

Estadística Inferencial

Capítulo VIII - Ejercicio 09

Aaric Llerena Medina

Sea \bar{X}_{40} la media de la muestra aleatoria X_1, X_2, \dots, X_{40} de tamaño $n = 40$ escogida de una población X cuya distribución es geométrica con función de probabilidad:

$$f(x) = \frac{1}{5} \left(\frac{4}{5}\right)^{x-1}, x = 1, 2, \dots$$

Halle la probabilidad de que la media muestral difiera de la media poblacional en a lo más el 10 % del valor de la varianza de la población.

Solución:

La distribución geométrica con parámetro p (probabilidad de éxito) tiene las siguientes propiedades:

■ **Media:** $\mu = \frac{1}{p}$

■ **Varianza:** $\sigma^2 = \frac{1-p}{p^2}$

De acuerdo a la función dada: $f(x) = \frac{1}{5} \left(\frac{4}{5}\right)^{x-1}$, el parámetro $p = \frac{1}{5}$, por lo tanto:

■ **Media:**

$$\mu = \frac{1}{\frac{1}{5}} = 5$$

■ **Varianza:**

$$\sigma^2 = \frac{1-p}{p^2} = \frac{1-\frac{1}{5}}{\left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{1}{25}} = 20$$

Asimismo, la media y varianza de la muestra de tamaño 40 es:

■ **Media:** $\mu_{\bar{X}_{40}} = \mu = 5$

■ **Varianza:** $\sigma_{\bar{X}_{40}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{20}{40} = 0.5$

Como se quiere encontrar la probabilidad de que la media muestral difiera de la media poblacional en a lo más el 10 % del valor de la varianza de la población. Es decir:

$$P(|\bar{X}_{40} - \mu| \leq 0.1 \times \sigma^2) = P(|\bar{X}_{40} - 5| \leq 0.1 \times 20) = P(|\bar{X}_{40} - 5| \leq 2)$$

Esto se puede reescribir como:

$$P(3 \leq \bar{X}_{40} \leq 7)$$

Se debe calcular los valores estandarizados:

- Para $\bar{X}_{40} = 3$:

$$Z = \frac{3 - 5}{\sqrt{0.5}} = \frac{-2}{\sqrt{0.5}} = -2.83$$

- Para $\bar{X}_{40} = 7$:

$$Z = \frac{7 - 5}{\sqrt{0.5}} = \frac{2}{\sqrt{0.5}} = 2.83$$

Ahora, se calcula la probabilidad:

$$P(3 \leq \bar{X}_{40} \leq 7) = P(-2.83 \leq Z \leq 2.83)$$

Usando la tabla de distribución normal:

- $P(Z \leq -2.83) \approx 0.0023$

- $P(Z \leq 2.83) \approx 0.9977$

**Nota: Se está trabajando con 4 decimales.*

Por lo tanto, la probabilidad es:

$$\begin{aligned} P(-2.83 < Z < 2.83) &= P(Z < 2.83) - P(Z < -2.83) \\ &= 0.9977 - 0.0023 \\ &= 0.9954 \end{aligned}$$

Finalmente, la probabilidad de que la media muestral difiera de la media poblacional en a lo más el 10% del valor de la varianza de la población es aproximadamente 0.9954.