Estadística Inferencial

Capítulo VIII - Ejercicio 27

Aaric Llerena Medina

La calificación en una prueba de aptitud es una variable aleatoria X que tiene distribución normal con media igual a 100.

a) Si se supone que la desviación estándar de todas las calificaciones es $\sigma = 15$, ¿cuántas calificaciones se deben escoger para que la media muestral esté en el intervalo de 90.2 a 109.8 con probabilidad 0.95.

b) Si se escogen al azar 16 calificaciones y se encuentra que la desviación estándar $\hat{s} = 12$, ¿cuál es la probabilidad de que la media muestral se encuentre entre 92.194 y 104.0232.

Solución:

a) Para determinar la cantidad de calificaciones (n) para que la media muestral esté en el intervalo $[90.2, 109.8]$ con probabilidad 0.95, se aplica la siguiente fórmula:

$$n = \left(\frac{Z \cdot \sigma}{E} \right)^2$$

y según los datos:

- **Media poblacional:** $\mu = 100$
- **Desviación estándar poblacional:** $\sigma = 15$
- **Intervalo de la media muestral:** $[90.2, 109.8]$
- **Margen de error:** $E = 109.8 - 100 = 9.8$
- **Nivel de confianza:** Para un 95 % corresponde a $Z = 1.96$

  **** Para calcular el valor de Z se busca el valor $z = 1 - \frac{0.95}{2} = 0.975$ el cual se busca en la tabla de normalidad, dando el valor de 1.96*

Reemplazando los valores:

$$n = \left(\frac{1.96 \cdot 15}{9.8} \right)^2 = \left(\frac{29.4}{9.8} \right)^2 = 3^2 = 9$$

Por lo tanto, se deben escoger 9 calificaciones.

b) Para calcular la probabilidad de que la media muestral esté en el intervalo $[92.194, 104.0232]$, se hace uso de la distribución T de Student en vez de la distribución Z ya que en este caso se desconoce la desviación estándar poblacional σ y se usa la desviación estándar muestral $\hat{s}$. Además, el tamaño de la muestra es $n = 16$, que es relativamente pequeño. Por lo tanto, es apropiado usar la distribución T de Student para calcular la probabilidad de que la media muestral esté en el intervalo $[92.194, 104.0232]$.

Según los datos del problema, se tiene:

- **Tamaño de la muestra:** $n = 16$
- **Desviación estándar muestral:** $\hat{s} = 12$
- **Intervalo de la media muestral:** $[92.194, 104.0232]$

La desviación estándar de la media muestral es:

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\hat{s}}{\sqrt{n}} = \frac{12}{\sqrt{16}} = \frac{12}{4} = 3$$

Se debe encontrar la probabilidad entre el intervalo $[92.194, 104.0232]$, es decir:

$$P\left(92.194 \leq \bar{X} \leq 104.0232\right)$$

Estandarizando los límites:

- Para $\bar{X} = 92.194$:

$$t = \frac{92.194 - 100}{3} = \frac{-7.8060}{3} = -2.60$$

- Para $\bar{X} = 104.0232$:

$$t = \frac{104.0232 - 100}{3} = \frac{4.0232}{3} = 1.34$$

Usando la tabla de la distribución t con 15 grados de libertad:

- $P\left(t \leq -2.60\right) = 1 - \left(t \leq 2.60\right) \approx 1 - 0.99 \approx 0.01$
- $P\left(t \leq 1.34\right) \approx 0.90$

Por lo tanto, la probabilidad es:

$$\begin{aligned} P\left(92.194 \leq \bar{X} \leq 104.0232\right) &= P\left(-2.60 \leq t \leq 1.34\right) \\ &= P\left(t \leq 1.34\right) - P\left(t \leq -2.60\right) \\ &= 0.90 - 0.01 \\ &= 0.89 \end{aligned}$$

La probabilidad de que la media muestral esté entre 92.194 y 104.0232 es aproximadamente 0.89.