



ECOLE
POLYTECHNIQUE
DE BRUXELLES

UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES

SYNTHÈSE

Optical Materials PHYS-Y016

Auteur :
Nicolas ENGLEBERT

Professeur :
Jan DANCKAERT

Année 2017 - 2018

Appel à contribution

Synthèse Open Source



Ce document est grandement inspiré de l'excellent cours donné par Jan DANCKAERT à l'EPB (École Polytechnique de Bruxelles), faculté de l'ULB (Université Libre de Bruxelles). Il est écrit par les auteurs susnommés avec l'aide de tous les autres étudiants et votre aide est la bienvenue ! En effet, il y a toujours moyen de l'améliorer surtout que si le cours change, la synthèse doit être changée en conséquence. On peut retrouver le code source à l'adresse suivante

<https://github.com/nenglebert/Syntheses>

Pour contribuer à cette synthèse, il vous suffira de créer un compte sur *Github.com*. De légères modifications (petites coquilles, orthographe, ...) peuvent directement être faites sur le site ! Vous avez vu une petite faute ? Si oui, la corriger de cette façon ne prendra que quelques secondes, une bonne raison de le faire !

Pour de plus longues modifications, il est intéressant de disposer des fichiers : il vous faudra pour cela installer \LaTeX , mais aussi *git*. Si cela pose problème, nous sommes évidemment ouverts à des contributeurs envoyant leur changement par mail ou n'importe quel autre moyen.

Le lien donné ci-dessus contient aussi un README contenant de plus amples informations, vous êtes invités à le lire si vous voulez faire avancer ce projet !

Licence Creative Commons

Le contenu de ce document est sous la licence Creative Commons : *Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International (CC BY-NC-SA 4.0)*. Celle-ci vous autorise à l'exploiter pleinement, compte- tenu de trois choses :



1. *Attribution* ; si vous utilisez/modifiez ce document vous devez signaler le(s) nom(s) de(s) auteur(s).
2. *Non Commercial* ; interdiction de tirer un profit commercial de l'œuvre sans autorisation de l'auteur
3. *Share alike* ; partage de l'œuvre, avec obligation de rediffuser selon la même licence ou une licence similaire

Si vous voulez en savoir plus sur cette licence :

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Merci !

Table des matières

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Introduction | 1 |
| 1.1 | Changing the Properties of Light | 1 |
| 1.2 | Introduction to Electrodynamics in Continuous Media | 1 |
| 1.2.1 | Maxwell's Equations | 1 |
| 1.2.2 | Polarisation Charge and Current | 2 |
| 1.2.3 | Magnetisation Current | 3 |
| 1.2.4 | Maxwell's Equations Revisited | 3 |
| 1.2.5 | Constitutive Equations | 3 |
| 1.2.6 | Champ de polarisation | 3 |
| 2 | Light Propagation in Linear Isotropic Dielectrics | 5 |
| 2.1 | Constitutive Equation for Linear Isotropic Dielectrics | 5 |
| 2.2 | Propagation of Plane Monochromatic Waves | 6 |
| 2.3 | Propagation of Light in Absorptive Dielectrics | 7 |
| 2.4 | Frequency Dispersion | 8 |
| 2.4.1 | Frequency Dependence of ϵ | 8 |
| 2.4.2 | Dispersion Formula for Refractive Index | 9 |
| 2.5 | Linear Magnetic Materials | 10 |
| 2.6 | Reflection | 10 |
| 2.7 | The Electromagnetic Spectrum | 10 |
| 3 | Microscopic Theory of Linear Isotropic Materials | 11 |
| 3.2 | Microscopic Theory for Dielectrics | 11 |
| 3.2.1 | Static Electronic Polarisation | 11 |
| 3.2.2 | Dynamic Electronic Polarisation | 12 |
| 3.2.3 | Quantum Mechanical Theory In-a-Nutshell for Electronic Polarisation . . | 12 |
| 3.2.4 | Ionic Polarisation | 13 |
| 3.2.5 | Orientation Polarisation | 13 |
| 3.2.6 | The Field of Lorentz and the Local Field | 13 |
| 3.2.7 | Clausius-Mosotti Relation | 14 |
| 3.2.8 | General Dielectric Behaviour | 15 |
| 3.3 | Microscopic Theory for Conductors and Semiconductors | 15 |
| 3.3.1 | The 1D Drude Free-Electron Model for Metals | 15 |
| 3.3.2 | Cubic Crystals | 16 |
| 4 | Light Propagation in Linear Anisotropic Dielectrics | 17 |
| 4.1 | Anisotropic Materials in Photonics | 17 |
| 4.2 | The Susceptibility and Dielectric Tensors | 17 |
| 4.2.1 | Constitutive Equations in Anisotropic Media | 17 |

| | | |
|-------|--|----|
| 4.2.2 | Symmetry of the Susceptibility Tensor | 17 |
| 4.3 | Plane Monochromatic Waves in Anisotropic Media | 18 |
| 4.3.1 | Dispersion Relation | 18 |
| 4.3.2 | The Normal Surface | 19 |

Chapitre 1

Introduction

1.1 Changing the Properties of Light

Un faisceau laser peut être caractérisé par une intensité I , une puissance P , un rayon w , une longueur d'onde λ , une pulsation ω , une polarisation et un vecteur de Poynting \vec{S} . Nous aimerions changer ces propriétés et la seule façon de faire est de la faire interagir avec un matériau.

1.2 Introduction to Electrodynamics in Continuous Media

1.2.1 Maxwell's Equations

Le champ électrique $\vec{E}(\vec{r}, t)$ et le champ magnétique d'induction $\vec{B}(\vec{r}, t)$ sont gouvernés par

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{E} &= \frac{1}{\epsilon_0} \rho_a \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{J}_a + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\end{aligned}\tag{1.1}$$

où ρ_a (densité de charge (libre et polarisation) et \vec{J}_a (courants : libres, polarisés et magnétiques) sont les termes sources. Dans le vide, les choses sont simples (\vec{E}, \vec{B} continus et pas de termes sources) mais dans un matériau il faut prendre en compte toutes les particules pouvant contribuer au terme source.

On approxime souvent la densité de charge ρ_a par une combinaison de charges séparées et de dipôles¹

$$\vec{p} = q\vec{d}\tag{1.2}$$

Par exemple, les atomes, molécules, ... Pour les charge séparées on notera les électrons dans un solide, les ions, ... On note alors

$$\rho_a = \rho + \rho_P\tag{1.3}$$

Le densité de courant totale \vec{J}_a [A/m^2] se note

$$\vec{J}_a = \vec{J} + \vec{J}_P + \vec{J}_M\tag{1.4}$$

1. Description utilisée lorsque deux charges égales mais de signe opposé sont considérées comme un ensemble.

où \vec{J} est le mouvement des charges libres, \vec{J}_P la variation des dipôles et \vec{J}_M la densité de courant magnétique. Notons la force de Lorentz agissant sur une charge q à vitesse \vec{v}

$$f_{Lorentz} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (1.5)$$

ainsi que la force agissant sur un dipôle électrique \vec{P} (où $\vec{B} = \vec{0}$)

$$f_p = (p \cdot \vec{\nabla}) \vec{E} \quad (1.6)$$

D'autres forces sont renseignées à la page 12.

Une approche (microscopique) pour étudier la propagation de la lumière dans la matière serait de résoudre ces équations couplées aux équations de mouvement de toutes les particules, ce qui n'est pas réaliste. Une autre approche est de voir les choses d'un point de vue macroscopique. Les équations de Maxwell sont valables aux dimensions macroscopique (nm) en considérant la moyenne des champs sur un volume contenant un grand nombre d'atomes, ions, ... Avec l'hypothèse de continuité, on appelle cette approche *electrodynamics of continuous media*.

1.2.2 Polarisation Charge and Current

Nous avons vu l'expression d'un dipôle microscopique ($\vec{p} = q\vec{d}$). Pour l'approche macroscopique, il faut considérer la moyenne du moment dipolaire par unité de volume

$$\vec{P}(r) \equiv \lim_{\Delta V \rightarrow \epsilon} \frac{\sum_i \vec{p}_i}{\Delta V} \quad (1.7)$$

où $\vec{P}P$ est défini dans la limite où l'élément de volume ΔV autour de \vec{r} est "petit" macroscopiquement, mais contient un grand nombre de dipôles. Le moment magnétique d'un élément au point \vec{r}' est donné par

$$P\Delta V' \quad (1.8)$$

Celui-ci contribue au potentiel au point \vec{r} d'une quantité (vecteurs à mettre)

$$\Delta U(r) = \frac{P(r')\Delta V'(r - r')}{4\pi\epsilon_0|r - r'|^3} \quad (1.9)$$

Le potentiel au point \vec{r} est alors donné par

$$U(\vec{r}) = \iiint_{V_0} \frac{P(r')(r - r')dV'}{4\pi\epsilon_0|r - r'|^3} \quad (1.10)$$

Sachant que, par propriété $\nabla'(1/(|r - r'|)) = (r - r')/(|r - r'|^3)$ et à l'aide du vecteur différentiel $\nabla'(f\vec{P}) : f\nabla' \cdot \vec{P} + \vec{P} \cdot \nabla' f$, on peut ré-écrire le potentiel

$$U(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{V_0} \frac{(-\nabla' \cdot \vec{P})dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S_0} \frac{\vec{P} \cdot d\vec{S}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (1.11)$$

Par identification avec l'expression du potentiel du à une distribution de charge volumique ou surfacique et comme $[-\vec{\nabla} \cdot \vec{P}] = [C/m^3]$ et $[\vec{P}] = [C/m^2]$, on peut écrire

$$\rho_P = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \quad (1.12)$$

Sachant que le courant de polarisation est donné par²

$$\vec{J}_p = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \quad (1.13)$$

2. Cf. théorie microscopique des dipôles élémentaires

Compte-tenu de la précédente expression, nous obtenons

$$\frac{\partial \rho_p}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_p \quad (1.14)$$

La présence de la divergence se justifie par le fait que les charges sont séparées, le signe par convention.

1.2.3 Magnetisation Current

Les courants de magnétisations sont des petites "boucles" magnétiques. Similairement à la sous-section précédente

$$M(\vec{r}) \equiv \lim_{\Delta V \rightarrow \epsilon} \frac{\sum_i m_i}{\Delta V}, \quad \vec{J}_M = \vec{\nabla} \times \vec{M} \quad (1.15)$$

1.2.4 Maxwell's Equations Revisited

En substituant dans les équations de Maxwell les résultats des deux précédentes sous-sections et en posant $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ et $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0 - \vec{M}$, on trouve

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \rho \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{aligned} \quad (1.16)$$

1.2.5 Constitutive Equations

Pour avoir un système résolvable, il faut trouver une relation entre \vec{P} , \vec{E} et \vec{M} , \vec{B} . Ceci va être faisable avec une approche phénoménologique, en utilisant les équations constitutives.

Champ de magnétisation

Dans ce cours, on considérera que $\vec{M} = \vec{0}$

1.2.6 Champ de polarisation

Beaucoup de matériaux contiennent des dipôles ou son polarisé à cause de \vec{E} . Ces dipôles sont affectés lorsqu'une onde EM traverse le matériau : les particules positives bougent dans la direction du champ et les négatives dans le sens opposé. Il en résulte que $\vec{P} = f(\vec{E})$. On peut alors considérer le développement en série suivant

$$\vec{P} = \vec{P}^{(0)} + \vec{P}^{(1)} + \vec{P}^{(2)} + \dots \quad (1.17)$$

où $\vec{P}^{(0)}$ est la polarisation statique, $\vec{P}^{(1)}$ est la polarisation linéaire ($\propto \vec{E}$), ...

De façon générale, la polarisation en (\vec{r}, t) dépend d'autres position et temps que le doublet (\vec{r}, t) . L'expression du n^e ordre devient alors

$$P_i^{(n)}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \iiint_{V_0} d\vec{r}_1 \dots \iiint_{V_0} d\vec{r}_n \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n \chi_{ij_1 \dots j_n}^{(n)}(\vec{r}, \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, t, t_1, \dots, t_n) E_{j_1}(\vec{r}_1, t) \dots E_{j_n}(\vec{r}_n, t_n) \quad (1.18)$$

où $\chi^{(n)}$ est la susceptibilité d'ordre n , un tenseur de rang $n + 1$. Nous faisons ici l'hypothèse que le matériau est homogène (propriétés identique en chaque point de l'espace). En cas de discontinuité, on supposera que la théorie de continuité reste valide à l'interface. On fait également l'hypothèse que le matériau est stationnaire : la même expérience faite aujourd'hui ou demain donnera les mêmes résultats. Il s'agit bien sur d'approximations. Ceci s'exprime mathématiquement par un tenseur de susceptibilité qui ne dépend que des différences entre les coordonnées spatiales et temporelles.

$$P_i^{(n)}(r, t) = \epsilon_0 \iiint_{V_0} dr_1 \dots \iiint_{V_0} dr_n \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_n \chi_{ij_1 \dots j_n}^{(n)}(r - r_1, \dots, r - r_n, t, \dots, t - t_n) E_{j_1}(r_1, t_1) \dots E_{j_n}(r_n, t_n) \quad (1.19)$$

Chapitre 2

Light Propagation in Linear Isotropic Dielectrics

2.1 Constitutive Equation for Linear Isotropic Dielectrics

Précédemment¹, nous avons introduit une relation constitutive décrivant les propriétés d'un matériau homogène et stationnaire

$$P_i^{(n)}(r, t) = \epsilon_0 \iiint_{V_0} dr_1 \dots \iiint_{V_0} dr_n \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_n \chi_{ij_1 \dots j_n}^{(n)}(r - r_1, \dots, r - r_n, t, \dots, t - t_n) E_{j_1}(r_1, t_1) \dots E_{j_n}(r_n, t_n) \quad (2.1)$$

Cette relation compliquée se simplifie avec les deux hypothèses suivantes

1. **Linéaire.** Les champs \vec{E}, \vec{B} dépendent linéairement des termes sources ρ, \vec{P} et \vec{M} . Linéaire signifie également qu'une combinaison de solutions est solution.
2. **Isotropique.** Les relations entre \vec{E}, \vec{B} et ρ, \vec{P}, \vec{M} sont indépendantes de la direction d'espace.

La première hypothèse ne laisse place qu'au terme du premier ordre

$$P_i(r, t) = \epsilon_0 \iiint_{V_0} dr_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \chi_{ij}^{(1)}(r - r_1, t - t_1) E_j(r_1, t_1) \quad (2.2)$$

La seconde implique que le champ de polarisation doit être parallèle au champ électrique

$$P_i(r, t) = \epsilon_0 \iiint_{V_0} dr_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \chi^{(1)}(r - r_1, t - t_1) E(r_1, t_1) \quad (2.3)$$

Etant une intégrale de convolution, elle se traite facilement dans le domaine des fréquences

$$E(k, \omega) = \iiint E(r, t) e^{-i(\omega t - k \cdot r)} dr dt, \quad E(r, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \iiint E(k, \omega) e^{i(\omega t - k \cdot r)} dk d\omega \quad (2.4)$$

La relation constitutive dans le domaine des fréquences devient alors

$$P(k, \omega) = \epsilon_0 \chi(k, \omega) E(k, \omega) \quad (2.5)$$

où il est clair qu'une interaction non-locale (non-instantanée) donne lieu à de la dispersion temporelle (spatiale).

1. La page précédente quoi

Les hypothèses

- **Causalité.** Susceptibilité nulle $\forall t < t_1$. Dans le domaine fréquentiel, elle fournit une relation entre la partie réelle et complexe de la susceptibilité.
- **Instantané.** $\rho, \vec{P}, \vec{J}, \vec{M}$ ne dépendent que de \vec{E}, \vec{B} au même instant.
- **Local.** $\rho, \vec{P}, \vec{J}, \vec{M}$ ne dépendent que de \vec{E}, \vec{B} au même point.

S'expriment

$$\chi^{(1)}(r - r_1, t - t_1) = \chi \delta(r - r_1, t - t_1) \quad (2.6)$$

Ce qui implique

$$P(r, t) = \epsilon_0 \chi E(r, t) \quad (2.7)$$

Ce qui est une bonne approximation à basse fréquence² et pour les matériaux transparents³

2.2 Propagation of Plane Monochromatic Waves

La relation constitutive linéaire simplifie les équations de Maxwell : \vec{D} est linéaire en \vec{E}

$$D \equiv \epsilon_0 + P = \epsilon_0(1 + \chi)E = \epsilon E \quad (2.8)$$

où $\epsilon = \epsilon_0(1 + \chi)$. On en tire

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \text{rot } \vec{B} = \epsilon \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2.9)$$

Ce qui mène à l'équation d'onde bien connue

$$\Delta E - \epsilon \mu_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \quad (2.10)$$

Possédant comme solution $E(r, t) = E_0 \text{Re} \left(e^{i\omega t - k \cdot r} \right)$. Par substitution de la solution, on trouve la **relation de dispersion**

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \epsilon \mu \omega^2 \quad (2.11)$$

Qui devient $k_0 = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ dans le vide. On en déduit que la vitesse de la lumière dans le vide est donnée par $c = \omega/k_0 = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$. La relation de dispersion dans un diélectrique est

$$k = \omega \sqrt{\epsilon \mu_0} \quad (2.12)$$

On définit alors la **vitesse de phase** $v_\varphi = \omega/k = 1/\sqrt{\epsilon \mu_0}$. L'**indice de réfraction** est défini comme le rapport entre la vitesse de la lumière sur la vitesse de phase

$$n = \frac{c}{v_\varphi} = \frac{\sqrt{\epsilon \mu_0}}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}} \quad (2.13)$$

On utilisera souvent la relation suivante, issue des précédentes relations

$$k = \frac{\omega}{c} n \quad (2.14)$$

2. La TF d'une fonction réelle est complexe, la dispersion et l'atténuation sont liés.

3. Pas d'atténuation et donc pas de dispersion : interaction instantanée des dipôles.

2.3 Propagation of Light in Absorptive Dielectrics

Considérons comme relation constitutive la loi d'Ohm $\vec{J} = \sigma \vec{E}$. En faisant l'hypothèse de linéarité, nous avons toujours que $P = \epsilon \chi E$. Les équations de Maxwell deviennent

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \text{rôt } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \text{rôt } \vec{B} = \mu_0 \sigma E + (1 + \chi) \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E}{\partial t} \quad (2.15)$$

Si l'onde est monochromatique

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \text{rôt } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \text{rôt } \vec{B} = \underbrace{i\omega \mu_0 \epsilon_0 \left(1 + \chi - i \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0}\right)}_{\epsilon} E \quad (2.16)$$

où $\epsilon = \epsilon' - i\epsilon''$ est la **permittivité complexe**. Par convention, sa partie imaginaire est négative impliquant que n se situe toujours dans la quatrième quadrant du plan de Gauss

$$n = n' - in'' = \sqrt{\frac{\epsilon' - i\epsilon''}{\epsilon_0}} \quad (2.17)$$

où n', n'', ϵ'' sont toujours positifs, mais pas ϵ' . Pour un matériau sans pertes, $n'' = \epsilon'' = 0$. A partir de l'indice de réfraction complexe, on peut directement trouver la permittivité complexe

$$\frac{\epsilon'}{\epsilon_0} = n'^2 - n''^2, \quad \frac{\epsilon''}{\epsilon_0} = 2n' n'' \quad (2.18)$$

A partir de la permittivité, l'indice de réfraction se trouve via une relation quadratique⁴

$$n' = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 + \chi} \sqrt{1 + \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \epsilon_0^2 (1 + \chi)^2}}}, \quad n'' = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 + \chi} \sqrt{-1 + \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \epsilon_0^2 (1 + \chi)^2}}} \quad (2.19)$$

△ Les propriétés de conduction d'un matériau influence sur la vitesse de phase d'une onde EM : il n'est **pas** possible d'étudier séparément les effets de la propagation et de "sommer" les deux solutions.

La vitesse de phase d'une onde EM dans un milieu conducteur est donnée par

$$v_\varphi = \frac{c}{n'} \quad (2.20)$$

L'effet de n'' est une décroissance exponentielle de l'amplitude de l'onde dans la direction de propagation

$$E = E_0 e^{i(\omega t - n' k_0 \cdot r)} e^{-n'' k_0 \cdot r} \quad (2.21)$$

On définit généralement la constante d'absorption α pour exprimer l'irradiance

$$I = I_0 e^{-\alpha(\vec{1}_k \cdot \vec{r})} \quad (2.22)$$

où $\alpha = 2k_0 n'' = 4\pi n'' / \lambda_0$, le facteur deux venant du module carré.

4. Question d'examen

2.4 Frequency Dispersion

2.4.1 Frequency Dependence of ϵ

Jusqu'ici nous avons négligé la dispersion, mais avec un spectre fréquentiel fini on ne peut pas la négliger : toutes les constantes du matériau vont dépendre de ω . Par exemple :

Pour un diélectrique susceptibilité fonction de ω

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0(1 + \chi(\omega)) \quad (2.23)$$

Pour un conducteur conductivité fonction de ω (notons que celle-ci peut-être complexe (non-considéré ici))

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0 + \epsilon_0 \chi(\omega) - i \frac{\sigma(\omega)}{\omega} \quad (2.24)$$

Considérons les équations de Maxwell dans le domaine de Fourier

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0, \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -i\omega \vec{B}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \sigma \vec{E} + i\omega \epsilon \mu_0 \vec{E} \quad (2.25)$$

Un certain nombre de dépendances en fréquences peuvent être établies, indépendamment de l'origine physique

1. Processus de relaxation

La permittivité à la forme

$$\epsilon(\omega) = \epsilon'_\infty + \frac{\epsilon'_s - \epsilon'_\infty}{1 + i\omega\tau} \quad (2.26)$$

où ϵ'_∞ est la limite de haute fréquence dans la permittivité ($\omega \gg 1/\tau$), ϵ'_s est la limite statique de la permittivité ($\omega \ll 1/\tau$) et τ est le temps de relaxation. On peut extraire les parties réelle et imaginaire de cette expression complexe

$$\epsilon' = \epsilon'_\infty + \frac{\epsilon'_s - \epsilon'_\infty}{1 + \omega^2 \tau^2}, \quad \epsilon'' = \omega \tau \frac{\epsilon'_s - \epsilon'_\infty}{1 + \omega^2 \tau^2} \quad (2.27)$$

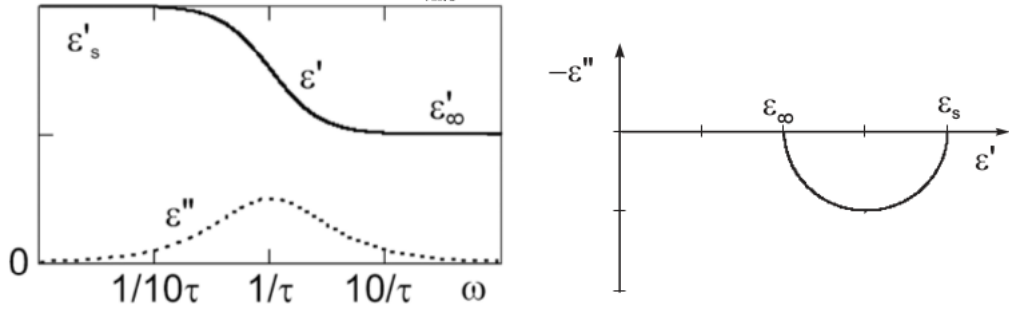


FIGURE 2.1 – Dépendance fréquentielle de ϵ' et ϵ'' pour une relaxation à gauche et représentation Cole-Cole à droite.

La réponse impulsionnelle correspondante à ce phénomène est donnée par

$$\epsilon(t) = \epsilon'_\infty \cdot \delta(t) + (\epsilon'_s - \epsilon'_\infty) \frac{e^{-t/\tau}}{\tau} \quad (2.28)$$

Notons que les relations de Kramers-Kronig ne sont pas vérifiées par la limite à haute-fréquence est non-nulle (mais $\epsilon - \epsilon'_\infty$ oui).

2. Processus de résonance

La dépendance en fréquence de la permittivité à la forme

$$\epsilon(\omega) = \epsilon'_\infty + (\epsilon'_s - \epsilon'_\infty) \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega \cdot 2\Delta} \quad (2.29)$$

où ω_0 est la pulsation de résonance et 2Δ la largeur de résonance. L'équation (2.42) donne la réponse impulsionnelle.

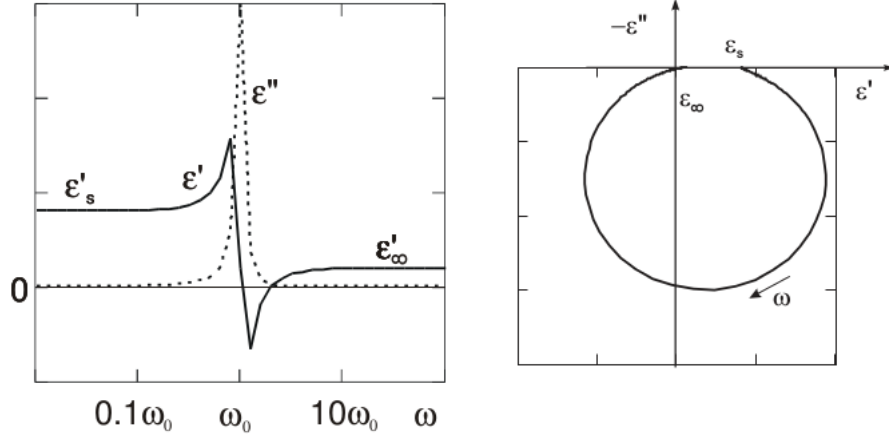


FIGURE 2.2 – Dépendance fréquentielle de ϵ' et ϵ'' pour une résonance à gauche et représentation Cole-Cole à droite.

Proche de la résonance ($|\omega - \omega_0| \ll \omega_0$), si la largeur de résonance est bien plus petite que la fréquence de résonance ($2\Delta \ll \omega_0$), on peut faire l'approximation que

$$\epsilon = \epsilon'_\infty + \frac{\omega_0}{2} \frac{\epsilon'_s - \epsilon'_\infty}{\omega_0 - \omega + i\Delta} \quad (2.30)$$

3. Dispersion de Sellmeier

L'absorption est souvent négligeable dans les régions loin de la résonance. La permittivité est alors approximativement réelle et la dispersion pour un processus de résonance devient

$$\epsilon(\omega) = \epsilon'_\infty + (\epsilon'_s - \epsilon'_\infty) \cdot \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (2.31)$$

S'il y a des résonances à haute ou basse fréquence, la dispersion peut être bien approximée par l'équation de Sellmeier

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0 \left(1 + \sum_j \frac{S_j \omega_j^2}{\omega_j'^2 - \omega^2} \right) \quad (2.32)$$

2.4.2 Dispersion Formula for Refractive Index

La dispersion sur l'indice de réfraction est bien approximée par (basée sur l'équation de Sellmeier)

$$n^2(\omega) = 1 + \sum_j \frac{S_j \omega_j^2}{\omega_j'^2 - \omega^2} \quad (2.33)$$

2.5 Linear Magnetic Materials

Le champ de magnétisation est lié au champ magnétique via

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad (2.34)$$

Par définition, le champ d'induction magnétique est donné par

$$B \equiv \mu_0(H + M) = \mu_0(1 + \chi_m)H = \mu H \quad (2.35)$$

Cependant, pour la quasi-totalité des matériaux optiques $\chi_m \approx 0$. On dira alors que $\mu \approx \mu_0$ et $B \approx \mu_0 H$.

2.6 Reflection

La réflectance R est donnée par⁵

$$R = \frac{|n-1|^2}{|n+1|^2} = \frac{(n'-1)^2 + n''^2}{(n'+1)^2 + n''^2} \quad (2.36)$$

2.7 The Electromagnetic Spectrum

Le par-cœur c'est mal, mais ça peut (vraiment) aider ici :

- pulsation ω
- frequency $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$
- photon energy $h\nu = \hbar\omega$
- wavelength in vacuum $\lambda = \frac{c}{\nu}$
- wave number in vacuum $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$

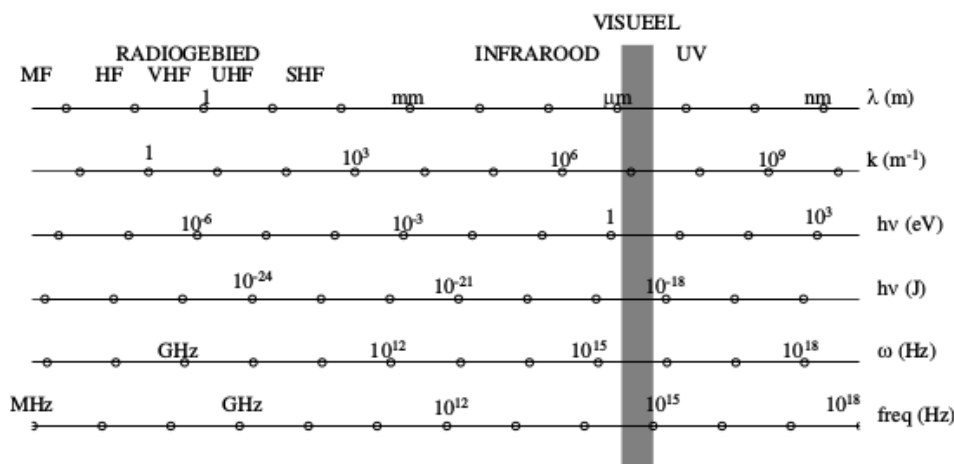


FIGURE 2.3

5. Voir TP1

Chapitre 3

Microscopic Theory of Linear Isotropic Materials

3.2 Microscopic Theory for Dielectrics

Considérons le cas d'un matériau linéaire et isotopique dans le champ de polarisation est donné par $\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$ où χ est la susceptibilité diélectrique.

3.2.1 Static Electronic Polarisation

Les électrons ont une faible masse m_e mais une "grande" charge e . En présence d'un champ électrique \vec{E} , les électrons subissent une force électrique

$$\vec{F}_E(x) = -e\vec{E} \quad (3.1)$$

Les électrons d'un diélectriques sont toujours associés à des particules positives : ils sont liés à celles-ci par un potentiel électrique qui a un minimum : la position d'équilibre. Ce potentiel est approximativement parabolique

$$U_p(x) = \frac{a}{2}x^2 \quad \Rightarrow \quad F_p(x) = -ax \quad (3.2)$$

Dans un modèle statique, la position ne varie pas avec le temps. Elle peut être trouvée par équilibre des forces $x = -eE/a$. On en tire le moment dipolaire et par la même occasion, la polarisation

$$p = -ex = \frac{e^2}{a}E \quad \Rightarrow \quad P = N_e p = \frac{N_e e^2}{a}E \quad (3.3)$$

On en tire $\chi = \frac{N_e e^2}{a \epsilon_0}$. En considérant que le potentiel inter-atomique à distance d_a vaut l'énergie de liaison U_b , on trouve que $a = 2U_b/d_a^2$ ce qui mène à

$$\chi = \frac{N_e e^2 d_a^2}{2 \epsilon_0 U_b} \quad (3.4)$$

Le moment dipolaire d'un atome/molécule est relié au champ électrique par la polarisabilité électronique statique ($\alpha_{e,s}$, [m^3]) : $p_a = \alpha_{e,s} \cdot \epsilon_0 \cdot E$. Avec Z électrons, on trouve

$$\alpha_{e,s} = \frac{Z e^2 d_a^2}{2 \epsilon_0 U_b} \quad (3.5)$$

3.2.2 Dynamic Electronic Polarisation

Il s'agit du modèle de *Drude-Lorentz*. On considère la seconde loi de Newton avec en plus de la force électrique, une force de rappel lié au potentiel et un amortissement proportionnel à la vitesse du nuage d'électron

$$m_e \frac{d^2 x}{dt^2} = -eE - ax - 2m_e \gamma \frac{dx}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = -\frac{e}{m_e} E \quad (3.6)$$

où $\omega_0^2 = a/m_e = 2U_b/(m_e d_a^2)$ est la fréquence de résonance. En régime harmonique $e^{i\omega t}$ pour x et E , on trouve

$$-\omega^2 x + i2\gamma\omega x + \omega_0^2 x = -\frac{e}{m_e} E \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{eE}{m_e(\omega_0^2 - \omega^2 + i2\gamma\omega)} \quad (3.7)$$

Pour la polarisabilité électronique d'un atome de Z électrons, on trouve

$$\alpha_s = \frac{Ze^2}{\epsilon_0 m_e} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\gamma\omega} \quad (3.8)$$

Il s'agit d'un phénomène de résonance à la fréquence ω_0 alors que l'amortissement contribue à la partie imaginaire. Notons que la polarisabilité tend toujours vers zéro à haute fréquence¹ et statique aux basses fréquences²

3.2.3 Quantum Mechanical Theory In-a-Nutshell for Electronic Polarisation

La mécanique quantique nous apprend que les niveaux d'énergies sont bien définis, avec des différences bien définies : pour se faire absorbé, un photon doit avoir une énergie très précise. Soit ω_{0i} correspondant à la différence d'énergie entre l'état excité i et le fondamental. Chaque transition électronique possible conduit à une ligne d'absorption étroite autour de la fréquence ω_{0i} , c'est la signification physique du delta de Dirac ci-dessous (règle d'or de Fermi). Comme on parle d'absorption, cela implique la la règle de Fermi est directement liée à la partie imaginaire de la polarisabilité. Après de longs calculs

$$\text{Im}(\alpha_e) = \sum_i \frac{\pi e^2 |P_{0i}|}{m_e^2 \omega^2 \epsilon_0} \delta(\omega - \omega_{0i}) \quad (3.9)$$

La partie imaginaire est liée à la partie réelle par les relations de Kramers-Kronig. Celles-ci nous disent que dans le cas d'un système causal, elles ne sont pas indépendantes. On trouve alors

$$\text{Re}(\alpha_e) = \sum_i \frac{2e^2 |P_{0i}|}{m_e^2 \omega^2 \epsilon_0} \frac{\omega_{0i}}{\omega_{0i}^2 - \omega^2} \quad (3.10)$$

Avec la règle d'or de Fermi, on peut facilement calculer la partie imaginaire et avec Kramers-Kronig³ retrouver la partie réelle. On peut généraliser l'expression dans le cadre de l'amortissement (voir syllabus, (3.21)).

1. Les électrons ne savent pas "suivre" le champ.

2. Comme dans la théorie statique.

3. Pas demandé de connaître à l'examen, mais impressionné si on le démontre.

3.2.4 Ionic Polarisation

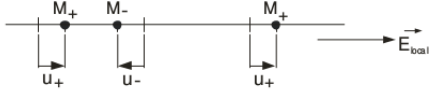


FIGURE 3.1

Lorsqu'un champ oscillant est présent, les ions vont bouger les uns par rapport aux autres. Considérons le schéma ci-contre présentant des ions positifs et négatifs et un champ appliqué selon $\vec{1}_x$. En supposant une force proportionnelle à la déviation de la position du centre d'équilibre des deux voisins, on trouve

$$M_- \frac{d^2 u_-}{dt^2} = -2C(u_- - u_+) - qE_{local} \quad (3.11)$$

où C est le facteur de proportionnalité entre la déviation et la force de rappel et le facteur 2 vient du fait qu'il y a deux voisins. Pour un ion positif, on trouve

$$M_+ \frac{d^2 u_+}{dt^2} = -2C(u_+ - u_-) + qE_{local} \quad (3.12)$$

Un champ local va exciter chaque type d'ion (local, qui est relié au global, nous y reviendrons). Par combinaison linéaire, on trouve

$$M \frac{d^2 u}{dt^2} + 2Cu = qE_{local} \quad (3.13)$$

où $u = u_+ - u_-$ et où $M = M_+ M_- / (M_+ + M_-)$ est la masse réduite. Par un couple d'ion, le moment dipolaire vaut qu , la polarisabilité est alors donnée par

$$\alpha(\omega) = \frac{q^2}{\epsilon_0(2C - M\omega^2)} \quad (3.14)$$

Ce qui mène à la fréquence de résonance $\omega_{0,a} = \sqrt{\frac{2C}{M}}$. La fréquence de résonance sera bien plus basse que celle causée par les électrons (en dessous du visible alors que pour ces-derniers c'était au dessus), tout simplement car $M \gg m_e$.

3.2.5 Orientation Polarisation

Les molécules peuvent avoir des orientations "locales" aléatoire : en l'absence de champ électrique, la polarisation macroscopique est nulle. Si on applique \vec{E} , ils vont s'orienter dans la même direction et la polarisabilité serait plus grande. Le processus est cependant assez lent (la molécule doit subir une rotation) et se détruit facilement (par simple augmentation de la température). La physique statistique nous donne une valeur que l'on peut associer à ce phénomène

$$\alpha_{as} = \frac{p^2}{3\epsilon_0 k_B T} \quad (3.15)$$

Ceci concerne les gaz et les liquides.

3.2.6 The Field of Lorentz and the Local Field

Nous avons précédemment introduit un champ *local*, mais quel mécanisme peut lier ce-dernier au champ global ? Le champ local peut être différent du global à cause des dipôles. Le champ externe interagit avec ceux-ci et ils génèrent un second champ qui vient modifier le "champ perçu" par ces mêmes dipôles. Nous allons ici suivre l'approche de Lorentz et calculer son champ moyen.

Nous allons calculer ce champ moyen en un point en construisant autour de ce point une sphère de rayon petit par rapport à l'échelle macroscopique, mais grande par rapport à l'échelle microscopique. A l'intérieur, on va remplacer la matière continue par pleins de dipôles élémentaires. Le champ local est la somme de trois contributions

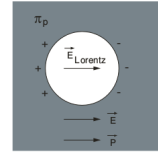


FIGURE 3.2

1. Le champ \vec{E} externe
2. Les dipôles présents
3. Les charges de surface sur la sphère (venant de la construction même de la sphère) : $\sigma_p = -P \cos \theta$. Lorentz a calculé de que valait ce champ, il a trouvé

$$E_{\text{Lorentz}} = \frac{P}{3\epsilon_0} \quad (3.16)$$

Il s'agit donc du champ généré par les charges de surface.

Dans beaucoup de matériaux (si le cercle est centrée sur le point), la contribution des dipôles sera nulle. On trouve alors

$$E_{\text{local}} = E + \frac{P}{3\epsilon_0} \quad (3.17)$$

3.2.7 Clausius-Mosotti Relation

Utilisons l'expression juste obtenue pour ré-écrire le moment dipolaire

$$p_i = \alpha_i \epsilon_0 E_{\text{local}} = \alpha_i \epsilon_0 \left(E + \frac{P}{3\epsilon_0} \right) \quad (3.18)$$

Cette relation relie le force des dipôles au champ local. On peut en déduire le champ de polarisation

$$P = \sum_i N_i p_i = \sum_i N_i \alpha_i \epsilon_0 \left(E + \frac{P}{3\epsilon_0} \right) \quad (3.19)$$

L'équation est maintenant "fermée". On y voit une sorte de récurrence car le champ local dépend du champ de polarisation : il faut connaître le champ de polarisation pour connaître le champ local puis utiliser ce dernier pour trouver le champ de polarisation ! Ce qui est beau, c'est que l'on trouve une nouvelle expression pour la susceptibilité électrique

$$\chi_e = \frac{P}{\epsilon_0 E} = \frac{\sum_i N_i \alpha_i}{1 - \frac{1}{3} \sum_i N_i \alpha_i} \quad (3.20)$$

Ce qui est important de comprendre c'est que le champ local définit la polarisabilité et qu'en sommant et fermant la relation obtenue on obtient celle-ci. La susceptibilité est donc donnée par la somme des polarisabilités divisée par une correction venant du champ local de Lorentz.

La loi de Clausius-Mosotti permet de réécrire E_{local} (basée sur l'expression des cristaux cubiques) pour obtenir la **loi de Clausius-Mosotti**

$$\frac{\chi_e}{\chi_e + 3} = \frac{1}{3} \sum_i N_i \alpha_i \quad (3.21)$$

Avec cette définition de la susceptibilité, la relation de Lorentz devient

$$E_{\text{Local}} = \left(1 + \frac{\chi_e}{3} \right) E \quad (3.22)$$

L'important est - encore une fois - de voir d'où le problème vient : on travaille sur des effets macroscopiques mais résultant d'un champ local sommé au champ externe.

3.2.8 General Dielectric Behaviour

Reprenons les précédents résultats. La polarisation électronique se situe dans l'UV (une ou plusieurs résonances). La polarisation se situe (une ou plusieurs résonances) dans l'infrarouge et la polarisation d'orientation à une fréquence critique dans les radio.

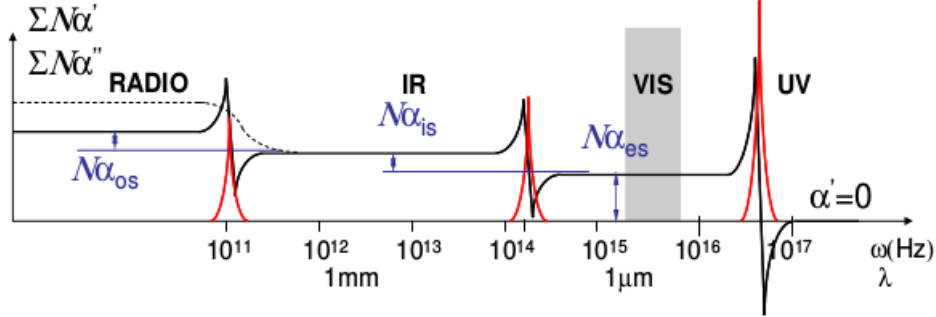


FIGURE 3.3 – Attention, les résonances montent d'abord puis elle descendent, pas l'inverse !

On voit que les différentes résonances ne sont pas dans le visible. Cependant, le nombre de résonances "avant et après" le visible influence la valeur "du visible" : les résonances ont une contribution indirectes. Pour récapituler, α est la tendance à polariser une charge **unique** (ion, électron, ...) alors que χ est la tendance à polariser **tout** le matériau. La loi de Clausius-Mozotti donne la relation entre α et χ .

3.3 Microscopic Theory for Conductors and Semiconductors

Dans les diélectriques, la réaction de E est décrite par P . Dans un conducteurs, par le courant J car les électrons sont libres de se mouvoir⁴.

3.3.1 The 1D Drude Free-Electron Model for Metals

Soit des ions à positions fixes et des électrons dans la bande de conduction : pas d'interactions entre les deux espèces, mais les électrons accélèrent en présence de \vec{E} . Parfois, les e^- collisionnent avec les ions ou les impuretés. La probabilité de collision sur dt est donnée par dt/τ . Les collisions ne sont pas élastiques, mais la vitesse après collision est dictée par la condition d'équilibre thermique. Sans \vec{E} , la vitesse moyenne des e^- et donc J est nul.

Soit $E(t)$ et un ensemble d' e^- avec une position moyenne x . Négligeons la variation spatiale. L'impulsion linéaire moyen $m dx/dt$ au temps $t + dt$ (où $dt \ll \tau$) est composé de deux contributions

1. La fraction des électrons qui voient leurs impulsions augmentées sous l'influence de la force $-eE$

$$\left(1 - \frac{dt}{\tau}\right) \quad (3.23)$$

2. La fraction dt/τ des électrons qui n'obtiennent pas d'impulsion à cause de la collision avec un ion.

L'impulsion moyenne en $t + dt$ devient alors

$$m \frac{dx}{dt}(t + dt) = \left(1 - \frac{dt}{\tau}\right) \left(m \frac{dx}{dt}(t) - eE(t)dt\right) \quad (3.24)$$

4. "Le modèle de Drude est **vraiment à connaître**".

Ceci mène à l'équation de mouvement

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{m}{\tau} \frac{dx}{dt} - eE \quad (3.25)$$

où l'on reconnaît un terme de *damping* à droite. Notons qu'il y a **également** des électrons liés dans un conducteurs, dans les basses couches. Sachant que $J = -Ne \frac{dx}{dt}$

$$\frac{dJ}{dt} = -\frac{J}{\tau} + \frac{Ne^2}{m} E \quad (3.26)$$

Ce qui devient, en régime harmonique $e^{i\omega t}$

$$J(\omega) = \frac{Ne^2\tau}{m(1 + i\omega\tau)} E(\omega) \quad (3.27)$$

Connaissant la loi d'Ohm

$$\sigma(\omega) = \frac{Ne^2\tau}{m(1 + i\omega\tau)} \quad (3.28)$$

Il s'agit de la **complex frequency dependant conductivity**.

Nous avons trouvé au chapitre 2

$$\epsilon = \epsilon_0 \left(1 + \chi - i \frac{\sigma}{\omega\epsilon_0} \right) = \epsilon_0 \left(1 + \chi + \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \frac{1}{-\omega^2 + i\omega/\tau} \right) \quad (3.29)$$

Ceci est facile à interpréter si l'on remarque que $1/\tau$ est la fréquence de collision. A basse fréquence, la partie complexe de la constante diélectrique deviant importante (par les relations de KK, cela va avoir une influence sur la partie réelle). Si en plus plus $\omega \gg 1/\tau$, le terme d'amortissement peut être négligé et la courant d'électron libre contribue négativement à la constante diélectrique. La susceptibilité équivalente due à la conduction ("plasma" idéal) est

$$\chi_{\text{conduction}} = -\frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (3.30)$$

Qui devient -1 à la fréquence plasma $\omega_p = \sqrt{(Ne^2)/(m\epsilon_0)}$.

3.3.2 Cubic Crystals

Le reste du chapitre n'est pas pour l'examen.

Chapitre 4

Light Propagation in Linear Anisotropic Dielectrics

"C'est mon chapitre préféré, celui que j'ai choisi lorsque j'étais à votre place. Ne ne négligez pas !

4.1 Anisotropic Materials in Photonics

Beaucoup de matériaux ont des propriétés optiques qui dépendent de la direction de la lumière ou de sa polarisation. Notons que dans un polariseur, si les polymères sont étendus en y , l'onde qui passera sera en x !

4.2 The Susceptibility and Dielectric Tensors

4.2.1 Constitutive Equations in Anisotropic Media

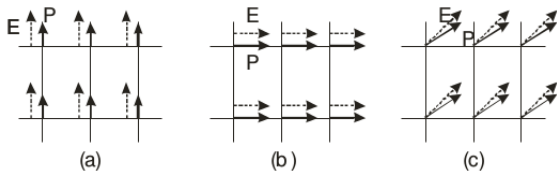


FIGURE 4.1

Lorsque le matériau n'est pas isotrope, \vec{P} n'est pas toujours parallèle à \vec{E} : la polarisation va dépendre de la direction du champ électrique. Si dans une direction nous avons n_1 et dans une autre n_2 avec $n_a < n_b$, la superposition des deux donnera une polarisation non parallèle au champ appliqué.

La relation linéaire la plus générale entre deux vecteurs est un tenseur du second rang. Dès lors

$$P = \epsilon_0 \bar{\bar{\chi}} E \quad \text{ou} \quad P_i = \epsilon_0 \chi_{ij} E_j \quad (4.1)$$

où $\bar{\bar{\chi}}$ est le **tenseur de susceptibilité**. S'il est diagonal avec tout des coefficients identiques, on se retrouve au cas du chapitre 2. Mais si non, la polarisation induite peut dépendre de la direction de \vec{E} .

4.2.2 Symmetry of the Susceptibility Tensor

Il est simple de montrer analytiquement que le tenseur de susceptibilité est symétrique (sous certaines conditions). Soit le théorème de Poynting

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\nabla \cdot S - E J_p \quad (4.2)$$

où U est la densité d'énergie EM et \vec{S} le vecteur de Poynting

$$U = \frac{1}{2}\epsilon_0 (|E|^2 - c^2|B|^2), \quad S \equiv \langle \vec{E} \times \vec{H} \rangle = \frac{1}{\mu_0} \langle \vec{E} \times \vec{B} \rangle \quad (4.3)$$

Comme il n'y a pas de courants libre, de magnétisation, le milieu est transparent et non-dissipant, l'énergie n'est pas convertie en chaleur. L'énergie du champ peut aller dans la matière, mais elle sera "rendue" au final. Il doit donc être possible de noter le troisième terme sous la forme d'une dérivée temporelle ou d'une divergence afin de la faire passer dans le membre de gauche.

Dans la convention d'Einstein

$$E_k J_{p,k} = E_k \frac{\partial P_k}{\partial t} = \frac{1}{2} E_k \epsilon_0 \chi_{kl} \frac{\partial E_l}{\partial t} + \frac{1}{2} E_l \epsilon_0 \chi_{lk} \frac{\partial E_k}{\partial t} \quad (4.4)$$

On peut toujours écrire $\chi_{kl} = \chi_{kl}^S + \chi_{kl}^A$. Il nous faudra montrer que χ_{kl}^A est nulle. Le terme source devient ¹

$$E_k J_{p,k} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \chi_{kl}^S \frac{\partial (E_k E_l)}{\partial t} + \frac{1}{2} \epsilon_0 \chi_{kl}^A \left(E_k \frac{\partial E_l}{\partial t} - E_l \frac{\partial E_k}{\partial t} \right) \quad (4.5)$$

Seule la partie symétrique peut s'écrire sous la forme d'une dérivée temporelle, la partie anti-symétrique doit forcément être nulle. Poynting s'écrit alors

$$\frac{\partial U_{total}}{\partial t} = -\nabla S \quad (4.6)$$

où U_{total} est la densité d'énergie totale

$$U_{total} = \frac{1}{2} D.E + \frac{1}{2} B.H \quad (4.7)$$

Ceci n'est vrai que pour les matériaux non magnétique et non-dispersif.

4.3 Plane Monochromatic Waves in Anisotropic Media

4.3.1 Dispersion Relation

Nous allons ici analyser si les ondes planes monochromatiques sont toujours solutions des équations de Maxwell et des équations constitutives (soit les équations de l'électrodynamique). Nous avons ²

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\frac{1}{c^2} \frac{\bar{\epsilon}}{\epsilon_0} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (4.8)$$

C'est difficile, mais il existe un système de coordonnées où ce tenseur est diagonal : tout va devenir "simple" ³. Dans un tel système, le tenseur diélectrique est donné par (semble trivial, mais en réalité profond)

$$\frac{\bar{\epsilon}}{\epsilon_0} = \begin{pmatrix} n_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_3^2 \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

1. Voir page 62 pour le détail

2. Détails page 63

3. Résultat attendu : le tenseur ϵ doit être symétrique, il doit exister une base où il est diagonal

où n_i sont les indices de réfraction principaux. L'équation (4.8) devient quelque chose de "pas si moche" :

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\frac{1}{c^2} \left(\vec{1}_x n_1^2 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} + \vec{1}_y n_2^2 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} + \vec{1}_z n_3^2 \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} \right) \quad (4.10)$$

On veut trouver une relation de dispersion $\omega(k)$. On propose une solution d'onde plane monochromatique de pulsation ω et de vecteur d'onde \vec{k} à cette équation différentielle

$$E = E_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad (4.11)$$

En substituant cet ansatz, on trouve ($\text{rot} \rightarrow ik$)

$$i\vec{k} \times (i\vec{k} \times \vec{E}_0) = \frac{\omega^2}{c^2} (\vec{1}_x n_1^2 E_{0x} + \vec{1}_y n_2^2 E_{0y} + \vec{1}_z n_3^2 E_{0z}) \quad (4.12)$$

Sachant que $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = -(\vec{A}\vec{B})\vec{C} + (\vec{A}\vec{C})\vec{B}$

$$\vec{k}(\vec{k} \cdot \vec{E}_0) - \vec{E}_0 k^2 = -\frac{\omega^2}{c^2} (\vec{1}_x n_1^2 E_{0x} + \vec{1}_y n_2^2 E_{0y} + \vec{1}_z n_3^2 E_{0z}) \quad (4.13)$$

Il s'agit de la relation de dispersion pour un milieu linéaire non isentropique. En projetant cette équation sur les axes principaux (par exemple sur $\vec{1}_x$ on a : $k_x \vec{1}_x (k_x E_{0x} + k_y E_{0y} + k_z E_{0z}) - E_{0x} \vec{1}_x (k_x k_x + k_y k_y + k_z k_z) = -\frac{\omega^2}{c^2} \vec{1}_x n_1^2 E_{0x}$) on voit que la relation de dispersion est un système linéaire en les trois composantes du champ électrique

$$\begin{pmatrix} \frac{\omega^2}{c^2} n_1^2 - k_y^2 k_z^2 & k_x k_y & k_x k_z \\ k_y k_x & \frac{\omega^2}{c^2} n_2^2 - k_x^2 - k_z^2 & k_y k_z \\ k_z k_x & k_z k_y & \frac{\omega^2}{c^2} n_3^2 - k_x^2 - k_y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ E_{0z} \end{pmatrix} = 0 \quad (4.14)$$

4.3.2 The Normal Surface

Considérons d'abord quelques situations simplifiées

1. Vecteur d'onde parallèle à $\vec{1}_x$: $k_x = k$. Le système (4.14) se réduit à

$$\begin{cases} \frac{\omega^2}{c^2} n_1^2 E_{0x} = 0 \\ \left(\frac{\omega^2}{c^2} n_2^2 - k^2 \right) E_{0y} = 0 \\ \left(\frac{\omega^2}{c^2} n_3^2 - k^2 \right) E_{0z} = 0 \end{cases} \quad (4.15)$$

La première équation nous informe que le champ est transverse et les deux dernières les solutions : si les E_{0i} sont non-nuls, la parenthèse doit l'être : on en tire les relations de dispersions. La première est l'onde plane polarisée selon y de nombre d'onde k_2

$$E^{(1)} = \vec{1}_y E_0^{(1)} e^{i(\omega t - k_2 x)} \quad \text{où} \quad k_2 = \frac{\omega}{c} n_2 \quad (4.16)$$

La seconde est l'onde plane polarisée selon z de nombre d'onde k_3

$$E^{(2)} = \vec{1}_z E_0^{(2)} e^{i(\omega t - k_3 x)} \quad \text{où} \quad k_3 = \frac{\omega}{c} n_3 \quad (4.17)$$