Estadística Inferencial

Capítulo VIII - Ejercicio 29

Aaric Llerena Medina

Suponga que el 40% de los votos de los electores de una ciudad favorecen al candidato A.

- a) Si se selecciona una muestra aleatoria de 600 electores de la ciudad, ¿cuál es la probabilidad de que la proporción muestral de votos a favor de A esté entre 37 % y 45 %?
- b) ¿Qué tamaño de muestra se debería escoger si se quiere tener una probabilidad igual a 0.97 de que la proporción de votos a favor de A en la muestra no se diferencie de la proporción supuesta en más del 2%?

Solución:

- a) Ya que tenemos una muestra n=600 que se considera grande, por lo que podemos aproximar la distribución normal de la proporción \hat{p} con media y desviación estándar:
 - Media: $\mu_{\bar{p}} = p = 0.40$

■ Desviación estándar:
$$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = \sqrt{\frac{0.40 \times 0.60}{600}} = 0.020$$

Se desea calcular $P(0.37 \le \hat{p} \le 0.45)$, por lo que estandarizando se obtiene:

■ Para $\hat{p} = 0.37$:

• Para
$$\hat{p} = 0.45$$
:

$$Z = \frac{0.37 - 0.40}{0.020} = -1.5$$
 $Z = \frac{0.45 - 0.40}{0.020} = 2.5$

La probabilidad se expresa como:

$$P(0.37 < \hat{p} < 0.45) = P(-1.5 < Z < 2.5)$$

Usando la tabla de distribución normal:

■
$$P(Z \le -1.5) \approx 0.0668$$

$$P(Z \le 2.5) \approx 0.9938$$

Reemplazando los datos:

$$P(0.37 \le \hat{p} \le 0.45) = P(-1.5 \le Z \le 2.5)$$
$$= 0.9938 - 0.0668$$
$$= 0.9270$$

La probabilidad de que la proporción muestral esté entre $37\,\%$ y $45\,\%$ es 0.9270.

b) Para determinar el tamaño de la muestra (n) que tenga una probabilidad del 0.97 de que la proporción de votos a favor de A en la muestra no se diferencie de la proporción supuesta en más del 2%, es decir:

$$P(|\hat{p} - p| \le 0.02) = 0.97$$

Estandarizando:

$$P\left(\left|\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\right| \le \frac{0.02}{\sqrt{\frac{0.40 \times 0.60}{n}}}\right) = 0.97$$

Lo que implica:

$$P\left(|Z| \le \frac{0.02}{\sqrt{\frac{0.24}{n}}}\right) = 0.97$$

Esto significa que:

$$P\left(-\frac{0.02}{\sqrt{\frac{0.24}{n}}} \le Z \le \frac{0.02}{\sqrt{\frac{0.24}{n}}}\right) = 0.97$$

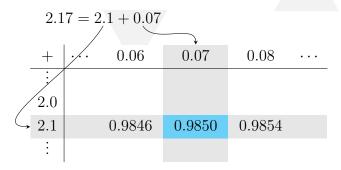
Continuando operando:

$$P\left(Z \le \frac{0.02}{\sqrt{\frac{0.24}{n}}}\right) - P\left(Z \le -\frac{0.02}{\sqrt{\frac{0.24}{n}}}\right) = 0.97$$

Dado que $P(Z \le -a) = 1 - P(Z \le a)$:

$$2P\left(Z \le \frac{0.02}{\sqrt{\frac{0.24}{n}}}\right) - 1 = 0.97 \Rightarrow P\left(Z \le \frac{0.02}{\sqrt{\frac{0.24}{n}}}\right) = 0.985$$

Buscando el valor en la tabla:



Por lo obtenido y reemplazando:

$$\frac{0.02}{\sqrt{\frac{0.24}{n}}} = 2.17 \Rightarrow n = \left(\frac{2.17 \times \sqrt{0.24}}{0.02}\right)^2 \approx 2,825.34$$

Por lo tanto, el valor de n es 2,826.