# Estadística Inferencial

## Capítulo VIII - Ejercicio 08

Aaric Llerena Medina

La vida útil (en miles de horas) de una batería es una variable aleatoria $X$ con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} 2-2x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Si $\bar{X}_{36}$ es la media de la muestra aleatoria $X_1, X_2, \ldots, X_{36}$ escogida de $X$, ¿con qué probabilidad $\bar{X}_{36}$ es mayor que 420 horas?

***Solución:***

Se debe calcular la media y la varianza:

- **Media:**

$$\begin{aligned} \mu &= x \cdot f(x) \\ &= \int_0^1 x(2-2x)dx = \int_0^1 \left(2x - 2x^2\right) dx \\ &= \left[x^2 - \frac{2}{3}x^3\right]_0^1 = \left(1 - \frac{2}{3}\right) - 0 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

- **Varianza:** Primero se debe calcular $E(X^2)$:

$$\begin{aligned} \mu &= x^2 \cdot f(x) \\ &= \int_0^1 x^2 \cdot (2-2x)dx = \int_0^1 \left(2x^2 - 2x^3\right) dx \\ &= \left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^4\right]_0^1 = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) - 0 = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

  Asimismo, la varianza está dado por:

$$\sigma^2 = E\left(X^2\right) - \mu^2 = \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}$$

La media muestral $\bar{X}_{36}$ es la media de 36 variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas y por el teorema del límite central, $\bar{X}_{36}$ se distribuye aproximadamente como una normal con media $\mu$ y varianza $\dfrac{\sigma^2}{n}$ y por dato $n = 36$. Por lo tanto, la varianza es:

$$\sigma^2_{\bar{X}_{36}} = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{\frac{1}{18}}{36} = \frac{1}{648}$$

Se solicita calcular 420 horas que a pasar a miles de hora es 0.42, es decir, se debe calcular $P\left(\bar{X}_{36} > 0.42\right)$ y usando la distribución normal estándar:

$$Z = \frac{\bar{X}_{36} - \mu}{\sqrt{\sigma^2_{\bar{X}_{36}}}} = \frac{0.42 - \frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{1}{648}}} = 2.21$$

Por lo que se debe determinar:

$$P\left(Z > 2.21\right) = 1 - P\left(Z < 2.21\right)$$

Usando la tabla de distribución normal:

- $P\left(Z < 2.21\right) \approx 0.9864$

**Nota: Se está trabajando con 4 decimales.*

Siguiendo con el cálculo:

$$\begin{aligned} P\left(Z > 2.21\right) &= 1 - P\left(Z < 2.21\right) \\ &= 1 - 0.9864 \\ &= 0.0136 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la probabilidad de que $\bar{X}_{36}$ sea mayor que 420 horas es aproximadamente 0.0136.