Estadística Inferencial

Capítulo VIII - Ejercicio 52

Aaric Llerena Medina

El jefe de compras está por decidir si comprar una marca A o una marca B de focos para la compañía. Para ayudarle a optar por una de ellas se escogen dos muestras aleatorias de tamaños $n_1 = 10$ y $n_2 = 9$ focos respectivamente de las marcas A y B, resultando, las desviaciones estándares respectivas $\hat{s}_1 = 200$ y $\hat{s}_2 = 150$. Si la diferencia entre las medias muestrales es mayor que 173 horas, se acepta que $\mu_1 \neq \mu_2$. En caso contrario, se acepta que $\mu_1 = \mu_2$. ¿Cuál es la probabilidad de aceptar que $\mu_1 \neq \mu_2$ cuando realmente $\mu_1 = \mu_2$ Se asume que la vida útil de ambas marcas tiene distribución normal con varianzas iguales. Usar $\alpha = 0.05$.

Solución:

Dado que se asume igualdad de varianzas, el estimador combinado de la varianza poblacional:

$$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)\hat{s}_1^2 + (n_2 - 1)\hat{s}_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

Sustituyendo los valores:

$$\begin{aligned} s_p^2 &= \frac{(10-1)(200^2) + (9-1)(150^2)}{10+9-2} \\ &= \frac{9(40,000) + 8(22,500)}{17} \\ s_p^2 &= \frac{540,000}{17} \approx 31,764.71. \end{aligned}$$

La desviación estándar combinada es:

$$s_p = \sqrt{s_p^2} \approx \sqrt{31,764.71} \approx 178.23$$

Bajo la hipótesis nula $H_0 : \mu_1 = \mu_2$, la diferencia entre las medias muestrales, $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$, se distribuye de forma normal con media igual a 0 y varianza:

$$\operatorname{Var}\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) = s_p^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)$$

Sustituyendo los números:

$$\begin{aligned} \operatorname{Var}(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) &= 31,764.71 \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{9}\right) \\ &\approx 31,764.71 \times 0.2111 \\ &\approx 6,705.53 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la desviación estándar de la diferencia es:

$$\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} \approx \sqrt{6,705.53} \approx 81.89$$

El estadístico de prueba para evaluar si $\mu_1 \neq \mu_2$ es:

$$Z = \frac{\text{diferencia observada} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}$$

Para la diferencia dada (173 horas), bajo $\mu_1 = \mu_2$, el estadístico es:

$$Z = \frac{173}{81.89} \approx 2.11$$

En una prueba bilateral con nivel de significancia $\alpha = 0.05$, los valores críticos son $Z_c = \pm 1.96$. Como $|Z| > Z_c$, se rechaza la hipótesis nula si la diferencia supera el dato dado.

La probabilidad de aceptar $\mu_1 = \mu_2$ cuando realmente $\mu_1 = \mu_2$ corresponde al área bajo la curva normal estándar entre $-Z_c$ y Z_c, es decir:

$$P\left(-Z_c < Z < Z_c\right) = P(-1.96 < Z < 1.96)$$

Usando tablas de la distribución normal estándar:

$$P\left(-Z_c < Z < Z_c\right) = P(Z < 1.96) - P(Z < -1.96)$$

Como $P(Z < -z) = 1 - P(Z < z)$ para distribuciones simétricas:

$$\begin{aligned} P(Z < 1.96) - (1 - P(Z < 1.96)) &= 0.975 - (1 - 0.975) \\ &= 0.975 - 0.025 \\ &= 0.95 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la probabilidad de aceptar que $\mu_1 = \mu_2$ cuando realmente $\mu_1 = \mu_2$ es aproximadamente 0.95, y la probabilidad complementaria de aceptar que $\mu_1 \neq \mu_2$ cuando $\mu_1 = \mu_2$:

$$P\left(\text{rechazar} H_0 \mid H_0\right) = 1 - P\left(-Z_c < Z < Z_c\right) = 0.05$$

Por lo tanto, la probabilidad de aceptar que $\mu_1 \neq \mu_2$ cuando realmente $\mu_1 = \mu_2$ es aproximadamente un 5 %.