Estadística Inferencial

Capítulo VIII - Ejercicio 21

Aaric Llerena Medina

Una empresa de cerveza tiene tres fábricas, una en Cusco, otra en Arequipa y una en Alemania. El 40 % de la cerveza es producida en la fábrica de Cusco, el 50 % en la de Arequipa y el resto en la de Alemania. La cantidad de cerveza en cada botella es una variable aleatoria X, que para la fábrica de Cusco se distribuye normal con media 620 mililitros y una desviación estándar de 3 mililitros, para la fábrica de Arequipa se distribuye normal con media 623 mililitros y una desviación estándar de 5 mililitros, mientras que para la fábrica de Alemania se distribuye normal con media 621 mililitros y una desviación estándar de 3.5 mililitros.

Se rechaza una cerveza que tenga menos de 615 mililitros o más de 630 mililitros.

a) ¿Con qué probabilidad es rechazada una botella de cerveza?

b) Calcule la probabilidad de que en 50 cajas de cerveza, menos de 40 botellas sean rechazadas.

Solución:

La cantidad de cerveza en cada botella es una variable aleatoria X, cuya distribución depende de la fábrica:

- **Cusco:** $X \sim (620, 3^2)$.
- **Arequipa:** $X \sim (623, 5^2)$
- **Alemania:** $X \sim (621, 3.5^2)$

a) La probabilidad de rechazo $P(R)$ se calcula usando el teorema de la probabilidad total:

$$P(R) = P(R \mid \text{Cusco})\cdot P(\text{Cusco}) + P(R \mid \text{Arequipa})\cdot P(\text{Arequipa}) + P(R \mid \text{Alemania})\cdot P(\text{Alemania})$$

Donde:

- $P(\text{Cusco}) = 0.40$.
- $P(\text{Arequipa}) = 0.50$.
- $P(\text{Alemania}) = 0.10$.

Ahora, se calcula $P(R \mid \text{Fábrica})$ para cada fábrica:

- **Cusco:**

$$P(R \mid \text{Cusco}) = P(X < 615 \mid \text{Cusco}) + P(X > 630 \mid \text{Cusco})$$

Estandarizando:

  - Para $X = 615$:

$$Z = \frac{615 - 620}{3} = \frac{-5}{3} \approx -1.67$$

  - Para $X = 630$:

$$Z = \frac{630 - 620}{3} = \frac{10}{3} \approx 3.33$$

Usando la tabla de la distribución normal estándar:

  - $P(Z < -1.67) \approx 0.0475$.
  - $P(Z > 3.33) \approx 1 - 0.9996 = 0.0004$.

Por lo tanto:

$$P(R \mid \text{Cusco}) = 0.0475 + 0.0004 = 0.0479$$

- **Arequipa:**

$$P(R \mid \text{Arequipa}) = P(X < 615 \mid \text{Arequipa}) + P(X > 630 \mid \text{Arequipa})$$

Estandarizando:

  - Para $X = 615$:

$$Z = \frac{615 - 623}{5} = \frac{-8}{5} = -1.6$$

  - Para $X = 630$:

$$Z = \frac{630 - 623}{5} = \frac{7}{5} = 1.4$$

Usando la tabla de la distribución normal estándar:

  - $P(Z < -1.6) \approx 0.0548$.
  - $P(Z > 1.4) \approx 1 - 0.9192 = 0.0808$.

Por lo tanto:

$$P(R \mid \text{Arequipa}) = 0.0548 + 0.0808 = 0.1356$$

- **Alemania:**

$$P(R \mid \text{Alemania}) = P(X < 615 \mid \text{Alemania}) + P(X > 630 \mid \text{Alemania})$$

Estandarizando:

- Para $X = 615$:
$$Z = \frac{615 - 621}{3.5} = \frac{-6}{3.5} \approx -1.71$$
- Para $X = 630$:
$$Z = \frac{630 - 621}{3.5} = \frac{9}{3.5} \approx 2.57$$

Usando la tabla de la distribución normal estándar:

- $P(Z < -1.71) \approx 0.0436$.
- $P(Z > 2.57) \approx 1 - 0.9949 = 0.0051$.

Por lo tanto:

$$P(R \mid \text{Alemania}) = 0.0436 + 0.0051 = 0.0487$$

Sustituyendo en la fórmula de la probabilidad total:

$$P(R) = 0.0479 \times 0.40 + 0.1356 \times 0.50 + 0.0487 \times 0.10 = 0.09183$$

Por lo tanto, La probabilidad de que una botella de cerveza sea rechazada es aproximadamente 0.09183.

b) Sea Y el número de botellas rechazadas en 50 cajas. Dado que cada caja contiene una botella, Y sigue una distribución binomial ($n = 50, p = 0.0919$). Dado que n es grande y p es pequeño, aproximamos esta distribución por una normal con:

- **Media:** $\mu_Y = n \cdot p = 50 \times 0.09183 = 4.5915$.
- **Varianza:** $\sigma_Y^2 = n \cdot p \cdot (1 - p) = 50 \times 0.0919 \times 0.9081 \approx 4.17$.
- **Desviación estándar:** $\sigma_Y = \sqrt{4.17} \approx 2.04$.

Se busca calcular $P(Y < 40)$ y estandarizando, se obtiene:

$$P(Y < 40) \approx P\left(Z < \frac{40 - 4.5915}{2.04}\right) = P\left(Z < \frac{35.4085}{2.04}\right) \approx P(Z < 17.36)$$

Usando la tabla de la distribución normal estándar:

$$P(Z < 17.36) \approx 1$$

La probabilidad de que en 50 cajas se rechacen menos de 40 botellas es prácticamente 1.