Estadística Inferencial

Capítulo X - Ejercicio 49

Aaric Llerena Medina

El gerente de compras de la empresa de transportes "CARGA" debe decidir por dos marcas A y B de bujías para su flota de camiones. El sabe que las vidas útiles en km., para cada marca de bujía tienen distribución normal. La vida útil de una muestra aleatoria de 10 bujías de la marca A, dio una media de 8000 y una varianza de 5600. La vida útil de una muestra aleatoria de 9 bujías de la marca B dio una media de 7900 y una varianza de 810. Al nivel de significación 0.05.

a) Realice una prueba bilateral de homogeneidad de las varianzas?

b) ¿Por cuál de las dos marcas de bujía debería decidir el gerente?

Solución:

Se desea comparar las vidas útiles de dos marcas de bujías para decidir cuál es más adecuada para la flota de camiones. Los datos muestrales de las marcas son:

- **A:** Tamaño muestral $n_A = 10$, media muestral $\bar{x}_A = 8,000$, varianza muestral $s_A^2 = 5,600$.
- **B:** Tamaño muestral $n_B = 9$, media muestral $\bar{x}_B = 7,900$, varianza muestral $s_B^2 = 810$.

a) Planteamos las hipótesis:

$$H_0 : \sigma_A^2 = \sigma_B^2 \quad \text{vs} \quad H_1 : \sigma_A^2 \neq \sigma_B^2$$

El estadístico de prueba es:

$$F = \frac{s_A^2}{s_B^2} = \frac{5,600}{810} \approx 6.914.$$

Los grados de libertad son $df_n = n_A - 1 = 9$ (numerador) y $df_d = n_B - 1 = 8$ (denominador). Para un nivel de significación $\alpha = 0.05$ en una prueba bilateral, los valores críticos son:

$$F_{0.05/2,9,8} = 4.3572 \quad \text{y} \quad F_{0.975,9,8} = 0.2438$$

La región de rechazo es $F < 0.2438$ o $F > 4.3572$. Comparando:

$$F_{\text{calc}} = 6.914 > F_{0.025} = 4.357,$$

se rechaza la hipótesis nula H_0. Existe evidencia suficiente para concluir que las varianzas poblacionales son diferentes.

b) Para saber cuál bujía elegir, se plantea las hipótesis:

$$H_0 : \mu_A = \mu_B \quad \text{vs} \quad H_1 : \mu_A > \mu_B.$$

Dado que las varianzas no son homogéneas, se utiliza la prueba t para dos muestras independientes con varianzas desiguales (prueba de Welch). Por ello, el estadístico de prueba:

$$t = \frac{(\bar{X}_A - \bar{X}_B)}{\sqrt{\dfrac{s_A^2}{n_A} + \dfrac{s_B^2}{n_B}}} = \frac{8,000 - 7,900}{\sqrt{\dfrac{5,600}{10} + \dfrac{810}{9}}} = \frac{100}{\sqrt{560 + 90}} = \frac{100}{\sqrt{650}} \approx 3.9223$$

Los grados de libertad aproximados se calcula como:

$$df = \frac{\left(\dfrac{s_A^2}{n_A} + \dfrac{s_B^2}{n_B}\right)^2}{\dfrac{\left(\dfrac{s_A^2}{n_A}\right)^2}{n_A - 1} + \dfrac{\left(\dfrac{s_B^2}{n_B}\right)^2}{n_B - 1}} = \frac{\left(\dfrac{5,600}{10} + \dfrac{810}{9}\right)^2}{\dfrac{\left(\dfrac{5,600}{10}\right)^2}{10 - 1} + \dfrac{\left(\dfrac{810}{9}\right)^2}{9 - 1}} = \frac{(650)^2}{35,856.94} = 11.783 \approx 12$$

Redondeando a 12 grados de libertad.

Para un nivel de significación del 5 % ($\alpha = 0.05$) y una prueba unilateral, el valor crítico de t con 12 grados de libertad es $t_{1-0.05,12} \approx 1.7823$. La región de rechazo es:

$$t > 1.782$$

El valor calculado del estadístico de prueba es $t \approx 3.92$ y como es mayor que 1.782 se rechaza la hipótesis nula.

Por lo tanto, hay evidencia suficiente para concluir que la vida útil de la marca A es significativamente mayor que la de la marca B al nivel de significación del 5 %. Es decir, el gerente debería decidirse por la marca A.