Estadística Inferencial

Capítulo VIII - Ejercicio 14

Aaric Llerena Medina

La utilidad por la venta de cierto artículo, en miles de soles, es una variable aleatoria con distribución normal. En el 5 % de las ventas la utilidad ha sido menos de 6.71 mientras que el 1 % de las ventas ha sido mayor que 14.66. Si se realizan 16 operaciones de ventas, ¿cuál es la probabilidad de que el promedio de la utilidad por cada operación esté entre $10,000 y $11,000?

Solución:

La utilidad por la venta de cierto artículo, en miles de soles, es una variable aleatoria X con distribución normal $N(\mu, \sigma^2)$, se conoce que:

- El 5 % de las ventas, la utilidad ha sido menor que 6.71 miles de soles: $P(X < 6.71) = 0.05$.
- El 1 % de las ventas, la utilidad ha sido mayor que S/ 14.66 miles: $P(X > 14.11) = 0.01$.

Con esta información proporcionada, se debe determinar los parámetros μ y σ de la distribución normal. Por lo que usando la tabla de la distribución normal estándar:

- Para $P(X < 6.71) = 0.05$, el valor Z correspondiente es $Z \approx -1.645$. Por lo tanto:

$$\frac{6.71 - \mu}{\sigma} = -1.645 \qquad \text{(Eq. 1)}$$

- Para $P(X > 14.66) = 0.01$, el valor Z correspondiente es $Z \approx 2.326$. Por lo tanto:

$$\frac{14.66 - \mu}{\sigma} = 2.326 \qquad \text{(Eq. 2)}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones:

- **De Eq. 1:**

$$6.71 - \mu = -1.645\sigma \Rightarrow \mu = 6.71 + 1.645\sigma$$

- **Sustituyendo μ en Eq. 2:**

$$\frac{14.66 - (6.71 + 1.645\sigma)}{\sigma} = 2.326 \Rightarrow \frac{7.95 - 1.645\sigma}{\sigma} = 2.326$$

- **Simplificando:**

$$7.95 - 1.645\sigma = 2.326\sigma \Rightarrow 7.95 = 3.971\sigma \Rightarrow \sigma = \frac{7.95}{3.971} \approx 2.00$$

- **Sustituyendo σ en Eq. 1:**

$$\mu = 6.71 + 1.645 \times 2.00 \approx 6.71 + 3.29 = 10.00$$

Por lo tanto, la distribución de X es $N(\mu = 10, \sigma^2 = 4)$.

Ahora, se debe determinar la probabilidad de que el promedio de la utilidad esté en el intervalo $[10,000; 11,000]$.

Se realizan $n = 16$ operaciones de ventas. Sea $\bar{X}$ el promedio de la utilidad por operación. La distribución de $\bar{X}$ es:

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) = N\left(10, \frac{4}{16}\right) = N(10, 0.25)$$

La desviación estándar de $\bar{X}$ es:

$$\sigma_{\bar{X}} = \sqrt{0.25} = 0.5$$

Se busca calcular:

$$P(10 \leq \bar{X} \leq 11)$$

Estandarizando:

- Para $\bar{X} = 10$:

$$Z = \frac{10 - 10}{0.5} = 0$$

- Para $\bar{X} = 11$:

$$Z = \frac{11 - 10}{0.5} = 2$$

Por lo tanto:

$$P(10 \leq \bar{X} \leq 11) = P(0 \leq Z \leq 2)$$

Usando la tabla de la distribución normal estándar:

- $P(Z \leq 2) \approx 0.9772$.
- $P(Z \leq 0) = 0.5$.

Restando ambas probabilidades:

$$P(0 \leq Z \leq 2) = P(Z \leq 2) - P(Z \leq 0) = 0.9772 - 0.5 = 0.4772$$

Por lo tanto, la probabilidad de que el promedio de la utilidad por operación esté entre \$10,000 y \$11,000 es aproximadamente 0.4772.