Estadística Inferencial

Capítulo X - Ejercicio 35

Aaric Llerena Medina

La distribuidora "PERUFAM" va a comercializar un nuevo producto sólo si se comprueba que al menos el 20 % de todos los consumidores lo prefieren. Se escogió una muestra al azar de 100 consumidores y se halló el número X de consumidores que prefieren el producto.

a) Si se utiliza como región de rechazo: $\{X < 15\}$, calcule el nivel de significación de la prueba.

b) Halle el valor crítico K si se desea rechazar la hipótesis nula cuando $X < K$ al nivel de significación no mayor de 0.05

c) ¿Con qué probabilidad la prueba detecta que la hipótesis nula es falsa cuando el verdadero valor del porcentaje que prefieren el producto es 0.10?

Solución:

a) Suponiendo que la hipótesis nula es que el porcentaje de consumidores que prefieren el producto es al menos el 20 %, es decir:

$$H_0 : p \geq 0.20 \quad \text{contra} \quad H_1 : p < 0.20$$

Bajo la hipótesis nula, X sigue una distribución binomial con parámetros $n = 100$ y $p = 0.20$. Usando una aproximación normal, se obtiene la media y desviación estándar:

- **Media:** $\mu = np = 100 \times 0.20 = 20$
- **Desviación estándar:** $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{100 \times 0.20 \times 0.80} = 4$

La región de rechazo en términos de Z es:

$$Z = \frac{15 - \mu}{\sigma} < \frac{15 - 20}{4}$$
$$Z = -1.25$$

Buscando en la tabla de distribución normal estándar, $P(Z < -1.25) \approx 0.1056$, que es el nivel de significación de la prueba.

b) Para un nivel de significación no mayor de 0.05, el valor crítico K debe ser tal que:

$$P(X < K) \leq 0.05$$

Haciendo uso de la aproximación normal:

$$Z = \frac{K - 20}{4} \leq -1.645$$

Calculando el valor de K:

$$K \leq 20 - 1.645 \times 4 = 13.42$$

Por lo tanto, el valor crítico K es 13. Dado que X debe ser un número entero, se redondea a que el valor de $K = 13$.

c) Si el verdadero valor del porcentaje que prefiere el producto es 0.10, la distribución de X es binomial con $p = 0.10$. La probabilidad de detectar que la hipótesis nula es falsa (es decir, $X < 13.42$) es:

$$P\left(X > 13.42\right) = P\left(\frac{13.42 - \mu}{\sigma}\right)$$

Usando una aproximación normal:

$$\mu = 100 \times 0.10 = 10 \quad \text{y} \quad \sigma = \sqrt{100 \times 0.10 \times 0.90} = 3$$

La probabilidad de que $X < 13.42$ es:

$$P(X > 13.42) = P\left(Z > \frac{13.42 - 10}{3}\right) = P(Z > 1.14) = 1 - P(Z > 1.14) \approx 1 - 0.8729 \approx 0.1271$$

Por lo tanto, la probabilidad de detectar que la hipótesis nula es falsa es aproximadamente 0.1271.