Estadística Inferencial

Capítulo X - Ejercicio 34

Aaric Llerena Medina

La empresa encuestadora C&A afirma que el 20 % de todos los electores de la población están a favor del candidato a Alcalde: Sr. Ruiz. Queremos comprobar esta afirmación utilizando la siguiente regla de decisión: Si la proporción a favor del Sr. Ruiz, en una muestra al azar de 400 electores está entre 16.08 % y 23.92 % se decide aceptar la hipótesis de la encuestadora. En caso contrario se decide rechazar tal hipótesis.

a) Determine el nivel de significación de la prueba.

b) Halle la probabilidad cometer error tipo II si realmente el porcentaje a favor es 0.25.

Solución:

Los datos son:

- Proporción poblacional bajo H_0: $p_0 = 0.20$.
- Tamaño muestral: $n = 400$.
- Límites de aceptación: $0.1608 \leq \hat{p} \leq 0.2392$.

Se plantea la hipótesis nula y alternativa:

$$H_0 : p = 0.20 \quad \text{vs} \quad H_1 : p \neq 0.20$$

a) El nivel de significación (α) es la probabilidad de rechazar H_0 cuando H_0 es verdadera. En este caso, H_0 es que la proporción poblacional es $p_0 = 0.20$. Además, la proporción muestral $\hat{p}$ sigue una distribución normal con media $p_0 = 0.20$ y desviación estándar muestral:

$$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} = \sqrt{\frac{0.20 \times 0.80}{400}} = \sqrt{\frac{0.16}{400}} = \sqrt{0.0004} = 0.02$$

Para el cálculo de α es la probabilidad de que $\hat{p}$ esté fuera del intervalo $[0.1608, 0.2392]$ cuando H_0 es verdadera, por ello, los límites de aceptación se estandariza en z:

$$z_{\text{inf}} = \frac{0.1608 - 0.20}{SE} = \frac{-0.0392}{0.02} = -1.96, \quad z_{\text{sup}} = \frac{0.2392 - 0.20}{SE} = \frac{0.0392}{0.02} = 1.96$$

Por lo tanto, la región de rechazo es:

$$z < -1.96 \quad \text{o} \quad z > 1.96,$$

y el nivel de significación es:

$$\alpha = P(Z < -1.96) + P(Z > 1.96) = 2P(Z > 1.96) = 2(0.025) = 0.05$$

Por lo tanto, el nivel de significancia de la prueba es $\alpha = 0.05$.

b) El error tipo II ocurre cuando no rechazamos H_0 a pesar de que H_0 es falsa. En este caso, se nos dice que la proporción verdadera es $p = 0.25$. Por ello, $\hat{p}$ tiene distribución normal con media $p = 0.25$ y desviación estándar:

$$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = \sqrt{\frac{0.25 \times 0.75}{400}} = \sqrt{\frac{0.1875}{400}} = \sqrt{0.00046875} \approx 0.02166$$

La probabilidad de aceptar H_0 cuando $p = 0.25$ es:

$$\begin{aligned}\beta &= P\left(0.1608 \leq \hat{p} \leq 0.2392 \mid p = 0.25\right)\\ &= P\left(\frac{0.1608 - 0.25}{0.02166} \leq Z \leq \frac{0.2392 - 0.25}{0.02166}\right)\\ &= P\left(-4.12 \leq Z \leq -0.50\right)\end{aligned}$$

Buscando en la tabla de normalidad estándar:

- $P\left(Z \leq -0.50\right) \approx 0.3085$
- $P\left(Z \leq -4.12\right) \approx 0.000$

Reemplazando:

$$\begin{aligned}\beta &= P\left(-4.12 \leq Z \leq -0.50\right)\\ &= P\left(Z \leq -0.50\right) - P\left(Z \leq -4.12\right)\\ &= 0.3085 - 0.000\\ \beta &= 0.3085\end{aligned}$$

Por lo tanto, la probabilidad de cometer el error tipo II si realmente el porcentaje a favor es 0.25 es $\beta = 0.3085$.