

Estadística Inferencial

Capítulo X - Ejercicio 37

Aaric Llerena Medina

De una lista de 2,000 clientes de un hipermercado que pagan a plazos, se seleccionó una muestra aleatoria para obtener opinión acerca del servicio. En la muestra se halló que 215 no tienen quejas del servicio, 25 tienen quejas y 10 no opinan al respecto. Tradicionalmente el 5 % tenían quejas del servicio, sin embargo se cree que ahora este porcentaje aumentó. ¿Cuál es la situación actual si se quiere una probabilidad de 0.008 de cometer error tipo I?

Solución:

Los datos del problema son:

- Tamaño de la muestra: $n = 250$ (ya que $215 + 25 + 10 = 250$)
- Número de clientes con quejas en la muestra: $X = 25$
- Proporción muestral de clientes con quejas: $\hat{p} = \frac{X}{n} = \frac{25}{250} = 0.10$
- Nivel de significación: $\alpha = 0.008$

Definiendo las hipótesis:

$$H_0 : p \leq 0.05 \quad \text{contra} \quad H_1 : p > 0.05$$

donde p es la proporción de clientes que tienen quejas del servicio.

El estadístico de prueba para una proporción se calcula como:

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1 - p_0)}{n}}}$$

donde $p_0 = 0.05$ es la proporción bajo la hipótesis nula. Sustituyendo los valores:

$$Z = \frac{0.10 - 0.05}{\sqrt{\frac{0.05 \times 0.95}{250}}} = \frac{0.05}{\sqrt{\frac{0.0475}{250}}} = \frac{0.05}{0.0138} \approx 3.6231$$

Se necesita determinar el valor crítico Z_α con $\alpha = 0.008$ y como la región crítica es en la cola derecha, es decir, $P(Z > Z_\alpha)$, entonces:

$$P(Z > Z_\alpha) = 1 - P(Z < Z_\alpha) = 0.008 \Rightarrow P(Z < Z_\alpha) = 0.9920$$

Por lo que buscando el valor 0.9920 en la tabla de distribución normal, se obtiene el valor $Z = 2.41$.

Asimismo, se establece la regla de decisión:

- Si $Z_{\text{calc}} > Z_{\alpha}$, se rechaza H_0 .
- Si $Z_{\text{calc}} \leq Z_{\alpha}$, no se rechaza H_0 .

En este caso, $Z_{\text{calc}} = 3.623 > 2.41$, por lo que rechazamos la hipótesis nula.

Además, se calcula el valor- p para confirmar la decisión. En este caso, el valor- p está dado por:

$$\begin{aligned} P &= P(P > 3.623) \\ &= 1 - P(P < 3.623) \\ &= 1 - 0.9999 \\ &= 0.0001 \end{aligned}$$

El valor- p de aproximadamente 0.0001 es menor que el nivel de significación de 0.008, lo que refuerza la decisión de rechazar la hipótesis nula.

Por lo tanto, hay evidencia estadística significativa para concluir que el porcentaje de clientes con quejas ha aumentado por encima del 5 %.