



ECOLE
POLYTECHNIQUE
DE BRUXELLES

UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES

SYNTHÈSE

Métrieologie nucléaire PHYS-H-407

Auteur :
Nicolas ENGLEBERT

Professeur :
Nicolas PAULY

Année 2016 - 2017

Appel à contribution

Synthèse Open Source



Ce document est grandement inspiré de l'excellent cours donné par Nicolas PAULY à l'EPB (École Polytechnique de Bruxelles), faculté de l'ULB (Université Libre de Bruxelles). Il est écrit par les auteurs susnommés avec l'aide de tous les autres étudiants et votre aide est la bienvenue ! En effet, il y a toujours moyen de l'améliorer surtout que si le cours change, la synthèse doit être changée en conséquence. On peut retrouver le code source à l'adresse suivante

<https://github.com/nenglebert/Syntheses>

Pour contribuer à cette synthèse, il vous suffira de créer un compte sur *Github.com*. De légères modifications (petites coquilles, orthographe, ...) peuvent directement être faites sur le site ! Vous avez vu une petite faute ? Si oui, la corriger de cette façon ne prendra que quelques secondes, une bonne raison de le faire !

Pour de plus longues modifications, il est intéressant de disposer des fichiers : il vous faudra pour cela installer \LaTeX , mais aussi *git*. Si cela pose problème, nous sommes évidemment ouverts à des contributeurs envoyant leur changement par mail ou n'importe quel autre moyen.

Le lien donné ci-dessus contient aussi un README contenant de plus amples informations, vous êtes invités à le lire si vous voulez faire avancer ce projet !

Licence Creative Commons

Le contenu de ce document est sous la licence Creative Commons : *Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International (CC BY-NC-SA 4.0)*. Celle-ci vous autorise à l'exploiter pleinement, compte- tenu de trois choses :



1. *Attribution* ; si vous utilisez/modifiez ce document vous devez signaler le(s) nom(s) de(s) auteur(s).
2. *Non Commercial* ; interdiction de tirer un profit commercial de l'œuvre sans autorisation de l'auteur
3. *Share alike* ; partage de l'œuvre, avec obligation de rediffuser selon la même licence ou une licence similaire

Si vous voulez en savoir plus sur cette licence :

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Merci !

Table des matières

1	Interaction des particules chargées avec la matière : considérations de base	1
1.1	Introduction	1
1.1.1	Interaction des particules chargées avec la matière	2
1.1.2	Conclusions à propos de ces considérations de base	10
2	Interaction des ions avec la matière	11
2.1	Modèle semi-classique du pouvoir d'arrêt électronique	11
2.1.1	Vitesses intermédiaires : $v_0 \ll v \ll c$	11
2.1.2	Grandes vitesses - Équation de BETHE-BLOCH : $v_0 < v \approx c$	16
2.1.3	Petites vitesses	19
2.2	Pouvoir d'arrêt nucléaire (faibles vitesses)	19
2.3	Pouvoir d'arrêt massique électronique et influence de la phase	20
2.4	Parcours et courbe de Bragg	21
2.4.1	Parcours	21
2.4.2	Courbes de Bragg	22
3	Interaction des électrons avec la matière	23
4	Interaction des photons avec la matière	24
4.1	Introduction	24
4.1.1	Considérations de bases et interactions des γ avec la matière	24
4.1.2	Remarque importante	25
4.2	Effet Compton	25
4.2.1	Démonstration de Thomson	25
4.2.2	Expérience de Compton	26
4.2.3	Relations entre énergies et angles	27
4.2.4	Section efficace différentielle angulaire, énergétique et totale	28
4.2.5	Diffusion cohérente et incohérente	29
4.3	Effet photoélectrique	30
4.3.1	Conservation de l'énergie et énergie de liaison	30
4.3.2	Section efficace	31
4.3.3	Distribution angulaire des photoélectrons	31
4.3.4	Phénomène consécutif à l'effet photoélectrique	32
4.4	Création de paire	32
4.4.1	Lois de conservation	32
4.4.2	Section efficace dans le champ d'un noyau	33
4.4.3	Section efficace totale	34
4.4.4	Section efficace dans la champ d'un électron	34
4.4.5	Direction d'émission de la paire électron-positron	34

4.4.6	Phénomène consécutif à la création de paire et photodésintégration du noyau	34
4.4.7	Comparaison des différents effets	35
4.5	Coefficient d'atténuation	35
4.5.1	Géométrie à faisceau étroit	35
4.5.2	Coefficient massique d'atténuation	35
4.5.3	Coefficient de transfert massique d'énergie	36

Chapitre 1

Interaction des particules chargées avec la matière : considérations de base

1.1 Introduction

Il existe trois types de rayonnements ionisants (*ionizing radiations*)

1. Les particules chargées
 - Électron, positron, ions, ...
2. Les photons (particules neutres sans masses)
 - Les γ (origine **nucléaire**)
 - Les X (origine atomique)
3. Neutrons (particules neutres)

Notons que ce qui fait vraiment la différence entre un γ et un X est le mode d'émission et non pas l'énergie (conséquence).

Pour chacun de ces types de rayonnement, il existe un mécanisme d'interaction particulier avec la matière¹.

- Les particules chargées interagissent par interactions coulombienne (noyaux et électrons), les collisions sont donc fréquentes et on peut considérer que l'énergie est perdue de façon (quasi-)continue. La particule s'arrête ainsi à distance finie dans la matière de sorte à ce qu'on puisse définir un "parcours" (*range*) de celle ci : de tels rayonnements sont *directement* ionisants
- Les particules neutres (pas d'interaction coulombienne) ont une probabilité de traverser la matière sans interactions, il n'est donc pas possible de définir un range. Elles peuvent par contre déposées de l'énergie à des particules chargées qui vont causer une ionisation : de tels rayonnements sont *indirectement* ionisants

Les interactions d'un rayonnement avec la matière peut modifier l'état du rayonnement (absorbé, dévié, ...) et aussi l'état de la matière (excités, ionisés, ...).

1. *Assemblage d'atomes isolés sans interaction entre-eux : gaz d'atome.* Il s'agit de la définition de ce cours, qui évoluera au fil des chapitres

1.1.1 Interaction des particules chargées avec la matière



FIGURE 1.1 – Trajectoire d’une particule chargée

Comme annoncé ci-dessus, les particules chargées subissent des collisions coulombiennes² avec :

Les noyaux (rare) : cause une importante perte d’énergie et une grande déviation angulaire

Les électrons (fréquent) : cause des excitations/ionisations se traduisant par des faibles pertes d’énergie et déviations angulaires

Chaque collision cause alors une perte d’énergie T_j , causés par un grand nombre de projectiles N qui suivent N histoires propres : le nombre de collision étant très important, les fluctuations sont faibles et il devient possible de définir des quantités moyennes.

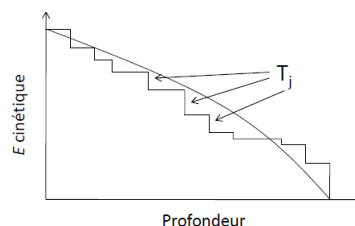


FIGURE 1.2

Pour introduire ces valeurs moyennes, il faut avant tout introduire la notion de **section efficace**.

La **section efficace** est l’aire fictive que doit avoir une particule incidente pour reproduire la probabilité de collision observée avec une particule cible.

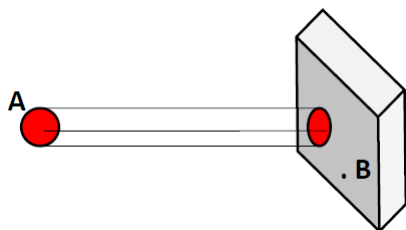


FIGURE 1.3

Il existe plusieurs sortes de section efficace. Pour s’en rendre compte, définissons ce qu’est une collision. Il s’agit de *l’interaction entre une particule incidente et une particule cible qui implique un effet spécifique mesurable*. Ainsi, la section efficace ne dépend pas que des particules incidentes/cibles et de leur vitesse **mais aussi** de l’effet physique !

Sur le grand nombre d’interaction existant, on peut s’intéresser à une perte d’énergie (section efficace différentielle en énergie $d\sigma/dE$) ou à une émission dans une direction donnée ((section efficace différentielle en énergie $d\sigma/d\Omega$)).

Quel est le rapport avec les valeurs moyennes annoncées ci-dessus ? Il n’est pas possible de déterminer expérimentalement les sections efficaces microscopiques en bombardant un atome avec une seule particule, il va falloir travailler avec des informations **statistiques** venant d’un bombardement (faisceau) sur la matière (milieu). Nous ferons l’hypothèse que les projectiles du faisceau n’interagissent pas entre-eux.

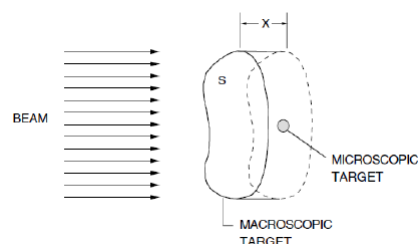


FIGURE 1.4

2. Les réactions nucléaires sont laissées de côté.

La section efficace sera ainsi définie par une probabilité. Soit un faisceau de particule (densité de courant J), un milieu cible (aire S plus petites que l'aire du faisceau) et processus d'interaction A (caractérisé par σ_A). Le nombre d'interaction A induits par le faisceau par unité de temps n_A s'écrit

$$n_A = JS \times \frac{\sigma_A}{S} = J\sigma_A \quad (1.1)$$

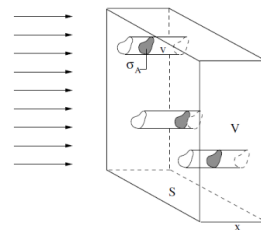


FIGURE 1.5

Considérons un volume $V = S.x$ et une densité de particule cible N

$$n_A = N \times Sx \times J\sigma_A = JS \times Nx\sigma_A \Rightarrow P_A = Nx\sigma_A \quad \text{pour} \quad Nx\sigma_A \ll 1 \quad (1.2)$$

où P_A est la probabilité pour un projectile de subir un processus A .

Dans le cas où $N.x.\sigma_A$ n'est pas petit, on peut observer une collision et, s'il n'y a pas d'absorption, la particule peut en subir une nouvelle : on parle de **collisions multiples**. Soit P_n la probabilité d'initier n événements A . Cette situation est équivalente à considérer n particules cibles dans un cylindre de volume $v = x.\sigma_A$ associé à une trajectoire. Ce problème est un classique de la théorie cinétique des gaz, on peut montrer que P_n quit une distribution de Poisson

$$P_n = \frac{(Nv)^n}{n!} e^{-Nv} \quad (1.3)$$

La valeur moyenne se définit alors comme

$$\langle n \rangle = Nv = Nx\sigma_A \quad (1.4)$$

On en tire la LOI DE LAMBERT & BEER gouvernant les phénomènes d'absorption

$$P_0 = e^{-Nx\sigma_A} \quad (1.5)$$

Il s'agit de la probabilité de ne pas se faire absorbé. Si $Nx\sigma_A \ll 1$, on peut utiliser l'approximation suivante

$$P_n \simeq \begin{cases} 1 - Nx\sigma_A & \text{pour } n = 0 \\ Nx\sigma_A & \text{pour } n = 1 \\ 0 & \text{pour } n \geq 2 \end{cases} \quad (1.6)$$

Cette distribution nous permet de définir aisément la distance moyenne entre deux processus de type A , soit le **libre parcours moyen** λ_A

$$\lambda_A = \frac{1}{N\sigma_A} \quad (1.7)$$

Ceci se généralise pour les processus multiples

$$\sigma_{total} = \sigma_A + \sigma_B + \sigma_C + \dots, \quad \frac{1}{\lambda_{total}} = \frac{1}{\lambda_A} + \frac{1}{\lambda_B} + \frac{1}{\lambda_C} + \dots \quad (1.8)$$

Pouvoir d'arrêt

Les pertes en énergies sont caractérisée par le **pouvoir d'arrêt** (*stopping power*) : il s'agit de la grandeur la plus importante pour une particule chargée. Il s'agit - pour une particule chargée

d'énergie cinétique E dans un matériau - de la perte d'énergie moyenne (ΔE) par unité de longueur subie par la particule le long de sa trajectoire (Δx)

$$\frac{\Delta E}{\Delta x} [J.M^{-1}] = [eV.m^{-1}] \quad (1.9)$$

Afin de l'exprimer mathématiquement, considérons une cible de petite épaisseur (par rapport à la profondeur de pénétration) Δx et un projectile d'énergie E . En considérant des pertes d'énergies discrète $T_j \ll E$:

$$\Delta E = \sum_j n_j T_j \quad (1.10)$$

L'énergie moyenne se calcule donc

$$\langle \Delta E \rangle = \sum_j \langle n_j \rangle T_j \quad (1.11)$$

où $\langle n_j \rangle = N \Delta x \sigma_j$. Nous avons alors

$$\langle \Delta E \rangle = N \Delta x \sum_j T_j \sigma_j \quad (1.12)$$

En définissant la **section efficace d'arrêt** S

$$S = \sum_j T_j \sigma_j \quad (1.13)$$

On définit le **pouvoir d'arrêt**

$$\frac{\langle \Delta E \rangle}{\Delta x} = NS = N \sum_j T_j \sigma_j \quad (1.14)$$

Le pouvoir d'arrêt est donc une propriété *macroscopique* tandis que la section efficace d'arrêt est une propriété *microscopique*.

Paramètres de straggling

Tant que nous sommes dans les statistiques, calculons les écarts quadratiques moyens des fluctuations en énergie

$$\Omega^2 = \overline{(\Delta E - \langle \Delta E \rangle)^2} \quad (1.15)$$

En considérant $\Delta E - \langle \Delta E \rangle = \sum_j (n_j - \langle n_j \rangle) T_j$, on obtient

$$\overline{(\Delta E - \langle \Delta E \rangle)^2} = \sum_{j,l} \overline{(n_j - \langle n_j \rangle)(n_l - \langle n_l \rangle)} T_j T_l \quad (1.16)$$

Deux cas sont possibles

1. $j = l$; on peut utiliser les propriétés de la distribution de Poisson

$$\overline{(n_j - \langle n_j \rangle)^2} = \langle n_j \rangle = N \Delta x \sigma_j \quad (1.17)$$

2. $j \neq m$; on transforme la moyenne du produit en produit des moyennes (ceci suggère l'indépendance statistiques des différents types de collisions)

$$\overline{(n_j - \langle n_j \rangle)(n_l - \langle n_l \rangle)} = \overline{(n_j - \langle n_j \rangle)} \times \overline{(n_l - \langle n_l \rangle)} \quad (1.18)$$

Or, comme $\overline{n_j - \langle n_j \rangle} = 0$, les termes avec $j \neq l$ sont nuls

On obtient donc

$$\Omega^2 = \sum_j \langle n_j \rangle T_j^2 = N \Delta x \sum_j T_j^2 \sigma_j = N \Delta x W \quad (1.19)$$

où W est le **paramètre de straggling** qui *caractérise les fluctuations en énergie* et est défini comme³

$$W = \sum_j T_j^2 \sigma_j \quad (1.20)$$

Notation intégrale et cible épaisse

Comme annoncé, le grand nombre de collision implique une perte d'énergie quasi-continue (et donc un spectre continu)

$$\sigma_j \rightarrow \frac{d\sigma}{dT} \Delta T_j \quad (1.21)$$

Si ΔT_j est suffisamment petit, les sommes deviennent des intégrales

$$S = \int T \, d\sigma, \quad W = \int T^2 d\sigma \quad (1.22)$$

où $d\sigma = \frac{d\sigma}{dT} dT$.

Nous avons jusqu'ici considéré Δx petit impliquant E constant, mais en général S et W dépendent de E . En considérant que les fluctuations des pertes d'énergies sont négligeables, l'énergie E est bien définie en fonction de la profondeur de pénétration x ⁴. On fait alors l'*approximation du ralentissement continu* (*Continuous Slowing Down Approximation* - CSDA)

$$\frac{dE}{dx} = -NS(E) \quad (1.23)$$

où le signe négatif tient compte de la diminution d'énergie du projectile.

Le parcours (*range*) R d'une particule chargée d'énergie E dans un milieu est la valeur moyenne $\langle l \rangle$ de la longueur l de sa trajectoire suivie jusqu'à son arrêt (sans tenir compte du mouvement thermique). En CSDA, on trouve comme profondeur de pénétration

$$x = \int_{E(x)}^E \frac{dE'}{NS(E')} \quad (1.24)$$

Le *range* en CSDA est donné pour $x = l$ avec $E(l) = 0$

$$R_{CSDA} = \int_0^E \frac{dE'}{NS(E')} \quad (1.25)$$

Rappelons que cette expression valable pour un straggling en énergie négligeable, à cause de notre première hypothèse.

3. Paramètre microscopique.

4. $E \rightarrow E(x)$

Modèle classique du pouvoir d'arrêt

Il s'agit d'un modèle classique non-relativiste établi en 1913 par Niels BOHR qui est incroyablement correct pour une certaine plage d'énergie.

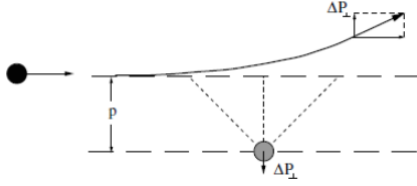


FIGURE 1.6

Supposons que la particule cible reçoit une quantité de mouvement faible tel qu'elle peut être considérée au repos durant l'interaction : on note le transfert de la quantité de mouvement (unités CGS)

$$\vec{\Delta P} = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \vec{F}(t) \quad (1.26)$$

où $F(t) = \frac{e_1 e_2}{p^2 + (vt)^2}$. En décomposant la force $\vec{F} = F_{\parallel} \vec{1}_{\parallel} + F_{\perp} \vec{1}_{\perp}$, on obtient les composantes \parallel et \perp du transfert de quantité de mouvement⁶

$$\Delta P_{\parallel} = e_1 e_2 \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{vt}{(p^2 + (vt)^2)^{3/2}} = 0 \quad (1.27)$$

$$\Delta P_{\perp} = e_1 e_2 \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{p}{(p^2 + (vt)^2)^{3/2}} = \frac{2|e_1 e_2|}{pv} \quad (1.28)$$

Il est possible d'estimer la durée de la collision, qui correspond au temps durant lequel le transfert d'énergie se passe

$$\Delta P_{\perp} \simeq F_{max} \tau \quad (1.29)$$

où $F_{max} = e_1 e_2 / p^2$, la force pour la distance minimale d'approche (p en $t = 0$). En substituant, on trouve

$$\tau \simeq \frac{2p}{v} \quad (1.30)$$

Cette expression est cohérente avec la Figure 1.6 (p/v à gauche et à droite, d'où le facteur 2). Il ne s'agit que d'un ordre de grandeur qui nous informe que les deux particules interagissent de même façon effective sur une distance $2p$ le long de la trajectoire de la particule incidente.

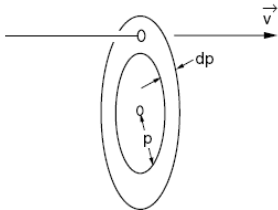


FIGURE 1.8

L'énergie T transférée de 1 vers 2 s'obtient en explicitant ΔP_{\perp}^2

$$T = \frac{\Delta P_{\perp}^2}{2m_2} \simeq \frac{2e_1^2 e_2^2}{m_2 v^2 p^2} \quad (1.31)$$

Le seul paramètre (aléatoire) dont dépend T est le paramètre d'impact p . Ainsi, le nombre de collisions caractérisés par un transfert d'énergie compris entre T et $T + dT$

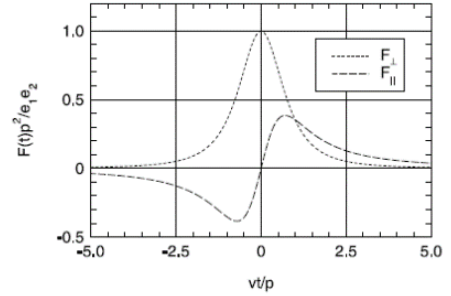


FIGURE 1.7

5. Pour rappel, il s'agit de la distance entre la trajectoire initiale de 1 et 2.

6. J'étais en retard... Quelqu'un à des notes ? Sur le graphique surtout

est caractérisé par un paramètre d'impact entre p et $p + dp$. Comme nous sommes en présence d'une géométrie cylindrique, la particule incidente devra se trouver dans un anneau. La section efficace du projectile $d\sigma$ doit forcément être l'aire de cet anneau

$$d\sigma = 2\pi p dp = \left| \frac{d(\pi p^2)}{dT} \right| dT \quad (1.32)$$

En calculant la dérivée de (1.31) dans l'expression (1.32), on trouve la forme de la section efficace de Rutherford pour la diffusion (scattering) coulombienne qui sera déduite bien plus tard (exactement) par la mécanique quantique.

$$d\sigma \approx 2\pi \frac{e_1^2 e_2^2}{m_2 v^2} \frac{dT}{T^2} \quad (1.33)$$

Résultats préliminaires

Cette formule nous permet d'obtenir des résultats préliminaire pour le stopping et le straggling. Sachant que $S = \int T d\sigma$ et $W = \int T^2 d\sigma$, on trouve

$$S \simeq 2\pi \frac{e_1^2 e_2^2}{m_2 v^2} \int_{T_{max}}^{T_{min}} \frac{dT}{T}, \quad W \simeq 2\pi \frac{e_1^2 e_2^2}{m_2 v^2} \int_{T_{max}}^{T_{min}} dT \quad (1.34)$$

Après intégration (à connaître **par coeur** !)

$$S \simeq 2\pi \frac{e_1^2 e_2^2}{m_2 v^2} \int_{T_{max}}^{T_{min}} \frac{dT}{T} \quad (1.35)$$

$$W \simeq 2\pi \frac{e_1^2 e_2^2}{m_2 v^2} \int_{T_{max}}^{T_{min}} dT \quad (1.36)$$

En utilisant le **nombre d'arrêt** (*stopping number*) $L = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{T_{max}}{T_{min}} \right)$ on peut ré-écrire

$$S \simeq 4\pi \frac{e_1^2 e_2^2}{m_2 v^2} L \quad (1.37)$$

RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES POUR LE STOPPING

Soit les électrons (e) de la cible (densité NZ_2 , masse m et charge $-e$) et les noyaux (n) de la cible (densité N , masse M_2 et charge $Z_2 e$). On peut calculer l'énergie moyenne en multipliant S_e par $NZ_2 \Delta x$. En faisant de même pour S_n :

$$S_e = \frac{4\pi e_1^2 e^2}{m v^2} L_e \Rightarrow \langle \Delta E \rangle_e \simeq NZ_2 \Delta x \times \frac{4\pi e_1^2 e^2}{m v^2} L_e \quad (1.38)$$

$$S_n = \frac{4\pi e_1^2 Z_2^2 e^2}{M_2 v^2} L_n \Rightarrow \langle \Delta E \rangle_n \simeq N \Delta x \times \frac{4\pi e_1^2 Z_2^2 e^2}{M_2 v^2} L_n \quad (1.39)$$

Effectuons le rapport de ces deux dernières expressions

$$\frac{\langle \Delta E \rangle_n}{\langle \Delta E \rangle_e} \simeq \frac{m}{M_2} Z_2 \frac{L_n}{L_e} \quad \text{or} \quad \frac{m Z_2}{M_2} < 10^{-3} \quad (1.40)$$

En laissant pour l'instant tomber le rapport des L (straggling number), on obtient un terme inférieur à 10^{-3} : un électron incident va perdre beaucoup plus d'énergie lorsqu'il va interagir avec d'autres électrons plutôt qu'avec des neutrons.

Détermination de l'énergie transférée maximale T_{max}

Soit T_{max} , l'énergie cinétique maximale qui peut être transférée dans une collision. Celle-ci est obtenue pour $p = 0$, soit quand la particule cible est le plus proche possible de la particule incidente. Nous ne sommes plus ici dans le cadre du précédent modèle (*soft collision*) mais ce n'est pas grave car seule une limite maximale est recherchée. L'image ci-contre représente le système du laboratoire.

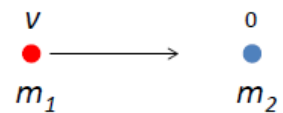


FIGURE 1.9

Dans le système du centre de masse (désigné par un *prim*)

$$v_{CM} = \frac{m_1 v}{m_1 + m_2}, \quad v' = v - v_{CM} \quad (1.41)$$

Considérons une collision élastique avec uniquement un transfert d'énergie cinétique. L'intérêt d'une telle collision dans le système du centre de masse est que seule la direction change : la vitesse et le module restent inchangés.

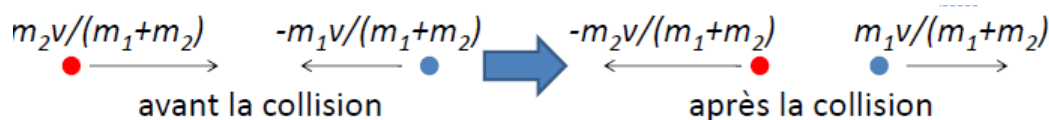


FIGURE 1.10

La situation correspondant à un maximum d'énergie transférée correspond à celle où la variation de la direction est la plus importante, soit quand tout change de sens. Dans le système du laboratoire, la vitesse maximale $v_{2,max}$ de la particule 2 s'écrit

$$v_{2,max} = \frac{2m_1 v}{m_1 + m_2} \quad (1.42)$$

L'énergie maximale transférée vaut donc

$$T_{max} = \frac{m_2 v_{2,max}^2}{2} = \gamma E \quad (1.43)$$

où $\gamma = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}$ et $E = \frac{m_1 v^2}{2}$.

Ceci mène directement à deux implications

1. Pour $m_1 = m_2 \rightarrow \gamma = 1$; l'énergie transférée peut valoir toute l'énergie de la particule incidente
2. Pour $m_1 \ll m_2$ ou l'inverse $\rightarrow \gamma$ petit

Il en vient que

- Un grand transfert d'énergie est possible pour l'interaction e^-/e^-
- Un petit transfert d'énergie est possible pour l'interaction ion/ e^-
- Un petit transfert d'énergie est possible pour l'interaction e^- /ion
- Un petit transfert d'énergie est possible pour l'interaction ion/ion

Notons que l'on parle de transfert possible et **pas** de probabilité.

Détermination de l'énergie transférée minimale T_{min}

Nous allons calculer T_{min} dans le cas d'une collision avec un e^- (il s'agit du cas pratique le plus intéressant). Pour un électron isolé et libre, on trouve $T_{min} = 0$. Or, la section efficace de stopping contient le logarithme du rapport T_{max}/T_{min} , il y aura divergence. Deux façon de lever la divergence existent

1. Considérer que les e^- sont liés à une molécule ou à un atome
2. Considérer l'écrantage de l'interaction de Coulomb

La première solution sera retenue ?. Le plus simple est le modèle simple de Thompson où T_{min} est l'énergie d'excitation la plus faible. Néanmoins, on s'intéressera ici au modèle de Bohr, plus proche du résultat quantique.

La vision de Bohr revient à voir la matière comme une collection d'oscillateurs harmonique classiques. En cas de choc lent ($2\pi/\omega_0 \ll \tau$), l'oscillateur peut directement se remettre en place et le transfert d'énergie est négligeable (invariance adiabatique). L'orbite de l'électron n'est que provisoirement déformée, les états initiaux et finaux sont identiques.

Si par contre le temps d'interaction est court par rapport à la période de l'oscillateur ($\tau \ll 2\pi/\omega_0$), l'oscillateur reçoit une impulsion $F \times \tau$. C'est ce que nous considérons ici. En utilisant l'expression du temps d'interaction, on trouve un ordre pour T_{min}

$$\frac{2p}{v} \ll \frac{2\pi}{\omega_0} \Rightarrow p_{max} \sim \frac{v}{\omega_0} \Rightarrow T_{min} \sim \frac{2e_1^2 e_2^2 \omega_0^2}{mv^4} \quad (1.44)$$

avec $T \simeq \frac{2e_1^2 e_2^2}{mv^2 p^2}$ et p_{max} , le *rayon adiabatique de Bohr*.

On peut alors, dans le modèle de Bohr (en reprenant les précédentes expressions), calculer la section efficace de stopping électronique comme il n'y a plus divergence

$$S_e = \frac{4\pi Z_2 e_1^2 e^2}{mv^2} L_e \quad \text{avec} \quad L_e = \ln \frac{Cmv^3}{|e_1 e| \omega_0} \quad \text{et} \quad C \simeq 1 \quad (1.45)$$

où $L = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{T_{max}}{T_{min}} \right)$ et C , une correction introduite par Bohr que nous ne prendrons pas en compte.

Déviati on angulaire maximale

Soit $m_2 \leq m_1$. Soit à gauche le référentiel du laboratoire et à droite, celui du centre de masse

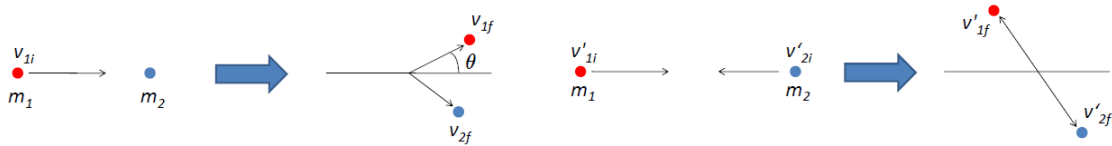


FIGURE 1.11

Dans le référentiel du centre de masse

$$v_{CM} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{1i}, \quad v' = v - v_{CM} \quad (1.46)$$

On en tire

$$v'_{1i} = v_{1i} - v_{CM} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} \quad (1.47)$$

Comme nous avons une collision élastique dans le repère du centre de masse, seule la direction est modifiée (et donc $v'_{1f} = v'_{1i}$)

$$v'_{1f} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} \quad (1.48)$$

L'angle maximal θ_{max} est obtenu lorsqu'un angle droit est formé au niveau de la circonférence du cercle. On choisit alors v'_{1f} (v_{CM}) étant fixé de sorte à avoir θ_{max} . Après un peu de trigonométrie

$$\sin \theta_{max} = \frac{v'_{1f}}{v_{CM}} = \frac{m_2}{m_1} \quad (1.49)$$

Si $m_2 \geq m_1$, on trouve $\theta_{max} = \pi$.

En conclusion

- Grandes déviations possibles ($\theta_{max} = \pi/2$) pour l'interaction e^-/e^-
- Très grandes déviations possibles ($\theta_{max} = \pi$) pour l'interaction e^-/ion
- Petites déviations pour l'interaction ion/e^-
- Grandes déviations possibles (dépendant de m_1 et m_2) pour l'interaction ion/ion

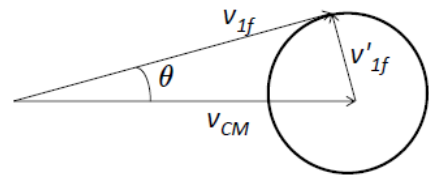


FIGURE 1.12

1.1.2 Conclusions à propos de ces considérations de base

Pour les ions incidents

De façon générale les pertes électroniques dominant (petits transfert d'énergie et petites déviations angulaires) et les pertes nucléaires (collisions noyaux) sont rares (se produisent pour un faible nombre de projectives mais de grand transferts d'énergies sont possibles ainsi que de grandes déviations angulaires). Ils ont une *trajectoire rectilignes accompagnées de pertes d'énergie faibles et continues*.

Pour les électrons incidents

Les pertes électroniques dominant (mais cette fois grands transferts d'énergie et grandes déviations angulaires possibles). On retrouve aussi des pertes nucléaires (petits transferts d'énergie mais très grandes déviations angulaires possibles (possibilité de rétro-diffusion)). Ils ont une *trajectoire courbée accompagnée de grandes pertes d'énergie*.

Chapitre 2

Interaction des ions avec la matière

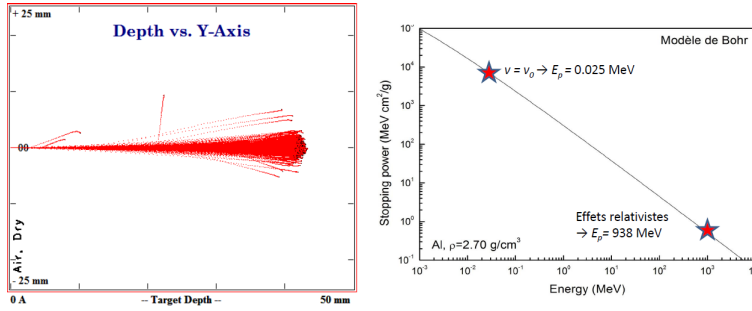


FIGURE 2.1

sique, il ne peut pas être correct dans la zone relativiste. Lorsque la vitesse du projectile se rapproche de v_0 , la vitesse de Bohr¹, on ne peut plus considérer que la particule est au repos, le modèle n'est dès lors plus valable²

Ci-contre, à gauche, sont représentés les trajectoires de particules α d'une énergie de 5.5 MeV. On observe que trois d'entre-elles sont rentrées en collisions avec les noyaux (déviations angulaires plus importantes). À droite, considérons un proton incident sur de l'aluminium, décrit par le modèle de Bohr. Ce modèle étant clas-

2.1 Modèle semi-classique du pouvoir d'arrêt électronique

Un rappel sur les oscillateurs classiques et l'approximation dipolaire est faite dans les slides 5 à 12 : n'étant que des rappels/pré-requis, ils ne sont pas repris ici.

2.1.1 Vitesses intermédiaires : $v_0 \ll v \ll c$

Dans le modèle semi-classique de BETHE (1930), le noyau est traité classiquement et les électrons quantiquement, ils ne sont plus traités comme des oscillateurs classiques. On s'intéresse ici au cas où le modèle de Bohr est correct.

Considérons un atome cible avec Z_2 électrons (masse m) et les états stationnaires $|j\rangle$ d'énergie ϵ_j où j est un nombre quantique tel que $j = 0$ dénote l'état fondamental. Les fréquences de résonance pour un atome dans son état initial sont données par

$$\hbar\omega_{j0} = \epsilon_j - \epsilon_0 \quad (2.1)$$

On dira que les électrons sont au repos durant l'interaction si $v \gg v_0$.

1. On associe l'énergie à une certaine vitesse via l'énergie cinétique.
2. L'hypothèse de Bohr est telle que la particule cible est au repos.

Pour une énergie Q perdue par l'ion incident, BETHE a posé

$$S = \sum_j \int Q d\sigma_R f_{j0}(Q) \quad (2.2)$$

où σ_R est la section efficace de COULOMB pour un transfert d'énergie Q (où R pour RUTHERFORD) et f_{j0} sont les *forces d'oscillateur généralisées* qui incluent tous les effets quantiques pour la section efficace d'arrêt : ils décrivent les probabilités de transition entre les états pour une énergie transférée Q donnée.

Afin de déterminer l'expression de f_{j0} , résolvons l'équation de Schrödinger dépendante du temps (celle-ci gouverne le mouvement électronique)

$$(H + V)\Psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{d\Psi(\vec{r}, t)}{dt} \quad (2.3)$$

où H est l'hamiltonien d'un atome isolé de la cible, $\Psi(t)$ la fonction d'onde d'un état lié et V le potentiel décrivant l'interaction avec le projectile donné par

$$V(\vec{r}, t) = \sum_{\nu=1}^{Z_2} \frac{-e_1 e}{\vec{r}_\nu - \vec{R}(t)} \quad (2.4)$$

où $\vec{r} = (\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_{Z_2})$ représente la trajectoire du projectile avec \vec{r}_ν l'opérateur position du ν^e électron et $\vec{R} = \vec{p} + \vec{v}t$. Développons $\Psi(t)$ sur la base formée des états stationnaires

$$\Psi(\vec{r}, t) = \sum_j c_j(t) e^{-i\epsilon_j t} |j\rangle \quad (2.5)$$

où $|j\rangle$ sont les solutions de $H|j\rangle = \epsilon_j |j\rangle$. Dans le cadre de la méthode des perturbations au premier ordre, on peut développer les coefficients c_j en puissance du potentiel perturbatif V

$$c_j(t) = \delta_{j0} + c_j^{(1)}(t) + c_j^{(2)}(t) + \dots \quad (2.6)$$

avec δ le symbole de Kronecker et

$$c_j^{(1)}(t) = \frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^t dt' e^{i\omega_{j0}t'} \langle j | V(\vec{r}, t') | 0 \rangle \quad (2.7)$$

$$c_j^{(2)}(t) = \left(\frac{1}{i\hbar} \right)^2 \sum_k \int_{-\infty}^t dt' e^{i\omega_{jk}t'} \langle j | V(\vec{r}, t') | k \rangle \times \int_{-\infty}^{t'} dt'' e^{i\omega_{k0}t''} \langle k | V(\vec{r}, t'') | 0 \rangle \quad (2.8)$$

et ainsi de suite mais ici nous ne nous intéressons que aux coefficients $c_j^{(1)}(\infty)$ car seul le premier ordre nous intéresse. Ceux-ci représentent les amplitudes de transition. Substituons $c_j^{(1)}(\infty)$ dans l'expression explicite du potentiel, prenons-en la transformée de FOURIER et intégrons sur t'

$$c_j^{(1)}(\infty) = \frac{-e_1 e}{i\pi\hbar} \int d\vec{q} \frac{e^{-i\vec{q} \cdot \vec{p}}}{q^2} F_{j0}(\vec{q}) \delta(\omega_{j0} - \vec{q} \cdot \vec{v}) \quad (2.9)$$

où $F_{j0}(\vec{q}) = \left\langle j \left| \sum_{\nu=1}^{Z_2} e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}_\nu} \right| 0 \right\rangle$. Notons $Q = \frac{\hbar^2 q^2}{2m}$. Par le POSTULAT IV de la mécanique quantique, les probabilités de transitions sont données par

$$P_j(p) = |\langle j | \Psi(\infty) \rangle|^2 \quad (2.10)$$

Ce qui donne dans le cadre de la méthode des perturbations au premier ordre

$$P_j(p) = \left| c_j^{(1)}(\infty) \right|^2 \quad (2.11)$$

Pour que $c_j^{(1)}(\infty) \neq 0$ pour $\omega_{j0} < q\nu$, il faut que (condition sur Q)

$$\omega_{j0}^2 < q^2 v^2 \Rightarrow 2mv^2 Q > (\epsilon_j - \epsilon_0)^2 \quad (2.12)$$

Approximation des collisions distantes - Approximation dipolaire

Afin d'obtenir notre expression de f_{j0} , nous allons devoir utiliser une approximation. Considérons $c_j^{(1)}(\infty)$ à grand p (*collisions distantes*). Par l'approximation dipolaire

$$e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} \simeq 1 + i\vec{q} \cdot \vec{r} \quad (2.13)$$

On obtient donc

$$F_{j0}(\vec{q}) \simeq i\vec{q} \left\langle j \left| \sum_{\nu=1}^{Z_2} \vec{r}_\nu \right| 0 \right\rangle \quad (2.14)$$

En choisissant l'axe x selon la vitesse du projectile et l'axe y selon le paramètre d'impact, on voit apparaître des fonctions de BESSEL modifiée $K_{0,1}$, d'ordre 0 et 1

$$c_j^{(1)}(\infty) = -\frac{2e_1 e \omega_{j0}}{i\hbar v^2} \left\langle j \left| \sum_{\nu}^{Z_2} \vec{r}_\nu \right| 0 \right\rangle \times \left(iK_0 \left(\frac{\omega_{j0} p}{v} \right), K_1 \left(\frac{\omega_{j0} p}{v} \right), 0 \right) \quad (2.15)$$

Les probabilités de transitions deviennent donc (données par $|c_j|^2$)

$$P_j(p) = -\frac{2e_1^2 e^2 Z_2}{mv^2 p^2 \hbar \omega_{j0}} f_{j0} \times \left\{ \left[\frac{\omega_{j0} p}{v} K_0 \left(\frac{\omega_{j0} p}{v} \right) \right]^2 + \left[\frac{\omega_{j0} p}{v} K_1 \left(\frac{\omega_{j0} p}{v} \right) \right]^2 \right\} \quad (2.16)$$

La grandeur f_{j0} est appelée la **force d'oscillateur dipolaire** et a comme expression

$$f_{j0} = \frac{2m}{3\hbar^2 Z_2} (\epsilon_j - \epsilon_0) \left| \left\langle j \left| \sum_{\nu}^{Z_2} \vec{r}_\nu \right| 0 \right\rangle \right|^2 \quad (2.17)$$

Avec la règle de somme de THOMAS-REICHE-KUHN $\sum_j f_{j0} = 1$.

Comparaison modèle classique et semi-classique

Maintenant que nous avons la probabilité d'une transition, il nous faut l'énergie moyenne. Considérons l'énergie transférée moyenne T_{moy}

$$T_{moy}(p) = \sum_j P_j(p) \hbar \omega_{j0} \quad (2.18)$$

Comparons cette expression avec le résultat classique donné par

$$T = \frac{2e_1^2 e^2}{mv^2 p^2} f_{dist}(p), \quad \text{où} \quad f_{dist}(p) = \left[\frac{\omega_0 p}{v} K_0 \left(\frac{\omega_0 p}{v} \right) \right]^2 + \left[\frac{\omega_0 p}{v} K_1 \left(\frac{\omega_0 p}{v} \right) \right]^2 \quad (2.19)$$

Les expressions sont identiques à condition que

$$f_{dist}(p) = \sum_j f_{j0} \left[\frac{\omega_{j0} p}{v} K_0 \left(\frac{\omega_{j0} p}{v} \right) \right]^2 + \left[\frac{\omega_{j0} p}{v} K_1 \left(\frac{\omega_{j0} p}{v} \right) \right]^2 \quad (2.20)$$

Pour généraliser les fonctions f_{j0} que nous venons d'élaborer aux grandes valeurs de Q , BETHE a posé

$$f_{j0}(Q) = \frac{1}{Z_2} \frac{\epsilon_j - \epsilon_0}{Q} |F_{j0}(\vec{q})|^2 \quad (2.21)$$

Avec cette forme là, lorsque Q est petit, on retrouve l'expression que nous venons de calculer

$$f_{j0}(Q)|_{Q \simeq 0} = f_{j0} \quad (2.22)$$

Pouvoir d'arrêt : formule de Bethe

Il est nécessaire de faire la distinction entre les collisions distantes ou proche (via p), soit les collision avec une grande ou petite quantité de mouvement transférée (via q) ou encore les collisions avec une grande ou petite énergie transférée (via Q). Pour se faire, nous allons séparer l'intégrale suivante en deux parties par rapport à Q_0

$$S = \sum_j \int Q d\sigma_R f_{j0}(Q) \quad (2.23)$$

- Pour $Q < Q_0$, l'approximation dipolaire est valide (Q_0)

$$S_{dist} = \sum_j f_{j0} \int_{(\epsilon_j - \epsilon_0)^2 / 2mv^2}^{Q_0} Q d\sigma_R \quad (2.24)$$

- Pour $Q > Q_0$, il faut déterminer la borne supérieure de l'intégrale. On considère que la masse d'un ion $m_1 \gg m$, la masse d'un électron.

$$T_{max} = \gamma E = \frac{4m_1 m}{(m_1 + m)^2} \frac{m_v^2}{2} \approx 2mv^2 \quad (2.25)$$

où nous avons négliger m par rapport à m_1 . On trouve alors la section efficace d'arrêt suivante

$$S_{proche} = \int_{Q_0}^{2mv^2} Q d\sigma_R \sum_j f_{j0}(Q) \quad (2.26)$$

BETHE a démontré que

$$\sum_j f_{j0}(Q) = 1 \quad (2.27)$$

Nous avons alors

$$S_{proche} = \int_{Q_0}^{2mv^2} Q d\sigma_R \equiv \sum_j f_{j0} \int_{Q_0}^{2mv^2} Q d\sigma_R \quad (2.28)$$

En sommant les collisions proches et distantes, on trouve finalement

$$S = S_{proche} + S_{dist} = \sum_j f_{j0} \int_{(\epsilon_j - \epsilon_0)^2 / 2mv^2}^{2mv^2} Q d\sigma_R \quad (2.29)$$

En considérant l'expression explicite $d\sigma_R = 2\pi \frac{e_1^2 e_2^2}{m^2 v^2} \frac{dQ}{Q^2}$, on obtient

$$S = \frac{4\pi e_1^2 e^2}{mv^2} Z_2 \sum_j f_{j0} \ln \frac{2mv^2}{\epsilon_j - \epsilon_0} \quad (2.30)$$

La formule du pouvoir d'arrêt de BETHE se note généralement

$$S_e = \frac{4\pi e_1^2 e^2}{mv^2} Z_2 \ln \frac{2mv^2}{I} \quad (2.31)$$

où I est définie comme l'énergie moyenne d'excitation telle que $\ln I = \sum_j f_{j0} \ln(\epsilon_j - \epsilon_0)$. Ceci n'est valable que **si** $m_1 \gg m, v \gg v_0 \rightarrow mv^2 \gg \hbar\omega_0$.

On peut facilement comparer le modèle de BETHE à celui de BOHR via

$$S_e = \frac{4\pi Z_2 e_1^2 e^2}{mv^2} L_e \quad (2.32)$$

où

$$L_e = \ln \frac{Cmv^3}{|e_1 e| \omega_0} \quad (2.33)$$

pour le BOHR et

$$L_e = \ln \frac{2mv^2}{I} \quad (2.34)$$

pour BETHE.

Dépendances principales du pouvoir d'arrêt

Le pouvoir d'arrêt se compose lui-même de trois dépendances

À retenir :

$$-\left(\frac{dE}{dx}\right)_{elec} = NS_e = \frac{4\pi e_1^2 e^2}{mv^2} NZ_2 \ln \frac{2mv^2}{I} \quad (2.35)$$

Les dépendances sont les suivantes

1. $\frac{4\pi e_1^2 e^2}{mv^2} \Rightarrow$ Dépendance principale dans la vitesse, plus la vitesse augmente, plus le pouvoir d'arrêt diminue.
2. $NZ_2 \Rightarrow$ Dépendance principale dans le matériau, plus il est grand, plus le pouvoir augmente.
3. $\ln \frac{2mv^2}{I} \Rightarrow$ Dépendance faible dans la vitesse et dans le matériau

Énergies moyenne d'excitation

L'énergie moyenne d'excitation I ne dépend **que** du matériau et **pas** du projectile. Il est possible de le calculer mais tout le monde s'en fiche car on peut l'obtenir expérimentalement³ via des formules empiriques. Celui-ci varie approximativement linéairement (les irrégularités sont dues à la structure en couches de l'atome) avec Z : *modèle de l'atome de Thomas-Fermi* où les électrons atomiques forment un gaz.

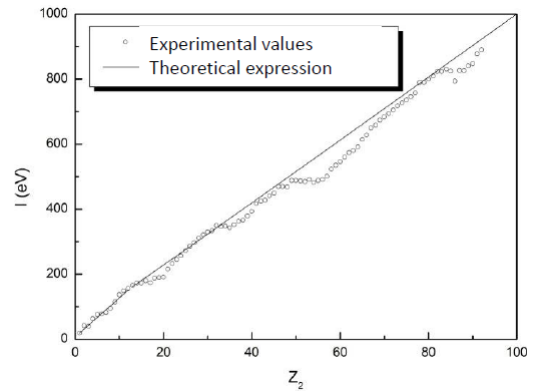


FIGURE 2.2

3. De plus, comme il intervient dans $\log S$ il n'est pas nécessaire de connaître sa valeur avec précision

2.1.2 Grandes vitesses - Équation de Bethe-Bloch : $v_0 < v \approx c$

BLOCH a apporté de nombreuses corrections à l'équation de BETHE pour former l'équation de BETHE-BLOCK

$$S_e = \frac{4\pi r_e^2 m c^2}{\beta^2} Z z^2 L(\beta) \quad (2.36)$$

où $L(\beta) = L_0(\beta) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2mc^2 \beta^2 W_m}{1 - \beta^2} \right) - \beta^2 - \ln I - \frac{C}{Z} - \frac{\delta}{2}$.

Il s'agit en réalité de la même équation mais notée différemment, toute la différence se trouve dans le *stopping number* L qui contient donc les termes correctifs. Intéressons-nous à ceux-ci

- *Corrections dues aux collisions*

W_m donne l'énergie maximale transférée en une collision à un électron libre⁴

$$W_m = \frac{2mc^2 \beta^2}{1 - \beta^2} \left[1 + \frac{2m}{m_1(1 - \beta^2)^{1/2}} + \left(\frac{m}{m_1} \right)^2 \right]^{-1} \quad (2.37)$$

Pour $m_1 \gg m$, on retrouve bien $2m\gamma_1^2 v^2$.

- *Corrections relativistes*

Si $v \approx c$, il faut apporter des corrections relativistes. Lorsque l'on travaille avec des vitesses relativistes, il faut considérer des électrons de plus en plus lointain ce qui, forcément, augmente le pouvoir d'arrêt. En effet, $p_{max} \propto \gamma_1 v / \omega_0$ ce qui montre que le paramètre d'impact augmente lorsque la vitesse fait de même. Le calcul relativiste classique du champ donne

$$\vec{E}(\omega) = -\frac{e_1 \omega}{\pi \gamma_1 v^2} \left(\frac{i}{\gamma_1} K_0 \left(\frac{\omega_{j0} p}{\gamma_1 v} \right), K_1 \left(\frac{\omega_{j0} p}{\gamma_1 v} \right), 0 \right) \quad (2.38)$$

On y voit apparaître des γ_1 et $f(p)$ se voit modifiée par ce fameux terme

$$f_{dist}(p) = \frac{1}{\gamma_1^2} \left[\frac{\omega_0 p}{\gamma_1 v} K_0 \left(\frac{\omega_0 p}{\gamma_1 v} \right) \right]^2 + \left[\frac{\omega_0 p}{\gamma_1 v} K_1 \left(\frac{\omega_0 p}{\gamma_1 v} \right) \right]^2 \quad (2.39)$$

La composante principale en la vitesse se voit modifiée

$$\frac{4\pi e_1^2 e^2}{mv^2} \Rightarrow \frac{4\pi e_1^2 e^2}{m\gamma_1^2 v^2} = \frac{4\pi e_1^2 e^2}{mv^2} (1 - \beta^2) \quad (2.40)$$

où le $(1 - \beta^2)$ apparaissant permet de comprendre le terme correspondant dans la formule de BETHE-BLOCH, il va être possible de lui donner un sens physique. Sachant que la quantité de mouvement de la particule incidente devient $m\gamma_1 v$, on en tire

$$T_{max} = 2m\gamma_1^2 v^2 \quad (2.41)$$

La composant logarithmique se modifie selon

$$\ln \frac{2mv^2}{I} \Rightarrow \ln \frac{2m\gamma_1^2 v^2}{I} = \ln \frac{2mv^2}{I(1 - \beta^2)} \quad (2.42)$$

La combinaison de toutes ces relations implique donc que le pouvoir d'arrêt augmente lorsque la vitesse augmente, ce qui est la conséquence du traitement relativiste.

4. Il s'agit d'une expression relativiste non-approchée

- *Correction de densité*

Le terme correspondant à ces corrections est le $-\delta/2$. La formule de BETHE est valable pour un gaz de faible densité (atomes isolés) mais pour un solide il faut tenir compte des effets collectifs d'un grand nombre d'atomes : on peut utiliser le modèle de Fermi. Une particule chargée incidente va polariser le milieu. Le champ électrique induit va alors donner un moment dipolaire électrique aux atomes et il en résultera un champ électrique opposé à celui produit par la particule chargée. Le champ électrique sera donc réduit via l'écrantage des dipôles.

A cause de cette diminution du champ (à cause de la polarisation), les atomes lointains ont un effet plus faible. L'effet de densité apparaît surtout aux grandes vitesses, en même temps que les effets relativistes (ils vont se "compenser"). S'il n'est significatif qu'aux énergies élevées c'est à cause du facteur γ_1 présent dans p_{max} qui augmente l'erreur commise en ignorant la polarisation du milieu : si v augmente, p_{max} augmente et donc $\delta/2$ augmente causant une diminution de S .

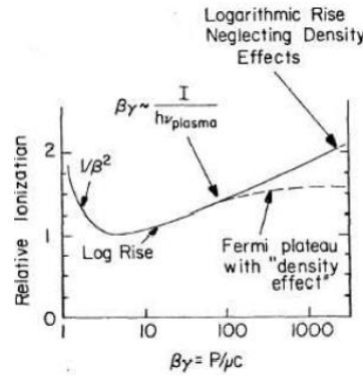


FIGURE 2.3 – L'effet relativiste et de densité vont se stabiliser de sorte que le pouvoir d'arrêt devient constant. On parle alors de *plateau de Fermi*, constant à grande vitesse.

On peut écrire la correction de densité

$$\frac{\delta}{2} = \ln \frac{\hbar\omega_p}{I} + \ln \gamma_1 \beta - \frac{1}{2} \quad (2.43)$$

avec $\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{\epsilon_0 m}}$ la *pulsation plasma*, mais ceci est plus informatif.

- *Correction shell* ("en couches")

Il s'agit du terme $-C/Z$. Nos deux formules sont basées sur l'hypothèse que $v \gg v_0$ (permet de calculer I moyen). Lorsque ce n'est plus le cas, on ne peut plus considérer que tous les électrons ont la même énergie de liaison. Le problème est que certains électrons sont plus liés que d'autres. Comme ils seront plus durs à arracher, leur contribution au pouvoir d'arrêt va diminuer et il ne faudra plus les considérer. On ajoute ainsi un terme de correction "moyen" qui réduit S de maximum 6% qui ne dépend que de la vitesse et du matériau considéré, peu importe les couches. Il existe deux méthodes pour calculer C/Z

1. Une basée sur les fonctions d'ondes hydrogénoïdes (HWF) ⁵
2. Une basée sur l'approximation en densité locale (LDA)

5. Un électron interne ne peut pas être représenté par une fonction d'onde de la sorte mais comme la rigueur absolue n'est pas possible on s'en contentera car *au moins* on a un résultat, bien que moins rigoureux.

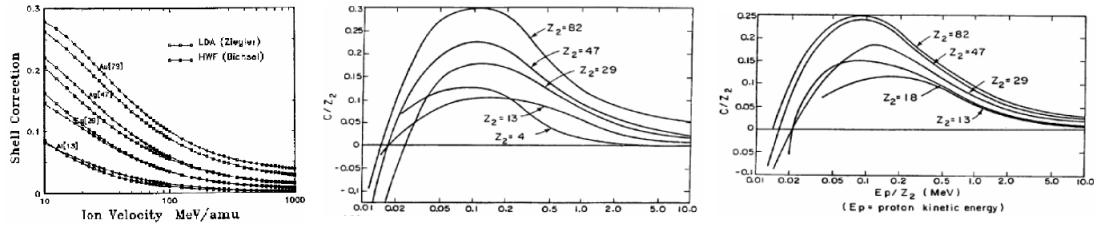


FIGURE 2.4 – À gauche la comparaison théorie/expérience (relativement bonne et comme la correction est logarithmique on s'en contentera), au centre le calcul par la méthode LDA et à droite selon HWF. L'écart entre les méthodes est plus grand pour des Z élevés mais les deux sont globalement assez bonnes.

Il est possible d'aller encore plus loin et de considérer des corrections au-delà de l'approximation de BORN au premier ordre. On va considérer des vitesses toujours plus grande que v_0 mais très proche de celle-ci de sorte que l'approximation de Born n'est plus valable⁶. Il faut rajouter des termes correctifs à L_0 qui apparaissent lors d'un développement de L en puissance de z

$$L(\beta) = L_0(\beta) + zL_1(\beta) + z^2L_2(\beta) \quad (2.44)$$

Passons à nouveau en revue les différentes corrections

- *Correction de Barkas-Andersen*

Il s'agit du terme $zL_1(\beta)$. Il s'agit d'une proportionnalité à une puissance impaire de la charge. Si la charge est positive, cela attire le nuage d'électrons et il y aura plus d'interactions : augmentation du pouvoir d'arrêt. Si la charge est négative, les électrons sont repoussés et le pouvoir d'arrêt diminue. S diffère donc entre les particules et antiparticules.

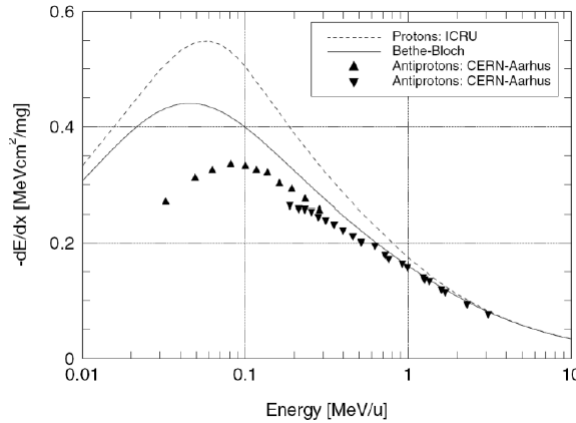


FIGURE 2.5 – Protons et antiprotons incidents sur une cible de silicium : le pouvoir d'arrêt est plus important pour les protons que pour des antiprotons.

- *Correction de Bloch*

Il s'agit du terme $z^2L_2(\beta)$, une correction pas très importante que l'on évalue généralement avec l'évaluation de BICHSEL

$$z^2L_2(y) = -y^2[1.202 - y^2(1.042 - 0.855y^2 + 0.343y^4)] \quad (2.45)$$

où $y = z\alpha/\beta$ avec $\alpha = 1/137$ le constante de structure fine.

6. Il faut en effet que $v \gg v_0$ pour que L_0 soit valable

Évaluons maintenant les effets des différentes corrections. Le graphique ci-contre (à gauche) concerne des protons incidents sur une cible d'aluminium. On peut y voir que la correction de BLOCH (en bas à gauche) est vraiment très faible. A droite est représenté la correction relative pour des protons incidents sur une cible d'or (L_1 concerne BARKAS et L_2 BLOCH).

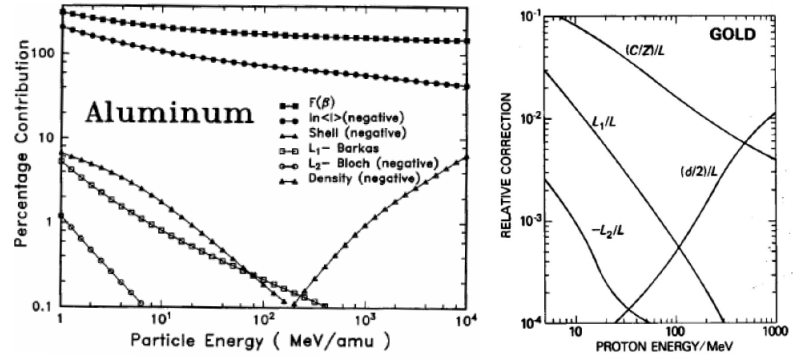


FIGURE 2.6

2.1.3 Petites vitesses

Lorsque $v \lesssim v_0$, on ne peut plus appliquer la méthode des perturbations et il faut commencer à prendre en compte les captures électroniques par l'ion incident (l'ion va si lentement qu'il peut capturer un (ou plusieurs) électron) modifiant la charge z^* de celui-ci. Par la théorie de THOMAS-FERMI

$$z^* = z \left(1 - e^{-v/(z^{2/3}v_0)} \right) \quad (2.46)$$

Une technique consiste à considérer un état de charge moyen même si ce n'est pas vrai en tout point.

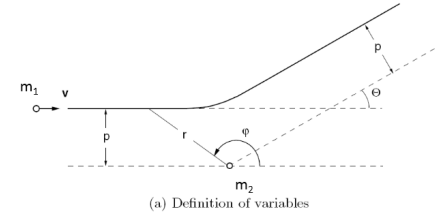
2.2 Pouvoir d'arrêt nucléaire (faibles vitesses)

Les effets étant tellement négligeable que nous ne rentrerons pas dans les détails ici. Comme vu au premier chapitre, les collisions nucléaire pour des ions incidents sont rares et contribuent peu au pouvoir d'arrêt total. Elle se produise presque exclusivement pour des ions incidents de faible vitesse et même alors leur contribution est faible. Cependant, elle peuvent avoir des effets à posteriori et causer des dégâts radiatifs.

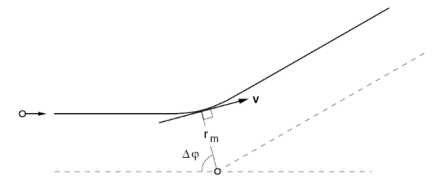
Plaçons-nous dans le système du centre de masses pour observer la diffusion par un angle θ due à un potentiel central $V(r)$. Reprenons la formule générale pour la section efficace d'arrêt

$$S_n = \int T d\sigma = \int T 2\pi p dp = 2\pi\gamma E \int \sin^2(\theta/2) p dp \quad (2.47)$$

où $\gamma = \frac{4m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}$. Pour le calculer, il est nécessaire de connaître θ ce qui peut se faire avec le schéma avec une particule incidente et cible représenté ci-contre.



(a) Definition of variables



(b) Distance of closest approach

Pour évaluer θ , on utilise l'équation de la variation angulaire en coordonnée sphérique tout en introduisant le potentiel.

$$\frac{m_0}{2} \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right] + V(r) = \frac{m_0}{2} v^2 \equiv E_r$$

$$m_0 r^2 \frac{d\varphi}{dt} = -m_0 p v$$

On en tire

$$\theta = \pi - 2 \int_{r_m}^{\infty} dr \frac{p}{r^2} \left(1 - \frac{V(r)}{E_r} - \frac{p^2}{r^2} \right)^{-1/2} \quad (2.48)$$

Il faut maintenant spécifier le potentiel. Le plus logique serait d'utiliser celui de COULOMB mais sa variation en $1/r$ cause une divergence du paramètre d'impact à cause de la portée infinie. Comme il y a toujours interaction, on va préférer considérer un effet d'écrantage par les électrons atomiques qui diminue la portée du potentiel. Pour se faire, on va simplement introduire une exponentielle décroissante $\exp(-r/r_s)$.

Pour un modèle plus précis, on peut insérer une fonction $F_s(r/r_s)$. Le potentiel d'interaction devient alors

$$V(r) = \frac{z_1 Z_2 e^2}{r} F_s\left(\frac{r}{r_s}\right) \quad (2.49)$$

Il s'agit de la *fonction d'écrantage universelle*, obtenue par ajustement aux résultats expérimentaux.

Mettons maintenant ces effets ensemble en considérant des protons incidents sur une cible d'aluminium comme représenté ci-contre. Nous avons $S = S_{elec} + S_{nucl} \approx S_{elec} = S_{coll}$. On voit que l'effet du pouvoir d'arrêt nucléaire est très faible, on retrouve le plateau de Fermi à grande vitesse et une pente ou la formule de BOHR est valable.

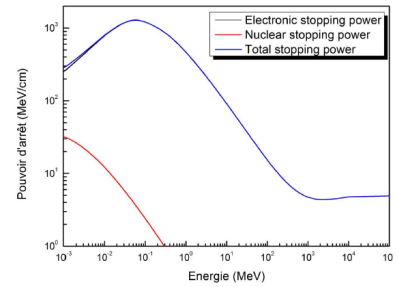


FIGURE 2.8

2.3 Pouvoir d'arrêt massique électronique et influence de la phase

Par définition, le pouvoir d'arrêt massique d'un matériau est le rapport du pouvoir d'arrêt linéique et de la masse volumique ρ de ce matériau (unités usuelle : $\text{MeV} \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{g}^{-1}$).

$$\frac{NS(E)}{\rho} = -\frac{1}{\rho} \frac{dE}{dx} \quad (2.50)$$

Comme $\rho = M_A N / N_A$ où $M_A = A M_u$, en divisant des deux côtés par cette même quantité on trouve

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dE_{elec}}{dx} = 4\pi r_e^2 m c^2 \frac{N_A}{M_u} \frac{Z}{A} \frac{z^2}{\beta^2} L(\beta) \quad (2.51)$$

Passons en revue les quatre facteurs du pouvoir d'arrêt massique électronique

1. Le facteur constant $4\pi r_e^2 m c^2 N_A / M_u = 0.307 \text{ MeV} \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{g}^{-1}$ qui donne l'ordre de grandeur de ce pouvoir
2. Le facteur Z/A compris entre 0.4 et 0.5 pour tout les isotopes stable (sauf H). Comme c'est le terme principal de dépendance du matériau et que celui-ci est \pm constant la dépendance du matériau est faible : c'est l'intérêt de cette formule
3. Le facteur β^{-2} est une fonction monotone décroissante de la vitesse de l'ion qui tend vers 1 pour les grandes énergies. Ce-dernier explique la diminution du pouvoir d'arrêt avec l'énergie.

4. Le nombre d'arrêt $L(\beta)$ est une fonction monotone croissante (lente) de la vitesse et de Z .

Influence de la phase

Aux grandes énergies, la correction de densité influe impliquant une grande correction de phase dans les solides et faible dans les gaz. Aux faibles énergies il faut tenir compte de l'influence des liaisons chimiques et intermoléculaires ce qui se traduit par une modification de la valeur de I .

2.4 Parcours et courbe de Bragg

2.4.1 Parcours

Lorsque les particules **chargées** perdent leur énergie dans la matière, elles parcourent une certaine distance dans la matière mais celle-ci peut être variable à cause des pertes d'énergies et des déviations aléatoires (*starggling*). Il faut alors définir plusieurs parcours

- Le parcours R d'une particule chargée d'énergie E dans un milieu et la valeur moyenne $\langle l \rangle$ de la longueur m de sa trajectoire suivie jusqu'à son arrêt (en négligeant le mouvement thermique)
- Le parcours projeté R_p d'une particule chargée d'énergie E dans un milieu. Celui-ci correspond à la valeur moyenne de sa profondeur de pénétration $\langle d \rangle$ dans la direction initiale de la particule.

A cause du caractère sinueux des trajectoires, $R_r < R$. On définit alors le **facteur de détournement** $R_p/R_{CSDA} < 1$.

Dans l'approximation $CSDA$

$$R_{CSDA} = \int_0^E \frac{dE'}{NS(E')} \quad (2.52)$$

En remplaçant S par l'expression de BETHE (non-relativiste, avec $dE = Mv dv$)

$$R_{CSDA} \propto \int_0^v \frac{v^3 dv}{L(v)} \quad (2.53)$$

En négligeant la dépendance en la vitesse du nombre d'arrêt

$$R_{CSDA} \propto v^4 \propto E^2 \quad (2.54)$$

En réalité, l'équation de BETHE (ou BETHE-BLOCH) n'est pas valable à faibles vitesses et il faut nécessairement passer par de faibles vitesses pour s'arrêter. On utilisera alors la formule empirique suivante

$$\rho R_{CSDA} = \frac{E^{1.77}}{415} + \frac{1}{670} \quad (2.55)$$

Considérations sur le parcours

Reprenons l'approximation $NS(E) \propto 1/E$. Soit une particule incidente de masse M_i et de charge z_i

$$NS(E) = -\frac{dE}{dx} \Rightarrow -\frac{M_i}{z_i^2} \frac{dv^2}{dx} \propto \frac{1}{v^2} \quad (2.56)$$

Pour deux particules incidentes (M_1, z_1) et (M_2, z_2) de même vitesse initiale

$$\frac{R_{CSDA}^1}{R_{CSDA}^2} = \frac{M_1 z_2^2}{M_2 z_1^2} \quad (2.57)$$

Il s'agit d'une petite formule utile pour estimer l'ordre de grandeur qui nous informe que le range pour des protons et des α de même vitesse est similaire.

2.4.2 Courbes de Bragg

Soit un milieu semi-infini et un faisceau parallèles de particules chargées identiques et de même énergie : toutes les particules vont forcément s'arrêter, après une distance R_{CSDA} . La courbe de BRAGG donne la **dose** (énergie moyenne déposée par unité de masse de la cible) déposée par la particule chargée en fonction de la profondeur.

A une profondeur x , la particule doit encore parcourir $d = R_{CSDA} - x$. Comme l'énergie déposée $D \propto S \propto 1/v^2$, cela implique que $R_{CSDA} \propto v^4$. Dès lors

$$D \propto \frac{1}{\sqrt{d}} = \frac{1}{\sqrt{R_{CSDA} - x}} \quad (2.58)$$

Ceci a des applications en protonthérapie (ou hadronthérapie). Lorsque l'on a une tumeur, il faut la soumettre à un rayonnement pour l'éliminer. On pourrait envoyer des électrons, mais entre la tumeur et la peau il y a pas mal de choses qu'il ne vaut mieux pas endommager et le problème est que les électrons vont déposer pas mal d'énergie entre les deux. Avec la protonthérapie, la zone dans laquelle il ne faut pas déposer l'énergie sera faible et le maximum d'énergie sera déposé là où la tumeur se situe.

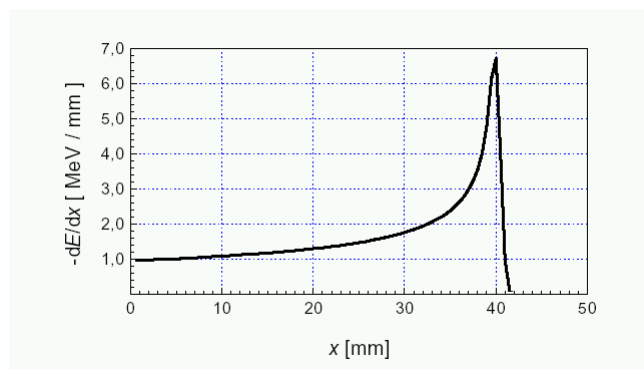


FIGURE 2.9 – Protons de 700 MeV dans de l'eau

Interactions nucléaires fortes



Lorsqu'un ion s'approche très près d'un noyau, une interaction nucléaire forte est possible et le noyau peut être brisé. Par exemple, en fragmentant le plomb on aura un excès de neutron. Ce processus de production de neutrons est nommé *spallation*. Le projet *Myrrha* se base là dessus. L'idée est de faire un réacteur avec un accélérateur en envoyant des protons sur du Pb pour produire des neutrons et après se trouve un réacteur classique : pour l'arrêter, il suffit de couper l'accélérateur.

Chapitre 3

Interaction des électrons avec la matière

Ce chapitre est principalement culturel et n'intervient qu'en guise de question bonus. Il est pour le moment passé et sera complété si le temps le permet.

Chapitre 4

Interaction des photons avec la matière

4.1 Introduction

4.1.1 Considérations de bases et interactions des γ avec la matière

Les photons sont classifiés en fonction de leur origine

- Les γ sont émis lors de transitions **nucléaires** $E_\gamma = E_i - E_f$ si on néglige l'énergie de recul du noyau. En général, $E_\gamma > 100$ keV.
- Le Bremsstrahlung (rayons X de spectre continu, une particule peut perdre toute son énergie en une fois) résulte de l'accélération d'une particule chargée.
- Les rayons X caractéristiques sont émis lors de transitions électroniques entre les couches atomiques K, L, M, \dots . En général, $E_X < 100$ keV.

La quantité de mouvement d'un photon vaut $\vec{p} = \hbar \vec{k}$ où $p = E_\gamma/c$ et k est le nombre d'onde. Ils interagissent avec la matière via des processus isolés, sans interactions entres-eux. Les photons sont des rayonnements **indirectement ionisants** : ils produisent des particules chargées qui, elles, vont ioniser la matière.

Type d'interaction	Effet de l'interaction
1: Électron atomique	A: Diffusion cohérente
2: Noyau atomique	B: Diffusion incohérente
3: Champs électrique des noyaux et électrons atomiques	C: Absorption totale
4: Champs més onique des noyaux atomiques	

Tableau 4.1

Pour des énergies entre le keV et le GeV, FANO a classifié 4 types d'interaction et 3 conséquences de celle-ci, soit 12 processus théoriques possibles¹. Sur ceux-ci, seuls trois effets dominant

1. *L'effet Compton* (1B) : Le photon est diffusé par un électron libre ou faiblement lié. La somme de l'énergie du photon et de l'énergie cinétique de l'électron est alors égale à l'énergie du photon incident
2. *L'effet photoélectrique* (1C) : Le photon est absorbé par un système électronique (atome). Il cède alors toute son énergie et un électron atomique² est éjecté hors de l'atome avec une énergie cinétique égale à l'énergie du photon moins l'énergie de liaison de l'électron dans l'atome.
3. *La création de paire* (3C) : Le photon disparaît dans le champ électrique d'un noyau ou d'un électron et une paire électron-positron apparaît.

1. Certains sont très rares, et d'autres n'ont jamais été observés.

2. C'est-à-dire ?

Deux autres processus peuvent aussi jouer un rôle

1. *Diffusion de Rayleigh* (1A) : Le photon est dévié sans perte d'énergie par un système électronique (atome)
2. *Photodésintégration du noyau* (2C) : Le photon est absorbé par le noyau et une particule est émise ($\gamma, \alpha, p, n, \dots$).

On ne parlera pas du dernier point car l'énergie concernée est bien supérieure à celle utilisée en métrologie nucléaire.

4.1.2 Remarque importante

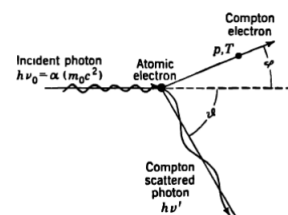
Un photon **ne** peut **pas** être absorbé par un électron libre et lui céder toute son énergie. Par conservation de l'énergie et de l'impulsion avec $h\nu_0$ l'énergie du photo et m, E et p , la masse, l'énergie totale et l'impulsion de l'électron on peut écrire

$$h\nu_0 + mc^2 = E, \quad \frac{h\nu_0}{c} = p \quad (4.1)$$

Ce qui implique que $E = pc + mc^2$. Or, par définition $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$. L'absorption serait possible que pour $p = h\nu_0 = 0$ ce qui est à rejeter.

4.2 Effet Compton

L'effet COMPTON est un scattering par un électron libre dans une certaine plage énergétique où les électrons sont considérés comme libre³. Le photon incident est donc diffusé (au sens du scattering) et cède une partie de son énergie à un électron.



C'est en 1906 que THOMSON calcula classiquement la section efficace de diffusion d'une onde électromagnétique par un électron libre. Un électron oscille en réponse à la force exercée par le champ électrique de l'onde, à la même fréquence que celui-ci. Il en résulte un dipôle magnétique faisant que l'électron rayonne causant une diffusion continue⁴ de l'onde incidente.

Pour une onde non polarisée, la section efficace de diffusion THOMSON s'écrit

$$\frac{d\sigma_0}{d\Omega} = \frac{r_e^2}{2} (1 + \cos^2 \theta) \quad (4.2)$$

où $r_e = e^2/4\pi\epsilon_0 mc^2$, le rayon classique de l'électron.

4.2.1 Démonstration de Thomson

Soit une onde électromagnétique de fréquence ν interagissant avec un électron libre de masse m et charge $-e$

$$\vec{E} = E_0 \exp\{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \nu t)\} \vec{1}_E \quad (4.3)$$

où $\vec{1}_E$ est la direction de polarisation. L'électron subit une force \vec{F} à cause de ce champ, son équation du mouvement s'écrit

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -e \vec{E} \quad (4.4)$$

3. Lorsque ce n'est plus le cas, l'effet photoélectrique domine

4. L'idée est bonne, mais nous verrons que ceci est faux.

Dans l'approximation dipolaire la puissance émise par unité d'angle solide s'écrit (formule de LARMOR différentielle - voir cours d'électromagnétisme)

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^3} \langle a^2 \rangle \sin^2 \Theta \quad (4.5)$$

où Θ est l'angle entre la direction de polarisation et l'observateur. On peut directement obtenir la moyenne de l'accélération au carré avec l'équation de mouvement

$$\langle a^2 \rangle = \frac{e^2}{2m^2} |E_0|^2 \quad (4.6)$$

En remplaçant dans la précédente équation, on trouve la puissance différentielle

$$\frac{dP}{d\Omega} = r_e^2 \frac{\epsilon_0 c |E_0|^2}{2} \sin^2 \Theta \quad (4.7)$$

En considérant le module du vecteur de Poynting $I = \epsilon_0 c \frac{|E_0|^2}{2}$ et en substituant son expression, on trouve la section efficace différentielle

$$\frac{d\sigma_0}{d\Omega} = \frac{dP/d\Omega}{I} = r_e^2 \sin^2 \Theta \quad (4.8)$$

Pour une onde incidente non-polarisée, il faut prendre la moyenne de Θ

$$\overline{\sin^2 \Theta} = \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta) \quad (4.9)$$

où θ est l'angle de scattering. En remplaçant on trouve l'équation de THOMSON, purement classique

$$\frac{d\sigma_0}{d\Omega} = \frac{r_e^2}{2} (1 + \cos^2 \theta) \quad (4.10)$$

L'intégration sur tout les angles possible donne la section efficace totale de diffusion THOMSON

$$\sigma_0 = \frac{8\pi}{3} r_e^2 = 0.665 \times 10^{-28} \text{ m}^2 \approx \frac{2}{3} \text{ barn/électron} \quad (4.11)$$

Le problème est la diffusion continue de l'onde incidente, comme COMPTON va faire remarquer.

4.2.2 Expérience de Compton

En 1922, COMPTON mesure les longueurs d'onde des rayonnements incidents et diffusés et montre que le spectre n'est pas continu mais suit

$$\lambda_1 - \lambda_0 = \frac{h}{mc} (1 - \cos \theta) \quad (4.12)$$

où λ_0, λ_1 sont les longueurs d'ondes des photons incidents et diffusés et λ_C , la longueur d'onde de COMPTON. La diffusion par un électron ne dépend pas du nombre atomique du diffuseur, ni de la longueur de l'onde incidente : l'énergie et l'impulsion perdue par le photon se retrouvent dans un seul électron.

Démonstration de l'expression de Compton

Plaçons-nous dans le référentiel du laboratoire et écrivons les quadrivecteurs associés

$$\text{photon avant} \rightarrow \left(\frac{h\nu_0}{c}, \frac{h\nu_0}{c} \vec{n}_0 \right) \quad (4.13)$$

$$\text{photon après} \rightarrow \left(\frac{h\nu_1}{c}, \frac{h\nu_1}{c} \vec{n}_1 \right) \quad (4.14)$$

$$\text{électron avant} \rightarrow \left(\frac{mc^2}{c}, 0 \right) \quad (4.15)$$

$$\text{électron après} \rightarrow \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right) \quad (4.16)$$

Par conservation de l'énergie et de l'impulsion

$$h\nu_0 + mc^2 = h\nu_1 + E \quad (4.17)$$

$$h\nu_0 \vec{n}_0 = h\nu_1 \vec{n}_1 + \vec{p}c \quad (4.18)$$

Avec $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$, en isolant p :

$$(h(\nu_0 - \nu_1) + mc^2)^2 = h^2(\nu_0 \vec{n}_0 - \nu_1 \vec{n}_1)^2 + m^2c^4 \quad (4.19)$$

Sachant que $\vec{n}_0 \vec{n}_1 = \cos \theta$, on trouve

$$h\nu_0\nu_1(1 - \cos \theta) = mc^2(\nu_0 - \nu_1) \Rightarrow \frac{hc^2}{\lambda_0\lambda_1}(1 - \cos \theta) = mc^3 \left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda_1} \right) \quad (4.20)$$

Et donc

$$\lambda_1 - \lambda_0 = \frac{h}{mc}(1 - \cos \theta) \quad (4.21)$$

4.2.3 Relations entre énergies et angles

Soit E_0 et E_1 les énergies du photon incident et diffusé, $T = E_0 - E_1$ l'énergie cinétique cédée à l'électron, θ l'angle de diffusion du photo, ϕ l'angle entre la trajectoire de l'électron et la direction initiale du photon et $\alpha = E_0/mc^2$. On peut écrire

$$T = E_0 \frac{2\alpha \cos^2 \phi}{(1 + \alpha)^2 - \alpha^2 \cos^2 \phi} = E_0 \frac{\alpha(1 - \cos \theta)}{1 + \alpha(1 - \cos \theta)} \quad (4.22)$$

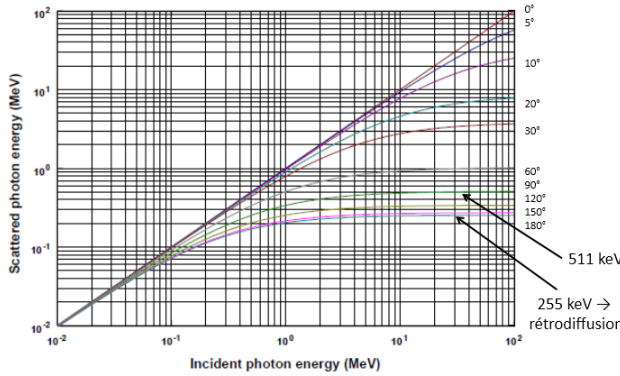


FIGURE 4.2

abordé plus tard.

$$E_1 = E_0 \frac{1}{1 + \alpha(1 - \cos \theta)}, \quad \cot \phi = (1 + \alpha) \tan \frac{\theta}{2} \quad (4.23)$$

Ces formules représentées graphiquement donnent déjà un bon nombre d'informations. Comme $0 < \theta < \pi$, on sait que $(E_1)_{\min} = E_0/(1 + 2\alpha)$ et $(E_1)_{\max} : E_0$. Lorsque l'angle augmente, E_1 a tendance à diminuer. L'effet de l'angle se marque assez peu à faible énergie mais devient significatif à haute énergie. La ligne bleue correspond à une rétro-diffusion, ce point sera

REMARQUES

- Le déplacement en longueur d'onde ne dépend pas de l'énergie du photon incident (uniquement de l'angle de diffusion)
- Le déplacement en énergie dépend fortement de l'énergie du photon incident et augmente fortement avec l'énergie
- Pour E_0 petit, le photon perd peu d'énergie $\forall \theta$
- Lorsque E_0 augmente, la variation de l'énergie du photon diffusé avec l'angle devient de plus en plus rapide
- A 90° , $E_1 < 511$ keV (toujours, $=mc^2$)
- A 180° , $E_1 < 255$ keV (toujours, $=mc^2/2$). Il s'agit de la rétro-diffusion du photon et explique le pic de rétro-diffusion dans les spectres γ .

Regardons ϕ . On observe que $0 < \phi < \pi/2$ impliquant $T_{min} = 0$ et

À retenir:

$$T_{max} = \frac{E_0}{1 + (1/2\alpha)} \quad (4.24)$$

A retenir car pratique pour tracer des spectres !

Ci-contre, la représentation de la variation de l'énergie maximale de l'électron en fonction de l'énergie du photon incident. On remarque que la déviation du photon se fait dans le sens de la trajectoire pour les grandes énergies (et donc faible angle).

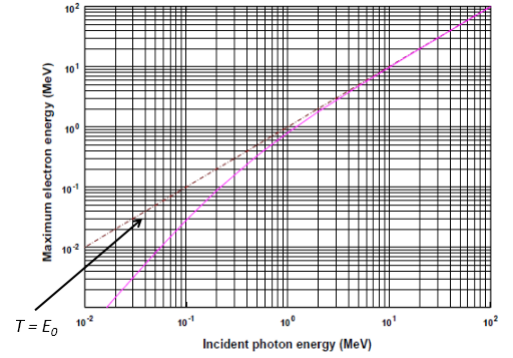


FIGURE 4.3

4.2.4 Section efficace différentielle angulaire, énergétique et totale

Section efficace différentielle angulaire

Il s'agit de la première chose qui a été calculé par KLEIN-NISHINA (valable pour des électrons libres et au repos) via la théorie quantique relativiste et l'équation de DIRAC.

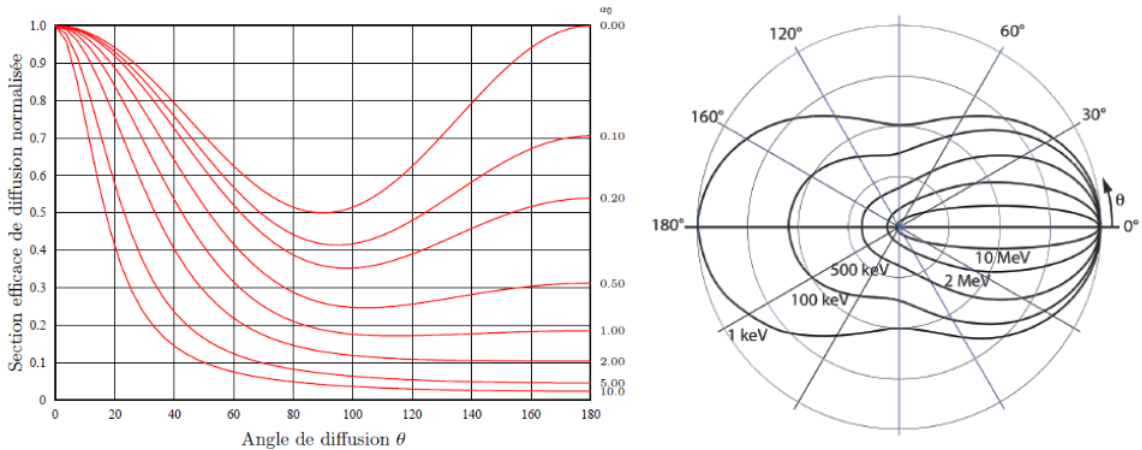


FIGURE 4.4 – Plus on monte en énergie, plus la direction privilégiée est dans le sens de la trajectoire (droite).

La section efficace différentielle de diffusion d'un photon (non polarisé) par un électron dans l'angle solide $d\Omega$ autour de la direction formant un angle θ avec la direction initiale du photon est donnée par

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_e^2}{2} \left(\frac{\nu'}{\nu_0} \right) \left(\frac{\nu_0}{\nu'} + \frac{\nu'}{\nu_0} - \sin^2 \theta \right) \quad (4.25)$$

où r_e est le rayon classique de l'électron. Notons la non-dépendance en Z . Pour de très faibles énergie ($\alpha \ll 1$), $E_1 \approx E_0$ impliquant que $d\sigma \approx d\sigma_0$: on retrouve la section efficace de THOMSON ! Celle-ci n'était donc pas si mauvaise car on la retrouve à faible énergie.

Section efficace différentielle énergétique

A partir de la section efficace différentielle en angle, on peut trouver les sections différentielles en énergie. Rien de compliqué, mais rien de drôle non plus

$$\frac{d\sigma}{dE_1} = \frac{\pi r_e^2}{\alpha^2 m_e c^2} \left\{ 2 + \left(\frac{E_0 - E_1}{E_1} \right)^2 \left[\frac{1}{\alpha^2} + \frac{E_1}{E_0} - \frac{2}{\alpha} \left(\frac{E_1}{E_0 - E_1} \right) \right] \right\} \quad (4.26)$$

Par changement de variable (à faire un samedi soir)

$$\frac{d\sigma}{dT} = \frac{\pi r_e^2}{\alpha^2 m_e c^2} \left\{ 2 + \left(\frac{T}{E_0 - T} \right)^2 \left[\frac{1}{\alpha^2} + \frac{E_0 - T}{E_0} - \frac{2}{\alpha} \left(\frac{E_0 - T}{T} \right) \right] \right\} \quad (4.27)$$

La représentation graphique (slide 29) montre que cette section efficace est assez équiprobable pour de faibles énergies. Plus l'énergie augmente, plus il y a un pic prononcé lorsque l'on arrive à la valeur du seuil COMPTON.

Section efficace différentielle totale

Après intégration de la section efficace de KLEIN-NISHINA sur les angles

$$\sigma = 2\pi r_e^2 \left\{ \frac{1 + \alpha}{\alpha^2} \left[\frac{2(1 + \alpha)}{1 + 2\alpha} - \frac{\ln(1 + 2\alpha)}{\alpha} \right] + \frac{\ln(1 + 2\alpha)}{2\alpha} - \frac{1 + 3\alpha}{(1 + 2\alpha)^2} \right\} \quad (4.28)$$

Pour $\alpha \ll 1 \rightarrow \sigma \approx \sigma_0$, la section efficace de THOMSON. Pour $\alpha \gg 1$, $\sigma \rightarrow (\ln \alpha)/\alpha$, la section efficace de COMPTON décroît lorsque l'énergie du photon augmente. Si on regarde les précédents graphique, la distribution est piquée en $\theta = 0$ ce qui répond au cas où il n'y a ni diffusion, ni transfert d'énergie et donc pas d'effet. Notons que la section efficace **atomique** est proportionnelle à Z .

La section efficace σ représente la probabilité de collision, soit le cas où une partie de l'énergie est diffusée et l'autre est cédée à l'électron (absorbée). La collision reprend donc la diffusion, mais également l'absorption. Pour caractériser cet aspect, on définit une section efficace de diffusion σ_s et d'absorption σ_a tel que $\sigma = \sigma_s + \sigma_a$.

4.2.5 Diffusion cohérente et incohérente

Pour de très faibles énergies E_0 , d'électron est de moins en moins libre/au repos et les anciennes hypothèses tombent à l'eau, il va falloir prendre en considération le système électronique tout entier et non plus. Deux cas sont possibles

1. L'atome reste dans son état initial et le photon est juste dévié : diffusion de RAYLEIGH (**cohérente**)
2. L'atome change d'état : le photon perd de l'énergie, la diffusion est **incohérente**

Pour de grandes énergies, on nomme la diffusion incohérente la diffusion COMPTON.

En guise de première approximation pour la diffusion cohérente, on peut voir le système électronique comme un système de charge Ze et de masse Zm . La section efficace de Rayleigh vaut alors

$$a\sigma_{coh} = Z^2\sigma_0 \quad (4.29)$$

En réalité la structure du nuage électronique implique une diminution de la diffusion et l'on utilise

$$a\sigma_{coh} = F^2\sigma_0 \quad (4.30)$$

Pour la diffusion incohérente, on modifie la section efficace de KLEIN-NISHINA en introduisant la fonction de diffusion incohérente S tenant compte du fait qu'un photon peut éjecter un électron

$$a\sigma_{incoh} = Z\sigma S \quad (4.31)$$

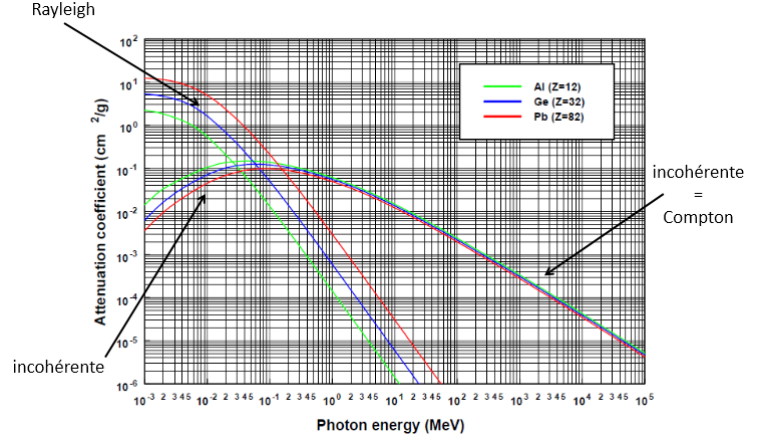


FIGURE 4.5

4.3 Effet photoélectrique

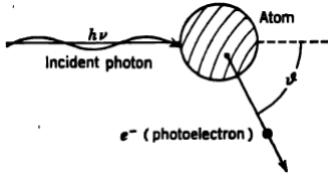


FIGURE 4.6

L'**effet photoélectrique** est un processus au cours duquel un photon incident interagit avec un atome et éjecte un électron (processus expliqué correctement par EINSTEIN en 1905), souvent appelé *photoélectron*. Ce processus de capture d'un photon par un atome dont un électron est excité dans un état continu est le processus inverse de l'émission spontanée d'un photon par un atome excité

4.3.1 Conservation de l'énergie et énergie de liaison

Soit l'absorption totale d'un photon d'énergie $h\nu_0$ causant l'émission d'un électron avec une énergie cinétique T hors d'une couche atomique caractérisée par une énergie de liaison B_i . En négligeant l'énergie du recul du noyau

$$h\nu_0 = T + B_i \quad (4.32)$$

Par conservation, il faut que $h\nu_0 > B_i$. Ainsi lorsque $h\nu_0$ augmente, la probabilité de l'effet photoélectrique diminue car le comportement de l'électron se rapproche plus de celui d'un électron libre (et celui-ci **ne** peut **pas** se faire totalement absorbé). A priori on regarde plus les couches externes (couche $K \rightarrow B_K$), ceux-ci possédant une énergie de liaison plus faible.

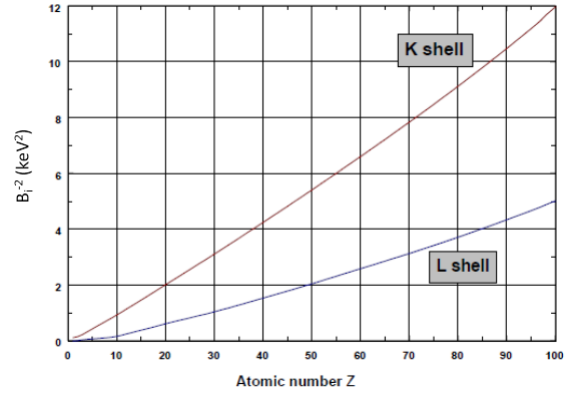


FIGURE 4.7 – Pour $Z > 30$, les énergies de liaison obéissent approximativement à $B_i = a_i(Z - c_i)^2$ (avec a_i et c_i , des constantes pour chaque couche)

4.3.2 Section efficace

On peut décomposer la section efficace par atome ${}_a\tau$ en une somme de sections efficaces partielles ${}_a\tau_i$ correspondant à l'éjection d'un électron hors d'une couche i

$${}_a\tau = \sum_i {}_a\tau_i \quad (4.33)$$

Le calcul de ${}_a\tau_K$ a été fait pour un atome hydrogénoïde dans l'approximation de BORN en utilisant une onde plane comme fonction d'onde de l'électron éjecté : pas le choix, la fonction d'onde de l'électron est trop compliquée. Restreignons la zone de travail en énergie en faisant l'approximation non relativiste et que l'interaction noyau/électron est négligeable : $\vec{B}_k \ll \hbar\nu_0 \ll mc^2$. On trouve (cadeau)

$${}_a\tau_K = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{a_0}{Z}\right)^2 32\alpha \left(\frac{B_K}{\hbar\nu_0}\right)^{7/2} \quad (4.34)$$

Lorsque l'approximation de BORN n'est plus valable, il faut introduire un facteur correctif

$$f(\xi) = 2\pi \left(\frac{B_K}{\hbar\nu_0}\right)^{1/2} \frac{e^{-4\xi \operatorname{arccot} \xi}}{1 - e^{-2\pi\xi}} \quad \text{avec} \quad \xi = \left(\frac{B_K}{\hbar\nu_0 - B_K}\right)^{1/2} \quad (4.35)$$

En pratique pas grand monde s'intéresse à ceci, même ceux qui travaillent dans le domaine utilisent les valeurs de tables et ne font pas trop attention à la forme. Ce qui est intéressant c'est que a_0/Z est grossièrement la dimension de l'atome et que l'énergie varie en $\hbar\nu_0^{7/2}$.

Les autres section efficaces partielles suivent le même comportement, on les note sous la forme

À retenir :

$${}_a\tau = C \frac{Z^n}{(\hbar\nu_0)^k} \quad (4.36)$$

où $4 < n < 4.6$ et $1 < k < 3$.

Cette formule est intéressante à retenir car elle montre une forte dépendance en énergie mais également une dépendance en Z . Ces constantes sont difficile à trouver, on sait que l'énergie doit être en proche (en puissance) de $-7/2$ mais on en sait pas plus.

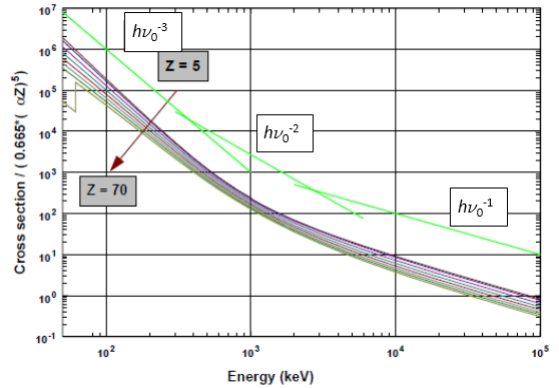


FIGURE 4.8 – Variation de ${}_a\tau$ avec $\hbar\nu_0$

4.3.3 Distribution angulaire des photoélectrons

On se rappelle que - dans l'approximation de BORN - la section efficace différentielle est proportionnelle à

$$f(\theta) = \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^4} \quad (4.37)$$

La section efficace s'annule dans la direction du photon incident $\theta = 0$ ce qui est une conséquence de la nature transverse des ondes électromagnétiques. L'électron tend donc à être éjecté dans la direction du champ \vec{E} de cette onde⁵. Dans le cas relativiste

$$f(\theta) = \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^4} + \frac{3(1 - \sqrt{1 - \beta^2}) - 2\beta^2}{2(1 - \beta^2)^{3/2}} \times \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^3} \quad (4.38)$$

5. Notons que, physiquement, $\theta = 0$ est impossible.

Que ce soit relativiste ou non, lorsque l'énergie des photons augmente de plus en plus d'électrons sont éjectés vers l'avant.

On nomme **angle de bipartition** θ_b l'angle pour lequel la moitié des photoélectrons sont émis vers l'avant dans un cône de demi-angle inférieur à θ_b .

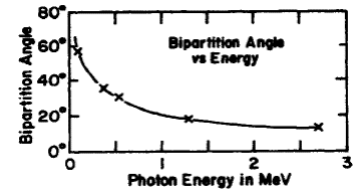


FIGURE 4.9

4.3.4 Phénomène consécutif à l'effet photoélectrique

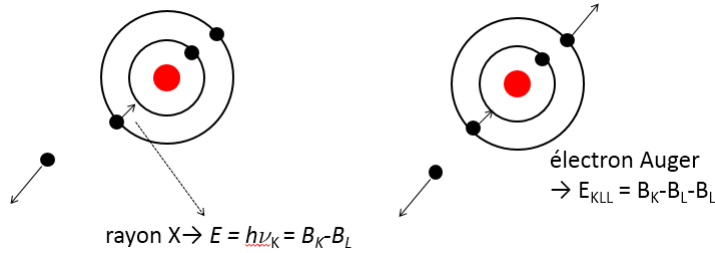


FIGURE 4.10

L'émission d'un électron à cause d'un photoélectrique crée un trou dans une couche interne. Après réarrangement électronique, il y a émission d'un rayon X (fluorescence) ou d'un électron AUGER. On définit alors un **rendement de fluorescence** ω_i qui est la probabilité d'émission d'un photon après

une transition vers la couche i . Ce rendement est faible pour les matériaux à petit Z .

4.4 Création de paire

La création de paire se produit dans le champ électrique du noyau ou d'un électron atomique (plus rarement, on parlera de création de triplet où une partie de l'énergie est transférée à l'électron initial)), le photon disparaît alors et il se forme une paire électron-positron.

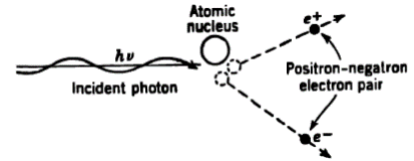


FIGURE 4.11

4.4.1 Lois de conservation

Afin de déterminer l'énergie minimale du photon incident pour avoir création de paire, écrivons les équations de conservation. Avant l'interaction, on travaille dans le repère de la particule cible de masse M , au repos

$$\text{photon avant} \rightarrow \left(\frac{h\nu_0}{c}, \frac{h\nu_0}{c} \right) \quad (4.39)$$

$$\text{particule cible avant} \rightarrow \left(\frac{Mc^2}{c}, 0 \right) \quad (4.40)$$

Après l'interaction, on se place dans le référentiel du centre de masse

$$\text{électron après} \rightarrow \left(\frac{mc^2 + T_e}{c}, \vec{p}_e \right) \quad (4.41)$$

$$\text{positron après} \rightarrow \left(\frac{mc^2 + T_p}{c}, \vec{p}_p \right) \quad (4.42)$$

$$\text{particule cible après} \rightarrow \left(\frac{Mc^2 + T_C}{c}, \vec{p}_C \right) \quad (4.43)$$

Après le choc, en travaillant dans le référentiel du centre de masse ⁶

$$\vec{p}_e + \vec{p}_p + \vec{p}_C = 0 \quad (4.44)$$

En notant $T_{tot} = T_e + T_p + T_C$ et par conservation de l'invariant $P^2 = (E/c)^2 + p^2$

$$\text{avant} \rightarrow P^2 = \left(\frac{h\nu_0}{c} + \frac{Mc^2}{c} \right)^2 - \left(\frac{h\nu_0}{c} \right)^2 \quad (4.45)$$

$$\text{après} \rightarrow P^2 = \left(\frac{2mc^2 + Mc^2 + T_{tot}}{c} \right)^2 \quad (4.46)$$

On trouve l'énergie minimale $h\nu_{m,min}$ en égalant les deux expressions pour $T_{tot} = 0$

$$h\nu_{0,min} = 2mc^2 \left(1 + \frac{m}{M} \right) \quad (4.47)$$

où m est la masse de l'électron et M celle de la particule cible En conclusion

- Dans le champ d'un noyau : $M \gg m \rightarrow h\nu_{0,min} = 2mc^2$
- Dans le champ d'un électron : $M = m \rightarrow h\nu_{0,min} = 4mc^2$

Ce phénomène est aussi possible entre $2mc^2$ et $4mc^2$ car l'atome peut prendre avec lui une fraction de la quantité de mouvement initiale, mais c'est très rare.

4.4.2 Section efficace dans le champ d'un noyau

Le calcul de la section efficace COMPTON était déjà sympathique, ici c'est pire. On se contentera de donner les résultats importants sans faire de calculs détaillés. La raison est que c'est compliqué notamment à cause du nuage électronique qui a des effets d'écrantage des électrons atomiques.

Lorsqu'on regarde les spectres de l'électron et du positron, ils sont décalés. On peut négliger cette différence et considérer la section efficace différentielle pour la création d'un électron à énergie cinétique T_- est identique à celle de création d'un positron à énergie cinétique $T_+ = h\nu_0 - 2mc - T_-$. Cette section efficace différentielle est symétrique par rapport à

$$\langle T \rangle = \frac{h\nu_0 - 2mc^2}{2} \quad (4.48)$$

En s'amusant un peu

$$\frac{d_a \kappa}{dT_+} = \frac{\sigma_p Z^2 P(T_+, h\nu_0, Z)}{h\nu_0 - 2mc^2} \quad \text{pour} \quad h\nu_0 > 2m_e c^2 \quad (4.49)$$

où encore

$$\frac{d_a \kappa}{dx} = \sigma_p Z^2 P(x, h\nu_0, Z) \quad (4.50)$$

avec $x = T_+ / (h\nu_0 - 2m_e c^2)$.

Intéressons-nous quelque peu à la fonction $P(x, h\nu_0, Z)$ représentée ci-contre. Il s'agit d'une fonction symétrique qui ne dépend que peu de Z : la section efficace est $\propto Z^2$. Cette fonction est lentement variable en l'énergie $h\nu_0$ du photon et est approximativement constante pour $0.2 < x < 0.8$.

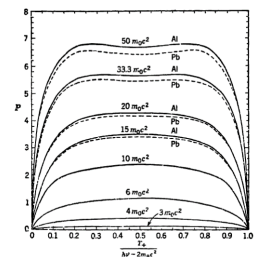


FIGURE 4.12

6. Égalité nulle car init. au repos ?

4.4.3 Section efficace totale

Si on veut la section efficace totale, il faut intégrer sur l'énergie T_+

$${}_a\kappa = \int_{T_+} d_a\kappa = \sigma_p Z^2 \int_0^{h\nu_0 - 2mc^2} \frac{PdT_+}{h\nu_0 - 2mc^2} \quad (4.51)$$

$$= \sigma_p Z^2 \int_0^1 Pd\left(\frac{T_+}{h\nu_0 - 2mc^2}\right) \quad (4.52)$$

$$= \sigma_p Z^2 \langle P \rangle \quad (4.53)$$

où $\langle P \rangle$ est la valeur moyenne de P . Celle-ci dépend très peu de Z est est une fonction lentement croissante de $h\nu_0$ avant de devenir constante à grande énergie (>100 MeV) à cause de l'écrantage.

4.4.4 Section efficace dans la champ d'un électron

Le calcul est très compliqué mais on peut montrer que

$${}_a\kappa_{triplet} = \sigma_p Z \langle P \rangle_{triplet} \quad \text{pour} \quad h\nu_0 > 4m_e c^2 \quad (4.54)$$

et donc que

$$\frac{{}_a\kappa_{triplet}}{{}_a\kappa} \simeq \frac{1}{CZ} \quad (4.55)$$

où C est un paramètre seulement fonction de $h\nu_0$. Ce qui est important c'est que la création de paire dans le champ des électrons ne contribue que peu à la section efficace totale de création de paire sauf pour les matériaux à Z petit

4.4.5 Direction d'émission de la paire électron-positron

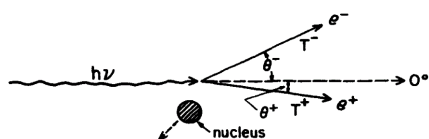


FIGURE 4.13

Pour des photons d'énergie $h\nu_0$ largement supérieur à l'énergie de seuil, les électrons et positrons sont fortement émis vers l'avant. Leur angle d'émission moyen relatif à la direction d'origine du photon vont grossièrement (rad.)

$$\langle \theta \rangle \simeq \frac{mc^2}{\langle T \rangle} \quad (4.56)$$

4.4.6 Phénomène consécutif à la création de paire et photodésintégration du noyau

Phénomène consécutif à la création de paire

Très brièvement, le positron s'annihile avec un électron (au repos) lorsqu'il traverse la matière mais avant ça il ralenti car les collisions sont nettement plus probables que l'annihilation. Cette dernière se produit le plus souvent lorsque le positron est *quasi au repos* et deux photons de 511 keV sont produits à 108° l'un de l'autre.

Photodésintégration du noyau

Le photon est absorbé par un noyau et une particule est émise (un photon ou une particule légère (p, n, α , ...)) mais il faut une énergie entre 8 et 20 MeV(!).

4.4.7 Comparaison des différents effets

Commenter le graphique est une bonne question d'examen. Voir notes, slide 70 (beaucoup à dire, je n'ai pas le temps de le faire pour le moment).

4.5 Coefficient d'atténuation

Nous venons de voir trois processus d'interaction d'un photon dans la matière et leurs sections efficaces

1. Effet photoélectrique : ${}_a\tau$
2. Effet COMPTON : ${}_a\sigma = Z\sigma$
3. Création de paire : ${}_a\kappa$

où ${}_a$ signifie atomique. Les autres processus étant négligeable, la section efficace totale n'est que la somme de ces trois effets

$${}_a\mu = {}_a\tau + {}_a\sigma + {}_a\kappa \quad (4.57)$$

La probabilité qu'un photon ait une interaction dans une cible mince de densité N et d'épaisseur dx vaut ${}_a\mu N dx$. Pour un faisceau monocinétique de I photons par unité de temps, le taux de collision vaut $I {}_a\mu N dx$. La variation dI d'intensité après avoir quitté la cible vaut alors $dI = -I {}_a\mu N dx$. Pour une cible finie et un faisceau initial perpendiculaire à la cible de I_0 particules, l'intensité après le passage dans la cible est

$$I = I_0 \exp\{-{}_a\mu N l\} \quad (4.58)$$

où $\mu = {}_a\mu N$ est le **coefficient linéique d'atténuation** (m^{-1}) qui nous informe sur la *fréquence des collisions*.

4.5.1 Géométrie à faisceau étroit

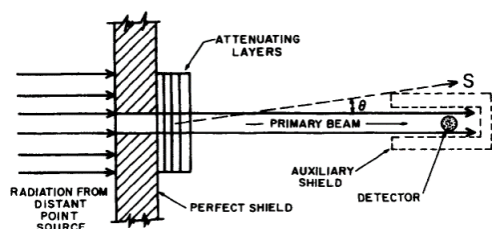


FIGURE 4.14

Pour vérifier cette loi, il faut utiliser une *géométrie à faisceau étroit* empêchant les qui empêche les particules primaires déviées et les secondaires d'attendre le détecteur (on ne veut pas qu'un électron arraché à la cible soit détectée). Pour se faire il faut une grande distance entre la source et l'atténuateur, de même entre l'atténuateur et le détecteur et le faisceau doit recouvrir tout le détecteur uniformément.

De même, on utilise un blindage devant l'atténuateur pour stopper les rayons incident exceptés ceux passant par l'ouverture et un blindage autour du détecteur pour stopper les rayons X ou γ .

4.5.2 Coefficient massique d'atténuation

On définit le **coefficient massique d'atténuation** comme le rapport ρ/μ ($\text{m}^2.\text{kg}^{-1}$). Il s'agit du quotient de dI/I par ρdI où dI/I est la fraction de particules indirectement ionisantes qui subissent des interactions le long de la distance dl parcourue dans un matériau de masse volumique ρ . Il s'agit du coefficient **le plus important**.

Il s'agit d'un coefficient global qui prend en compte les interactions des particules dans la matière sans préciser la nature de l'interaction. Ils sont directement proportionnel à la section efficace et ne dépendent **pas** de la nature de la cible!

Si le matériau contient plusieurs espèces atomiques, on somme les probabilités d'interaction de chaque type d'atomes. Le coefficient massique d'atténuation total est alors donné par

$$\left(\frac{\mu}{\rho}\right) = \left(\frac{\mu}{\rho}\right)_1 w_1 + \left(\frac{\mu}{\rho}\right)_2 w_2 + \dots \quad (4.59)$$

où w_i sont les fractions massiques des différentes espèces d'atomes.

4.5.3 Coefficient de transfert massique d'énergie

Le coefficient d'atténuation massique mesure le nombre moyen d'interaction entre un photon et la matière, il permet donc d'évaluer la fréquence des collisions. Souvent on s'intéresse à l'énergie déposée "localement"⁷. On définit alors le **coefficient de transfert massique d'énergie** μ_{tr}/ρ . On le définit aussi comme⁸

$$\frac{\mu_{tr}}{\rho} = f_{ph} \frac{\tau}{\rho} + f_C \frac{\sigma}{\rho} + f_{pn} \frac{\kappa_n}{\rho} + f_{pe} \frac{\kappa_e}{\rho} \quad (4.60)$$

avec f_i , les fractions d'énergie du photon transférées sous forme d'énergie cinétique à des particules chargées pour chaque processus. Pour les trois processus étudiés

1. Effet photoélectrique

$$f_{ph} = 1 - \frac{E_X}{E} \quad (4.61)$$

où E_X est l'énergie moyenne des photons de fluorescence. Tout l'énergie est cédée à l'électron, sauf celle cédée au rayon X .

2. Effet COMPTON

$$f_C = 1 - \frac{\langle E_1 \rangle + E_X}{E} \quad (4.62)$$

avec $\langle E_1 \rangle$ l'énergie du photon diffusé. Il s'agit de (ce qui est émis)-(ce qui est diffusé). Notons que le E_X peut être négligé en pratique.

3. Création de paire

$$f_{pn} = 1 - \frac{2mc^2}{E}, \quad f_{pe} = 1 - \frac{2mc^2 + E_X}{E} \quad (4.63)$$

(Tout)-(énergie servant à créer la paire). Ici on ne peut pas négliger le rayon X car ça dépend où s'est formée la paire (alors que COMPTON concernait les électrons moins liés).

Une fraction de l'énergie cinétique emportée par les particules chargées mises en mouvement lors des interactions des particules primaires avec le matériau peut ne pas être absorbée localement. Une partie de leur énergie peut alors être émise sous forme de rayonnement de freinage (surtout pour des électrons secondaires d'énergie élevée). Il faut alors corriger le précédent coefficient pour tenir compte de ces rayonnements

$$\frac{\mu_{en}}{\rho} = (1 - g) \frac{\mu_{tr}}{\rho} \quad (4.64)$$

où g est la fraction de l'énergie des particules secondaires chargées perdue sous la forme de rayonnement de freinage dans le matériau. Ceci n'a de différence significative que pour des γ d'énergie élevés que pour provoquer le rayonnement de freinage (surtout matériau à Z élevé).

Le schéma 90 est une bonne question d'examen pour s'assurer que tout est clair, il n'est pas commenté ici.

7. Ici quasi uniquement dues aux effets des électrons produits.

8. Voir slide 84 pour plus de détails, peu de notes