Estadística Inferencial

Capítulo VIII - Ejercicio 13

Aaric Llerena Medina

Un proceso automático llena bolsas de café cuyo peso neto tiene una media de 250 gramos y una desviación estándar de 3 gramos. Para controlar el proceso, cada hora se pesan 36 bolsas escogidas al azar; si el peso neto medio está entre 249 y 251 gramos se continúa con el proceso aceptando que el peso neto medio es 250 gramos y en caso contrario, se detiene el proceso para reajustar la máquina.

a) ¿Cuál es la probabilidad de detener el proceso cuando el peso neto medio realmente es 250?

b) ¿Cuál es la probabilidad de aceptar que el peso neto promedio es 250 cuando realmente es de 248 gramos?

Solución:

La media muestral $\bar{X}$de una muestra de tamaño $n = 36$ está distribuida normalmente con:

- **Media:** $\mu_{\bar{X}} = \mu = 250$
- **Desviación estándar:** $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{3}{36} = \frac{3}{6} = 0.5$

a) Para calcular la probabilidad de que la media muestral $\bar{X}$ esté fuera del intervalo $[249, 251]$ cuando la media real es 250 gramos. Es decir:

$$P\left(\bar{X} < 249 \text{ o } \bar{X} > 251\right) = 1 - P\left(249 \leq \bar{X} \leq 251\right)$$

Como la distribución de $\bar{X}$ es aproximadamente normal con media 250 y desviación estándar 0.5, se debe calcular los valores estandarizados:

- Para $\bar{X} = 249$:

$$Z = \frac{249 - 250}{0.5} = \frac{-1}{0.5} = -2$$

- Para $\bar{X} = 251$:

$$Z = \frac{251 - 250}{0.5} = \frac{1}{0.5} = 2$$

Ahora, se calcula la probabilidad:

$$1 - P\left(249 \leq \bar{X} \leq 251\right) = 1 - P\left(-2 \leq Z \leq 2\right)$$

Usando la tabla de distribución normal:

- $P(Z \leq -2) \approx 0.0228$
- $P(Z \leq 2) \approx 0.9772$

**Nota: Se está trabajando con 4 decimales.*

Por lo tanto, la probabilidad es:

$$\begin{aligned} P\left(\bar{X} < 249 \text{ o } \bar{X} > 251\right) &= 1 - P(-2 \leq Z \leq 2) \\ &= 1 - [P(Z \leq 2) - P(Z \leq -2)] \\ &= 1 - [0.9772 - 0.0228] \\ P\left(\bar{X} < 249 \text{ o } \bar{X} > 251\right) &= 0.0456 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la probabilidad de detener el proceso es 0.0456.

b) Ahora, la verdadera media es $\mu = 248$, por lo que se debe encontrar que este promedio $\bar{X}$ esté dentro del intervalo $[249, 251]$, por lo que haciendo los cálculos similares al ítem anterior:

- Para $\bar{X} = 249$:
$$Z = \frac{249 - 258}{0.5} = \frac{1}{0.5} = 1$$
- Para $\bar{X} = 251$:
$$Z = \frac{251 - 248}{0.5} = \frac{3}{0.5} = 6$$

Por lo tanto, la probabilidad requerida se traduce en:

$$P\left(249 \leq \bar{X} \leq 251\right) = P(2 \leq Z \leq 6)$$

Cabe precisar que $P(Z \leq 6)$ es prácticamente 1, por consecuencia:

$$\begin{aligned} P\left(249 \leq \bar{X} \leq 251\right) &= P(2 \leq Z \leq 6) \\ &= P(Z \leq 6) - P(Z \leq 2) \\ &= 1 - 0.9772 \\ P\left(249 \leq \bar{X} \leq 251\right) &= 0.0228 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la probabilidad de aceptar que el peso neto promedio es 250 cuando realmente es 248 gramos es 0.0228.