Estadística Inferencial

Capítulo VIII - Ejercicio 18

Aaric Llerena Medina

La duración en horas de una marca de tarjeta electrónica se distribuye exponencialmente con un promedio de 1,000 horas.

a) Halle el tamaño n de la muestra de manera que sea 0.9544 la probabilidad de que su media muestral esté entre 800 y 1,200 horas.

b) Si se obtiene una muestra aleatoria de 100 de esas tarjetas calcular la probabilidad que la duración media de la muestra sea superior a 1,100 horas.

Solución:

En una distribución exponencial, el parámetro β es el inverso de la media, es decir:

$$\beta = \frac{1}{\mathbb{E}(x)} = \frac{1}{1,000}$$

Asimismo, la varianza es igual $\frac{1}{\beta^2}$.

a) La media muestral $\bar{X}$ de una distribución exponencial sigue una distribución aproximadamente normal (para n grande) con:

- **Media:** $\mu_{\bar{X}} = \mu = 1,000$ horas.
- **Varianza:** $\sigma^2_{\bar{X}} = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{1/\beta^2}{n} = \frac{1,000^2}{n} = \frac{1,000,000}{n}$.
- **Desviación estándar:** $\sigma_{\bar{X}} = \frac{1,000}{\sqrt{n}}$.

Se desea encontrar n tal que:

$$P(800 \leq \bar{X} \leq 1,200) = 0.9544$$

Estandarizando:

- Para $\bar{X} = 800$:

$$Z = \frac{800 - 1,000}{\frac{1,000}{\sqrt{n}}} = \frac{-200}{\frac{1,000}{\sqrt{n}}} = -0.2\sqrt{n}$$

- Para $\bar{X} = 1,200$:

$$Z = \frac{1,200 - 1,000}{\frac{1,000}{\sqrt{n}}} = \frac{200}{\frac{1,000}{\sqrt{n}}} = 0.2\sqrt{n}$$

Por lo tanto:

$$P(800 \leq \bar{X} \leq 1,200) = P(-0.2\sqrt{n} \leq Z \leq 0.2\sqrt{n}) = 0.9544$$

Usando la tabla de la distribución normal estándar, el valor Z que deja un área de 0.9544 entre $-Z$ y Z es $Z \approx 2.0$. Por lo tanto:

$$0.2\sqrt{n} = 2.0 \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{2.0}{0.2} = 10 \Rightarrow n = 10^2 = 100$$

Por lo tanto, el tamaño de la muestra es de 100 para que se tenga una probabilidad de 0.9544 para que su media muestral esté entre 800 y 1,200 horas.

b) Como se tiene una muestra aleatoria de 100 de esas tarjetas, se debe calcular la probabilidad de que la duración media de la muestra sea superior a 1,100 horas. Para $n = 100$, la distribución de la media muestral $\bar{X}$ es:

$$\bar{X} \sim N\left(1,000; \frac{1,000^2}{100}\right) = N(1,000; 10,000)$$

La desviación estándar de $\bar{X}$ es:

$$\sigma_{\bar{X}} = \sqrt{10,000} = 100$$

Se busca calcular:

$$P(\bar{X} > 1,100)$$

Estandarizando:

$$Z = \frac{1,100 - 1,000}{100} = \frac{100}{100} = 1$$

Por lo que obtenemos:

$$P(\bar{X} > 1,100) = P(Z > 1)$$

Usando la tabla de la distribución normal estándar:

$$P(Z > 1) = 1 - P(Z \leq 1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$$

Por lo tanto, la probabilidad de que la duración media de la muestra sea superior a 1,100 horas es aproximadamente 0.1587.