Estadística Inferencial

Capítulo X - Ejercicio 27

Aaric Llerena Medina

Un proceso automático de llena vasos de refrescos cuyo contenido debe tener una media de 20 onzas con una desviación estándar de 0.6 onzas. En forma periódica se controlan una muestra de 36 vasos de refrescos llenados por el proceso automático y se concluye que el sistema está fuera de control si la media de los contenidos de la muestra está fuera del intervalo $[19.85, 20.15]$.

a) Formule la hipótesis nula y alternativa.

b) Describa en que consiste los errores tipo I y tipo II.

c) Indique la estadística apropiada de esta prueba.

d) Calcule la probabilidad de cometer error tipo I.

e) Calcule la potencia de la prueba cuando la verdadera media sea 20.4

f) Si usted quiere que $\alpha = 0.05$ y $\beta = 0.10$, halle el tamaño de muestra requerido sabiendo que la verdadera media del proceso es 20.3.

Solución:

Según los datos proporcionados:

- Media poblacional bajo H_0: $\mu_0 = 20$
- Desviación estándar poblacional: $\sigma = 0.6$
- Tamaño de la muestra: $n = 36$
- Intervalo de control: $[19.85, 20.15]$

a) Las hipótesis son:

- La hipótesis nula es cuando el proceso está bajo control con media $\mu = 20$ onzas: $H_0 : \mu = 20$.
- La hipótesis alternativa es que el proceso está fuera de control (media diferente a 20 onzas $H_1 : \mu \neq 20$.

b) Se describen los errores tipo I y tipo II:

- **Error tipo I:** Rechazar H_0 cuando es verdadera. Es decir, el proceso está fuera de control cuando en realidad está funcionando correctamente (riesgo del productor).

- **Error tipo II:** No rechazar H_0 cuando es falsa. Es decir, no detectar que el proceso está fuera de control cuando la media real ha cambiado (riesgo del consumidor).

c) Dado que la desviación estándar poblacional es conocida ($\sigma = 0.6$) y el tamaño de muestra es $n = 36$, se utiliza el estadístico Z:

$$Z = \frac{\bar{X} - 20}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\bar{X} - 20}{0.6/6} = \frac{\bar{X} - 20}{0.1}$$

d) Dado H_0, $\bar{X} \sim N(20, 0.6/\sqrt{36}) = N(20, 0.1)$. Se rechaza H_0 si $\bar{X} < 19.85$ o $\bar{X} > 20.15$. Se calcula:

$$P(\text{Error tipo I}) = P\left(\bar{X} < 19.85\right) + P\left(\bar{X} > 20.15\right)$$

Estandarizando:

$$Z_{\text{inf}} = \frac{19.85 - 20}{0.1} = -1.5 \qquad Z_{\text{sup}} = \frac{20.15 - 20}{0.1} = 1.5$$

Usando tablas de la distribución normal estándar:

- $P(Z < -1.5) \approx 0.0668$
- $P(Z > 1.5) = 1 - P(Z < 1.5) \approx 1 - 0.9332 \approx 0.0668$

Por lo tanto:

$$\alpha = 0.0668 + 0.0668 = 0.1336$$

e) La potencia de la prueba es la probabilidad de rechazar H_0 cuando H_0 es falsa ($\mu = 20.4$). Asimismo, sigue una distribución normal, a través de $\bar{X} \sim N(20.4, 0.1)$.

La región de aceptación de H_0 es $[19.85, 20.15]$. Se calcula:

$$P\left(19.85 \leq \bar{X} \leq 20.15 \mid \mu = 20.4\right)$$

Estandarizando:

$$Z_{\text{inf}} = \frac{19.85 - 20.4}{0.1} = -5.5 \qquad Z_{\text{sup}} = \frac{20.15 - 20.4}{0.1} = -2.5$$

Usando la tabla de distribución normal obtenemos:

$$P\left(-5.5 \leq Z \leq -2.5\right) \approx P\left(Z \leq -2.5\right) - P\left(Z \leq -5.5\right) \approx 0.0062 - 0 = 0.0062$$

Así,

$$\beta = 0.0062 \quad \Rightarrow \quad \text{Potencia} = 1 - 0.0062 = 0.9938$$

f) Para determinar el tamaño de la muestra para $\alpha = 0.05$ y $\beta = 0.10$ con $\mu = 20.3$:

- Nivel de significancia $\alpha = 0.05$ (prueba bilateral).
- Potencia $1 - \beta = 0.90$ cuando $\mu = 20.3$.

Buscando los valores críticos en la tabla de distribución normal estandarizada:

- $z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96$
- $z_{1-\beta} = z_{0.90} = 1.28$

La fórmula para el tamaño muestral en un prueba bilateral es:

$$n = \left[\frac{(z_{\alpha/2} + z_{1-\beta}) \cdot \sigma}{\mu_1 - \mu_0}\right]^2$$

Reemplazando los datos:

$$n = \left[\frac{(1.96 + 1.28) \cdot 0.6}{20.3 - 20}\right]^2 = \left(\frac{3.24 \cdot 0.6}{0.3}\right)^2 = \left(\frac{1.944}{0.3}\right)^2 = (6.48)^2 \approx 42$$

Por lo tanto, se requiere una muestra de tamaño $n = 42$.