Estadística Inferencial

Capítulo VIII - Ejercicio 42

Aaric Llerena Medina

Calcular la probabilidad de que una muestra aleatoria de tamaño 13 escogida de una población normal con varianza $\sigma^2 = 4$ tenga una varianza muestral $\hat{S}^2$.

a) Menor que 7.01.

b) Entre 1.19 y 2.1.

Solución:

a) Se conoce que la estadística

$$\frac{(n-1)\hat{S}^2}{\sigma^2} = \frac{(13-1)\,\hat{S}^2}{4} = 3\hat{S}^2$$

se distribuye como una distribución chi-cuadrada χ^2 con $n-1=12$ grados de libertad, es decir, $3\hat{S}^2 \sim \chi^2_{12}$.

Se tiene por datos que:

$$\hat{S}^2 < 7.01 \Rightarrow 3\hat{S}^2 < 3 \times 7.01 = 21.03$$

Por lo tanto,

$$P\left(\hat{S}^2 < 7.01\right) = P\left(3\hat{S}^2 < 21.03\right) = P\left(\chi^2_{12} < 21.03\right) \approx 0.9501$$

La probabilidad de que $\hat{S}^2$ sea menor que 7.01 es aproximadamente 0.95.

b) Se transforman los límites utilizando la relación $3\hat{S}^2 \sim \chi^2_{12}$:

- Para el límite inferior: $\hat{S}^2 = 1.19 \Rightarrow 3\hat{S}^2 = 3 \times 1.19 = 3.57$.
- Para el límite superior: $\hat{S}^2 = 2.1 \Rightarrow 3\hat{S}^2 = 3 \times 2.1 = 6.3$.

Así,

$$\begin{aligned}
P\left(1.19 < \hat{S}^2 < 2.1\right) &= P\left(3.57 < \chi^2_{12} < 6.3\right) \\
&= P\left(\chi^2_{12} < 6.3\right) - P\left(\chi^2_{12} < 3.57\right) \\
&\approx 0.0998 - 0.0100 \approx 0.0898
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la probabilidad de que $\hat{S}^2$ esté entre 1.19 y 2.1 es aproximadamente 0.09.