Álgebra

Ecuaciones Polinómicas

Aaric Llerena Medina

Índice

Introducción

Las ecuaciones algebraicas son esenciales en el álgebra, permitiendo encontrar las raíces de polinomios. Desde ecuaciones lineales hasta polinómicas de alto grado, su resolución tiene aplicaciones en física, ingeniería, economía y más. Estas ecuaciones modelan y resuelven problemas reales, analizando y prediciendo comportamientos de sistemas diversos.

Se explorarán ecuaciones desde las básicas hasta las avanzadas, incluyendo cuadráticas, cúbicas y cuárticas. Se usarán métodos clásicos como la fórmula cuadrática, el método de Cardano para cúbicas, y el de Ferrari para cuárticas, además de técnicas modernas y aproximaciones numéricas. Se discutirá la importancia de teoremas fundamentales como el de Cardano-Viete, que relaciona coeficientes con sumas y productos de raíces, aplicándose en la resolución de ecuaciones algebraicas.

Índice

2 Ecuación Cuadrática

Las ecuaciones de grado 2, tienen una fórmula general para encontrar el valor que satisface la ecuación:

Se tiene la siguiente ecuación:

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

Se divide todo por el término A:

$$x^2 + \left(\frac{B}{A}\right)x + \frac{C}{A} = 0$$

Completamos términos para tener un binomio al cuadrado:

$$x^2 + 2\left(\frac{B}{2A}\right)x + \left(\frac{B}{2A}\right)^2 - \left(\frac{B}{2A}\right)^2 + \frac{C}{A} = 0$$

Acomodando convenientemente:

$$\left(x + \frac{B}{2A}\right)^2 = \frac{B^2 - 4AC}{4A^2}$$

Empezando a despejar, quedaría:

$$x + \frac{B}{2A} = \pm\frac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

Finalmente, la ecuación quedaría:

$$x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

En la ecuación $Ax^2 + Bx + C = 0$, $A \neq 0$ de coeficientes reales y de raíces x_1, x_2 y con descriminante $\triangle = B^2 - 4AC$ se cumple que:

- Si $\triangle > 0 \Leftrightarrow x_1, x_2 \in \mathbb{R} \wedge x_1 \neq x_2 \twoheadrightarrow$ las raíces son reales y diferentes.
- Si $\triangle = 0 \Leftrightarrow x_1, x_2 \in \mathbb{R} \wedge x_1 = x_2 \twoheadrightarrow$ las raíces son reales e iguales.
- Si $\triangle < 0 \Leftrightarrow x_1, x_2 \notin \mathbb{R} \wedge x_1 = \bar{x_2} \twoheadrightarrow$ las raíces no son reales y conjugadas.

Se tiene la siguiente ecuación:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

Luego hacemos un cambio de variable:

$$x = t - \frac{a}{3}$$

Quedaría de la siguiente forma:

$$\left(t - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(t - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(t - \frac{a}{3}\right) + c = 0$$

Operando algebraicamente:

$$t^3 + \left(\frac{3b - a^2}{3}\right)t + \left(\frac{2a^3 - 9ab + 27c}{27}\right) = 0$$

Haciendo cambios de variables:

$$p = \frac{3b - a^2}{3} \qquad \text{y} \qquad q = \frac{2a^3 - 9ab + 27c}{27}$$

La ecuación quedaría de la siguiente manera:

$$t^3 + pt + q = 0$$

Supongamos que la nueva ecuación cúbica tiene una solución de la forma $y + z$. Luego por definición de solución:

$$(y+z)^3 + pt + q \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad y^3 + z^3 + 3yzt + pt + q = 0$$

Agrupando a conveniencia:

$$\left(y^3 + z^3 + q\right) + (3yz + p)\, t = 0$$

Demostración

Se verifica que:

$$y^3 + z^3 + q = 0 \qquad \wedge \qquad 3yz + p = 0$$

Despejando, quedaría de la siguiente forma:

$$y^3 + z^3 = -q \qquad \wedge \qquad y^3 z^3 = -\frac{p^3}{27}$$

Conociendo la suma y la multiplicación de y^3, z^3 se puede formar una ecuación cuadrática de raíces y^3, z^3. Quedaría:

$$r^2 - \left(y^3 + z^3\right) r + y^3 z^3 = 0$$

Reemplazando por lo anterior:

$$r^2 + qr - \frac{p^3}{27} = 0$$

Teniendo la ecuación cuadrática:

$$r^2 + qr - \frac{p^3}{27} = 0$$

La solución de la misma sería:

$$r_{1,2} = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 - 4\left(-\frac{p^3}{27}\right)}}{2}$$

Como y^3, z^3 son las raíces de esta ecuación, entonces:

$$y^3 = -\left(\frac{q}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \quad \wedge \quad z^3 = -\left(\frac{q}{2}\right) - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

Hacemos que el siguiente cambio de variable:

$$\triangle = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

Como $t = y + z$, se tiene:

$$t = \sqrt[3]{-\left(\frac{q}{2}\right) + \sqrt{\triangle}} + \sqrt[3]{-\left(\frac{q}{2}\right) - \sqrt{\triangle}}$$

Recordando el primer cambio de variable, x quedaría:

$$x = z - \frac{a}{3} \qquad \Rightarrow \qquad z = x + \frac{a}{3}$$

Finalmente, el valor x sería:

$$x = \sqrt[3]{-\left(\frac{q}{2}\right) + \sqrt{\triangle}} + \sqrt[3]{-\left(\frac{q}{2}\right) - \sqrt{\triangle}} + \frac{a}{3}$$

Resumen General:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

Donde los valores de x serían:

$$x_1 = \sqrt[3]{-\left(\frac{q}{2}\right) + \sqrt{\triangle}} + \sqrt[3]{-\left(\frac{q}{2}\right) - \sqrt{\triangle}} - \frac{a}{3}$$

$$x_2 = \sqrt[3]{-\left(\frac{q}{2}\right) + \sqrt{\triangle}}w + \sqrt[3]{-\left(\frac{q}{2}\right) - \sqrt{\triangle}}w^2 - \frac{a}{3}$$

$$x_3 = \sqrt[3]{-\left(\frac{q}{2}\right) + \sqrt{\triangle}}w^2 + \sqrt[3]{-\left(\frac{q}{2}\right) - \sqrt{\triangle}}w - \frac{a}{3}$$

Donde:

$$p = \frac{3b - a^2}{3},\ q = \frac{2a^3 - 9ab + 27c}{27},\ \triangle = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 \wedge w = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$$

Sea un raíz de grado tres con raíces x_1, x_2 y x_3 y determinante

$$\triangle = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

Se cumple que:

- Si $\triangle < 0 \Rightarrow \{x_1, x_2, x_3\} \subset \mathbb{R}$ además todas distintas.
- Si $\triangle = 0 \Rightarrow \{x_1, x_2, x_3\} \subset \mathbb{R}$ además $x_1 = x_2$.
- Si $\triangle > 0 \Rightarrow x_1 \in \mathbb{R},\ x_2 = \bar{x_3}\ \wedge\ x_2, x_3 \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$.

Se tiene la siguiente ecuación:

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

Agregamos $(mx+n)^2$ a ambos lados, por lo que quedaría:

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d + (mx+n)^2 = 0 + (mx+n)^2$$

Desarrollando y agrupando de forma correcta:

$$x^4 + ax^3 + \left(m^2 + b\right)x^2 + (2mn + c)\,x + \left(n^2 + d\right) = (mx+n)^2$$

El primer lado de la ecuación igualamos a la expresión $\left(x^2 + px + k\right)^2$ y desarrollando la misma:

$$x^4 + 2px^3 + \left(2k + p^2\right)x^2 + 2kpx + k^2 = (mx+n)^2$$

Igualamos los términos que tienen el mismo grado, quedando de la siguiente manera:

$$a = 2p, \;\; m^2 + b = 2k + p^2, \;\; 2mn + c = 2kp, \;\; n^2 + d = k^2$$

Operando algebraicamente y a conveniencia:

$$m^2 = \frac{8k + a^2 - 4b}{4}, \quad n^2 = k^2 - d, \quad mn = \frac{ak - c}{2}$$

Elevando al cuadrado la tercera igualdad:

$$(mn)^2 = \left(\frac{ak - c}{2}\right)^2$$

$$m^2 n^2 = \frac{a^2 k^2 - 2ack + c^2}{4}$$

Demostración

Usando la primera y segunda igualdad:

$$\left(\frac{8k + a^2 - 4b}{4}\right)\left(k^2 - d\right) = \frac{a^2k^2 - 2ack + c^2}{4}$$

Operando:

$$8k^3 + \left(a^2 - 4b\right)k^2 - 8kd + \left(4bd - a^2d\right) = a^2k^2 - 2ack + c^2$$

Finalmente quedaría de la siguiente forma:

$$8k^3 + (-4b)\,k^2 + (2ac - 8d)\,k + \left(4bd - a^2d - c^2\right) = 0$$

Ahora se resuelve la ecuación cúbica y se debe hallar un valor real de k y después hallar las demás constantes m, n y p.

Teniendo las variables, se procede a resolver los valores de x.

$$\left(x^2 + px + k\right)^2 = (mx + n)^2$$

Se saca la raíz cuadrada a ambos lados, quedando dos lados:

Lado Positivo

$$x^2 + px + k = +\left(mx + n\right)$$

$$x^2 + \left(p - m\right)x + \left(k - n\right) = 0$$

Lado Negativo

$$x^2 + px + k = -\left(mx + n\right)$$

$$x^2 + \left(p + m\right)x + \left(k + n\right) = 0$$

Después de desarrollar ambos lados, el conjunto solución sería:

$$\frac{m - p \pm \sqrt{(m-p)^2 - 4\left(k - n\right)}}{2}, \frac{-m - p \pm \sqrt{(m+p)^2 - 4\left(k + n\right)}}{2}$$

Ecuación Cuadrática

En la ecuación $Ax^2 + Bx + C = 0$, donde $A \neq 0$ y que tiene raíces x_1 y x_2, se cumple:

Suma de raíces:

$$x_1 + x_2 = -\frac{B}{A}$$

Producto de raíces:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{C}{A}$$

Ecuación Cúbica

En la ecuación $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$, de raíces x_1, x_2 y x_3, se cumple:

Suma de raíces:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{B}{A}$$

Producto de raíces:

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{D}{A}$$

Suma de productos binarios de las raíces:

$$x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = \frac{C}{A}$$

Teorema de Cardano - Viete

4 Ecuación Cuártica

Sea el polinomio $a_0 \cdot x^n + a_1 \cdot x^{n-1} + a_2 \cdot x^{n-2} + \ldots + a_n = 0, a_0 \neq 0$ de raíces $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n$ se cumple:

Suma de raíces:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \ldots + x_n = -\frac{a_1}{a_0}$$

Suma de productos binarios:

$$x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + \ldots + x_{n-1} \cdot x_n = \frac{a_2}{a_0}$$

Suma de productos tomados de k en k:

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \ldots x_k + x_2 \cdot x_3 \ldots x_k \cdot x_{k+1} + \ldots = (-1)^k \frac{a_k}{a_0}$$

Producto de raíces:

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \ldots x_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}$$

Son aquellas ecuaciones polinomiales de la siguiente forma:

$$x^n + A = 0, n \in \mathbb{N} \wedge A \in \mathbb{C}\{0\}$$

Para la solución de estas ecuaciones es necesario el teorema de De Moivre.

Para entender el procedimiento, resolver el siguiente ejemplo: $x^n + A = 0$.

Solución:

Sea $-A$ escrito en forma polar como:

$$-A = |-A|(\cos\alpha + i\sin\alpha) = |-A|\text{cis}\alpha$$

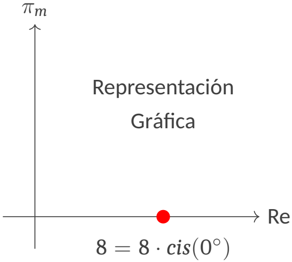
Acomodando a conveniencia, finalmente quedaría:

$$x = \sqrt[n]{|-A|}\text{cis}\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right), k = 0, 1, \cdots, (n-1)$$

Ejemplo 1

Resolver la ecuación $x^3 - 8 = 0$

Solución:



$$x^3 = 8$$

$$\Rightarrow x^3 = 8 \operatorname{cis} 0^\circ \Rightarrow x = \sqrt[3]{8} \operatorname{cis}\left(\frac{0^\circ + 2k\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow x = 2 \operatorname{cis}\left(\frac{2k\pi}{3}\right), k = 0, 1, 2$$

$$Si\ k = 0 \Rightarrow x_1 = 2 \operatorname{cis} 0^\circ = 2\left(\cos 0^\circ + i \operatorname{sen} 0^\circ\right) = 2$$

$$\text{Si } k = 1 \Rightarrow x_2 = 2\text{cis}\frac{2\pi}{3} = 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = -1 + \sqrt{3}i$$

$$\text{Si } k = 2 \Rightarrow x_3 = 2\text{cis}\frac{4\pi}{3} = 2\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) = -1 - \sqrt{3}i$$

Ejemplo 2

Resolver la ecuación $x^4 + \sqrt{3} - 3i = 0$

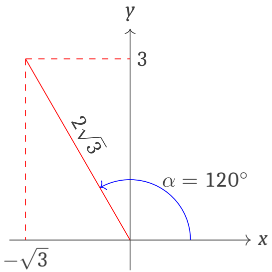
Solución:

En forma polar:

$$|-\sqrt{3} + 3i| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 3^2} = 2\sqrt{3}$$

Posterior tenemos el siguiente ángulo:

$$\tan\alpha = \frac{3}{-\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = 120^\circ$$



$$\Rightarrow -\sqrt{3} + 3i = 2\sqrt{3}\mathrm{cis}120^\circ = 2\sqrt{3}\mathrm{cis}\frac{2\pi}{3}.$$

$$\Rightarrow x^4 = 2\sqrt{3}\mathrm{cis}\frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = \sqrt[4]{2\sqrt{3}}\mathrm{cis}\left[\left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right)/4\right], k = 0, 1, 2, 3.$$

Álgebra

Gracias por su atención!

¿Alguna pregunta?