Estadística Inferencial

Capítulo X - Ejercicio 59

Aaric Llerena Medina

La compañía agroindustrial “MERMELADA” envasa uno de sus productos en frascos de 500 gramos. En la etiqueta de cada frasco se afirma que su contenido es en promedio 70 % de fresa y 30 % de piña. Se sabe que el contenido de cada una de las dos componentes tiene distribución normal. Un investigador examinó el contenido de 9 frascos escogidos al azar, resultando los siguientes porcentajes de fresa:

$$71, 67, 65, 63, 58, 72, 68, 64, 65$$

Para un nivel de significación de 0.01.

a) ¿Son iguales las varianzas de los contenidos de las dos componentes?

b) ¿Dan los datos prueba suficiente de que la diferencia entre el contenido promedio de fresa y de piña de los frascos sea mayor a 100 gramos?

Solución:

Planteamos las hipótesis:

$$H_0 : s^2_{\text{fresa}} = s^2_{\text{piña}} \quad \text{contra} \quad s^2_{\text{fresa}} \neq s^2_{\text{piña}}$$

Se debe determinar la varianza de cada producto:

- **Fresa:** el promedio es 70 %

Fresa	71	67	65	63	58	72	68	64	65	$\sum\left(X_i - \bar{X}_{\text{Fresa}}\right)^2$
$\left(X_i - \bar{X}_{\text{Fresa}}\right)^2$	1	9	25	49	144	4	4	36	25	297

- **Piña:** el promedio es 30 %

Piña	29	33	35	37	42	28	32	36	35	$\sum\left(X_i - \bar{X}_{\text{Piña}}\right)^2$
$\left(X_i - \bar{X}_{\text{Piña}}\right)^2$	1	9	25	49	144	4	4	36	25	297

Las varianzas para fresa y piña son:

$$s^2 = \frac{\left(X_i - \bar{X}\right)^2}{n-1} \Rightarrow s^2_{\text{Fresa}} = \frac{297}{9-1} = 37.125 \quad \text{y} \quad s^2_{\text{Peña}} = \frac{297}{9-1} = 37.125$$

a) Para determinar si las varianzas son iguales, se determina el estadístico F:

$$F = \frac{s^2_{\text{Fresa}}}{s^2_{\text{Peña}}} = \frac{37.125}{37.125} = 1$$

El valor crítico de F para $\alpha = 0.01$, con grados de libertad $df_1 = 8$ y $df_2 = 8$ es aproximadamente 6.0289. Como $F_{\text{calc}} = 1 < 6.0289$, no se rechaza la hipótesis nula de igualdad de varianzas. Por lo tanto, las varianzas de los contenidos de fresa y piña pueden considerarse estadísticamente iguales al nivel de significación del 1 %.

b) Se establece las hipótesis:

$$H_0 : \mu_{\text{diferencia}} \leq 100 \quad \text{contra} \quad H_1 : \mu_{\text{diferencia}} > 100$$

Dado que no se rechaza la hipótesis de igualdad de varianzas, se asume varianzas iguales. La varianza combinada s_p^2 es:

$$s_p^2 = \frac{(n_1-1)\,s_1^2 + (n_2-1)\,s_2^2}{n_1+n_2-2} = \frac{(9-1)\times 37.125\times 5^2 + (9-1)\times 37.125\times 5^2}{9+9-2} = 928.125$$

** Nota: Se multiplica por 5^2 para convertir a gramos, 5 sale de dividir $500/100 = 5$ y como es varianza, se eleva al cuadrado.*

El estadístico t se calcula como:

$$t = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - \Delta}{\sqrt{s_p^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} = \frac{(65.89 - 34.11)\times \frac{500}{100} - 100}{\sqrt{928.125\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\right)}} = \frac{58.90}{14.3614} \approx 4.1028$$

El valor crítico de t para $\alpha = 0.01$ con 8 grados de libertad es aproximadamente 2.8965.

La regla de decisión es:

- Si $t_{\text{calc}} > t_{\alpha,n-1}$, se rechaza H_0.
- Si $t_{\text{calc}} \leq t_{\alpha,n-1}$, no se rechaza H_0.

En este caso, $t_{\text{calc}} = 4.1028 > 2.8965$, por lo que se rechaza la hipótesis nula.

Por lo tanto, hay suficiente evidencia para concluir que la diferencia entre el contenido promedio de fresa y piña es mayor a 100 gramos al nivel de significación de 0.01.