

# Estadística Inferencial

## Capítulo X - Ejercicio 36

Aaric Llerena Medina

---

La SUMAT afirma que el 70 % de los contribuyentes pagan sus impuestos correctamente. Si menos de 52 contribuyentes de una muestra de 80 contribuyentes pagan sus impuestos correctamente, se rechaza la afirmación. Se acepta en caso contrario.

- a) Plantee las hipótesis de esta prueba.
- b) ¿Cuál es el nivel de significación de la prueba?
- c) ¿En qué porcentaje la prueba puede detectar una diferencia de 20 % por debajo de lo indicado en la hipótesis nula?

### **Solución:**

- a) Se plantean las hipótesis:

$H_0 : p = 0.70$  (El 70 % de los contribuyentes pagan sus impuestos correctamente)

$H_1 : p < 0.70$  (Menos del 70 % de los contribuyentes pagan sus impuestos correctamente)

- b) El nivel de significación es la probabilidad de rechazar  $H_0$  cuando en realidad es cierta. Se rechaza  $H_0$  cuando el número de contribuyentes que pagan correctamente es menor de 52. Sea  $X \sim \text{Binomial}(n = 80, p = 0.70)$  la variable aleatoria que cuenta el número de contribuyentes que pagan correctamente. El valor exacto del nivel de significación es:

$$\alpha = P(X < 52 \mid p = 0.70) = \sum_{x=0}^{51} \binom{80}{x} (0.70)^x (0.30)^{80-x}$$

Usando la aproximación normal (aplicando corrección de continuidad) se tiene:

- **Media:**  $\mu = np = 80 \times 0.70 = 56$
- **Varianza:**  $\sigma^2 = np(1 - p) = 80 \times 0.7 \times 0.3 = 16.8$

La probabilidad se aproxima por:

$$\alpha \approx P\left(Z < \frac{52 - 56}{\sqrt{4.0988}}\right) = P\left(Z < \frac{-4}{4.0988}\right) \approx P(Z < -0.98)$$

Buscando en la tabla estándar  $P(Z < -0.98) \approx 0.1635$ , por lo tanto, el nivel de significación de la prueba es 0.1635.

c) Como se indica que hay una diferencia de 20 % por debajo, es decir, bajo la alternativa se tiene  $p = 0.70 - 0.20 = 0.50$ . Sea  $X \sim \text{Binomial}(n = 80, p = 0.50)$ , la potencia es:

$$\text{Potencia} = P(X < 52 \mid p = 0.50)$$

Usando la aproximación normal:

- **Media:**  $\mu = np = 80 \times 0.50 = 40$
- **Varianza:**  $\sigma^2 = np(1 - p) = 80 \times 0.5 \times 0.5 = 20$

Estandarizando:

$$Z = \frac{52 - 40}{\sqrt{20}} = \frac{12}{4.4721} \approx 2.68$$

La probabilidad es:

$$\text{Potencia} \approx P(Z < 2.68) \approx 0.9963$$

Por lo tanto, la prueba puede detectar una diferencia del 20 % por debajo de lo indicado en la hipótesis nula con una potencia del 99.63 %.