



ECOLE
POLYTECHNIQUE
DE BRUXELLES

UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES

SYNTHÈSE

Physique nucléaire PHYS-H-408

Auteur :
Nicolas ENGLEBERT

Professeur :
Pierre DESCOUVEMENT

Année 2016 - 2017

Appel à contribution

Synthèse Open Source



Ce document est grandement inspiré de l'excellent cours donné par Pierre DESCOUVEMENT à l'EPB (École Polytechnique de Bruxelles), faculté de l'ULB (Université Libre de Bruxelles). Il est écrit par les auteurs susnommés avec l'aide de tous les autres étudiants et votre aide est la bienvenue ! En effet, il y a toujours moyen de l'améliorer surtout que si le cours change, la synthèse doit être changée en conséquence. On peut retrouver le code source à l'adresse suivante

<https://github.com/nenglebert/Syntheses>

Pour contribuer à cette synthèse, il vous suffira de créer un compte sur *Github.com*. De légères modifications (petites coquilles, orthographe, ...) peuvent directement être faites sur le site ! Vous avez vu une petite faute ? Si oui, la corriger de cette façon ne prendra que quelques secondes, une bonne raison de le faire !

Pour de plus longues modifications, il est intéressant de disposer des fichiers : il vous faudra pour cela installer \LaTeX , mais aussi *git*. Si cela pose problème, nous sommes évidemment ouverts à des contributeurs envoyant leur changement par mail ou n'importe quel autre moyen.

Le lien donné ci-dessus contient aussi un README contenant de plus amples informations, vous êtes invités à le lire si vous voulez faire avancer ce projet !

Licence Creative Commons

Le contenu de ce document est sous la licence Creative Commons : *Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International (CC BY-NC-SA 4.0)*. Celle-ci vous autorise à l'exploiter pleinement, compte- tenu de trois choses :



1. *Attribution* ; si vous utilisez/modifiez ce document vous devez signaler le(s) nom(s) de(s) auteur(s).
2. *Non Commercial* ; interdiction de tirer un profit commercial de l'œuvre sans autorisation de l'auteur
3. *Share alike* ; partage de l'œuvre, avec obligation de rediffuser selon la même licence ou une licence similaire

Si vous voulez en savoir plus sur cette licence :

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Merci !

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Historique	1
1.2	Unité, ordre de grandeur	2
1.3	Structure du nucléon	2
1.4	Types de particules (et antiparticules)	3
1.4.1	Les baryons (spin 1/2)	3
1.4.2	Les mésons (spin 0)	3
1.5	Types de forces	4
2	Systèmes nucléon-nucléon	5
2.1	Formalisme de l'isospin	5
2.1.1	Définition	5
2.1.2	Isospin du noyau	6
2.2	Le deuton	7
2.3	Systèmes de deux nucléons	8
2.4	Interaction nucléon-nucléon	9
3	Propriétés générales des noyaux	11
3.1	Notations	11
3.2	Masses et énergies de liaison	11
3.2.1	Formule de masse : modèle de la goutte liquide	13
3.3	Stabilité du noyau	15
3.3.1	Durée de vie des noyaux	16
3.4	Nombre "magiques"	17
3.5	Densité et rayons nucléaires	17
3.6	Densité et rayons nucléaires	18
3.7	Moments multipolaires	20
3.7.1	Moment quadrupolaire électrique	20
3.7.2	Moment dipolaire magnétique	20
4	Décroissances nucléaires	21
4.1	Généralités	21
4.2	Notion de largeur	22
4.3	Règle d'or de Fermi	23
5	Radioactivité α	25
5.1	Définitions et conservation de l'énergie	25
5.2	Conditions de décroissance α	25
5.3	Durée de vie - effet tunnel	26

5.4	Conservation du moment cinétique	27
-----	--	----

Chapitre 1

Introduction

1.1 Historique

Le premier modèle nucléaire a été proposé par THOMPSON en 1904 : le modèle du *plumb-pudding* qui voit l'atome comme formé d'une charge positive et des électrons¹. C'est en 1911 que RUTHERFORD établit l'existence du noyau. En bombardant une feuille d'or de particules α il a remarqué que peu d'entre elles sont déviées, confirmant la présence d'une charge positive dans un faible volume.

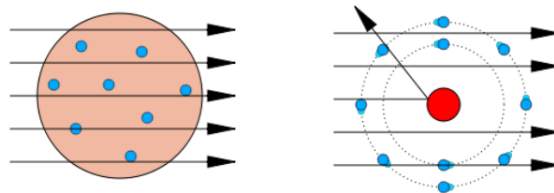


FIGURE 1.1 – A gauche le modèle de THOMPSON et à droite celui de RUTHERFORD.

En 1913, BOHR annonça que les électrons gravitent autour du noyau et c'est de nouveau RUTHERFORD qui en 1919 établit la *réaction de transfert*



Un an plus tard, en 1920, EDDINGTON suggère que cette relation prend place dans les étoiles. La découverte du neutron vient en 1932 par CHADWICK



Celle-ci résulte d'un rayonnement très pénétrant et met en évidence la structure du noyau en protons et neutrons.

Peu d'entre-elles étaient déviées, et pourtant la densité nucléaire est très importante.

1. Découvert eux en 1897.

1.2 Unité, ordre de grandeur

La taille typique d'un noyau est de 10^{-15} m, beaucoup plus petit que l'atome qui a une taille de l'ordre de l'angström ($1\text{\AA} = 10^{-10}$ m), ce qui leur donne des densités bien différentes

Calculons la densité nucléaire. La masse d'un atome s'exprime

$$m_{at} = m_N + m_E \approx m_N \quad (1.3)$$

Connaissant les tailles respectives, on sait que $\rho_N/\rho_A \approx 10^{15}$ et donc

$$\rho_N \approx 10^{15} \text{ g.cm}^{-3}, \quad \rho_A \approx 1 \text{ g.cm}^{-3} \quad (1.4)$$

Notons que la densité nucléaire ρ_N est propre aux étoiles à neutrons.

L'énergie typiquement utilisée est celle d'1 MeV, soit 10^6 eV ou encore $1.602 \cdot 10^{-13}$ J. Les trois relations suivantes permettent de retrouver ces deux unités par simple multiplication

1. Masse : $m \rightarrow mc^2$ (énergie)
2. Temps : $t \rightarrow tc$ (longueur)
3. Impulsion : $p \rightarrow pc$ (énergie)

Certaines valeurs sont toute de même intéressantes à retenir, comme l'énergie de masse de l'électron $m_e c^2 = 0.511$ MeV de même pour sa charge $e^2/4\pi\epsilon_0 = \alpha\hbar c$ où α est la constante de structure fine

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137} \quad (1.5)$$

Calculons l'ordre de grandeur de l'énergie d'une réaction $p + {}^{12}\text{C}$, dont l'atome possède un rayon $r = 5$ fm. On en tire

$$V = \frac{z_1 z_2 e^2}{r} = \frac{1.6 * 1.44}{5} \approx 16 \text{ MeV}, \quad V_{cent} = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{l(l+1)}{r^2} = 20.9 * \frac{2}{25} \approx 2 \text{ MeV} \quad (1.6)$$

où nous avons considéré $l = 1$.

1.3 Structure du nucléon

Le nucléon est un fermion, son spin vaut donc 1/2. De plus, comme sa densité de charge n'est pas constante, il ne s'agit pas d'une particule élémentaire. Cependant, nous avons que

$$\begin{cases} \int \rho_p(r) dr = 1 \\ \int \rho_n(r) dr = 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

Il est alors possible de déterminer le rayon de charge du proton

$$\langle r^2 \rangle_p = \int \rho_p(r) r^2 dr \Leftrightarrow \langle r^2 \rangle_p^{1/2} = 0.87 \text{ fm} \quad (1.8)$$

Le fait que le neutron ne soit pas une particule élémentaire a poussé à introduire le quark (de spin 1/2) : le quark *up* d'une charge de $2/3e$ et le *down* d'une charge de $-e/3$. Un proton est alors le mélange de quarks *uud* alors que le neutron est *udd*.

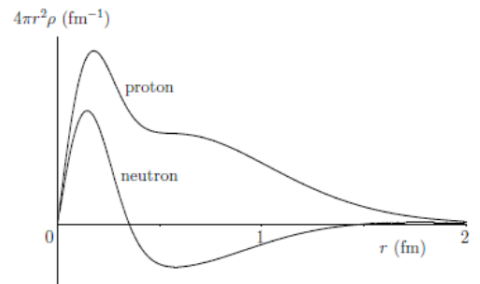


FIGURE 1.2

1.4 Types de particules (et antiparticules)

Il existe deux grand types de particules : les *leptons* et les *hadrons*.

1. Les leptons sont des particules élémentaires de charges $-e$ et de spin $1/2$
 - $e^-, \mu, \tau + \nu$
2. Les hadrons sont composés de quarks (u, d, s, c, b, t)
 - Les *baryons* sont formés de 3 quarks (comme le nucléon)
 - Les *mésos* sont formés d'un quark et d'un antiquark (comme le pion)

1.4.1 Les baryons (spin $1/2$)

Ceux-ci sont formés de trois quarks parmi u, d et s . Le couplage de deux spins $1/2$ impose que S_{12} soit 0 ou 1 (deux possibilités). L'ajout d'un troisième spin $1/2$ augmente le nombre de possibilités à six, il y a donc huit particules possibles.

Le principe d'exclusion de Pauli interdit les combinaisons de quarks uuu, ddd ou sss car si trois particules sont du mêmes types, elles doivent avoir des états différents ce qui n'est pas le cas ici.

Considérons le vecteur cinétique $\vec{j}_1 = (j_{1x}, j_{1y}, j_{1z})$ avec $j_1^2 = j_{1x}^2 + j_{1y}^2 + j_{1z}^2$. L'opérateur moment cinétique est alors défini par son application sur le *ket* $|jm\rangle$: $J_1^2 |jm\rangle = j(j+1) |jm\rangle$.

Il est possible de coupler le moment cinétique $\vec{J} = \vec{j}_1 + \vec{j}_2$

$$\vec{J}^2 |JM\rangle = J(J+1 - |JM\rangle) \quad \text{où } |j_1 - j_2| \leq J \leq j_1 + j_2 \quad (1.9)$$

Par exemple, pour l'électron de moment cinétique l et de spin $1/2$, nous avons que $|l - 1/2| \leq j \leq l + 1/2$. Tentons de comprendre les possibilités de baryons en considérant le couplage de deux nucléons

$$\left. \begin{array}{l} s_n = 1/2 \\ s_p = 1/2 \end{array} \right\} \rightarrow S_{12} = 0, 1 \quad \text{car} \quad 0 \leq S_{12} \leq 1 \quad \text{et} \quad S_{12} \in \mathbb{Z} \quad (1.10)$$

Effectuons maintenant le couplage du troisième spin $1/2$. Comme $-j \leq m \leq j$, nous avons $2j + 1$ possibilités. Ainsi pour $S_{12} = 0, 1$, $M_S = 0$ pour $S_{12} = 0$ et $M_S = -1, 0, 1$ pour $S_{12} = 1$. L'ajout du troisième spin offre donc six nouvelles possibilités.

1.4.2 Les mésons (spin 0)

Ceux-ci sont formés d'un quark et d'un antiquark parmi u, d et s ce qui offre neuf particules possibles (dont le kaon K et le pion π). Ils ont une durée de vie de l'ordre de 10^{-8} s.

1.5 Types de forces

Il existe quatre types de forces

1. Nucléaire forte, attractive et de courte portée
2. Nucléaire faible, de portée... faible
3. Électromagnétique, de portée infinie
4. Gravitationnelle, de portée infinie. Bien que son amplitude soit très faible, les masses énormes (comme la masse terrestre) compense ceci.

L'hamiltonien d'un noyau s'écrit

$$H = \sum_i T_i + \sum_{ij} V_{ij} \quad (1.11)$$

où le premier terme est l'énergie cinétique et le second terme l'interaction nucléon-nucléon composée de deux termes : $V_{ij} = V_N + V_C$ où V_N est d'origine nucléaire (pas connue exactement même si on le sait attractif et de courte portée) et V_C l'origine coulombienne (nulle pour un neutron-neutron ou neutron-proton et valant e^2/r pour un proton-proton).

Le problème est que ceci est difficilement résolvable même numériquement (l'interaction nucléaire n'étant pas parfaitement connue), il faudra donc recourir à l'utilisation de modèles.

Chapitre 2

Systèmes nucléon-nucléon

2.1 Formalisme de l'isospin

2.1.1 Définition

Basé sur l'évidence relative que le proton et le neutron sont semblables, HEISENBERG introduit le formalisme de l'**isospin** en 1932. Parmi les ressemblances, on retrouve

- Différence de 0.14% entre les masses : $m_n = 939.57$ MeV et $m_p = 938.27$ MeV
- Symétrie de charge $V_N^{pp} \approx V_N^{nn}$
- Indépendance de la charge $V_N^{pp} \approx V_N^{nn} \approx V_N^{np}$

Nous parlons bien évidemment ici des interaction coulombiennes. L'idée est alors de voir le **nucléon** comme une seule particule avec un isospin $t = 1/2$. Il existe alors deux projections possibles, soit deux états possibles (d'une même particule)(fonction de la charge)

$$m_t = \frac{1}{2} \text{ pour le neutron } = |n\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad m_t = -\frac{1}{2} \text{ pour le proton } = |p\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

On dénombre ainsi trois opérateurs d'isospin

$$\vec{t} = (t_x, t_y, t_z) \quad (2.2)$$

L'isospin n'est rien autre qu'un nouveau moment cinétique lié à la charge

$$\hat{q} = e \left(\frac{1}{2} - t_z \right) \quad (2.3)$$

Il vérifie donc les relations habituelles des moments cinétiques

$$t_z |n\rangle = \frac{1}{2} |n\rangle, \quad t_z |p\rangle = -\frac{1}{2} |p\rangle, \quad \vec{t}^2 |n\rangle = \frac{3}{4} |n\rangle, \quad \vec{t}^2 |p\rangle = \frac{3}{4} |p\rangle \quad (2.4)$$

On peut également définir des opérateurs éleveurs ($t_+ = t_x + it_y$) et abaisseurs ($t_- = t_x - it_y$) qui seront utiles¹ dans le cadre de la radioactivité β où un neutron est transformé en proton et inversement.

Notons que le concept d'isospin est plus général que le nucléon, on peut en parler dans d'autres types de particules (pion ou l'on associe un isospin t de 1).

1. Avec $t_+ |p\rangle = |n\rangle$ et $t_+ |n\rangle = 0$.

2.1.2 Isospin du noyau

Considérons un noyau de Z protons et N neutrons tel que $Z + N = A$. L'**isospin total** est le couplage des A moments cinétiques

$$\vec{T} = \sum_{i=1}^A \vec{t}_i \quad (2.5)$$

Soit $\vec{J} = \vec{j}_1 + \vec{j}_2 \rightarrow M = M_1 + M_2$, les projections. On a alors

$$\begin{aligned} \vec{j}_1^2 |j_1 m_1\rangle &= j_1(j_1 + 1) |j_1 m_1\rangle, & -j_1 \leq m \leq j_1 & \text{ (projection)} \\ \vec{J}^2 |JM\rangle &= J(J + 1) |JM\rangle \end{aligned} \quad (2.6)$$

où

$$|j_1 - j_2| \leq J \leq j_1 + j_2 \quad \text{et} \quad M = m_1 + m_2 \quad (2.7)$$

Pour l'isospin, nous avons $t_z = 1/2$ (neutron) et $t_z = -1/2$ (proton) et donc

$$T_z = N \frac{1}{2} + Z \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{N - Z}{2} \quad (2.8)$$

Les valeurs propres sont alors données par $T_z = \frac{N - Z}{2}$ et en comme dans la plupart des noyaux $N > Z$ on en tire que

$$\left| \frac{N - Z}{2} \right| \leq T \leq \frac{N + Z}{2} \quad (2.9)$$

Ainsi, dans le fondamental nous avons presque toujours $T = \left| \frac{N - Z}{2} \right|$. Un atome de masse A paire aura alors T entier et A impaire implique T demi-entier.

INTÉRÊT EXPÉRIMENTAL

Les noyaux miroirs sont des noyaux tel que l'on a (Z_1, N_1) et $(Z_2 = Z_1, N_2 = N_1)$, impliquant des spectres très similaires. L'isospin permet de les différencier. Par exemple ^{13}C possède 6 protons et 7 neutrons mais un isospin $T_z = +1/2$ tandis que le ^{13}N possède 7 protons et 6 neutrons et un isospin $T_z = -1/2$.

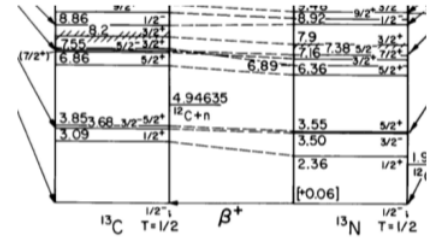


FIGURE 2.1

Hamiltonien du noyau (formalisme de l'isospin)

Dans ce formalisme, l'hamiltonien s'écrit

$$H = \sum_i T_i + \sum_{i < j} V_N(i, j) + \sum_{i < j} V_C(i, j) \quad (2.10)$$

où le premier terme est l'énergie cinétique T

$$T_i = \frac{p_i^2}{2m_N} = \frac{-\hbar^2}{2m_N} \Delta_i, \quad (2.11)$$

le second terme est le potentiel nucléaire indépendant de T

$$[V_n, T] = 0 \quad (2.12)$$

et le dernier terme est le potentiel coulombien (commun à tous les électrons), qui peut être écrit de façon tout à fait générale grâce à l'isospin.

$$V_C(i, j) = \frac{e^2}{|r_i - r_j|} \left(\frac{1}{2} - t_{iz} \right) \left(\frac{1}{2} - t_{jz} \right), \quad [V_C, T_z] = 0, \quad [V_C, T^2] \neq 0 \quad (2.13)$$

Le premier commutateur implique que T_z est un *bon* nombre quantique mais le second montre que T n'est pas rigoureusement un bon nombre quantique.

Quelques petites remarques

- $[H, J^2] = 0$ implique la quantification des niveaux d'énergie
- $[H, P] = 0$ implique que chaque niveau est soit +1, soit -1
- $[H, T^2] \approx 0$ implique un nombre quantique approximatif et pas d'état strict d'isospin

La première séance d'exercice nous illustre le calcul de T_z . Le principal intérêt de cette notion est dès lors bien de classer les différents niveaux d'énergie ^a

a. Voir slide 22 pour s'en convaincre.

2.2 Le deuton

Le deuton est un système lié formé d'un neutron et d'un proton où $T_z = 0$, soit un isotope lourd de l'hydrogène. Théoriquement J peut alors valoir 0 ou 1 mais de expérimentalement on ne trouve que la valeur non-nulle. Les mesures expérimentales sont les suivantes

$$E_B = 2.224 \text{ MeV}, \quad J = 1^+, \quad \sqrt{\langle r^2 \rangle} \approx 2.1 \text{ fm}, \quad Q = 0.286 \text{ e.fm}^2 \quad (2.14)$$

où Q est le **moment quadripolaire**. Celui-ci est lié à la déformation du noyau (seulement les protons) et se défini

$$Q_{2\mu} = e \sum_{i=1}^Z r_i^2 Y_2^\mu(\Omega_i) = e \sum_{i=1}^A \left(\frac{1}{2} - t_{iz} \right) r_i^2 Y_2^\mu(\Omega_i) \quad (2.15)$$

Il s'agit d'un OTI de rang 2 vis-à-vis de l . Nous y reviendrons plus tard. Intéressons-nous d'abord aux nombres quantiques. Vu les résultats expérimentaux, il faut trouver une combinaison donnant 1^+ .

$$\begin{aligned} S = S_p + S_n &\rightarrow s = 0 \leftrightarrow L = 1 \\ &\rightarrow s = 1 \leftrightarrow L = 0, 1, 2 \end{aligned} \quad (2.16)$$

La parité calculée via $(-1)^L$ exclu la valeur $L = 1$, seules les valeurs $L = 0, 2$ sont possibles (et $L = 0$ est dominant). Le deuton correspond alors aux valeurs $S = 1$ et $L = 0, 2$.

En partant de la relation d'incertitude $\Delta p \Delta x = \hbar = 197 \text{ MeV.fm}$, pour $\Delta x \approx 1 \text{ fm}$ on trouve $\Delta p \approx 200 \text{ MeV/c}$. L'énergie cinétique vaut donc

$$T \approx \frac{(\Delta p)^2}{2m_N} = \frac{4 * 10^4}{2 * 10^3} \approx 20 \text{ MeV} \quad (2.17)$$

Ce qui est l'énergie cinétique par nucléon. Cette énergie étant faible par rapport à l'énergie de masse du nucléon ($m_N c^2$), on utilisera l'équation de NEWTON mais il faut bien garder à l'esprit qu'il faudrait utiliser l'équation de DIRAC dans un régime relativiste. L'énergie vaut donc

$$E = \underbrace{T}_{\approx 20 \text{ MeV}} + \underbrace{V}_{\approx -22 \text{ MeV}} = -2.2 \text{ MeV} \quad (2.18)$$

où le potentiel est attractif. L'état est donc un état lié. Il est possible de calculer via l'expression de la vitesse $v = \Delta p / m_N \approx c/5$ un temps caractéristique pour une distance de 5 fm de 10^{-22} s.

2.3 Systèmes de deux nucléons

La première chose à faire lorsqu'on s'intéresse aux propriétés nucléaires et de regarder les symétries. Sachant que les nucléons sont des fermions, la fonction d'onde totale doit être antisymétrique : $P_{12}\Psi = -\Psi$ où P_{12} est l'opérateur d'échange des coordonnées spatiales, de spin et d'isospin. Il est possible d'utiliser une factorisation de ces trois composantes

$$\Psi_{LST}(\vec{r}) = \Phi_L(\vec{r}) |SM_S\rangle |TM_T\rangle \quad (2.19)$$

On utilisera alors le moment cinétique orbital relatif \vec{L} , le spin total $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$ et l'isospin total $\vec{T} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2$. Deux cas sont possibles

1. Pour $S = 1$, il s'agit de l'état *triplet* aux fonctions d'ondes symétriques
2. Pour $S = 0$, il s'agit de l'état *singlet* aux fonctions d'ondes antisymétriques

Si on définit P^σ comme l'opérateur d'échange des spins², on a

$$P^\sigma |SM_S\rangle = (-1)^{S+1} |SM_S\rangle \quad (2.20)$$

Le tout est maintenant de trouver une expression analytique de cet opérateur, qui possède les valeurs propres $(-1)^{S+1}$. Pour se faire, considérons le produit scalaire suivant : $\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 1/2(\vec{S}^2 - \vec{s}_1^2 - \vec{s}_2^2)$. On en tire

$$\begin{aligned} \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 |S = 0, M_S = 0\rangle &= \frac{1}{2} \left(0 - \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \right) |S = 0, M_S = 0\rangle = -\frac{3}{4} |0, 0\rangle \\ \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 |S = 0, M_S\rangle &= \frac{1}{4} |1, M_S\rangle \end{aligned} \quad (2.21)$$

On en tire que (rouge)

$$P^\sigma = \frac{1 + 4\vec{s}_1 \vec{s}_2}{2} = \frac{1 + \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2}{2} \quad (2.22)$$

où $\sigma = 2s$. On a bien un opérateur donnant la phase recherchée. En effet, l'application de P^σ à une fonction $S = 0, 1$ donne une phase lisse. Ce qui a été fait pour le spin peut évidemment se faire pour l'isospin, c'est la même chose

$$P^\tau = \frac{1 + \vec{\tau}_1 \vec{\tau}_2}{2} \quad (2.23)$$

Ceci était pour l'échange de spin (et isospin). Nous avons également l'**opérateur d'échange des coordonnées d'espaces** défini selon

$$P^r \Phi_L(\vec{r}) = \Phi_L(-\vec{r}) = (-1)^L \Phi_L(\vec{r}) \quad (2.24)$$

Pour échanger deux nucléons (espace, spin, isospin), on utilisera alors

$$P_{12} = P^r P^\sigma P^\tau \quad (2.25)$$

2. Il s'agit d'une notation historique où $\sigma = 2S$.

espace	spin	isospin	
+	+	-	L pair, S=1, T=0
+	-	+	L pair, S=0, T=1
-	+	+	L impair, S=1, T=1
-	-	-	L impair, S=0, T=0

TABLE 2.1

Étant des fermions, les nucléons possèdent une fonction d'onde antisymétrique. Il faut que $P_{12}\psi = -\psi$. On en tire le **principe de Pauli généralisé** (rouge) :

$$P_{12} = P^r P^\sigma P^\tau = -1 \quad (2.26)$$

En effet, l'application de P_{12} sur ψ où ψ est caractérisé par quatre nombres quantiques L, S, T donne

$$(-1)^S + 1(-1)^T + 1(-1)^L = -1 \quad (2.27)$$

Et donc

$$(-1)^{L+S+T} = -1 \quad (2.28)$$

Il s'agit d'une **règle de sélection pour le système nucléon-nucléon**.

Ainsi, en parité + (L pair), on dénombre quatre états. Le cas $T = 1, S = 0$ sont des états non liés alors que $T = 0, S = 1$ forme un état lié (deuton). En parité - (L impair), on compte quatre états non liés.

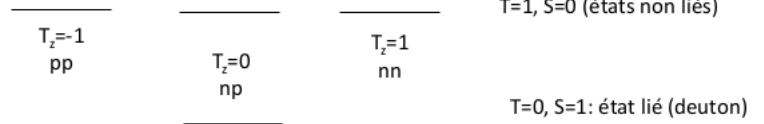


FIGURE 2.2

2.4 Interaction nucléon-nucléon

Aujourd'hui encore, cette interaction n'est pas exactement connue. Ce que l'on sait, c'est qu'elle doit respecter six lois d'invariances

1. Réflexion
2. Translation (dépend de $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2, \vec{p} = \vec{p}_1 - \vec{p}_2$)
3. Rotation
4. Invariance par rapport au temps
5. Indépendance de charge
6. $V(1, 2) = V(2, 1) = V(r_1, r_2; p_1, p_2; s_1, s_2; t_1, t_2)$

De même, le principe de Pauli généralisé doit s'appliquer

$$P_{12}\Psi_{LST}(\vec{r}) = -\Psi_{LST}(\vec{r}) \quad (2.29)$$

où $P_{12} = P^r P^\sigma P^\tau$. On donne une forme générale au potentiel $V(r)$

$$V(r) = w(r) + m(r)P^r + b(r)P^\sigma + h(r)P^\tau \quad (2.30)$$

où l'on part de données expérimentales (B, Q, μ , déphasages, ...) et on ajuste ces fonctions selon les données mesurées. Encore une fois, l'interaction nucléon-nucléon est non-connue, il n'existe que des formes que les gens ont ajustés. Souvent, on utilise des formes soit Gaussiennes, soit de WOODS-SAXON.

Voyons comment faire. Considérons un système n+p ($T_z = 0$) où L est pair. En considérant la forme générale du potentiel (central) $V(r) = w(r) + m(r)P^r + b(r)P^\sigma + h(r)P^\tau$, on trouve comme éléments de matrice

$$\begin{aligned} \langle T=0, S=1 | V | T=0, S=1 \rangle &= w(r) + m(r) + b(r) - h(r) \\ \langle T=1, S=0 | V | T=1, S=0 \rangle &= w(r) + m(r) - b(r) + h(r) \end{aligned} \quad (2.31)$$

On peut déjà remarquer que l'on obtient des potentiels différents pour $S=0$ (singlet) et $S=1$ (triplet).

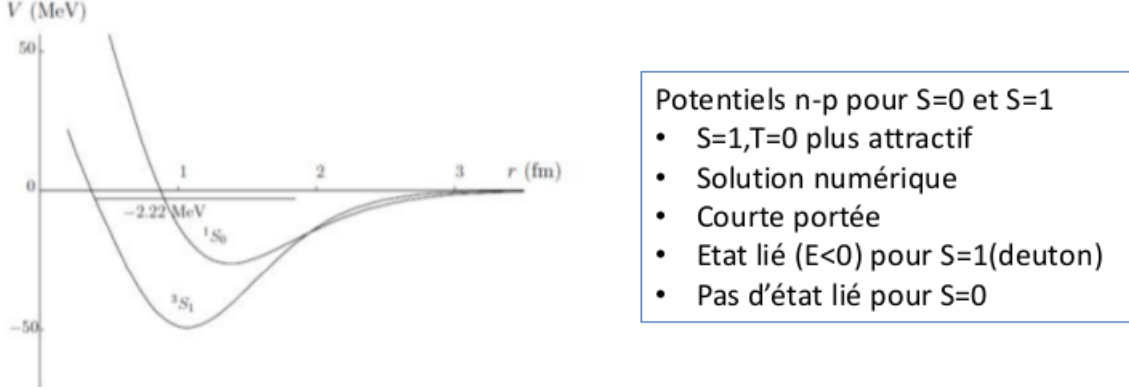


FIGURE 2.3

Pour un système $n+n$ ($T_z = +1$), $p+p$ ($T_z = -1$), L pair ($T = 0 \nabla$)

$$\langle T=1, S=0 | V | T=1, S=0 \rangle = w(r) + m(r) - b(r) + h(r) \quad (2.32)$$

Comme on retrouve le même potentiel pour les trois systèmes $T=1$, il y a invariance de la charge. Dans une interaction centrale, on peut donc dire que $\Delta S = 0$ et $\Delta L = 0$.

Il est possible de prendre en compte des termes additionnels dans l'interaction nucléon-nucléon (couplage spin-orbite, terme tensoriel, ...). On pourrait avoir *par réflexion*

$$(\vec{r}, \vec{p}, \vec{s}_1, \vec{s}_2) \rightarrow (-\vec{r}, -\vec{p}, \vec{s}_1, \vec{s}_2) \quad (2.33)$$

Par *renversement du temps*

$$(\vec{r}, \vec{p}, \vec{s}_1, \vec{s}_2) \rightarrow (\vec{r}, -\vec{p}, -\vec{s}_1, -\vec{s}_2) \quad (2.34)$$

On pourrait aussi rajouter des termes "non-centraux" comme le *spin-orbite*

$$V_{LS}(r) \vec{L} \cdot \vec{S} \quad : \quad \Delta S = 0, \pm 1, \Delta L = 0 \quad (2.35)$$

où encore des termes *tensoriels*

$$V_T(r) \vec{S}_{12} \quad \text{avec} \quad \vec{S}_{12} = [[\vec{s}_1 \otimes \vec{s}_2]^2 \otimes [\vec{r}_1 \otimes \vec{r}_2]^2]^0 \quad (2.36)$$

Ce terme respecte également les propriétés d'invariances énoncées ci-dessus. Il est responsable d'un mélange entre $L=0$ et $M=2$ dans le deuton, mais également du moment quadrupolaire du deuton.

L'interaction nucléon-nucléon n'est pas exacte, mais ajustée. Si on utilise cette expression pour un système à trois corps, on ne trouve pas exactement la valeur expérimentale de l'énergie. C'est parce que, pour des systèmes nucléaires à trois corps, il existe des forces à trois corps :

$$H = T_1 + T_2 + T_3 + V_{12} + V_{13} + V_{23} + V_{123} \quad (2.37)$$

Chapitre 3

Propriétés générales des noyaux

3.1 Notations

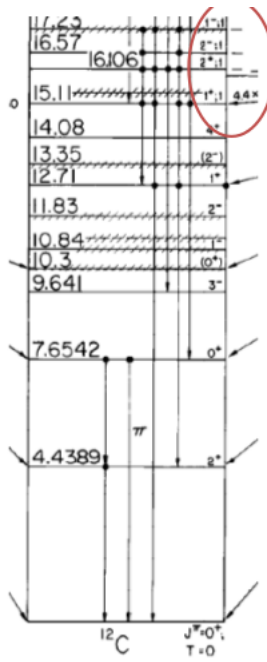


FIGURE 3.1 – Spectre du ^{12}C . Entouré l'état d'isospin $T = 1$ et "tout en bas" l'état fondamental $J = 0^+, T = 0$ (petite composante positive).

On notera un noyau avec Z protons et N neutrons (ou $A = Z + N$)

$${}^A_Z X_N \quad \text{ou} \quad {}^A_Z X \quad \text{ou} \quad {}^A X \quad (3.1)$$

Par exemple, ${}^7_3\text{Li}_4$, $Z = 3$, $N = 4$ est noté en pratique ${}^7\text{Li}$. De même, ${}^{12}_6\text{C}_6$, $Z = 6$, $N = 6$ est noté ${}^{12}\text{C}$. On parlera de bon nombres quantiques **exacts**

- Le spin total J : $[H, J^2] = 0$ (invariance par rotation)
- Projection du spin : $J_z : [H, J_z] = 0$
- Parité π : $[H, P] = 0$ (invariance par réflexion)

Il y a également le bon nombre quantique **approché**, l'isospin T : $[H, T^2] \approx 0$. Nous noterons également les niveaux $E, J^p(T)$.

3.2 Masses et énergies de liaison

Il existe deux types de masses qui sont toutes deux importantes pour déterminer la stabilité des noyaux : la masse atomique et nucléaire. Celles-ci diffèrent par la masse des électrons et des énergies de liaison et leur différence est souvent négligeable.

La **masse atomique** $M(A, Z)$ ou $M({}^A X)$ a pour unité l'unité de masse atomique uma définie par

$$1 \text{ uma} \approx 931.4940 \text{ MeV}/c^2 \quad (3.2)$$

à partir de la masse d'un atome de ^{12}C ($M(^{12}\text{C}) = 12 \text{ uma}$). Pour le proton, le neutron et l'électron :

$$m_p = 1.007\,276\,467 \text{ uma}, \quad m_n = 1.008\,664\,916 \text{ uma}, \quad m_e = 5.485\,799\,09 \times 10^{-4} \text{ uma} \quad (3.3)$$

On utilise souvent (dans les table, car plus facile à mesurer) l'**excès de masse** défini par

$$\Delta(A, Z) = [M(A, Z) - A] \text{ uma} \quad (3.4)$$

Par définition $\Delta(^{12}\text{C}) = 0$.

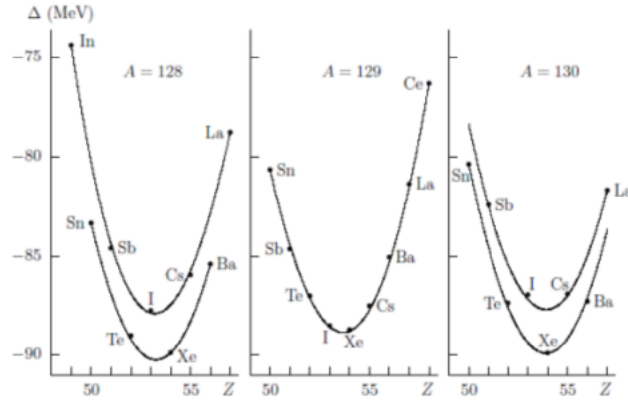


FIGURE 3.2 – Les valeurs sont négatives car la masse du noyau est inférieure à la somme des masses individuelles. Il y a des différences entre les valeurs de A pair et impair. Si A est impair, un des deux doit être pair et l'autre impair. Mais si la somme $A = N + Z$ est paire on peut avoir N, Z soit paire soit impair (noyaux pair-pair ou impair-impair). L'excès de masse constant justifie cette forme parabolique.

Les **masses nucléaires** $m(A, Z)$ ou $m(^A X)$ sont reliée à la masse atomique par

$$m(A, Z) = M(A, Z) - Zm_e + \frac{B_e(Z)}{c^2} \quad (3.5)$$

où $B_e(Z)$ est l'énergie de liaison électronique valant à peu près $15.7 * Z^{7/3}$ eV (négligeable). La masse nucléaire est donc la masse atomique diminuée de "tout ce qui concerne les électrons" (soit leur masse et énergie de liaison).

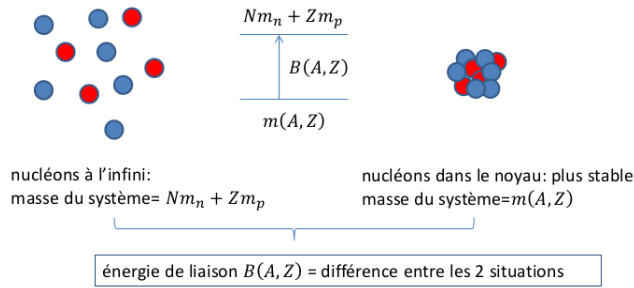


FIGURE 3.3

L'**énergie de liaison nucléaire** est définie

$$\begin{aligned} B(A, Z) &= [Nm_n + Zm_p - m(A, Z)]c^2 \\ &= N\Delta(n) + Z\Delta(p) - \Delta(A, Z) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Cette énergie B est positive pour tous les noyaux connus, c'est-à-dire qu'ils ne se désintègrent pas en N neutrons et Z protons.

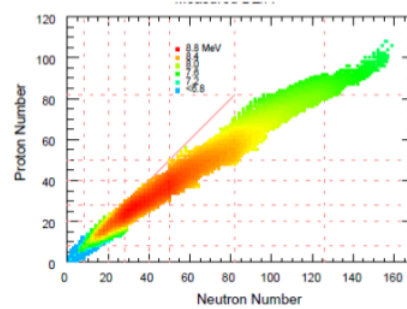
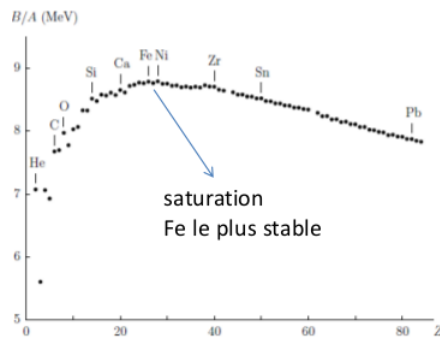


FIGURE 3.4

De façon presque systématique, on peut dire que

$$\frac{B(A, Z)}{A} \approx (8.3 \pm 0.5) \text{ MeV} \quad (3.7)$$

Ceci est illustré sur la figure ci-dessus. A partir de $Z = 20$, 8MeV est vraiment l'énergie moyenne pour l'énergie de masse (s'il y a un chiffre à retenir, c'est lui). A gauche du fer, on gagne de l'énergie de liaison si on ajoute des nucléons : production d'énergie dans les étoiles, il s'agit de la fusion. On ajoute en effet aux éléments légers un proton ou une particule alpha et on gagne en liaison ce qui produit un rayonnement. Le ${}^4\text{He}$ sort de cette tendance, étant très lié : il s'agit de la particule α qui possède une grande énergie de liaison (7.1 MeV) (par contre le deuton est lui très peu stable (1.1 MeV)).

3.2.1 Formule de masse : modèle de la goutte liquide

Le modèle de la goutte liquide est une paramétrisation empirique. Il s'agit de considérer que le noyau est une goutte liquide possédant certaines propriétés. Il s'agit d'un modèle macroscopique qui ne tient pas compte des effets quantiques mais qui permet de pas mal décrire l'énergie de liaison (pour les noyaux stables!).

Selon ce modèle, l'énergie de liaison totale est donnée par

$$B(A, Z) = a_V A - a_S A^{2/3} - \frac{a_C Z(Z-1)}{A^{1/3}} - \frac{a_A (N-Z)^2}{A} + \delta \quad (3.8)$$

Cette relation permet de donner un ordre de grandeur aux énergies de liaison. Il contient cinq termes

1. Terme de volume : plus il y a de nucléons, plus B grandit. On considère ici que chaque nucléon interagit avec tous les autres.
2. Terme de surface : il s'agit de la première correction. Les nucléons à la surface interagissent moins que ceux à l'intérieur qui ont "plus de voisins". La matière nucléaire est incompressible, le volume d'un noyau est proportionnel au nombre de nucléon A . Ceci signifie que le rayon du noyau est proportionnel à $A^{1/3}$ et donc que $S \propto A^{2/3}$.
3. Terme coulombien incluant chaque paire de protons
4. Terme d'asymétrie, proportionnel à la différence entre les deux (le principe de PAULI favorise en effet $Z = N$).
5. Énergie d'appariement (favorise les paires de nucléons).

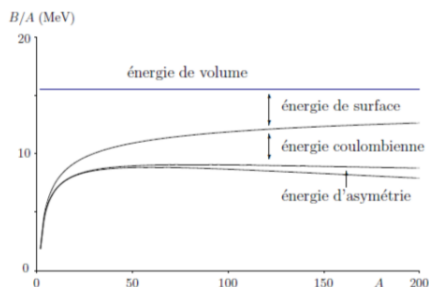


FIGURE 3.5

Tous ces paramètres sont obtenus à partir d'ajustements. Il existe des formules plus compliquées pour des noyaux instables (d'autres effets sont pris en compte). En utilisant l'expression de $B(A, Z)$, on retrouve bien la dépendance en Z^2 à A constant. Parmi les noyaux stables, 166 noyaux sont pair-pair, 55 pair-impair et 4 impair-impair (${}^2\text{H}$, ${}^6\text{Li}$, ${}^{10}\text{B}$ et ${}^{14}\text{N}$).

Il est possible de retrouver la parabole de masse à partir de ce modèle (soit la variation de fonction de Z , à A fixe). Petit calcul d'optimisation

$$\left. \begin{aligned} B(A, Z) &= [Nm_n + Zm_p - m(A, Z)]c^2 \\ B(A, Z) &= a_V A - a_S A^{2/3} - \frac{a_C Z(Z-1)}{A^{1/3}} - \frac{a_a (N-Z)^2}{A} + \delta \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{dm}{dZ} = 2Z \frac{a_C}{A^{1/3}} - \frac{2(A-2Z)a_a}{A} = 0 \quad (3.9)$$

où nous avons fait les hypothèses que $m_n \approx m_p$ et $2Z-1 \approx 2Z$. On en déduit que

$$Z_{min} \approx \frac{A}{2} \frac{1}{1 + \left(\frac{a_C}{4a_a}\right) A^{2/3}} \approx \frac{A}{2} \frac{1}{1 + 0.0078 A^{2/3}} \quad (3.10)$$

Le rapport Z_{min}/A diminue quand A augmente (s'écarte de $1/2$) :

$$m(A, Z) \approx m(A, Z_{min}) + c \times (Z - Z_{min})^2 + \dots \quad (3.11)$$

On retrouve bien la forme parabolique.

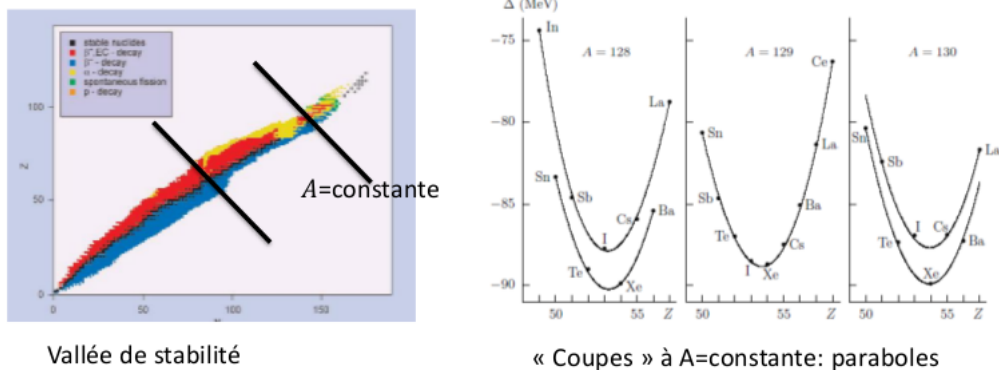


FIGURE 3.6 – À gauche, les points noirs représentent la vallée de la stabilité. En rouge il s'agit des éléments riches en protons et en bleus ceux riches en neutrons. En faisant une coupe en se plaçant sur un des points noir, on obtient les paraboles représentées à droite.

Intéressons-nous aux **énergies de séparation**

- Un neutron

$$S_n = (m(A-1, Z) + m_n - m(A, Z))c^2 = B(A, Z) - B(A-1, Z) \quad (3.12)$$

- Deux neutrons

$$S_n = B(A, Z) - B(A-2, Z) \quad (3.13)$$

- Un proton

$$S_P = B(A, Z) - B(A-1, Z-1) \quad (3.14)$$

Il s'agit de l'énergie qu'il faut fournir au système pour enlever un neutron (proton). Trois cas peuvent se présenter

1. $S > 0$: le noyau est stable en particules
2. $S < 0$: le noyau est instable en particules
3. $S = 0$: le noyau est à la limite de stabilité (*driplines*)

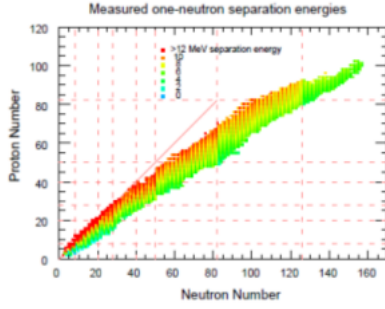


FIGURE 3.7

Lorsque l'on "coupe" un noyau, la masse peut être supérieure ou inférieure. Dans le cas où la masse est plus grande, le noyau initial était plus stable car il possédait une masse plus petite. Dans le cas où la masse coupée est plus petite, le noyau initial est instable et il aura tendance à émettre un neutron. Sur le graphique ci-contre, il s'agit d'un code couleur pour les énergies de séparation d'un neutron. Le *vert* et le *bleu* correspondent à de petites énergies de liaison. Le neutron est donc de moins en moins lié et il faut de moins en moins d'énergie pour l'éliminer et converger vers une situation stable.

3.3 Stabilité du noyau

Il existe principalement deux types d'instabilité : l'instabilité en **particule** et par **émission** β . Dans le premier cas¹, A change et cette instabilité est en générale très courte ($\approx 10^{-21}$ s) alors que dans le second cas² A est constant (mais N, Z changent) et les durées de vie sont variables (10^{-6} s à 10^{15} ans).

La *stabilité en particule* s'obtient s'il n'existe pas de sous-système (2,3,4, ...particules) dont l'énergie totale est plus basse. Considérons un noyau (A, Z) et différents mode de dissociation

$$(A, Z) \rightarrow (A_1, Z_1) + (A_2, Z_2) \quad (3.15)$$

où $A = A_1 + A_2$ et $Z = Z_1 + Z_2$. Le noyau sera stable en particules si

$$\begin{aligned} m(A, Z) &< m(A_1, Z_1) + m(A_2, Z_2) & \forall (A_1, Z_1) \\ B(A, Z) &> B(A_1, Z_1) + B(A_2, Z_2) & \forall (A_1, Z_1) \end{aligned} \quad (3.16)$$

Le *slide 43* donne quelques arrangement possible pour la dissociation du ${}^7\text{Li}$. En regardant les différents cas on se rend compte qu'aucune n'est possible : le ${}^7\text{Li}$ est donc stable en particules. On remarque ici que toutes les différences de masses étaient négatives ce qui implique la stabilité (masse initiale plus petite que la masse finale).

Si cette différence est par contre un nombre **positif**, le noyau est instable en particules. C'est le cas pour le ${}^8\text{Be}$

$$m({}^8\text{Be}) - 2 * m({}^4\text{He}) = 0.092 \text{ MeV} \quad (3.17)$$

La masse du ${}^4\text{He}$ est plus petite car le rapport B/A est grand, le noyau est instable et possède une durée de vie de 10^{-16} s. Le noyau ${}^8\text{Be}$ est donc en dehors de la vallée de stabilité. De même, il n'existe pas de noyaux stables pour $A = 5$. Regardons les deux dissociations suivantes

$${}^5\text{He} \rightarrow \alpha + n, \quad {}^5\text{Li} \rightarrow \alpha + p \quad (3.18)$$

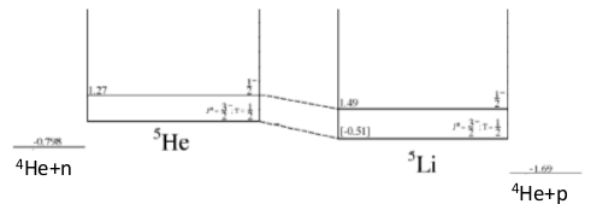


FIGURE 3.8

1. Il s'agit du cas précédemment discuté où le nombre de nucléons changeait.
2. Les atomes à l'extrémité de la vallée de la stabilité sont instable par émission β .

En calculant leurs différences de masses

$$m(^5\text{He}) - m(^4\text{He}) - m(n) = 0.0798 \text{ MeV}, \quad m(^5\text{Li}) - m(^4\text{He}) - m(p) = 1.69 \text{ MeV} \quad (3.19)$$

On voit donc qu'ils ont une masse initial plus grande que les produits de dissociation : ^5He et ^5Li n'existent pas, il se désintègrent quasi directement. Le fondamental apparaît donc comme une résonance (temps de vie de $\approx 10^{-20}\text{s}$).

Il existe d'autres types de décroissance

- Radioactivité α : $m(A, Z) - m(A-4, Z-2) - m_\alpha > 0$ pour $A \gtrsim 150$
- Fission (symétrique) : $M(A, Z) - 2m(A/2, Z/2) > 0$ pour $A \gtrsim 190$
- Radioactivité β : pour A donné, un seul Z est stable
 - β^- (neutron converti en proton et émission d'un électron) : $(A, Z) \rightarrow (A, Z+1) + e^- + \bar{\nu}$
 - β^+ (proton converti en neutron et émission d'un positron) : $(A, Z) \rightarrow (A, Z-1) + e^+ + \nu$
- Radioactivités *exotiques* : $2p$, ^{14}C , double β , ...

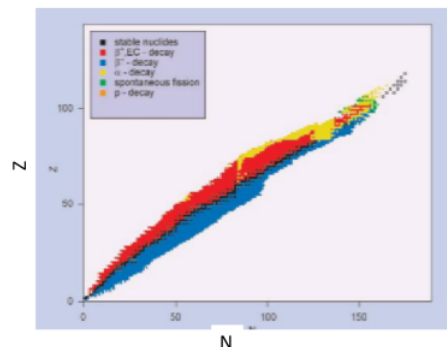


FIGURE 3.9

Sur la figure ci-dessus à droite, en *noir* sont représentés les noyaux stables, en *bleu* ceux qui ont un excès de neutron (et donc désintégration β^-), en *rouge* ceux qui ont un excès de proton (et donc désintégration β^+). Dans la zone des noyaux lourds, on retrouve en *jaune* la désintégration α . Il faut en effet être dans la zone des noyaux lourds pour gagner de l'énergie (ou perdre de la masse, c'est identique) et émettre de α . Les quelques points *verts* représentent la fission.

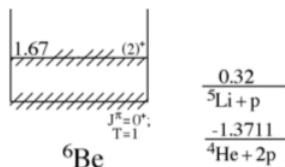


FIGURE 3.10

Regardons deux radioactivités *exotiques*, en commençant par la désintégration $2p$ dans le ^6Be . Celui-ci est stable par rapport à $^5\text{Li} + p$ mais instable par rapport à $^4\text{He} + p + p$: il est donc stable par rapport à la désintégration en un proton, mais instable par rapport à celle à deux protons.

Un autre cas un peu spécial est la radioactivité double β , la décroissance β étant défavorisée

$$^{48}\text{Ca} (Z = 20) \rightarrow ^{48}\text{Ti} (Z = 22) + 2e^- + 2\bar{\nu} \quad (3.20)$$

Ce phénomène est cependant peu fréquent, la durée de vie du ^{48}Ca étant de 5×10^{19} ans.

3.3.1 Durée de vie des noyaux

Le graphique ci-dessus résume ce que nous venons de voir, en terme de durée de vie. Notons que la droite $N = Z$ n'est vraie que jusqu'à 20 neutrons.

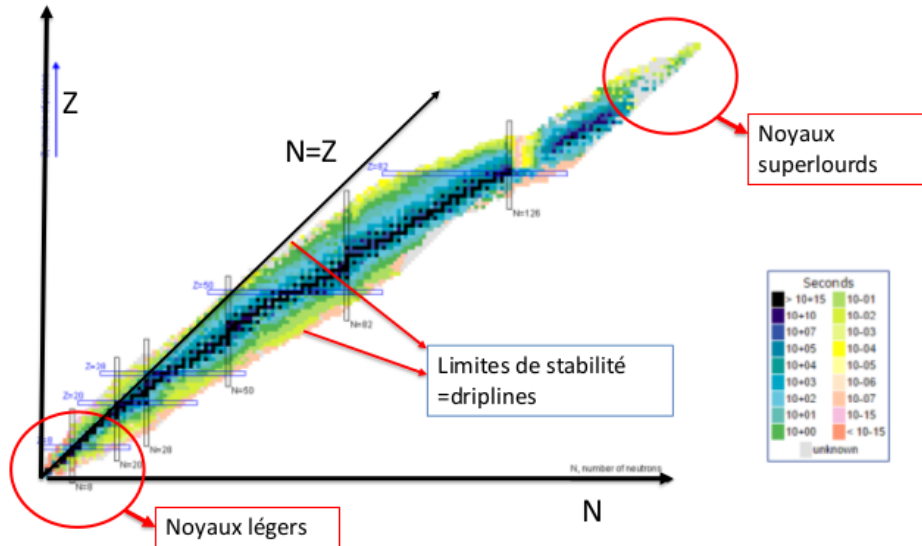


FIGURE 3.11

3.4 Nombre "magiques"

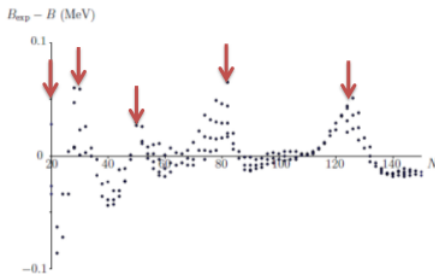


FIGURE 3.12

Nous avons utilisé un modèle macroscopique (modèle de la goutte liquide) pour déterminer l'énergie de liaison. En comparant ces résultats théoriques avec les expérimentaux, il y a des différences importantes pour $N = 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126$. On appelle ces nombres les *nombres magiques* qui possèdent des propriétés remarquables au niveau de l'énergie de liaison du rayon et de l'énergie d'excitation. Notons qu'il existe aussi des nombres *doublements magiques* qui, comme les *magiques* doivent être expliqués par des modèles nucléaires (effets quantiques : modèle en couche).

3.5 Densité et rayons nucléaires

Il existe principalement quatre types de noyaux

1. *Exotiques* : situés près de la limite de stabilité ($S_n = 0, S_p = 0$: *drip lines*)
2. *Halo* : Rayon beaucoup plus grand que prédit par la loi en $A^{1/3}$
3. *Transuraniens* : charge $Z > 92$ (Uranium). Ils n'existent pas dans la nature et sont produits en laboratoire (actuellement jusque $Z = 118$).
4. *Superlourds* : hypothétiques, proche de $Z = 126$ le nombre magique suivant).

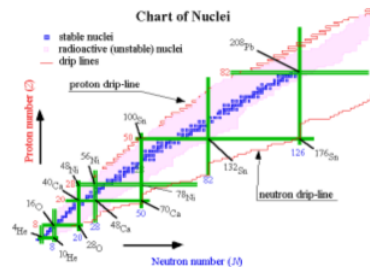


FIGURE 3.13

3.6 Densité et rayons nucléaires

Peu de notes dans cette section³. Il existe deux types de densité ($[L^{-3}]$)

1. Matière (masse)

$$\rho_m(\vec{r}) = \left\langle \Psi^{JJ\pi} \left| \sum_{i=1}^A \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \right| \Psi^{JJ\pi} \right\rangle \quad (3.21)$$

2. Charge

$$\rho_c(\vec{r}) = \left\langle \Psi^{JJ\pi} \left| \sum_{i=1}^Z \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \right| \Psi^{JJ\pi} \right\rangle = \left\langle \Psi^{JJ\pi} \left| \sum_{i=1}^A \left(\frac{1}{2} - t_{iz} \right) \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \right| \Psi^{JJ\pi} \right\rangle \quad (3.22)$$

Ces densité vérifient les relations $\int \rho_m(\vec{r}) d\vec{r} = A$ et $\int \rho_c(\vec{r}) d\vec{r} = Z$ mais il s'agit également de fonctions paires $\rho(\vec{r}) = \rho(-\vec{r})$. L'application de l'opérateur de parité P donne $P\delta(\vec{r} - \vec{r}_i)P = \delta(\vec{r} + \vec{r}_i)$.

Il est possible d'exprimer ces densités selon un **développement en multipôles** (rouge)

$$\rho(\vec{r}) = \sum_{\lambda} P_{\lambda}(\cos \theta) \rho_{\lambda}(r) \quad (3.23)$$

où λ est pair et compris entre 0 et $2J$. Si $J = 0$ ou $J = 1/2$, $\rho(\vec{r}) = \rho_0(r)$, les densités sont alors sphériques.

Autre donnée intéressantes, les **rayons carrés** pour ces deux densités. Pour la matière

$$\langle r^2 \rangle_m = \frac{1}{A} \sum_i r_i^2 = \frac{1}{A} \int \rho_m(\vec{r}) r^2 dr \quad (3.24)$$

Celle-ci ne dépend que de ρ_0 . Pour la charge :

$$\langle r^2 \rangle_c = \frac{1}{Z} \sum_i r_i^2 = \frac{1}{Z} \int \rho_m(\vec{r}) r^2 dr \quad (3.25)$$

Si $T = 0$, alors $\langle r^2 \rangle_c = \langle r^2 \rangle_m$.

Il est courant de considérer la distribution de FERMI comme densité $\rho(r)$

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + \exp\left(\frac{r-R}{a}\right)} \quad (3.26)$$

où a est la diffusivité (≈ 0.5 fm) et R la portée. Pour une diffusivité nulle ($a = 0$), on trouve $\langle r^2 \rangle = \frac{3}{5} R^2$. Le volume est également proportionnel à A . Nous avons en effet (rouge)

$$R = r_0 A^{1/3} \quad (3.27)$$

où $r_0 \approx 1.24$ fm.

3. NOTES!!

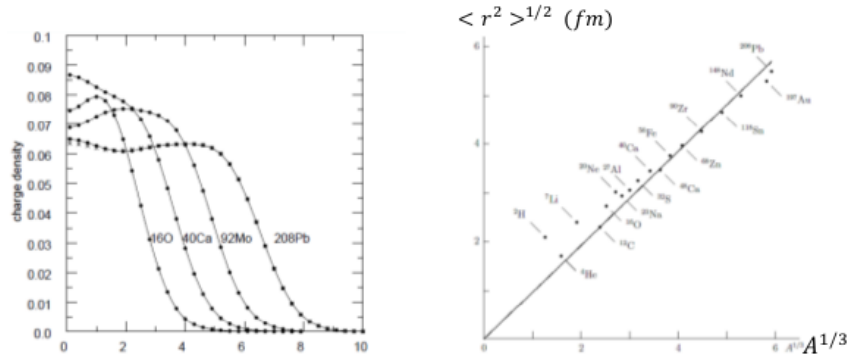


FIGURE 3.14

Ce faisait, la loi en $A^{1/3}$ est généralement bien vérifiée (voir graphique ci-dessus), seuls les noyaux exotiques à *halo* s'éloignent de cette systématique :

- ${}^6\text{He}$: $\sqrt{\langle r^2 \rangle} \approx 2.50 \text{ fm}$, $r_0 A^{1/3} = 2.25 \text{ fm}$.
- ${}^7\text{Li}$: $\sqrt{\langle r^2 \rangle} \approx 2.50 \text{ fm}$, $r_0 A^{1/3} = 2.25 \text{ fm}$.

Attardons-nous quelque peu sur le ${}^{11}\text{Li}$. Considérons les rayons expérimentaux pour différents types de Li et remarquons directement que le ${}^{10}\text{Li}$ n'existe pas, celui-ci se désintègre directement. Entre ${}^9\text{Li}$ et ${}^{11}\text{Li}$, l'écart est très important. Cette grande différence vient du fait que ${}^{11}\text{Li}$ est à la limite de la stabilité : l'énergie de liaison est toute petite et le rayon est donc grand. L'énergie de séparation de deux neutrons est également très petite, car les niveaux sont très proches. Il est possible de comprendre ça en suivant un raisonnement très qualitatif en supposant qu'il n'y a qu'un seul neutron à l'extérieur ? Il existe un potentiel $V(r)$ entre ces deux particules. Selon l'équation de SCHRÖDINGER

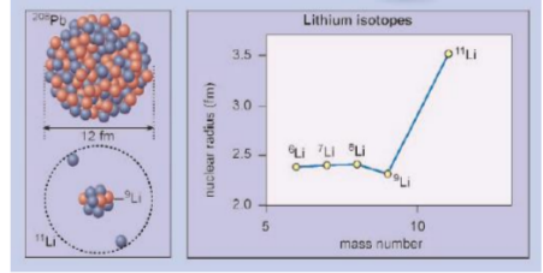


FIGURE 3.15

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\psi'' + V(r)\psi = E\psi \quad (3.28)$$

où $E = -\delta_m$, l'énergie de liaison. On ne connaît pas V , mais il est nul à grande distance. L'énergie étant négative, la solution sera exponentielle. En supprimant l'exponentielle divergente

$$\psi \Rightarrow \exp(-kr) \quad (3.29)$$

Faisons maintenant une grossière approche en supposant que ceci n'est pas valable à grande distance mais partout et calculons-en le rayon carré moyen

$$\langle r^2 \rangle = \frac{\int |\psi|^2 r^2 dr}{\int |\psi|^2 dr} \quad (3.30)$$

En utilisant notre ψ et par changement de variable, on voit que

$$\langle r^2 \rangle \propto 1/k^2 \quad (3.31)$$

Cette simple formule nous dit que quand l'énergie de liaison diminue, le rayon carré moyen (soit la taille du noyau) augmente. Ici le raisonnement tenu est très simple, mais qualitativement tout à fait valable.

3.7 Moments multipolaires

Ces moments sont intimement liés à la déformation du noyau et sont utilisés pour tester les modèles nucléaires⁴

3.7.1 Moment quadrupolaire électrique

Par définition ([e.fm²])

$$Q = \sqrt{\frac{16\pi}{5}} e \left\langle \Psi^{JJ\pi} \left| \sum_{i=1}^Z r_i^2 Y_2^0(\Omega_i) \right| \Psi^{JJ\pi} \right\rangle \quad (3.32)$$

Si $J < 1$, alors par le théorème de WIGNER-ECKART pour un OTI de rang 2, on en déduit que $Q = 0$. Pour l'interprétation, il faut savoir que

$$r^2 P_2(\cos \theta) = \frac{1}{2} (2z^2 - x^2 - y^2) \quad (3.33)$$

Trois cas sont donc possibles

$Q > 0$ Noyau allongé (*prolate*)

$Q < 0$ Noyau aplati

$Q = 0$ Noyau sphérique

On peut ré-écrire l'élément de matrice dans le formalisme de l'isospin

$$\left\langle \Psi^{JJ\pi} \left| \sum_{i=1}^Z r_i^2 Y_2^0(\Omega_i) \right| \Psi^{JJ\pi} \right\rangle = \left\langle \Psi^{JJ\pi} \left| \sum_{i=1}^A \left(\frac{1}{2} - t_{iz} \right) r_i^2 Y_2^0(\Omega_i) \right| \Psi^{JJ\pi} \right\rangle \quad (3.34)$$

Par les propriétés du moment quadrupolaire, il est possible d'énoncer une définition alternative

$$\left\langle \Psi^{JJ\pi} \left| \sum_{i=1}^Z r_i^2 Y_2^0(\Omega_i) \right| \Psi^{JJ\pi} \right\rangle = \sqrt{\frac{4\pi}{5}} \int \rho_{c,2}(r) r^2 dr \quad (3.35)$$

Le moment quadrupolaire est donné par le terme $\lambda = 2$ de la densité de charge.

3.7.2 Moment dipolaire magnétique

Par définition

$$\mu = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \left\langle \Psi^{JJ\pi} \left| M_0 \right| \Psi^{JJ\pi} \right\rangle \quad (3.36)$$

où $\vec{M} = \mu_N \sum_i (g_i \vec{l}_i + g_{si} \vec{s}_i)$ avec $\mu_N = \frac{e\hbar}{m_N c}$ le magnéton de BOHR, $g_s(n) = -3.82$, $g_s(p) = 5.58$ les rapports gyromagnétiques et $g_l(i) = \frac{1}{2} - t_{iz} = 0$ pour le neutron et 1 pour le proton. Si $J = 0$ alors $\mu = 0$ (\vec{M} est alors un opérateur de rang 1). Les moments quadrupolaire électrique et dipolaire magnétique sont utilisés pour tester les modèles nucléaires

4. Pas de notes sur cette dernière section, la précédente ok.

Chapitre 4

Décroissances nucléaires

4.1 Généralités

Passons en revue les différents processus de décroissances nucléaires

Radioactivité α Émission d'une particule ${}^4\text{He}$ ($Z = N = 2$). Celle-ci est limitée par la barrière coulombienne. Exemple = ${}^{238}\text{U}$ ($Z = 92$) \rightarrow ${}^{234}\text{Th}$ ($Z = 90$) + α .

Radioactivité β Émission d'un électron ou d'un positron (et d'un neutrino).

Radioactivité γ Résulte de l'interaction électromagnétique

Fission Analogue à la décroissance α (rare à cause de la barrière coulombienne)

Ces différentes décroissances possèdent deux caractéristiques ((très) variable en fonction du processus) : l'énergie de seuil Q (différence d'énergie entre les états initial et final) et la durée de vie.

On décroît la décroissance d'un échantillon de N éléments par le **taux de désintégration par unité de temps** λ ($[\text{s}^{-1}]$). Le nombre de désintégration durant un temps dt est donné par λdt et forcément, le nombre d'éléments qui disparaissent $dN : -\lambda N dt$. Après un calcul d'une complexité absolue, on en tire

$$N(t) = N_0 \exp(-\lambda t) \quad (4.1)$$

où N_0 est le nombre initial d'éléments. On définit le **demi-vie**

$$N(T_{1/2}) = \frac{N_0}{2} \rightarrow T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} \quad (4.2)$$

Le **temps de vie moyen** s'écrit alors

$$\tau = \frac{\int t N(t) dt}{\int N(t) dt} = \frac{1}{\lambda} = \frac{T_{1/2}}{\ln 2} \approx 1.44 \times T_{1/2} \quad (4.3)$$

Il existe trois unités conventionnelles : le Curie (3.7×10^{10} désintégrations/s), le Rutherford (10^6 désintégrations/s) et le Becquerel (1 désintégration/s). Il est possible de généraliser ce que nous venons de voir au cas où il existe plusieurs voies de décroissances. En effet, un même noyau peut avoir plusieurs modes de décroissances avec des probabilités $\lambda_1, \lambda_2, \dots$. La probabilité totale est donnée par $\lambda_T = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots$ et la durée de vie par $\tau_T = \frac{1}{\lambda_T} = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \dots$. On utilise parfois les rapports de branchement, sans dimension : λ_i / λ_T .

Les méthodes de datations étudient le passage d'un élément 1 à un élément 2. A l'instant t_0 : $N_1(t_0)$. A l'instant t_1 : $N_1(t_1) + N_2(t_1) = N_1(t_0)$ où $N_1(t_1) = N_1(t_0) \exp(-\lambda(t_1 - t_0))$. On en déduit

$$\frac{N_1(t_0)}{N_1(t_1)} = 1 + \frac{N_2(t_1)}{N_1(t_1)} = \exp(\lambda(t_1 - t_0)) \quad (4.4)$$

La mesure de N_2 et N_1 à l'instant t_1 permet de déduire t_0 . Actuellement on procède à un comptage précis des quantités par réaction nucléaire. En pratique ceci n'est pas valable pour des longues durées de vies (N_1 peut continuer à être formé) et on mesurera des rapports de nombres d'éléments.

4.2 Notion de largeur

Considérons une onde stationnaire, représentant un système restant indéfiniment dans le même état

$$\Psi(r, t) = \Psi(r) \exp\left(-\frac{iE_0 t}{\hbar}\right) \Rightarrow |\Psi(r, t)|^2 = |\Psi(r)|^2 \quad (4.5)$$

où la fonction d'onde est donnée par le produit d'une partie spatiale et d'une phase dépendante de l'énergie.

S'il y a une décroissance, le nombre de particule va varier avec le temps. Si cette décroissance se fait avec une constante λ , la dépendance sera la suivante

$$|\Psi(r, t)|^2 = |\Psi(r, 0)|^2 \exp(-\lambda t) \quad (4.6)$$

Dès lors, la partie temporelle de notre fonction d'onde est modifiée

$$\Psi(r, t) = \Psi(r) \exp\left(-\frac{it}{\hbar} \left(E_0 - \frac{i\lambda\hbar}{2}\right)\right) \quad (4.7)$$

ce qui forme un état non-stationnaire (état **résonant**). Cette modification vient du fait que l'énergie a été modifiée : tout se passe comme si l'énergie était complexe

$$W = E_0 - \frac{i\lambda\hbar}{2} \quad (4.8)$$

où la partie imaginaire reprend la dépendance λ et est donc liée au taux de décroissance. Si ce taux est très petit (cas réel) seul la partie réelle est à prendre en compte mais si λ est très grand, la partie imaginaire est à prendre en compte. En mécanique quantique, on utilise des énergies réelles. On exprime alors la superposition d'ondes stationnaires à énergie réelles

$$\exp\left(-\frac{it}{\hbar} \left(E_0 - \frac{i\lambda\hbar}{2}\right)\right) = \int A(E) \exp\left(-\frac{itE}{\hbar}\right) dE \quad (4.9)$$

Ceci permet de déterminer l'amplitude $A(E)$ par transformée de FOURIER inverse. On obtient alors

$$|A(E)|^2 = \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{(E - E_0)^2 + \Gamma^2/4} \quad (4.10)$$

Sachant que la largeur à mi-hauteur vaut $\Gamma = \hbar\lambda = \frac{\hbar}{\tau}$, il est possible de recombinaison les deux pour obtenir une relation d'incertitude ressemblant à celle d'HEISENBERG : $\Gamma\tau = \hbar$. On trouve les états stables pour $\Gamma = 0, \tau = \infty, A(E) \propto \delta(E - E_0)$. Les états instables sont obtenus par superposition d'une infinité d'états stationnaires et ils sont caractérisés par une énergie E_0 et une largeur Γ .

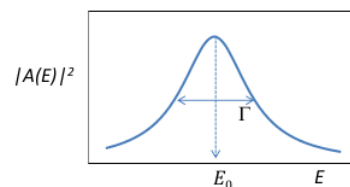


FIGURE 4.1 – Énergie complexe $W = E_0 - i\Gamma/2$. Résonance large : Γ grand, τ petit et inversement pour une étroite

4.3 Règle d'or de Fermi

La règle d'or de FERMİ permet de calculer la probabilité de transition entre un état initial i et un état final f lorsque l'on perturbe le système par un potentiel petit ¹. Supposons $H = H_0 + V$ où V est petit (perturbation) et responsable de la décroissance (stable si $V = 0$). On suppose également que les états propres de H_0 sont connus : $H_0 \Psi_n = E_n \Psi_n$. La fonction d'onde est solution de

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H \Psi \quad (4.11)$$

Posons $\Psi(\vec{r}, t) = \sum_n a_n(t) \Psi_n(\vec{r}) e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}}$. En développant ceci dans la base des états stationnaires, on peut en tirer un système d'équations de SCHRÖDINGER donnant les coefficients a_k (on recherche leurs évolutions dans le temps car ceux-ci donnent les probabilités de transition)

$$\frac{da_k}{dt} = -\frac{i}{\hbar} \sum_n a_n \langle \Psi_k | V | \Psi_n \rangle e^{\frac{i(E_k - E_n)t}{\hbar}} \quad (4.12)$$

Il s'agit d'un système d'équation linéaires qui dépend des énergies et des éléments de matrice du potentiel de perturbation. Si on le connaît, on peut en déduire les fonctions d'ondes et en calculer les éléments de matrice. On va donc procéder par itérations

$$\frac{da_k^{(p+1)}}{dt} \approx -\frac{i}{\hbar} \sum_n a_n^{(p)} \langle \Psi_k | V | \Psi_n \rangle e^{\frac{i(E_k - E_n)t}{\hbar}} \quad (4.13)$$

On utilisera comme ordre 0 ($p = 0$, condition initiale) $a_n^{(0)} = \delta_{ni}$.

Le calcul détaillé donne

$$w_{i \rightarrow f} = \frac{|a_f|^2}{T} = \frac{1}{T} \frac{|V_{fi}|^2}{(E_f - E_i)^2} 4 \sin^2 \frac{(E_f - E_i)T}{2\hbar} \quad (4.14)$$

Lorsque T est grand, $E_f = E_i$ et on retrouve bien la conservation de l'énergie. Notons que E_i et E_f sont les énergies du système total. Dans une transition γ , E_i est l'état nucléaire initial alors que E_f est l'état nucléaire final et le photon.

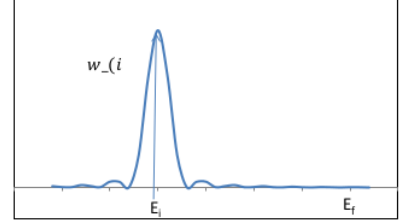


FIGURE 4.2 – On remarque de légères fluctuations

Certains noyaux ont une très grande densité d'états et d'autres une très petite. La probabilité de transition totale s'obtient en sommant sur tous les états finaux possibles. Comme dans un cas général on peut avoir quelque chose de continu, on utilisera le formalisme intégral ($dn = \rho(E_k) dE_k$)

$$w_{i \rightarrow f} = \int |w_{i \rightarrow k}|^2 \rho(E_k) dE_k \quad (4.15)$$

où l'état k est proche de l'état f , $\rho(E_k)$ est la densité d'état à E_k et $\rho(E_k) dE_k$ est le nombre d'états dans l'intervalle dE_k . On en déduit ²

$$w_{i \rightarrow f} = \frac{4}{T} \int \frac{\sin^2 \frac{(E_k - E_i)T}{2\hbar}}{(E_k - E_i)^2} |V_{ki}|^2 \rho(E_k) dE_k \quad (4.16)$$

1. Le principe est très général et applicable aux transitions β et γ . Tous les calculs ne seront pas détaillés ici (assez long et horrible), mais un "juste milieu" est proposé afin de ne pas juste "plaquer" les formules comme elles viennent

2. Voir cours MÉCANIQUE QUANTIQUE I pour un calcul plus détaillé

Il s'agit du carré de la fonction *sinus cardinal* qui est dominante pour $x = 0$ et définie telle que $\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}^2(x) dx = \pi$. Sachant ceci et en supposant que $V_{ki} \approx V_{fi}$ et que $\rho(E_k)$ varie peu autour de E_i , on peut en trouver un résultat final qui est la règle d'or de FERMİ

RÈGLE D'OR DE FERMİ (formule générale)

$$w_{i \rightarrow f} = \lambda = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle \Psi_i | V | \Psi_f \rangle|^2 \rho(E_i) \quad (4.17)$$

Terminons par un petit commentaire sur les ordres de grandeur et la "hiérarchie" : comme la probabilité de transition est liée à des éléments de matrice impliquant le potentiel, on s'attend à ce qu'elle respecte un certain "ordre". Les largeurs α sont en générales plus grande que les γ qui elles sont plus grandes que mes β . Cette hiérarchie est respectée dans les types de potentiels.

A partir de λ , on en déduit la durée de vie $T = 1/\lambda$ et la largeur $\Gamma = \hbar/T = \hbar\lambda$.

- Radioactivité α : $V = V_{nuc}$ ($V \ll H_0$, règle d'or **pas** valable pour α)
- Radioactivité β : $V = V_{faible}$
- Radioactivité γ : $V = V_{elec}$

En général, comme dit ci-dessus

$$\Gamma_\alpha > \Gamma_\gamma > \Gamma_\beta \quad (4.18)$$

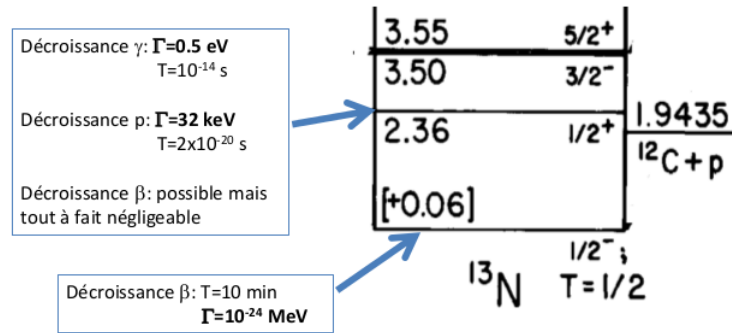


FIGURE 4.3 – Spectre du ^{13}N (13 protons et 6 neutrons). Le premier état excité a une énergie de 2.36 MeV. L'état fondamental a une masse plus petite que $^{12}\text{C} + p$, il s'agit donc d'une voie de désintégration possible.

Chapitre 5

Radioactivité α

5.1 Définitions et conservation de l'énergie

La radioactivité α est définie par la processus suivant

$${}^A_Z X \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2} Y + \alpha \quad (5.1)$$

où X est le noyau mère, Y le noyau fille et α est un noyau ${}^4_2\text{He}$ ($Z = N = 2$). Supposons que le noyau X soit au repos et le noyau Y dans son état fondamental. Par conservation de l'énergie

$$T_Y + T_\alpha = Q_\alpha = (m_X - m_Y - m_\alpha)c^2 > 0 \quad (5.2)$$

Pour avoir radioactivité α , il faut donc que $m_X > m_Y + m_\alpha$. On peut en déduire les énergies cinétiques à partir de la conservation de l'impulsion $\vec{p}_Y + \vec{p}_\alpha = \vec{0}$. Nous avons $m_Y T_Y = m_\alpha T_\alpha$ et donc

$$T_\alpha = \left(1 - \frac{4}{A}\right) Q_\alpha, \quad T_Y = \frac{4}{A} Q_\alpha \quad (5.3)$$

Il s'agit d'un processus à deux corps impliquant que les particules α soient monocinétiques. L'énergie de la transition (énergie libérée) est donc essentiellement portée par la particule α . On appelle T_Y l'**énergie de recul** du à l'émission, qui est faible (ce qui est le cas en général) si A est grand.

5.2 Conditions de décroissance α

L'idée est toujours la même (et nous avons déjà énoncé cette condition ci-dessus) : la masse initiale doit être plus grande que la somme des deux masses ($m = Z * m_p + N * m_n - B$). Généralement, on parle d'énergie de liaison et non de masses

$$\begin{aligned} Q_\alpha &= (m(A, Z) - m(A-4, Z-2) - m(4, 2))c^2 \\ &= B(4, 2) + B(A-4, Z-2) - B(A, Z) > 0 \end{aligned} \quad (5.4)$$

Il faut donc que

$$B(4, 2) > A \frac{B(A, Z)}{A} - (A-4) \frac{B(A-4, Z-2)}{A-4} \quad (5.5)$$

En moyenne (la fameuse valeur de 7-8 MeV, il s'agit du rapport B/A moyen).

$$\left(\frac{B(A, Z)}{A}\right)_m < \frac{B(4, 2)}{4} \approx 7 \text{ MeV} \quad (5.6)$$

Ce rapport B/A moyen doit être inférieur à l'énergie de la particule α qui est extrêmement liée. En regardant la courbe B/A , la décroissance α ne peut se produire que pour des noyaux. Si on regarde la courbe, on pourrait même croire que ça n'arrive jamais mais il ne faut pas oublier que cette courbe correspond au cas stable : ça arrive donc en pratique. Pourquoi n'y a-t-il pas d'autres radioactivité (comme en deuton) ? Car la particule α est très liée (B/A pour le deuton est de 1.1 MeV) et peut facilement se faire éjectée.

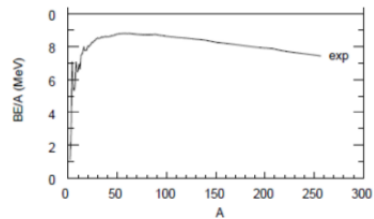


FIGURE 5.1

5.3 Durée de vie - effet tunnel

Il n'est pas possible d'utiliser la règle d'or de FERMI, le potentiel n'étant pas petit. On va supposer une décroissance $X \rightarrow Y + \alpha$ où la formation de la particule α se fait à la surface.

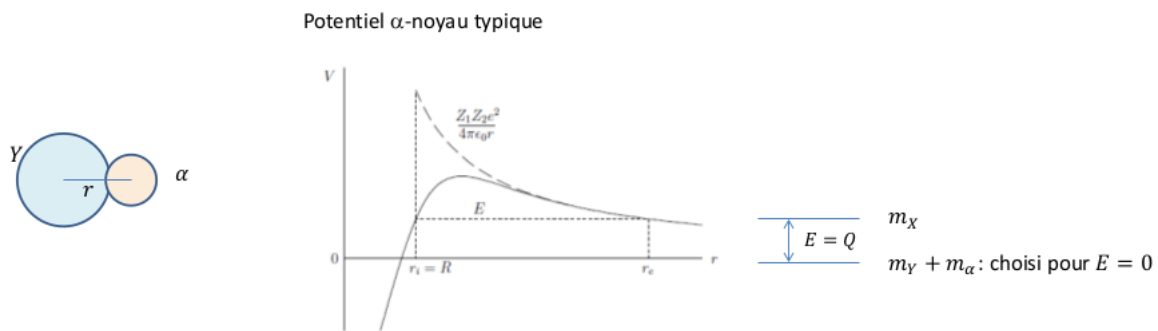


FIGURE 5.2

Le potentiel est attractif à faible distance (nucléaire) et répulsif à longue distance (Coulomb) : il s'agit des deux cas extrêmes qui sont "relié" par la *barrière de potentiel*. Cette barrière de potentiel doit être franchie pour avoir émission d'une particule α mais ceci ne peut se faire que par effet tunnel (impossible donc dans un cas classique). Si le seuil est trop petit, la probabilité peut être suffisamment petite pour que la durée de vie soit énorme : il est nécessaire de calculer le **coefficient de transmission** qui sera proportionnel à la probabilité de désintégration.

Le calcul de ce coefficient se fait grâce à l'approximation WKB : on résout l'approximation $u''(r) - \frac{2\mu}{\hbar^2}(V(r) - E)u(r) = 0$ en posant $u(r) = \exp(iS(r))$ ($S(r)$ varie lentement) et on en déduit $S(r)'^2 = \frac{2\mu}{\hbar^2}(E - V(r))$. En remplaçant dans l'équation de SCHRÖDINGER, on en déduit (si $E < V(r)$)

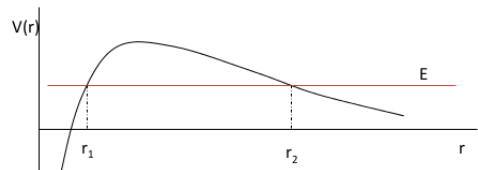


FIGURE 5.3

$$u(r) = \exp \left(- \int_0^r \sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2}(V(r) - E)} dr \right) \quad (5.7)$$

Ce qui nous intéresse n'est pas l'amplitude de la fonction d'onde mais le coefficient de transmission T . Celui-ci n'est rien d'autre que la probabilité d'être en r_2 sur la probabilité d'être en r_1

$$T = \left| \frac{u(r_2)}{u(r_1)} \right|^1 = \exp \left(-2 \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2}(V(r) - E)} dr \right) \quad (5.8)$$

En remplaçant l'expression de $V(r)$, il est souvent impossible d'obtenir une solution analytique mais bien numérique (simple calcul d'intégral).

Pour un potentiel purement coulombien ($m = 0$) : $r_1 = R, r_2 = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{E}$ avec $Z_2 = 2, Z_1 = Z - 2$, on trouve

$$T \approx \exp(-2\pi\eta) \quad (5.9)$$

où $\eta = Z_1 Z_2 \alpha (c/v) : Z_1 Z_2 \alpha \sqrt{(2\mu c^2)/E}$ est le paramètre de SOMMERFELD (où $\alpha = 1/137$). Si l'énergie diminue, η augmente et donc T diminue. Cette propriété se retrouve dans la durée de vie (τ augmente lorsque E diminue : loi de GEIGER-NUTTALL) La durée de vie $\tau \propto 1/T$ vaut alors

$$\log \tau = C_1 + C_2 \frac{Z - 2}{\sqrt{E}} \quad (5.10)$$

où $C_2 = 2\pi\alpha\sqrt{2\mu c^2}$ (il est possible de retrouver C_1 à l'aide de coefficients). Il y a parfois de très grandes variations, essentiellement parce que notre modèle est très approximatif : il ne prend pas en compte la formation de particule α dans le noyau mais le résultat est déjà pas mal.

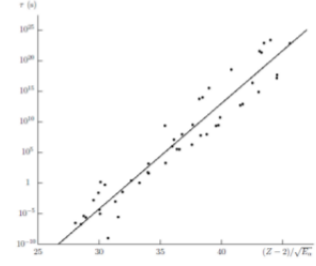


FIGURE 5.4

5.4 Conservation du moment cinétique

Le moment cinétique est défini $\vec{J}_X = \vec{J}_Y + \vec{J}_\alpha + l$ tandis que la parité $\pi_X = \pi_Y \pi_\alpha (-1)^l$. Pour une particule $\alpha : J_\alpha = 0, \pi_\alpha = +1$. Comme en général $J_X = 0, \pi_X = +1$, il faut que $J_Y = l$.

Lorsque l augmente, une barrière centrifuge apparaît. La probabilité de désintégration diminue et il y a un double effet du moment cinétique (Q_α, l)

$$Q_\alpha = (m_X - m_{Y^*} - m_\alpha)c^2 \quad (5.11)$$

Le coefficient de transmission T_l/T_0 pour $Z = 88, l = 2$ vaut 0.37, $l = 4$ donne 0.037 et $l = 6$ donne 0.001, la tendance est bien vérifiée.

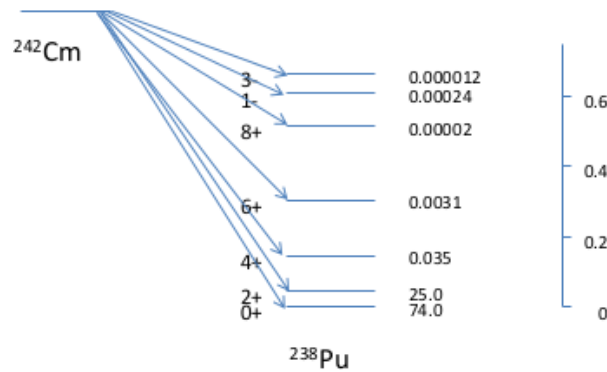


FIGURE 5.5 – Schéma de désintégration vers le fondamental mais avec une série de niveau toujours en dessous du seuil. La transition vers un état excité à deux effets : le zéro des énergies doit être remonté (diminution du seuil, cause une diminution de la probabilité de désintégration) et l'effet centrifuge avec l (une augmentation de l augmente la barrière) : probabilité de désintégration vers d'autres états beaucoup plus petits.