Estadística Inferencial

Capítulo X - Ejercicio 18

Aaric Llerena Medina

La prueba de resistencia física que se aplica a los alumnos de la PUCP tiene una media de 200 puntos y una desviación estándar de 50 puntos. Para comprobar la hipótesis de la media se sometieron a la prueba a 100 alumnos seleccionados al azar. Si se utiliza como región de rechazo de H_0, el intervalo: $\bar{X} < 190$.

a) Determine la probabilidad de tomar la decisión correcta de aceptar que $H_0 : \mu = 200$ cuando realmente es verdadera.

b) ¿Con qué probabilidad esta prueba detecta una diferencia igual a 15 puntos en el promedio de la resistencia y por debajo de lo que indica la hipótesis nula?

Solución:

a) Bajo la hipótesis nula se tiene que $\mu = 200$. Dado que la desviación estándar de la población es 50 y la muestra es de $n = 100$, la media muestral se distribuye como:

$$\bar{X} \sim N\left(200, \frac{50^2}{100}\right) = N(200, 25)$$

La desviación estándar de $\bar{X}$ es:

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{50}{\sqrt{100}} = 5$$

La región de rechazo es $\{\bar{X} < 190\}$, por lo que para aceptar H_0 se requiere que $\bar{X} \geq 190$. Así, la probabilidad de tomar la decisión correcta de aceptar H_0 cuando es verdadera es:

$$P(\bar{X} \geq 190) = P\left(Z \geq \frac{190 - 200}{5}\right) = P\left(Z \geq -2\right) = 1 - P\left(Z < -2\right)$$

Utilizando la tabla de distribución normal estándar se tiene:

$$\begin{aligned} P\left(Z \geq -2\right) &= 1 - P\left(Z < -2\right) \\ &\approx 1 - 0.0228 \\ &\approx 0.9772 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la probabilidad de tomar la decisión correcta de aceptar H_0 es aproximadamente 97.72 %.

b) Para determinar la probabilidad de que la prueba detecte una diferencia de 15 puntos por debajo de lo indicado en H_0, suponiendo que la verdadera media es:

$$\mu = 200 - 15 = 185$$

la distribución de la media muestral es:

$$\bar{X} \sim N(185, 25)$$

La prueba rechaza H_0 si $\bar{X} < 190$. Por ello, la probabilidad de detectar esta diferencia es:

$$P(\bar{X} < 190) = P\left(Z < \frac{190 - 185}{5}\right) = P\left(Z < \frac{5}{5}\right) = P(Z < 1)$$

Buscando en la tabla de la distribución normal estándar se obtiene:

$$P(Z < 1) \approx 0.8413$$

Por lo tanto, la prueba tiene aproximadamente un 84.13 % de probabilidad de detectar una diferencia de 15 puntos.