Estadística Inferencial

Capítulo VIII - Ejercicio 41

Aaric Llerena Medina

Si $X_1, X_2, \ldots, X_8$ son ocho variables aleatorias independientes y distribuidas cada una normal $N(10, 32)$, calcular la probabilidad de que la varianza muestral $S^2 = \sum \left(X_i - \bar{X}\right)^2 / 8$ sea menor o igual que 56.28.

Solución:

Dado que las variables $X_1, X_2, \ldots, X_8$ son independientes y siguen una distribución normal $N\left(10, 32\right)$, la varianza muestral S^2 sigue una distribución chi-cuadrado escalada. Es decir:

$$\frac{8 \cdot S^2}{\sigma^2} \sim \chi_7^2$$

donde $\sigma^2 = 32$ y $n = 8$, ya que son 7 los grados de libertad, asimismo, $S^2 = 56.28$, por lo que reemplazando:

$$\frac{8 \times 56.28}{32} = \frac{450.24}{32} = 14.07$$

Por lo tanto, se debe encontrar el valor de $P\left(\chi_7^2 \leq 14.07\right)$. Buscando el valor 14.07 en la tabla de la distribución chi-cuadrado con 7 grados de libertad:

$$14.07 = \chi_{7,0.950}$$

	$\cdots$	$\chi_{0.900}$	$\chi_{0.950}$	$\chi_{0.975}$	$\cdots$
$\vdots$					
6					
7		10.02	14.07	16.02	
$\vdots$					

Por tabla, se encuentra que:

$$P\left(\chi_7^2 \leq 14.07\right) \approx 0.95$$

Por lo tanto, la probabilidad de que la varianza muestral S^2 sea menor o igual que 56.28 es aproximadamente 0.95.