Informatique Théorique

Auguste Gardette

14 Octobre 2022

1 Exercice 1.

Soit L le langage des mots sur l'alphabet a, c, g, t qui commencent par atg et finissent par taa.

1. Donnez une expression rationnelle de L.

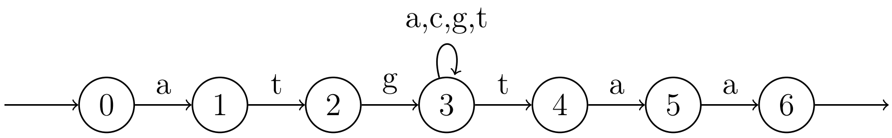
atg (a | c | g | t)* taa

2. On dit qu'un automate A =< A, Q, q_0, F, δ > est déterministe s'il satisfait les deux conditions suivantes :

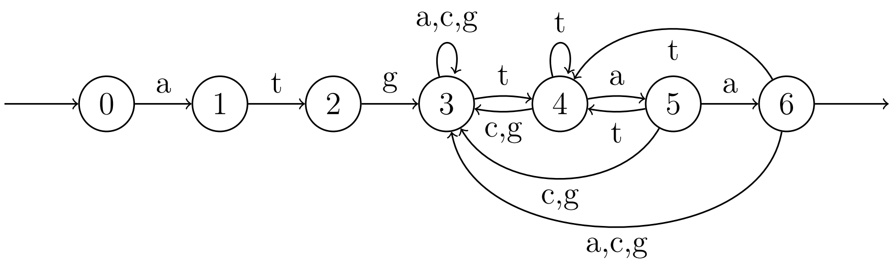
— Il ne contient pas d'ϵ-transition.

— Pour tout état q $\in$ Q et toute lettre a $\in$ A, il existe au maximum une transition

(a) Construisez un automate fini non déterministe à sept états pour L.



(b) Construisez un automate fini déterministe à sept états pour L



2 Exercice 2.

Soit la grammaire G suivante :

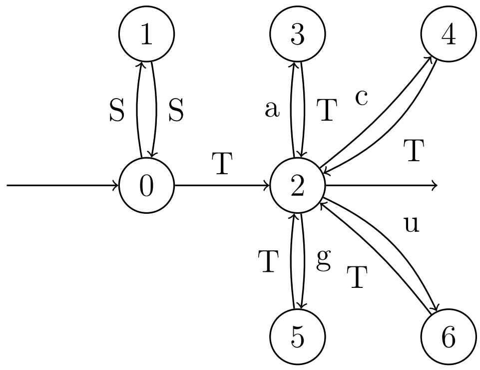
S $\to$ aSu | uSa | cSg | gSc| SS | T
T $\to$ aT | cT | gT | uT | ϵ

1. Montrez que L(G) = $\{a, c, g, u\}^*$

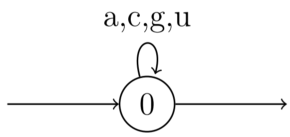
Simplifions la grammaire G comme suit :

$$\boxed{\begin{array}{l} S \rightarrow SS \mid T \\ T \rightarrow aT \mid cT \mid gT \mid uT \mid \epsilon \end{array}}$$

On peut construire un pseudo automate correspondant :



En simplifiant on obtient :

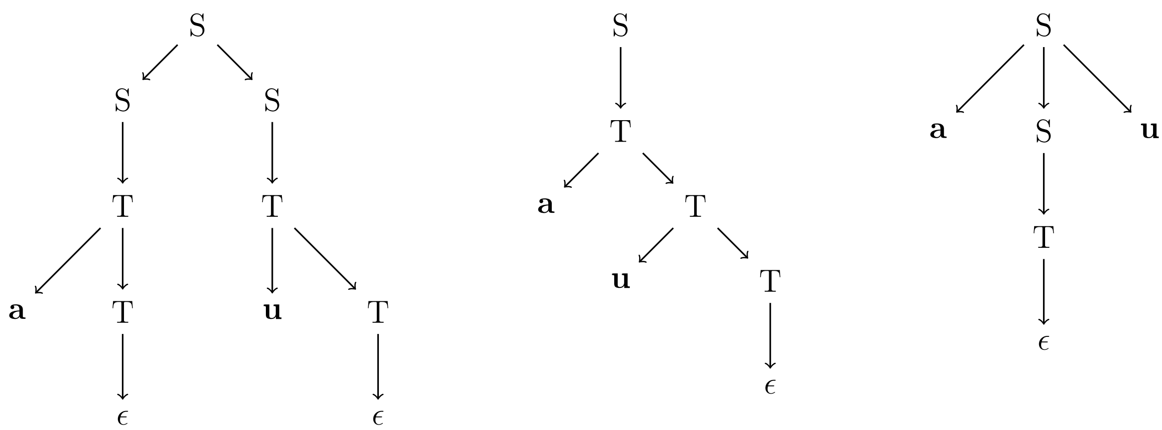


Grossièrement on pouurait même simplifier la grammaire en ne gardant que :

$T \rightarrow aT \mid cT \mid gT \mid uT \mid \epsilon$. Avec cette grammaire on peut commencer avec n'importe quelle lettre, lui incrémenter n'importe quelle lettre et finir par n'importe quelle lettre.

2. On dit qu'une grammaire G est ambigüe s'il existe un mot $w \in L(G)$ qui peut être généré par au moins deux arbres de dérivation dont la racine est l'axiome. Montrez que G est ambiguë, en considérant les arbres de dérivation qui génèrent le mot *au*.

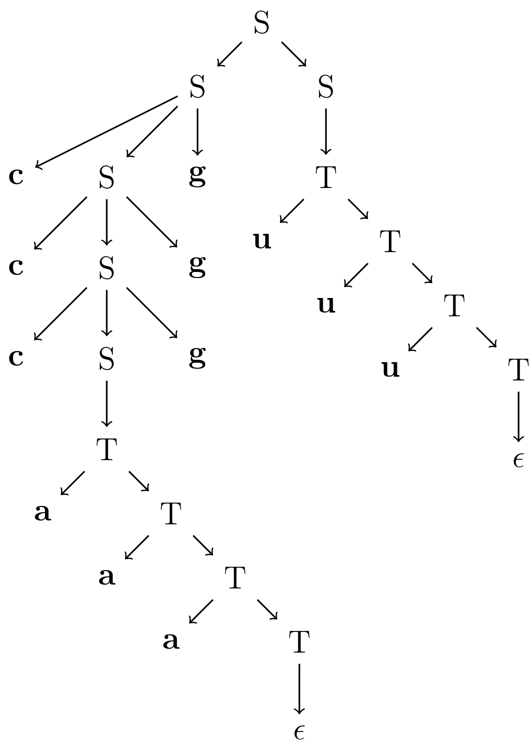
Voici quelques exemples d'arbres pour former le mot *au* :



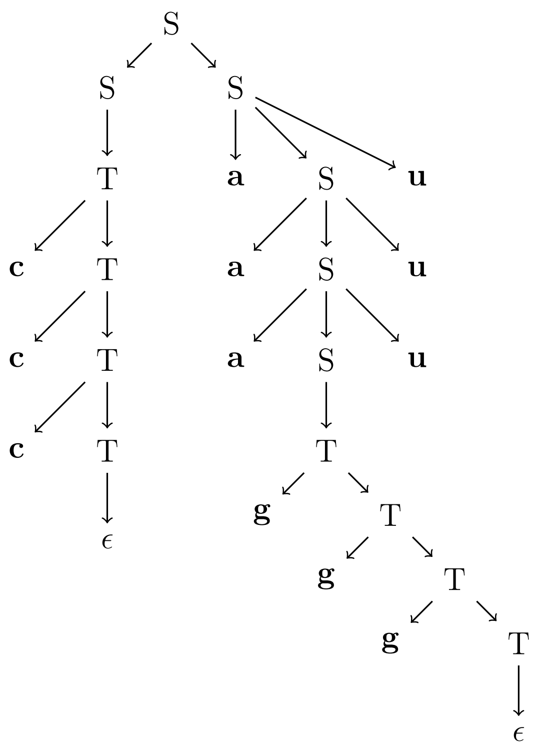
En réalité, avec la possibilité de faire $S \rightarrow SS$, on peut générer une infinité d'arbres pour former le mot *au*, voir n'importe quel mot du langage $L(G) = \{a, c, g, u\}^*$. On peut raisonnablement dire que la grammaire G est ambigüe.

3. Soit le mot *cccaaaggguuu*. Montrez que, parmi tous les arbres de dérivation menant à ce mot depuis l'axiome, il y en a exactement deux qui utilisent trois fois une règle du type S → xSy et qui utilisent une fois la règle S → SS. Dessinez ces deux arbres.

Arbre 1 :



Arbre 2 :

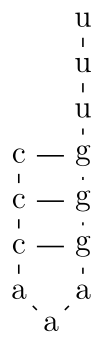


Si on veut respecter la règle S → SS, l'uinque solution est de la placer au début puisqu'aucune règle de S n'est de la forme cSu donc rien ne peut substituer SS pour le premier coup.

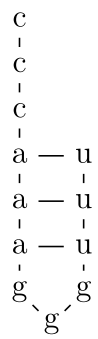
Puis, si l'on souhait respecter la règle 'trois fois S →' xSy, nous somme obligé d'utiliser les règles cSg (pour le premier S) ou aSu (pour le second S) trois fois d'affilés pour réprondre à cette contrainte. Il n'y a donc bien que 2 solutions d'arbre possible.

4. Chacun de ces arbres de dérivation correspond à une structure secondaire qui peut être adoptée par la séequence d'ARN *cccaaaggguuu*. Dessinez les deux structures secondaires correspondant respectivement à chacun des deux arbres.

Arbre 1 - Structure secondaire :



Arbre 2 - Structure secondaire :



Représentation de la structure ARN par séquence et système de parenthèses :

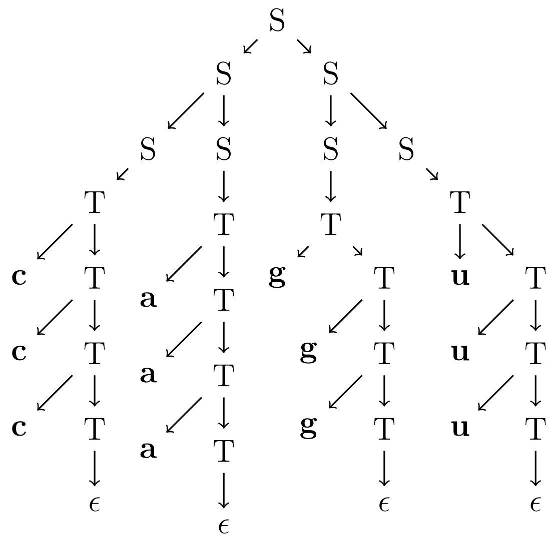
Arbre 1 - Structure secondaire bis :

(((· · ·))) · · ·
c c c a a a g g g u u u

Arbre 2 - Structure secondaire bis :

· · · (((· · ·)))
c c c a a a g g g u u u

5. Donnez un autre arbre de dérivation pour la même séequence et dessinez la structure secondaire correspondante.



Structure secondaire correspondante :

. . . .
c-c-c-a-a-a-g-g-g-u-u-u

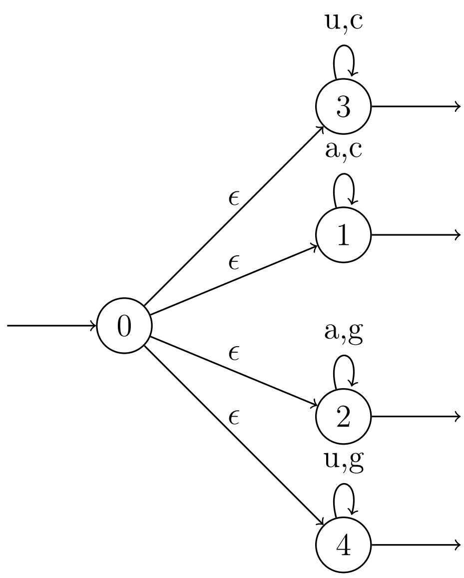
6. On considère pour cette question que les appariements possibles dans une structure secondaire d'ARN sont les appariements canoniques a-u, u-a, c-g et g-c, ainsi que les appariements dits "wobble" g-u et u-g.

(a) Soit L_0 le plus grand langage sur l'alphabet {a, c, g, u} qui possède la propriété suivante : quel que soit $w \epsilon L_0$, il n'y a aucun appariement possible dans w. Donnez une expression rationnelle et un automate fini pour L_0.

Expression rationnelle de L_0 :

$(a \mid c)^* \mid (a \mid g)^* \mid (u \mid c)^* \mid (u \mid g)^*$

Automate fini de L_0 :

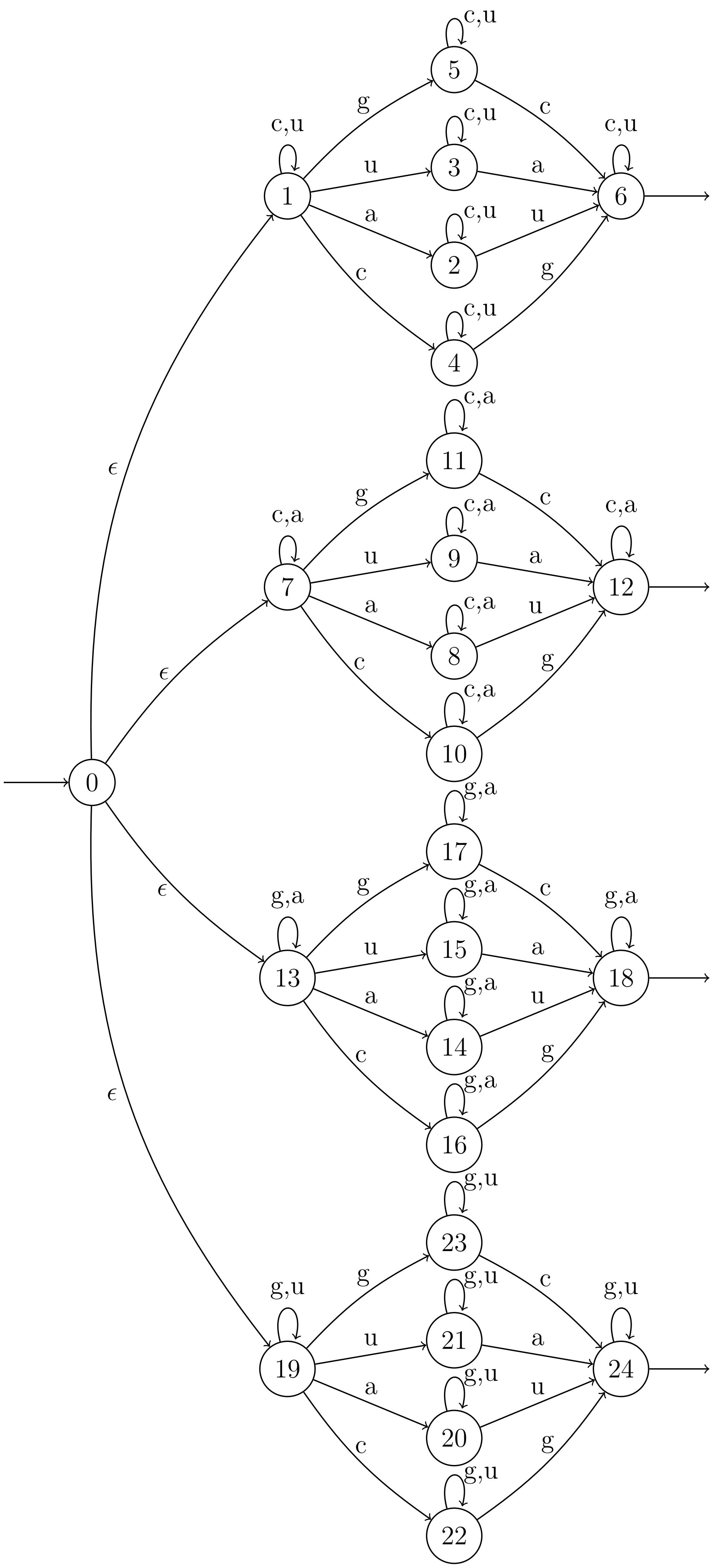


(b) Soit L_1 le plus grand langage sur l'alphabet {a, c, g, u} qui possède la propriété suivante : quel que soit $w \epsilon L_1$, il y a exactement un appariement possible dans w . Donnez une expression rationnelle et un automate fini pour L_1 .

Expression rationnelle de L_0 :

$(c \mid a)^*\ a\ (c \mid a)^*\ u\ (c \mid a)^* \mid (g \mid a)^*\ a\ (g \mid a)^*\ u\ (g \mid a)^* \mid$
$(c \mid u)^*\ a\ (c \mid u)^*\ u\ (c \mid u)^* \mid (g \mid u)^*\ a\ (g \mid u)^*\ u\ (g \mid u)^* \mid$
$(c \mid a)^*\ u\ (c \mid a)^*\ a\ (c \mid a)^* \mid (g \mid a)^*\ u\ (g \mid a)^*\ a\ (g \mid a)^* \mid$
$(c \mid u)^*\ u\ (c \mid u)^*\ a\ (c \mid u)^* \mid (g \mid u)^*\ u\ (g \mid u)^*\ a\ (g \mid u)^* \mid$
$(c \mid u)^*\ g\ (c \mid u)^*\ c\ (c \mid u)^* \mid (g \mid u)^*\ g\ (g \mid u)^*\ c\ (g \mid u)^* \mid$
$(c \mid a)^*\ g\ (c \mid a)^*\ c\ (c \mid a)^* \mid (g \mid a)^*\ g\ (g \mid a)^*\ c\ (g \mid a)^* \mid$
$(c \mid u)^*\ c\ (c \mid u)^*\ g\ (c \mid u)^* \mid (g \mid u)^*\ c\ (g \mid u)^*\ g\ (g \mid u)^* \mid$
$(c \mid a)^*\ c\ (c \mid a)^*\ g\ (c \mid a)^* \mid (g \mid a)^*\ c\ (g \mid a)^*\ g\ (g \mid a)^* \mid$

Automate fini de L_0 :


0
ϵ
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
c,u
c,a
g,a
g,u
g
u
a
c