Estadística Inferencial

Capítulo VIII - Ejercicio 55

Aaric Llerena Medina

Un fabricante afirma que el 30 % de mujeres y el 20 % de hombres prefieren su nuevo producto de aseo personal. Si se hace una encuesta a 200 hombres y 200 mujeres elegidos aleatoriamente, ¿con qué probabilidad la proporción muestral de mujeres menos la proporción muestral de hombres está en el intervalo $[-19\,\%, 19\,\%]$?

Solución:

Las proporciones muestrales $\hat{p}_M$ y $\hat{p}_H$ siguen distribuciones aproximadamente normales con:

- Para mujeres:
  - **Media:** $\mu_{\hat{p}_M} = p_M = 0.30$.
  - **Varianza:** $\sigma^2_{\hat{p}_M} = \dfrac{p_M(1-p_M)}{n_M} = \dfrac{0.30 \times 0.70}{200} = \dfrac{0.21}{200} = 0.00105$.
  - **Desviación estándar:** $\sigma_{\hat{p}_M} = \sqrt{0.00105} \approx 0.0324$.
- Para hombres:
  - **Media:** $\mu_{\hat{p}_H} = p_H = 0.20$.
  - **Varianza:** $\sigma^2_{\hat{p}_H} = \dfrac{p_H(1-p_H)}{n_H} = \dfrac{0.20 \times 0.80}{200} = \dfrac{0.16}{200} = 0.0008$.
  - **Desviación estándar:** $\sigma_{\hat{p}_H} = \sqrt{0.0008} \approx 0.0283$.

La distribución de la diferencia de proporciones muestrales de la diferencia $\hat{p}_M - \hat{p}_H$ sigue una distribución aproximadamente normal con:

- **Media:** $\mu_{\hat{p}_M - \hat{p}_H} = p_M - p_H = 0.30 - 0.20 = 0.10$.
- **Varianza:** $\sigma^2_{\hat{p}_M - \hat{p}_H} = \sigma^2_{\hat{p}_M} + \sigma^2_{\hat{p}_H} = 0.00105 + 0.0008 = 0.00185$.
- **Desviación estándar:** $\sigma_{\hat{p}_M - \hat{p}_H} = \sqrt{0.00185} \approx 0.0430$.

Ahora, para determinar la probabilidad de que $\hat{p}_M - \hat{p}_H$ esté en el intervalo $[-0.19, 0.19]$. Se debe calcular:

$$P(-0.19 \leq \hat{p}_M - \hat{p}_H \leq 0.19)$$

Estandarizando:

- Para $\hat{p}_M - \hat{p}_H = -0.19$:

$$Z = \frac{-0.19 - 0.10}{0.0430} = \frac{-0.29}{0.0430} \approx -6.74$$

- Para $\hat{p}_M - \hat{p}_H = 0.19$:

$$Z = \frac{0.19 - 0.10}{0.0430} = \frac{0.09}{0.0430} \approx 2.09$$

Por lo tanto:

$$P(-0.19 \leq \hat{p}_M - \hat{p}_H \leq 0.19) = P(-6.74 \leq Z \leq 2.09)$$

Usando la tabla de la distribución normal estándar:

- $P(Z \leq 2.09) \approx 0.9817$.
- $P(Z \leq -6.74) \approx 0$ (prácticamente 0).

Restando ambas probabilidades:

$$P(-6.74 \leq Z \leq 2.09) = P(Z \leq 2.09) - P(Z \leq -6.74) \approx 0.9817 - 0 = 0.9817$$

Por lo tanto, la probabilidad de que la proporción muestral de mujeres menos la proporción muestral de hombres esté en el intervalo $[-19\,\%, 19\,\%]$ es aproximadamente 0.9817.