

# Estadística Inferencial

## Capítulo VIII - Ejercicio 03

Aaric Llerena Medina

Si  $\bar{X}$  denota la media de la muestra aleatoria  $X_1, X_2, \dots, X_9$  de tamaño 9 escogida de la población ( $X$ ) normal  $N(6, 6^2)$ .

- a) Describa la distribución de la probabilidad de la variable aleatoria  $\bar{X}$ .
- b) Halle el percentil 80 de la distribución de  $\bar{X}$ .
- c) Si  $Y = 3X - 5$ , calcular  $P[\bar{Y} > 28]$ .

### **Solución:**

- a) Es de mencionar que la variable  $\bar{X}$  representa la media de una muestra aleatoria de tamaño 9, por ello, se calcula la media y varianza de la población:

- **Media de la población:**

$$\mu_{\bar{X}} = 6$$

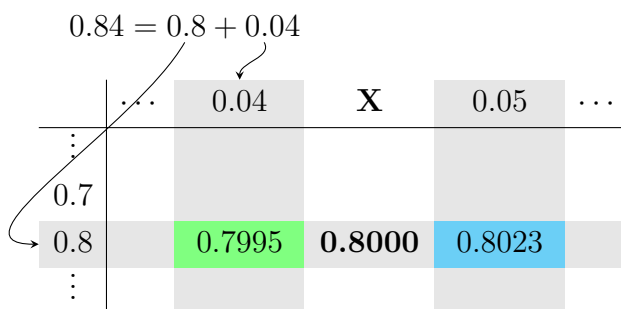
- **Varianza de la población:**

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{6^2}{9} = 4$$

Así, la distribución de  $\bar{X}$  es normal con media 6 y varianza 4, es decir,  $\bar{X} \sim N(6, 4)$ .

- b) Para hallar el percentil 80 de la distribución de  $\bar{X}$ , se necesita encontrar el valor  $z$  tal que  $P(Z < z) = 0.80$  en la distribución normal estándar. Usando la tabla de distribución normal se obtiene:

- **1. Buscando los resultados más cercanos a 0.80 en la tabla:**



*\*Nota: Se está trabajando con 4 decimales.*

- 2. Como no se tiene un valor para 0.80, se debe interpolar con los valores cercanos:

0.84	Z	0.85
0.7995	0.80	0.8023

Resolviendo:

$$\frac{Z - 0.84}{0.80 - 0.7995} = \frac{0.85 - Z}{0.8023 - 0.80}$$

$$\frac{Z - 0.84}{0.0005} = \frac{0.85 - Z}{0.0023}$$

$$0.0023Z - 0.0023 \cdot 0.84 = 0.85 \cdot 0.0005 - 0.0005Z$$

$$(0.0023 + 0.0005) Z = 0.85 \cdot 0.0005 + 0.0023 \cdot 0.84$$

$$Z = \frac{0.85 \cdot 0.0005 + 0.0023 \cdot 0.84}{0.0023 + 0.0005}$$

$$Z \approx 0.8418$$

Ahora, convertir el valor  $z$  a un valor de  $\bar{X}$  y usar la fórmula de estandarización y despejando:

$$z = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\sqrt{\sigma_{\bar{X}}^2}} \Rightarrow z \cdot \sigma_{\bar{X}} = \bar{X} - \mu_{\bar{X}} \Rightarrow \bar{X} = z \cdot \sigma_{\bar{X}} + \mu_{\bar{X}} \Rightarrow \bar{X} = 0.8418 \cdot 2 + 6 \Rightarrow \bar{X} = 7.6836$$

Por lo tanto, el percentil 80 de la distribución de  $\bar{X}$  es aproximadamente 7.6836.

c) Ahora, considerar la variable  $Y = 3X - 5$ , y calculando los estadísticos:

- **Media de  $Y$ :**  $\mu_Y = 3\mu_X - 5 = 3 \cdot 6 - 5 = 18 - 5 = 13$ .

- **Varianza de  $Y$ :**  $\sigma_Y^2 = 3^2 \cdot \sigma_X^2 = 9 \cdot 36 = 324$ .

Asimismo, la media de la muestra  $\bar{Y}$  de tamaño 9 es:

- **La media de  $\bar{Y}$ :**  $\mu_{\bar{Y}} = \mu_Y = 13$ .

- **La varianza de  $\bar{Y}$ :**  $\sigma_{\bar{Y}}^2 = \frac{\sigma_Y^2}{n} = \frac{324}{9} = 36$ .

Ahora, calculamos lo solicitado  $P(\bar{Y} > 28)$ :

$$P(\bar{Y} > 28) = P\left(\frac{Y - \mu_{\bar{Y}}}{\sigma_{\bar{Y}}} > \frac{28 - 13}{6}\right) = P(Z > 2.5) = 1 - P(Z < 2.5)$$

Usando la tabla de distribución normal estándar, se obtiene que  $P(Z < 2.5) \approx 0.9938$ , entonces:  $1 - P(Z < 2.5)$  es igual a  $1 - 0.9938 = 0.0062$ .

Por lo tanto, la probabilidad de que  $\bar{Y} > 28$  es aproximadamente 0.0062.