Estadística Inferencial

Capítulo VIII - Ejercicio 04

Aaric Llerena Medina

Una compañía agroindustrial ha logrado establecer el siguiente modelo de probabilidad discreta de los sueldos (X) en cientos de dólares de su personal:

x	1	2	3	4	5
$f(x) = P[X = x]$	0.1	0.2	0.4	0.2	0.1

si de esta población de sueldos se toman 30 sueldos al azar,

a) Halle la media y la varianza de la media muestral.

b) Calcule la probabilidad de que la media muestral esté entre 260 y 330 dólares.

Solución:

a) Realizando los cálculos para determinar la media y la varianza de la media muestral:

- **Media muestral:**

$$
\begin{aligned}
\mu &= \sum x \cdot f(x) \\
&= (1 \times 0.1) + (2 \times 0.2) + (3 \times 0.4) + (4 \times 0.2) + (5 \times 0.1) \\
&= 0.1 + 0.2 + 1.2 + 0.8 + 0.5 = 3
\end{aligned}
$$

- **Varianza muestral:**

$$
\begin{aligned}
\sigma^2 &= \frac{\sum (x-\mu)^2 \cdot f(x)}{n} \\
&= \frac{(1-3)^2 \times 0.1 + (2-3)^2 \times 0.2 + (3-3)^2 \times 0.4 + (4-3)^2 \times 0.2 + (5-3)^2 \times 0.1}{30} \\
&= \frac{0.4 + 0.2 + 0.0 + 0.2 + 0.4}{30} = \frac{1.2}{30} = 0.04
\end{aligned}
$$

b) Para calcular la probabilidad de que la media muestral esté entre 260 y 330 dólares, primero los convertimos a cientos de dólares, para estandarizar las unidades:

- 260 dólares = 2.6 cientos de dólares
- 330 dólares = 3.3 cientos de dólares

La distribución de $\bar{X}$ es aproximadamente normal con media 3 y varianza 0.04, es decir, $\bar{X} \sim N(3, 0.04)$.

Se debe calcular los valores estandarizados:

- Para $\bar{X} = 2.6$:
$$Z = \frac{2.6 - 3}{\sqrt{0.04}} = \frac{-0.4}{0.2} = -2$$
- Para $\bar{X} = 3.3$:
$$Z = \frac{3.3 - 3}{\sqrt{0.04}} = \frac{3}{0.2} = 1.5$$

Ahora, se calcula la probabilidad:

$$P\left(2.6 < X < 3.3\right) = P\left(-2 < Z < 1.5\right)$$

Usando la tabla de distribución normal:

- $P\left(Z < -2\right) \approx 0.0228$
- $P\left(Z < 1.5\right) \approx 0.9332$

**Nota: Se está trabajando con 4 decimales.*

Por lo tanto, la probabilidad es:

$$\begin{aligned} P\left(-2 < Z < 1.5\right) &= P\left(Z < 1.5\right) - P\left(Z < -2\right) \\ &= 0.9332 - 0.0228 \\ &= 0.9104 \end{aligned}$$

Finalmente, la probabilidad de que la media muestral esté entre 260 y 330 dólares es aproximadamente 0.9104.