

Estadística Inferencial

Capítulo X - Ejercicio 24

Aaric Llerena Medina

Se sabe que las ventas diarias de la compañía “P&C” tienen distribución normal con media de \$2,277 y desviación estándar de \$300. El gerente de ventas de la compañía cree que la media de las ventas ha bajado a \$1,800. Diseñe una prueba para estas hipótesis considerando la del gerente como una alternativa de manera que haya una probabilidad igual a 0.004 de cometer error tipo I y una probabilidad de error tipo II igual a 0.017.

Solución:

Definimos las hipótesis de la siguiente forma:

$$H_0 : \mu = 2,277 \quad \text{contra} \quad H_1 : \mu < 2,277$$

Según los datos del problema:

- Media bajo H_0 : $\mu_0 = 2,277$.
- Media bajo H_1 : $\mu_1 = 1,800$.
- Desviación estándar poblacional: $\sigma = 300$.
- Probabilidad de error tipo I (α): 0.004.
- Probabilidad de error tipo II (β): 0.017.

Para una prueba de una cola (ya que el gerente cree que la media ha bajado), usamos las fórmulas relacionadas con los errores tipo I y tipo II:

- **Error tipo I:** $Z_{1-\alpha} = Z_{0.9960} \approx 2.65$.
- **Error tipo II:** $Z_{1-\beta} = Z_{0.9830} \approx 2.12$.

La fórmula para el tamaño de la muestra es:

$$n = \left[\frac{(Z_{1-\alpha} + Z_{1-\beta}) \sigma}{\mu_1 - \mu_0} \right]^2 = \left[\frac{(2.65 + 2.12) \cdot 300}{2,277 - 1,800} \right]^2 = \left[\frac{1,431}{477} \right]^2 = (3)^2 = 9$$

Por lo tanto, se requiere una muestra de $n = 9$ muestras.

Para determinar la región crítica, para un $\alpha = 0.004$ en una prueba de una cola, el valor crítico ya calculado para Z es aproximadamente -2.65. Por eso, la región crítica es $Z < -2.65$.

Finalmente, para determinar el valor crítico en términos de la media muestral:

$$\begin{aligned}\bar{X}_{\text{crit}} &= \mu_0 + Z_{\alpha} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ &= 2,277 + (-2.65) \times \frac{300}{\sqrt{9}} \\ &= 2,277 - 265 \\ &= 2,012\end{aligned}$$

Por lo tanto, el valor crítico en términos de la media muestral es 2,012. Si la media muestral es menor que 2,012 se rechaza la hipótesis nula al nivel de significación 0.004.

