Estadística Inferencial

Capítulo VIII - Ejercicio 23

Aaric Llerena Medina

Definimos la variable aleatoria "error muestral", por: $|\bar{X} - \mu|$. De todas las muestras de tamaño 36 escogidas al azar de la población $N(\mu, 324)$.

a) ¿Qué porcentaje tendrán un error muestral mayor de 4.5?

b) ¿Para qué valor de k el 95 % tienen error muestral no mayor que k?

Solución:

a) La media muestral $\bar{X}$ sigue una distribución normal:

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) = N\left(\mu, \frac{324}{36}\right) = N(\mu, 9)$$

Por lo tanto, la desviación estándar de $\bar{X}$ es $\sigma_{\bar{X}} = 3$.

Se desea encontrar el porcentaje que tendrá un error muestral mayor de 4.5, esto se traduce como $|\bar{X} - \mu| > 4.5$, por lo que estandarizando:

$$P\left(|\bar{X} - \mu| > 4.5\right) = P\left(\left|\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma_{\bar{X}}}\right| > \frac{4.5}{3}\right) = P(|Z| > 1.5) = 1 - P(|Z| < 1.5)$$

Despejando el valor absoluto, se convierte en:

$$\begin{aligned} P(|Z| > 1.5) &= 1 - P(|Z| < 1.5) \\ &= 1 - P(-1.5 < Z < 1.5) \\ &= 1 - [P(Z < 1.5) - P(Z < -1.5)] \end{aligned}$$

Usando la tabla de distribución normal:

- $P(P < 1.5) \approx 0.9332$
- $P(P < -1.5) \approx 0.0668$

Por lo tanto la probabilidad es:

$$\begin{aligned} P(|Z| > 1.5) &= 1 - [(P < 1.5) - P(P < -1.5)] \\ &= 1 - [0.9332 - 0.0668] \\ &= 0.1336 \end{aligned}$$

El porcentaje de muestral con un error muestral mayor de 4.5 es aproximadamente 13.36 %.

b) Se quiere encontrar el valor de k tal que cumpla:

$$P\left(|\bar{X}-\mu| \leq k\right) = 0.95$$

Estandarizando:

$$P\left(\left|\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma_{\bar{X}}}\right| \leq \frac{k}{3}\right) = 0.95$$

Por lo que operando:

$$P\left(-\frac{k}{3} \leq Z \leq \frac{k}{3}\right) = 0.95$$

$$P\left(Z \leq \frac{k}{3}\right) - P\left(Z \leq -\frac{k}{3}\right) = 0.95$$

Dado que $P\left(Z \leq -a\right) = 1 - P\left(Z \leq a\right)$:

$$2P\left(Z \leq \frac{k}{3}\right) - 1 = 0.95$$

$$P\left(Z \leq \frac{k}{3}\right) = 0.975$$

Buscando el valor en la tabla:

$1.96 = 1.9 + 0.06$

+	⋯	0.05	0.06	0.07	⋯
⋮					
1.8					
1.9		0.9744	0.9750	0.9756	
⋮					

Por lo obtenido y reemplazando:

$$\frac{k}{3} = 1.96 \Rightarrow k = 1.96 \times 3 \Rightarrow 5.88$$

Por lo tanto, el valor de k es aproximadamente 5.88.