Estadística Inferencial

Capítulo X - Ejercicio 58

Aaric Llerena Medina

Se realiza el control en los frascos de 300 gramos de un producto que tiene solo dos componentes A y B en iguales cantidades promedio. Se sabe que cada componente del producto tiene distribución normal. Una muestra aleatoria de 10 frascos ha dado los siguientes porcentajes de la componente A:

$$48\,\%,\ 52\,\%,\ 49\,\%,\ 55\,\%,\ 62\,\%,\ 51\,\%,\ 53\,\%,\ 54\,\%,\ 55\,\%,\ 56\,\%$$

Para un nivel de significación de 0.05.

a) Determine si las varianzas de los contenidos de las dos componentes son homogéneas.

b) ¿Son diferentes los promedios de los contenidos de las dos componentes?

Solución:

a) Para determinar si las varianzas son homogéneas, se realiza la prueba requerida, pero se debe precisar que al ser $B = 100\,\% - A$, las varianzas son idénticas:

$$\text{Var}(A) = \text{Var}(B) \quad \Rightarrow \quad F = \frac{s_A^2}{s_B^2} = 1$$

Por lo tanto, las varianzas son homogéneas por construcción ($F = 1$). Pero, para confirmar se puede utilizar el valor crítico, es decir, el nivel de significación con $\alpha = 0.05$ y 9 grados de libertad para ambos grupos, por lo que:

$$F_{0.05,9,9} = 3.1789$$

Como el valor estadístico F (1) es menor que el valor crítico (3.18), no rechazamos la hipótesis nula de que las varianzas son iguales.

b) Se plantean las hipótesis: $H_0 : \mu_A = 50\,\% \quad \text{vs} \quad H_1 : \mu_A \neq 50\,\%$

Determinando la media y la desviación estándar:

- Media muestral: $\bar{x} = \dfrac{535}{10} = 53.5\,\%$
- Desviación estándar: $s = \sqrt{\dfrac{142.5}{9}} \approx 3.98\,\%$

Usando el estadístico t de Student:

$$t = \frac{53.5 - 50}{\frac{3.98}{\sqrt{10}}} = \frac{3.5}{1.2586} \approx 2.78$$

Asimismo, el valor crítico bilateral ($\alpha = 0.05$, $\nu = 9$) es:

$$t_{1-\alpha/2,9} = \pm 2.262$$

Ahora, comparar para tomar una decisión:

$$|t| = 2.78 > 2.262 \quad \Rightarrow \quad \text{Rechazamos } H_0$$

Asimismo, para validar nuestra conclusión, calculamos el valor-P asociado:

$$P = 2 \times P(t_9 > 2.78) = 2 \times [1 - P(t_9 < 2.78)] \approx 2 \times (1 - 0.9893) \approx 0.0214$$

Como el valor-p de 0.021 es menor que 0.05, se confirma que se rechaza la H_0.