

Estadística Inferencial

Capítulo X - Ejercicio 32

Aaric Llerena Medina

Un informe médico indica que el 80 % de los adultos mayores de 50 años han sido intervenidos quirúrgicamente al menos una vez. Para realizar una prueba de hipótesis unilateral de este informe médico se toma una muestra aleatoria de 100 adultos mayores de 50 años. Si se utiliza como región de rechazo de la hipótesis nula el conjunto $\{X < 72\}$, en donde X es el número de personas que han sido intervenidos quirúrgicamente al menos una vez:

- a) Halle la probabilidad de error tipo I.
- b) Halle la probabilidad de error tipo II, si el porcentaje real es 0.65.

Solución:

Los datos del problema:

- **Proporción poblacional bajo la hipótesis nula (H_0):** $p_0 = 0.80$
- **Tamaño de la muestra:** $n = 100$
- **Región de rechazo:** $\{X < 72\}$, donde X es el número de personas que han sido intervenidas quirúrgicamente al menos una vez.

- a) El error tipo I ocurre cuando se rechaza la hipótesis nula siendo verdadera. En este caso, la región de rechazo es $\{X < 72\}$, por lo que la probabilidad de error tipo I es:

$$\alpha = P(X < 72 \mid p = 0.80)$$

Dado que $n = 100$ es grande, se aproxima la distribución binomial con distribución normal:

$$X \sim N\left(\mu = np_0 = 80, \sigma = \sqrt{np_0(1 - p_0)} = \sqrt{100 \times 0.80 \times 0.20} = 4\right)$$

Estandarizando el valor $X = 72$:

$$Z = \frac{72 - 80}{4} = -2$$

La probabilidad del error tipo I es:

$$\alpha = P(Z < -2) = \Phi(-2) \approx 0.0228$$

Por lo tanto, la probabilidad de error tipo I es aproximadamente 0.0228.

- b) El error tipo II ocurre cuando no se rechaza la hipótesis nula siendo falsa. Suponiendo que la proporción real es $p = 0.65$. La probabilidad de error tipo II es:

$$\beta = P(X \geq 72 \mid p = 0.65)$$

Nuevamente, se aproxima con una distribución normal:

$$X \sim N(\mu = np = 65, \sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{100 \times 0.65 \times 0.35} \approx 4.77)$$

Estandarizando el valor $X = 72$:

$$Z = \frac{72 - 65}{4.77} \approx 1.47$$

La probabilidad de error tipo II es:

$$\beta = P(Z \geq 1.47) = 1 - \Phi(1.47) \approx 1 - 0.9292 = 0.0708$$

Por lo tanto, la probabilidad de error tipo II es aproximadamente 0.0708.