PRODUCTOS NOTABLES

Ejercicios Resueltos

2024

Aaric Llerena Medina

Ejercicio 1

Calcular el valor de:

$$\left(\frac{2-x^3}{x(x+1)}\right)^{-1}+\left(-\frac{y^3-10}{y(y-1)}\right)^{-1}$$

Cuando:

$$x=\sqrt[3]{3}-1, \quad y=\sqrt[3]{9}+1$$

Elevando al cubo la expresión de x:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{3}-1 \\ x^3 &= \sqrt[3]{3}-1^3-3\sqrt[3]{3}(1)(x) \\ x^3 &= 2-3\sqrt[3]{3}x \end{aligned}$$

Asimismo, elevando la expresión de y:

$$\begin{aligned} y &= \sqrt[3]{9}+1 \\ y^3 &= (\sqrt[3]{9})^3+1^3+3\sqrt[3]{9}(1)(y) \\ y^3 &= 10+3\sqrt[3]{9}y \end{aligned}$$

Como se pide calcular:

$$\left(\frac{2-x^3}{x(x+1)}\right)^{-1}+\left(-\frac{y^3-10}{y(y-1)}\right)^{-1}$$

Se reemplaza los valores:

$$\left(\frac{3\sqrt[3]{3}x}{x(\sqrt[3]{3})}\right)^{-1}+\left(-\frac{3\sqrt[3]{9}y}{y(\sqrt[3]{9})}\right)^{-1}$$

$$(3)^{-1}+(-3)^{-1}$$

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{3}$$

$$0$$

El valor de la expresión es 0.

Ejercicio 2

Si a, b y c pertenecen a los reales y son distintos a cero, tal que:

$$a^2 + c^2 + 1 = 2(a + 2b + 3c) - 13 - b^2$$

Halle el valor de:

$$\frac{(a+b)^4 - (a-b)^4}{abc}$$

Empezando a operar y dándole forma a la expresión:

$$a^2 + c^2 + 1 = 2(a + 2b + 3c) - 13 - b^2$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2a + 4b + 6c - 1 - 4 - 9$$

$$\underbrace{a^2 - 2a + 1}_{(a-1)^2} + \underbrace{b^2 - 4b + 4}_{(b-2)^2} + \underbrace{c^2 - 6c + 9}_{(c-3)^2} = 0$$

$$(a-1)^2 + (b-2)^2 + (c-3)^2 = 0$$

Al ser números reales y distintos a cero, se cumple que $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ solo es verdad cuando $x = y = z = 0$, entonces:

$$\underbrace{(a-1)^2}_{a=1} + \underbrace{(b-2)^2}_{b=2} + \underbrace{(c-3)^2}_{c=3} = 0$$

Entonces, se concluye que $a = 1$, $b = 2$ y $c = 3$. Reemplazando los valores en la expresión a calcular:

$$\frac{(a+b)^4 - (a-b)^4}{abc}$$

$$\frac{8ab\left(a^2 + b^2\right)}{abc}$$

$$\frac{8\,(1)\,(2)\left\{(1)^2 + (2)^2\right\}}{(1)\,(2)\,(3)}$$

$$\frac{8 \times 5}{3}$$

$$\frac{40}{3}$$

Por lo tanto, el valor de $\dfrac{(a+b)^4 - (a-b)^4}{abc}$, es igual a $\dfrac{40}{3}$.

Ejercicio 3

Si:

$$a+b+c+d=0$$

Reducir:

$$\frac{abc+abd+acd+bcd}{a^3+b^3+c^3+d^3}$$

Empezando a operar, hacemos el siguiente cambio de variable: $a+b=x$ y $c+d=y$:

$$x+y=0 \qquad (\quad)^3$$

$$x^3+y^3+3xy\underbrace{(x+y)}_{0}=0$$

$$x^3+y^3=0$$

De la expresión obtenida, apreciamos que $(x+y)^3=x^3+y^3$, por lo que volviendo a las variables iniciales: $(a+b+c+d)^3=(a+b)^3+(c+d)^3$. Entonces:

$$\begin{aligned}(a+b+c+d)^3&=(a+b)^3+(c+d)^3\\0&=a^3+b^3+3ab(a+b)+c^3+d^3+3cd(c+d)\\a^3+b^3+c^3+d^3&=-3\left[ab(a+b)+cd(c+d)\right]\end{aligned}$$

Asimismo, considerar que:

$$a+b+c+d=0\begin{cases}a+b=-(c+d)\\c+d=-(a+b)\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\frac{abc+abd+acd+bcd}{a^3+b^3+c^3+d^3}&=\frac{ab(c+d)+cd(a+b)}{a^3+b^3+c^3+d^3}\\&=\frac{-ab(a+b)-cd(c+d)}{a^3+b^3+c^3+d^3}\\&=\frac{-[ab(a+b)+cd(c+d)]}{-3[ab(a+b)+cd(c+d)]}=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

Por lo tanto, el valor de la expresión $\dfrac{abc+abd+acd+bcd}{a^3+b^3+c^3+d^3}$ es $\dfrac{1}{3}$.

Aaric Llerena Medina

Ejercicio 4

Para:

$$x = 1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}$$
$$y = \sqrt{2} + \sqrt{3} - 1$$
$$z = \sqrt{3} + 1 - \sqrt{2}$$

Determinar el valor de:

$$2\left(x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz\right)$$

Empezando a operar y haciendo suma de las variables de forma conveniente:

$$x + y = 2\sqrt{2} \qquad x + z = 2 \qquad y + z = 2\sqrt{3}$$

Desarrollando la expresión a calcular:

$$2\left(x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz\right)$$
$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$$
$$x^2 + x^2 + y^2 + y^2 + z^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$$
$$(x + y)^2 + (x + z)^2 + (y + z)^2$$

Haciendo uso de las sumas obtenidas:

$$(x + y)^2 + (x + z)^2 + (y + z)^2$$
$$\left(2\sqrt{2}\right)^2 + (2)^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2$$
$$8 + 4 + 12$$
$$24$$

Por lo tanto, el valor de $2\left(x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz\right)$ es igual a 24.

Ejercicio 5

Si x e y son tales que:

$$\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=1-\frac{x}{y}$$

$$\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}=1-\frac{y}{x}$$

Calcular:

$$\frac{\left(x^2+y^2\right)\left(x^4+y^4\right)}{x^6+y^6}$$

Empezando a operar las condiciones dadas:

$$\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=1-\frac{x}{y}$$

$$\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\frac{y-x}{y}$$

$$\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}=1-\frac{y}{x}$$

$$\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}=\frac{x-y}{x}$$

Multiplicando ambas expresiones:

$$\frac{y-x}{x}\times\frac{x-y}{x}=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\times\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$$

$$-\frac{(x-y)^2}{xy}=-1$$

$$(x-y)^2=-xy$$

$$x^2-2xy+2xy+y^2=-xy+2xy$$

$$x^2+y^2=xy$$

Elevando al cuadrado la igualdad:

$$x^2+y^2=xy \qquad (\quad)^2$$

$$x^4+2x^2y^2-2x^2y^2+y^2=x^2y^2-2x^2y^2$$

$$x^4+y^4=-x^2y^2$$

Asimismo, elevando al cubo:

$$x^2+y^2=xy \qquad\qquad (\quad)^3$$

$$x^6+y^6+3\left(x^2\right)\left(y^2\right)\underbrace{\left(x^2+y^2\right)}_{xy}=x^3y^3$$

$$x^6+y^6+3xy\left(x^2\right)\left(y^2\right)=x^3y^3$$

$$x^6+y^6+3x^3y^3-3x^3y^3=x^3y^3-3x^3y^3$$

$$x^6+y^6=-2x^3y^3$$

Reemplazando las igualdades obtenidas:

$$\frac{(x^2+y^2)(x^4+y^4)}{x^6+y^6}$$

$$\frac{(xy)(-x^2y^2)}{-2x^3y^3}$$

$$\frac{-x^3y^3}{-2x^3y^3}$$

$$\frac{1}{2}$$

Por lo tanto, el valor de $\dfrac{(x^2+y^2)(x^4+y^4)}{x^6+y^6}$ es igual a $\dfrac{1}{2}$.

Ejercicio 6

Calcular el valor de:

$$x^3 + 6x$$

Si se sabe que:

$$x = \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}$$

Empezando a operar la condición:

$$x = \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} \qquad (\quad)^3$$

$$x^3 = \sqrt[3]{4}^3 - \sqrt[3]{2}^3 - 3\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \underbrace{\left(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}\right)}_{x}$$

$$x^3 = 4 - 2 - 3\sqrt[3]{8}x$$

$$x^3 = 4 - 2 - 3\left(2\right)x$$

$$x^3 = 2 - 6x$$

$$x^3 + 6x = 2$$

Por lo tanto, el valor de $x^3 + 6x$ es igual a 2.

Ejercicio 7

Sabiendo que:

$$p + q = 6$$

$$pq = 10$$

Calcular:

$$p^2 + q^2$$

Empezando a operar, se eleva al cuadrado una de las condiciones:

$$p + q = 6 \qquad (\quad)^2$$

$$p^2 + 2\underbrace{pq}_{10} + q^2 = 36$$

$$p^2 + 2(10) + q^2 = 36$$

$$p^2 + 20 - 20 + q^2 = 36 - 20$$

$$p^2 + q^2 = 16$$

Por lo tanto, el valor de $p^2 + q^2$ es igual a 16.

Ejercicio 8

Si se cumple:

$$x^1 + x^{-1} = 6$$

Calcular:

$$x^3 + x^{-3}$$

Empezando a operar:

$$x + \frac{1}{x} = 6 \qquad (\quad)^3$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\,(x)\left(\frac{1}{x}\right) + \underbrace{\left(x + \frac{1}{x}\right)}_{6} = 216$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} + 18 - 18 = 216 - 18$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = 198$$

Por lo tanto, el valor de $x^3 + x^{-3}$ es igual a 198.

Ejercicio 9

Sabiendo que:

$$x^2 + 1 = \sqrt{3}x$$

Calcular:

$$x^3 + x^{-3}$$

Empezando a operar la condición:

$$x^2 + 1 = \sqrt{3}x \qquad \div x^{-1}$$

$$x + x^{-1} = \sqrt{3} \qquad (\quad)^3$$

$$x^3 + x^{-3} + 3\left(x\right)\left(x^{-1}\right)\underbrace{\left(x + x^{-1}\right)}_{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$$

$$x^3 + x^{-3} + 3\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

$$x^3 + x^{-3} = 0$$

Por lo tanto, el valor de $x^3 + x^{-3}$ es igual a 0.

Ejercicio 10

Si:

$$3^{2x} + 3^{2y} = 27$$

$$3^{x+y} = 11$$

Calcular el valor de:

$$K = (3^x + 3^y)^3$$

Empezando a operar y haciendo uso de las condiciones:

$$3^{2x} + 2\left(3^x\right)\left(3^y\right) + 3^{2y} = 27 + 2\left(3^x\right)\left(3^y\right)$$

$$\underbrace{\left(3^x\right)^2 + 2\left(3^{x+y}\right)\left(3^y\right)^2}_{(3^x+3^y)^2} = 27 + 2\underbrace{\left(3^{x+y}\right)}_{11}$$

$$(3^x + 3^y)^2 = 27 + 2 \times 11$$

$$(3^x + 3^y)^2 = 27 + 22$$

$$(3^x + 3^y)^2 = 49$$

$$(3^x + 3^y) = 7$$

Entonces, reemplazando la igualdad en el valor a calcular:

$$K = (3^x + 3^y)^3$$

$$K = (7)^3$$

$$K = 343$$

Por lo tanto, el valor de K es 343.

Ejercicio 11

Sabiendo que:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{4}{x+y}$$

Encontrar el valor de:

$$S=\frac{x+3y}{4x}+\frac{2y}{x+3y}+\frac{2x}{y+3x}$$

Desarrollando la condición:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{4}{x+y}$$

$$\frac{x+y}{xy}=\frac{4}{x+y}$$

$$(x+y)^2=4xy$$

$$x^2+2xy+y^2=4xy$$

$$x^2-2xy+y^2=0$$

$$(x-y)^2=0$$

$$x=y$$

Por lo tanto, se determina que $x=y$, reemplazando en el valor de S:

$$S=\frac{x+3y}{4x}+\frac{2y}{x+3y}+\frac{2x}{y+3x}$$

$$S=\frac{x+3x}{4x}+\frac{2x}{x+3x}+\frac{2x}{x+3x}$$

$$S=\frac{4x}{4x}+\frac{2x}{4x}+\frac{2x}{4x}$$

$$S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$$

$$S=2$$

Por lo tanto, el valor de S es igual a 2

Ejercicio 12

Si:

$$x^3 = 1$$

$$x \neq 1$$

Halle:

$$\frac{x^4\left(x^4+1\right)}{x^6+1}$$

Empezando a operar la condición:

$$x^3 = 1$$

$$x^3 - 1 = 0$$

$$\underbrace{(x-1)}_{x\neq 1}\underbrace{\left(x^2+x+1\right)}_{=0} = 0$$

$$x^2 + x + 1 = 0$$

$$x + 1 = -x^2$$

La igualdad, la elevamos al cuadrado:

$$x + 1 = -x^2 \qquad (\quad)^2$$

$$x^2 + 2x + 1 + 1 = x^4 + 1$$

$$x^2 + 2x + 2 = x^4 + 1$$

Asimismo, la igualdad elevamos al cubo:

$$x + 1 = -x^2 \qquad (\quad)^3$$

$$x^3 + 1 + 3(x)(1)\underbrace{(x+1)}_{-x^2} = -x^6$$

$$x^3 + 1 - 3x^3 = -x^6$$

$$x^6 + 1 = 2x^2$$

Reemplazando las igualdades en la expresión a calcular:

$$\frac{x^4\left(x^4+1\right)}{x^6+1}$$

$$\frac{x^4\left(x^2+2x+2\right)}{2x^3}$$

$$\frac{x\left(x^2+2\left(x+1\right)\right)}{2}$$

$$\frac{x\left(x^2-2x^2\right)}{2}$$

$$\frac{x\left(-x^2\right)}{2}$$

$$\frac{-x^3}{2} \quad \text{Recordar que: } x^3=1$$

$$-\frac{1}{2}$$

Por lo tanto, el valor de $\frac{x^4\left(x^4+1\right)}{x^6+1}$ es igual a $-\frac{1}{2}$.

Ejercicio 13

Si se cumple:

$$\begin{cases} x^3 = 8; \quad x \neq 2 \\ y^3 = -1; \quad y \neq -1 \end{cases}$$

Halle el valor de:

$$\left(x^2 + 2x + 3\right)\left(2y^2 - 2y + 5\right)$$

Empezando a operar con la primera condición:

$$\begin{aligned} x^3 &= 8 \\ x^3 - 8 &= 0 \\ \underbrace{(x-2)}_{x\neq 2}\underbrace{\left(x^2 + 2x + 4\right)}_{=0} &= 0 \\ x^2 + 2x + 4 &= 0 \end{aligned}$$

Caso similar, con la segunda ecuación:

$$\begin{aligned} y^3 &= -1 \\ y^3 + 1 &= 0 \\ \underbrace{(y+1)}_{y\neq -1}\underbrace{\left(y^2 - y + 1\right)}_{=0} &= 0 \\ y^2 - y + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Reemplazando las igualdades en la expresión a calcular:

$$\begin{aligned} &\left(x^2 + 2x + 3\right)\left(2y^2 - 2y + 5\right) \\ &\left(\underbrace{x^2 + 2x + 4}_{0} - 1\right)\left[2\underbrace{\left(y^2 - y + 1\right)}_{0} + 3\right] \\ &(0-1)(0+3) \\ &-3 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el valor de la expresión $(x^2 + 2x + 3)(2y^2 - 2y + 5)$ es igual a -3.

Ejercicio 14

Si:

$$25^x + 9^x = 2\left(15^x\right)$$

Determine el valor de:

$$E = \frac{5^{-7x+1} + 3^{-7x+2}}{7\left(5^{-7x-1}\right)}$$

Empezando a operar y dándole forma:

$$25^x + 9^x = 2\left(15^x\right)$$

$$\left(5^x\right)^2 + \left(3^x\right)^2 = 2\left(5^x\right)\left(3^x\right)$$

$$\left(5^x\right)^2 - 2\left(5^x\right)\left(3^x\right) + \left(3^x\right)^2 = 0$$

$$\left(5^x - 3^x\right)^2 = 0$$

$$5^x = 3^x$$

Por ende, el valor que cumple la igualdad es $x = 0$. Por lo que reemplazando:

$$E = \frac{5^{-7x+1} + 3^{-7x+2}}{7\left(5^{-7x-1}\right)}$$

$$E = \frac{5^{-7(0)+1} + 3^{-7(0)+2}}{7\left(5^{-7(0)-1}\right)}$$

$$E = \frac{5^1 + 3^2}{7\left(5^{-1}\right)}$$

$$E = \frac{5+9}{7 \div 5}$$

$$E = \frac{14 \times 5}{7}$$

$$E = 10$$

Por lo tanto, el valor de $E = 10$.

Ejercicio 15

Sabiendo que:

$$a\left(b+c\right)=-bc$$

$$a+b+c=2$$

Encontrar el valor de:

$$a^2+b^2+c^2$$

Empezando a operar la primera expresión:

$$a\left(b+c\right)=-bc$$

$$ab+ac=-bc$$

$$ab+ac+bc=0$$

Asimismo, elevando al cuadrado la segunda expresión:

$$a+b+c=2 \quad (\quad)^2$$

$$a^2+b^2+c^2+2\underbrace{\left(ab+ac+bc\right)}_{0}=4$$

$$a^2+b^2+c^2=4$$

Por lo tanto, el valor de la expresión $a^2+b^2+c^2$ es 4.

Ejercicio 16

Si se cumple que:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 66; \quad x > y$$

Calcular:

$$M = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{xy}}{x - y}}$$

Empezando a operar:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 66$$

$$\frac{x^2 + y^2}{xy} = 66$$

$$x^2 + y^2 = 66xy$$

Encontrando el valor de $x - y$:

$$(x - y)^2 = \underbrace{x^2 + y^2}_{66xy} - 2xy$$

$$(x - y)^2 = 66xy - 2xy$$

$$(x - y)^2 = 64xy$$

$$x - y = \sqrt{64xy}$$

Reemplazando los valores en la ecuación:

$$M = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{xy}}{x - y}}$$

$$M = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{64xy}}}$$

$$M = \sqrt[3]{\frac{1}{8}}$$

$$M = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto, el valor M es igual a $\frac{1}{2}$.

Ejercicio 17

Si:

$$b^x + b^y = 3$$

$$x + y = 0$$

Calcular:

$$b^{2x} + b^{2y}$$

Empezando a operar la primera condición:

$$b^x + b^y = 3 \qquad (\quad)^2$$

$$b^{2x} + 2b^{x+y} + b^{2y} = 9 \qquad \text{Recordar que } x + y = 0$$

$$b^{2x} + b^{2y} = 9 - 2$$

$$b^{2x} + b^{2y} = 7$$

Por lo tanto, el valor de $b^{2x} + b^{2y}$ es igual a 7.

Ejercicio 18

Si:

$$\frac{1+a^2}{a} = \sqrt{2}$$

Calcular el valor de:

$$F = a^9 + a^{-9}$$

Empezando a operar:

$$\frac{1+a^2}{a} = \sqrt{2}$$

$$\frac{1}{a} + a = \sqrt{2} \qquad (\quad)^3$$

$$\frac{1}{a^3} + a^3 + 3\left(\frac{1}{a}\right)(a)\left(\frac{1}{a} + a\right) = \left(\sqrt{2}\right)^3 \qquad \text{Recordar: } \frac{1}{a} + a = \sqrt{2}$$

$$\frac{1}{a^3} + a^3 + 3\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

$$\frac{1}{a^3} + a^3 = -\sqrt{2}$$

Volviendo a elevar al cubo la expresión:

$$\frac{1}{a^3} + a^3 = -\sqrt{2} \qquad (\quad)^3$$

$$\frac{1}{a^9} + a^9 + 3\left(\frac{1}{a^3}\right)(a^3)\left(\frac{1}{a^3} + a^3\right) = \left(-\sqrt{2}\right)^3 \qquad \text{Recordar: } \frac{1}{a^3} + a^3 = -\sqrt{2}$$

$$\frac{1}{a^9} + a^9 + 3\left(-\sqrt{2}\right) = -2\sqrt{2}$$

$$\frac{1}{a^9} + a^9 = -2\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$$

$$\underbrace{\frac{1}{a^9} + a^9}_{F} = \sqrt{2}$$

Por lo tanto, el valor de F es $\sqrt{2}$.

Ejercicio 19

Si:

$$\sqrt{(a+b)^2-(a-b)^2}=a+b$$

Calcule:

$$\left(\frac{a}{b}+2\right)\left(\frac{a^3+b^3}{b^3}\right)+a^2-b^2$$

Empezando a operar la condición dada:

$$\sqrt{(a+b)^2-(a-b)^2}=a+b \qquad (\quad)^2$$

$$(a+b)^2-(a-b)^2=(a+b)^2 \qquad \text{Aplicando la identidad de Legendre}$$

$$4ab=a^2+2ab+b^2$$

$$a^2-2ab+b^2=0$$

$$(a-b)^2=0$$

$$a=b$$

Reemplazando la igualdad en el valor a calcular:

$$\left(\frac{a}{b}+2\right)\left(\frac{a^3+b^3}{b^3}\right)+a^2-b^2$$

$$\left(\frac{a}{a}+2\right)\left(\frac{a^3+a^3}{a^3}\right)+a^2-a^2$$

$$(1+2)\left(\frac{2a^3}{a^3}\right)$$

$$(3)\,(2)$$

$$6$$

Por lo tanto, el valor de la expresión $\left(\frac{a}{b}+2\right)\left(\frac{a^3+b^3}{b^3}\right)+a^2-b^2$ es igual a 6.

Ejercicio 20

Halle el valor de:

$$\frac{3\left(a^{14}+b^{14}\right)}{2\left(a^{7}b^{7}\right)}$$

Si se sabe que:

$$\frac{a^2}{b}-\frac{b^2}{a}=3\left(a-b\right)$$

Empezando a operar:

$$\frac{a^2}{b}-\frac{b^2}{a}=3(a-b)$$

$$a^3-b^3=3ab(a-b)$$

$$(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)=3ab(a-b)$$

$$a^2+ab+b^2=3ab$$

$$a^2-2ab+b^2=0$$

$$(a-b)^2=0$$

$$a=b$$

Reemplazando la igual en la expresión:

$$\frac{3\left(a^{14}+b^{14}\right)}{2\left(a^{7}\times b^{7}\right)}$$

$$\frac{3\left(a^{14}+a^{14}\right)}{2\left(a^{7}\times a^{7}\right)}$$

$$\frac{3\cdot 2\left(a^{14}\right)}{2\left(a^{14}\right)}$$

$$3$$

Por lo tanto, el valor de $\frac{3\left(a^{14}+b^{14}\right)}{2\left(a^{7}b^{7}\right)}$ es igual a 3.

Ejercicio 21

Si se cumple que:

$$\begin{cases} a^3 + b^3 = 40 \\ a + b = 4 \end{cases}$$

Calcular:

$$a^2 + b^2$$

Empezando a operar:

$$a + b = 4 \qquad (\quad)^3$$

$$\underbrace{a^3 + b^3}_{40} + 3ab\underbrace{(a + b)}_{4} = 64$$

$$3ab(4) = 64 - 40$$

$$12ab = 24$$

$$ab = 2$$

Ahora, volviendo a utilizar la igualdad y elevando al cuadrado:

$$a + b = 4 \qquad (\quad)^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 16 \qquad \text{Recordar que } ab = 2$$

$$a^2 + 2(2) + b^2 = 16$$

$$a^2 + b^2 = 16 - 4$$

$$a^2 + b^2 = 12$$

Por lo tanto, el valor de $a^2 + b^2$ es igual a 12.

Ejercicio 22

Si se cumple:

$$x^1 + x^{-1} = 5$$

Calcular:

$$x^1 - x^{-1}$$

Empezando a operar:

$$x + \frac{1}{x} = 5 \qquad (\quad)^2$$

$$x^2 + 2\left(x\right)\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^2} = 25$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 25 - 2$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 23$$

Siguiendo operando para calcular lo solicitado:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 23$$

$$x^2 - 2\left(x\right)\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^2} = 23 - 2\left(x\right)\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\underbrace{x^2 - 2\left(x\right)\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^2}}_{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2} = 23 - 2$$

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 21$$

$$x - \frac{1}{x} = \sqrt{21}$$

Por lo tanto, el valor de $x^1 - x^{-1}$ es igual a $\sqrt{21}$.

Ejercicio 23

Si:

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=1$$

Encontrar el valor de:

$$G=\sqrt[3]{\frac{(x+y)^4-(x-y)^4}{x^2y^2}}$$

Empezando a operar la condición dada:

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=1$$

$$\frac{x^2+y^2}{xy}=1$$

$$x^2+y^2=xy$$

Reemplazando la igualdad en el valor a calcular:

$$G=\sqrt[3]{\frac{(x+y)^4-(x-y)^4}{x^2y^2}}$$

$$G=\sqrt[3]{\frac{\left\{(x+y)^2\right\}^2-\left\{(x-y)^2\right\}^2}{x^2y^2}}$$

$$G=\sqrt[3]{\frac{\left\{x^2+y^2+2xy\right\}^2-\left\{x^2+y^2-2xy\right\}^2}{x^2y^2}}$$

Recordar: $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$

$$G=\sqrt[3]{\frac{4\cdot(x^2+y^2)\cdot 2xy}{x^2y^2}}$$

$$G=\sqrt[3]{\frac{8xy\,(x^2+y^2)}{x^2y^2}}$$

Recordar: $x^2+y^2=xy$

$$G=\sqrt[3]{\frac{8x^2y^2}{x^2y^2}}$$

$$G=\sqrt[3]{8}=2$$

Por lo tanto, el valor de la expresión $G=\sqrt[3]{\frac{(x+y)^4-(x-y)^4}{x^2y^2}}$ es igual a 2.

Ejercicio 24

Halle el valor de:

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$$

Si se sabe que:

$$x+y=\sqrt{5}, \quad xy=2$$

Empezando a operar:

$$x+y=\sqrt{5} \qquad (\quad)^2$$

$$x^2+2\underbrace{xy}_{2}+y^2=5$$

$$x^2+2(2)+y^2=5$$

$$x^2+y^2=1$$

Reemplazando las igualdades en la expresión:

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$$

$$\frac{x^2+y^2}{xy}$$

$$\frac{1}{2}$$

Por lo tanto, el valor de $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$ es igual a $\frac{1}{2}$.

Ejercicio 25

Si se cumple:

$$b^x + b^{-x} = \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}$$

Calcular:

$$b^{4x} + b^{-4x}$$

Empezando a operar:

$$b^x + \frac{1}{b^x} = \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} \qquad (\quad)^2$$

$$b^{2x} + 2\left(b^x\right)\left(\frac{1}{b^x}\right) + \frac{1}{b^{2x}} = \frac{3}{2} + 2\sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}$$

$$b^{2x} + \frac{1}{b^{2x}} + 2 = \frac{4}{2} + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$b^{2x} + \frac{1}{b^{2x}} = \sqrt{3} \qquad (\quad)^2$$

$$b^{4x} + 2\left(b^{2x}\right)\left(\frac{1}{b^{2x}}\right) + \frac{1}{b^{4x}} = 3$$

$$b^{4x} + \frac{1}{b^{4x}} = 1$$

El valor de la expresión $b^{4x} + b^{-4x}$ es 1.

Ejercicio 26

Si se conoce que:

$$\frac{a^2+b^2}{2}+1=a+b$$

Indique el valor de:

$$M=\frac{a^3+b^2}{a^2+b^3}$$

Empezando a operar la condición proporcionada:

$$\frac{a^2+b^2}{2}+1=a+b$$

$$a^2+b^2+2=2a+2b$$

$$\underbrace{\left(a^2-2a+1\right)}_{(a-1)^2}+\underbrace{\left(b^2-2b+1\right)}_{(b-1)^2}=0$$

$$(a-1)^2+(b-1)^2=0$$

Es de precisar, que para números reales ($\mathbb{R}$), la expresión $x^2+y^2=0$, implica que $x=0$ e $y=0$, por ende:

$$(a-1)^2+(b-1)^2=0$$

$$a=1 \quad \& \quad b=1$$

Reemplazando la igualdad en M:

$$M=\frac{a^3+b^2}{a^2+b^3}$$

$$M=\frac{1^3+1^2}{1^2+1^3}$$

$$M=\frac{1+1}{1+1}$$

$$M=\frac{2}{2}$$

$$M=1$$

Por lo tanto, el valor de $M=\dfrac{a^3+b^2}{a^2+b^3}$ es igual a 1.

Ejercicio 27

Si se tiene las siguientes condiciones:

$$4 = a + b + c$$

$$3 = ab + bc + ac$$

$$2 = abc$$

Determine el valor de:

$$(a + b)(b + c)(c + a)$$

Empezando a operar:

$$a + b + c = 4 \qquad (\quad)^3$$

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3\underbrace{(a + b + c)}_{4}\underbrace{(ab + bc + ac)}_{3} - 3\underbrace{(abc)}_{2} = 64$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = 64 - \underbrace{(3 \times 4 \times 3)}_{36} + \underbrace{(3 \times 2)}_{6}$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = 34$$

Volviendo a operar y utilizando otra expresión del trinomio al cubo:

$$a + b + c = 4 \qquad (\quad)^3$$

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(b + c)(a + c) = 64$$

Utilizando lo obtenido en el primer cálculo $a^3 + b^3 + c^3 = 34$, entonces:

$$\underbrace{a^3 + b^3 + c^3}_{34} + 3(a + b)(b + c)(a + c) = 64$$

$$3(a + b)(b + c)(a + c) = 64 - 34$$

$$3(a + b)(b + c)(a + c) = 30$$

$$(a + b)(b + c)(a + c) = 10$$

Por lo tanto, el valor de $(a + b)(b + c)(a + c)$ es igual a 10.

Ejercicio 28

Si:

$$a + b = -c$$

Calcule el valor de:

$$\left[\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+ac+bc}\right]\left[\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ac}+\frac{c^2}{ab}\right]$$

Empezando operar:

$$a+b=-c \quad \Longrightarrow \quad a+b+c=0$$

Por las propiedades condicionales de $a+b+c=0$ tenemos:

- $a^2+b^2+c^2=-2\left(ab+bc+ac\right)$.
- $a^3+b^3+c^3=3abc$.

Entonces, reemplazando en la expresión:

$$\left[\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+ac+bc}\right]\left[\frac{a^2}{bc}\times\frac{a}{a}+\frac{b^2}{ac}\times\frac{b}{b}+\frac{c^2}{ab}\times\frac{c}{c}\right]$$

$$\left[\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+ac+bc}\right]\left[\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}\right] \quad \text{Reemplazando por las condiciones}$$

$$\left[\frac{-2\left(ab+bc+ac\right)}{ab+ac+bc}\right]\left[\frac{3abc}{abc}\right]$$

$$\left(-2\right)\left(3\right)$$

$$6$$

Por lo tanto, el valor de $\left[\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+ac+bc}\right]\left[\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ac}+\frac{c^2}{ab}\right]$ es 6.

Ejercicio 29

Sabiendo que:

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ ab+bc+ac=-7 \\ abc=-6 \end{cases}$$

Calcular:

$$a^{-2}+b^{-2}+c^{-2}$$

Empezando a operar:

$$ab+bc+ac=-7 \qquad (\quad)^2$$

$$a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2+2\left(ab^2c+a^2bc+abc^2\right)=49 \qquad \text{Recordar que } abc=-6$$

$$a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2+2\left(-6b-6a-6c\right)=49$$

$$a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2-12\underbrace{(a+b+c)}_{0}=49$$

$$a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2=49$$

Encontrando el valor de la expresión:

$$\frac{1}{a^2}\times\frac{b^2c^2}{b^2c^2}+\frac{1}{b^2}\times\frac{a^2c^2}{a^2c^2}+\frac{1}{c^2}\times\frac{a^2b^2}{a^2b^2}$$

$$\frac{b^2c^2}{a^2b^2c^2}+\frac{a^2c^2}{a^2b^2c^2}+\frac{a^2b^2}{a^2b^2c^2}$$

$$\frac{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2}{(abc)^2} \qquad \text{Reemplazando por las condiciones}$$

$$\frac{-49}{(-6)^2}$$

$$-\frac{49}{36}$$

Por lo tanto, el valor de $a^{-2}+b^{-2}+c^{-2}$ es $-\dfrac{49}{36}$.

Ejercicio 30

Se sabe que:

$$(ab)^{-1} + (ac)^{-1} + (bc)^{-1} = -1$$

Calcular:

$$\frac{(a+1)(b+1)(c+1)}{(a-1)(b-1)(c-1)}$$

Desarrollando la condición dada:

$$(ab)^{-1} + (ac)^{-1} + (bc)^{-1} = -1$$

$$\frac{1}{ab} \cdot \frac{c}{c} + \frac{1}{ac} \cdot \frac{b}{b} + \frac{1}{bc} \cdot \frac{a}{a} = -1$$

$$\frac{c}{abc} + \frac{b}{abc} + \frac{c}{abc} = -1$$

$$\frac{a+b+c}{abc} = -1$$

$$a+b+c = -abc$$

$$a+b+c+abc = 0$$

Desarrollando el numerador y denominador por separado:

- **Numerador:**

$$(a+1)(b+1)(c+1) = 1^3 + (a+b+c) \cdot 1^2 + (ab+bc+ac) \cdot 1 + abc$$

$$= 1 + \underbrace{(a+b+c)}_{-abc} + abc + (ab+bc+ac)$$

$$(a+1)(b+1)(c+1) = 1 + ab + bc + ac$$

- **Denominador:**

$$(a-1)(b-1)(c-1) = -1^3 + (a+b+c)\,1^2 - (ab+bc+ac) + abc$$

$$= -1 + \underbrace{(a+b+c)}_{-abc} + abc - (ab+bc+ac)$$

$$= -(1 + ab + bc + ac)$$

Reemplazando las equivalencias en la expresión a calcular:

$$\frac{(a+1)(b+1)(c+1)}{(a-1)(b-1)(c-1)}$$

$$\frac{1+ab+bc+ac}{-(1+ab+bc+ac)}$$

$$-1$$

Por lo tanto, el valor de $\dfrac{(a+1)(b+1)(c+1)}{(a-1)(b-1)(c-1)}$ es igual a -1.

Ejercicio 31

Sabiendo que x e y son diferentes, además:

$$x + y = \frac{1}{x^{-1} + y^{-1}}$$

Reducir:

$$\frac{(xy)^3}{(x+y)^6 - x^6 - y^6}$$

Empezando a operar la condición.

$$x + y = \frac{1}{x^{-1} + y^{-1}}$$

$$x + y = \frac{xy}{x+y}$$

$$(x+y)^2 = xy$$

$$x^2 + 2xy + y^2 = xy$$

$$x^2 + y^2 = -xy$$

Elevando al cubo la igualdad obtenida:

$$x^2 + y^2 = -xy \qquad (\quad)^3$$

$$x^6 + y^6 + 3\left(x^2y^2\right)(-xy) = -x^3y^3$$

$$x^6 + y^6 - 3x^3y^3 = -x^3y^3$$

$$x^6 + y^6 = 2x^3y^3$$

Reemplazando las igualdades en la expresión a reducir:

$$\frac{(xy)^3}{(x+y)^6 - x^6 - y^6}$$

$$\frac{(xy)^3}{(xy)^3 - (x^6 + y^6)}$$

$$\frac{(xy)^3}{(xy)^3 - 2x^3y^3}$$

$$\frac{1}{1-2} = -1$$

Ejercicio 32

Si se sabe que que:

$$a^3 + b^3 + c^3 = 5$$

$$(a+b)(a+c)(b+c)\left(a^2 - ab + b^2\right)\left(a^2 - ac + c^2\right)\left(b^2 - bc + c^2\right) = 40$$

Halle el valor de:

$$a^9 + b^9 + c^9$$

Empezando a operar y haciendo uso de la segunda condición, la cual, ordenando convenientemente:

$$(a+b)(a+c)(b+c)\left(a^2 - ab + b^2\right)\left(a^2 - ac + c^2\right)\left(b^2 - bc + c^2\right) = 40$$

$$\underbrace{(a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)}_{(a^3+b^3)}\underbrace{(a+c)\left(a^2 - ac + c^2\right)}_{(b^3+c^3)}\underbrace{(b+c)\left(b^2 - bc + c^2\right)}_{(a^3+c^3)} = 40$$

$$\left(a^3 + b^3\right)\left(b^3 + c^3\right)\left(a^3 + c^3\right) = 40$$

Ahora, haciendo uso de la primera condición y haciendo uso de la primera condición:

$$a^3 + b^3 + c^3 = 5 \qquad (\quad)^3$$

$$a^9 + b^9 + c^9 + 3\underbrace{\left(a^3 + b^3\right)\left(b^3 + c^3\right)\left(a^3 + c^3\right)}_{40} = 125$$

$$a^9 + b^9 + c^9 + 3(40) = 125$$

$$a^9 + b^9 + c^9 + 120 = 125$$

$$a^9 + b^9 + c^9 = 5$$

Por lo tanto, el valor de $a^9 + b^9 + c^9$ es igual a 5.

Ejercicio 33

Si se tiene la siguiente condición:

$$ax + by + cz + abcxyz = 0$$

Calcular el valor de:

$$\frac{(ax+1)(by+1)(cz+1)}{(ax-1)(by-1)(cz-1)}$$

Empezando a operar y a partir de la condición se obtiene:

$$ax + by + cz + abcxyz = 0$$

$$ax + by + cz = -abcxyz$$

Asimismo, es preciso recordar que:

$$(x+a)(x+b)(x-c) = x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ac)x + abc$$

Por lo que desarrollando la expresión a calcular:

$$\frac{(ax+1)(by+1)(cz+1)}{(ax-1)(by-1)(cz-1)}$$

$$\frac{1^3 + \overbrace{(ax+by+cz)}^{-abcxyz}\cdot 1^2 + (abxy+acxz+bcyz)\cdot 1 + abcxyz}{-1^3 - \underbrace{(ax+by+cz)}_{-abcxyz}\cdot 1^2 + (abxy+acxz+bcyz)(-1) - abcxyz}$$

$$\frac{1 - abcxyz + (abxy+acxz+bcyz) + abcxyz}{-1 + abcxyz - (abxy+acxz+bcyz) - abcxyz}$$

$$\frac{1 + abxy + acxz + bcyz}{-(1 + abxy + acxz + bcyz)}$$

$$-1$$

Por lo tanto, el valor de $\dfrac{(ax+1)(by+1)(cz+1)}{(ax-1)(by-1)(cz-1)}$ es -1.

Ejercicio 34

Si:

$$\sqrt{mn+\sqrt{p}}+\sqrt{mn-\sqrt{p}}=\sqrt{p}$$

Hallar el valor de:

$$\sqrt{mn+\sqrt{p}}-\sqrt{mn-\sqrt{p}}$$

Sea $mp = a$ y $\sqrt{p} = b$, por lo que:

$$\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}=b$$

Por lo tanto, el valor a calcular es:

$$R=\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}$$

Para ello, se multiplica a ambos lados por b que es equivalente a $\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}$:

$$R\cdot b=\left(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}\right)\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}\right)$$

$$R\cdot b=\left(\sqrt{a+b}\right)^2-\left(\sqrt{a-b}\right)^2$$

$$R\cdot b=a+b-a+b$$

$$R\cdot b=2b$$

$$R=2$$

Por lo tanto, el valor de $\sqrt{mn+\sqrt{p}}-\sqrt{mn-\sqrt{p}}$ es 2.

Ejercicio 35

Si:

$$(x-1)^2 = x$$

Calcular:

$$M = \sqrt[3]{\frac{x^2+5x+1}{x}}$$

Empezando a operar la condición:

$$(x-1)^2 = x$$

$$x^2 - 2x + 1 + 7x = x + 7x$$

$$x^2 + 5x + 1 = 8x$$

Se pide calcular M y utilizando la igualdad obtenida:

$$M = \sqrt[3]{\frac{x^2+5x+1}{x}}$$

$$M = \sqrt[3]{\frac{8x}{x}}$$

$$M = \sqrt[3]{8}$$

$$M = 2$$

Por lo tanto, el valor de M es igual a 2.

Ejercicio 36

Si se cumple:

$$\begin{cases} p+q+r=2 \\ pq+pr=-qr \end{cases}$$

Calcular:

$$p^2+q^2+r^2$$

Empezando a operar con la segunda condición:

$$pq+pr=-qr$$

$$pq+pr+qr=0$$

Asimismo, usando la primera condición:

$$p+q+r=2 \qquad (\quad)^2$$

$$p^2+q^2+r^2+2\underbrace{(pq+pr+qr)}_{0}=4$$

$$p^2+q^2+r^2=4$$

Por lo tanto, el valor de $p^2+q^2+r^2$ es igual a 4.

Ejercicio 37

Sabiendo que:

$$\begin{cases} a = \sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{2} \\ b = \sqrt{2} + \sqrt{3} - 2\sqrt{5} \\ c = \sqrt{5} - 2\sqrt{3} \end{cases}$$

Hallar el valor numérico de:

$$\frac{\left(a^3 + b^3 + c^3\right)\left(a^2 + b^2 + c^2\right)}{abc\left(ab + bc + ac\right)}$$

Empezando a operar y sumando los tres valores:

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{2} \quad + \\ b &= \sqrt{2} + \sqrt{3} - 2\sqrt{5} \\ c &= \sqrt{5} - 2\sqrt{3} \\ \hline a + b + c &= 0 \end{aligned}$$

A través de las identidades condicionales de $a + b + c = 0$, obtenemos:

- $a^2 + b^2 + c^2 = -2\left(ab + bc + ac\right)$.
- $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

Reemplazando en la expresión:

$$\frac{\left(a^3 + b^3 + c^3\right)\left(a^2 + b^2 + c^2\right)}{abc\left(ab + bc + ac\right)}$$

$$\frac{(3abc) \times -2\left(ab + bc + ac\right)}{abc\left(ab + bc + ac\right)}$$

$$(3)(-2)$$

$$-6$$

Por lo tanto, el valor numérico de $\dfrac{\left(a^3 + b^3 + c^3\right)\left(a^2 + b^2 + c^2\right)}{abc\left(ab + bc + ac\right)}$ es igual a -6.

Ejercicio 38

Sabiendo que:

$$\frac{x-z}{z-y}+\frac{z^2}{(x+y)(z-y)}=1$$

Hallar:

$$J=\left(\frac{z-x}{y}\right)^2+\left(\frac{x+y}{z}\right)^2+\left(\frac{z-y}{x}\right)^2$$

Empezando a operar la condición:

$$\frac{x-z}{z-y}\times\frac{(x+y)}{(x+y)}+\frac{z^2}{(x+y)(z-y)}=1$$

$$(x-z)(x+y)+z^2=(x+y)(z-y)$$

$$x^2+xy-xz-zy+z^2=xz-xy+yz-y^2$$

$$\underbrace{x^2+y^2+z^2+2(xy-xz-yz)}_{(x+y-z)^2}=0$$

$$(x+y-z)^2=0$$

$$x+y-z=0$$

De la igualdad $x+y-z=0$, se obtienen las siguientes igualdades:

- $x+y=z$
- $z-y=x$
- $z-x=y$

Reemplazando las igualdades en la expresión J:

$$J=\left(\frac{z-x}{y}\right)^2+\left(\frac{x+y}{z}\right)^2+\left(\frac{z-y}{x}\right)^2$$

$$J=\left(\frac{y}{y}\right)^2+\left(\frac{z}{z}\right)^2+\left(\frac{x}{x}\right)^2$$

$$J=(1)^2+(1)^2+(1)^2$$

$$J=3$$

Por lo tanto, el valor de $J=\left(\frac{z-x}{y}\right)^2+\left(\frac{x+y}{z}\right)^2+\left(\frac{z-y}{x}\right)^2$ es igual a 3.

Ejercicio 39

Si se cumple que:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=1$$

Entonces, el valor de:

$$E=\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}$$

Empezando a operar:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=1$$

$$\frac{a(a+b+c)}{b+c}+\frac{b(a+b+c)}{c+a}+\frac{c(a+b+c)}{a+b}=(a+b+c)$$

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{a(b+c)}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{b(a+c)}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}+\frac{c(a+b)}{a+b}=a+b+c$$

$$\underbrace{\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}}_{E}+a+b+c=a+b+c$$

$$E=0$$

Por lo tanto, el valor de E es 0.

Ejercicio 40

Si se sabe:

$$\begin{cases} a+b+c=1 \\ a^3+b^3+c^3=4 \end{cases}$$

Calcular:

$$M=\frac{1}{a+bc}+\frac{1}{b+ac}+\frac{1}{c+ab}$$

Recordar las identidades condicionales cuando $x+y+z=0$, entonces, $x^3+y^3+z^3=3xyz$, por lo que dando forma:

- **Primer caso:**

$$\begin{aligned} a+b+(c-1)&=0 \qquad\qquad (\quad)^3 \\ a^3+b^3+(c-1)^3&=3ab\,(c-1) \\ \underbrace{a^3+b^3+c^3}_{4}-1^3-3\,(c)\,(1)\,(c-1)&=3ab\,(c-1) \\ 3c\,(c-1)+3ab\,(c-1)&=3 \\ 3\,(ab+c)\,(c-1)&=3 \qquad\qquad \div 3 \\ (ab+c)\,(c-1)&=1 \\ c-1&=\frac{1}{ab+c} \end{aligned}$$

- **Segundo caso:**

$$\begin{aligned} a+c+(b-1)&=0 \qquad\qquad (\quad)^3 \\ a^3+c^3+(b-1)^3&=3ac\,(b-1) \\ \underbrace{a^3+c^3+b^3}_{4}-1^3-3\,(b)\,(1)\,(b-1)&=3ac\,(b-1) \\ 3b\,(b-1)+3ac\,(b-1)&=3 \\ 3\,(ac+b)\,(b-1)&=3 \qquad\qquad \div 3 \\ (ac+b)\,(b-1)&=1 \\ b-1&=\frac{1}{ac+b} \end{aligned}$$

- **Tercer caso:**

$$b + c + (a-1) = 0 \qquad {\color{red}(\quad)^3}$$

$$b^3 + c^3 + (a-1)^3 = 3bc\,(a-1)$$

$$\underbrace{b^3 + c^3 + a^3}_{4} - 1^3 - 3\,(a)\,(1)\,(a-1) = 3bc\,(a-1)$$

$$3a\,(a-1) + 3bc\,(a-1) = 3$$

$$3\,(bc+a)\,(a-1) = 3 \qquad {\color{red}\div 3}$$

$$(bc+a)\,(a-1) = 1$$

$$a - 1 = \frac{1}{bc+a}$$

Reemplazando las igualdades en la expresión a calcular:

$$M = \frac{1}{a+bc} + \frac{1}{b+ac} + \frac{1}{c+ab}$$

$$M = (a-1) + (b-1) + (c-1)$$

$$M = \underbrace{a+b+c}_{1} - 3$$

$$M = 1 - 3$$

$$M = -2$$

Por lo tanto, el valor de $M = \dfrac{1}{a+bc} + \dfrac{1}{b+ac} + \dfrac{1}{c+ab}$ es igual a -2.

Ejercicio 41

Si se sabe:

$$\begin{cases} abc = 0 \\ a+b+c = 1 \end{cases}$$

Calcule el valor numérico de:

$$E = \frac{a^2+b^2+c^2}{2} - \frac{a^3+b^3+c^3}{3}$$

Empezando a operar:

$$a+b+c = 1 \qquad (\quad)^2$$

$$a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac) = 1$$

$$a^2+b^2+c^2 = 1-2(ab+bc+ac)$$

De manera similar:

$$a+b+c = 1 \qquad (\quad)^3$$

$$a^3+b^3+c^3+3(\underbrace{a+b+c}_{1})(ab+bc+ac)-3\underbrace{abc}_{0} = 1$$

$$a^3+b^3+c^3+3(ab+bc+ac) = 1$$

$$a^3+b^3+c^3 = 1-3(ab+bc+ac)$$

Se pide calcular el valor numérico de E, por lo que reemplazando las equivalencias:

$$\begin{aligned} E &= \frac{a^2+b^2+c^2}{2} - \frac{a^3+b^3+c^3}{3} \\ &= \frac{1-2(ab+bc+ac)}{2} - \frac{1-3(ab+bc+ac)}{3} \\ &= \frac{1}{2} - (ab+bc+ac) - \frac{1}{3} + (ab+bc+ac) \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Por lo tanto, el valor de E es $\frac{1}{6}$.

Ejercicio 42

Si se cumple que:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$$

Hallar un equivalente de:

$$\frac{a^4+b^4+c^4-4abc\,(a+b+c)}{(a+b+c)^4}$$

Empezando a operar:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$$

$$\frac{bc+ac+ab}{abc}=0 \qquad abc\neq 0$$

Se obtiene que $bc+ac+ab=0$, por lo que siguiendo operando:

$$bc+ac+ab=0 \qquad (\quad)^2$$

$$a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2+2(ab^2c+a^2bc+abc^2)=0 \qquad (\bigstar)$$

$$a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2=-2abc(a+b+c)$$

Hacemos que $M=a+b+c$, por ello:

$$M=a+b+c \qquad (\quad)^2$$

$$M^2=a^2+b^2+c^2+2(\underbrace{ab+ac+bc}_{0})$$

$$M^2=a^2+b^2+c^2 \qquad (\quad)^2$$

$$M^4=a^4+b^4+c^4+2(\underbrace{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}_{\bigstar})$$

$$M^4=a^4+b^4+c^4+2\left(-2abc(a+b+c)\right)$$

$$M^4=a^4+b^4+c^4+-4abc(a+b+c)$$

$$\therefore\ (a+b+c)^4=a^4+b^4+c^4+-4abc(a+b+c)$$

Se pide calcular el equivalente de:

$$\frac{a^4+b^4+c^4-4abc\,(a+b+c)}{(a+b+c)^4}=1$$

Por lo tanto, el valor equivalente de la expresión es 1.

Ejercicio 43

Si se cumple:

$$\begin{cases} \sqrt[6]{x}+\sqrt[6]{y}+\sqrt[6]{z}=0 \\ xyz\neq 0 \end{cases}$$

Calcular:

$$\left(\frac{9\sqrt[3]{xyz}-(x+y+z)}{\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{xz}}\right)^4$$

Empezando a operar y por condición: $a+b+c=0$, se obtiene que $a^3+b^3+c^3=3abc$, por lo que se obtiene:

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=3\sqrt[6]{xyz} \qquad (\quad)^2$$

$$x+y+z+2\left(\sqrt{xy}+\sqrt{xz}+\sqrt{yz}\right)=9\sqrt[3]{xyz}$$

$$2\left(\sqrt{xy}+\sqrt{xz}+\sqrt{yz}\right)=9\sqrt[3]{xyz}-(x+y+z)$$

Reemplazando esta igualdad en la expresión a calcular:

$$\left(\frac{9\sqrt[3]{xyz}-(x+y+z)}{\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{xz}}\right)^4$$

$$\left(\frac{2\left(\sqrt{xy}+\sqrt{xz}+\sqrt{yz}\right)}{\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{xz}}\right)^4$$

$$(2)^4$$

$$16$$

Por lo tanto, el valor de la expresión $\left(\frac{9\sqrt[3]{xyz}-(x+y+z)}{\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{xz}}\right)^4$ es igual a 16.

Ejercicio 44

Sabiendo que:

$$\begin{cases} a+b+c=1 \\ ab+bc+ac=2 \\ abc=3 \end{cases}$$

Calcule el valor de S:

$$S=\frac{a}{a+bc}+\frac{b}{b+ac}+\frac{c}{c+ab}$$

Empezando a operar la primera condición:

$$a+b+c=1 \qquad (\quad)^2$$

$$a^2+b^2+c^2+2\underbrace{(ab+bc+ac)}_{2}=1$$

$$a^2+b^2+c^2+2(2)=1$$

$$a^2+b^2+c^2=-3$$

Asimismo, elevando al cuadrado la segunda condición:

$$ab+bc+ac=2 \qquad (\quad)^2$$

$$a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2+2\left(a^4b^2c^2+a^2b^4c^2+a^2b^2c^4\right)=4$$

$$a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2+2\left(9a^2+9b^2+9c^2\right)=4$$

$$a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2+2\cdot 9\cdot \underbrace{\left(a^2+b^2+c^2\right)}_{-3}=4$$

$$a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2-54=4$$

$$a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2=58$$

Desarrollando la expresión S:

$$S=\frac{a}{a+bc}+\frac{b}{b+ac}+\frac{c}{c+ab}$$

$$S=\frac{abc+a^2b^2+a^2c^2+a^3bc+abc+a^2b^2+b^2c^2+ab^3c+abc+a^2c^2+b^2c^2+abc^3}{abc+a^2b^2+a^2c^2+a^3bc+b^2c^2+ab^3c+abc^3+a^2b^2c^2}$$

Agrupando términos semejantes:

$$S=\frac{3\overbrace{abc}^{3}+\overbrace{abc}^{3}\overbrace{\left(a^2+b^2+c^2\right)}^{-3}+2\overbrace{\left(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2\right)}^{58}}{\underbrace{abc}_{3}+\underbrace{(abc)^2}_{3^2}+\underbrace{abc}_{3}\underbrace{\left(a^2+b^2+c^2\right)}_{-3}+\underbrace{\left(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2\right)}_{58}}$$

$$S=\frac{3\,(3)+3\,(-3)+2\,(58)}{3+3^2+3\,(-3)+58}$$

$$S=\frac{9-9+116}{3+9-9+58}$$

$$S=\frac{116}{61}$$

Por lo tanto, el valor de $S=\dfrac{a}{a+bc}+\dfrac{b}{b+ac}+\dfrac{c}{c+ab}$ es igual $\dfrac{116}{61}$.

Ejercicio 45

Sean a y b números reales tales que:

$$a^2 - ab + b^2 = \sqrt{2}\left(a + b - \sqrt{2}\right)$$

Calcule el valor de E:

$$E = \frac{a^3 + b^3 + 2\sqrt{2}}{2ab}$$

Empezando a operar y despejando la condición dada:

$$a^2 - ab + b^2 = \sqrt{2}\left(a + b - \sqrt{2}\right)$$

$$a^2 + b^2 = \sqrt{2}\,(a + b) - 2 + ab$$

Asimismo, trabajando con la igualdad:

$$a^2 - ab + b^2 = \sqrt{2}\left(a + b - \sqrt{2}\right) \qquad \times\,(a+b)$$

$$a^3 + b^3 = \sqrt{2}\,(a + b)^2 - 2\,(a + b)$$

$$a^3 + b^3 = \sqrt{2}\left(a^2 + 2ab + b^2\right) - 2\,(a + b)$$

Reemplazando en la expresión de E:

$$E = \frac{a^3 + b^3 + 2\sqrt{2}}{2ab}$$

$$E = \frac{\sqrt{2}\,(a^2 + 2ab + b^2) - 2\,(a + b) + 2\sqrt{2}}{2ab}$$

$$E = \frac{\sqrt{2}\,(a^2 + b^2) + 2\sqrt{2}ab - 2\,(a + b) + 2\sqrt{2}}{2ab}$$

$$E = \frac{\sqrt{2}\left\{\sqrt{2}\,(a + b) - 2 + ab\right\} + 2\sqrt{2}ab - 2\,(a + b) + 2\sqrt{2}}{2ab}$$

$$E = \frac{2\,(a + b) - 2\sqrt{2} + \sqrt{2}ab - 2\,(a + b) + 2\sqrt{2}}{2ab}$$

$$E = \frac{\sqrt{2}ab}{2ab} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Por lo tanto, el valor de $E = \dfrac{a^3 + b^3 + 2\sqrt{2}}{2ab}$ es igual a $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Ejercicio 46

Si:

$$x = \sqrt[3]{4+2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{4-2\sqrt{2}}$$

Calcule el valor de:

$$\sqrt{x^3 - 6x + 1}$$

Empezando a operar:

$$x = \sqrt[3]{4+2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{4-2\sqrt{2}}$$

$$x^3 = 4 + 2\sqrt{2} + 4 - 2\sqrt{2} + 3\sqrt[3]{4+2\sqrt{2}}\sqrt[3]{4-2\sqrt{2}}(x)$$

$$x^3 = 8 + 3\sqrt[3]{4^2 - (2\sqrt{2})^2}x$$

$$x^3 = 8 + 3\sqrt[3]{8}x$$

$$x^3 = 8 + 6x$$

$$x^3 - 6x = 8$$

Reemplazando la igualdad en la expresión:

$$\sqrt{x^3 - 6x + 1}$$

$$\sqrt{8+1}$$

$$\sqrt{9}$$

$$3$$

Por lo tanto, el valor de la expresión $\sqrt{x^3 - 6x + 1}$ es igual a 3.

Ejercicio 47

Si:

$$a^2 + b^2 + ab = 121$$

$$b^2 + c^2 + bc = 169$$

$$c^2 + a^2 + ca = 400$$

Determinar el valor de:

$$ab + bc + ca$$

Se puede apreciar que las tres ecuaciones tienen la siguiente fórmula:

$$x^2 + y^2 - 2xy\cos\alpha = z^2$$

De dicha ecuación, se sabe que x, y, z son lados de un triángulo, por lo que para hallar el ángulo:

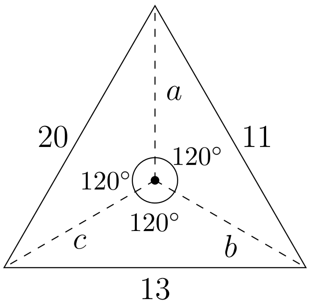
$$-2xy\cos\alpha = xy$$

$$\cos\alpha = -\frac{1}{2}$$

$$\alpha = \arccos -\frac{1}{2}$$

$$\alpha = 120°$$

Por lo que el triángulo que representa las ecuaciones es el siguiente:



Haciendo uso de la fórmula de Herón para determinar el área del triángulo:

$$A = \sqrt{s\left(s-a\right)\left(s-b\right)\left(s-c\right)}$$

Donde s representa el semiperímetro del triángulo, es decir:

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

Reemplazando los valores primero en el cálculo del semiperímetro:

$$s = \frac{20 + 13 + 11}{2}$$
$$s = \frac{44}{2}$$
$$s = 22$$

Haciendo uso del semiperímetro en la fórmula de Herón:

$$A = \sqrt{s\left(s - a\right)\left(s - b\right)\left(s - c\right)}$$
$$A = \sqrt{22\left(22 - 20\right)\left(22 - 13\right)\left(22 - 11\right)}$$
$$A = \sqrt{22 \times 2 \times 9 \times 11}$$
$$A = \sqrt{11^2 \times 2^2 \times 3^2}$$
$$A = 11 \times 3 \times 2$$
$$A = 66$$

El área del triángulo "grande" también lo podemos expresar como la suma de los tres triángulos "pequeños". Para ello, cada área de los triángulos "pequeños" lo podemos determinar con la siguiente fórmula:

$$A = \frac{1}{2} \times \text{Lado 1} \times \text{Lado 2} \times \sin\alpha$$

Por lo tanto:

$$A = \frac{1}{2}ac\sin 120^\circ + \frac{1}{2}ab\sin 120^\circ + \frac{1}{2}bc\sin 120^\circ$$
$$66 = \frac{1}{2}\sin 120^\circ\left(ac + bc + ab\right)$$
$$66 \times 2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(ac + bc + ab\right)$$
$$\frac{66 \times 2 \times 2}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = ac + bc + ab$$
$$\frac{66 \times 2 \times 2 \times \sqrt{3}}{3} = ac + bc + ab$$
$$88\sqrt{3} = ac + bc + ab$$

Por lo tanto, el valor de $ab + bc + ca$ es igual a $88\sqrt{3}$.

Ejercicio 48

Se sabe que:

$$x + \frac{1}{x} = 3$$

Determine el valor de E:

$$E = x^3 + x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$$

Empezando a operar y elevando al cuadrado:

$$x + \frac{1}{x} = 3 \qquad (\quad)^2$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\left(x\right)\left(\frac{1}{x}\right) = 9$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$$

Asimismo, elevando al cubo:

$$x + \frac{1}{x} = 3 \qquad (\quad)^3$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\left(x\right)\left(\frac{1}{x}\right)\underbrace{\left(x + \frac{1}{x}\right)}_{3} = 27$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = 18$$

Determinando el valor de E:

$$E = \underbrace{x^2 + \frac{1}{x^2}}_{7} + \underbrace{x^3 + \frac{1}{x^3}}_{18}$$

$$E = 7 + 18$$

$$E = 25$$

Por lo tanto, el valor de E es igual a 25.

Ejercicio 49

Si:

$$x + \frac{1}{x} = 1$$

Calcular el valor de A:

$$A = \frac{x^6 + x^3 + 1}{x^4 + x^3 + x^2}$$

Empezando a operar la condición y elevando al cubo:

$$x + \frac{1}{x} = 1 \qquad (\quad)^3$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} + 3(x)\left(\frac{1}{x}\right)\underbrace{\left(x + \frac{1}{x}\right)}_{1} = 1$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = -2$$

Se pide:

$$A = \frac{x^6 + x^3 + 1}{x^4 + x^3 + x^2} \qquad \times \frac{x^{-3}}{x^{-3}}$$

$$A = \frac{\overbrace{x^3 + \frac{1}{x^3}}^{-2} + 1}{\underbrace{x + \frac{1}{x}}_{1} + 1}$$

$$A = \frac{-2 + 1}{1 + 1}$$

$$A = -\frac{1}{2}$$

Por lo tanto, el valor de A es igual a $-\frac{1}{2}$.

Ejercicio 50

Si se cumple que:

$$x^2 + xy + y^2 = \frac{y^3}{x-y}$$

Calcular el valor de:

$$\frac{x^6 + y^6}{x^6 - y^6}$$

Empezando a operar:

$$\begin{aligned} x^2 + xy + y^2 &= \frac{x^3}{x-y} \\ (x-y)\left(x^2 + xy + y^2\right) &= y^3 \\ x^3 - y^3 &= y^3 \\ x^3 &= 2y^3 \end{aligned}$$

Reemplazando la igual en la expresión:

$$\frac{x^6 + y^6}{x^6 - y^6} \qquad \color{red}{\left(x^3\right)^2 = \left(2y^3\right)^2}$$

$$\frac{4y^6 + y^6}{4y^6 - y^6}$$

$$\frac{5y^6}{3y^6}$$

$$\frac{5}{3}$$

Por lo tanto, el valor de $\frac{x^6 + y^6}{x^6 - y^6}$ es igual a $\frac{5}{3}$.

Ejercicio 51

Si se cumple que:

$$\frac{a^2+b^2}{1+c} = 1-c = a+b-2$$

Determinar el equivalente numérico de:

$$\sqrt{ab+bc+ac}$$

Empezando a operar, hacemos uso de la primera igualdad:

$$\frac{a^2+b^2}{1+c} = 1-c$$

$$a^2+b^2 = (1-c)(1+c)$$

$$a^2+b^2 = 1^2-c^2$$

$$a^2+b^2+c^2 = 1$$

Asimismo, haciendo uso de la segunda igualdad:

$$a+b-2 = 1-c$$

$$a+b+c = 3 \qquad (\quad)^2$$

$$\underbrace{a^2+b^2+c^2}_{1} + 2(ab+bc+ac) = 9$$

$$2(ab+bc+ac) = 8$$

$$ab+bc+ac = 4 \qquad \sqrt{\quad}$$

$$\sqrt{ab+bc+ac} = 2$$

Por lo tanto, el equivalente numérico de la $\sqrt{ab+bc+ac}$ es igual a 2.

Ejercicio 52

Si se cumple que:

$$\begin{cases} \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = 4 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 10 \end{cases}$$

Calcular el valor de:

$$(xy)^{0.5}$$

Empezando a operar:

$$\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = 4 \qquad (\quad)^2$$

$$\underbrace{\sqrt{x} + \sqrt{y}}_{10} + 2\sqrt{xy} = 16$$

$$10 + 2\sqrt{xy} = 16$$

$$2\sqrt{xy} = 6$$

$$\sqrt{xy} = 3$$

Por lo tanto, el valor de $(xy)^{0.5}$ es 3.

Ejercicio 53

Si se tienen las siguientes condiciones:

$$(a-b)^2-(a-b)=-1$$

Determine el valor de:

$$(a-b)^6$$

Empezando a operar y elevando al cubo la expresión condición:

$$(a-b)^2-(a-b)=-1 \quad (\quad)^3$$

$$(a-b)^6-(a-b)^3-3(a-b)^2(a-b)(-1)=-1$$

$$(a-b)^6-(a-b)^3+3(a-b)^3=-1$$

$$(a-b)^6+2(a-b)^3+1=0$$

Haciendo un cambio de variable $(a-b)^3=x$, entonces:

$$x^2+2x+1=0$$

$$(x+1)^2=0$$

$$x=-1 \quad (\quad)^2$$

$$x^2=1$$

Como x es $(a-b)^3$, entonces x^2 es equivalente a $(a-b)^6$.

Por lo tanto, el valor de la expresión $(a-b)^6$ es igual a 1

Ejercicio 54

Si x e y son diferentes a cero y además:

$$\frac{x^2}{y} - \frac{y^2}{x} = 3\left(x - y\right)$$

Calcular el valor de H:

$$H = \left(\frac{x^y}{y^x} + \frac{y^x}{x^y}\right)^4$$

Empezando a operar:

$$\frac{x^2}{y} \cdot \frac{x}{x} - \frac{y^2}{x} \cdot \frac{y}{y} = 3\left(x - y\right)$$

$$\frac{x^3}{xy} - \frac{y^3}{xy} = 3\left(x - y\right)$$

$$x^3 - y^3 = 3xy\left(x - y\right)$$

$$x^3 - y^3 - 3xy\left(x - y\right) = 0$$

$$\left(x - y\right)^3 = 0$$

$$x = y$$

Se pide calcular $H = \left(\frac{x^y}{y^x} + \frac{y^x}{x^y}\right)^4$, por lo que reemplazando:

$$\begin{aligned} H &= \left(\frac{x^y}{y^x} + \frac{y^x}{x^y}\right)^4 \\ &= \left(\frac{x^x}{x^x} + \frac{x^x}{x^x}\right)^4 \\ &= \left(1 + 1\right)^4 \\ &= \left(2\right)^4 \\ &= 16 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el valor de H es 16.

Ejercicio 55

Si se sabe que:

$$\begin{cases} (a-1)^2+(b+1)^2=12 \\ (a-1)(b+1)=3 \end{cases}$$

Calcular:

$$(a+b)^2$$

Empezando a operar la primera condición:

$$(a-1)^2+(b+1)^2=12$$

$$(a-1)^2+2(a-1)(b+1)+(b+1)^2=12+2(a-1)(b+1)$$

Recordar el desarrollo de la expresión del binomio al cuadrado, así como la segunda condición $(a-1)(b+1)=3$:

$$\underbrace{(a-1)^2+2(a-1)(b+1)+(b+1)^2}_{((a-1)+(b+1))^2}=12+2\underbrace{(a-1)(b+1)}_{3}$$

$$(a-1+b+1)^2=12+2\times 3$$

$$(a+b)^2=12+6$$

$$(a+b)^2=18$$

Por lo tanto, el valor de $(a+b)^2$ es 18.

Ejercicio 56

Si se cumple que:

$$(a+b+3)(a-b-3)=4b-9$$

Calcule el equivalente de:

$$\left(a^2-b^2\right)^2$$

Empezando a operar y agrupando de manera conveniente:

$$(a+b+3)(a-b-3)=4b-9$$

$$[a+(b+3)][a-(b+3)]=4b-9$$

$$a^2-(b-3)^2=4b-9$$

$$a^2-b^2-6b-9=4b-9$$

$$a^2-b^2=10b$$

Reemplazando en la expresión solicitada:

$$\left(a^2-b^2\right)^2$$

$$(10b)^2$$

$$100b^2$$

Por lo tanto, el valor de la expresión $\left(a^2-b^2\right)^2$ es igual a $100b^2$.

Ejercicio 57

Cumpliéndose:

$$(2a+b)^{-c}=\frac{1}{5}$$

Encontrar el valor:

$$\left(b^2+4ab+4a^2\right)^c$$

Empezando a operar la condición:

$$(2a+b)^{-c}=\frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{(2a+b)^{-c}}=\frac{1}{5}$$

$$(2a+b)^{c}=5$$

Se pide $(b^2+4ab+4a^2)^c$, por lo que jugando con la igualdad obtenida:

$$(2a+b)^{c}=5 \qquad (\quad)^2$$

$$\left[(2a+b)^2\right]^c=5^2$$

$$\left(4a^2+4ab+b^2\right)^c=25$$

Por lo tanto, el valor de $(b^2+4ab+4a^2)^c$ es igual a 25.

Ejercicio 58

Sabiendo que:

$$\begin{cases} a+b+c=3 \\ ab+bc+ac=3 \\ abc=3 \end{cases}$$

Calcule el valor de A:

$$A=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}$$

Como se pide calcular el valor de A, se empieza a operar:

$$A=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}$$

$$A=\frac{a+c}{b}+\frac{b+c}{a}+\frac{a+b}{c}$$

Ahora, de la primera condición: $a+b+c=3$, donde se desprende $a+b=3-c$, $a+c=3-b$ y $b+c=3-a$, por lo que reemplazando en la expresión:

$$\begin{aligned} A &= \frac{3-b}{b}+\frac{3-a}{a}+\frac{3-c}{c} \\ &= \frac{3}{b}-1+\frac{3}{a}-1+\frac{3}{c}-1 \\ &= -3+3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \\ &= -3+3\left(\frac{ab+bc+ac}{abc}\right) \end{aligned}$$

Haciendo uso de las condiciones del problema: $ab+bc+ac=3$ y que $abc=3$:

$$\begin{aligned} A &= -3+3\left(\frac{3}{3}\right) \\ &= -3+3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el valor de A es 0.

Ejercicio 59

Si se cumple que:

$$a + \frac{1}{b} = 1 \quad \text{y} \quad b + \frac{1}{c} = 1$$

Determinar el equivalente numérico de:

$$abc$$

Empezando a operar:

$$\begin{aligned} a + \frac{1}{b} &= 1 \\ \frac{ab+1}{b} &= 1 \\ ab + 1 &= b \quad \textcolor{red}{\text{Multiplicar por } c} \\ abc + c &= bc \end{aligned} \tag{1}$$

De forma similar, con la otra condición:

$$\begin{aligned} b + \frac{1}{c} &= 1 \\ \frac{bc+1}{c} &= 1 \\ bc + 1 &= c \quad \textcolor{red}{\text{Reordenando}} \\ bc - c &= -1 \end{aligned} \tag{2}$$

Del primer resutado se obtiene:

$$abc = \underbrace{bc - c}_{-1} \quad \textcolor{red}{\text{Haciendo uso del 2do resultado}}$$

Por lo tanto, el valor de abc es -1.

Ejercicio 60

Sabiendo que:

$$\begin{cases} x+y+z & =2 \\ x^2+y^2+z^2 & =3 \\ xyz & =4 \end{cases}$$

Calcule el valor de B:

$$B=\frac{1}{xy+z-1}+\frac{1}{yz+x-1}+\frac{1}{xz+y-1}$$

Empezando a operar:

$$\begin{aligned} x+y+z &= 2 \qquad (\quad)^2 \\ \underbrace{x^2+y^2+z^2}_{3}+2(xy+yz+xz) &= 4 \\ 3+2(xy+yz+xz) &= 4 \\ 2(xy+yz+xz) &= 1 \\ xy+yz+xz &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Además, podemos seguir manipulando la primera expresión:

$$\begin{aligned} x+y+z &= 1+1 \\ z-1+xy &= 1-x-y+xy \\ xy+z-1 &= x(y-1)-(y-1) \\ xy+z-1 &= (x-1)(y-1) \end{aligned}$$

De forma paralela:

$$\begin{aligned} yz+x-1 &= (y-1)(z-1) \\ xz+y-1 &= (x-1)(z-1) \end{aligned}$$

Se pide calcular B,

$$B=\frac{1}{xy+z-1}+\frac{1}{yz+x-1}+\frac{1}{xz+y-1}$$

Por lo que reemplazando las igualdades:

$$
\begin{aligned}
B &= \frac{1}{xy+z-1} + \frac{1}{yz+x-1} + \frac{1}{xz+y-1} \\
&= \frac{1}{(x-1)(y-1)} + \frac{1}{(y-1)(z-1)} + \frac{1}{(z-1)(x-1)} \\
&= \frac{(z-1)+(x-1)+(y-1)}{(x-1)(y-1)(z-1)} \\
&= \frac{(x+y+z)-3}{xyz-(xy+yz+xz)+(x+y+z)-1} \\
&= \frac{2-3}{4-\dfrac{1}{2}+2-1} \\
&= \frac{-1}{9/2} = -\frac{2}{9}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, el valor de B es $-\dfrac{2}{9}$.

Ejercicio 61

Si se cumple que:

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ x^2+y^2+z^2=10 \\ xyz=13 \end{cases}$$

Determinar el valor de

$$\frac{1}{xy+z-1}+\frac{1}{yz+x-1}+\frac{1}{xz+y-1}$$

Empezando a operar y haciendo uso de la primera condición:

$$x+y+z=2 \qquad (\quad)^2$$

$$\underbrace{x^2+y^2+z^2}_{10}+2(xy+yz+xz)=4$$

$$2(xy+yz+xz)=-6$$

$$xy+yz+xz=-3$$

Asimismo, de la primera condición se obtiene:

$$x+y+z=2\begin{cases} x-1=1-z-y \\ y-1=1-x-z \\ z-1=1-y-x \end{cases}$$

Reemplazando las equivalencias en la expresión a calcular:

$$\frac{1}{xy+z-1}+\frac{1}{yz+x-1}+\frac{1}{xz+y-1}$$

$$\frac{1}{xy-x-y+1}+\frac{1}{yz-y-z+1}+\frac{1}{xz-x-z+1}$$

$$\frac{1}{(x-1)(y-1)}+\frac{1}{(y-1)(z-1)}+\frac{1}{(x-1)(z-1)}$$

$$\frac{(z-1)+(x-1)+(y-1)}{(x-1)(y-1)(z-1)}$$

$$\frac{x+y+z-3}{-1+(x+y+z)-(xy+yz+xz)+xyz}$$

Continuando con la operación:

$$\frac{\overbrace{x+y+z}^{2}-3}{-1+\underbrace{(x+y+z)}_{2}-\underbrace{(xy+yz+xz)}_{-3}+\underbrace{xyz}_{13}}$$

$$\frac{2-3}{-1+2-(-3)+13}$$

$$\frac{-1}{17}$$

Por lo tanto, el valor de $\dfrac{1}{xy+z-1}+\dfrac{1}{yz+x-1}+\dfrac{1}{xz+y-1}$ es igual a $-\dfrac{1}{17}$.

Ejercicio 62

Siendo x, y, z tres números reales diferentes de cero que verifican:

$$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=(x+y-2z)^2+(y+z-2x)^2+(z+x-2y)^2$$

Simplifique:

$$\frac{x^{11}+y^{11}+z^{11}+11x^3y^3z^3\,(xy+yz+xz)}{xyz\left(x^4+y^4+z^4\right)^2}$$

Empezando a operar el primer término de la igualdad:

$$\begin{aligned}(x-y)^2&=x^2-2xy+y^2\\(y-z)^2&=y^2-2yz+z^2\\(z-x)^2&=z^2-2zx+x^2\\\hline &=2\left(x^2+y^2+z^2\right)-2\left(xy+yz+xz\right)\end{aligned}$$

Asimismo, desarrollando el segundo término de la igualdad:

$$\begin{aligned}(x+y-2z)^2&=x^2+2xy-4xz+y^2-4yz+4z^2\\(y+z-2x)^2&=y^2+2yz-4yx+z^2-4zx+4x^2\\(z+x-2y)^2&=z^2+2zx-4zy+x^2-4xy+4y^2\\\hline &=6\left(x^2+y^2+z^2\right)-6\left(xy+yz+xz\right)\end{aligned}$$

Volviendo a la igualdad, obtenemos:

$$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=(x+y-2z)^2+(y+z-2x)^2+(z+x-2y)^2$$

$$2\left(x^2+y^2+z^2\right)-2\left(xy+yz+xz\right)=6\left(x^2+y^2+z^2\right)-6\left(xy+yz+xz\right)$$

$$-2\left(xy+yz+xz\right)+6\left(xy+yz+xz\right)=6\left(x^2+y^2+z^2\right)-2\left(x^2+y^2+z^2\right)$$

$$4\left(xy+yz+xz\right)=4\left(x^2+y^2+z^2\right)$$

$$xy+yz+xz=x^2+y^2+z^2$$

De la expresión obtenida, se concluye que $x=y=z$, lo que valida la igualdad.

Con la conclusión mencionada, se reemplaza los valores para simplificar la expresión:

$$\frac{x^{11}+y^{11}+z^{11}+11x^3y^3z^3\left(xy+yz+xz\right)}{xyz\left(x^4+y^4+z^4\right)^2}$$

$$\frac{x^{11}+x^{11}+x^{11}+11x^3x^3x^3\left(xx+xx+xx\right)}{xxx\left(x^4+x^4+x^4\right)^2}$$

$$\frac{3x^{11}+11x^9\left(3x^2\right)}{x^3\left(3x^4\right)^2}$$

$$\frac{3x^{11}+33x^{11}}{9x^{11}}$$

$$\frac{36x^{11}}{9x^{11}}$$

$$4$$

Por lo tanto, el valor de $\dfrac{x^{11}+y^{11}+z^{11}+11x^3y^3z^3\left(xy+yz+xz\right)}{xyz\left(x^4+y^4+z^4\right)^2}$ es igual a 4.

Ejercicio 63

Si $x+y+z=1$, halle el valor de:

$$\frac{x^3+y^3+z^3+3\left(xy+xz+yz\right)-1}{xyz}$$

Empezando a operar y haciendo uso de la condición proporcionada:

$$x+y+z=1 \qquad (\quad)^3$$

$$x^3+y^3+z^3+3\underbrace{\left(x+y+z\right)}_{1}\left(xy+yz+xz\right)-3xyz=1$$

$$x^3+y^3+z^3+3\left(xy+yz+xz\right)-3xyz=1$$

$$x^3+y^3+z^3+3\left(xy+yz+xz\right)-13xyz$$

Nota: La propiedad empleada es la identidad de Gauss.

Reemplazando la igualdad en la expresión a calcular:

$$\frac{x^3+y^3+z^3+3\left(xy+xz+yz\right)-1}{xyz}$$

$$\frac{3xyz}{xyz}$$

$$3$$

Por lo tanto, el valor de $\dfrac{x^3+y^3+z^3+3\left(xy+xz+yz\right)-1}{xyz}$ es igual a 3.

Ejercicio 64

Si se cumple que

$$ab + bc + ac = -1$$

Reduzca:

$$\frac{\left(a^2 - 1\right)\left(b^2 - 1\right)\left(c^2 - 1\right)}{\left(a + b\right)^2 \left(b + c\right)^2 \left(a + c\right)^2}$$

Empezando a operar, reemplazamos -1 como $ab + bc + ac$, por lo que la expresión queda:

$$\frac{\left(a^2 + ab + bc + ac\right)\left(b^2 + ab + bc + ac\right)\left(c^2 + ab + bc + ac\right)}{\left(a + b\right)^2 \left(b + c\right)^2 \left(a + c\right)^2}$$

Factorizando el numerador:

$$\frac{\{a\left(a + b\right) c\left(a + b\right)\}\{b\left(b + c\right) a\left(b + c\right)\}\{c\left(b + c\right) a\left(b + c\right)\}}{\left(a + b\right)^2 \left(b + c\right)^2 \left(a + c\right)^2}$$

$$\frac{\left(a + c\right)\left(a + b\right)\left(b + c\right)\left(a + b\right)\left(b + c\right)\left(a + c\right)}{\left(a + b\right)^2 \left(b + c\right)^2 \left(a + c\right)^2}$$

$$\frac{\left(a + b\right)^2 \left(b + c\right)^2 \left(a + c\right)^2}{\left(a + b\right)^2 \left(b + c\right)^2 \left(a + c\right)^2}$$

$$1$$

Por lo tanto, al reducir la expresión $\frac{\left(a^2 - 1\right)\left(b^2 - 1\right)\left(c^2 - 1\right)}{\left(a + b\right)^2 \left(b + c\right)^2 \left(a + c\right)^2}$ queda como resultado 1.

Aaric Llerena Medina

Ejercicio 65

Dada las relaciones:

$$a = (a-b)^2 + b\,(a+1)$$

$$b = (b-c)^2 + c\,(b+1)$$

$$c = (c-a)^2 + a\,(c+1)$$

Simplifique:

$$\frac{\left(a^6-b^6\right)^2}{c^6-4a^3b^3}$$

Empezando a operar cada relación por separado:

$$a = (a-b)^2 + b\,(a+1)$$

$$a = a^2 - ab + b^2 + b$$

$$(a-b)\,(a+b) = \left(a^2-ab+b^2\right)(a+b)$$

$$a^2 - b^2 = a^3 + b^3$$

De manera análoga para las otras dos relaciones:

- $b^2 - c^2 = b^3 + c^3$
- $c^2 - a^2 = c^3 + a^3$

Ahora, sumando las tres igualdades obtenidas:

$$a^2 - b^2 = a^3 + b^3 \quad +$$

$$b^2 - c^2 = b^3 + c^3$$

$$c^2 - a^2 = c^3 + a^3$$

$$0 = 2\left(a^3+b^3+c^3\right)$$

$$0 = a^3 + b^3 + c^3$$

Despejando la nueva igualdad resultante:

$$a^3 + b^3 = -c^3 \qquad (\quad)^2$$

$$a^6 + 2a^3b^3 + b^6 = c^6$$

Ahora, manipulando la expresión a calcular y reemplazando las equivalencias obtenidas:

$$\frac{\left(a^6-b^6\right)^2}{c^6-4a^3b^3}$$

$$\frac{\left(a^3-b^3\right)^2\left(a^3+b^3\right)^2}{a^6+2a^3b^3+b^6-4a^3b^3}$$

$$\frac{\left(a^3-b^3\right)^2\left(-c^3\right)^2}{a^6-2a^3b^3+b^6}$$

$$\frac{\left(a^3-b^3\right)^2\left(c^6\right)}{\left(a^3-b^3\right)^2}$$

$$c^6$$

Por lo tanto, al simplificar la expresión $\dfrac{\left(a^6-b^6\right)^2}{c^6-4a^3b^3}$ resulta c^6.

Ejercicio 66

Suponiendo que:

$$\left(\frac{x^2}{2y}\right)^3+\left(\frac{y^2}{2x}\right)^3=3\left(x^3+y^3\right)$$

$$x^6-y^6=6x^4y^4\sqrt[3]{x^3+y^3}$$

Calcule:

$$\frac{x^{-3}-y^{-3}}{3}$$

Empezando a operar la primera condición:

$$\left(\frac{x^2}{2y}\right)^3+\left(\frac{y^2}{2x}\right)^3=3\left(x^3+y^3\right)$$

$$\left(\frac{x^2}{2y}+\frac{y^2}{2x}\right)\left\{\left(\frac{x^2}{2y}\right)^2-\left(\frac{x^2}{2y}\right)\left(\frac{y^2}{2x}\right)+\left(\frac{y^2}{2x}\right)^2\right\}=3\left(x^3+y^3\right)$$

$$\left(\frac{2x^3+2y^3}{4xy}\right)\left(\frac{x^4}{4y^2}-\frac{xy}{4}+\frac{y^4}{4x^2}\right)=3\left(x^3+y^3\right)$$

$$\frac{2\left(x^3+y^3\right)}{4xy}\left(\frac{x^6-x^3y^3+y^6}{4x^2y^2}\right)=3\left(x^3+y^3\right)$$

$$\frac{x^6-x^3y^3+y^6}{8x^3y^3}=3$$

$$x^6-x^3y^3+y^6=24x^3y^3$$

$$x^6+y^6+2x^3y^3=25x^3y^3+2x^3y^3$$

$$\left(x^3+y^3\right)^2=27x^3y^3$$

Asimismo, operando la segunda condición:

$$x^6-y^6=6x^4y^4\sqrt[3]{x^3+y^3}$$

$$\left(x^3+y^3\right)\left(x^3-y^3\right)=6x^4y^4\left(x^3+y^3\right)^{\frac{1}{3}} \qquad \left(x^3+y^3\right)^{-1}$$

$$x^3-y^3=6x^4y^4\left(x^3+y^3\right)^{-\frac{2}{3}}$$

$$x^3-y^3=6x^4y^4\frac{1}{\sqrt[3]{\left(x^3+y^3\right)^2}}$$

Reemplazando el valor de $(x^3+y^3)^2$ con su equivalente $27x^3y^3$:

$$x^3-y^3=6x^4y^4\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{27x^3y^3}}$$

$$x^3-y^3=6x^4y^4\cdot\frac{1}{3xy}$$

$$x^3-y^3=2x^3y^3$$

Ahora, desarrollando la expresión a calcular:

$$\frac{x^{-3}-y^{-3}}{3}$$

$$\frac{\frac{1}{x^3}-\frac{1}{y^3}}{3}$$

$$\frac{\frac{y^3-x^3}{x^3y^3}}{3}$$

$$\frac{-\left(x^3-y^3\right)}{3x^3y^3}$$

$$\frac{-2x^3y^2}{3x^3y^3}$$

$$-\frac{2}{3}$$

Por lo tanto, el valor de $\frac{x^{-3}-y^{-3}}{3}$ es igual a $-\frac{2}{3}$.

Ejercicio 67

Sabiendo que:

$$A = (x+y-1)^3 + 3(x+y)(x+y-1))$$

$$B = (x+y+1)^3 - 3(x+y)(x+y+1)$$

$$C = \left[(x+y)^3+1\right]^2 + \left[(x+y)^3-1\right]^2$$

¿A qué es igual $2AB - C$?

Antes de empezar a operar, hacemos un cambio de variable para simplificar los cálculos, por lo tanto, sea $\omega = x + y$:

- Para A:

$$A = (\omega-1)^3 + 3\omega(\omega-1)$$

$$A = (\omega-1)\left\{(\omega-1)^2 + 3\omega\right\}$$

$$A = (\omega-1)\left\{\omega^2 - 2\omega + 1 + 3\omega\right\}$$

$$A = (\omega-1)\left(\omega^2 + \omega + 1\right)$$

$$A = \omega^3 - 1$$

- Para B:

$$B = (\omega+1)^3 - 3\omega(\omega+1)$$

$$B = (\omega+1)\left\{(\omega+1)^2 - 3\omega\right\}$$

$$B = (\omega+1)\left\{\omega^2 + 2\omega + 1 - 3\omega\right\}$$

$$B = (\omega+1)\left(\omega^2 - \omega + 1\right)$$

$$B = \omega^3 + 1$$

- Para C:

$$C = \left[\omega^3+1\right]^2 + \left[\omega^3-1\right]^2$$

$$C = 2\left[\left(\omega^3\right)^2 + (1)^2\right]$$

$$C = 2\left(\omega^6 + 1\right)$$

Reemplazando los valores en la expresión a calcular:

$$2AB - C$$

$$2\left(\omega^3 - 1\right)\left(\omega^3 + 1\right) - 2\left(\omega^6 + 1\right)$$

$$2\left(\omega^6 - 1\right) - 2\left(\omega^6 + 1\right)$$

$$2\omega^6 - 2 - 2\omega^6 - 2$$

$$-4$$

Por lo tanto, $2AB - C$ es igual a -4.

Ejercicio 68

Tres números reales diferentes a, b y c verifican la siguiente condición:

$$a = \sqrt[3]{p+qa}$$
$$b = \sqrt[3]{p+qb}$$
$$c = \sqrt[3]{p+qc}$$

Determine:

$$\frac{a^5+b^5+c^5}{pq}$$

Empezando a operar las condiciones dadas:

$$\begin{aligned} a &= \sqrt[3]{p+qa} \\ a^3 &= p+qa \end{aligned} \qquad \begin{aligned} b &= \sqrt[3]{p+qb} \\ b^3 &= p+qb \end{aligned} \qquad \begin{aligned} c &= \sqrt[3]{p+qc} \\ c^3 &= p+qc \end{aligned}$$

Desarrollando la expresión a calcular:

$$\frac{a^5+b^5+c^5}{pq}$$
$$\frac{a^3\cdot a^2+b^3\cdot b^2+c^3\cdot c^2}{pq}$$
$$\frac{(p+qa)\cdot a^2+(p+qb)\cdot b^2+(p+qc)\cdot c^2}{pq}$$
$$\frac{pa^2+qa^3+pb^2+qb^3+pc^2+qc^3}{pq}$$
$$\frac{p\left(a^2+b^2+c^2\right)+q\left(a^3+b^3+c^3\right)}{pq}$$

Procediendo con los cálculos:

$$\begin{aligned} a^3 &= p+qa \quad - \\ b^3 &= p+qb \\ \hline a^3-b^3 &= q\left(a-b\right) \\ \left(a-b\right)\left(a^2+ab+b^2\right) &= q\left(a-b\right) \\ a^2+ab+b^2 &= q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b^3 &= p+qb \quad - \\ c^3 &= p+qc \\ \hline b^3-c^3 &= q\left(b-c\right) \\ \left(b-c\right)\left(b^2+bc+c^2\right) &= q\left(b-c\right) \\ b^2+bc+c^2 &= q \end{aligned}$$

Por lo tanto, se cumple que $q = a^2 + ac + c^2$. Asimismo, por la igualdad de q, obtenemos:

$$a^2 + ab + b^2 = a^2 + ac + c^2$$

$$ab - ac + b^2 - c^2 = 0$$

$$a\,(b - c) + (b - c)\,(b + c) = 0$$

$$\underbrace{(a + b + c)}_{0}\underbrace{(b - c)}_{0} = 0$$

Por el enunciado que los números son diferentes, se concluye que $a + b + c = 0$. Asimismo, por las igualdades condicionales se obtiene: $a^2 + b^2 + c^2 = -2\,(ab + bc + ac)$.

Siguiendo con los cálculos, se hace la suma de las igualdades de q:

$$\begin{aligned}
a^2 + ab + b^2 &= q \quad {\color{red}+}\\
b^2 + bc + c^2 &= q\\
a^2 + ac + c^2 &= q\\
\hline
2\left(a^2 + b^2 + c^2\right) + (ab + bc + ac) &= 3q\\
2\left(a^2 + b^2 + c^2\right) - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} &= 3q \quad {\color{red}\times 2}\\
4\left(a^2 + b^2 + c^2\right) - \left(a^2 + b^2 + c^2\right) &= 6q\\
a^2 + b^2 + c^2 &= 2q
\end{aligned}$$

Asimismo, sumando los valores iniciales al cubo:

$$a^3 + b^3 + c^3 = p + qa + p + qb + p + qc$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3p + q\underbrace{(a + b + c)}_{0}$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3p$$

Reemplazando las equivalencias en la expresión a calcular:

$$\frac{p\overbrace{\left(a^2 + b^2 + c^2\right)}^{2q} + q\overbrace{\left(a^3 + b^3 + c^3\right)}^{3p}}{pq} = \frac{2pq + 3pq}{pq} = 5$$

Por lo tanto, el valor de $\dfrac{a^5 + b^5 + c^5}{pq}$ es igual a 5.

Ejercicio 69

Si:

$$x+y+z=1, \quad xy+yz+xz=xyz$$

Calcule:

$$\left(x^9+y^9+z^9\right)\left(\frac{1}{x^{11}+y^{11}+z^{11}+1}\right)$$

Empezando a operar y haciendo uso de la primera condición:

$$x+y+z=1 \quad \Longrightarrow \quad x+y=1-z$$

Asimismo, se hace uso de la segunda condición:

$$xy+yz+xz=xyz$$

$$xz+yz+xy-xyz=0$$

$$z\underbrace{(x+y)}_{1-z}+xy(1-z)=0$$

$$z(1-z)+xy(1-z)=0$$

$$\underbrace{(z+xy)}_{=0}\underbrace{(1-z)}_{=0}=0$$

De la ecuación, se concluye que $z=1$. Por lo que del despeje de la primera condición:

$$x+y=1-z \quad \Longrightarrow \quad x+y=1-(1) \quad \Longrightarrow \quad x+y=0 \quad \Longrightarrow \quad \therefore x=-y$$

Reemplazando las equivalencias en la expresión a calcular:

$$\left(x^9+y^9+z^9\right)\left(\frac{1}{x^{11}+y^{11}+z^{11}+1}\right)$$

$$\left\{(x)^9+(-x)^9+(1)^9\right\}\left\{\frac{1}{(x)^{11}+(-x)^{11}+(1)^{11}+1}\right\}$$

$$\frac{1}{2}$$

Por lo tanto, el valor de $\left(x^9+y^9+z^9\right)\left(\frac{1}{x^{11}+y^{11}+z^{11}+1}\right)$ es igual a $\frac{1}{2}$.

Ejercicio 70

Si se cumple:

$$\frac{a}{b+c+d}+\frac{b}{a+c+d}+\frac{c}{a+b+d}+\frac{d}{a+b+c}=1$$

Halle el valor de:

$$\frac{a^2}{b+c+d}+\frac{b^2}{a+c+d}+\frac{c^2}{a+b+d}+\frac{d^2}{a+b+c}$$

Empezando a operar y haciendo el cambio de variable $x=a+b+c+d$, entonces:

$$\frac{a}{x-a}+\frac{b}{x-b}+\frac{c}{x-c}+\frac{d}{x-d}=1$$

$$\frac{a}{x-a}-a+\frac{b}{x-b}-b+\frac{c}{x-c}-c\frac{d}{x-d}-d=1-\underbrace{(a+b+c+d)}_{x}$$

$$\frac{a-ax+a^2}{x-a}+\frac{b-bx+b^2}{x-b}+\frac{c-cx+c^2}{x-c}+\frac{d-dx+d^2}{x-d}=1-x$$

Empezando a desarrollar las sumas:

$$\begin{aligned}
\frac{a-ax+a^2}{x-a} &= \frac{a}{x-a}-\frac{ax}{x-a}+\frac{a^2}{x-a} \quad +\\
\frac{b-bx+b^2}{x-b} &= \frac{b}{x-b}-\frac{bx}{x-b}+\frac{b^2}{x-b}\\
\frac{c-cx+c^2}{x-c} &= \frac{c}{x-c}-\frac{cx}{x-c}+\frac{c^2}{x-c}\\
\frac{d-dx+d^2}{x-d} &= \frac{d}{x-d}-\frac{dx}{x-d}+\frac{a^2}{x-d}\\
\hline
&= \frac{a}{x-a}+\frac{b}{x-b}+\frac{c}{x-c}+\frac{d}{x-d}\\
&\quad -x\left(\frac{a}{x-a}+\frac{b}{x-b}+\frac{c}{x-c}+\frac{d}{x-d}\right)\\
&\quad \frac{a^2}{x-a}+\frac{b^2}{x-b}+\frac{c^2}{x-c}+\frac{d^2}{x-d}
\end{aligned}$$

Volviendo a la expresión original:

$$1-x+\frac{a^2}{x-a}+\frac{b^2}{x-b}+\frac{c^2}{x-c}+\frac{d^2}{x-d}=1-x$$

$$\frac{a^2}{x-a}+\frac{b^2}{x-b}+\frac{c^2}{x-c}+\frac{d^2}{x-d}=0$$

Por lo tanto, el valor de $\frac{a^2}{x-a}+\frac{b^2}{x-b}+\frac{c^2}{x-c}+\frac{d^2}{x-d}$ es igual a 0.

Ejercicio 71

Si:

$$\frac{a^2-bc}{bc}+\frac{b^2-ac}{ac}+\frac{c^2-ab}{ab}=0$$

Halle:

$$\frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}+\frac{a+b}{c}$$

Empezando a operar y desarrollando la condición dada:

$$\frac{a^2-bc}{bc}+\frac{b^2-ac}{ac}+\frac{c^2-ab}{ab}=0$$

$$\frac{a^2}{bc}-\frac{bc}{bc}+\frac{b^2}{ac}-\frac{ac}{ac}+\frac{c^2}{ab}-\frac{ab}{ab}=0$$

$$\frac{a^2}{bc}\times\frac{a}{a}-1+\frac{b^2}{ac}\times\frac{b}{b}-1+\frac{c^2}{ab}\times\frac{c}{c}-1=0$$

$$\frac{a^3}{abc}+\frac{b^3}{abc}+\frac{c^2}{abc}-3=0$$

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}=3$$

$$a^3+b^3+c^3=3abc$$

La expresión dada, se cumple cuando $a+b+c=0$, por lo tanto:

- $a+b=-c$
- $a+c=-b$
- $b+c=-a$

Reemplazando las igualdades en la expresión a calcular:

$$\frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}+\frac{a+b}{c}$$

$$\frac{-a}{a}+\frac{-b}{b}+\frac{-c}{c}$$

$$-1-1-1$$

$$-3$$

Por lo tanto, el valor de la expresión $\frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}+\frac{a+b}{c}$ es igual a -3.

Ejercicio 72

Sabiendo que:

$$(a-b)(a-c)+(b-c)(b-a)+(c-a)(c-b)=2(a+b+c)^2$$

Donde $abc \neq 0$, halle el valor de:

$$\frac{\dfrac{a+3b+c}{ac}+\dfrac{b+3c+a}{ab}+\dfrac{c+3a+b}{bc}}{a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}}$$

Empezando a operar el primer lado de la igualdad:

$$(a-b)(a-c)=a^2-ac-ab+bc \quad +$$

$$(b-c)(b-a)=b^2-ba-bc+ca$$

$$(c-a)(c-b)=c^2-cb-ca+ab$$

$$=a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ac)$$

Asimismo, desarrollando el segundo lado de la igualdad:

$$2(a+b+c)^2=2\left(a^2+b^2+c^2\right)+4(ab+bc+ac)$$

Por lo tanto, la igualdad quedaría como:

$$(a-b)(a-c)+(b-c)(b-a)+(c-a)(c-b)=2(a+b+c)^2$$

$$a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ac)=2\left(a^2+b^2+c^2\right)+4(ab+bc+ac)$$

$$-4(ab+bc+ac)-(ab+bc+ac)=2\left(a^2+b^2+c^2\right)-\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

$$-5(ab+bc+ac)=a^2+b^2+c^2$$

Recordar la expresión de $(a+b+c)^2$:

$$(a+b+c)^2=\underbrace{a^2+b^2+c^2}_{-5(ab+bc+ac)}+2(ab+bc+ac)$$

$$(a+b+c)^2=-5(ab+bc+ac)+2(ab+bc+ac)$$

$$(a+b+c)^2=-3(ab+bc+ac)$$

Reemplazando las igualdades en la expresión a calcular:

$$\frac{\dfrac{a+3b+c}{ac}+\dfrac{b+3c+a}{ab}+\dfrac{c+3a+b}{bc}}{a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}}$$

$$\frac{\dfrac{a+b+c+2b}{ac}+\dfrac{a+b+c+2c}{ab}+\dfrac{a+b+c+2a}{bc}}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}}$$

$$\frac{\dfrac{a+b+c+2b}{ac}\times\dfrac{b}{b}+\dfrac{a+b+c+2c}{ab}\times\dfrac{c}{c}+\dfrac{a+b+c+2a}{bc}\times\dfrac{a}{a}}{\dfrac{ab+bc+ac}{abc}}$$

$$\frac{\dfrac{(a+b+c)\,b+2b^2}{abc}+\dfrac{(a+b+c)\,c+2c^2}{abc}+\dfrac{(a+b+c)\,a+2a^2}{abc}}{\dfrac{ab+bc+ac}{abc}}$$

$$\frac{(a+b+c)\,(a+b+c)+2\,(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ac}$$

$$\frac{(a+b+c)^2+2\,(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ac}$$

Reemplazando las igualdades en la expresión:

$$\frac{-3\,(ab+bc+ac)+2\,\{-5\,(ab+bc+ac)\}}{ab+bc+ac}$$

$$\frac{-3\,(ab+bc+ac)-10\,(ab+bc+ac)}{ab+bc+ac}$$

$$\frac{-13\,(ab+bc+ac)}{ab+bc+ac}$$

$$-13$$

Por lo tanto, el valor de la expresión a calcular es igual a -13.

Ejercicio 73

Si:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=1$$

Calcule el valor de:

$$H=\left[2\left(\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{b}{a}\right)^3\right]^3+\left[2\left(\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{b}\right)^3\right]^3$$

Empezando a operar y elevando al cubo la condición:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=1 \qquad (\quad)^3$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3+\left(\frac{b}{a}\right)^3+3\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{b}{a}\right)\underbrace{\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)}_{1}=1$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3+\left(\frac{b}{a}\right)^3=-2$$

Haciendo uso de la expresión obtenida previamente y elevando al cubo:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3+\left(\frac{b}{a}\right)^3=-2 \qquad (\quad)^3$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^9+\left(\frac{b}{a}\right)^9+3\left(\frac{a}{b}\right)^3\left(\frac{b}{a}\right)^3\underbrace{\left\{\left(\frac{a}{b}\right)^3+\left(\frac{b}{a}\right)^3\right\}}_{-2}=-8$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^9+\left(\frac{b}{a}\right)^9+3(-2)=-8$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^9+\left(\frac{b}{a}\right)^9=-2$$

Ahora, elevando al cuadrado la condición inicial:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=1 \qquad (\quad)^2$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2+2\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{b}{a}\right)^2=1$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2+\left(\frac{b}{a}\right)^2=-1$$

Finalmente, encontrando el valor restante:

$$\left\{\left(\frac{a}{b}\right)^2+\left(\frac{b}{a}\right)^2\right\}\left\{\left(\frac{a}{b}\right)^3+\left(\frac{b}{a}\right)^3\right\}=(-1)(-2)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^5+\left(\frac{a}{b}\right)^2\left(\frac{b}{a}\right)^3+\left(\frac{b}{a}\right)^2\left(\frac{a}{b}\right)^3+\left(\frac{b}{a}\right)^5=2$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^5+\underbrace{\frac{b}{a}+\frac{a}{b}}_{1}+\left(\frac{b}{a}\right)^5=2$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^5+\left(\frac{b}{a}\right)^5=1$$

Operando la expresión de H:

$$H=\left[2\left(\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{b}{a}\right)^3\right]^3+\left[2\left(\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{b}\right)^3\right]^3$$

$$H=8\left(\frac{a}{b}\right)^3+\left(\frac{b}{a}\right)^9+3\cdot 2\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{b}{a}\right)^3\left\{2\left(\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{b}{a}\right)^3\right\}+$$

$$8\left(\frac{b}{a}\right)^3+\left(\frac{a}{b}\right)^9+3\cdot 2\left(\frac{b}{a}\right)\left(\frac{a}{b}\right)^3\left\{2\left(\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{b}\right)^3\right\}$$

$$H=8\underbrace{\left\{\left(\frac{a}{b}\right)^3+\left(\frac{b}{a}\right)^3\right\}}_{-2}+\underbrace{\left(\frac{a}{b}\right)^9+\left(\frac{b}{a}\right)^9}_{-2}+12\underbrace{\left\{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right\}}_{1}+6\underbrace{\left\{\left(\frac{a}{b}\right)^5+\left(\frac{b}{a}\right)^5\right\}}_{1}$$

$$H=8(-2)-2+12(1)+6(1)$$

$$H=-16-2+12+6$$

$$H=0$$

Por lo tanto, el valor de $H=\left[2\left(\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{b}{a}\right)^3\right]^3+\left[2\left(\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{b}\right)^3\right]^3$ es igual a cero.

Ejercicio 74

Si:

$$y^{-1} - x^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$$

El valor reducido de:

$$\frac{16x^4y^4 + \left(x^2 - y^2\right)^2}{x^4y^2 + x^2y^4}$$

Empezando a operar la condición dada:

$$\frac{1}{y} - \frac{1}{x} = 2$$

$$\frac{x-y}{xy} = 2$$

$$x - y = 2xy \quad \Longrightarrow \quad (x-y)^2 = 4x^2y^2$$

Asimismo, desarrollando la expresión $(x-y)^2$:

$$(x-y)^2 = 4x^2y^2$$

$$x^2 - 2xy + 4xy + y^2 = 4x^2y^2 + 4xy$$

$$(x+y)^2 = 4xy\,(xy+1)$$

Análogamente, se obtiene la siguiente expresión:

$$(x-y)^2 = 4x^2y^2$$

$$x^2 - 2xy + 2xy + y^2 = 4x^2y^2 + 2xy$$

$$x^2 + y^2 = 2xy\,(2xy+1)$$

Reemplazando las igualdades en la expresión a reducir:

$$\frac{16x^4y^4 + \left(x^2 - y^2\right)^2}{x^4y^2 + x^2y^4}$$

$$\frac{16x^4y^4 + (x-y)^2\,(x+y)^2}{x^2y^2\left(x^2+y^2\right)}$$

$$\frac{16x^4y^4}{x^2y^2\left\{2xy\,(2xy+1)\right\}} + \frac{(2xy)^2\left\{4xy\,(xy+1)\right\}}{x^2y^2\left\{2xy\,(2xy+1)\right\}}$$

Agrupando y eliminando términos semejantes:

$$\frac{16x^4y^4}{2x^3y^3\left(2xy+1\right)}+\frac{16x^3y^3\left(xy+1\right)}{2x^3y^3\left(2xy+1\right)}$$

$$\frac{8xy}{\left(2xy+1\right)}+\frac{8\left(xy+1\right)}{\left(2xy+1\right)}$$

$$\frac{8\left(xy+xy+1\right)}{\left(2xy+1\right)}$$

$$\frac{8\left(2xy+1\right)}{\left(2xy+1\right)}$$

$$8$$

Por lo tanto, el valor de $\dfrac{16x^4y^4+\left(x^2-y^2\right)^2}{x^4y^2+x^2y^4}$ es igual a 8.

Ejercicio 75

Si se cumple que:

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ x^2+y^2+z^2=10 \\ xyz=13 \end{cases}$$

Determinar el valor de

$$\frac{1}{xy+z-1}+\frac{1}{yz+x-1}+\frac{1}{xz+y-1}$$

Empezando a operar y haciendo uso de la primera condición:

$$x+y+z=2 \qquad (\quad)^2$$

$$\underbrace{x^2+y^2+z^2}_{10}+2\left(xy+yz+xz\right)=4$$

$$2\left(xy+yz+xz\right)=-6$$

$$xy+yz+xz=-3$$

Asimismo, de la primera condición se obtiene:

$$x+y+z=2\begin{cases} x-1=1-z-y \\ y-1=1-x-z \\ z-1=1-y-x \end{cases}$$

Reemplazando las equivalencias en la expresión a calcular:

$$\frac{1}{xy+z-1}+\frac{1}{yz+x-1}+\frac{1}{xz+y-1}$$

$$\frac{1}{xy-x-y+1}+\frac{1}{yz-y-z+1}+\frac{1}{xz-x-z+1}$$

$$\frac{1}{(x-1)(y-1)}+\frac{1}{(y-1)(z-1)}+\frac{1}{(x-1)(z-1)}$$

$$\frac{(z-1)+(x-1)+(y-1)}{(x-1)(y-1)(z-1)}$$

$$\frac{x+y+z-3}{-1+(x+y+z)-(xy+yz+xz)+xyz}$$

Continuando con la operación:

$$\frac{\overbrace{x+y+z}^{2}-3}{-1+\underbrace{(x+y+z)}_{2}-\underbrace{(xy+yz+xz)}_{-3}+\underbrace{xyz}_{13}}$$

$$\frac{2-3}{-1+2-(-3)+13}$$

$$\frac{-1}{17}$$

Por lo tanto, el valor de $\dfrac{1}{xy+z-1}+\dfrac{1}{yz+x-1}+\dfrac{1}{xz+y-1}$ es igual a $-\dfrac{1}{17}$.

Ejercicio 76

Si:

$$\frac{x+y+z}{2} = \frac{xy+yz+xz}{3} = \frac{xyz}{4} = 2$$

Determina el valor de

$$E = x^3 + y^3 + z^3$$

Empezando a operar cada condición dada:

- $x + y + z = 4$
- $xy + yz + xz = 6$
- $xyz = 8$

Elevando al cuadrado la primera condición:

$$x + y + z = 4 \qquad (\quad)^3$$

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3\underbrace{(xy + xz + yz)}_{6}\underbrace{(x + y + z)}_{4} - 3\underbrace{xyz}_{8} = 64$$

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3(6)(4) - 3(8) = 64$$

$$x^3 + y^3 + z^3 + 72 - 24 = 64$$

$$x^3 + y^3 + z^3 + 48 = 64$$

$$x^3 + y^3 + z^3 = 16$$

Por lo tanto, el valor de $E = x^3 + y^3 + z^3$ es igual a 16.

Ejercicio 77

Sabiendo que $abc = 1$, encuentre el valor de :

$$\frac{a}{ab+a+1} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{c}{ac+c+1}$$

Empezando a operar y obteniendo igualdades de la condición:

$$ab = \frac{1}{c} \qquad bc = \frac{1}{a} \qquad ac = \frac{1}{b}$$

Haciendo las operaciones convenientes para obtener una expresión a simplificar:

$$\frac{a}{ab+a+1}\cdot\frac{\div a}{\div a} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{c}{ac+c+1}\cdot\frac{\div c}{\div c}$$

$$\frac{1}{b+1+\frac{1}{a}} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{1}{a+1+\frac{1}{c}}$$

$$\frac{1}{b+1+bc} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{1}{a+1+ab}\cdot\frac{\div a}{\div a}$$

$$\frac{1}{b+1+bc} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{\frac{1}{a}}{1+\frac{1}{a}+b}$$

$$\frac{1}{b+1+bc} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{bc}{1+bc+b}$$

$$\frac{1+b+bc}{1+b+bc}$$

$$1$$

Por lo tanto, el valor de la expresión $\frac{a}{ab+a+1} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{c}{ac+c+1}$ es igual a 1.

Ejercicio 78

Si se cumple que:

$$2x^{-1} = 2 - x$$

Calcule el valor de:

$$\left[x^9 - \left(x^4 + x^2 + 1\right)\left(x^6 + x^3 + 1\right)\right]^3$$

Empezando a operar la condición dada:

$$2x^{-1} = 2 - x \qquad \cdot x$$

$$2x = 2x - x^2$$

$$\left(x^2 - x + 1\right)\left(x^2 + x + +1\right) = (x - 1)\left(x^2 + x + +1\right)$$

$$x^4 + x^2 + 1 = x^3 - 1$$

Reemplazando la equivalencia en la expresión a calcular:

$$\left[x^9 - \underbrace{\left(x^4 + x^2 + 1\right)}_{x^3-1}\left(x^6 + x^3 + 1\right)\right]^3$$

$$\left[x^9 - \left(x^3 - 1\right)\left(x^6 + x^3 + 1\right)\right]^3$$

$$\left[x^9 - \left(\left(x^3\right)^3 - 1^3\right)\right]^3$$

$$\left[x^9 - \left(x^9 - 1\right)\right]^3$$

$$[1]^3$$

$$1$$

Por lo tanto, el valor de $[x^9 - (x^4 + x^2 + 1)(x^6 + x^3 + 1)]^3$ es igual a 1.

Ejercicio 79

A partir de:

$$\frac{a^4+b^2c^2}{2a}=\frac{b^4+a^2c^2}{2b}=\frac{c^4+a^2b^2}{2c}=abc$$

Reducir:

$$\left(\frac{a^6+b^6}{a^3+b^3}\right)\left(\frac{b^6+c^6}{b^3+c^3}\right)\left(\frac{a^6+c^6}{a^3+c^3}\right)$$

Empezando a operar y haciendo uso de las condiciones dadas:

$$\frac{a^4+b^2c^2}{2a}=abc$$

$$a^4+b^2c^2=a^2bc$$

$$\left(a^2\right)^2-2\left(a^2\right)(bc)+(bc)^2=0$$

$$\left(a^2-bc\right)^2=0$$

$$a^2=bc$$

$$\frac{b^4+a^2c^2}{2b}=abc$$

$$b^4+a^2c^2=ab^2c$$

$$\left(b^2\right)^2-2\left(b^2\right)(ac)+(ac)^2=0$$

$$\left(b^2-ac\right)^2=0$$

$$b^2=ac$$

$$\frac{c^4+a^2b^2}{2c}=abc$$

$$c^4+a^2b^2=abc^2$$

$$\left(c^2\right)^2-2\left(c^2\right)(ab)+(ab)^2=0$$

$$\left(c^2-ab\right)^2=0$$

$$c^2=ab$$

Sumando las equivalencias en su conjunto:

$$a^2=bc$$

$$b^2=ac$$

$$c^2=ab$$

$$\overline{a^2+b^2+c^2=ab+bc+ac}$$

De la ecuación, podemos inferir que $a = b = c$, entonces, reemplazando la igualdad en la expresión a calcular:

$$\begin{aligned} \left(\frac{a^6+b^6}{a^3+b^3}\right)\left(\frac{b^6+c^6}{b^3+c^3}\right)\left(\frac{a^6+c^6}{a^3+c^3}\right) \\ \left(\frac{a^6+a^6}{a^3+a^3}\right)\left(\frac{b^6+b^6}{b^3+b^3}\right)\left(\frac{c^6+c^6}{c^3+c^3}\right) \\ \left(\frac{2a^6}{2a^3}\right)\left(\frac{2b^6}{2b^3}\right)\left(\frac{2c^6}{2c^3}\right) \\ \left(a^3\right)\left(b^3\right)\left(c^3\right) \end{aligned}$$

Por lo tanto, el valor de $\left(\frac{a^6+b^6}{a^3+b^3}\right)\left(\frac{b^6+c^6}{b^3+c^3}\right)\left(\frac{a^6+c^6}{a^3+c^3}\right)$ es igual a $(abc)^3$.

Ejercicio 80

Si:

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=3$$

Entonces, encuentre el valor de la siguiente expresión:

$$A=x^{206}+x^{200}+x^{90}+x^{84}+x^{18}+x^{12}+x^6+1$$

Empezando a operar la condición dada:

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=3$$

$$x^2+2\left(x\right)\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x^2}=3$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}=1 \qquad \times x^2$$

$$x^4+1=x^2$$

$$x^4-x^2+1=0 \qquad \times x^2$$

$$x^6-x^4+x^2=0$$

$$x^6-\underbrace{\left(x^4-x^2\right)}_{-1}=0$$

$$x^6+1=0$$

Usando la igualdad en la expresión y factorizando convenientemente:

$$A=x^{206}+x^{200}+x^{90}+x^{84}+x^{18}+x^{12}+x^6+1$$

$$A=x^{200}\left(x^6+1\right)+x^{84}\left(x^6+1\right)+x^{12}\left(x^6+1\right)+\left(x^6+1\right)$$

$$A=\underbrace{\left(x^6+1\right)}_{0}\left(x^{200}+x^{84}+x^{12}+1\right)$$

$$A=(0)\left(x^{200}+x^{84}+x^{12}+1\right)$$

$$A=0$$

Por lo tanto, el valor de $A=x^{206}+x^{200}+x^{90}+x^{84}+x^{18}+x^{12}+x^6+1$ es igual a 0.

Ejercicio 81

Si:

$$a+b+c=-1$$

$$a^2+b^2+c^2=17$$

$$a^3+b^3+c^3=11$$

Encontrar:

$$F=a^5+b^5+c^5$$

Empezando a operar con la condición inicial:

$$a+b+c=-1 \qquad (\quad)^2$$

$$\underbrace{a^2+b^2+c^2}_{17}+2\left(ab+bc+ac\right)=1$$

$$17+2\left(ab+bc+ac\right)=1$$

$$2\left(ab+bc+ac\right)=-16$$

$$ab+bc+ac=-8$$

Asimismo, elevando al cubo la expresión inicial y a la vez haciendo uso de la identidad de Gauss:

$$a+b+c=-1 \qquad (\quad)^3$$

$$\underbrace{a^3+b^3+c^3}_{17}+3\underbrace{\left(a+b+c\right)}_{-1}\underbrace{\left(ab+bc+ac\right)}_{-8}-3abc=-1$$

$$17+3\left(-1\right)\left(-8\right)-3abc=-1$$

$$35-3abc=-1$$

$$-3abc=-36$$

$$abc=12$$

Ahora, se procede a multiplicar las expresiones $a^2+b^2+c^2$ con $x^3+y^3+z^3$:

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(a^3+b^3+c^3\right)=a^5+a^2b^3+a^2c^3+b^2a^3+b^5+b^2c^3+c^2a^3+c^2b^3+c^5$$

Ordenando convenientemente y haciendo uso de las equivalencias:

$$\underbrace{\left(a^2+b^2+c^2\right)}_{17}\underbrace{\left(a^3+b^3+c^3\right)}_{11} = a^5+b^5+c^5+a^2b^2\underbrace{(a+b)}_{-1-c}+b^2c^2\underbrace{(b+c)}_{-1-c}+a^2c^2\underbrace{(a+c)}_{-1-b}$$

$$17\times 11 = a^5+b^5+c^5+a^2b^2(-1-c)+b^2c^2(-1-a)++a^2c^2(-1-b)$$

$$187 = a^5+b^5+c^5-a^2b^2c-a^2b^2-ab^2c^2-b^2c^2-a^2bc^2-a^2c^2$$

$$187 = a^5+b^5+c^5-\underbrace{abc}_{12}\underbrace{(ab+bc+ac)}_{-8}-\left(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2\right)$$

Ahora, se debe determinar el valor de $a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2$, por lo que operando:

$$ab+bc+ac=-8 \qquad (\quad)^2$$

$$a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2+2\underbrace{abc}_{12}\underbrace{(a+b+c)}_{-1}=64$$

$$a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2+2(12)(-1)=64$$

$$a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2-24=64$$

$$a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2=88$$

Con el valor calculado, regresando al cálculo anterior:

$$187 = a^5+b^5+c^5-\underbrace{abc}_{12}\underbrace{(ab+bc+ac)}_{-8}-\underbrace{\left(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2\right)}_{88}$$

$$187 = a^5+b^5+c^5-(12)(-8)-88$$

$$187 = a^5+b^5+c^5+96-88$$

$$187 = a^5+b^5+c^5+8$$

$$179 = a^5+b^5+c^5$$

Por lo tanto, el valor de $a^5+b^5+c^5$ es igual a 179.

Ejercicio 82

Si se cumple que:

$$x^7 + \frac{1}{x^7} = 843$$

Determinar el valor de

$$x^5 + \frac{1}{x^5}$$

Empezando a operar, hacemos que $x + \dfrac{1}{x} = a$, por lo que elevando al cuadrado, resulta:

$$x + \frac{1}{x} = a \qquad \qquad (\quad)^2$$

$$x^2 + 2\,(x)\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^2} = a^2$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = a^2 - 2$$

Asimismo, elevamos al cubo:

$$x + \frac{1}{x} = a \qquad \qquad (\quad)^3$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\,(x)\left(\frac{1}{x}\right)\underbrace{\left(x + \frac{1}{x}\right)}_{a} = a^3$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = a^3 - 3a$$

Ahora, multiplicar las expresiones $x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ y $x^3 + \dfrac{1}{x^3}$:

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) = \left(a^2 - 2\right)\left(a^3 - 3a\right)$$

$$x^5 + x^2 \cdot \frac{1}{x^3} + x^3 \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^5} = a^5 - 3a^3 - 2a^3 + 6a$$

$$x^5 + \underbrace{x + \frac{1}{x}}_{a} + \frac{1}{x^5} = a^5 - 5a^3 + 6a$$

$$x^5 + \frac{1}{x^5} + a = a^5 - 5a^3 + 6a$$

$$x^5 + \frac{1}{x^5} = a^5 - 5a^3 + 5a$$

Seguidamente, se multiplica $x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ y $x^5 + \dfrac{1}{x^5}$:

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x^5 + \frac{1}{x^5}\right) = \left(a^2 - 2\right)\left(a^5 - 5a^3 + 5a\right)$$

$$x^7 + x^2 \cdot \frac{1}{x^5} + x^5 \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^7} = a^7 - 5a^5 + 5a^3 - 2a^5 + 10a^3 - 10a$$

$$\underbrace{x^7 + \frac{1}{x^7}}_{843} + \underbrace{x^3 + \frac{1}{x^3}}_{a^3 - 3a} = a^7 - 7a^5 + 15a^3 - 10a$$

$$843 + a^3 - 3a = a^7 - 7a^5 + 15a^3 - 10a$$

$$a^7 - 7a^5 + 14a^3 - 7a - 843 = 0$$

Aplicando el método Ruffini para factorizar la expresión:

$$\begin{array}{c|cccccccc} & 1 & 0 & -7 & 0 & 14 & 0 & -7 & -843 \\ 3 & & 3 & 9 & 6 & 18 & 96 & 288 & 843 \\ \hline & 1 & 3 & 2 & 6 & 32 & 96 & 281 & 0 \end{array}$$

Después de aplicar el método Ruffini, se obtiene que:

$$a^7 - 7a^5 + 14a^3 - 7a - 843 = (a - 3)\left(a^6 + 3a^5 + 2a^4 + 6a^3 + 32a^2 + 96a + 281\right) = 0$$

Se valida que $a = 3$, por lo que reemplazando en la expresión de $x^5 + \dfrac{1}{x^5}$:

$$x^5 + \frac{1}{x^5} = a^5 - 5a^3 + 5a$$

$$x^5 + \frac{1}{x^5} = (3)^5 - 5(3)^3 + 5(3)$$

$$x^5 + \frac{1}{x^5} = 243 - 135 + 15$$

$$x^5 + \frac{1}{x^5} = 123$$

Por lo tanto, el valor $x^5 + \dfrac{1}{x^5}$ es igual a 123.

Ejercicio 83

Si:

$$A+B+C=1 \qquad A^2+B^2+C^2=9 \qquad A^3+B^3+C^3=1$$

Calcular:

$$\frac{4}{A^4+B^4+P^4}$$

Empezando a operar y haciendo uso la primera condición:

$$A+B+C=1 \qquad (\quad)^2$$

$$\underbrace{A^2+B^2+C^2}_{9}+2\left(AB+BC+AC\right)=1$$

$$2\left(AB+BC+AC\right)=-8$$

$$AB+BC+AC=-4$$

Asimismo, elevando la primera condición al cubo:

$$A+B+C=1 \qquad (\quad)^3$$

$$\underbrace{A^3+B^3+C^3}_{1}+3\underbrace{\left(A+B+C\right)}_{1}\underbrace{\left(AB+BC+AC\right)}_{-3}-3ABC=1$$

$$-11-3ABC=1$$

$$-3ABC=12$$

$$ABC=-4$$

Haciendo uso de la igualdad obtenida:

$$AB+BC+AC=-4 \qquad (\quad)^2$$

$$\left(AB\right)^2+\left(BC\right)^2+\left(AC\right)^2+2\left(AB^2C+A^2BC+ABC^2\right)=16$$

$$\left(AB\right)^2+\left(BC\right)^2+\left(AC\right)^2+2\underbrace{ABC}_{-4}\underbrace{\left(A+B+C\right)}_{1}=16$$

$$\left(AB\right)^2+\left(BC\right)^2+\left(AC\right)^2-8=16$$

$$\left(AB\right)^2+\left(BC\right)^2+\left(AC\right)^2=24$$

Finalmente, elevando al cuadrado la segunda condición:

$$
\begin{aligned}
A^2+B^2+C^2 &= 9 \qquad {\color{red}(\quad)^2}\\
A^4+B^4+C^4+2\underbrace{\left\{(AB)^2+(BC)^2+(AC)^2\right\}}_{24} &= 81\\
A^4+B^4+C^4+2\,(24) &= 81\\
A^4+B^4+C^4+48 &= 81\\
A^4+B^4+C^4 &= 33
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, el valor de $\dfrac{4}{A^4+B^4+P^4}$ es igual a $\dfrac{4}{33}$.

Ejercicio 84

Si

$$\begin{cases} a^2+3ab=12 \\ b^2-ab+bc=15 \\ c^2+bc+2ac=9 \end{cases}$$

Determinar el valor de:

$$\frac{(a-2)^2+(b-2)^2+(c-2)^2}{(a-2)(b-2)+(a-2)(c-2)+(b-2)(c-2)}$$

Empezando a operar y desarrollando la expresión a calcular:

$$\frac{(a-2)^2+(b-2)^2+(c-2)^2}{(a-2)(b-2)+(a-2)(c-2)+(b-2)(c-2)}$$

$$\frac{(a^2-4a+4)+(b^2-4a+4)+(c^2-4c+4)}{(ab-2a-2b+4)+(ac-2c-2a+4)+(bc-2c-2b+4)}$$

$$\frac{a^2+b^2+c^2-4\,(a+b+c)+12}{ab+ac+bc-4\,(a+b+c)+12}$$

Ahora, sumando las condicionales dadas:

$$\begin{aligned} a^2+3ab&=12 \\ b^2-ab+bc&=15 \\ c^2+bc+2ac&=9 \\ \hline a^2+b^2+c^2+2\,(ab+bc+ac)&=36 \quad \ldots(\clubsuit) \\ (a+b+c)^2&=36 \\ a+b+c&=6 \quad \ldots(\bigstar) \end{aligned}$$

Haciendo uso de las igualdades $(\clubsuit)$ y $(\bigstar)$:

$$\frac{\overbrace{a^2+b^2+c^2}^{36-2(ab+bc+ac)}-4\overbrace{(a+b+c)}^{6}+12}{ab+ac+bc-4\underbrace{(a+b+c)}_{6}+12}$$

$$\frac{-2ab-2ac-2bc+24}{ab+bc+ac-12}$$

$$-2$$

Ejercicio 85

Cumpliéndose que:

$$a^2+b^2+c^2=12$$

$$ab+ac+bc=-6$$

Calcular el valor de:

$$\frac{abc}{a\left(b+c\right)^2+b\left(a+c\right)^2+c\left(a+b\right)^2}$$

Empezando a operar y determinando el valor de $a+b+c$:

$$\left(a+b+c\right)^2=\underbrace{a^2+b^2+c^2}_{12}+2\underbrace{\left(ab+bc+ac\right)}_{-6}$$

$$\left(a+b+c\right)^2=12+2\left(-6\right)$$

$$\left(a+b+c\right)^2=0$$

$$a+b+c=0$$

De la igualdad obtenida $a+b+c=0$, se obtiene:

- $a+b=-c$
- $b+c=-a$
- $c+a=-b$

Desarrollando la expresión a calcular:

$$\frac{abc}{a\left(b+c\right)^2+b\left(a+c\right)^2+c\left(a+b\right)^2}$$

$$\frac{abc}{a\left(-a\right)^2+b\left(-b\right)^2+c\left(-c\right)^2}$$

$$\frac{abc}{a^3+b^3+c^3}$$

Por las igualdades incondicionales de $a+b+c=0$, se obtiene $a^3+b^3+c^3=3abc$, reemplazando:

$$\frac{abc}{a^3+b^3+c^3}=\frac{abc}{3abc}=\frac{1}{3}$$

Por lo tanto, el valor de $\dfrac{abc}{a\left(b+c\right)^2+b\left(a+c\right)^2+c\left(a+b\right)^2}$ es igual a $\dfrac{1}{3}$.

Aaric Llerena Medina

Ejercicio 86

Cumpliéndose que:

$$x + b + c = 3a$$

$$y + c + a = 3b$$

$$z + a + b = 3c$$

$$abc \neq 0$$

Determinar el valor de:

$$S = \frac{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz}{a\left(a^2 - bc\right) + b\left(b^2 - ca\right) + c\left(c^2 - ab\right)}$$

Empezando a operar y sumando todas las condiciones dadas:

$$\begin{array}{c} x + b + c = 3a \quad + \\ y + c + a = 3b \\ z + a + b = 3c \\ \hline x + y + z + 2\left(a + b + c\right) = 3\left(a + b + c\right) \end{array}$$

$$x + y + z = a + b + c$$

Asimismo, desarrollando la expresión de S:

$$S = \frac{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz}{a\left(a^2 - bc\right) + b\left(b^2 - ca\right) + c\left(c^2 - ab\right)}$$

$$S = \frac{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz}{a^3 - abc + b^3 - abc + c^3 - abc}$$

$$S = \frac{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz}{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}$$

Como se determinó que $x + y + z = a + b + c$, entonces:

$$S = \frac{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz}$$

$$S = 1$$

Por lo tanto, el valor de $S = \dfrac{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz}{a\left(a^2 - bc\right) + b\left(b^2 - ca\right) + c\left(c^2 - ab\right)}$ es igual a 1.

Ejercicio 87

Si se cumple que $x^2 - x - 1 = 0$. Calcular

$$\frac{x^{16}-1}{x^8+2x^7}$$

Empezando a operar la condición dada se obtiene:

- $x^2 - 1 = x$
- $x^2 = x + 1$

Desarrollando la expresión a calcular:

$$\frac{x^{16}-1}{x^8+2x^7}$$

$$\frac{\left(x^8+1\right)\left(x^4+1\right)\left(x^2+1\right)\left(x^2-1\right)}{x^7\left(x+2\right)}$$

$$\frac{\left(x^8+1\right)\left(x^4+1\right)\left(x^2+1\right)\overbrace{\left(x^2-1\right)}^{x}}{x^7\left(\underbrace{x+1}_{x^2}+1\right)}$$

$$\frac{\left(x^8+1\right)\left(x^4+1\right)\left(x^2+1\right)x}{x^7\left(x^2+1\right)}$$

$$\frac{\left(x^8+1\right)\left(x^4+1\right)}{x^6}$$

Se procede a calcular el equivalente de x^4+1:

$$\begin{aligned}
x^4+1 &= x^4+2x^2+1-2x^2 \\
&= \left(\underbrace{x^2}_{x+1}+1\right)^2 - 2\underbrace{x^2}_{(x+1)} = (x+2)^2 - 2(x+1) \\
&= x^2+4x+4-2x-2 = \underbrace{x^2}_{x+1}+2+2x \\
&= 3\underbrace{(x+1)}_{x^2} = 3x^2 \\
x^4+1 &= 3x^2
\end{aligned}$$

Asimismo, se procede a calcular el valor de x^8+1:

$$\begin{aligned} x^8+1 &= x^8+2x^4+1-2x^4 \\ &= \underbrace{\left(x^4+1\right)^2}_{(3x^2)} -2x^4 \\ &= 9x^4-2x^4 \\ x^8+1 &= 7x^4 \end{aligned}$$

Finalmente, reemplazando las equivalencia en la expresión:

$$\begin{aligned} &\frac{(x^8+1)(x^4+1)}{x^6} \\ &\frac{(3x^2)(7x^4)}{x^6} \\ &\frac{21x^6}{x^6} \\ &21 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el valor de $\dfrac{x^{16}-1}{x^8+2x^7}$ es igual a 21.

Ejercicio 88

Sabiendo que tres números reales y positivos a, b, c cumplen con:

$$\frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}+\frac{a+b}{c}=6$$

Simplificar:

$$\frac{(a+b+c)^3}{a^3+b^3+abc}$$

Ejercicio 89

Estableciéndose que:

$$a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}=0$$

Reducir:

$$\frac{a^4+b^4+c^4}{a^3+b^3+c^3+abc}$$

Empezando a operar la condición dada:

$$\frac{1}{a}\cdot\frac{bc}{bc}+\frac{1}{b}\cdot\frac{ac}{ac}+\frac{1}{c}\cdot\frac{ab}{ab}=0$$

$$\frac{bc+ac+ab}{abc}=0$$

$$ab+bc+ac=0 \qquad abc\neq 0$$

Ahora, haciendo que $a+b+c=\chi$, por lo que elevando al cuadrado:

$$a+b+c=\chi \qquad (\quad)^2$$

$$a^2+b^2+c^2+2\underbrace{(ab+bc+ac)}_{0}=\chi^2$$

$$a^2+b^2+c^2=\chi^2$$

Asimismo, elevando al cubo:

$$a+b+c=\chi \qquad (\quad)^3$$

$$a^3+b^3+c^3+3\underbrace{(ab+bc+ac)}_{0}(a+b+c)-3abc=\chi^3$$

$$a^3+b^3+c^3=\chi^3+3abc$$

Elevando al cuadrado la igualdad $ab+bc+ac=0$:

$$ab+bc+ac=0 \qquad (\quad)^2$$

$$a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2+2abc\underbrace{(a+b+c)}_{\chi}=0$$

$$a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2=-2abc\chi$$

Finalmente, encontrando elevando al cuadrado la expresión $a^2+b^2+c^2$:

$$a^2+b^2+c^2=\chi^2 \qquad (\quad)^2$$

$$a^4+b^4+c^4+2\underbrace{\left(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2\right)}_{-2abc\chi}=\chi^4$$

$$a^4+b^4+c^4+2\left(-2abc\chi\right)=\chi^4$$

$$a^4+b^4+c^4=\chi^4+4abc\chi$$

Reemplazando las equivalencias en la expresión a reducir:

$$\frac{a^4+b^4+c^4}{a^3+b^3+c^3+abc}$$

$$\frac{\chi^4+4abc\chi}{\chi^3+3abc+abc}$$

$$\frac{\chi\left(\chi^3+4abc\right)}{\chi^3+4abc}$$

$$\chi$$

$$a+b+c$$

Por lo tanto, el valor reducido de la expresión $\dfrac{a^4+b^4+c^4}{a^3+b^3+c^3+abc}$ es igual a $a+b+c$.

Ejercicio 90

Siendo a, b, c tres números reales que cumplen:

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

$$a + b + c \neq 0$$

Calcular el valor de:

$$\frac{(ab^2c^3)^2}{a^{12} + b^{12} + c^{12}}$$

Empezando a operar y despejando la primera condición:

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$$

Ahora, haciendo uso de la identidad de Gauss:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \underbrace{(a + b + c)}_{\neq 0}\underbrace{\left(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac\right)}_{=0}$$

Encontrando la igualdad para que la expresión sea cero.

$$\left(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac\right) = 0 \qquad \times 2$$

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ac = 0$$

$$\underbrace{a^2 - 2ab + b^2}_{(a-b)^2} + \underbrace{a^2 - 2ac + c^2}_{(a-c)^2} + \underbrace{b^2 - 2bc + c^2}_{(b-c)^2} = 0$$

$$(a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2 = 0$$

Para que la igualdad $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ se cumpla en los reales ($\mathbb{R}$), solo si $x, y, z = 0$. Por lo tanto:

$$a = b, \quad a = c, \quad b = c \qquad \therefore a = b = c$$

Reemplazando la igualdad en la expresión a calcular:

$$\frac{(ab^2c^3)^2}{a^{12} + b^{12} + c^{12}} = \frac{(a \cdot a^2 \cdot a^3)^2}{a^{12} + a^{12} + a^{12}} = \frac{(a^6)^2}{3a^{12}} = \frac{a^{12}}{3a^{12}} = \frac{1}{3}$$

Por lo tanto, el valor de $\dfrac{(ab^2c^3)^2}{a^{12} + b^{12} + c^{12}}$ es igual a $\dfrac{1}{3}$.

Ejercicio 91

Cumpliéndose que $a+b+c=0$. Hallar el valor reducido de:

$$\frac{\sqrt{\left(a^2+b^2+c^2\right)^4-3\left(a^4+b^4+c^4\right)^2}}{a^4+b^4+c^4}$$

Empezando a operar y elevando al cuadrado:

$$a+b+c=0 \qquad (\quad)^2$$

$$a^2+b^2+c^2+2\left(ab+bc+ac\right)=0$$

$$a^2+b^2+c^2=-2\left(ab+bc+ac\right)$$

Elevando el resultado obtenido nuevamente al cuadrado:

$$a^2+b^2+c^2=-2\left(ab+bc+ac\right) \qquad (\quad)^2$$

$$a^4+b^4+c^4+2\left(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2\right)=4\left(ab+bc+ac\right)^2$$

Calculando el valor de $\left(ab+bc+ac\right)^2$:

$$\begin{aligned}\left(ab+bc+ac\right)^2&=a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2+2a^2bc+2ab^2c+2abc^2\\&=a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2+2abc\underbrace{\left(a+b+c\right)}_{0}\end{aligned}$$

$$\left(ab+bc+ac\right)^2=a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2$$

Volviendo a la expresión anterior:

$$a^4+b^4+c^4+2\underbrace{\left(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2\right)}_{(ab+bc+ac)^2}=4\left(ab+bc+ac\right)^2$$

$$a^4+b^4+c^4=2\left(ab+bc+ac\right)^2$$

Con las equivalencias encontradas, a continuación, se muestra el resumen de las igualdades a utilizar:

$$a^2+b^2+c^2=-2\left(ab+bc+ac\right)$$

$$a^4+b^4+c^4=2\left(ab+bc+ac\right)^2$$

Ahora, reemplazando las igualdades en la expresión a calcular:

$$\frac{\sqrt{\left(a^2+b^2+c^2\right)^4-3\left(a^4+b^4+c^4\right)^2}}{a^4+b^4+c^4}$$

$$\frac{\sqrt{\left\{-2\left(ab+bc+ac\right)\right\}^4-3\left\{2\left(ab+bc+ac\right)^2\right\}^2}}{2\left(ab+bc+ac\right)^2}$$

$$\frac{\sqrt{16\left(ab+bc+ac\right)^4-3\left\{4\left(ab+bc+ac\right)^4\right\}}}{2\left(ab+bc+ac\right)^2}$$

$$\frac{\sqrt{16\left(ab+bc+ac\right)^4-12\left(ab+bc+ac\right)^4}}{2\left(ab+bc+ac\right)^2}$$

$$\frac{\sqrt{4\left(ab+bc+ac\right)^4}}{2\left(ab+bc+ac\right)^2}$$

$$\frac{2\left(ab+bc+ac\right)^2}{2\left(ab+bc+ac\right)^2}$$

$$1$$

Por lo tanto, el valor de $\dfrac{\sqrt{\left(a^2+b^2+c^2\right)^4-3\left(a^4+b^4+c^4\right)^2}}{a^4+b^4+c^4}$ es igual a 1.

Ejercicio 92

Con:

$$x^2+y^2+z^2=5.\overline{6} \quad x^3+y^3+z^3=7 \quad xyz=-2$$

Determinar uno de los valores de:

$$\frac{x^3+y^3+(z-2)^3}{xy}-3z$$

Empezando a operar y haciendo uso de la segunda condición:

$$(x+y+z)^3=\underbrace{x^3+y^3+z^3}_{7}+3\left(xy+yz+xz\right)\left(x+y+z\right)-3\underbrace{xyz}_{-2}$$

$$(x+y+z)^3=7+3\left\{x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+x^2z+xz^2+3xyz\right\}+6$$

$$(x+y+z)^3=13+3\left\{y\left(x^2+z^2\right)+x\left(y^2+z^2\right)+z\left(x^2+y^2\right)+3\left(-2\right)\right\}$$

Como $x^2+y^2+z^2=\dfrac{17}{3}$, despejando, la expresión resultante es:

$$(x+y+z)^3=13+3\left\{y\left(\frac{17}{3}-y^2\right)+x\left(\frac{17}{3}-x^2\right)+z\left(\frac{17}{3}-z^2\right)-6\right\}$$

$$(x+y+z)^3=13+3\left\{\frac{17}{3}\left(x+y+z\right)-\left(x^3+y^3+z^3\right)-6\right\}$$

$$(x+y+z)^3=13+3\cdot\frac{17}{3}\left(x+y+z\right)-3\underbrace{\left(x^3+y^3+z^3\right)}_{7}-18$$

$$(x+y+z)^3=17\left(x+y+z\right)-26$$

Sea $(x+y+z)=A$, entonces la ecuación a resolver es: $A^3-17A+26=0$, por lo que aplicando Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 0 & -17 & 26 \\
-2 & & -2 & 4 & 26 \\
\hline
 & 1 & -2 & -13 & \boxed{52}
\end{array}$$

Después de aplicar el método Ruffini, se obtiene que:

$$A^3-17A+26=(A-2)\left(A^2-2A-13\right)$$

Se valida que $A = 2$, por lo que $x + y + z = 2$. Asimismo, elevando la expresión $x + y + z$ al cuadrado, obtenemos:

$$(x+y+z)^2 = \underbrace{x^2+y^2+z^2}_{\frac{17}{3}} + 2(xy+yz+xz)$$
$$2^2 = \frac{17}{3} + 2(xy+yz+xz)$$
$$-\frac{5}{6} = xy+yz+xz$$

A continuación, se desarrolla la expresión a calcular:

$$\frac{x^3+y^3+(z-2)^3}{xy} - 3z$$
$$\frac{\overbrace{x^3+y^3+z^3}^{7} - 6z^2 + 12z - 8 - 3\overbrace{xyz}^{-2}}{xy}$$
$$\frac{5-6z(z-2)}{xy} \cdot \frac{z}{z}$$
$$\frac{5z-6z^2(z-2)}{\underbrace{xyz}_{-2}}$$
$$\frac{6z^2(z-2)-5z}{2}$$

Desarrollando la siguiente igualdad:

$$xy+yz+xz = -\frac{5}{6}$$
$$xy+z(x+y) = -\frac{5}{6}$$
$$xy+z(2-z) = -\frac{5}{6} \quad \times z$$

$$xyz + z^2(2-z) = -\frac{5}{6}z$$
$$-12-6z^2(z-2) = -5z \qquad (3)$$
$$-5z+6z^2(z-2) = -12$$

Terminando de reemplazar la última igualdad:

$$\frac{6z^2(z-2)-5z}{2} = \frac{-12}{2} = -6$$

Por lo tanto, el valor de $\dfrac{x^3+y^3+(z-2)^3}{xy} - 3z$ es igual a -6.

Ejercicio 93

Con $a+b+c=1$, hallar el valor de:

$$\frac{1-6abc}{2\left(a^3+b^3+c^3\right)-3\left(a^2+b^2+c^2\right)}$$

Empezando a operar y elevando la condición al cuadrado:

$$a+b+c=1 \qquad (\quad)^2$$

$$a^2+b^2+c^2+2\left(ab+bc+ac\right)=1$$

$$a^2+b^2+c^2=1-2\left(ab+bc+ac\right)$$

Asimismo, elevando al cubo:

$$a+b+c=1 \qquad (\quad)^3$$

$$a^3+b^3+c^3+3\left(ab+bc+ac\right)\underbrace{\left(a+b+c\right)}_{1}-3abc=1$$

$$a^3+b^3+c^3+3\left(ab+bc+ac\right)-3abc=1$$

$$a^3+b^3+c^3=1-3\left(ab+bc+ac\right)+3abc$$

Reemplazando las igualdades en la expresión a calcular:

$$\frac{1-6abc}{2\left(a^3+b^3+c^3\right)-3\left(a^2+b^2+c^2\right)}$$

$$\frac{1-6abc}{2\left\{1-3\left(ab+bc+ac\right)+3abc\right\}-3\left\{1-2\left(ab+bc+ac\right)\right\}}$$

$$\frac{1-6abc}{2-6\left(ab+bc+ac\right)+6abc-3+6\left(ab+bc+ac\right)}$$

$$\frac{1-6abc}{-1+6abc}$$

$$\frac{1-6abc}{-\left(1-6abc\right)}$$

$$-1$$

Por lo tanto, el valor de $\dfrac{1-6abc}{2\left(a^3+b^3+c^3\right)-3\left(a^2+b^2+c^2\right)}$ es igual a -1.

Ejercicio 94

Sabiendo que se cumple:

$$\frac{a^2c+ab^2+bc^2}{12}=abc$$
$$\frac{a^2b+cb^2+ac^2}{18}=abc$$

Calcular:

$$\frac{(a+b)^2}{ab}+\frac{(b+c)^2}{bc}+\frac{(a+c)^2}{ac}$$

Empezando a operar y obteniendo las igualdades:

$$a^2c+ab^2+bc^2=12abc \qquad a^2b+cb^2+ac^2=18abc$$

Desarrollando la expresión a calcular:

$$\frac{(a+b)^2}{ab}+\frac{(b+c)^2}{bc}+\frac{(a+c)^2}{ac}$$
$$\frac{a^2+2ab+b^2}{ab}\cdot\frac{c}{c}+\frac{b^2+2bc+c^2}{bc}\cdot\frac{a}{a}+\frac{a^2+2ac+c^2}{ac}\cdot\frac{b}{b}$$
$$\frac{a^2c+2abc+b^2c}{abc}+\frac{b^2a+2abc+c^2a}{abc}+\frac{a^2b+2abc+c^2b}{abc}$$
$$\frac{a^2c+b^2c+b^2a+c^2a+a^2b+c^2b+6abc}{abc}$$

Agrupando a convenientemente:

$$\frac{\overbrace{a^2c+ab^2+bc^2}^{12abc}+\overbrace{a^2b+b^2c+ac^2}^{18abc}+6abc}{abc}$$
$$\frac{12abc+18abc+6abc}{abc}$$
$$\frac{36abc}{abc}$$
$$36$$

Por lo tanto, el valor de $\frac{(a+b)^2}{ab}+\frac{(b+c)^2}{bc}+\frac{(a+c)^2}{ac}$ es igual a 36.

Ejercicio 95

Si $a+b+c=a^2+b^2+c^2=1$. Calcular:

$$B=\frac{a^3+b^3+c^3-3abc}{a^4+b^4+c^4-4abc}$$

Empezando a operar y haciendo uso de la condición:

$$a+b+c=1 \qquad (\quad)^2$$

$$\underbrace{a^2+b^2+c^2}_{1}+2(ab+bc+ac)=1$$

$$ab+bc+ac=0$$

Continuando con la condición y utilizando la igualdad obtenida:

$$a+b+c=1 \qquad (\quad)^3$$

$$a^3+b^3+c^3+3\underbrace{(a+b+c)}_{1}\underbrace{(ab+bc+ac)}_{0}-3abc=1$$

$$a^3+b^3+c^3-3abc=1$$

Ahora, elevando al cuadrado la expresión $ab+bc+ac$:

$$ab+bc+ac=0 \qquad (\quad)^2$$

$$(ab)^2+(ac)^2+(bc)^2+2\left\{ab^2c+a^2bc+abc^2\right\}=0$$

$$(ab)^2+(ac)^2+(bc)^2+2abc\underbrace{(a+b+c)}_{1}=0$$

$$(ab)^2+(ac)^2+(bc)^2=-2abc$$

Asimismo, elevando al cuadrado la otra condición y haciendo uso de las igualdades necesarias:

$$a^2+b^2+c^2=1 \qquad (\quad)^2$$

$$a^4+b^4+c^4+2\left\{(ab)^2+(ac)^2+(bc)^2\right\}=1$$

$$a^4+b^4+c^4=1-2\underbrace{\left\{(ab)^2+(ac)^2+(bc)^2\right\}}_{-2abc}$$

$$a^4+b^4+c^4-4abc=1$$

Reemplazando las igualdades requeridas en la expresión:

$$B = \frac{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}{a^4 + b^4 + c^4 - 4abc}$$

$$B = \frac{1}{1}$$

$$B = 1$$

Por lo tanto, el valor de $B = \dfrac{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}{a^4 + b^4 + c^4 - 4abc}$ es igual a 1.

Ejercicio 96

Reducir la expresión:

$$M=\sqrt{4\left(a^2+b^2+c^2\right)-(a+b-c)^2-(a-b+c)^2-(b+c-a)^2}$$

Siendo:

$$a+b+c=2p$$

Empezando a operar, se obtiene las siguientes igualdades:

$$a+b=2p-c. \qquad a+c=2p-b. \qquad b+c=2p-x.$$

Reemplazando las igualdades en M:

$$M=\sqrt{4\left(a^2+b^2+c^2\right)-\left\{(2p-2c)^2+(2p-2b)^2+(2p-2a)^2\right\}}$$

$$M=\sqrt{4\left(a^2+b^2+c^2\right)-4\left\{(p-c)^2+(p-b)^2+(p-a)^2\right\}}$$

$$M=\sqrt{4\left(a^2+b^2+c^2\right)-4\left\{p^2-2pc+c^2+p^2-2pb+b^2+p^2-2pa+a^2\right\}}$$

$$M=\sqrt{4\left(a^2+b^2+c^2\right)-4\left\{3p^2-2p\left(a+b+c\right)+a^2+b^2+c^2\right\}} \qquad a+b+c=2p$$

$$M=\sqrt{4\left(a^2+b^2+c^2\right)-4\left\{3p^2-2p\left(2p\right)+a^2+b^2+c^2\right\}}$$

$$M=\sqrt{4\left(a^2+b^2+c^2\right)-4\left\{3p^2-4p^2+a^2+b^2+c^2\right\}}$$

$$M=\sqrt{4\left(a^2+b^2+c^2\right)-4\left\{-p^2+a^2+b^2+c^2\right\}}$$

$$M=\sqrt{4\left(a^2+b^2+c^2\right)+4p^2-4\left(a^2+b^2+c^2\right)}$$

$$M=\sqrt{4p^2}$$

$$M=2p$$

Por lo tanto, el valor de $M=\sqrt{4\left(a^2+b^2+c^2\right)-(a+b-c)^2-(a-b+c)^2-(b+c-a)^2}$ es igual a $2p$.

Ejercicio 97

Dadas las condiciones:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2$$

$$(a + b + c)(1 + ab + ac + bc) = 32$$

Calcular el valor de:

$$a + b + c$$

Empezando a operar:

$$(a + b + c)^2 = \underbrace{a^2 + b^2 + c^2}_{2} + 2(ab + bc + ac)$$

$$(a + b + c)^2 = 2 + 2(ab + bc + ac)$$

$$(a + b + c)^2 = 2(1 + ab + ac + bc)$$

Multiplicando a ambos lados por $a + b + c$, obtenemos:

$$(a + b + c)^2 \textcolor{red}{(a + b + c)} = 2\underbrace{\textcolor{red}{(a + b + c)}(1 + ab + ac + bc)}_{32}$$

$$(a + b + c)^3 = 2(32)$$

$$(a + b + c)^3 = 64$$

$$(a + b + c)^3 = 4$$

Por lo tanto, el valor de $a + b + c$ es 4.

Ejercicio 98

Conociendo $a+4b+9c=0$, reducir la siguiente expresión:

$$\frac{(a-2b)^2}{ab}+\frac{(2b-3c)^2}{bc}+\frac{(3c-a)^2}{ac}$$

Empezando a operar la condición $a+4b+9c=0$, obtenemos la siguiente igualdad:

- $a+9c=-4b$
- $a+4b=-9c$
- $4b+9c=-a$

Desarrollando los cuadrados de cada sumando:

$$\frac{a^2-4ab+b^2}{ab}+\frac{4b^2-12bc+9c^2}{bc}+\frac{9c^2-6ac+a^2}{ac}$$

$$\frac{a^2}{ab}-\frac{4ab}{ab}+\frac{b^2}{ab}+\frac{4b^2}{bc}-\frac{12bc}{bc}+\frac{9c^2}{bc}+\frac{9c^2}{ac}-\frac{6ac}{ac}+\frac{a^2}{ac}$$

$$\frac{a}{c}-4+\frac{4b}{a}+\frac{4b}{c}-12+\frac{9c}{b}+\frac{9c}{a}-6+\frac{a}{c}$$

Agrupando convenientemente:

$$\frac{a+9c}{b}+\frac{4b+9c}{a}+\frac{4b+a}{c}-22$$

Reemplazando las igualdades obtenidas previamente:

$$-\frac{4b}{b}-\frac{a}{a}-\frac{9c}{c}-22$$

$$-4-1-9-22$$

$$-36$$

Por lo tanto, el valor de $\dfrac{(a-2b)^2}{ab}+\dfrac{(2b-3c)^2}{bc}+\dfrac{(3c-a)^2}{ac}$ es igual a -36.

Ejercicio 99

Sabiendo que:

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x^2+y^2=2 \end{cases}$$

Encontrar el valor de $x^{11}+y^{11}$.

Empezando a operar la primera condición y elevando al cuadrado:

$$x+y=1 \qquad (\quad)^2$$

$$\underbrace{x^2+y^2}_{2}+2xy=1$$

$$2+2xy=1$$

$$2xy=-1$$

$$xy=-\frac{1}{2}$$

Asimismo, elevando al cubo la primera condición para determinar x^3+y^3:

$$x+y=1 \qquad (\quad)^3$$

$$x^3+y^3+3\underbrace{xy}_{-1/2}\underbrace{(x+y)}_{1}=1$$

$$x^3+y^3+3\left(-\frac{1}{2}\right)(1)=1$$

$$x^3+y^3-\frac{3}{2}=1$$

$$x^3+y^3=\frac{5}{2}$$

Siguiendo los cálculos, buscamos la igualdad de x^4+y^4:

$$x^4+y^4=\underbrace{(x^2+y^2)^2}_{2^2}-2\underbrace{(xy)^2}_{(-1/2)^2}$$

$$x^4+y^4=2^2-2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$x^4+y^4=4-\frac{1}{2}$$

$$x^4+y^4=\frac{7}{2}$$

Ahora, multiplicando x^2+y^2 por x^3+y^3, se obtiene:

$$
\begin{aligned}
\left(x^2+y^2\right)\left(x^3+y^3\right) &= (2)\left(\frac{5}{2}\right)\\
x^5+x^2y^3+x^3y^2+y^5 &= 5\\
x^5+y^5+\underbrace{(xy)^2}_{(-1/2)^2}\underbrace{(x+y)}_{1} &= 5\\
x^5+y^5+\left(-\frac{1}{2}\right)^2(1) &= 5\\
x^5+y^5 &= 5-\frac{1}{4}\\
x^5+y^5 &= \frac{19}{4}
\end{aligned}
$$

Asimismo, es preciso calcular el valor de x^8+y^8:

$$
\begin{aligned}
x^8+y^8 &= \underbrace{\left(x^4+y^4\right)^2}_{(7/2)^2}-2\underbrace{(xy)^4}_{(-1/2)^4}\\
x^8+y^8 &= \left(\frac{7}{2}\right)^2-2\left(-\frac{1}{2}\right)^4\\
x^8+y^8 &= \frac{49}{4}-\frac{1}{8}\\
x^8+y^8 &= \frac{97}{8}
\end{aligned}
$$

Finalmente, multiplicando x^3+y^3 por x^8+y^8, lo que quedaría:

$$
\begin{aligned}
\left(x^3+y^3\right)\left(x^8+y^8\right) &= \left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{97}{8}\right)\\
x^{11}+x^3y^8+x^8y^3+y^{11} &= \frac{485}{16}\\
x^{11}+y^{11}+\underbrace{(xy)^3}_{(-1/2)^3}\underbrace{\left(x^5+y^5\right)}_{19/4} &= \frac{485}{16}\\
x^{11}+y^{11}+\left(-\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{19}{4}\right) &= \frac{485}{16}\\
x^{11}+y^{11} &= \frac{989}{32}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, el valor de $x^{11}+y^{11}$ es igual a $\dfrac{989}{32}$.

Ejercicio 100

Dado que $a + b + c = 0$, demostrar las igualdades condicionales:

$$a^n + b^n + c^n \quad \text{para } 2 \leq n \leq 10$$

Para $n = 2$:

$$a + b + c = 0 \qquad (\quad)^2$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac) = 0$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = -2(ab + bc + ac)$$

Para $n = 3$:

$$a + b + c = 0 \qquad (\quad)^3$$

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3(ab + bc + ac)\underbrace{(a + b + c)}_{0} - 3abc = 0$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

Para $n = 4$:

$$a^2 + b^2 + c^2 = -2(ab + bc + ac) \qquad (\quad)^2$$

$$a^4 + b^4 + c^4 + 2\left(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2\right) = 4(ab + bc + ac)^2$$

Calculando el valor de $(ab + bc + ac)^2$:

$$(ab + bc + ac)^2 = a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 + 2a^2bc + 2ab^2c + 2abc^2$$

$$= a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 + 2abc\underbrace{(a + b + c)}_{0}$$

$$(ab + bc + ac)^2 = a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2$$

Volviendo a la expresión anterior:

$$a^4 + b^4 + c^4 + 2\underbrace{\left(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2\right)}_{(ab+bc+ac)^2} = 4(ab + bc + ac)^2$$

$$a^4 + b^4 + c^4 = 2(ab + bc + ac)^2$$

Para $n=5$**:**

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(a^3+b^3+c^3\right)=-2\left(ab+bc+ac\right)\cdot 3abc$$

$$a^5+b^5+c^5+a^2b^3a^2c^3+b^2a^3+b^2c^3+c^2a^3+c^2b^3=-6abc\left(ab+bc+ac\right)$$

$$a^5+b^5+c^5+a^2b^2\underbrace{(a+b)}_{-c}+b^2c^2\underbrace{(b+c)}_{-a}+a^2c^2\underbrace{(a+c)}_{-b}=-6abc\left(ab+bc+ac\right)$$

$$a^5+b^5+c^5-a^2b^2c-ab^2c^2-a^2bc^2=-6abc\left(ab+bc+ac\right)$$

$$a^5+b^5+c^5-abc\left(ab+bc+ac\right)=-6abc\left(ab+bc+ac\right)$$

$$a^5+b^5+c^5=-5abc\left(ab+bc+ac\right)$$

Para $n=6$**:**

$$a^3+b^3+c^3=3abc \qquad (\quad)^2$$

$$a^6+b^6+c^6+2\left(a^3b^3+b^3c^3+a^3c^3\right)=9\left(abc\right)^2$$

Calculando el valor de $\left(ab+bc+ac\right)^3$:

$$\left(ab+bc+ac\right)^3=a^3b^3+b^3c^3+a^3c^3+3abc\left(ab^2+a^2b+b^2c+bc^2+a^2c+ac^2\right)+6\left(abc\right)^2$$

$$\left(ab+bc+ac\right)^3=a^3b^3+b^3c^3+a^3c^3+3abc\left\{b^2\underbrace{(a+c)}_{-b}+a^2\underbrace{(b+c)}_{-a}+c^2\underbrace{(a+b)}_{-c}\right\}+6\left(abc\right)^2$$

$$\left(ab+bc+ac\right)^3=a^3b^3+b^3c^3+a^3c^3+3abc\left(-b^3-a^3-c^3\right)+6\left(abc\right)^2$$

$$\left(ab+bc+ac\right)^3=a^3b^3+b^3c^3+a^3c^3-3abc\underbrace{\left(a^3+b^3+c^3\right)}_{3abc}+6\left(abc\right)^2$$

$$\left(ab+bc+ac\right)^3=a^3b^3+b^3c^3+a^3c^3-9\left(abc\right)^2+6\left(abc\right)^2$$

$$a^3b^3+b^3c^3+a^3c^3=\left(ab+bc+ac\right)^3+3\left(abc\right)^2$$

Volviendo a la expresión anterior:

$$a^6+b^6+c^6+2\left(a^3b^3+b^3c^3+a^3c^3\right)=9\left(abc\right)^3$$

$$a^6+b^6+c^6+2\left\{\left(ab+bc+ac\right)^3+3\left(abc\right)^2\right\}=9\left(abc\right)^2$$

$$a^6+b^6+c^6+2\left(ab+bc+ac\right)^3+6\left(abc\right)^2=9\left(abc\right)^2$$

$$a^6+b^6+c^6=3\left(abc\right)^2-2\left(ab+bc+ac\right)^3$$

Para $n = 7$:

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(a^5+b^5+c^5\right) = -2\left(ab+bc+ac\right)\cdot -5abc\left(ab+bc+ac\right)$$

$$a^7+b^7+c^7+a^5b^2+a^5c^2+b^5a^2+b^5c^2+c^5a^2+c^5b^2 = 10abc\left(ab+bc+ac\right)^2$$

$$a^7+b^7+c^7+a^5\underbrace{\left(b^2+c^2\right)}_{a^2-2bc}+b^5\underbrace{\left(a^2+c^2\right)}_{b^2-2ac}+c^5\underbrace{\left(a^2+b^2\right)}_{c^2-2ab} = 10abc\left(ab+bc+ac\right)^2$$

$$a^7+b^7+c^7+a^7-2a^5bc+b^7-2ab^5c+c^7-2abc^5 = 10abc\left(ab+bc+ac\right)^2$$

$$2\left(a^7+b^7+c^7\right)-2abc\underbrace{\left(a^4+b^4+c^4\right)}_{2(ab+bc+ac)^2} = 10abc\left(ab+bc+ac\right)^2$$

$$2\left(a^7+b^7+c^7\right)-2abc\left\{2\left(ab+bc+ac\right)^2\right\} = 10abc\left(ab+bc+ac\right)^2$$

$$2\left(a^7+b^7+c^7\right)-4abc\left(ab+bc+ac\right)^2 = 10abc\left(ab+bc+ac\right)^2$$

$$2\left(a^7+b^7+c^7\right) = 14abc\left(ab+bc+ac\right)^2$$

$$a^7+b^7+c^7 = 7abc\left(ab+bc+ac\right)^2$$

Para $n = 8$**:**

$$a^4+b^4+c^4 = 2\left(ab+bc+ac\right)^2 \qquad \left(\quad\right)^2$$

$$a^8+b^8+c^8+2\left(a^4b^4+b^4c^4+a^4c^4\right) = 4\left(ab+bc+ac\right)^4$$

Calculando el valor de $\left(ab+bc+ac\right)^4$:

$$\begin{aligned}\left(ab+bc+ac\right)^4 = \;& a^4b^4+b^4c^4+a^4c^4+12a^2b^2c^2\left(ab+bc+ac\right)+6a^2b^2c^2\left(a^2+b^2+c^2\right)\\ & +4abc\left(a^2b^3+a^3b^2+b^3c^2+b^2c^3+a^3c^2+a^2c^3\right)\end{aligned}$$

Ahora, es preciso recordar que $a^2+b^2+c^2$ es igual a $-2\left(ab+bc+ac\right)$, por lo que la expresión $6a^2b^2c^2\left(a^2+b^2+c^2\right)$ es equivalente igual a $-12a^2b^2c^2\left(ab+bc+ac\right)$, lo que se eliminaría con $12a^2b^2c^2\left(ab+bc+ac\right)$, por lo tanto, la expresión queda como:

$$\left(ab+bc+ac\right)^4 = a^4b^4+b^4c^4+a^4c^4+4abc\left(a^2b^3+a^3b^2+b^3c^2+b^2c^3+a^3c^2+a^2c^3\right)$$

$$\left(ab+bc+ac\right)^4 = a^4b^4+b^4c^4+a^4c^4+4abc\left\{a^2\underbrace{\left(b^3+c^3\right)}_{3abc-a^3}+b^2\underbrace{\left(a^3+c^3\right)}_{3abc-b^3}+c^2\underbrace{\left(a^3+b^3\right)}_{3abc-c^3}\right\}$$

$$\left(ab+bc+ac\right)^4 = a^4b^4+b^4c^4+a^4c^4+4abc\left\{a^2\left(3abc-a^3\right)+b^2\left(3abc-b^3\right)+c^2\left(3abc-c^3\right)\right\}$$

$$(ab+bc+ac)^4 = a^4b^4 + b^4c^4 + a^4c^4 + 4abc\left\{3a^3bc - a^5 + 3ab^3c - b^5 + 3abc^3 - c^5\right\}$$

$$(ab+bc+ac)^4 = a^4b^4 + b^4c^4 + a^4c^4 + 4abc\left\{3abc\underbrace{\left(a^2+b^2+c^2\right)}_{-2(ab+bc+ac)} - \underbrace{\left(a^5+b^5+c^5\right)}_{-5abc(ab+bc+ac)}\right\}$$

$$(ab+bc+ac)^4 = a^4b^4 + b^4c^4 + a^4c^4 + 4abc\left\{-6abc\left(ab+bc+ac\right) + 5abc\left(ab+bc+ac\right)\right\}$$

$$(ab+bc+ac)^4 = a^4b^4 + b^4c^4 + a^4c^4 + 4abc\left\{-abc\left(ab+bc+ac\right)\right\}$$

$$(ab+bc+ac)^4 = a^4b^4 + b^4c^4 + a^4c^4 - 4a^2b^2c^2\left(ab+bc+ac\right)$$

$$a^4b^4 + b^4c^4 + a^4c^4 = (ab+bc+ac)^4 + 4a^2b^2c^2\left(ab+bc+ac\right)$$

Volviendo a la expresión anterior:

$$a^8+b^8+c^8+2\left(a^4b^4+b^4c^4+a^4c^4\right) = 4\left(ab+bc+ac\right)^4$$

$$a^8+b^8+c^8+2\left\{(ab+bc+ac)^4 + 4a^2b^2c^2\left(ab+bc+ac\right)\right\} = 4\left(ab+bc+ac\right)^4$$

$$a^8+b^8+c^8+2\left(ab+bc+ac\right)^4 + 8a^2b^2c^2\left(ab+bc+ac\right) = 4\left(ab+bc+ac\right)^4$$

$$2\left(ab+bc+ac\right)^4 - 8\left(abc\right)^2\left(ab+bc+ac\right) = a^8+b^8+c^8$$

Para $n = 9$:

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(a^5+b^5+c^5\right) = -5abc\left(ab+bc+ac\right)\cdot 2\left(ab+bc+ac\right)^2$$

$$a^9+a^5b^4+a^5c^4+b^5a^4+b^9+b^5c^4+c^5a^4+c^5b^4+c^9 = -10abc\left(ab+bc+ac\right)^3$$

$$a^9+b^9+c^9+a^4b^4\underbrace{(a+b)}_{-c}+b^4c^4\underbrace{(b+c)}_{-a}+a^4c^4\underbrace{(a+c)}_{-b} = -10abc\left(ab+bc+ac\right)^3$$

$$a^9+b^9+c^9-a^4b^4c-ab^4c^4-a^4bc^4 = -10abc\left(ab+bc+ac\right)^3$$

$$a^9+b^9+c^9-abc\left(a^3b^3+a^3c^3+b^3c^3\right) = -10abc\left(ab+bc+ac\right)^3$$

$$a^9+b^9+c^9-abc\left\{(ab+bc+ac)^3+3\left(abc\right)^2\right\} = -10abc\left(ab+bc+ac\right)^3$$

$$a^9+b^9+c^9-abc\left(ab+bc+ac\right)^3-3\left(abc\right)^3 = -10abc\left(ab+bc+ac\right)^3$$

$$a^9+b^9+c^9 = -9abc\left(ab+bc+ac\right)^3+3\left(abc\right)^3$$

Para $n = 10$**:**

$$\left(a^3+b^3+c^3\right)\left(a^7+b^7+c^7\right) = (3abc)\cdot\left\{7abc\,(ab+bc+ac)^2\right\}$$

$$a^{10}+b^{10}+c^{10}+a^7b^3+a^7c^3+b^7a^3+b^7c^3+c^7a^3+c^7b^3 = 21\,(abc)^2\,(ab+bc+ac)^2$$

$$a^{10}+b^{10}+c^{10}+a^3c^3\left(a^4+c^4\right)+a^3b^3\left(a^4+b^4\right)+b^3c^3\left(b^4+c^4\right) = 21\,(abc)^2\,(ab+bc+ac)^2$$

Recordar que $a+b+c=0$, entonces $a+b=-c$, y elevando a la cuarta:

$$a+b=-c \qquad (\quad)^4$$

$$a^4+b^4+4ab\left(a^2+b^2\right)+6a^2b^2 = c^4$$

$$a^4+b^4+4ab\left(c^2-2ab\right)+6a^2b^2 = c^4$$

$$a^4+b^4+4abc^2-8a^2b^2+6a^2b^2 = c^4$$

$$a^4+b^4+4abc^2-2a^2b^2 = c^4$$

$$a^4+b^4 = c^4+2a^2b^2-4abc^2$$

$$a^4+b^4 = c^4+2ab\left(ab-2c^2\right)$$

De forma análoga: $a^4+c^4 = b^4+2ac\,(ac-2b^2)$ y $b^4+c^4 = a^4+2bc\,(bc-2a^2)$. Reemplazando:

$$a^3c^3\left(a^4+c^4\right) = a^3c^3\left\{b^4+2ac\left(ac-2b^2\right)\right\} = a^3b^4c^3+2a^5c^5-4a^4b^2c^4$$

$$a^3b^3\left(a^4+b^4\right) = a^3b^3\left\{c^4+2ab\left(ab-2c^2\right)\right\} = a^3b^3c^4+2a^5b^5-4a^4b^4c^2$$

$$b^3c^3\left(b^4+c^4\right) = b^3c^3\left\{a^4+2bc\left(bc-2a^2\right)\right\} = a^4b^3c^3+2b^5c^5-4a^2b^4c^4$$

$$= 2\left(a^5c^5+a^5b^5+b^5c^5\right)+a^3b^3c^3\underbrace{(a+b+c)}_{0}-4a^2b^2c^2\underbrace{\left(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2\right)}_{(ab+bc+ac)^2}$$

$$= 2\left(a^5c^5+a^5b^5+b^5c^5\right)-4\,(abc)^2\,(ab+bc+ac)^2$$

Volviendo a la expresión anterior y reemplazando la igualdad:

$$a^{10}+b^{10}+c^{10}+2\left(a^5c^5+a^5b^5+b^5c^5\right)-4\,(abc)^2\,(ab+bc+ac)^2 = 21\,(abc)^2\,(ab+bc+ac)^2$$

$$a^{10}+b^{10}+c^{10}+2\left(a^5c^5+a^5b^5+b^5c^5\right) = 25\,(abc)^2\,(ab+bc+ac)^2$$

Calculando el valor de $(ab+bc+ac)^5$:

$$(ab+bc+ac)^2\,(ab+bc+ac)^3 = \left(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2\right)\left(a^3b^3+b^3c^3+a^3c^3-3\,(abc)^2\right)$$

Se procede a multiplicar $\left(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2\right)\left(a^3b^3+b^3c^3+a^3c^3\right)$, obteniendo:

$$=a^5b^5+a^2b^5c^3+a^5b^2c^3+b^5c^2a^3+b^5c^5+b^2c^5a^3+a^5c^2b^3+a^2c^5b^3+a^5c^5$$

$$=a^5b^5+a^5c^5+b^5c^5+(abc)^2\left\{b^3c+a^3c+b^3a+c^3a+a^3b+c^3b\right\}$$

$$=a^5b^5+a^5c^5+b^5c^5+(abc)^2\left\{b^3\underbrace{(a+c)}_{-b}+a^3\underbrace{(b+c)}_{-a}+c^3\underbrace{(a+b)}_{-c}\right\}$$

$$=a^5b^5+a^5c^5+b^5c^5-(abc)^2\underbrace{\left\{a^4+b^4+c^4\right\}}_{2(ab+bc+ac)^2}$$

$$=a^5b^5+a^5c^5+b^5c^5-2\,(abc)^2\,2\,(ab+bc+ac)^2$$

Continuando con el cálculo de $(ab+bc+ac)^5$:

$$(ab+bc+ac)^5=a^5b^5+a^5c^5+b^5c^5-2\,(abc)^2\,2\,(ab+bc+ac)^2-3\,(abc)^2\,(ab+bc+ac)^2$$

$$(ab+bc+ac)^5=a^5b^5+a^5c^5+b^5c^5-5\,(abc)^2\,(ab+bc+ac)^2$$

$$a^5b^5+a^5c^5+b^5c^5=(ab+bc+ac)^5+5\,(abc)^2\,(ab+bc+ac)^2$$

Reemplazando la igualdad en el cálculo de $a^{10}+b^{10}+c^{10}$:

$$a^{10}+b^{10}+c^{10}+2\left(a^5c^5+a^5b^5+b^5c^5\right)=25\,(abc)^2\,(ab+bc+ac)^2$$

$$a^{10}+b^{10}+c^{10}+2\left\{(ab+bc+ac)^5+5\,(abc)^2\,(ab+bc+ac)^2\right\}=25\,(abc)^2\,(ab+bc+ac)^2$$

$$a^{10}+b^{10}+c^{10}+2\,(ab+bc+ac)^5+10\,(abc)^2\,(ab+bc+ac)^2=25\,(abc)^2\,(ab+bc+ac)^2$$

$$15\,(abc)^2\,(ab+bc+ac)^2-2\,(ab+bc+ac)^5=a^{10}+b^{10}+c^{10}$$