que la forme de raie est rectangulaire (vrai si très petit) : $\int g(\omega) d\omega = 1 \Leftrightarrow g(\omega) = 1/\Delta\omega$.

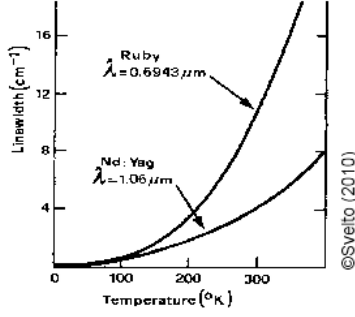


FIGURE 2.21

On peut comptabiliser la largeur naturelle avec la modification obtenue par les collisions : décroissance exponentielle de l'amplitude d'oscillation et saut de phases aléatoires

$$\gamma_h = \gamma_n + 1/t_{nr} + 2/\tau_0 \quad (2.97)$$

En pratique, on remarque que le spectre d'émission est beaucoup plus large que ce à quoi on s'attend pour la décroissance exponentielle : ceci est dû à l'influence de la température. Quand celle-ci augmente, la densité de photon augmente et le temps entre deux collisions diminue, causant un élargissement de la largeur spectrale.

Élargissement inhomogène

Il s'agit d'un mécanisme qui fait que ça ne se déroule pas toujours de la même façon au niveau des interactions lumière-matière. Le milieu est donc un ensemble de groupe d'atomes ayant une fréquence de résonance différente. Il faut donc connaître la distribution statistique des groupes d'atomes ayant une fréquence ω_c

$$F(\omega_c) : \text{fonction de distribution statistique normalisée à l'unité} \quad (2.98)$$

On a donc que $\delta N_c = F(\omega_c)N\delta\omega_c$ est le nombre d'atomes entrant en résonance pour un champ électromagnétique de fréquence dans $[\omega_c, \omega_c + \delta\omega_c]$.

Chaque groupe d'atome δN_c interagit avec une onde optique de fréquence ω proportionnelle à $g_h(\omega - \omega_c)$ où g_h est la forme de raie normalisée centrée en $\omega = 0$. La contribution de chaque groupe d'atome au taux d'émission stimulée à la fréquence ω vaut donc

$$\Gamma_{21,c} = B_{21}u(\omega)g_h(\omega_c - \omega)\delta N_{2,c} \quad (2.99)$$

On retrouve le coefficient d'Einstein, la densité spectrale d'énergie et g qui permet de ne considérer que la fraction correspondante à la fréquence qui nous intéresse. Pour obtenir le taux d'émission stimulée total, il faut intégrer

$$\Gamma = \sum_c \Gamma_{21,c} = B_{21}uN_2 \underbrace{\int_0^\infty g_h(\omega_c - \omega)F(\omega_c)d\omega_c}_{g=F*g_h} \quad (2.100)$$

La nouvelle forme de raie est donnée par la convolution entre l'élargissement homogène et la fonction de distribution F . Cette forme tient ainsi compte des élargissements non-homogène. Dès lors, pour que l'élargissement inhomogène affecte le fonctionnement du laser, il faut que F soit au moins aussi large que g_h .

Passons en revue deux exemples d'élargissement non-homogène

1. Doppler. Affecte tous les lasers à gaz : on peut créer des sous-ensemble d'atomes qui réagissent à des fréquences différentes. Si les photons vont vers la droite et l'atome également, la fréquence sera plus importante et inversement. La vitesse c devient alors une certaine vitesse $v(z)$ à cause de ce décalage

$$\omega \rightarrow \omega - \vec{k} \cdot \vec{v} = \omega - (\pm k \cdot v_z) \quad (2.101)$$

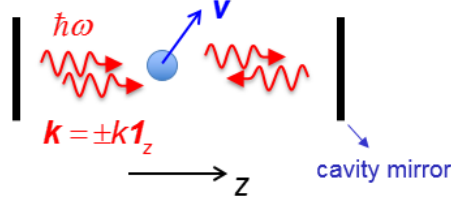


FIGURE 2.22

Pour des atomes de masse m à température T , la distribution des vitesses est celle de Maxwell

$$f(v_z) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{mv_z^2}{2k_B T} \right) \quad (2.102)$$

Exprimée en fréquence

$$F(\omega) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T k^2} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{m}{2k_B T} \frac{(\omega - \omega_a)^2}{k^2} \right) \quad (2.103)$$

Le profil tenant compte de l'élargissement homogène et inhomogène est donné par la convolution entre une lorentzienne et une gaussienne.

$$g(\omega) = \int g_h(\omega_c - \omega) F(\omega_c) d\omega_c \quad (2.104)$$

Il s'agit d'une *intégrale de Voigt*. Si $\gamma_h \ll k\sqrt{2k_B T/m}$ alors

$$g(\omega) \approx \frac{e^{-\frac{[\omega - \omega_a]^2}{k^2 2k_B T/m}}}{k\sqrt{2\pi k_B T/m}} \Rightarrow \Delta\omega \approx 1.66k\sqrt{2k_B T/m} \quad (2.105)$$

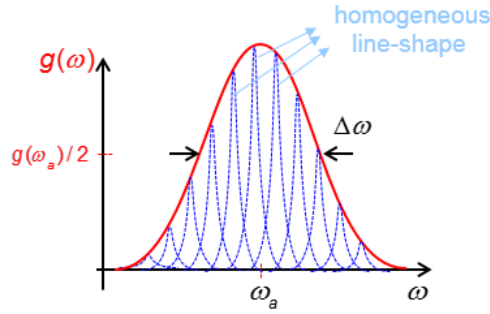


FIGURE 2.23

2. Environnement. Les environnements amorphes comme le verre : les distances entre chaque atomes ne sont pas connues. Si l'environnement électrique est différent il y aura un déplacement des niveaux d'énergies différent (Stark), ... Si le milieu est plus ordonné par exemple YAG (cristallin) à la place de Nd glass (amorphe) l'élargissement est moins important.

Chapitre 3

Théorie semi-classique des laser

3.1 Équations de Maxwell-Bloch du laser

Classique : le champ EM est décrit par les équations de Maxwell

$$\Delta E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E = \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} P \quad (3.1)$$



FIGURE 3.1

Il existe un couplage entre la radiation et le milieu : le champ électrique introduit une polarisation atomique qui induit un champ de polarisation macroscopique qui elle même donne lieu au champ électrique total, la boucle recommence alors.

3.1.1 Équations du champ électromagnétique dans la cavité

Mode longitudinal de la cavité

Il existe deux type de cavité : la cavité circulaire et la linéaire de type Fabry-Perot. S'il n'y a pas de pertes, le champ lors de la $n+1^e$ résonance dans la cavité vaut celui de la n^e résonance avec un terme de phase

$$\mathcal{E}_{n+1} = \mathcal{E}_n \exp(ikL) \quad (3.2)$$

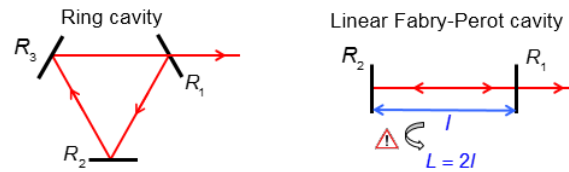


FIGURE 3.2

Ce qui donne lieu à une résonance pour $kL = m2\pi$.

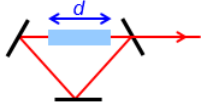


FIGURE 3.3

Avec $k = \omega/c$, on trouve que les modes longitudinaux (équidistants en fréquence, mais **pas** en longueur d'onde) de la cavité sont caractérisés par

$$\omega_m = m \frac{2\pi}{L} c \quad (3.3)$$

où l'indice de réfraction du milieu a été omis (mais il faut garder à l'esprit qu'il existe). Si l'on insère un milieu à gain dans la cavité

$$\nu_m = mc \left(\frac{1}{\eta_c(L-d) + \eta_L d} \right) \quad (3.4)$$

Cependant, pour avoir un laser, il faut forcément des pertes : un des miroirs doit être un semi-miroir. Dans le cas idéal, on pourrait imaginer l'utilisation de miroirs 100% sauf un et pas d'autres pertes. Nous faisons l'hypothèse que les variations dues à l'atténuation sont petites.

- Réflexivité $R_j < 1$
- Pertes internes (diffusion, ...) : α_j
- Sur une résonance, peu de variation : $R_j \approx 1, \alpha_i \ll 1$

Pour une cavité circulaire¹

$$I_{n+1} = R_1 R_2 R_3 e^{-\alpha_i L} I_n \quad (3.5)$$

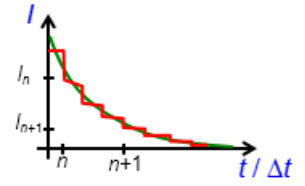


FIGURE 3.4

Si l'on adopte le point de vue d'un modèle continu sur un tour de cavité

$$\frac{dI}{dt} = -I/t_c \quad (3.6)$$

où t_c est le temps de vie d'un photon dans la cavité (on fait un flash et on compte le temps qu'il faut pour que le photon redescende). Après intégration

$$I_{n+1} = e^{-\Delta t/t_c} I_n \quad (3.7)$$

où $\Delta t = L/c$. Les deux modèles sont très proches, nous pouvons évaluer les expressions de I_{n+1} pour en tirer

$$\Rightarrow 1/t_c = K_c = \alpha_i c - \frac{c}{L} \ln(R_1 R_2 R_3) \quad (3.8)$$

Connaissant K_c , on peut écrire une équation différentielle qui décrit l'évolution de l'amplitude du champ dans une cavité vide. En partant de (3.6)

$$\dot{\mathcal{E}} = -\frac{K_c}{2} \mathcal{E} \quad (3.9)$$

où \mathcal{E} est l'amplitude du champ électrique, $\omega = \omega_m$ et le 1/2 vient du lien entre intensité et amplitude.

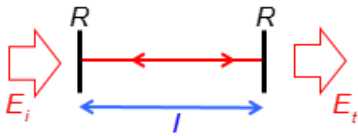


FIGURE 3.5

La fonction de transfert d'une cavité Fabry-Pérot est donnée par

$$|E_t|^2 = \frac{|E_i|^2}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2(kl)} \quad (3.10)$$

Il s'agit d'une fonction d'Airy qui est fonction de la finesse. Plus la finesse est grande, plus il y aura d'aller-retours dans la cavité et plus les pics (en transmission) deviennent étroits.

1. Notons que cette formule est valable même en cas de fortes pertes.

Sous les conditions

- Bonne cavité : $R \approx 1 \rightarrow \ln(R) \approx 1 - R$
- Proche de la résonance : $\omega = \omega_m + \delta\omega \rightarrow \sin^2(kl) = \sin^2(\frac{\omega_m + \delta\omega}{c}l) \approx (\frac{\delta\omega}{c}l)^2$
- Pas de pertes internes distribuées : $\alpha_j = 0 \rightarrow K_c = -(c/l) \ln(R)$

La fonction de transfert devient

$$|E_t|^2 \approx \frac{|E_i|^2}{1 + \frac{4}{\ln(R)^2} (\frac{\delta\omega}{c}l)^2} = \frac{|E_i|^2}{1 + \frac{\delta\omega^2}{(K_c/2)^2}} \quad (3.11)$$

On en tire le spectre du champ électromagnétique

$$|\tilde{\mathcal{E}}|^2 = \frac{|\tilde{\mathcal{E}}_0|^2}{1 + \frac{\delta\omega^2}{(K_c/2)^2}} \quad (3.12)$$

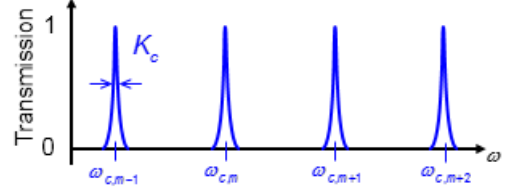


FIGURE 3.6

qui est solution de (3.9) pour les C.I. $\mathcal{E}(t=0) = \mathcal{E}_0$.

Équation de Maxwell du laser

Pour avoir un laser, il faut que la cavité ai un milieu à gain ($\mathcal{P} \neq 0$). Si l'on se décale par rapport à la résonance, des effets de déphasages vont apparaître. En général, la fréquence du laser est légèrement différente de celle de cavité car il y a une variation de l'indice de réfraction d'un milieu à l'autre. La fréquence du laser ω_L n'est a priori pas connue : on choisi arbitrairement ω_c comme référence.

Le but est de simplifier l'équation d'onde. Pour ça, on va considérer

- z est la direction de propagation et x, y les directions transverses
- \vec{E}, \vec{P} ont la même direction (vrai si milieu isotrope et donc le tenseur de susceptibilité est scalaire). On utilisera

$$\vec{E} = 1/2[\mathcal{E}(z, t)e^{i(k_c z - \omega_c t)}\vec{e} + c.c.] = 1/2[Ee + c.c.], \quad \vec{P} = 1/2[\mathcal{P}(z, t)e^{i(k_c z - \omega_c t)}\vec{e} + c.c.] = 1/2[Pe + c.c.] \quad (3.13)$$

- Les enveloppes $\mathcal{E}(z, t), \mathcal{P}(z, t)$ varient lentement : elle varie sur une échelle de temps beaucoup plus grande que la période du champ EM.
- La fréquence de résonance vaut $\omega_c = k_c c$.

Pour simplifier d'avantage, considérons l'équation scalaire 1D :

$$E = \mathcal{E}(z, t)e^{i(k_c z - \omega_c t)}, \quad P = \mathcal{P}(z, t)e^{i(k_c z - \omega_c t)} \quad (3.14)$$

En effectuant les dérivées, on trouve

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = [\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial z^2} + 2ik_c \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} - k_c^2 \mathcal{E}]e^{i(k_c z - \omega_c t)}, \quad \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = [\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} - 2i\omega_c \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} - \omega_c^2 \mathcal{E}]e^{i(k_c z - \omega_c t)}, \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = [\frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial t^2} - 2i\omega_c \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} - \omega_c^2 \mathcal{P}]e^{i(k_c z - \omega_c t)} \quad (3.16)$$

Après substitution

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial z^2} + 2ik_c \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} - k_c^2 \mathcal{E} - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} - 2i\omega_c \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} - \omega_c^2 \mathcal{E} \right) = \mu_0 \left(\frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial t^2} - 2i\omega_c \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} - \omega_c^2 \mathcal{P} \right) \quad (3.17)$$

Comme $\omega_c = k_c c$, $k_c^2 \mathcal{E}$ se simplifie avec $\omega_c^2 \mathcal{E}$. L'hypothèse de la lente variation de l'enveloppe intervient alors. Comme

$$t_c, \Delta t, 1/\gamma, 1/(\mathcal{G}v_g) \gg 1/\nu_c \quad (3.18)$$

Ce qui implique que

$$\begin{aligned} |\partial_z \mathcal{E}| &\ll k_c |\mathcal{E}|, & |\partial_{zz} \mathcal{E}| &\ll k_c^2 |\mathcal{E}| \\ |\partial_t \mathcal{E}| &\ll \omega_c |\mathcal{E}|, & |\partial_{tt} \mathcal{E}| &\ll \omega_c^2 |\mathcal{E}| \\ |\partial_t \mathcal{P}| &\ll \omega_c |\mathcal{P}|, & |\partial_{tt} \mathcal{P}| &\ll \omega_c^2 |\mathcal{P}| \end{aligned} \quad (3.19)$$

Les dérivées secondes peuvent ainsi être négligées². Sachant que $\mu_0 = 1/(\varepsilon_0 c^2)$, l'équation s'écrit

$$2ik_c \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} + \frac{2i\omega_c}{c^2} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = -\mu_0 \omega_c^2 \mathcal{P} \quad (3.20)$$

Cette équation décrit une "chose" qui se propage à une certaine vitesse : il est possible de choisir un repère particulier pour simplifier. Plaçons-nous dans le repère bougeant à la vitesse c : $z' = z - ct, t' = t$. L'équation devient

$$2i \frac{\omega_c}{c} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z'} + \frac{2i\omega_c}{c^2} \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t'} - c \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z'} \right) = -\frac{\omega_c^2}{\varepsilon_0 c^2} \mathcal{P} \quad (3.21)$$

Le premier terme se simplifie avec le second terme de la parenthèse pour donner

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = \frac{i\omega_c}{2\varepsilon_0} \mathcal{P} \quad (3.22)$$

On n'observe plus que les variations temporelle de \mathcal{E} . C'est normal : le repère se déplace à la vitesse c et une lumière qui se propage ne reste pas stationnaire. **L'équation de Maxwell du laser** s'obtient en rajoutant un terme d'amortissement

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = -\frac{K_c}{2} \mathcal{E} + \frac{i\omega_c}{2\varepsilon_0} \mathcal{P} \quad (3.23)$$

où le second terme obtenu ci-dessus est la réponse du milieu à gain³. Le slide 9 donne une application de cette équation.

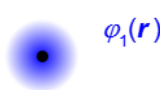
3.1.2 Équation de Bloch du milieu

Polarisation et inversion de la population

Comme pour chaque modèle, il est nécessaire d'énoncer les différentes hypothèses faites

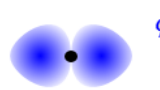
- Approche semi-classique : le champ EM est classique à fréquence (inconnue) ω_L
- Le milieu à gain contient N atomes par unité de volumes, indépendants et identiques (un seul groupe d'atome, à de l'influence sur ce que ce modèle ne permet pas de décrire (laser à gaz ?))
- Seuls les deux niveaux E_1 et E_2 interagissent avec le champ EM
- Un atome est constitué d'un noyau lourd et d'un électron de charge $-e$

Fundamental state

$$\psi_1(\mathbf{r}, t) = \varphi_1(\mathbf{r}) e^{-i \frac{E_1}{\hbar} t}$$


$\varphi_1(\mathbf{r})$

Excited state

$$\psi_2(\mathbf{r}, t) = \varphi_2(\mathbf{r}) e^{-i \frac{E_2}{\hbar} t}$$


$\varphi_2(\mathbf{r})$

FIGURE 3.7

2. Pq ?

3. Remarque : K_c est l'inverse du temps de vie, il s'agit donc de perte.

Si l'on regarde les états propres de ces atomes, on se rend compte que la densité de probabilité est stationnaire. Or il faut que les choses bougent sans quoi il n'y aurait pas de radiation.

$$|\psi_i(\mathbf{r}, t)|^2 = |\varphi_i(\mathbf{r})|^2 \quad (3.24)$$

Pour palier à ce problème, on introduit une superposition cohérente

$$\psi(\mathbf{r}, t) = c_1\psi_1(\mathbf{r}, t) + c_2\psi_2(\mathbf{r}, t) \quad (3.25)$$

où $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$ et $|c_i|^2$ est la probabilité que cet atome se trouve dans l'état i . Soit ε^2 , la probabilité que cet atome soit dans l'état fondamental avec $c_2 \approx 1, c_1 = \varepsilon \ll 1$. En remplaçant et en prenant le module carré

$$|\psi|^2 = |\varphi_2(\mathbf{r})|^2 + \varepsilon^2 |\varphi_1(\mathbf{r})|^2 + 2\text{Re}[\varepsilon\varphi_1^*\varphi_2 e^{-i(E_2-E_1)t/\hbar}] \quad (3.26)$$

Ici, la densité de probabilité oscille à la fréquence $\omega_a = (E_2 - E_1)/\hbar$, il va donc y avoir radiation d'énergie par émission de photon à l'énergie $\hbar\omega_a$.

Regardons maintenant ce qui se passe au niveau de la polarisation macroscopique

$$\vec{P} : N\vec{p}_a \quad (3.27)$$

où $\mathbf{p}_a = -e\langle\mathbf{r}\rangle = -e\langle\psi|\mathbf{x}|\psi\rangle$. On suppose ici que tous les atomes ont la même polarisation microscopique. Supposons que le centre du nuage se déplace selon x et que l'on soit dans l'état de polarisation cohérente où l'on suppose que les coefficients peuvent évoluer au cours du temps

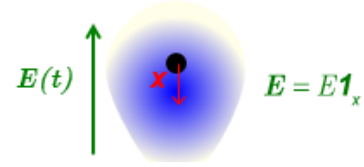


FIGURE 3.8

$$|\psi(t)\rangle = c_1(t)|\psi_1\rangle + c_2(t)|\psi_2\rangle \quad (3.28)$$

où $|\psi_j\rangle = |\varphi_j\rangle \exp(-i\frac{E_j}{\hbar}t)$, $H_0|\varphi_j\rangle = E_j|\varphi_j\rangle$ avec H_0 l'Hamiltonien de l'atome non perturbé. Sachant que la densité d'atome dans l'état propre d'énergie E_j vaut $N|c_j|^2$, on trouve

$$p_a = -e\langle c_1^*\psi_1 + c_2^*\psi_2 | x | c_1\psi_1 + c_2\psi_2 \rangle = -e \left[c_1^*c_2 \langle \varphi_1 | x | \varphi_2 \rangle e^{-i\omega_a t} + c_2^*c_1 \langle \varphi_2 | x | \varphi_1 \rangle e^{+i\omega_a t} \right] \quad (3.29)$$

En effet, pas mal de termes sont nuls car $\langle\psi_j|x|\psi_j\rangle = 0$ (le moment dipolaire d'un atome dans ses états propres est nul).

Posons $\mu_{21} = -e\langle\varphi_1|x|\varphi_2\rangle$ le *moment dipolaire de la transition* $2 \rightarrow 1$. On peut alors écrire

$$\Rightarrow p_a = c_1^*c_2\mu_{21}e^{-i\omega_a t} + c_2^*c_1\mu_{21}^*e^{+i\omega_a t} \quad (3.30)$$

où $\mu_{12} = \mu_{21}^*$. Selon la définition $P = Np_a = 1/2[\mathcal{P}e^{-i\omega_a t} + c.c.]$ et pas identification avec celle-ci (le premier terme ensemble et le c.c. ensemble) :

$$\mathcal{P}(t) = 2Nc_1^*c_2\mu_{21}\exp[-i(\omega_a - \omega_c)t] \quad (3.31)$$

où \mathcal{P} est l'enveloppe de variation lente. Le souci est que jusqu'ici, la variation temporelle des coefficients est inconnue. Pour se faire, nous allons résoudre l'équation de Schrödinger pour un système perturbé par un champ électrique \vec{E}

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle \quad (3.32)$$

où $H = H_0 + H_{int}$ avec H_0 l'Hamiltonien de l'atome non perturbé : $\begin{cases} H_0 |\varphi_1\rangle = E_1 |\varphi_1\rangle = \hbar\omega_1 |\varphi_1\rangle \\ H_0 |\varphi_2\rangle = E_2 |\varphi_2\rangle = \hbar\omega_2 |\varphi_2\rangle \end{cases}$.

Nous sommes ici dans un chapitre traitant de la théorie semi classique : on fait l'approximation que le champ EM est uniforme à l'échelle de la taille de l'atome pour pouvoir écrire que $H_{int} = exE$ où $W = -\vec{P} \cdot \vec{E}$ l'énergie d'un dipôle dans un champ \vec{E} uniforme où \vec{E} est polarisé linéairement selon l'axe x .

En substituant le tout dans Schrödinger $|\psi(t)\rangle = c_1 |\varphi_1\rangle \exp(-i\omega_1 t) + c_2 |\varphi_2\rangle \exp(-i\omega_2 t)$ on trouve

$$i\hbar[(\dot{c}_1 - i\omega_1 c_1) |\varphi_1\rangle e^{-i\omega_1 t} + (\dot{c}_2 - i\omega_2 c_2) |\varphi_2\rangle e^{-i\omega_2 t}] = [\mathbf{H}_0 + exE](c_1 |\varphi_1\rangle e^{-i\omega_1 t} + c_2 |\varphi_2\rangle e^{-i\omega_2 t}) \quad (3.33)$$

Par projection sur $\langle\varphi_1|$

$$(i\hbar\dot{c}_1 + \underbrace{\hbar\omega_1}_{E_1} c_1) e^{-i\omega_1 t} = (E_1 + eE \underbrace{\langle\varphi_1|x|\varphi_1\rangle}_{=0}) c_1 e^{-i\omega_1 t} + eE \langle\varphi_1|x|\varphi_2\rangle c_2 e^{-i\omega_2 t} \quad (3.34)$$

car il n'y a pas de moment dipolaire permanent (les éléments de matrices diagonaux sont nuls, ceci car la fonction est de parité paire ou impaire). On trouve alors une équation pour c_1

$$\dot{c}_1 = \frac{-i}{\hbar} eE \langle\varphi_1|x|\varphi_2\rangle c_2 e^{-i\omega_a t} \quad (3.35)$$

En projetant sur $\langle\varphi_2|$, on trouve

$$\dot{c}_2 = \frac{-i}{\hbar} eE \langle\varphi_2|x|\varphi_1\rangle c_1 e^{+i\omega_a t} \quad (3.36)$$

Nos deux coefficients sont alors donnés par

$$\dot{c}_1 = \frac{i}{\hbar} \mu_{21} c_2 E e^{-i\omega_a t}, \quad \dot{c}_2 = \frac{i}{\hbar} \mu_{21}^* c_1 E e^{+i\omega_a t} \quad (3.37)$$

Il serait intéressant de trouver une équation liant (3.31) et (3.37). Pour se faire, il suffit de différencier (3.31)

$$\dot{\mathcal{P}}(t) = -i(\omega_a - \omega_c) \mathcal{P}(t) + 2N \underbrace{c_2 \mu_{21} e^{-i(\omega_a - \omega_c)t} \left(\frac{-i}{\hbar}\right) \mu_{21}^* c_2^* E e^{+i\omega_a t}}_{c_1^*} + 2N \underbrace{c_1^* \mu_{21} e^{-i(\omega_a - \omega_c)t} \left(\frac{i}{\hbar}\right) \mu_{21}^* c_1 E e^{+i\omega_a t}}_{c_2} \quad (3.38)$$

On voit apparaître les coefficients et leur conjugué, il est possible de faire apparaître les modules carrés

$$\dot{\mathcal{P}}(t) = -i(\omega_a - \omega_c) \mathcal{P}(t) + 2N \frac{i}{\hbar} |\mu_{21}|^2 (|c_1|^2 - |c_2|^2) \exp(i\omega_c t) E \quad (3.39)$$

où $E = \frac{1}{2}[\mathcal{E}(t)e^{-i\omega_c t} + \mathcal{E}^*(t)e^{i\omega_c t}]$. On peut négliger le terme en \mathcal{E}^* car il va générer des oscillations à $2\omega_c$ ce qui est trop rapide que pour être perçu dans la moyenne.

On définit alors l'**inversion de population** $\mathcal{D}(t) : N(|c_2|^2 - |c_1|^2) = N_2 - N_1$

$$\dot{\mathcal{P}}(t) = -i(\omega_a - \omega_c) \mathcal{P}(t) - \frac{i}{\hbar} |\mu_{21}|^2 \mathcal{D} \mathcal{E} \quad (3.40)$$

Le problème est que nous ne savons pas comment cette inversion de population varie. Pour se faire, dérivons \mathcal{D}

$$\dot{\mathcal{D}}(t) = N(\dot{c}_2 c_2^* + c_2 \dot{c}_2^* - \dot{c}_1 c_1^* - c_1 \dot{c}_1^*) \quad (3.41)$$

Sachant que

$$\begin{cases} N\dot{c}_1c_1^* = Nc_1^*\frac{i}{\hbar}\mu_{21}c_2Ee^{-i\omega_a t} = \frac{i}{\hbar}\frac{1}{2}\mathcal{P}e^{-i\omega_c t}E = -N\dot{c}_2^*c_2 \\ N\dot{c}_2c_2^* = Nc_2^*\frac{i}{\hbar}\mu_{21}^*c_1Ee^{+i\omega_a t} = \frac{i}{\hbar}\frac{1}{2}\mathcal{P}^*e^{+i\omega_c t}E = -N\dot{c}_1^*c_1 \end{cases} \quad (3.42)$$

On peut ré-écrire \dot{D}

$$\dot{D}(t) = -\frac{i}{\hbar}(\mathcal{P}e^{-i\omega_c t} - \mathcal{P}^*e^{+i\omega_c t})E \quad (3.43)$$

Sachant que $E = \frac{1}{2}[\mathcal{E}(t)e^{-i\omega_c t} + \mathcal{E}^*(t)e^{i\omega_c t}]$

$$\dot{D}(t) = -\frac{i}{2\hbar}(\mathcal{P}\mathcal{E}^* - \mathcal{E}\mathcal{P}^*) - \frac{i}{2\hbar}(\mathcal{P}\mathcal{E}e^{-2i\omega_c t} - \mathcal{P}^*\mathcal{E}^*e^{+2i\omega_c t}) \quad (3.44)$$

où le dernier terme est nul, la fréquence d'oscillation étant trop élevée. Nous avons alors établi l'équation régissant l'évolution de l'inversion de population

$$\dot{D}(t) = -\frac{i}{2\hbar}(\mathcal{P}\mathcal{E}^* - \mathcal{E}\mathcal{P}^*) \quad (3.45)$$

Termes de relaxation et de pompe

A. AMORTISSEMENT DE LA POLARISATION MACROSCOPIQUE

Le système d'équation (3.37) montre que $c_i \propto E$: si le champ est nul et que l'atome est excité alors l'atome reste indéfiniment dans cet état. Ceci n'est pas possible et cette aberration vient du fait que (3.37) ne tien compte que des interactions cohérentes mais il faut également tenir compte que les niveaux d'énergies ont un temps de vie fini, ces amplitudes de probabilité doivent donc décroire même en absence de champ.

Supposons $E = 0$. Soit $|c_j|^2$ la probabilité que le système soit dans l'état j et $1/\gamma_j$ le temps de vie dans l'état j

$$\begin{aligned} |c_1|^2 &\propto \exp(-\gamma_1 t) \\ |c_2|^2 &\propto \exp(-\gamma_2 t) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} c_1 &\propto \exp(-\gamma_1 t/2) \\ c_2 &\propto \exp(-\gamma_2 t/2) \end{aligned} \quad (3.46)$$

Avec (3.31) : $\mathcal{P}(t) \propto c_1^*c_2$ et comme $\mathcal{P}(t) \propto \exp\left(-\frac{\gamma_1+\gamma_2}{2}t\right)$, on en tire

$$\dot{\mathcal{P}}(t) = -\gamma_{\perp}\mathcal{P}, \quad \text{où } \gamma_{\perp} = (\gamma_1 + \gamma_2)/2 \quad (3.47)$$

Ce terme γ_{\perp} est un terme d'amortissement qui permet de tenir compte des dés-excitations spontanées.

Lorsqu'on parle de la largeur de raie correspondant au profil du gain, il n'y avait pas que le temps de vie qui entrait en jeu : il fallait tenir compte des déphasages introduits par les collision. Après un certain temps, les dipôles microscopiques deviennent indépendants

$$\vec{P} \neq N\vec{p}_a \quad (3.48)$$

Il faut donc modifier l'expression⁴ du γ_{\perp}

$$\gamma_{\perp} = \frac{1}{2} \left(\gamma_1 + \gamma_2 + \frac{1}{t_{nr1}} + \frac{1}{t_{nr2}} + \frac{2}{\tau_0} \right) \quad (3.49)$$

On trouve alors la **première équation de Bloch**

4. Le 2 avec τ_0 vient du fait qu'il y a deux polarisations

À retenir :

$$\dot{\mathcal{P}}(t) = -\gamma_{\perp} \mathcal{P} - i(\omega_a - \omega_c) \mathcal{P}(t) - \frac{i}{\hbar} |\mu_{21}|^2 \mathcal{D} \mathcal{E} \quad (3.50)$$

où le premier terme est l'amortissement de \mathcal{P} , le second met en évidence la différence de fréquence entre la cavité et le laser qui veulent tous deux avoir leur résonance et le troisième terme le couplage entre le champ EM et le milieu atomique.

AMORTISSEMENT DE \mathcal{D} ET TERME DE POMPE

Nous avons pour l'instant procédé de façon très générale en tenant compte de l'amortissement de la densité de population. On se rend bien compte qu'il faut un mécanisme qui mette le système hors équilibre pour que $N_1 \ll N_2$ de façon à avoir émission laser. On va donc procéder à un pompage incohérent dont le but est de créer une inversion de la population⁵ (collisions, pompage optique, électrique,...)⁶

$$\dot{\mathcal{D}} = +\gamma_{\parallel} \hat{\mathcal{D}} + \dots \quad (3.51)$$

où $\hat{\mathcal{D}}$ est le **coefficient de pompe**. On en tire la **deuxième équation de Bloch**

À retenir :

$$\dot{\mathcal{D}}(t) = -\frac{i}{2\hbar} (\mathcal{P} \mathcal{E}^* - \mathcal{E} \mathcal{P}^*) - \gamma_{\parallel} (\mathcal{D} - \hat{\mathcal{D}}) \quad (3.52)$$

où le premier terme est le couplage entre le champ EM et le milieu et le second le terme d'amortissement et de pompage.

THÉORÈME: EQUATION DE MAXWELL-BLOCH POUR LE LASER

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{E}}(t) &= -\frac{K_c}{2} \mathcal{E} + \frac{i\omega_c}{2\varepsilon_0} \mathcal{P} \\ \dot{\mathcal{P}}(t) &= -\gamma_{\perp} \mathcal{P} - \frac{i}{\hbar} |\mu_{21}|^2 \mathcal{D} \mathcal{E} - i(\omega_a - \omega_c) \mathcal{P}(t) \\ \dot{\mathcal{D}}(t) &= -\gamma_{\parallel} (\mathcal{D} - \hat{\mathcal{D}}) - \frac{i}{2\hbar} (\mathcal{P} \mathcal{E}^* - \mathcal{E} \mathcal{P}^*) \end{aligned} \quad (3.53)$$

où \mathcal{E}, \mathcal{P} sont des enveloppes complexe variant lentement et \mathcal{D} est réel.

3.2 État stationnaire d'un laser

Le slide 20 détaille une longue étape mathématique ayant pour but d'écrire la relation d'inversion de population. Les équations importantes sont

$$[K_c/2 - i(\omega_L - \omega_c)] \mathcal{E}_0 = \frac{i\omega_c}{2\varepsilon_0} \mathcal{P}_0 \quad (3.54)$$

$$\mathcal{P}_0 = \frac{|\mu_{21}|^2}{\hbar} \frac{\mathcal{D} \mathcal{E}_0}{(\omega_L - \omega_a) + i\gamma_{\perp}} \quad (3.55)$$

Avec celles-ci, on en tire

$$\mathcal{D} = \hat{\mathcal{D}} \left/ \left[1 + \frac{|\mathcal{E}_0|^2}{\mathcal{I}_s} \frac{1}{1 + [(\omega_L - \omega_a)/\gamma_{\perp}]^2} \right] \right. \quad (3.56)$$

5. Celui-ci est indépendant du fait que le milieu lasse.

6. D'où vient ce truc ?

Lorsque $\omega_L = \omega_a$ la cavité est accordée :

$$\mathcal{D} = \frac{\hat{\mathcal{D}}}{1 + |\mathcal{E}_0|^2/\mathcal{I}_s} \quad (3.57)$$

On parle de **saturation de l'inversion de population** où \mathcal{I}_s est l'intensité de saturation qui ne dépend que des paramètres du milieu. On peut remarquer que plus l'intensité est élevée, plus l'inversion de population est petite. On remarque en effet que l'inversion est plus faible en présence d'un champ EM car celui-ci provoque de l'émission stimulée qui tend à diminuer cette inversion de population.

3.2.1 Intensité laser et inversion de population

Considérons $\omega_c = \omega_a = \omega_L$. Si on n'a pas de champ $\mathcal{E}_0 = 0$, pas de dipôle, polarisation nulle $\mathcal{P}_0 = 0$ et $\mathcal{D} = \hat{\mathcal{D}}$. Ceci est la solution triviale mais il en existe une autre. Sachant que

$$K_c \mathcal{E}_0 = \frac{i\omega_c}{\varepsilon_0} \mathcal{P}_0, \quad \mathcal{P}_0 = -i \frac{|\mu_{21}|^2}{\hbar\gamma_\perp} \mathcal{D} \mathcal{E}_0 \quad (3.58)$$

On en tire

$$-i \frac{|\mu_{21}|^2}{\hbar\gamma_\perp} \mathcal{D} \mathcal{E}_0 = -i \frac{K_c \varepsilon_0}{\omega_c} \mathcal{E}_0 \quad (3.59)$$

Soit encore

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_s = \frac{K_c \varepsilon_0 \hbar \gamma_\perp}{\omega_c |\mu_{21}|^2} \quad (3.60)$$

L'inversion de population est "bloquée" à une constante \mathcal{D}_s . En terme d'intensité (avec (3.56))

$$\mathcal{D}_s = \frac{\hat{\mathcal{D}}}{1 + |\mathcal{E}_0|^2/\mathcal{I}_s} \Rightarrow |\mathcal{E}_0|^2 = \left(\frac{\hat{\mathcal{D}}}{\mathcal{D}_s} - 1\right) \mathcal{I}_s \quad (3.61)$$

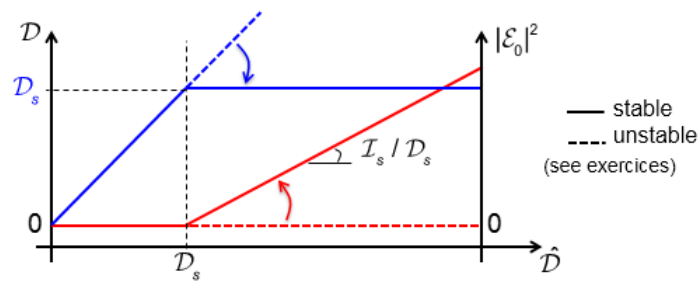


FIGURE 3.9 – Courbes caractéristiques d'un laser

La première solution $\mathcal{D} < \mathcal{D}_s$ correspond au laser éteint, champ d'intensité nul dont la densité de population est directement proportionnelle (il n'y a que de la fluorescence ici). A partir d'un certain moment il y a bifurcation vers une seconde solution et on retrouve la solution non triviale pour laquelle l'inversion est bloquée à une constante et l'inversion augmente linéairement avec $\hat{\mathcal{D}}$. On nomme alors \mathcal{D}_s le *seuil laser*.

3.2.2 Susceptibilité électrique et gain

Reprenons notre équation de polarisation (3.55) et isolons $\chi(\omega)$

$$\mathcal{P}_0 = \frac{|\mu_{21}|^2}{\hbar} \frac{\mathcal{D}\mathcal{E}_0}{(\omega_L - \omega_a) + i\gamma_\perp} \equiv \varepsilon_0 \chi(\omega) \mathcal{E}_0 \quad \Leftrightarrow \quad \chi(\omega) = \frac{|\mu_{21}|^2}{\hbar \varepsilon_0} \frac{\mathcal{D}}{(\omega_L - \omega_a) + i\gamma_\perp} \quad (3.62)$$

Avec (3.56)

$$\chi = \frac{|\mu_{21}|^2}{\hbar \varepsilon_0} \frac{\hat{\mathcal{D}}}{\gamma_\perp^2} \left(\frac{(\omega_L - \omega_a) - i\gamma_\perp}{(\omega_L - \omega_a)^2 + \gamma_\perp^2} \right) \left(\frac{\gamma_\perp^2 + (\omega_L - \omega_a)^2}{1 + |\mathcal{E}_0|^2/\mathcal{I}_s + [(\omega_L - \omega_a)/\gamma_\perp]^2} \right) \quad (3.63)$$

Après simplification

$$\chi(\omega) = \frac{|\mu_{21}|^2}{\hbar \varepsilon_0 \gamma_\perp} \hat{\mathcal{D}} \frac{(\omega_L - \omega_a)/\gamma_\perp - i}{1 + |\mathcal{E}_0|^2/\mathcal{I}_s + [(\omega_L - \omega_a)/\gamma_\perp]^2} = \chi' + i\chi'' \quad (3.64)$$

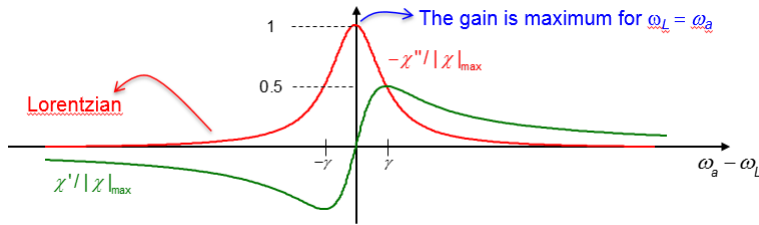


FIGURE 3.10

serve une observation de la partie réelle de la susceptibilité et donc une variation de l'indice de réfraction.

Le terme χ'' donne le gain ou les pertes. Il apparait un terme $|\mathcal{E}_0|^2/\mathcal{I}_s$ qui dépend de l'amplitude du champ

$$\chi = -\frac{|\mu_{21}|^2}{\hbar \varepsilon_0 \gamma_\perp} \hat{\mathcal{D}} \frac{1}{1 + |\mathcal{E}_0|^2/\mathcal{I}_s + [(\omega_L - \omega_a)/\gamma_\perp]^2} \quad (3.65)$$

où $\mathcal{G} = -\alpha = -\frac{\omega_L}{c} \chi$. Étudions celle-ci en fonction de l'intensité du champ

1. *Cas non-sature* ($|\mathcal{E}_0|^2 \ll \mathcal{I}_s$).

$$\mathcal{G} = \frac{\hbar \omega_0 B n_g}{c} g(\omega_0) (N_2 - N_1) \quad (3.66)$$

Il s'agit du cas où l'amplitude du champ est petite par rapport à l'intensité de saturation. Comme le champ est très petit, nous sommes en dessous du seuil laser et le gain est donné en fonction de la fréquence via $g(\omega)$ (une lorentzienne) comme l'expression χ'' ci-dessus. L'avantage est que l'on va pouvoir, avec Maxwell-Bloch, tirer par identification un coefficient d'Einstein

$$B \propto |\mu_{21}|^2 \quad (3.67)$$

Notons que l'on retrouve la même expression qu'au chapitre 2 pour $g(\omega)$ avec $\gamma_n = 2\gamma_\perp$.

2. *Cas sature* ($\mathcal{I}_s \ll |\mathcal{E}_0|^2$).

$$\mathcal{G}(\omega) = \frac{\omega_L |\mu_{21}|^2}{c \hbar \varepsilon_0 \gamma_\perp} \frac{\hat{\mathcal{D}}}{1 + |\mathcal{E}_0|^2/\mathcal{I}_s} \frac{1}{1 + [(\omega - \omega_a)/\gamma]^2} \quad (3.68)$$

Il n'est plus ici possible de le négliger, mais on peut le mettre en évidence. On retrouve également une lorentzienne mais plus large car le "nouveau" γ est l'ancien multiplié par un facteur supérieur à l'unité

$$\gamma_{\perp} \rightarrow \gamma = \gamma_{\perp} \sqrt{1 + |\mathcal{E}_0|^2 / \mathcal{I}_s} \quad (3.69)$$

Il s'agit d'un élargissement homogène de $g(\omega)$ (tous les atomes réagissent de la même façon, par exemple avoir un champ dans la cavité rend le spectre plus large car celui-ci crée de l'émission stimulée).

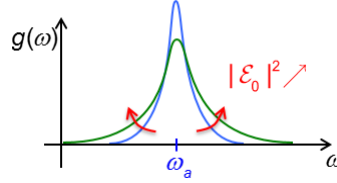


FIGURE 3.11 – $\omega_{c,j}$ est la fréquence angulaire de mode de la cavité. $\omega_{c,0}$ est la fréquence la plus proche de la fréquence atomique ω_a .

Une question légitime serait de se demander ce que vaut le gain après la saturation. On sait qu'il vaut les pertes ce qui ne saute pas aux yeux en regarder MB. Reprenons (3.54) et (3.55)

$$K_c \mathcal{E}_0 = \frac{i\omega_c}{\varepsilon_0} \mathcal{P}_0, \quad \mathcal{P}_0 = -i \frac{|\mu_{21}|^2}{\hbar \gamma_{\perp}} \mathcal{D} \mathcal{E}_0 \quad (3.70)$$

En combinant les deux, on exprime pour les pertes

$$K_c = \frac{\omega_L}{\varepsilon_0} \frac{|\mu_{21}|^2}{\hbar \gamma_{\perp}} \mathcal{D}_s \quad (3.71)$$

De l'autre côté, nous avons pour le gain

$$\mathcal{G} = -\frac{\omega_L}{c} \chi = \frac{\omega_L}{c} \frac{|\mu_{21}|^2}{\hbar \varepsilon_0} \frac{\mathcal{D}}{\gamma_{\perp}} \quad (3.72)$$

Comme à la saturation $\mathcal{D} = \mathcal{D}_s$, on arrive à

$$K_c = c \mathcal{G} \quad (3.73)$$

Ce qui est une solution non triviale pour pertes = gain (condition d'oscillation laser). En conclusion en dessous du seuil laser $\hat{\mathcal{D}}_s$, \mathbb{D} et \mathcal{G} garde une valeur constante tel que le gain soit égal au pertes. Quand $\hat{\mathcal{D}}$ augmente au dessus du seuil, cette augmentation supplémentaire d'énergie est convertie en photons lasant

3.2.3 Fréquence du champ laser

Jusqu'ici nous avons considéré que $\omega_c = \omega_a$ mais que se passe-t-il (pour ω_L) si les deux sont différents ? Reprenons (3.54) et (3.55)

$$[K_c/2 - i(\omega_L - \omega_c)] \mathcal{E}_0 = \frac{i\omega_c}{2\varepsilon_0} \mathcal{P}_0, \quad \mathcal{P}_0 = \frac{|\mu_{21}|^2}{\hbar} \frac{\mathcal{D} \mathcal{E}_0}{(\omega_L - \omega_a) + i\gamma_{\perp}} \quad (3.74)$$

En substituant l'une dans l'autre

$$[K_c/2 - i(\omega_L - \omega_c)] \mathcal{E}_0 = \frac{i\omega_c}{2\varepsilon_0} \frac{|\mu_{21}|^2}{\hbar} \frac{\mathcal{D} \mathcal{E}_0}{(\omega_L - \omega_a) + i\gamma_{\perp}} \quad (3.75)$$

En isolant l'inversion de population

$$\Rightarrow \mathcal{D} = \frac{-2i\varepsilon_0\hbar}{\omega_c|\mu_{21}|^2} [K_c/2 - i(\omega_L - \omega_c)][(\omega_L - \omega_a) + i\gamma_\perp] \quad (3.76)$$

Il s'agit d'un nombre complexe : comme nous savons que l'inversion de population est réelle, la partie imaginaire doit forcément être nulle

$$\mathcal{D} = \frac{2\varepsilon_0\hbar}{\omega_c|\mu_{21}|^2} \left\{ \underbrace{-i\left[\frac{K_c}{2}(\omega_L - \omega_a) + \gamma_\perp(\omega_L - \omega_c)\right]}_{=0} - (\omega_L - \omega_a)(\omega_L - \omega_c) + \frac{K_c\gamma_\perp}{2} \right\} \quad (3.77)$$

La partie imaginaire étant nulle, on en tire que

$$(\omega_L - \omega_a)K_c/2 = -\gamma_\perp(\omega_L - \omega_c) \quad (3.78)$$

Et donc

$$\omega_L = \frac{\omega_c 2\gamma_\perp + \omega_a K_c}{2\gamma_\perp + K_c} \quad (3.79)$$

La fréquence laser est une sorte de moyenne entre les deux pondérée par le coefficient d'amortissement K_c et $2\gamma_\perp = \gamma_h$. Si la cavité est de très haute finesse (par rapport à la largeur de la transition atomique), la fréquence laser va coïncider avec celle de la cavité

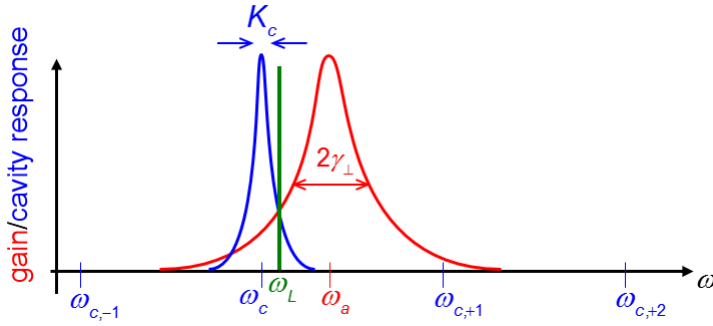


FIGURE 3.12

ω_c . Inversement, si c'est le milieu atomique qui a une raie très étroite on observera $\omega_L = \omega_a$. On nomme ω_L le terme de *tirage en fréquence*.

Nous avons vu que la forme de raie a tendance à s'élargir lorsque l'on est au delà du seuil laser (ceci n'a de sens que si le gain a une largeur qui s'étend sur plusieurs mode). La courbe en noir est obtenue lorsque l'on augmente la pompe (de largeur $2\gamma_\perp$). A un moment donné, la courbe noire croise la ligne des pertes et donne lieu à la courbe rouge : cela commence à laser. Si on augmente encore la puissance le point vert ne va pas changer de place mais nous aurons plus d'émission stimulée. Une seule fréquence lasera, les autres, étant en dessous du seuil gain = pertes, ne laseront pas.

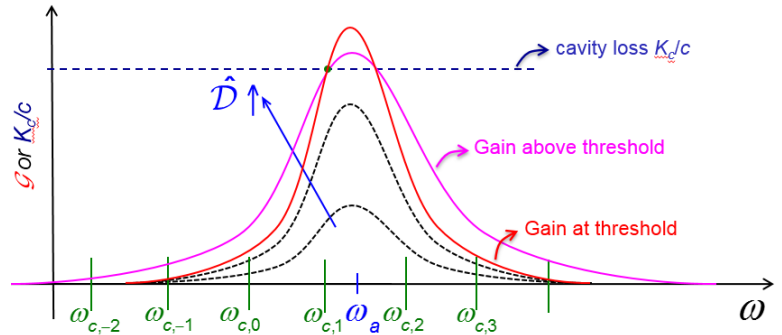


FIGURE 3.13

Nous venons de voir le cas homogène, regardons ce qu'il en est pour les *lasers with inhomogeneously broadened gain line shape*. En effet, les lasers sont souvent multimodes. Si il y a des classes d'atomes, elles auront chacune un mode différent et on peut avoir plusieurs émissions

laser : régime multimodale. Pour comprendre ceci, regardons l'équation de l'inversion de population (3.77)

$$\mathcal{D} = \frac{2\varepsilon_0\hbar}{\omega_c|\mu_{21}|^2} \left\{ \frac{K_c\gamma_{\perp}}{2} - (\omega_L - \omega_a)(\omega_L - \omega_c) \right\} \quad (3.80)$$

Sachant que $\omega_L - \omega_a = -\frac{2\gamma_{\perp}}{K_c}(\omega_L - \omega_c)$

$$\mathcal{D} = \frac{2\varepsilon_0\hbar}{\omega_c|\mu_{21}|^2} \frac{K_c\gamma_{\perp}}{2} \left\{ 1 + \frac{4}{K_c^2}(\omega_L - \omega_c)^2 \right\} = \mathcal{D}_s \left\{ 1 + \frac{4}{K_c^2}(\omega_L - \omega_c)^2 \right\} = \mathcal{D}_s \left\{ 1 + \frac{1}{\gamma_{\perp}^2}(\omega_L - \omega_a)^2 \right\} \quad (3.81)$$

Ici comme $\omega_L \neq \omega_a$, l'inversion de population se fait à $\mathcal{D} > \mathcal{D}_s$: comme il y a un petit décalage entre les résonances, il faut un peu plus d'inversion de population que si on était à résonance (nous sommes dans un cas moins optimal, le cas optimal étant $\mathcal{D} \approx \mathcal{D}_s$).

La solution stationnaire est représentée en rouge. En noir, il s'agit du cas où le gain est supérieur aux pertes, il va donc y avoir une diminution du gain jusqu'à arriver à la condition où le gain vaut les pertes. Il est possible d'avoir un multimode car le fait qu'on ait un lasage à un ω_c n'influence pas le lasage d'un autre ω_c . Entre deux de ces fréquences, le champ n'est pas résonant. En l'absence de lasage, le gain peut être supérieur aux pertes. En dessous de la ligne en pointillé, il n'y aura pas de lasage, nous décrivons bien ici un laser multimode (on parle de trous spectraux, typique He-Ne)⁷.

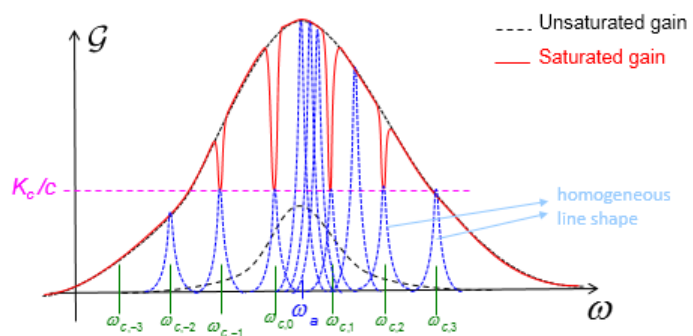


FIGURE 3.14

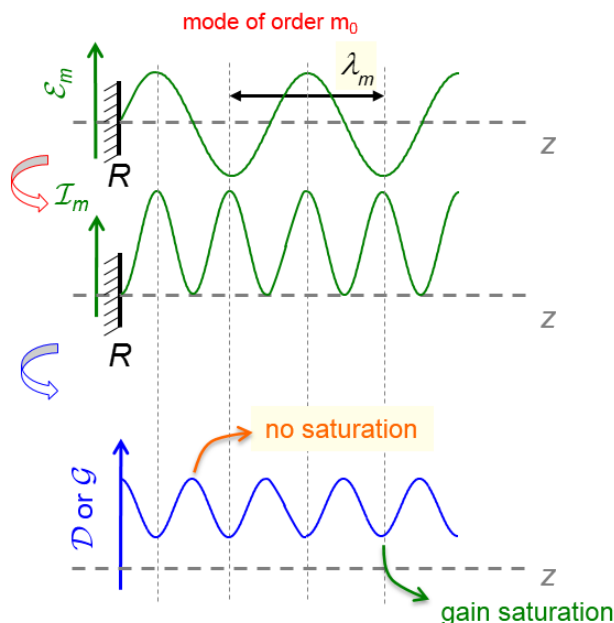


FIGURE 3.15

La réalité est plus compliquée, car la géométrie joue également un rôle. Nous n'avons pour l'instant fait aucune différence entre une cavité anneau et FP. Le FP peut donner lieu à des interférences et donc une onde stationnaire. En augmentant la pompe pour un mode ω_0 on va rencontrer à un certain moment la condition *gain=pertes* donnant lieu à un certain profil d'intensité. Comme l'inversion de population varie avec I/I_s on crée des trous spatiaux. Si un mode se situe juste dans le creux de \mathcal{G} il n'y a pas assez de gain et on n'observera jamais de lasage. Par contre, il est possible (sur un pic de \mathcal{G}) d'avoir un autre lasage car la fréquence ne va pas se "nourrir spatialement" au même endroit que le premier mode qui s'est mis à laser.

7. Paragraphe pas clair, lire slide 31

Chapitre 4

Équations de bilan du laser et du mécanisme de pompe

4.1 Équation de bilan du laser et équations de Maxwell-Bloch

Reprenons les équations de Maxwell-Bloch d'un laser

$$\begin{cases} \dot{\mathcal{E}}(t) = -\frac{K_c}{2}\mathcal{E} + \frac{i\omega_c}{2\varepsilon_0}\mathcal{P} & (1) \\ \dot{\mathcal{P}}(t) = -\gamma_{\perp}\mathcal{P} - \frac{i}{\hbar}|\mu_{21}|^2\mathcal{D}\mathcal{E} - i(\omega_a - \omega_c)\mathcal{P}(t) & (2) \\ \dot{\mathcal{D}}(t) = -\gamma_{\parallel}(\mathcal{D} - \hat{\mathcal{D}}) - \frac{i}{2\hbar}(\mathcal{P}\mathcal{E}^* - \mathcal{E}\mathcal{P}^*) & (3) \end{cases} \quad (4.1)$$

Les différents temps de vies définissent les *classes* des lasers : *AB* si la polarisation est la plus rapide alors que si le champ est le plus lent, on parlera de la classe *A*. Faisons ici l'hypothèse que la polarisation répond très rapidement par rapport à la dynamique de \mathcal{E} et \mathcal{D}

$$\gamma_{\perp} \gg \gamma_{\parallel}, K_c/2 \quad (4.2)$$

Considérons $\omega_a = \omega_c$ mais aussi $\omega_L = \omega_c$. La seconde équation de MB (2) devient

$$\dot{\mathcal{P}}(t) = -\gamma_{\perp}\mathcal{P} - \frac{i}{\hbar}|\mu_{21}|^2\mathcal{D}\mathcal{E} \quad (4.3)$$

En supposant \mathcal{E}, \mathcal{D} constant

$$\mathcal{P}(t) = \mathcal{P}(0)e^{-\gamma_{\perp}t} - \frac{i|\mu_{21}|^2}{\hbar\gamma_{\perp}}\mathcal{E}\mathcal{D}(1 - e^{-\gamma_{\perp}t}) \quad (4.4)$$

Si $t \gg 1/\gamma$ (équivalent à $\dot{\mathcal{P}}(t) = 0$ dans (2))

$$\mathcal{P} = -\frac{i|\mu_{21}|^2}{\hbar\gamma_{\perp}}\mathcal{E}\mathcal{D} \quad (4.5)$$

Il s'agit d'une évolution adiabatique de \mathcal{P} qui garde sa valeurs stationnaire. Remplaçons cette dernière expression de \mathcal{P} dans (1)

$$\dot{\mathcal{E}}(t) = -\frac{K_c}{2}\mathcal{E} + \frac{i\omega_c}{2\varepsilon_0}\left(-\frac{i|\mu_{21}|^2}{\hbar\gamma_{\perp}}\mathcal{E}\mathcal{D}\right) \quad (4.6)$$

Faisons pareil avec (3)

$$\dot{\mathcal{D}}(t) = -\gamma_{\parallel}(\mathcal{D} - \hat{\mathcal{D}}) - \frac{|\mu_{21}|^2}{2\hbar^2\gamma_{\perp}} 2\mathcal{D}|\mathcal{E}|^2 \quad (4.7)$$

Cette expression de l'inversion de population dépend du terme de pompage ainsi que du module carré de \mathcal{E} . Afin de remplacer l'une dans l'autre, on va multiplier cette expression par son conjugué ($\mathcal{E}^*\mathcal{E} = |\mathcal{E}|^2$). Si $\mathcal{I} = |\mathcal{E}|^2$, alors

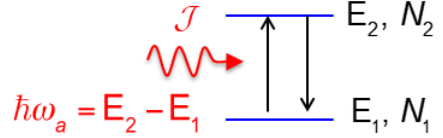
À retenir :

$$\begin{cases} \dot{\mathcal{I}}(t) = -K_c\mathcal{I} + \frac{\omega_c|\mu_{21}|^2}{\hbar\gamma_{\perp}\varepsilon_0}\mathcal{D}\mathcal{I} & (4) \\ \dot{\mathcal{D}}(t) = -\gamma_{\parallel}(\mathcal{D} - \hat{\mathcal{D}}) - \frac{|\mu_{21}|^2}{\hbar^2\gamma_{\perp}}\mathcal{D}\mathcal{I} & (5) \end{cases} \quad (4.8)$$

Ces deux équations sont connues comme les équations de bilan d'un laser. Elles décrivent la dynamique des laser de classes dynamiques A et B.

4.2 Systèmes à deux niveaux

Considérons un flux de photon incident dont l'énergie est celle entre deux niveaux. Pour une onde monochromatique incidente à ω_0 :



$$u = n_p\hbar\omega_0\delta(\omega - \omega_0), \quad \mathcal{J} = n_pv_g, \quad \hbar\omega_a = E_2 - E_1 \quad (4.9)$$

FIGURE 4.1

Il est possible de calculer le taux d'absorption $\Gamma_{12} = \int B_{12}u(\omega)g(\omega)N_1d\omega$ en y remplaçant u monochromatique

$$\Gamma_{12} = \sigma\mathcal{J}N_1 \quad (4.10)$$

où $\sigma = B\hbar\omega_0g(\omega_0)/v_g$ est la section efficace (m^2). Le taux de variation de la population atomique s'exprime

$$\dot{N}_2 = \Gamma_{12} - \Gamma_{21} - T_{21}N_2, \quad \dot{N}_1 = -(\Gamma_{12} - \Gamma_{21}) + T_{21}N_2 \quad (4.11)$$

où $T_{21} = A_{21} + S_{21}$ (le premier est radiatif, pas le second)¹. En tire

$$\frac{d}{dt}(N_1 + N_2) = 0 \Rightarrow N_1 + N_2 = N \quad (4.12)$$

Pour la solution stationnaire (par exemple $\dot{N}_2 = 0$)

$$\sigma\mathcal{J}(N_1 - N_2) = T_{21}N_2 \quad (4.13)$$

Sachant que $\mathcal{D} = N_2 - N_1 \leftrightarrow \mathcal{D} + N = 2N_2$

$$-\sigma\mathcal{J}\mathcal{D} = T_{21}(\mathcal{D} + N)/2 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{D} = -N \frac{1}{1 + 2\sigma\mathcal{J}/T_{21}} \quad (4.14)$$

Cette expression est logique car s'il n'y a pas de courant on trouve $\mathcal{D} = -N$: on ne peut pas avoir d'inversion de population car \mathcal{D} est toujours négatif.

1. Qu'est ce que ça représente exactement ?

Explicitons cette expression de l'inversion de population. Nous savons (en substituant les expressions terme à terme) que

$$2\sigma\mathcal{J}/T_{21} = 2\frac{B\hbar\omega_0 g(\omega_0)}{v_g} \frac{I}{\hbar\omega_0} / T_{21} = \frac{I}{I_s} \tilde{g}(\omega_0) \quad (4.15)$$

où $\tilde{g}(\omega_0) = \frac{g(\omega_0)}{g(\omega_a)}$. L'**intensité de saturation** est définie comme ($W.m^{-2}$)

$$I_s = \frac{v_g T_{21}}{2B g(\omega_a)} \quad (4.16)$$

On arrive alors à ré-écrire \mathcal{D}

$$\mathcal{D} = -N/[1 + \frac{I}{I_s} \tilde{g}(\omega_0)] \quad (4.17)$$

Comme $\mathcal{D} < 0$, cela montre qu'il n'est pas possible d'atteindre l'inversion de population dans un régime stationnaire ($\alpha = -\sigma\mathcal{D} > 0$, pas de gain).

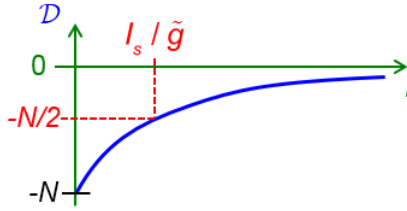


FIGURE 4.2

Considérons le cas d'une absorption

$$\frac{d}{dz} I = -\alpha I \quad (4.18)$$

où $\alpha = -\sigma\mathcal{D} = \sigma N/[1 + \frac{I}{I_s} \tilde{g}(\omega_0)]$. Passons en revue deux cas

1. $I \ll I_s$ (absorption non saturée)

$$\alpha \approx \sigma N \quad \Rightarrow \quad I(z) = I_0 \exp(-\sigma N z) \quad (4.19)$$

A faible intensité (par rapport à celle de saturation) il y a donc beaucoup d'absorption

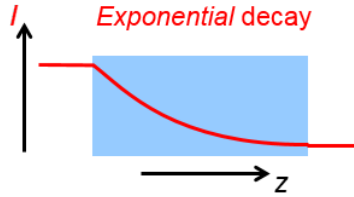


FIGURE 4.3

2. $I \gg I_s$ (absorption saturée)

$$\alpha \approx \sigma N \frac{I_s}{I} \quad \Rightarrow \quad I(z) = I_0 - I_s \sigma N z \quad (4.20)$$

Lorsque l'on atteint une intensité proche de celle de saturation, on observe une décroissance linéaire de l'intensité ce qui est une grosse différence. On parle de *transparence auto-induite*²

2. Heu.. ?

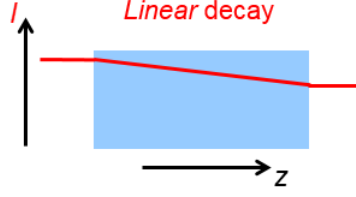


FIGURE 4.4

Même si ce système a deux niveaux, il n'est pas utile pour en faire un laser (car $\mathcal{D} < 0$) mais on peut l'utiliser pour générer de courtes impulsions. Pour avoir un gain dans le système ($\mathcal{D} > 0$) il faut un système atomique avec plus de deux niveaux (au moins trois ou autre niveaux d'énergie participant au lasage/pompage).

4.3 Laser à trois niveaux d'énergie

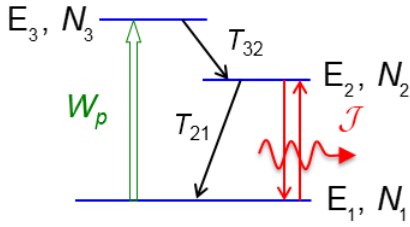


FIGURE 4.5

Pour contrer ce problème, nous allons utiliser un niveau de plus haute énergie dont le but est de nourrir le second niveau et non pas que deux niveau qui se peuplent et dépeuplent. L'idée est de s'arranger pour que le taux de $3 \rightarrow 1 \ll 3 \rightarrow 2$. Nous allons ici considérer un système Er (erbium) à trois niveaux. La densité totale est la somme des densités de chaque niveau.

$$N = N_1 + N_2 + N_3 \quad (6) \quad (4.21)$$

Comme annoncé, on fait l'hypothèse que le niveau 3 se désexcite préférentiellement vers le second niveau et non pas le fondamental

$$T_{31}N_3 \ll T_{32}N_3 \quad (4.22)$$

Soit $W_p = \sigma_p \mathcal{J}_p$ (s^{-1}) le taux de pompage optique. Étudions la variation de densité du niveau trois

$$\dot{N}_3 = W_p N_1 - W_p N_3 - T_{32} N_3 \quad (7) \quad (4.23)$$

Il s'agit de la contribution de la pompe, mais aussi l'émission stimulée $3 \rightarrow 1$ du à la pompe et aux transitions³. De même pour le niveau 2

$$\dot{N}_2 = +T_{32}N_3 - (N_2 - N_1)\sigma\mathcal{J} - T_{21}N_2 \quad (4.24)$$

Il peut être peuplé depuis le niveau 3, il peut avoir de l'émission stimulée, de l'absorption et $T_{21}N_1$ l'émission stimulée de $2 \rightarrow 1$. En faisant de même pour le niveau fondamental

$$\dot{N}_1 = (N_2 - N_1)\sigma\mathcal{J} + T_{21}N_2 - W_p(N_1 - N_3) \quad (4.25)$$

En faisant un peu de mathématiques (non détaillées ici) on peut obtenir une équation donnant le rapport entre l'inversion de population et la densité totale

$$\frac{\mathcal{D}}{N} = \frac{W_p(T_{32} - T_{21}) - T_{21}T_{32}}{3\sigma\mathcal{J}W_p + 2W_pT_{21} + 2\sigma\mathcal{J}T_{32} + T_{21}T_{32} + W_pT_{32}} \quad (4.26)$$

Le dénominateur n'a que des signes positif. S'il n'y a pas de pompe, le rapport est négatif et on n'a pas d'inversion de population (ce qui est cohérent). Pour avoir une inversion, il faut que

3. Expliciter

$T_{32} \gg T_{21}$ ce qui signifie que le temps de désexcitation de $2 \rightarrow 3$ doit être plus petit que $2 \rightarrow 1$.

On peut définir un taux de pompage de transparence (autant d'absorption que d'émission stimulée, dès qu'un photon descend dans le niveau 1, un autre remonte directement dans le niveau 3).

$$W_p^{t-th} = T_{21}T_{32}/(T_{32} - T_{21}) \quad (4.27)$$

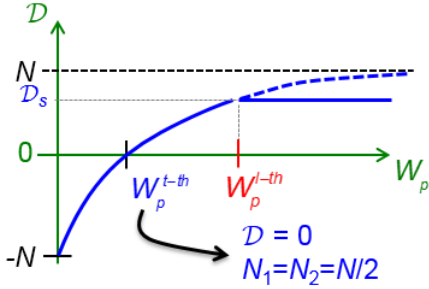
Pour obtenir ce milieu transparent, il faut que $T_{32} \gg T_{21} \Rightarrow W_p^{t-th} \approx T_{21}$.

Faisons cette supposition de milieu transparent impliquant une élimination adiabatique en N_3 . Après quelques substitutions (slide 8)

$$\dot{\mathcal{D}} = 2W_p(N - \mathcal{D})/2 - 2\mathcal{D}\sigma\mathcal{J} - 2T_{21}(N + \mathcal{D})/2 = -(W_p + T_{21})\mathcal{D} - 2\mathcal{D}\sigma\mathcal{J} + (W_p - T_{21})N \quad (4.28)$$

La dernière égalité est formellement égale à

$$\dot{\mathcal{D}}(t) = -\gamma_{\parallel}(\mathcal{D} - \hat{\mathcal{D}}) - \frac{|\mu_{21}|^2}{\hbar^2\gamma_{\perp}}\mathcal{D}\mathcal{I} \quad (4.29)$$



On trouve une valeur du coefficient de relaxation qui dépend de T_{21} mais aussi du taux de pompage ce qui peut ne pas paraître évident. Tout se répartit donc entre le niveau fondamental et le second niveau, le niveau 3 n'est qu'une "étape nécessaire" pour atteindre le second niveau.

Regardons la solution stationnaire au dessus, en dessous

FIGURE 4.6 – Si pompage trop faible : gain négatif \rightarrow pertes

- En dessous du seuil laser $\mathcal{J} = 0$

$$\mathcal{D} = \frac{(W_p - T_{21})}{(W_p + T_{21})}N = \hat{\mathcal{D}} \quad (4.30)$$

Lorsque $W_p > W_p^{t-th}$, $\mathcal{G} = \sigma\mathcal{D}$ et l'on retrouve une amplification exponentielle.

- Au seuil laser.

$$\mathcal{G}_s = \sigma\mathcal{D}_s = K_c/c \quad \Rightarrow \quad W_p^{l-th} = T_{21} \frac{1 + K_c/Nc\sigma}{1 - K_c/Nc\sigma} > T_{21} = W_p^{t-th} \quad (4.31)$$

On observe une diminution de la transparence W si T_{21} et K_c diminuent.

- Au dessus du seuil laser : $\mathcal{J} \neq 0$

$$\mathcal{D} = \frac{(W_p - T_{21})/(W_p + T_{21})}{1 + 2\sigma\mathcal{J}/(W_p + T_{21})}N \quad (4.32)$$

Ceci correspond à la saturation de l'inversion de population : $\mathcal{D} = \mathcal{D}_s = c^{te}$.

En résumé, on augmente W_p jusqu'au seuil de transparence où l'on commence à obtenir du gain. En continuant d'augmenter le laser démarre jusqu'à arriver à quelque chose de constant. On peut voir que ce taux diminue si T_{21} : si tous les atomes restaient en N_2 sans redescendre en N_1 ce serait effectivement génial mais forcément ce n'est pas réalisable et on perd des photons dans une fluorescence inutile. Si l'on regarde le graphe $W_p \propto P$ en fonction de z on voit qu'à partir d'une certaine longueur la fibre devient absorbante !

4.4 Laser à quatre niveaux d'énergie

Le but d'un tel système est de surmonter le problème des lasers à trois niveaux qui nécessite de monter plus de la population atomique dans l'état supérieur pour avoir un gain $\mathcal{G} > 0$. Les équations sont semblables à celles à trois niveau

$$\begin{aligned} N &= N_1 + N_2 + N_3 + N_4 \\ \dot{N}_4 &= W_p(N_1 - N_4) - T_{43}N_4 \\ \dot{N}_3 &= -\sigma\mathcal{J}(N_3 - N_2) + T_{43}N_4 - T_{32}N_3 \\ \dot{N}_2 &= +\sigma\mathcal{J}(N_3 - N_2) + T_{32}N_3 - T_{21}N_2 \\ \dot{N}_1 &= -W_p(N_1 - N_4) + T_{21}N_2 \end{aligned} \quad (4.33)$$

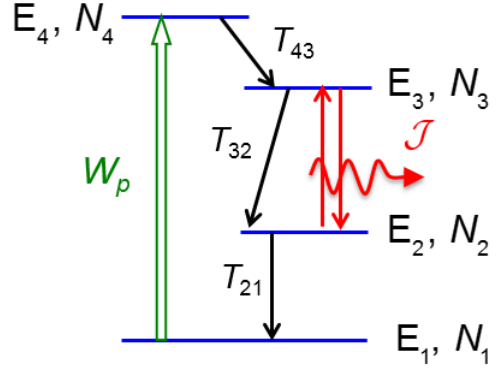


FIGURE 4.7

Par exemple, pour \dot{N}_2 on retrouve le terme de désexcitation stimulée $3 \rightarrow 2$, l'excitation spontanée radiative (ou non) de $3 \rightarrow 2$ ($T_{32}N_3$), la diminution due à une désexcitation spontanée ($T_{21}N_2$) et enfin on peut avoir de l'absorption ($-\sigma N_2$).

Il est important que T_{43} soit rapide⁴ et $T_{43} \gg W_p$. La transition laser se fera entre le niveau 3 et 2 et du 2 il retombera dans le fondamental. Il est aussi nécessaire que le niveau 2 ne soit pas rempli par excitation thermique ($E_1 - E_2 \gg k_B T$) sinon cela ressemble plus à un système à trois niveaux

$$\frac{N_2}{N_1} = e^{-(E_2 - E_1)/k_B T} \ll 1 \quad (4.34)$$

Cette décroissance rapide de $4 \rightarrow 3$ est l'élimination adiabatique de N_4

$$(W_p + T_{43})N_4 = N_1 W_p \approx T_{43}N_4 \Rightarrow N_4 \approx 0 \quad (4.35)$$

Intéressons-nous à la solution stationnaire

$$\left. \begin{aligned} N_1 W_p &= T_{21}N_2 \\ N &= N_1 + N_2 + N_3 \Rightarrow N_3 = N - N_2(1 + T_{21}/W_p) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathcal{D} \equiv N_3 - N_2 \Rightarrow N_2 = \frac{N - \mathcal{D}}{2 + T_{21}/W_p} \quad (4.36)$$

Avec l'expression de \dot{N}_3 , celle de N_3 que nous venons d'obtenir et de même pour \mathcal{D} , on peut écrire

$$\mathcal{D}/N = \frac{W_p(T_{21} - T_{32})}{\sigma\mathcal{J}(2W_p + T_{21}) + W_p(T_{32} + T_{21}) + T_{32}T_{21}} \quad (4.37)$$

Nous voulons que l'inversion de population soit positive sans quoi il n'y aura jamais de laser et l'espèce atomique sera à rejeter. Le dénominateur étant toujours positif, le signe de l'inversion de population dépend du signe de cette fraction. Pour que ce soit le cas, il faut que $T_{21} > T_{32}$: la descente doit se faire plus vite de $2 \rightarrow 1$ que de $3 \rightarrow 2$ car on souhaite qu'un maximum d'atome reste en 3. Si un des atomes redescend comme on souhaite éviter l'accumulation en 2 il faudrait qu'il redescende directement en 1 (pour éviter l'absorption de $2 \rightarrow 3$).

Supposons $T_{21} \gg T_{32}$. Ceci implique l'élimination de N_2 dans l'expression de \dot{N}_2

$$\dot{N}_2 = +\sigma\mathcal{J}(N_3 - N_2) + T_{32}N_3 - T_{21}N_2 \Rightarrow \sigma\mathcal{J}\mathcal{D} + T_{32}N_3 = T_{21}N_2 \quad (4.38)$$

Et donc

$$N_2 = (\sigma\mathcal{J}\mathcal{D} + T_{32}N_3)/T_{21} \approx 0 \Rightarrow N \approx N_1 + N_3 \quad (4.39)$$

4. Et donc très grand de sorte que le temps de vie soit très court

Comme nous avons $N \approx N_1 + N_3$ et $\mathcal{D} = N_3 - N_2 \approx N_3$, on tire avec l'équation de \dot{N}_3

$$\dot{\mathcal{D}} = \dot{N}_3 = -\sigma \mathcal{J} \mathcal{D} + W_p N_1 - T_{32} N_3 \quad (4.40)$$

Sachant que $N_3 \approx \mathcal{D}$ et $N_1 = N - N_3$

$$\dot{\mathcal{D}} = \underbrace{-(W_p + T_{32})\mathcal{D}}_{-\gamma_{\perp} \mathcal{D}} - \sigma \mathcal{J} \mathcal{D} + \underbrace{W_p N}_{\gamma_{\parallel} \hat{\mathcal{D}}} \quad (4.41)$$

Cette équation à une forme similaire à celle précédemment obtenue :

$$\dot{\mathcal{D}}(t) = -\gamma_{\parallel}(\mathcal{D} - \hat{\mathcal{D}}) - \frac{|\mu_{21}|^2}{\hbar^2 \gamma_{\perp}} \mathcal{D} \mathcal{I} \quad (4.42)$$

Étudions la solution stationnaire de (4.41)

- En dessous du seuil laser $\mathcal{J} = 0$

$$\mathcal{D} = \hat{\mathcal{D}} = [W_p / (W_p + T_{32})] N > 0 \quad (4.43)$$

Si pas de pompage, c'est forcément nul. Lorsque l'on pompe, de l'accumulation se forme en 3 et il y aura directement du gain car les constantes sont bien choisies. Si l'on ne se trouve pas dans une cavité N_3 augmentera au maximum jusqu'à N mais pour un laser il y en a une. L'inversion de population tel que gain=perdes va faire démarrer le laser à $\mathcal{D} = \mathcal{D}_s$

- Au seuil laser

$$\mathcal{G}_s = \sigma \mathcal{D}_s = K_c / c \quad \Rightarrow \quad W_p^{sl} = \frac{T_{32} K_c}{N \sigma c - K_c} \quad (4.44)$$

Le numérateur est positif si $N \sigma c > K_c$. Plus K_c est faible, plus la condition pertes=gain est facile à obtenir

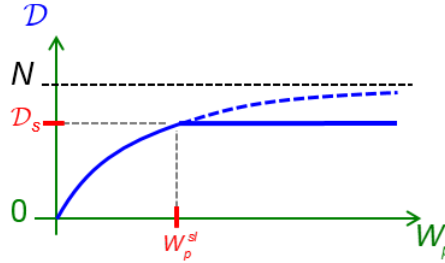


FIGURE 4.8 – L'inversion n'est ici jamais négative, il n'y a pas de risque d'introduire des pertes en pompant trop peu.

Notons que les laser CO_2 sont des lasers à trois niveaux mais suivent les mêmes équations que les lasers à 4 niveaux⁵.

5. Lire illustration notes personnelles slide 15.

4.5 Rendement laser

Le but de cette section est de déterminer les points critiques qui vont faire en sorte que le rendement soit très important ou très faible. Le rendement d'un laser suit bien évidemment la définition standard

$$\eta_l \equiv \frac{\text{Output laser power}}{\text{Pump power}} = \frac{P_{\text{out}}}{P_{\text{in}}} \quad (4.45)$$

Par simplicité au niveau des conversions, on va supposer que le pompage est optique. La puissance de sortie est liée à la fraction quittant la cavité

$$1/t_c = \alpha_i c - (c/L) \ln(R_1) = \alpha_i c + \alpha_m c = \alpha_c c \quad (4.46)$$

où $-(c/L) \ln(R_1)$ sont les pertes dues aux miroirs. On les note généralement $-\alpha_m$ mais il faut bien gardé que ce sont des pertes utiles contrairement à α_i , les pertes internes. Le taux de photons quittant la cavité par le coupleur de sortie (miroir 1) est donné par

$$\alpha_m \cdot c \cdot N_p \quad (4.47)$$

où N_p est le nombre de photons dans la cavité. On peut l'écrire

$$N_p = n_p AL \quad (4.48)$$

où n_p est la densité de photon dans la cavité, AL le volume occupé par les photons (mode laser) dans la cavité avec A la "surface transverse" du mode laser. L'intensité sortant s'écrit

$$P_{\text{out}} = \alpha_m c n_p AL \hbar \omega_L \quad (4.49)$$

Il est plus intéressant d'écrire l'intensité de la cavité en terme de flux. C'est faisable sachant que la densité de photon peut s'écrire⁶

$$n_p = \mathcal{J}_L / c \quad \text{où} \quad \mathcal{J}_L = \mathcal{J}_s \left(\frac{\hat{\mathcal{D}}}{\mathcal{D}_s} - 1 \right) \approx \mathcal{J}_s \frac{\hat{\mathcal{D}}}{\mathcal{D}_s} \quad (4.50)$$

En outre, la condition d'oscillation laser étant $\sigma_L \mathcal{D}_s = K_c / c = \alpha_c$, on peut ré-écrire \mathcal{J}_L

$$\mathcal{J}_L = \underbrace{\sigma_L \mathcal{J}_s}_{?} \frac{\hat{\mathcal{D}}}{\alpha_c} \quad (4.51)$$

Il faut essayer d'exprimer ce point d'interrogation. Pour se faire, nous allons comparer l'équation de bilan obtenue via Maxwell-Bloch et celle obtenue pour le système à 4 niveaux

$$\dot{\mathcal{D}}(t) = -\gamma_{\parallel}(\mathcal{D} - \hat{\mathcal{D}}) - \underbrace{\frac{|\mu_{21}|^2}{\hbar^2 \gamma_{\perp}} \mathcal{D} \mathcal{I}_s}_{(*)}, \quad \dot{\mathcal{D}} = -(W_p + T_{32})\mathcal{D} - \underbrace{\sigma \mathcal{J} \mathcal{D}}_{(*)} + W_p N \quad (4.52)$$

On s'intéresse aux termes⁷ (*). En remplaçant $\sigma_L \mathcal{J}_s$ par sa définition (et avec la définition de \mathcal{I}_s)

$$\sigma_L \mathcal{J}_s = \frac{|\mu_{21}|^2}{\hbar^2 \gamma_{\perp}} \mathcal{I}_s \quad \text{où} \quad \mathcal{I}_s = \frac{\hbar^2 \gamma_{\parallel} \gamma_{\perp}}{|\mu_{21}|^2} \quad (4.53)$$

6. \mathcal{J}_L est approximée au-delà du seuil laser.

7. Je vois pas en quoi.

Ceci implique que

$$\Rightarrow \sigma_L \mathcal{J}_s = \frac{|\mu_{21}|^2}{\hbar^2 \gamma_\perp} \frac{\hbar^2 \gamma_\parallel \gamma_\perp}{|\mu_{21}|^2} = \gamma_\parallel \quad (4.54)$$

On peut⁸ en déduire \mathcal{J}_L

$$\mathcal{J}_L = \sigma_L \mathcal{J}_s \frac{\hat{D}}{\alpha_c} = \underbrace{\gamma_\parallel \hat{D}}_{W_p N} / \alpha_c \quad (4.55)$$

On en tire la puissance de sortie

$$P_{\text{out}} = \alpha_m \hbar \omega_L c \frac{\mathcal{J}_L}{c} AL = \frac{\alpha_m}{\alpha_c} \hbar \omega_L W_p N AL \quad (4.56)$$

Il ne reste que la puissance d'entrée à considérer. La puissance qui rentre c'est l'énergie par unité dans la cavité soit le flux de photon * l'énergie * aire transverse de pompage

$$P_{\text{in}} = \hbar \omega_p \mathcal{J}_p A_p \quad (4.57)$$

où $\sigma_p \mathcal{J}_p = W_p$. Le **rendement** s'exprime alors

$$\eta_l = \frac{P_{\text{out}}}{P_{\text{in}}} = \frac{\hbar \omega_L}{\hbar \omega_p} \frac{\alpha_m}{\alpha_c} \frac{A}{A_p} \sigma_p N L = \eta_q \eta_d \eta_t \eta_a \quad (4.58)$$

η_q il s'agit du *rendement quantique* : un photon absorbé doit donner un photon laser. Nous avons vu dans les laser à 4 niveaux qu'il devait être supérieur à l'énergie du laser, mais si celui-ci est trop grand on perd pas mal.

η_d il s'agit du *rendement de couplage* : ce sont les pertes utiles. On serait tenté de mettre un mauvais coupleur pour faire tendre ce facteur vers l'unité mais le souci c'est que si on fait ça, il y aura plus de pertes et pour attendre perte = gain il faudra plus pomper : compromis.

η_t il s'agit du *rendement transverse* (recouvrement spatial) : il tend vers zéro si l'aire de pompage est grande devant l'aire occupée par les photons laser. L'idéal c'est d'avoir un mode laser large avec un pompage plus petit

η_a il s'agit du ... Mystère et boule de gomme !

Essayons d'interpréter η_a . Commençons par faire l'hypothèse d'un taux de pompage faible tel que $N \approx N_1$ (ce n'est pas un problème car dès qu'il y a des atomes en N_3 il y a du gain). On suppose également que le milieu à gain est très petit de sorte à supposer que le gain est constant (on est obligé de faire ça car la variable z a disparue des équations par changement de variables).

$$\frac{dN_1}{dt} = -\sigma_p \mathcal{J}_p N = -\sigma_p n_{pp} c N = \frac{dn_{pp}}{dt} \quad (4.59)$$

où n_{pp} est la densité de photons de pompe. En divisant par le temps, il est possible de retrouver ce fameux η_a

$$\frac{\Delta n_{pp}}{\Delta t} = c \frac{\Delta n_{pp}}{L} = -\sigma_p n_{pp} c N \quad \Rightarrow \quad \Delta n_{pp} / n_{pp} = -\sigma_p N L \quad (4.60)$$

Le rendement η_a est donc le rendement d'absorption de la pompe. Dans un cas plus réaliste, il faut tenir compte de la décroissance de l'amplitude avec z . En supposant un faisceau gaussien (bonne hypothèse), le rendement transverse vaut $\eta_t = \frac{A}{A+A_p}$ et on en tire

$$\eta_a = 1 - \exp(-\alpha L) \quad (4.61)$$

8. Comment ?

où $\alpha = \sigma_p(N_1 - N_2) \approx \sigma_p N$. Le rendement laser vaut donc bien

$$\eta_l = \eta_q \eta_d \eta_t \eta_a \quad (4.62)$$

Pour le maximiser, il faut

- Minimiser les pertes internes par rapport à celles du coupleur
- Maximiser l'absorption de la pompe
- Optimiser le recouvrement spatial dans le milieu à gain
- Faible différence d'énergie entre $\hbar\omega_p$ et $\hbar\omega_L$

Chapitre 5

Diodes lasers à semi-conducteurs

5.1 Propriétés électroniques des semi-conducteurs

5.1.1 Modèle de l'électron libre

Il s'agit du modèle le plus simple pour décrire les propriétés des électrons libre dans un cristal : on suppose que l'électron est totalement libre et de fonction d'onde dépendante du temps

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \varphi(\mathbf{r})e^{-i\frac{E}{\hbar}t} \quad (5.1)$$

En une dimension

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{d^2}{dx^2} + \underbrace{V(x)}_{=0} \varphi(x) = E\varphi(x) \quad (5.2)$$

Les solutions sont données par

$$\varphi(x) = \exp(ikx) \quad \Rightarrow \quad E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_e} \quad (5.3)$$

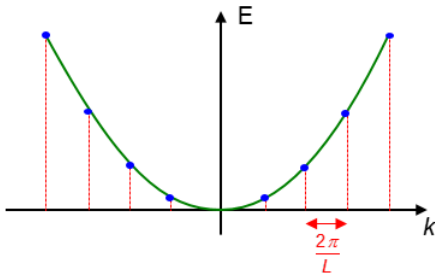


FIGURE 5.1

Il s'agit bien d'une onde plane. En appliquant à celle-ci les conditions de BVK (périodicité multiple de constante de réseau a , $\varphi(x + L) = \varphi(x)$), il faut que k soit un multiple entier de 2π

$$k = p \frac{2\pi}{L} \quad k \in \mathbb{Z} \quad (5.4)$$

Seules des valeurs discrètes de l'énergie sont autorisées et on en tire une relation de dispersion parabolique $E = f(k)$.

En généralisant à 3D avec le vecteur d'onde $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$

$$k_x = p \frac{2\pi}{L}; k_y = q \frac{2\pi}{L}; k_z = r \frac{2\pi}{L} \quad (5.5)$$

Par facilité, on va regarder ce qui se passe dans l'espace réciproque composé de cellules cubiques élémentaires. Les électrons essayent de minimiser leur énergie et donc leur k_i dans l'espace réciproque. Ce sont des fermions : il ne peut pas y avoir $k_x = k_y = k_z = 0$ et ils vont donc remplir l'espace réciproque comme une sphère¹. A $T = 0K$: $k \leq k_F$ (sphère). L'énergie de

1. k_F correspond au niveau d'énergie maximal à température nulle.

Fermi dans un cristal libre est donné par

$$E_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m_e} \quad (5.6)$$

Que vaut E_F ? Le nombre d'électron dans un cristal est donné par $N_e = n_e L^3$ soit encore

$$N_e = 2 \cdot \frac{4/3\pi k_F^3}{(2\pi/L)^3} \quad (5.7)$$

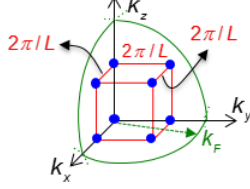


FIGURE 5.2

où le facteur deux correspond aux états possibles par point dans l'espace k (deux spins). On multiplie ensuite par le volume de la sphère de Fermi et on divise par le volume d'une maille élémentaire. On en tire

$$k_F = [3\pi^2 n_e]^{1/3} \quad \Rightarrow \quad E_F = \hbar^2 [3\pi^2 n_e]^{2/3} / (2m_e) \quad (5.8)$$

C'est bien indépendant de la maille du cristal et c'est pour ça qu'on a pris un cube.

5.1.2 Modèle de l'électron quasi-libre

On suppose dans ce modèle qu'il y a des interactions faibles avec les ions du cristal donnant lieu à une probabilité non nulle de réflexion (mais très faible) de la fonction d'onde

$$r^2 + t^2 = 1, \quad r \ll 1 \quad (5.9)$$

Dans un cas 1D, l'électron incident peut être réfléchi partiellement sur chacun des atomes du cristal

$$R = re^{ik2a} + t^2 re^{ik4a} + t^4 re^{ik6a} + \dots = re^{ik2a} (1 + t^2 e^{ik2a} + t^4 e^{ik4a} + \dots) \quad (5.10)$$

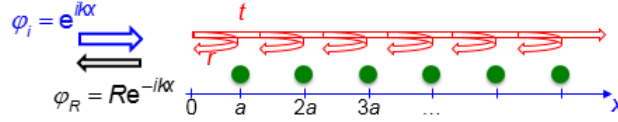


FIGURE 5.3

Il s'agit d'une suite géométrique

$$R = \frac{re^{ik2a}}{1 - t^2 e^{ik2a}} \quad (5.11)$$

où $|t|^2 < 1$. Si le terme de phase vaut 1 alors $R = 1$

$$R = 1 \quad \Leftrightarrow \quad ka = m\pi \quad (5.12)$$

Même si les probabilités sont très faible, l'électron sera réfléchi à un moment.

Pour tirer quelques conclusions intéressantes, résolvons l'ED de Schrödinger 1D à la résonance

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right] \varphi(x) = E \varphi(x) \quad (5.13)$$

où $V(x)$ est le potentiel d'interaction. Nous allons chercher une solution sous la forme d'une onde incidente et une réfléchie, le but étant de déterminer R en fonction de k pour en déduire l'énergie.

$$\varphi(x) = \exp(ikx) + R \exp(-ikx) \quad (5.14)$$

Développons en série le potentiel

$$V(x) = -V_1 \cos(2\pi x/a) + V_2 \cos(4\pi x/a) + \dots \quad (5.15)$$

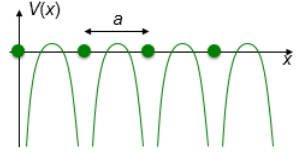


FIGURE 5.4

L'interaction étant faible, nous ne gardons que le premier ordre. Il en vient alors

$$\left[\frac{\hbar^2 k^2}{2m_e} - \frac{V_1}{2} (e^{i2\pi x/a} + e^{-i2\pi x/a}) \right] (e^{ikx} + R e^{-ikx}) = E (e^{ikx} + R e^{-ikx}) \quad (5.16)$$

Multiplions par $e^{\pm ikx}$ et intégrons

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \dots \times e^{-ikx} dx \Rightarrow \frac{\hbar^2 k^2}{2m_e} - \frac{V_1}{2L} R \int_{-L/2}^{L/2} \exp \left[i2 \left(\frac{\pi}{a} - k \right) x \right] dx = E \\ \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \dots \times e^{ikx} dx \Rightarrow \frac{\hbar^2 k^2}{2m_e} R - \frac{V_1}{2L} \int_{-L/2}^{L/2} \exp \left[-i2 \left(\frac{\pi}{a} - k \right) x \right] dx = ER \end{array} \right. \quad (5.17)$$

Si l'on est loin de la condition de réflexion de Bragg ($k \neq \pi/a$) on retrouve la même relation de dispersion que pour un électron libre

$$\int_{-L/2}^{L/2} \dots dx \approx 0 \Rightarrow E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_e} \quad (5.18)$$

A la réflexion de Bragg, nous avons des interférences constructives avec l'onde réfléchiée. En effectuant (1).R - (2), on trouve pour $R = 1$

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_e} - \frac{V_1}{2} \Rightarrow |\varphi(x)|^2 \propto 1 + \cos(2\pi x/a) \quad (5.19)$$

Il s'agit de l'énergie de l'électron libre diminuée d'un petit quelque-chose. Pour $R = -1$

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_e} + \frac{V_1}{2} \Rightarrow |\varphi(x)|^2 \propto 1 - \cos(2\pi x/a) \quad (5.20)$$

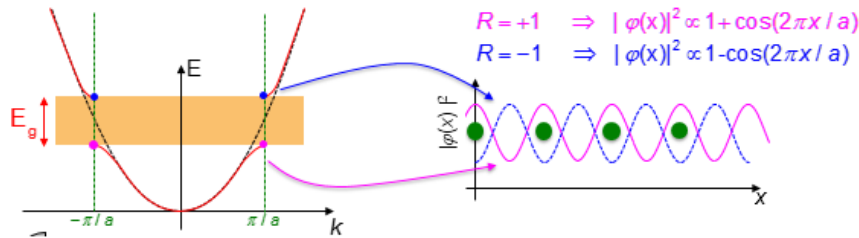


FIGURE 5.5

Si on trace en fonction de x , le maximum de probabilité coïncide avec la position de l'atome et on peut interpréter ça comme un électron lié à l'atome et l'énergie est logiquement plus faible. Dans l'autre cas, il est "entre" les atomes et donc libre de se mouvoir.

L'approche plus rigoureuse du formalisme s'obtient avec les modes de Bloch qui ont la périodicité du cristal

$$\varphi(\mathbf{r}) = u_k(\mathbf{r}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \quad (5.21)$$

Elles impliquent une relation de dispersion périodique dans l'espace \vec{k} , de période $2\pi/a$. Cette périodicité fait part à une structure en bandes permises et interdites. Afin de savoir quelles bandes sont remplies, il est nécessaire de connaître la capacité d'une bande. Si l'on regarde dans l'espace \vec{k} on retrouve la longueur totale divisée par l'écart entre deux niveaux, le tout multiplié par 2 pour tenir compte du spin

$$N_{\text{states}} = 2 \cdot \frac{[2\pi/a]}{[2\pi/L]} = 2 \frac{L}{a} = 2^* \text{ nombre d'atomes} \quad (5.22)$$

où L/a est le nombre d'atomes. Dès lors, le nombre d'électron disponible est donné par la valence multipliée par le nombre d'atomes².

A température nulle, il n'y a que des bandes complètement remplies : la dernière est la bande de valence et la première vide est la bande de conduction. On appelle l'énergie du gap E_g l'énergie entre la bande de valence et la bande de conduction. Avoir des bandes remplies ou non influe sur les propriétés électroniques

- $E = 0$: les électrons se distribuent symétriquement autour de $\vec{k} = \vec{0} \rightarrow \langle \vec{k} \rangle = 0 \rightarrow \langle \vec{v} \rangle = 0$ et ce même si il existe des électrons avec $\vec{k} \neq \vec{0}$.
- Si la bande est pleine, les électrons ne peuvent pas bouger et on a les même conclusions que pour le cas $E = 0$. Si la bande est partiellement remplie les électrons vont bouger : asymétrie et vitesse moyenne non nulle \rightarrow densité de courant non nulle, c'est un conducteur (Na, Li, ...)!

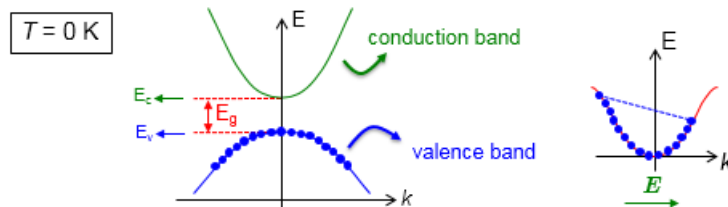


FIGURE 5.7

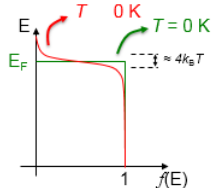


FIGURE 5.8

Imaginons une bande partiellement remplie. A température nulle, tous les états sont occupés jusqu'à $k = k_F \rightarrow E \leq E_F$. Si la température n'est pas nulle, à l'équilibre thermique, la probabilité d'occupation d'un niveau d'énergie E est donné par la distribution de Fermi-Dirac

$$f(E) = \frac{1}{1 + \exp[(E - E_F)/k_B T]} \quad (5.23)$$

Si la dernière bande est remplie, c'est un peu différent : dans l'espace \vec{k} on a toujours un empilement jusque $k = k_F$ mais le nombre d'états occupé est donné par

$$\text{valence} * \frac{L}{a} = 2 \cdot \frac{2k_F}{(2\pi/L)} \Rightarrow k_F = \frac{\text{valence} \pi}{2} \frac{\pi}{a} \quad (5.24)$$

2. Exemples slide 7.

On a $2k_F$ qui s'empilent dans l'espace \vec{k} jusqu'à k_F mais dans $[-k_F, +k_F]$ on divise par la longueur. Pour les atomes avec une valence paire, k_F est sur le bord de la zone de Brillouin. On en tire l'énergie de Fermi qui se situe au **milieu** de la bande interdite³

$$E_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m_e} \quad (5.25)$$

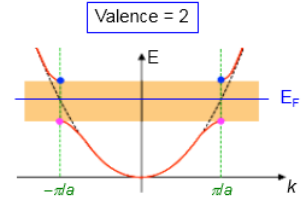


FIGURE 5.9

Dans le cas où $T \neq 0K$, si $E_g \gg 1$ il s'agit d'un isolant et si $E_g \leq 1$, un semi-conducteur (la conductivité augmente avec T). Si on applique un champ électrique E en présence d'un défaut d'électron, ceux-ci vont migrer (voir schéma) vers la gauche tandis que les trous dans le sens d'application du champ. Le défaut d'électron peut être vu comme une charge $+e$ se déplaçant vers la droite. Plutôt que de regarder les électrons, on peut adopter une vision équivalente qui consiste à regarder les trous.

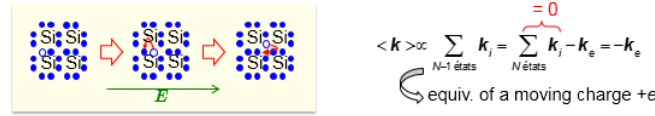


FIGURE 5.10 – Une absence d'électron dans la bande de valence est un *trou*

Les électrons essaient de minimiser leur énergie : ils vont descendre et les trous monter. On localise ainsi les e^- près du minimum de la bande de conduction d'énergie E_c et les trous près du maximum de la bande de valence d'énergie E_v . Les propriétés électroniques et optiques dépendent ainsi des charges libres près des extréma des bandes de valence et de conduction.

Pour tenir compte des effets de répulsions des e^- causée par E , on travaille généralement avec une approche semi-classique : la *masse effective*. Sachant que

$$F = qE = \hbar \frac{d}{dt} k \Rightarrow v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{\hbar} \frac{dE}{dk} \quad (5.26)$$

On peut en tirer l'accélération et déduire la masse effective

$$\frac{d}{dt} v_g = \frac{dk}{dt} \frac{d}{dk} v_g = \frac{1}{\hbar} \frac{dk}{dt} \frac{d^2 E}{dk^2} \Rightarrow m_{eff} = F/acc. = \frac{\hbar^2}{d^2 E / dk^2} \quad (5.27)$$

Pour un traitement plus simple, nous allons faire l'approche parabolique consistant à approcher la relation de dispersion aux extréma de bande comme une parabole. En supposant $m_{eff} = m^*$

Bande de conduction $E = E_c + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_c}$

Bande de valence $E = E_v - \frac{\hbar^2 k^2}{2m_v}$

Le comportement des e^- /trous est très proche du comportement d'une charge libre : on va remplacer la vraie masse de l'électron/trou par m_c/m_v pour modéliser leurs interactions.

5.1.3 Densité électronique d'états ρ_e

On la définit telle que $\rho_e(E)dE$ est le nombre d'état électronique qui ont une énergie entre E et $E+dE$ par unité de volume. Nous allons voir que si un côté du cristal est très petit les propriétés seront modifiées mais pour l'instant considérons un petit cube de longueur L . Calculons la densité (exprimée en énergie) en fonction de k (simple car empilement dans l'espace des états)

$$\rho_e(k)dk = \frac{1}{V} 2 \frac{4\pi k^2 dk}{(2\pi/L)^3} = \frac{k^2 dk}{\pi^2} \quad (5.28)$$

3. \triangle Elle ne vaut pas l'énergie maximale E_v pour $T = 0K$.

On calcule ici le nombre d'états qui ont un nombre d'onde entre k et $k + dk$. Dans l'espace k , le volume de la calotte sphérique vaut $4\pi k^2 dk$, on divise par le volume occupé par chaque électron $(2\pi/L)^3$, on divise encore par le volume comme on veut par volume et on multiplie par 2 pour tenir compte du spin. Le résultat ci-dessus après simplification est très proche du résultat que nous avons pour les photons lors du calcul de la densité spectrale de mode. Faisons varier l'énergie : $dE = \frac{\hbar^2 k}{m_e} dk$. Dès lors

$$\frac{k^2}{\pi^2} dk = \frac{k^2}{\pi^2} \frac{m_e}{\hbar^2 k} dE \Rightarrow \rho_e(E) dE = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m_e}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{E} dE \quad (5.29)$$

On retrouve une variation en \sqrt{E} typique du cristal 3D. Si on tient compte que les porteurs de charges ne sont pas libre et qu'ils sont en particulier dans la bande de valence ou de conduction⁴, on en tire les **densité d'états dans les bandes de conduction et de valences**

$$\text{Bande de conduction } \rho_c(E) = \frac{(2m_c/\hbar^2)^{3/2}}{2\pi^2} \sqrt{E - E_c}, \quad (E > E_c)$$

$$\text{Bande de valence } \rho_v(E) = \frac{(2m_v/\hbar^2)^{3/2}}{2\pi^2} \sqrt{E_v - E}, \quad (E < E_v)$$

5.1.4 Probabilité d'occupation et densité de porteurs

Densité de porteurs à l'équilibre thermique

Pour un semi-conducteur à l'équilibre, deux cas :

1. Le nombre d'électron par unité d'énergie dans la bande de conduction : $\rho_c(E)f(E)$
2. Le nombre de trous par unité d'énergie dans la bande de valence : $\rho_v(E)[1 - f(E)]$

où $[1 - f(E)]$ est la probabilité de ne pas avoir d'électrons. Pour avoir la densité dans la bande de conduction, il suffit d'intégrer

$$n_e = \int_{E_c}^{\infty} \rho_c(E) f(E) dE \quad (5.30)$$

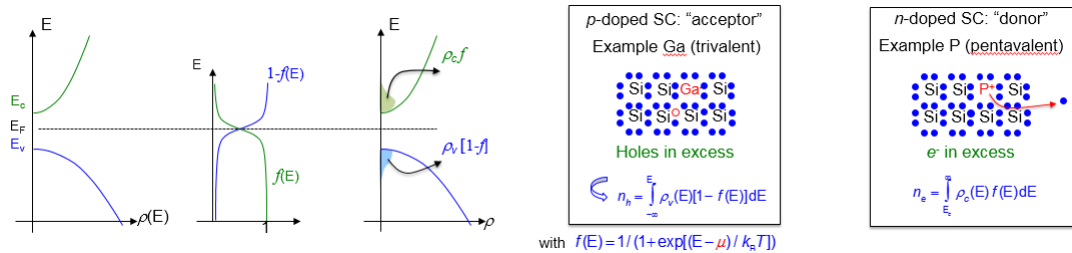


FIGURE 5.11

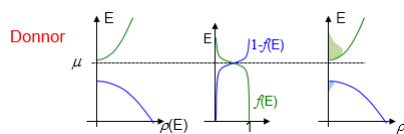


FIGURE 5.12

Si on dope n il y aura plus d'électron et quelque chose doit changer. Ce quelque chose est forcément la distribution : on ne va plus considérer l'énergie de Fermi mais le potentiel chimique μ .

4. Pour la conduction $E = E_c + \dots$

Densité de porteurs en dehors de l'équilibre thermique

Lorsque l'on génère un électron libre, on génère un trou dont la densité est donnée par celle de Fermi. Il est possible d'injecter des charges mobiles dans le milieu : d'un côté les électrons et de l'autre les trous. Ces porteurs injectés vont d'abord thermaliser (0.1 ps) pour ensuite se recombinier (1 ns), soit le temps de vie dans la bande de valence. Lors de la recombinaison des électrons avec un trou, ils vont redescendre dans la bande de valence. On dit que les porteurs sont rapidement dans un état de *quasi-équilibre thermique*.

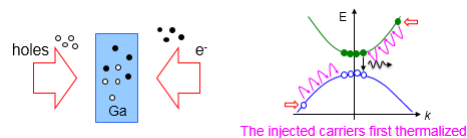


FIGURE 5.13

Ainsi, la densité de porteurs ρ ne change pas par rapport à l'équilibre thermique lors de l'ajout de charges⁵ mais il y a par contre une modification de la probabilité d'occupation dans les bandes de valences et conductions.

$$n_e = \int_{E_c}^{\infty} \rho_c(E) f_c(E) dE \quad \text{avec} \quad f_c(E) = (1 + \exp[(E - E_{fc})/k_B T])^{-1} \quad (5.31)$$

$$n_t = \int_{-\infty}^{E_v} \rho_v(E) [1 - f_v(E)] dE \quad \text{avec} \quad f_v(E) = (1 + \exp[(E - E_{fv})/k_B T])^{-1} \quad (5.32)$$

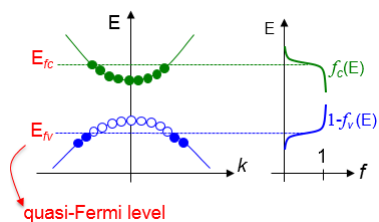


FIGURE 5.14

Nous avons ainsi utilisé, respectivement pour les électrons et les trous

$$f(E) \Rightarrow f_c(E), \quad 1 - f(E) = 1 - f_v(E) \quad (5.33)$$

La différence entre f_c et f_v donne la valeur de la **quasi énergie de Fermi** dans la bande de conduction (E_{fc}) et de valence (E_{fv}). Ces quasi énergies sont dépendantes de la densité d'électrons (n_e) et de trous (n_t) à l'équilibre thermique.

APPLICATION : JONCTION PN

Considérons une zone dopée n et une autre dopée p . En les mettant en contact, un potentiel $-e\Delta\phi$ est présent à cause de la zone de charge d'espace.

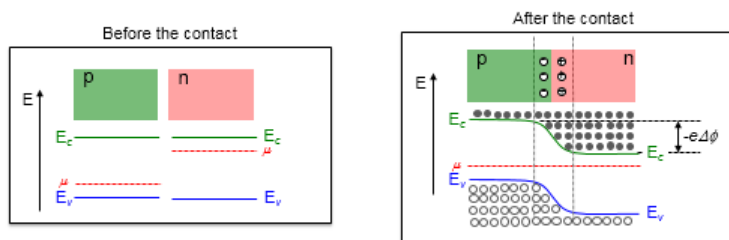


FIGURE 5.15

5. Pq ?

L'application d'une tension va se ressentir dans la région de charge d'espace, les charges étant mobiles. En appliquant une tension positive en V cela diminue la différence de potentiel et on va avoir migrations des électrons de p vers les trous de n : la densité d'électrons-trous augmente dans la région centrale et on s'attend à une recombinaison. On peut ainsi voir une évolution des quasi niveaux de Fermi avec la position dans la zone de charges d'espace.

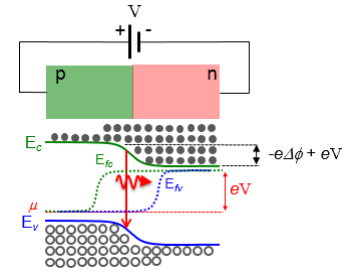


FIGURE 5.16

5.2 Transitions radiatives électroniques

5.2.1 Taux d'absorption et de transmission (semi-conducteurs à gap direct)

Taux d'absorption

La principale différence avec ce qui a été vu précédemment est que l'énergie n'est plus ici clairement définie (continuum sous forme de bande). Pour rappel, le taux d'absorption d'un système à deux niveaux atomiques

$$\Gamma_{12} = R_a = \sigma \mathcal{J} N_1 \quad (5.34)$$

où \mathcal{J} est le flux de photon d'énergie $\hbar\omega_0$ et $\sigma = B\hbar\omega_0 g(\omega_0)/v_g$ est la section efficace. Rappelons que, pour le coefficient d'Einstein $B \propto |\mu_{21}|^2 = e^2 |<\varphi_1|x|\varphi_2>|^2$.

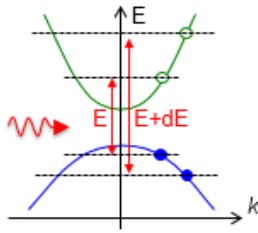


FIGURE 5.17

Voyons ce qu'il en est pour les semi-conducteurs : à cause du continuum, le taux d'absorption r_a va s'exprimer par unité d'énergie et de volume. Sommons toutes les paires d'états possédant une énergie entre E et $E + dE$

$$r_a dE_\omega = \sum_{E < E_\omega < E+dE} \sigma \mathcal{J} f_i (1 - f_f) \cdot 1/V \quad (5.35)$$

où f_i est la probabilité d'occupation de l'état initial (doit être proche de 1) et $1 - f_f$ la probabilité que l'état final soit vide et $[\sigma \propto |<u_c|x|u_v>|^2]$.

Faisons deux hypothèses

1. La section efficace σ est constante dans l'intervalle d'énergie $[E, E + dE]$.
2. La probabilité d'occupation initiale est donnée par la probabilité d'occupation dans la bande de valence $f_i = f_v$ et la probabilité de l'état final est donnée par la probabilité d'occupation dans la bande de conduction $f_f = f_c$ ⁶.

On peut alors écrire

$$\Rightarrow r_a dE_\omega = \sigma \mathcal{J} \frac{1}{V} \sum_{E < E_\omega < E+dE} f_v (1 - f_c) \quad (5.36)$$

6. Étant en situation de quasi-équilibre, il faut tenir compte des quasi-énergies de Fermi.

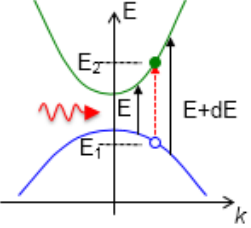
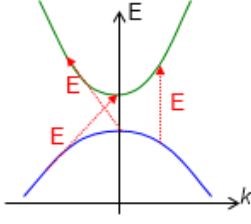


FIGURE 5.18

Dans un semi-conducteur à gap direct, il y a plusieurs transitions possible pour une différence d'énergie E . Il est nécessaire de conserver l'impulsion (à gauche, on considère éventuellement l'interaction avec un photon)

$$\hbar \mathbf{k}_i^e + \hbar \mathbf{k}^{ph} = \hbar \mathbf{k}_f^e \quad (5.37)$$

Calculons l'impulsion d'un photon : $h\nu = h\frac{c}{\lambda} \approx E_g$. Sachant que l'énergie de gap vaut à peu près 1eV, $\lambda \approx 1.24 \mu m$. Dès lors

$$k^{ph} = \frac{2\pi}{\lambda} \eta \approx 15 \times 10^6 m^{-1} \quad (5.38)$$

La taille de la première zone de Brillouin est de l'ordre de

$$\Delta k = \frac{2\pi}{a} \approx 10^{10} m^{-1} \quad (5.39)$$

Il y a quatre ordre de grandeur entre les deux, une transition oblique n'est dès lors pas possible où alors il faut l'interaction d'une particule supplémentaire. Dans un semi-conducteur à gap direct, le vecteur d'onde initial vaut le vecteur d'onde final

$$\mathbf{k}_i^e = \mathbf{k}_f^e \quad (5.40)$$

Ce qui signifie que seulement les transitions verticales sont autorisées. Cela va simplifier la somme dans l'expression de $r_a dE_\omega$

$$r_a dE_\omega = \sigma \mathcal{J} f_v(E_1)(1 - f_c(E_2)) \underbrace{\frac{1}{V} \sum_{E < E_\omega < E+dE} 1}_{dN_t} \quad (5.41)$$

où dN_t est le nombre de paires électroniques par unité de volume avec le même vecteur \vec{k} , séparés par une énergie dans l'intervalle $[E, E + dE]$ et $E_2 - E_1 = E_\omega = \hbar\omega$. On peut l'exprimer

$$dN_t = p(\hbar\omega) dE_\omega \quad (5.42)$$

où $p(\hbar\omega)$ est la densité d'états joints. Calculons son expressions dans l'espace réciproque ⁷

$$\Rightarrow dN_t = \frac{2}{V} \frac{4\pi k^2 dk}{(2\pi)^3} = \frac{k^2 dk}{\pi^2} \quad (5.43)$$

En utilisant l'approximation de bande parabolique pour la bande de valence et de conduction

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= E_v - \frac{\hbar^2 k^2}{2m_v} \\ E_2 &= E_c + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_c} \end{aligned} \right\} \Rightarrow E_\omega = E_2 - E_1 = E_c - E_v + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_c} + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_v} \quad (5.44)$$

En introduisant la masse effective réduite $\frac{1}{m_r} = \frac{1}{m_c} + \frac{1}{m_v}$ (traduisant la courbure des bandes)

$$E_\omega = E_g + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_r} \quad (5.45)$$

7. Résultat équivalent à celui obtenu pour la densité d'états.

Effectuons la différentielle de cette expression $dE_\omega = \hbar^2 k dk / m_r$. On trouve alors

$$dN_t = \frac{m_r}{\hbar^2 \pi^2} dE_\omega \sqrt{\frac{(E_\omega - E_g)}{\hbar^2}} 2m_r = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m_r}{\hbar^2}\right)^{3/2} \sqrt{(\hbar\omega - E_g)} dE_\omega = p(E_\omega) dE_\omega \quad (5.46)$$

Si $\hbar\omega$ est trop petit, la racine sera négative ce qui correspond à une transition impossible (on serait dans la bande interdite). La \sqrt{E} est (encore une fois) la trace typique d'un objet massif tridimensionnel. Si $\hbar\omega > E_g$, la densité d'état joint vaut alors

$$p(\hbar\omega) = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m_r}{\hbar^2}\right)^{3/2} \sqrt{(\hbar\omega - E_g)} \quad (5.47)$$

Notre taux d'absorption (différentiel) peut alors s'écrire

$$r_a dE_\omega = \sigma \mathcal{J} f_v (1 - f_c) p(E_\omega) dE_\omega \quad (5.48)$$

En considérant toutes les énergies dans la bande d'énergie en question

$$R_a = \int \sigma \mathcal{J} p(E_\omega) f_v(E_1) [1 - f_c(E_2)] dE_\omega \quad (5.49)$$

Regardons comment varie les différents termes de R_a et surtout la variation de la section efficace

- $\sigma = B \hbar \omega g(\omega) / v_g$
 - Dans un semi-conducteur, $g(\omega)$ est dominé par les collisions $\tau_0 \approx ps \rightarrow \Delta\omega \approx 2 THz$.
 - A température ambiante $k_B T \approx 1/40 eV \rightarrow$ variation $f_c, f_v \approx 40 THz$.
- Comme 40 THz c'est lent⁸ par rapport à σ , on va remplacer $g(\omega)$ par un delta de Dirac pour les photons incidents d'énergie $\hbar\omega_0 \rightarrow g(\omega) = \delta(\omega - \omega_0)$

Dès lors (en négligeant l'incertitude aux collisions)

$$R_a(\omega_0) = \frac{B \hbar^2 \omega_0}{v_g} \mathcal{J} p(\hbar\omega_0) f_v(E_1) [1 - f_c(E_2)] \quad (5.50)$$

Taux d'émission stimulée

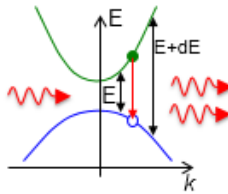


FIGURE 5.19

Il faut que l'état final soit initialement vide à E_1 . On définit de façon similaire au taux d'absorption un taux de photons par unité d'énergie et de volume, r_{st}

$$r_{st} dE_\omega = \sigma \mathcal{J} f_c (1 - f_v) p(E_\omega) dE_\omega \quad (5.51)$$

On a remplacé $1 - f_c$ par f_c (l'état initial est occupé en conduction et vide en valence)

$$R_{st}(\omega_0) = \frac{B \hbar^2 \omega_0}{v_g} \mathcal{J} p(\hbar\omega_0) f_c(E_2) [1 - f_v(E_1)] \quad (5.52)$$

Taux d'émission spontané

Ici, c'est plus difficile (notamment à cause du continuum d'énergie). Commençons par introduire le taux d'émission spontané par unité de fréquence $R_{sp,\omega}$.

8. Pas du tout compris!

$R_{sp,\omega}d\omega$ est le nombre de transitions radiatives par unité de temps et de fréquence pour un photon possédant une fréquence angulaire **dans** l'intervalle $[\omega, \omega + d\omega]$.

$p(\omega)d\omega$ est le nombre de transitions *possibles* par unité de volume entre deux états séparés par une énergie dans l'intervalle $[\hbar\omega, \hbar(\omega + d\omega)]$ (transitions verticales)

Commençons par calculer un élément de la transition (initialement, l'état final est vide)

$$dR_{sp,\omega'} = A_{21}g(\omega' - \omega)f_c[1 - f_v]p(\omega')d\omega' \quad (5.53)$$

S'il y a juste deux niveaux d'énergie, la photon émis à une énergie valant $E_2 - E_1$, ce qui simplifie l'expression de $g(\omega)$ en un delta de Dirac⁹ : $g(\omega' - \omega) \approx \delta(\omega' - \omega)$. L'intégrale se calcule alors facilement (qui plus est, $A_{21} = 1/t_{sp}$)

$$R_{sp,\omega} = \int dR_{sp,\omega'} \approx \int A_{21}\delta(\omega' - \omega)f_c[1 - f_v]p(\omega')d\omega' \quad (5.54)$$

Le taux d'émission spontanée par unité de fréquence à ω_0 s'exprime alors

$$R_{sp,\omega_0} = (1/t_{sp})p(\omega_0)f_c(E_2)[1 - f_v(E_1)] \quad (5.55)$$

Remarque. On voit apparaître E_1 et E_2 mais il faut se rappeler que ce choix n'est pas libre : la différence doit valoir $\hbar\omega_0$ et la transition doit être constante. Il faut déterminer pour quelle valeur de k l'énergie est séparée de $\hbar\omega_0$ mais si cette fréquence ω_0 est fixée, ces énergies sont bien connues.

5.2.2 Absorption dans les semi-conducteurs à gap direct

Le but étant de faire un laser, il est nécessaire de déterminer les conditions d'absorption négatives et donc un gain positif. Soit un flux de photons \mathcal{J} à énergie $\hbar\omega_0$. En négligeant l'émission spontanée (la probabilité que l'émission spontanée contribue à l'émission laser est très faible). La variation de la densité de **photons** s'obtient en effectuant la différence entre ce qui est émis et ce qui est absorbé

$$\frac{dn_p}{dt} = R_{st} - R_a = \frac{B\hbar}{v_g} \mathcal{J} \hbar\omega_0 p(\hbar\omega_0) [f_c(1 - f_v) - f_v(1 - f_c)] \quad (5.56)$$

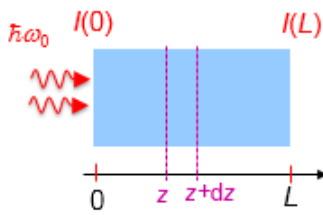


FIGURE 5.20

Considérons cette fois-ci la variation spatiale de la densité de photons que nous multiplions par v_g

$$v_g \frac{dn_p}{dz} = \frac{B\hbar}{v_g} p(\hbar\omega_0) [f_c - f_v] I \quad (5.57)$$

où nous avons utilisé $I = \mathcal{J} \hbar\omega_0$ et $\mathcal{J} = n_p v_g$. Il ne reste que la différence entre f_c et f_v mais nous avons surtout fait apparaître l'intensité. On en extrait l'ED suivante

$$\frac{dI}{dz} = \frac{B\hbar^2\omega_0}{v_g} p(\hbar\omega_0) [f_c - f_v] I = -\alpha I \quad (5.58)$$

Par identification, on trouve le fameux coefficient symbolisant les pertes

9. J'ai encore du mal à voir pourquoi.

$$\alpha = \frac{B\hbar^2\omega_0}{v_g} p(\hbar\omega_0) [f_v(E_1) - f_c(E_2)] \quad (5.59)$$

Si le semi-conducteur est intrinsèque (ou faiblement dopé), cela signifie que la probabilité d'occupation à l'état électrique E_2 est à peu près nul : à l'équilibre thermique, dans un matériau faiblement dopé, la bande de conduction est essentiellement vide mais elle vaut à peu près 1 dans la bande de valence

$$f_c(E_2) \approx 0, \quad f_v(E_1) \approx 1 \quad (5.60)$$

Dès lors

$$\Rightarrow \alpha(\hbar\omega_0) = \frac{B\omega_0}{2\hbar\pi^2 v_g} (2m_r)^{3/2} \sqrt{(\hbar\omega_0 - E_g)} \quad (\hbar\omega_0 > E_g) \quad (5.61)$$

Le coefficient d'absorption montre un seuil d'énergie $\hbar\omega = E_g$. Il augmente comme une fonction racine, tout comme la densité d'états joints.

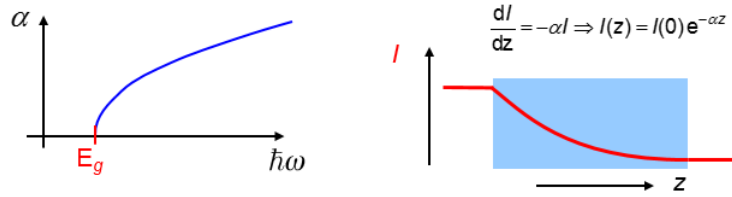


FIGURE 5.21

Ce résultat décrit assez bien la réalité (cf. slides 26-27).

5.2.3 Saturation de l'absorption

Supposons que l'on soit en présence un faible flux de photon \mathcal{J} . Dans ce cas, la densité électronique est proche de l'équilibre thermique ce qui implique que

$$\alpha(\omega_0) \approx \alpha_0 \quad (5.62)$$

Si cette fois la flux de photon \mathcal{J} est important, il va y avoir thermalisation des électrons excités dans la bande de conduction et des trous dans la bande de valence : $E_{fc}, E_{fv} \neq \mu$ ¹⁰. Les distributions sont données par

$$f_c(E_2) = 1/(1+\exp[(E_2 - E_{fc})/k_B T]), \quad f_v(E_1) = 1/(1+\exp[(E_1 - E_{fv})/k_B T]) \quad (5.63)$$

La densité électronique s'obtient de façon similaire à ce qui a été vu précédemment

$$n_e = \int f_{c,v}(E) \rho(E) dE \quad (5.64)$$

Comme l'absorption dépend de la différence entre f_v et f_c ¹¹ et qu'elles tendent toutes les deux vers 1/2 lorsque le flux est très intense, l'absorption tend vers zéro : $\alpha \rightarrow 0$.

On dit donc que l'absorption est **saturable** : elle n'est pas la même pour un flux de photons faible que pour un flux important. Quand le flux est important, l'absorption devient faible d'où le *saturable*. On écrit alors

$$\alpha = \frac{\alpha_0}{1 + \mathcal{J}/\mathcal{J}_s} \quad (5.65)$$

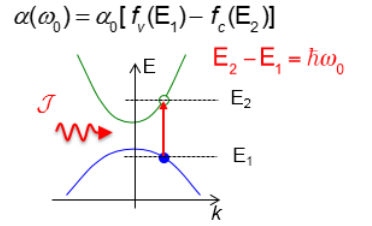


FIGURE 5.22

10. Pq ?

11. $\alpha = \frac{B\hbar^2\omega_0}{v_g} p(\hbar\omega_0) [f_v(E_1) - f_c(E_2)]$

où \mathcal{J}_s est le flux de saturation.

APPLICATION : GÉNÉRATION D'IMPULSIONS COURTES

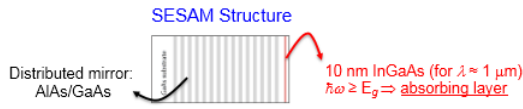


FIGURE 5.23

AlAs/GaAs qui ont des indices de réfraction différents : l'énergie du gap est cette fois-ci supérieure à celle des photons ($E_g \geq \hbar\omega$).

Lorsqu'un flux de photon va passer dans cette structure, il va y avoir une réflexion partielle à chaque variation de l'indice de réfraction¹²

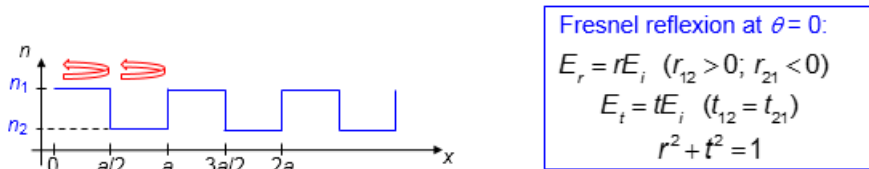


FIGURE 5.24

Sans les réflexions secondaires

$$R = +re^{2ika/2} - rt^2e^{4ika/2} + rt^4re^{6ika/2} - rt^6e^{8ika/2} + \dots \quad (5.66)$$

En analysant les séries positives et négatives, il est possible de trouver

$$(\dots) = \frac{1}{1 - t^4e^{4(ika/2)}} \quad |t|^2 < 1 \quad (5.67)$$

Avec un traitement des réflexions multiples, on trouve comme coefficient (sans justification)

$$R = \frac{r^2e^{ika} - r^2t^2e^{2ika}}{1 - t^4e^{4(ika/2)}} \quad (5.68)$$

Ce coefficient possède une résonance : la *réflexion de Bragg* (réflexion totale)

$$ka = m\pi \quad \Rightarrow \quad |R| = 1 \quad (5.69)$$

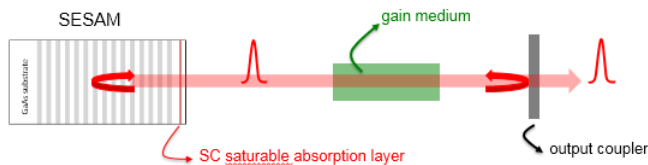


FIGURE 5.25

Sur base de ce principe, considérons le setup ci-contre. Ce setup permet de générer des impulsions très courtes (génération par blocage de mode). Il va préférentiellement pulser qu'émettre en continu car quand l'impulsion traverse l'élément saturable il y aura moins de pertes que dans le cas continu.

12. Lorsque l'on passe d'un indice plus grand à plus petit et inversement, le signe des indices de réflexion sont inversés. Le signe est par contre toujours positif pour la réflexion.

5.2.4 Gain optique

Après avoir regardé l'absorption, il serait intéressant que celle-ci soit négative afin d'avoir du gain. Considérons α et l'équation de Beer-Lambert

$$\alpha = \frac{B\hbar^2\omega_0}{v_g} p(\hbar\omega_0) [f_v(E_1) - f_c(E_2)] = -\mathcal{G} \quad \Rightarrow \quad \frac{dI}{dz} = -\alpha(\omega_0)I = +\mathcal{G}I \quad (5.70)$$

La seule façon pour avoir un positif est que le crochet soit négatif (comme $\alpha = -\mathcal{G}$)

$$\Leftrightarrow [f_v(E_1) - f_c(E_2)] \leq 0 \quad (5.71)$$

où $E_2 - E_1 = \hbar\omega_0$, ssi

$$\Leftrightarrow f_c(E_2) \geq f_v(E_1) \quad (5.72)$$

En explicitant les distributions

$$(1 + \exp[(E_2 - E_{fc})/k_B T])^{-1} \geq (1 + \exp[(E_1 - E_{fv})/k_B T])^{-1} \quad (5.73)$$

Si et seulement si

$$E_2 - E_{fc} \leq E_1 - E_{fv} \Leftrightarrow E_2 - E_1 \leq E_{fc} - E_{fv} \quad (5.74)$$

On en tire la **relation de Bernard-Duraffourg**

$$\hbar\omega_0 \leq E_{fc} - E_{fv} = \Delta E_f \quad (5.75)$$

Il s'agit de la condition nécessaire pour avoir un taux d'émission stimulée plus grand qu'un taux d'absorption.

Il s'agit de l'équation équivalente à l'inversion de population pour un semi-conducteur. Il faut qu'il y ait en effet plus d'émission stimulée (recombinaison paire électron/trou) que de création de paires (signifie qu'il y a plus de chance de trouver des électrons dans la bande de valence que de conduction).

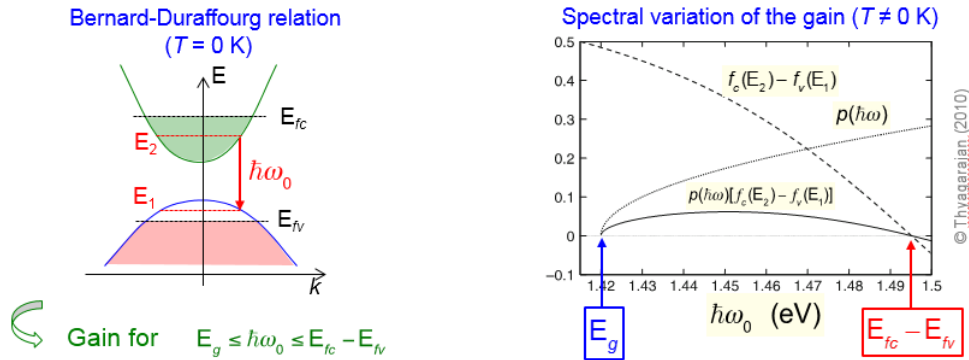


FIGURE 5.26

Si on regarde plus en détail le gain, on remarque qu'il dépend (spectralement) de la différence entre les deux énergies.

APPLICATION : INJECTIONS DE PORTEURS DANS UNE JONCTION PN

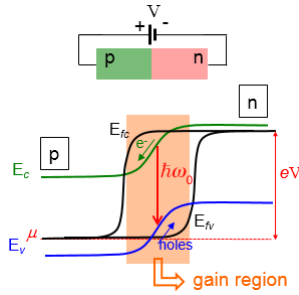


FIGURE 5.27

Lorsque l'on applique une tension sur une telle jonction, un "plateau" va descendre et l'autre monter de sorte à avoir une "inversion" du graphique (voir ci-contre) : les électrons vont pouvoir descendre plus bas et les trous monter plus haut : émission d'un photon et recombinaison. La condition de Bernard-Duraffourg devient alors

$$E_g \leq \hbar\omega_0 \leq E_{fc} - E_{fv} = eV \quad (5.76)$$

Comme annoncé, le spectre de gain/absorption est fonction de la densité de porteurs libres

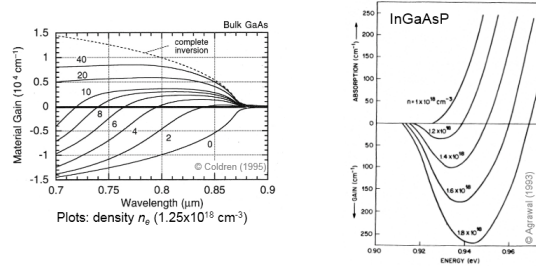


FIGURE 5.28

La courbe 0 (ci-dessus, à gauche) correspond au cas où aucune charge n'est injectée dans le semi-conducteur : il n'y a que de l'absorption. Plus on augmente l'injection, plus le décalage est important et il est possible d'avoir un gain et plus celle-ci augmente, plus le gain devient important. En résumé, lorsque la densité de porteurs augmente

1. La largeur spectrale du gain augmente
2. La valeur maximale du gain augmente
3. La fréquence optique pour laquelle le gain est maximal augmente

5.3 Transition électroniques non radiatives

Il est possible d'avoir des phénomènes de recombinaison électron/trou sans émission de photons. On pourrait (logiquement) considérer que si c'est le cas, il y a émission de phonons. Or, pour passer le gap ($E_g \approx 1 \text{ eV}$) 30 à 40 phonons sont nécessaire (ayant une énergie de 1/40 eV à température ambiante). La probabilité qu'ils interagissent tout en même temps est faible mais c'est totalement faisable par niveaux successifs...à cause des défauts !

5.3.1 Recombinaisons en surface et par défauts

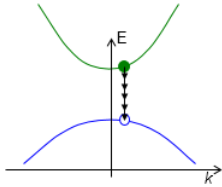


FIGURE 5.29

On peut considérer les défauts (dislocations ou ponctuels) ainsi que les surfaces (plus de périodicité, impuretés) mais localement, il y a bien toujours un continuum d'état électronique dans la bande interdite.

Définissons le taux de recombinaison $R = A_{nr}n_e$. Celui-ci est logiquement lié à la densité électronique (plus il y a d'espèce présentes, plus il y a des chances d'avoir une recombinaison). Le coefficient

de proportionnalité est A_{nr} :

- $A_{nr} \propto$ densité de défauts
- $A_{nr} \propto$ aire de la surface

Pour des applications optiques, il faut donc avoir un semi-conducteur extrêmement pur avec une zone active et pas de surface libre. Aujourd'hui, on parvient à avoir une densité de défaut négligeable. Le problème apparaît lorsque l'on utilise la structure pour avoir de la lumière. Par exemple, il faut mettre pas mal de tension sur une jonction pn ce qui crée un échauffement, responsable de l'apparition de défauts. Ces défauts sont des centres de recombinaison non radiatifs.

5.3.2 Recombinaisons d'Auger

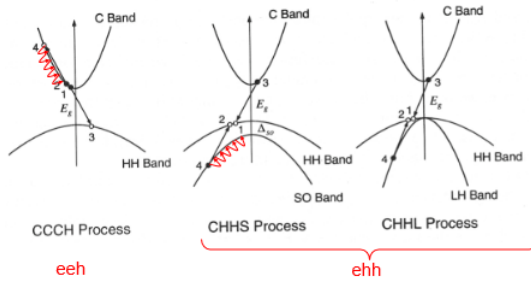


FIGURE 5.30

Il s'agit d'un processus de recombinaison où l'énergie ne va pas dans un photon, mais dans l'excitation d'une charge ou d'un trou. Par exemple, l'électron passe de la bande de conduction à celle de valence (recombinaison) et la différence d'énergie est cédée à un électron qui va se retrouver beaucoup plus haut dans la bande de conduction pour enfin se thermaliser et redescendre. Notons que le même processus peut être possible avec un trou (il peut même y avoir un changement de bande).

Il s'agit du processus non radiatif dominant dans les semi-conducteurs. Comme vu sur le schéma ci-dessus à gauche, il se divise en deux processus

1. *Processus eeh* : excite un électron plus haut dans la bande de conduction
2. *Processus eh* : excite un trou profondément dans la bande de valence.

La thermalisation se fait par émission successive de phonons (conservation de l'énergie et de l'impulsion). Le taux de recombinaison d'Auger R_A varie selon le type de l'interaction

$$R_A^{eeh} \propto n_e^2 n_h, \quad R_A^{ehh} \propto n_e n_h^2 \quad (5.77)$$

La densité de l'espèce excitée se retrouve mise au carré. Trois cas possibles

1. SC intrinsèque ($n_e = n_h$)

$$R_A = Cn_e^3 = \frac{n_e}{\tau_A} \quad (5.78)$$

où $\tau_A^{-1} = Cn_e^2$. On a tendance à écrire Cn_e^3 comme un nombre de charge par unité de volume divisé par un temps caractéristique : il s'agit du *temps de recombinaison d'Auger*¹³.

2. SC dopé n : processus dominant eeh

$$R_A^{eeh} = -\frac{d}{dt}n_e = C^{eeh}n_e^2n_h = \frac{n_e}{\tau_A^{eeh}} \quad (5.79)$$

3. SC dopé p : processus dominant ehh

$$R_A^{ehh} = -\frac{d}{dt}n_h = C^{ehh}n_h^2n_e = \frac{n_h}{\tau_A^{ehh}} \quad (5.80)$$

5.4 Matériaux et structures pour les diodes lasers

Nous allons ici voir quels sont les *bons* matériaux pour fabriquer des sources lasers : la condition de Bernard va en effet nous imposer une structure particulière.

5.4.1 Taux de recombinaison total

Un matériau est bon s'il maximise les recombinaisons électrons-trous qui génèrent des photons. Plaçons-nous dans le cas d'une diode électroluminescente : son taux radiatif est l'intégrale sur les fréquences du taux de recombinaison spontané

$$R_{sp} = \int R_{sp,\omega} d\omega \quad (5.81)$$

Procédons à une approche phénoménologique : pour avoir recombinaison il faut avoir un électron et un trou. Le taux de recombinaison doit être proportionnel aux densités de ces charges libres. En définissant le coefficient de proportionnalité B comme le *coefficient de recombinaison bimoléculaire*, on note

$$R_{sp} = B(n_e)n_en_h \quad (5.82)$$

Pour un SC intrinsèque

$$R_{sp} = -\left(\frac{dn_e}{dt}\right)_{Rad} = B(n_e)n_e^2 = \frac{n_e}{\tau_R} \quad (5.83)$$

où τ_R est le temps de vie radiatif. Il ne faut cependant pas oublier les recombinaisons d'Auger. On en tient compte en définissant R_{tot} :

$$R_{tot} = -\left(\frac{dn_e}{dt}\right) = R_R + R_A = \frac{n_e}{\tau_R} + \frac{n_e}{\tau_A} \quad (5.84)$$

où $\tau_R^{-1} = Bn_e$ et $\tau_A^{-1} = Cn_e^2$. Pour former une diode laser, il est nécessaire d'avoir un temps de recombinaison radiatif bien plus court que le temps de recombinaison d'Auger : $\tau_R \ll \tau_A$. Le tableau comparatif ci-dessous compare ces temps de vie

13. Ce n'est pas une constante, mais $n_e^*c^{te}$.

Matériaux	GaAs	GaSb	GaP	Si	Ge
C (cm ⁶ s ⁻¹)	10 ⁻³¹	10 ⁻²⁵	8x10 ⁻³¹	3x10 ⁻³¹	10 ⁻³¹
Processus	ehh	ehh	ehh	eeh	eeh, ehh
τ_A (s) à 10 ¹⁸ cm ⁻³	10 ⁻⁵	10 ⁻¹¹	1,3x10 ⁻⁸	3,3x10 ⁻⁸	10 ⁻⁵
τ_R (s) à 10 ¹⁸ cm ⁻³	1,3x10 ⁻⁹	4,2x10 ⁻⁹	1,9x10 ⁻⁵	5,6x10 ⁻⁴	1,9x10 ⁻⁵

Tableau 5.1 – Coefficients données pour des SC intrinsèques. Bleu signifie à gap direct et vert à gap indirect.

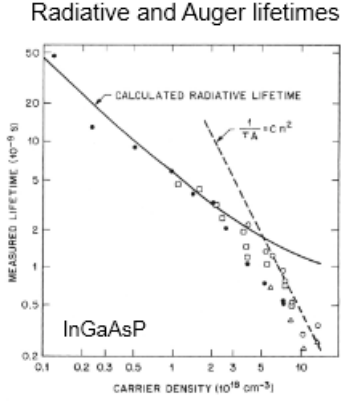


FIGURE 5.31

Pour le *GaAs*, les recombinaisons sont essentiellement radiatives. Pour le *GaSb* l'écart entre les deux temps caractéristique est faible mais par malchance, le processus Auger est très efficace dans ce matériau. Pour les trois SC à gap indirect¹⁴ il n'est pas non plus possible d'en faire une diode laser.

Pour le *GaAs*, on retrouve $\tau_A \ll \tau_R$: il s'agit d'un bon matériau pourvu que la densité des porteurs n'est pas trop élevée ($\tau_A^{-1} = Cn_c^2$). Il y a donc une limitation de la concentration de dopage (*p* ou *n*) et des charges libres injectés de sorte que le processus de recombinaison majeur soit la radiative. Un bon matériau pour une diode laser est ainsi un SC à gap direct, dopé seulement dans la région active avec une faible concentrations de défauts et d'impuretés.

5.4.2 Longueur d'onde d'émission

Si l'on observe la variation spectrale du gain, on peut se rendre compte que l'on obtient un gain positif pour des énergies proche de la bande électronique et légèrement au dessus de celle-ci. La fréquence d'émission sera alors directement liée à l'énergie du gain

$$\text{Émission à } \omega = E_g/\hbar \quad (5.85)$$

La composition chimique semi-conductrice est également choisie en fonction de la longueur d'onde d'émission ciblée. Le ratio suivant est alors assez pratique

$$\frac{\lambda}{1\mu\text{m}} = \frac{1.24}{E/1\text{eV}} \quad (5.86)$$

Les slides 48 et 49 donnent des exemples d'applications et comment les propriétés chimiques peuvent influencer la longueur d'onde émise.

Un autre paramètre a une grande importance : le paramètre de maille (constante de réseau) *a*. Comme la structure du laser est constitué de jonctions entre semi-conducteurs, la constante de réseau *a* doit être très proche pour les deux alliages en contact afin d'éviter les défauts ponctuels et les dislocations

$$\frac{\Delta a}{a} < 0.1\% \quad (5.87)$$

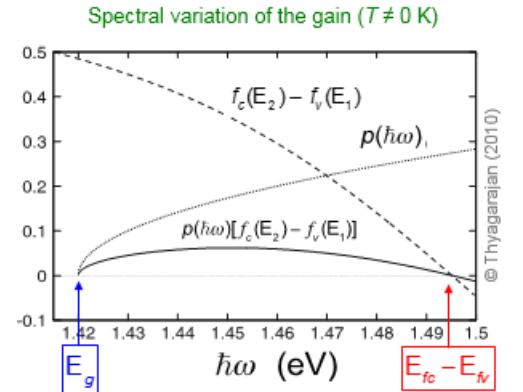


FIGURE 5.32

14. Généralité visiblement

Par exemple, considérons deux matériau semi-conducteurs

$$\left. \begin{array}{l} AlAs : a_1 \\ GaAs : a_2 \end{array} \right\} \rightarrow Al_xGa_{1-x}As : a \approx xa_1 + (1-x)a_2 \quad (5.88)$$

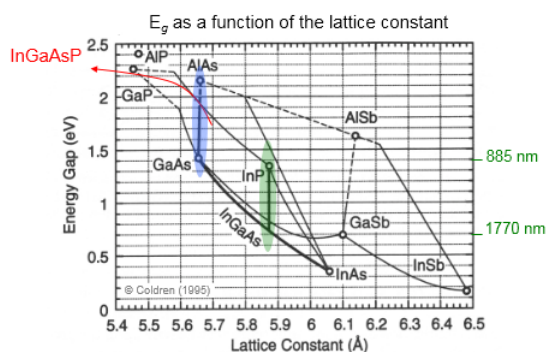


FIGURE 5.33

AlSb/GaSb). On voit que les diodes laser *AlAs/GaAs* sont en effet possibles : si on bloque le rapport x/y on se balade sur un trait vertical et on va pouvoir modifier l'énergie de gap (toujours direct) pour jouer sur la longueur d'onde émise !

5.4.3 Structures des diodes laser

Laser à homojonction

La première structure qui vient à l'esprit est une simple jonction pn : il suffit de lui appliquer une tension supérieure à celle du gap. Ceci cause une inversion des courbes par rapport à l'équilibre permettant aux électrons de descendre et aux trous de monter (ils pourront passer librement, il n'y a en effet pas de barrière de potentiel). On va alors s'arranger pour avoir un gain (il faut que la différence entre les deux quasi niveaux de Fermi soit plus grande que l'énergie du gap). Il reste à former une cavité, que l'on considère Fabry-Perot avec un miroir où $R = 0.35$: faible, mais le gain est tellement important qu'il n'y a pas de soucis. Pour éviter que ça lase dans la "mauvaise" direction on va scier la surface pour introduire des rugosités : beaucoup de pertes, empêchant le lasage.

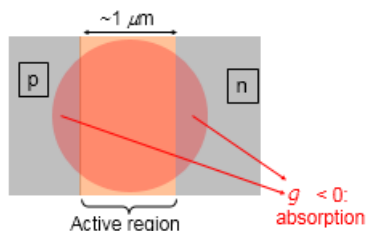


FIGURE 5.35

dehors de la zone active il y a absorption : pertes internes élevées. Comme un courant important crée un échauffement (création de défaut ; effet de vieillissement), cette structure n'est pas utilisée pour les lasers.

Dans le cas de $Al_xGa_{1-x}As$, $a_1 = 5.66 \text{ Å}$, $a_2 = 5.6533 \text{ Å}$: il s'agit d'un alliage de choix pour les applications optique, tant la variation de la constante de réseau est proche ! La jonction *AlGaAs/GaAs* permet de créer des diodes lasers entre 720 et 850 nm.

En pointillé ci-contre les gaps indirects et en traits pleins les gaps directs. Ce graphique permet de choisir un bon alliage : il faut un gap direct et une faible variation (au revoir *AlAl/AlSb*) et une (très) faible variation du paramètre de maille (au revoir

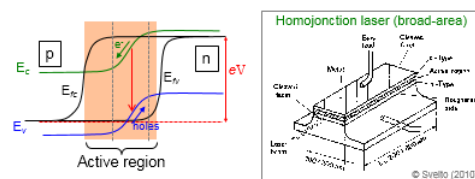


FIGURE 5.34

C'est relativement simple, mais il y a pleins d'éléments qui font que ça ne va pas aussi bien se passer que prévu. Le premier souci est la tension importante à fournir (quelques volts, bien au delà du seuil de 0.7 V apparaissant dans la caractéristiques des diodes, donnant lieu à un courant important). Un autre problème est la largeur de la bande active (zone de déplétion) qui n'est pas bien définie (dépend de la tension appliquée) : diffusions de porteurs minoritaires causant un étalement du gain (mais pas infini car pas de gain en dehors). Le souci est qu'en

Laser à double hétéro-jonction

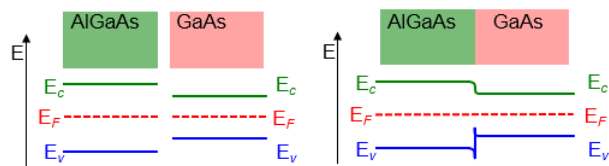


FIGURE 5.36

La solution pour ce chauffage est d'utiliser les hétéro-jonctions : on va mettre en contact deux semi-conducteurs différents, possédant un gap différent. C'est possible, si les paramètres de mailles sont très proches.

Comme faire juste une hétéro-jonction ne suffit pas, on va en faire des doubles¹⁵ et de part et d'autre d'un matériau semi-conducteur : une du côté p et une autre du côté n avec un gap plus important, le but étant de piéger les charges dans la région centrale (active). De plus, on veut être en condition d'inversion mais avec des barrières de potentiel empêchant de traverser totalement (premier schéma, *before contact*).

Lorsque l'on applique une tension passante, il faut bien évidemment que la différence entre les deux niveaux de Fermi soit supérieure à l'énergie du gap (pour avoir un gain). En faisant ça, on se retrouve avec une marche de potentiel (schéma de droite, tout en haut) que l'on avait pas avant, empêchant les électrons de passer de la région n à p et de même pour les trous : ils sont piégés dans la région centrale¹⁶.

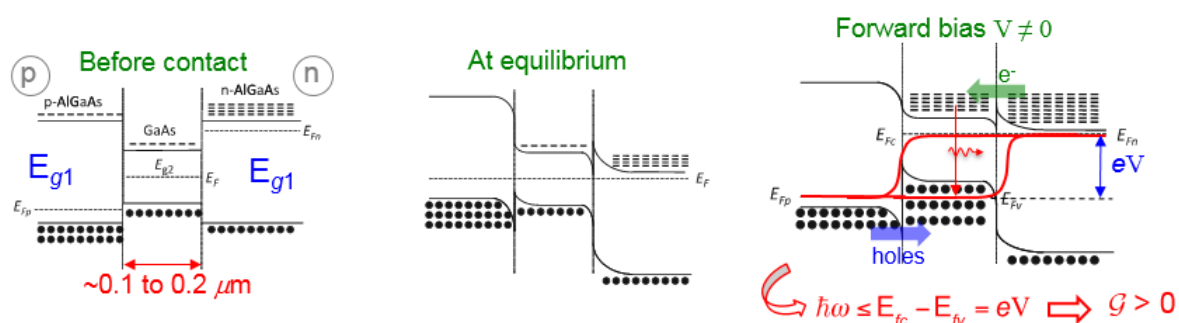


FIGURE 5.37

Une telle structure se met facilement en place avec des fils électriques. L'avantage de cette méthode est que les porteurs sont confinés dans la zone active, tout en limitant la tension à mettre grâce aux barrières. Un autre avantage vient du fait qu'une modification du gap cause une modification de l'indice de réfraction : le profil de cet indice sera plus élevé dans la zone active. Au centre de la zone active, si certains rayons sont rasants à la "paroi", ils vont être totalement réfléchis et confinés dans cette région d'indice plus élevé : structure "guidante" provoquant un confinement du champ EM. De plus, comme l'énergie du photon est $E_{g2} < h\nu < E_{g1}$ il n'y aura pas d'absorption.

15. Il va falloir ré-expliquer...

16. ???

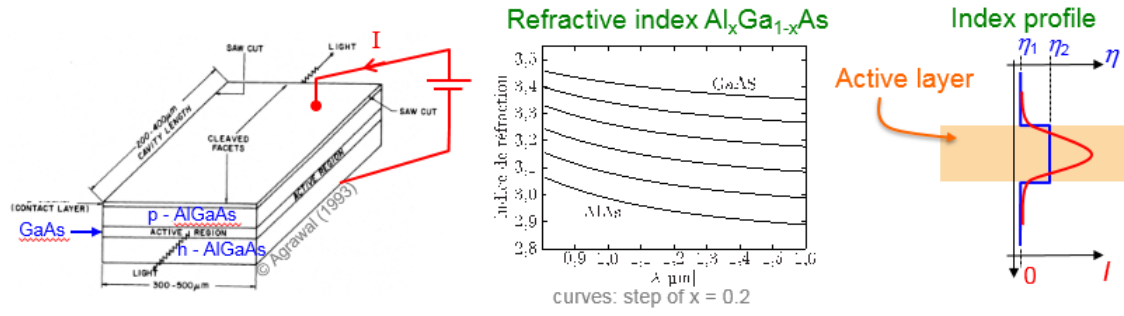


FIGURE 5.38

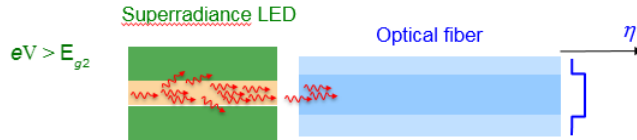


FIGURE 5.39

Dans certains cas, il peut y avoir une émission mais non laser car celle-ci n'est pas confinée : on parle de **super-radiance**. Si on polarise la double hétéro-jonction mais en dessous du seuil laser, cela ne lasera pas. Cependant, si

la tension appliquée est supérieure à celle du gap, la zone centrale possèdera tout de même un gain (mais trop faible pour que ça lase). Un photon dans cette zone va rester dans la structure guidante et être amplifié : donne lieu à une petite fraction réfléchi qui va circuler à l'intérieur. Il en résulte un champ plus cohérent que l'émission spontanée mais moins qu'un laser : c'est un cas "intermédiaire". On peut utiliser ça comme "source de bon marché" pour des applications en télécommunications à courtes distances.

On l'a compris, avoir un effet de guidage est intéressant : il faut confiner la lumière au centre de la région active dans la direction de la jonction (et pas dans la direction transverse, c'est-à-dire la partie "plane" de plan de la couche active)¹⁷. Pour se faire on peut guider soit par gain, soit par saut d'indice.

Par gain c'est assez simple : on limite spatialement la zone où $\mathcal{G} > 0$ en retirant une partie du matériau. Comme le gain est limité, il en est de même pour le faisceau laser. Notons que l'extension spatiale de la région à gain dépend du courant I .

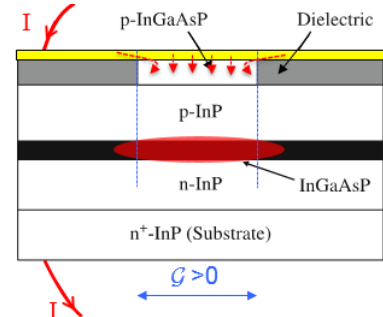


FIGURE 5.40

Pour le guidage par saut d'indice, deux choix

1. Guidage faible : zone d'indice de réfraction supérieur près de la zone active ($\Delta\eta_{eff} \approx 10^{-2}$). Le confinement latéral dépend du courant I comme la zone active dépend de l'indice de réfraction qui lui-même varie avec la densité de porteurs.

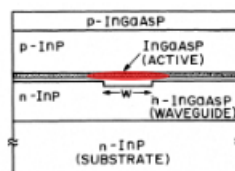


FIGURE 5.41

17. Ceci causera des effets de diffraction et une inhomogénéité du courant (laser multimode transverse, cf. laboratoires).

2. Guidage fort : tous les matériau *autour* de la zone active sont plus faibles (il suffit de changer la composition chimique) : lorsque le courant arrive sur la zone rouge, il est obligé de se déplacer vers la zone active (pareil pour les trous "en dessous" de cette zone). Ici les sauts d'indices peuvent être bien élevés (≈ 0.2) ce qui permet de bien confiner la lumière.

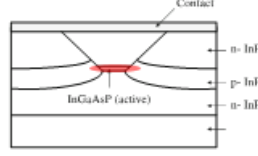


FIGURE 5.42

Ce genre de structure est largement rencontrée en télécommunication pour des applications de guidage monomode : il y a en effet un bon couplage entre la source laser et la fibre optique.

5.5 Modèle simple des lasers à semi-conducteurs

5.5.1 Équation de bilan d'une diode laser

Considérons que la zone active est un semi-conducteur intrinsèque $n_e \approx n_t$: c'est la seule équation pour les porteurs et l'équation de bilan de la densité électrique n_e . Soit le taux de recombinaison des porteurs

$$\frac{dn_e}{dt} = R_{\text{gen}} - R_{\text{rec}} \quad (5.89)$$

Le *taux de génération* des porteurs dans la région active est donné par

$$R_{\text{gen}} = \eta_i \frac{I}{qV} + R_A \quad (5.90)$$

où η_i est le rendement quantique interne, c'est-à-dire la fraction du courant qui génère des porteurs dans la zone active de volume V et q un élément de charge. Pour la recombinaison, nous avons la contribution des radiatives et celles de Auger

$$R_{\text{rec}} = R_{sp} + R_{nr} + R_{st} \quad (5.91)$$

En explicitant

$$R_{sp} + R_{nr} = B(n_e)n_e^2 + Cn_e^3 = \frac{n_e}{\tau_R} + \frac{n_e}{\tau_A} = \frac{n_e}{\tau} \quad \Rightarrow \quad R_{\text{rec}} = \frac{n_e}{\tau} + R_{st} \quad (5.92)$$

En remettant tout ensemble

$$\frac{dn_e}{dt} = \eta_i \frac{I}{qV} - \frac{n_e}{\tau} - (R_{st} - R_A) \quad (5.93)$$

Cherchons maintenant une équation pour la densité de photon n_p . Il va y avoir des termes de réaction (stimulée, spontanée) mais aussi des pertes (miroirs, interne). La contribution de l'émission spontanée émise dans la direction que le champ laser est faible

$$\left(\frac{dn_p}{dt} \right)_{sp} = \beta_{sp} R_{sp} \quad (5.94)$$

où β_{sp} est le facteur d'émission spontané et R_{sp} le taux d'émission spontané total.

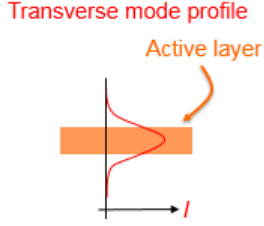


FIGURE 5.43 où V est le volume de la zone active et $\Gamma = V/V_p$ est le facteur de confinement (confinement des charges d'un côté et des photons de l'autre). On sait que le taux global d'émission stimulée vaut (résultat obtenu lorsqu'on a établi l'expression du coefficient d'absorption dans les semi-conducteurs).

$$(R_{st} - R_A) = \mathcal{G}v_g n_p \quad (5.96)$$

La question est : que vaut $\mathcal{G} = f(n_e)$?

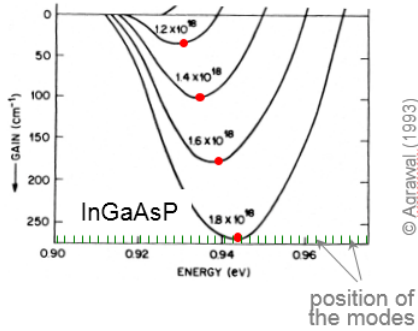


FIGURE 5.44

Il nous faut un modèle pour le gain. La largeur de celui-ci vaut à peu près 35 meV, quelle est la différence d'énergie entre les modes de cavité ? Si on considère un laser FP de longueur $L = 100 \mu$:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{c}{2L\eta} \frac{\lambda}{c} = 1.8 \times 10^{-3} \rightarrow \Delta E = 1.8 \times 10^{-3} E \approx 1.8 \text{ meV} \quad (5.97)$$

Il y a donc ± 10 modes "en dessous" de la courbe de gain ; il va y avoir lasage à la fréquence¹⁸ tel que $\mathcal{G} = \mathcal{G}_{\max}$. Si l'on plot \mathcal{G}_{\max} comme une fonction de n_e , on obtient presque une fonction linéaire.

Comme on considère ici le modèle le plus simple, ces courbes vont être linéarisée

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_{\max} \approx a(n_e - n_{tr}) \quad (5.98)$$

où $a = d\mathcal{G}/dn_e$ est le gain différentiel (m^2) et n_{tr} la densité de transparence. Notons que l'augmentation de la température diminue \mathcal{G}_{\max} .

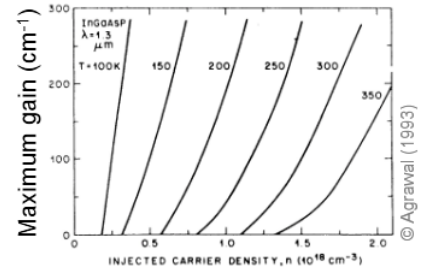


FIGURE 5.45

Il nous reste à modéliser les pertes de photons. Nous avons les pertes internes (absorption, diffusion, défauts, ...) α_i et les pertes des miroirs $\alpha_m = -\frac{1}{2L} \ln(R^2)$.¹⁹

En définissant $a_m = \alpha_i + \alpha_m$, il est possible de définir le temps de vie d'un photon dans la cavité

$$\frac{1}{t_c} = \alpha_c v_g = (\alpha_i + \alpha_m) v_g \quad (5.99)$$

Ceci nous permet d'exprimer la variation de la densité électronique causée par les pertes

$$\left(\frac{dn_p}{dt} \right)_{\text{loss}} = -n_p / t_c \quad (5.100)$$

18. Pq ?

19. Pour un FP : $R = \frac{(n-1)^2}{(n+1)^2} \approx 0.3$.

Nous avons ainsi nos deux équations de bilan

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dn_e}{dt} = \eta_i \frac{I}{qV} - \frac{n_e}{\tau} - a(n_e - n_{tr})v_g n_p \quad (1) \\ \frac{dn_p}{dt} = \Gamma a(n_e - n_{tr})v_g n_p + \beta_{sp} R_{sp} - \frac{n_p}{t_c} \quad (2) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \mathcal{G} = a(n_e - n_{tr}) \quad (5.101)$$

Dans le cas stationnaire $\dot{n}_e = \dot{n}_p = 0$. Comme $\beta_{sp} \approx 10^{-4}$, on peut négliger le terme d'émission spontanée. Comme pour les solutions de Maxwell-Bloch, on a deux solutions. La solution triviale est donnée pour $n_p = 0$

$$n_e = \eta_i \frac{I}{qV} \tau \quad (5.102)$$

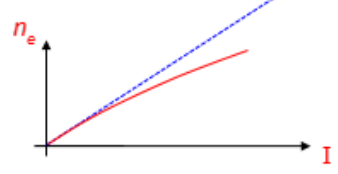


FIGURE 5.46

où $\frac{1}{\tau} = Bn_e + Cn_e^2$. Le laser est ici en dessous du seuil. On remarque que ce n'est pas totalement linéaire car le temps de vie dépend de la densité électronique (le terme radiatif et le terme de Auger).

Regardons maintenant ce qu'il en est pour la solution non-triviale ($n_p \neq 0$). En annulant la dérivée temporelle ainsi que le terme en β_{sp} dans (2) :

$$\underbrace{\frac{dn_p}{dt}}_{=0} = \Gamma \underbrace{a(n_e - n_{tr})}_{\mathcal{G}} v_g n_p + \underbrace{\beta_{sp} R_{sp}}_{\approx 0} - \frac{n_p}{t_c} \quad (5.103)$$

On retrouve la condition gain = pertes (condition d'oscillation) :

$$\Gamma \mathcal{G} v_g = \frac{1}{t_c} \quad (5.104)$$

En explicitant \mathcal{G} , on trouve que $\Gamma \mathcal{G} = \Gamma a(n_e - n_{tr}) = \alpha_c$, cela implique qu'au seuil laser nous avons $a(n_{e,th} - n_{tr}) = \frac{\alpha_c}{\Gamma}$, soit encore

$$n_e = n_{e,th} = n_{tr} + \frac{\alpha_c}{a\Gamma} \quad (5.105)$$

En divisant par τ

$$\frac{n_{e,th}}{\tau} = \eta_i \frac{I}{qV} - \frac{\alpha_c}{\Gamma} v_g n_p \quad (5.106)$$

En considérant (1) dans le cas stationnaire pour extraire l'expression de la densité électronique au seuil laser

$$n_p = \frac{\Gamma}{v_g \alpha_c} \left(\eta_i \frac{I}{qV} - \frac{n_{e,th}}{\tau} \right) = \eta_i \frac{\Gamma}{v_g \alpha_c qV} (I - I_{th}) \quad (5.107)$$

Cette équation met en évidence une variation linéaire de n_p avec I . Nous avons ainsi regroupé plusieurs constantes ensemble dans le but de faire apparaître I —quelque chose qui à les dimensions d'un courant, le seuil laser :

$$I_{th} = n_{e,th} \frac{qV}{\eta_i} \frac{1}{\tau} \quad (5.108)$$

Ceci nous donne les courbes caractéristiques d'une diode laser

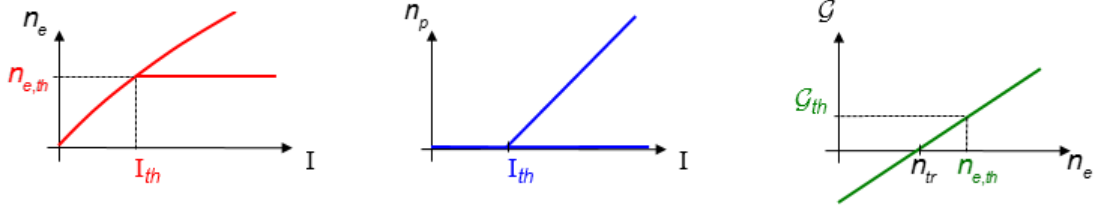


FIGURE 5.47

On retrouve la variation linéaire de la puissance avec l'intensité. Au delà du seuil il y a deux solutions possibles : une des deux ne serait-elle pas instable ? Étudions donc la stabilité de la solution triviale

$$n_e^{st} = \eta_i \frac{I}{qV} \tau, \quad n_p = 0 \quad (5.109)$$

Introduisons une petite variation autour de la solution stationnaire

$$n_e = n_e^{st} + \delta(t), \quad n_p = \varepsilon(t) \quad \text{avec} \quad \delta \ll n_e^{st} \quad \text{et} \quad \varepsilon \approx 1/V_p \quad (5.110)$$

Concentrons-nous sur une étude de la stabilité linéaire en linéarisant nos équations différentielles : les termes du second ordre ($\propto \delta\varepsilon$) sont négligés

1.

$$\dot{\varepsilon} = \Gamma v_g a(n_e^{st} + \delta - n_{tr})\varepsilon - \frac{\varepsilon}{t_c} \Rightarrow \varepsilon(t) = \varepsilon(0)e^{\lambda t} \quad (5.111)$$

avec $\lambda = \Gamma v_g \overbrace{a(n_e^{st} - n_{tr})}^G - t_c^{-1}$.

2.

$$\dot{\delta} = \eta_i \frac{I}{qV} - \frac{n_e^{st}}{\tau} - \frac{\delta}{\tau} - a(n_e^{st} + \delta - n_{tr})v_g \varepsilon \quad (5.112)$$

On en tire

$$\Rightarrow \delta(t) = \delta(0)e^{-t/\tau} - \frac{G v_g \varepsilon(0)}{\lambda + 1/\tau} (e^{\lambda t} - e^{-t/\tau}) \quad (5.113)$$

Il faut que $\lambda < 0$ afin d'avoir une solution stable. En effectuant les calculs (slide 65) pour obtenir une expression de λ , on trouve

$$\lambda = \frac{\Gamma v_g a}{qV} \tau \eta_i (I - I_{th}) \quad (5.114)$$

La solution triviale n'est stable que si $I < I_{th}$.

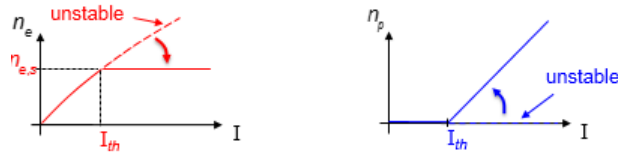


FIGURE 5.48

5.5.2 Puissance laser et rendement

Avant toute chose, rappelons le taux de photons perdus

$$(\dot{n}_p)_{loss} = -n_p/t_c = -(\alpha_i + \alpha_m)v_g n_p \quad (5.115)$$

Pour calculer le rendement, il est nécessaire de connaître le taux de photons s'échappant de la cavité par unité de volume : $\alpha_m v_g n_p$. Pour exprimer la puissance, il faut tenir compte du volume de la cavité. En dessous du seuil laser

$$P_{\text{laser}} = \alpha_m v_g n_p \hbar \omega_L V_p \quad (5.116)$$

La puissance est en effet le produit entre $\alpha_m v_g n_p$, l'énergie d'un photon et le volume occupé par ces photons dans le laser en question. En exprimant n_p

$$P_{\text{laser}} = \alpha_m v_g \hbar \omega_L V_p \eta_i \frac{\Gamma}{v_g \alpha_c q V} (I - I_{th}) \quad (5.117)$$

où $\Gamma = V/V_p$. Après simplifications

$$P_{\text{laser}} = \underbrace{\eta_i \frac{\alpha_m}{\alpha_i + \alpha_m}}_{\eta_d} \frac{\hbar \omega_L}{q} (I - I_{th}) \quad (5.118)$$

où η_d est le rendement différentiel quantique, soit $\eta_d = \frac{\Delta \text{number of photons out}}{\Delta \text{number of electrons in}}$.

Ce coefficient fait le lien entre la recombinaison d'une paire et les photons, I est le terme de pompage dans les lasers à SC. Ce rendement est proportionnel à la pente de la courbe caractéristique $P_{\text{laser}} - I$: puissance nulle en dessous d'un certain seuil et linéaire au dessus. Forcément, plus la pente est forte, plus le rendement est bon. Le rendement η_d augmente (de façon logique) lorsque α_i diminue : il faut minimiser les pertes par diffusion et (ré-)absorption²⁰.

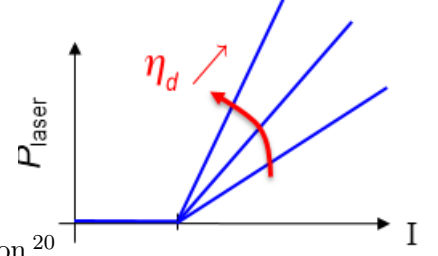


FIGURE 5.49

On peut également définir le rendement externe

$$\eta_{\text{ext}} = \frac{\text{number of photons out}}{\text{number of electrons in}} = \frac{P_{\text{laser}} / \hbar \omega_L}{I / q} = \eta_i \frac{\alpha_m}{\alpha_i + \alpha_m} (1 - I_{th} / I) \quad (5.119)$$

Dans le cas limite

$$\eta_{\text{ext}} \rightarrow \eta_i \frac{\alpha_m}{\alpha_i + \alpha_m} \text{ for } I \gg I_{th} \quad (5.120)$$

On comprend alors l'intérêt de minimiser I_{th} . Le slide 67 compare ce résultat à l'expérience (vu au cours ? Pas de notes).

Les performances se dégradent avec la température. Lorsque la température augmente, le gain différentiel(a) diminue et la densité de transparence (n_{tr}) augmente. Il y a également une augmentation des phonons à cause des recombinaisons Auger et, forcément, une diminution de η_i par fuite à travers les barrières de potentiels (l'énergie thermique donne l'énergie nécessaire pour sauter la barrière de potentiel)(ci-dessous, à droite). Tout ceci illustre l'importance du contrôle de la température de la diode laser.

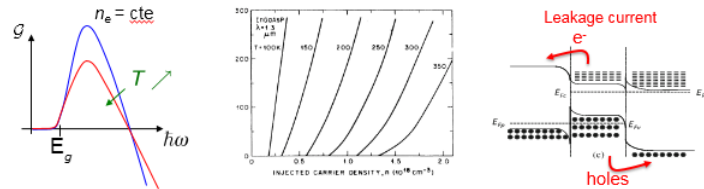


FIGURE 5.50

20. On utilisera alors des cristaux avec de faibles densité de défauts (faible absorption et diffusion) ainsi qu'une double hétéro-jonction et un guidage d'onde.

5.5.3 Propriétés spectrales des diodes lasers

Ci-contre, le spectre d'un laser à SC en fonction de l'intensité du courant (en certains points). Celui-ci est quasi mono-mode, mais il y a quand même une légère pollution venant des autres modes.

Si une face est clivée, cela introduit beaucoup de pertes. En reportant les pertes graphiquement ($\alpha_m + \alpha_i$ sont les pertes totales) on peut voir une intersection de la courbe de gain avec cette ligne pointillée des pertes totales : il y a lasage à ce mode. Cependant, comme le gain est assez important pour d'autres modes adjacents (bien que trop faible pour laser, le gain ne peut plus augmenter car il est saturé à gain = pertes) donnant lieu à un effet de super-radiance. Ils rencontrent un gain assez important qui amplifie à chaque passage, mais pas suffisamment grand que pour compenser les pertes ? Les pics satellites ne disparaissent ainsi pas, ils sont juste bloqué et sont petits (étant "super-radiant") par rapport à l'émission laser.

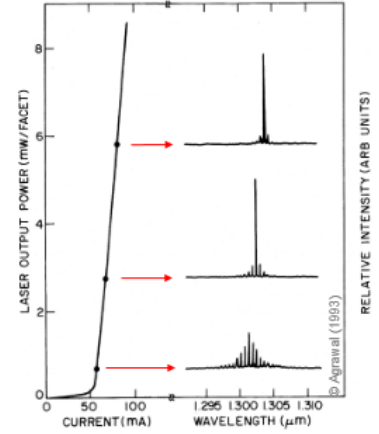


FIGURE 5.51

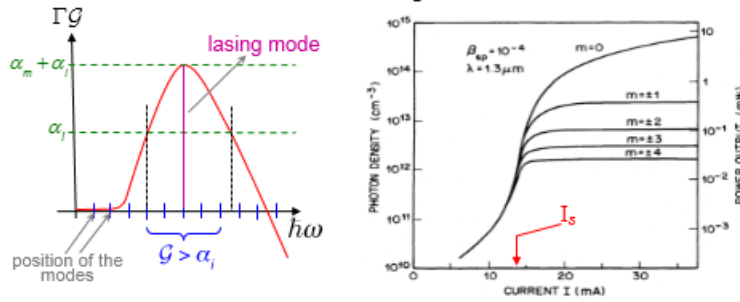


FIGURE 5.52

Revenons-en à cette partie de la puissance émise à travers modes adjacents. Remarquons tout d'abord que l'ordre des pertes internes, de miroirs et le gain ne changent pas beaucoup aux modes proches

$$\alpha_i \approx 40 \text{ cm}^{-1}, \quad \alpha_m \approx 45 \text{ cm}^{-1} \quad (5.121)$$

Il y a bien donc (comme annoncé un peu plus haut) super-radiance des modes adjacents en dessous du seuil laser avec la puissance relative entre le mode lasant et les adjacents qui augmente lorsque I augmente au delà de I_{th} . Comment éviter le déplacement spectral du spectre et des modes adjacents (laser monomode) ?

Pour éviter le multimode ou la super-radiance, on peut essayer d'avoir une courbe qui présente des pertes importantes pour tous les modes sauf un. Cela garanti que l'on lase à ce mode la et que l'on est en présence d'un monomode longitudinal bloqué à une seule valeur.

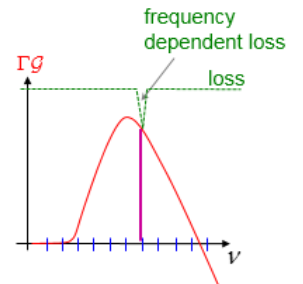


FIGURE 5.53

En pratique on va utilisé un miroir périodique. Il s'agit d'une structure périodique qui réfléchit partiellement la lumière pour les longueurs d'onde qui satisfont à la réflexion de Bragg, les autres passent ou sont (plus) faiblement réfléchies. Les *lasers DBR* (Distributed Bragg Reflector laser). En reportant sur un même graphique le gain (rouge) et les pertes (vert, l'inverse de la réflectivité (réflectivité maximale = pertes minimales)) on aura bien réflexion laser pour un mode et ce même si on shift un peu²¹.

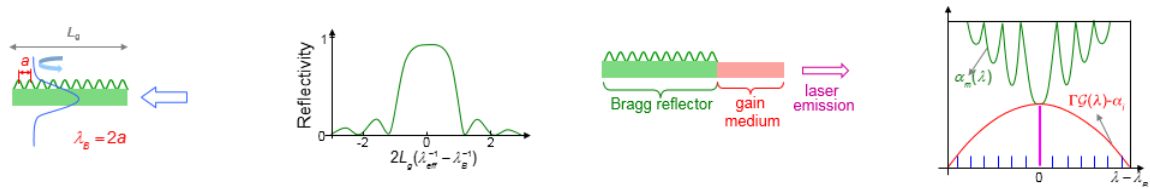


FIGURE 5.54

21. Laser DFB à expliciter, je n'ai pas bien compris