Estadística Inferencial

Capítulo VIII - Ejercicio 32

Aaric Llerena Medina

El director de la bolsa de trabajo de la universidad afirma que el 60 % de los egresados consigue empleo con una remuneración mayor a los \$500. Para comprobar esta afirmación se escoge una muestra aleatoria de 600 egresados de la universidad. Si 330 o más pero no más de 390 de la muestra consiguen trabajo con remuneración mayor a los \$500, se aceptará la afirmación. En caso contrario se rechazará tal afirmación.

a) ¿Cuál es la probabilidad de rechazar la afirmación cuando esta es realmente verdadera?

b) ¿Cuál es la probabilidad de aceptar la afirmación cuando realmente el 70 % de todos los egresados consiguen trabajo con remuneración mayor a los \$500?

Solución:

Se define X como el número de egresados en la muestra que consiguen trabajo con remuneración mayor a los \$500. La regla de decisión es:

- Si $330 \leq X \leq 390$, se acepta la afirmación.
- En caso contrario, se rechaza la afirmación.

a) Cuando la afirmación es verdadera, la proporción verdadera es $p = 0.60$. La variable X sigue una distribución binomial $(n = 600, p = 0.60)$. Dado que n es grande, podemos aproximar la distribución binomial por una distribución normal con:

   - **Media:** $\mu_X = np = 600 \times 0.60 = 360$.
   - **Desviación estándar:** $\sigma_X = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{600 \times 0.60 \times 0.40} = \sqrt{144} = 12$.

   Se busca calcular la probabilidad de que $X < 330$ o $X > 390$. Estandarizando:

   - Para $X = 330$:
   $$Z = \frac{330 - 360}{12} = \frac{-30}{12} = -2.5$$
   - Para $X = 390$:
   $$Z = \frac{390 - 360}{12} = \frac{30}{12} = 2.5$$

Por lo tanto:

$$P\left(X < 330 \text{ o } X > 390\right) = P\left(Z < -2.5\right) + P\left(Z > 2.5\right)$$

Usando la tabla de la distribución normal estándar:

- $P\left(Z < -2.5\right) \approx 0.0062$.
- $P\left(Z > 2.5\right) = 1 - P\left(Z \leq 2.5\right) \approx 1 - 0.9938 = 0.0062$.

Sumando ambas probabilidades:

$$P\left(X < 330 \text{ o } X > 390\right) \approx 0.0062 + 0.0062 = 0.0124$$

Por lo tanto, la probabilidad de rechazar la afirmación cuando esta es realmente verdadera es aproximadamente 0.0124.

b) Cuando la proporción verdadera es $p = 0.70$, la variable X sigue una distribución binomial $(n = 600, p = 0.70)$. Aproximamos esta distribución por una normal con:

- **Media:** $\mu_X = np = 600 \times 0.70 = 420$.
- **Desviación estándar:** $\sigma_X = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{600 \times 0.70 \times 0.30} = \sqrt{126} \approx 11.225$.

Se busca calcular la probabilidad de que $330 \leq X \leq 390$. Estandarizando:

- Para $X = 330$:
$$Z = \frac{330 - 420}{11.225} = \frac{-90}{11.225} \approx -8.02$$
- Para $X = 390$:
$$Z = \frac{390 - 420}{11.225} = \frac{-30}{11.225} \approx -2.67$$

Por lo tanto:

$$P\left(330 \leq X \leq 390\right) = P\left(-8.02 \leq Z \leq -2.67\right)$$

Usando la tabla de la distribución normal estándar:

- $P\left(Z \leq -2.67\right) \approx 0.0038$.
- $P\left(Z \leq -8.02\right) \approx 0$ (prácticamente 0).

Restando ambas probabilidades:

$$P\left(-8.02 \leq Z \leq -2.67\right) \approx 0.0038 - 0 = 0.0038$$

Por lo tanto, la probabilidad de aceptar la afirmación cuando realmente el 70 % de los egresados consiguen trabajo con remuneración mayor a los $500 es aproximadamente 0.0038.