Estadística Inferencial

Capítulo X - Ejercicio 15

Aaric Llerena Medina

Un proceso de llenado automático de durazno en rodajas está preocupando al gerente de producción por que las latas se están llenando en exceso. Por registros anteriores se sabe el peso neto (en gramos) de las latas tiene distribución normal con media 500 y que el 95 % de todos esos pesos están entre 480.4 y 519.6. El departamento de control de calidad tomó una muestra al azar de 9 latas de la producción y obtuvo los siguientes pesos:

$$490,\ 495,\ 501,\ 492,\ 490,\ 500,\ 493,\ 502,\ 501$$

a) En el nivel de significación $\alpha = 0.05$, ¿es posible concluir que el peso medio es diferente a 500 gramos?

b) Determine la probabilidad P de la prueba.

Solución:

Se aprecia que la población tiene distribución normal y que la desviación estándar poblacional se puede calcular a partir del intervalo dado para el 95 % de los datos:

$$\sigma = \frac{\text{amplitud del intervalo}}{2 \cdot z_{0.975}} = \frac{519.6 - 480.4}{2 \cdot 1.96} = \frac{39.2}{3.92} = 10$$

Asimismo, la media muestral se determina a través de:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{9} X_i}{9} = \frac{490 + 495 + 501 + 492 + 490 + 500 + 493 + 502 + 501}{9} = \frac{4464}{9} = 496$$

El estadístico de prueba para una prueba Z es:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

donde:

- $\bar{X} = 496$: media muestral
- $\sigma = 10$: desviación estándar poblacional
- $\mu_0 = 500$: media bajo la hipótesis nula
- $n = 9$: tamaño de la muestra

Sustituyendo los valores:

$$Z = \frac{496 - 500}{\frac{10}{\sqrt{9}}} = \frac{-4}{\frac{10}{3}} \approx -1.2$$

a) Para una prueba bilateral con nivel de significación del 5 %, el valor crítico es:

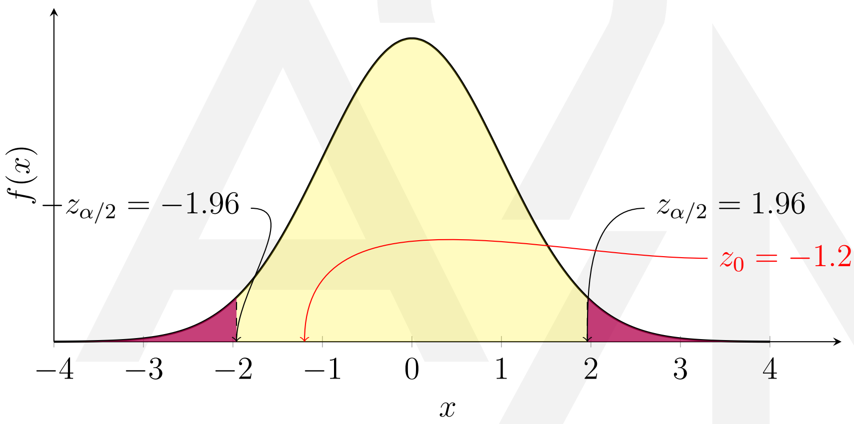
$$z_{0.025} = -1.96 \quad \text{y} \quad z_{0.975} = 1.96$$

La regla de decisión es:

- Rechazar H_0 si $Z < -1.96$ o $Z > 1.96$.
- No rechazar H_0 si $-1.96 \leq Z \leq 1.96$.

Dado que el estadístico calculado es $Z = -1.20$ y este valor se encuentra dentro del intervalo de aceptación ($-1.96 < -1.20 < 1.96$), no se rechaza H_0.

Asimismo, se puede visualizar en el siguiente gráfico que representa la curva de normalidad:



Por lo tanto, al nivel de significación del 5 %, no hay evidencia suficiente para concluir que el peso medio es diferente a 500 gramos

b) El valor p de la prueba se calcula como:

$$P = P(Z < -|Z|) + P(Z > |Z|) = 2P(Z > |Z|)$$

Para $Z = -1.20$:

$$P(Z > |Z|) = P(Z > 1.20)$$

Usando tablas de la distribución normal estándar:

$$P(Z > 1.20) = 1 - P(Z < 1.20) = 1 - 0.8849 = 0.1151$$

Por lo tanto, el valor p es $P = 2 \times 0.1151 = 0.2302$.