Estadística Inferencial

Capítulo VIII - Ejercicio 51

Aaric Llerena Medina

Una firma comercializadora afirma que el peso promedio (en gramos) μ_1 y μ_2 de dos marcas de café instantáneo $C1$ y $C2$, es el mismo. Para verificar la afirmación se escogen dos muestras aleatorias independientes de tamaños 36 sobres de cada marca. Si la media muestral de $C1$ es mayor que la media muestral de $C2$ en más de 0.5 gramos, se rechaza que $\mu_1 = \mu_2$. En caso contrario, se acepta que $\mu_1 = \mu_2$. ¿Cuál es la probabilidad de aceptar que $\mu_1 = \mu_2$ cuando realmente $\mu_1 = \mu_2 + 2$? Suponga que las varianzas de las poblaciones $C1$ y $C2$ son respetivamente $\sigma_1^2 = 9$ y $\sigma_2^2 = 4$.

Solución:

La regla de decisión es:

- Si $\bar{X}_1 - \bar{X}_2 > 0.5$, se rechaza que $\mu_1 = \mu_2$.
- En caso contrario, se acepta que $\mu_1 = \mu_2$.

Además, se sabe que las varianzas de las poblaciones son $\sigma_1^2 = 9$ y $\sigma_2^2 = 4$, por lo que la diferencia de medias muestrales $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ sigue una distribución normal con:

- **Media:** $\mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \mu_1 - \mu_2$.
- **Varianza:** $\sigma^2_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2} = \dfrac{9}{36} + \dfrac{4}{36} = \dfrac{13}{36} \approx 0.3611$.
- **Desviación estándar:** $\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{0.3611} \approx 0.6009$.

Se desea calcular la probabilidad de aceptar que $\mu_1 = \mu_2$ cuando realmente $\mu_1 = \mu_2 + 2$, por lo que la media de la diferencia de medias muestrales es:

$$\mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \mu_1 - \mu_2 = 2$$

Se busca calcular la probabilidad de que $\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \leq 0.5$. Estandarizando:

$$Z = \frac{0.5 - 2}{0.6009} = \frac{-1.5}{0.6009} \approx -2.50$$

Por lo tanto:

$$P\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \leq 0.5\right) = P\left(Z \leq -2.50\right)$$

Usando la tabla de la distribución normal estándar:

$$P(Z \leq -2.50) \approx 0.0062$$

Por lo tanto, la probabilidad de aceptar que $\mu_1 = \mu_2$ cuando en realidad $\mu_1 = \mu_2 + 2$ es aproximadamente 0.0062.