

Estadística Inferencial

Capítulo X - Ejercicio 08

Aaric Llerena Medina

En una cuadra viven 100 familias de los cuales r tienen al menos una tarjeta de crédito y el resto no. Para docimar la hipótesis nula $H_0 : r = 30$ contra $H_1 : r > 30$ se seleccionan al azar a 20 familias. Si en la muestra se encuentran por lo menos 10 familias con por lo menos una tarjeta de crédito se decidirá rechazar H_0 . Calcule la probabilidad de cometer error tipo II cuando $r = 40$.

Solución 1:

Para calcular la probabilidad de cometer un error tipo II, se asume que la hipótesis alternativa es la verdadera, es decir, en este caso que realmente $r = 40$. Esto implica que en la población 40 de 100 familias tienen al menos una tarjeta de crédito y según los datos proporcionados:

- $N = 100$, el tamaño de la población,
- $K = 40$, el número de familias que tienen al menos una tarjeta de crédito,
- $n = 20$, el tamaño de la muestra seleccionada.

La variable aleatoria X , que denota el número de familias en la muestra que tienen al menos una tarjeta de crédito, sigue una distribución hipergeométrica:

$$X \sim \text{Hypergeom}(N = 100, K = 40, n = 20)$$

Por ello, la función de probabilidad es

$$P(X = x) = \frac{\binom{40}{x} \binom{60}{20-x}}{\binom{100}{20}}, \quad x = 0, 1, \dots, 20$$

La decisión del contraste es rechazar H_0 si se observa que al menos 10 familias tienen tarjeta de crédito; es decir, se rechaza H_0 si $X \geq 10$. Por lo tanto, se NO rechaza H_0 (y se comete un error tipo II) cuando se observa $X \leq 9$.

Así, la probabilidad de error tipo II cuando realmente $r = 40$ es

$$\beta = P(\text{no rechazar } H_0 \mid r = 40) = P(X \leq 9 \mid K = 40)$$

Es decir,

$$\beta = \sum_{x=0}^9 \frac{\binom{40}{x} \binom{60}{20-x}}{\binom{100}{20}}$$

Desarrollando la sumatoria para calcular β :

| x | A | B | C | $\frac{A \times B}{C}$ |
|-----|-----------------|--------------------|-------------------|------------------------|
| | $\binom{40}{x}$ | $\binom{60}{20-x}$ | $\binom{100}{20}$ | |
| 0 | 1 | 4.1918E+15 | 5.3598E+20 | 7.8208E-06 |
| 1 | 40 | 2.0448E+15 | 5.3598E+20 | 1.5260E-04 |
| 2 | 780 | 9.2503E+14 | 5.3598E+20 | 1.3462E-03 |
| 3 | 9,880 | 3.8722E+14 | 5.3598E+20 | 7.1378E-03 |
| 4 | 91,390 | 1.4961E+14 | 5.3598E+20 | 2.5510E-02 |
| 5 | 658,008 | 5.3194E+13 | 5.3598E+20 | 6.5305E-02 |
| 6 | 3,838,380 | 1.7346E+13 | 5.3598E+20 | 1.2422E-01 |
| 7 | 18,643,560 | 5.1669E+12 | 5.3598E+20 | 1.7972E-01 |
| 8 | 76,904,685 | 1.3994E+12 | 5.3598E+20 | 2.0078E-01 |
| 9 | 273,438,880 | 3.4270E+11 | 5.3598E+20 | 1.7483E-01 |
| | | | Σ | 0.7790 |

Por lo tanto, la probabilidad de cometer error tipo II cuando $r = 40$ es aproximadamente 0.7790.