Estadística Inferencial

Capítulo X - Ejercicio 11

Aaric Llerena Medina

El tiempo de vida útil en meses de cierto tipo de resistencia eléctrica es una variable aleatoria X que tiene distribución exponencial con media μ. Para comprobar la hipótesis $H_0 : \mu = 80$ contra $H_1 : \mu < 80$, se usa como región de rechazo de H_0 el intervalo $X < 77.5$ donde X es la vida útil de una muestra aleatoria de tamaño 1 escogida de la población de resistencias.

a) Halle la probabilidad de error tipo I.

b) Halle la potencia de la prueba cuando la verdadera media es 76 meses.

Solución:

Recordar que la distribución del tiempo de vida útil de las resistencias eléctricas, que es exponencial con media μ. La función de densidad de probabilidad (CDF) de una distribución exponencial con media μ es:

$$f(x) = \frac{1}{\mu}e^{-\frac{x}{\mu}}, \quad x \geq 0$$

a) La probabilidad de error tipo I es la probabilidad de rechazar la hipótesis nula $H_0 : \mu = 80$ cuando es verdadera. La región de rechazo es $X < 77.5$. Por lo tanto, la probabilidad de error tipo I α es:

$$\alpha = P(X < 77.5 \mid \mu = 80)$$

Dado que X sigue una distribución exponencial con media $\mu = 80$, la CDF es:

$$f(x) = \frac{1}{80}e^{-\frac{x}{80}}$$

La probabilidad de que $X < 77.5$ es:

$$P(X < 77.5) = \int_0^{77.5} \frac{1}{80}e^{-\frac{x}{80}}dx$$

Resolviendo la integral:

$$P(X < 77.5) = \left[-e^{-\frac{x}{80}}\right]_0^{77.5} = -e^{-\frac{77.5}{80}} + e^0 = 1 - e^{-\frac{77.5}{80}} = 1 - e^{-\frac{31}{32}}$$

Por lo tanto, la probabilidad de error tipo I es: $\alpha == 1 - e^{-\frac{31}{32}} \approx 0.6204$.

b) La potencia de la prueba es la probabilidad de rechazar la hipótesis nula cuando es falsa. En este caso, la hipótesis nula es falsa cuando $\mu = 76$. La potencia de la prueba es:

$$\text{Potencia} = P(X < 77.5 \mid \mu = 76)$$

Dado que X sigue una distribución exponencial con media $\mu = 76$, la CDF es:

$$f(x) = \frac{1}{76} e^{-\frac{x}{76}}$$

La probabilidad de que $X < 77.5$ es:

$$P(X < 77.5) = \int_0^{77.5} \frac{1}{76} e^{-\frac{x}{76}} dx$$

Resolviendo la integral:

$$P(X < 77.5) = \left[-e^{-\frac{x}{76}} \right]_0^{77.5} = -e^{-\frac{77.5}{76}} + e^0 = 1 - e^{-\frac{77.5}{76}}$$

Por lo tanto, la potencia de la prueba es $1 - e^{-\frac{77.5}{76}} \approx 0.6393$.