Estadística Inferencial

Capítulo X - Ejercicio 26

Aaric Llerena Medina

El gerente de ventas de una consorcio "BANK" argumenta que el número de llamadas mensuales de los representantes de ventas hace un promedio de 400 con una desviación estándar de 56. Diversos informes dicen que la estimación de la media es muy baja motivo por el cual se debe realizar una prueba de hipótesis. Si la media de las llamadas aumenta en 28, este cambio debe detectarse con probabilidad 0.9772. Si no hay cambio, este debe detectarse con probabilidad 0.9332. Determine el número de representantes que deben seleccionarse para la muestra y la región crítica.

Solución:

Se tienen los siguientes datos:

- Media poblacional bajo H_0: $\mu_0 = 400$
- Desviación estándar poblacional: $\sigma = 56$
- Cambio en la media: $\Delta = 28$ (por lo tanto, $\mu_1 = 400 + 28 = 428$)
- Potencia de la prueba $(1 - \beta)$: 0.9772 (probabilidad de detectar el cambio)
- Nivel de significación (α): 1 - 0.9332 = 0.0668 (probabilidad de rechazar H_0 si es verdadera).

Definiendo las hipótesis de la siguiente manera. Dado que se sospecha que la media es mayor que 400, planteamos:

$$H_0 : \mu = 400 \quad \text{contra} \quad H_1 : \mu > 400$$

Para determinar los valores críticos, se hace uso del nivel de significación $\alpha = 0.0668$, y por ello, el valor crítico Z_α se obtiene de la tabla de la distribución normal estándar:

$$Z_{1-0.0668} \approx 1.50$$

Asimismo, haciendo uso de la potencia de la prueba $(1 - \beta) = 1 - 0.9772 = 0.0228$, y buscando el valor crítico de la tabla de la distribución normal estándar:

$$Z_{1-0.0228} \approx 2.00$$

Ahora, para calcular el tamaño de la muestra en una prueba de hipótesis para la media, se emplea la siguiente fórmula:

$$n = \left[\frac{(Z_\alpha + Z_{1-\beta}) \cdot \sigma}{\mu_1 - \mu_0}\right]^2 = \left[\frac{(1.50 + 2.00) \cdot 56}{28}\right]^2 = \left[\frac{3.50 \cdot 56}{28}\right]^2 \approx 49$$

Por lo tanto, el tamaño de la muestra es $n = 49$.

Ahora, con el cálculo $n = 49$ se determina la región crítica para rechazar H_0 que está dado por:

$$\bar{X} > \mu_0 + Z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Sustituyendo los valores:

$$\bar{X} > 400 + 1.50 \cdot \frac{56}{\sqrt{49}} = 400 + 1.50 \cdot 8 = 400 + 12 = 412$$

Por lo tanto, la región crítica es para $\bar{X} > 412$. Asimismo, en términos del estadístico Z se rechaza H_0 si $Z > 1.50$. El estadístico está dado por:

$$Z = \frac{\bar{X} - 400}{8}$$

Para validar la respuesta, se verifica los niveles de error:

- **Error tipo I:** para $\mu = 400$, la probabilidad de rechazar es:

  $$P\left(\bar{X} > 412 \mid \mu = 400\right) = P\left(Z > \frac{412 - 400}{8}\right) = P(Z > 1.5) \approx 1 - 0.9332 = 0.0668$$

  lo cual coincide con nuestro nivel de error tipo I.

- **Error tipo II:** para $\mu = 428$, la probabilidad de rechazar es:

  $$P\left(\bar{X} > 412 \mid \mu = 428\right) = P\left(Z > \frac{412 - 428}{8}\right) = P\left(Z > -2\right) = \Phi(2) \approx 0.9772$$

  lo que garantiza la potencia requerida.