

Estadística Inferencial

Capítulo X - Ejercicio 10

Aaric Llerena Medina

El tiempo en horas de diagnóstico de motores de automóviles se asume que es una variable aleatoria continua X cuya función de densidad es:

$$f(x) = \begin{cases} \theta x & \text{si } 0 \leq x \leq \sqrt{\frac{2}{\theta}} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

en donde $\theta > 0$ es un parámetro desconocido.

Para realizar la prueba de la hipótesis nula $H_0 : \theta = 1/2$ contra $H_1 : \theta < 1/2$ se mandará a reparar uno de estos motores, si en tal reparación se demoran C horas o más se aceptará la hipótesis nula.

Determine el valor de C si se quiere una probabilidad de 5% de rechazar la hipótesis nula cuando es realmente verdadera.

Solución:

Como se desea encontrar C tal que la probabilidad de rechazar la hipótesis nula $H_0 : \theta = \frac{1}{2}$ cuando es verdadera sea del 5%. Esto significa que se desea la probabilidad de que el tiempo de diagnóstico X sea menor que C es 0.05 cuando $\theta = \frac{1}{2}$.

$$P\left(X < C \mid \theta = \frac{1}{2}\right) = 0.05$$

La probabilidad de que $X < C$ es:

$$P(X < C) = \int_0^C \frac{1}{2}x dx$$

Calculando la integral:

$$\int_0^C \frac{1}{2}x dx = \left[\frac{1}{4}x^2\right]_0^C = \frac{1}{4}C^2$$

Igualando lo obtenido con lo que se quiere obtener:

$$\frac{1}{4}C^2 = 0.05 \Rightarrow C^2 = 0.2 \Rightarrow C = \sqrt{\frac{1}{5}} \Rightarrow C = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Por lo tanto, el valor de C que satisface la condición de obtener una probabilidad del 5% de rechazar la hipótesis nula cuando es verdadera es $\frac{\sqrt{5}}{5}$.