Estadística Inferencial

Capítulo X - Ejercicio 19

Aaric Llerena Medina

El gerente de producción de la empresa "HILOS" afirma que el nuevo hilo sintético que produce su compañía tiene una resistencia media a la ruptura mayor de 15 kilogramos. Usted piensa que esta cifra es exagerada y pide realizar una prueba. En una muestra aleatoria de 36 de tales hilos se ha medido la resistencia X_i resultando las siguientes sumas:

$$\sum_{i=1}^{36} X_i = 612, \quad \sum_{i=1}^{36} X_i^2 = 10,719$$

a) Plantee las hipótesis del problema.

b) ¿Cuál es la estadística de la prueba?

c) Realice la prueba de las hipótesis en el nivel de significación 0.05.

d) Halle el porcentaje de las veces en que tal muestra nos lleva a rechazar en forma acertada que la resistencia media a la ruptura es igual a 15 Kg. cuando realmente es igual a 2 Kg. por encima de ello.

Solución:

a) La afirmación del gerente es que el hilo tiene una resistencia media mayor de 15 kg, en contraste, se quiere demostrar que en realidad la resistencia media es superior a 15 kg (es decir, que la media es diferente de 15 kg) aproximadamente 17 kg. De este, las hipótesis son:

- $H_0 : \mu = 15$, la resistencia media es 15 kg.
- $H_1 : \mu > 15$, la resistencia media es mayor a 15 kg.

b) Para calcular la estadística de la prueba, primero se debe calcular la media muestral:

$$\bar{X} = \frac{1}{36} \sum_{i=1}^{36} X_i = \frac{612}{36} = 17$$

Además, para determinar la varianza muestral, se utiliza la siguiente fórmula:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right)^2}{n}\right)$$

$$S^2 = \frac{1}{35}\left(10,719 - \frac{612^2}{36}\right)$$

$$S^2 = \frac{10,719 - 10,404}{35} = \frac{315}{35} = 9$$

Dado que la variable X proviene de una población normal, la estadística de la prueba, usando la distribución t de Student* es:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$$

donde $\mu_0 = 15$. Así:

$$T = \frac{17 - 15}{3/\sqrt{36}} = \frac{2}{3/6} = \frac{2}{0.5} = 4$$

* *Utilizamos la prueba t para una muestra, ya que la varianza poblacional es desconocida.*

c) Como es una prueba unilateral (cola superior) con media $\mu > 15$ y $n - 1 = 35$ grados de libertad, el valor crítico es $t_{0.95,35}$ y buscando en tablas y estableciendo la regla de decisión:

$$\text{Rechazar } H_0 \text{ si } T > 1.6896$$

Como el valor previamente obtenido es $T = 4$ y siendo mayor a 1.6896, es decir, $4 > 1.6896$, por lo tanto, se rechaza la hipótesis nula H_0, adicional, evidenciar que a un nivel del 5 % que la resistencia media a la ruptura es mayor de 15 kg.

d) Para encontrar la probabilidad de rechazar H_0 cuando la verdadera media es $\mu = 17$ kg, primero se debe calcular el valor crítico en términos de la media muestral:

$$\bar{X}_{\text{crit}} = \mu_0 + t_{\alpha,n-1} \times \frac{s}{\sqrt{n}} = 15 + 1.6896 \times \frac{3}{\sqrt{36}} = 15 + 1.6896 \times 0.5 = 15.8448$$

Con el valor calculado, se debe determinar la probabilidad que $\bar{X} > 15.8448$, cuando $\mu = 17$.

$$t = \frac{15.8448 - 17}{3/\sqrt{36}} = \frac{-1.1552}{0.5} = -2.3104$$

Se debe calcular la probabilidad de $P(t > -2.3104)$, es decir, la probabilidad a encontrar debe ser $1 - P(t < -2.3104)$. Recordar que se tiene 35 grados de libertad.

$$\begin{aligned} P(t > -2.3104) &= 1 - P(t < -2.3104) \\ &= 1 - 0.0134 = 0.9866 \end{aligned}$$

Por lo tanto, El porcentaje de veces que se rechaza correctamente H_0 cuando la verdadera media es 17 kg es aproximadamente 98.66 %.