Estadística Inferencial

Capítulo X - Ejercicio 28

Aaric Llerena Medina

Un informe estadístico indica que el 13 % de los conductores de fin de semana conducen bajo los efectos del alcohol. Sin embargo el último fin de semana fueron intervenidos aleatoriamente 500 conductores encontrándose que 80 de ellos estaban bajo los efectos del alcohol. Se quiere comprobar el informe estadístico mediante una prueba de hipótesis bilateral.

a) Plantee las hipótesis de la prueba.

b) En el nivel de significación $\alpha = 0.03$, determine la región de rechazo de la hipótesis nula.

c) Con la regla de decisión que resulta de b), ¿cuál es su decisión con respecto a este informe estadístico?

d) Halle la probabilidad P de la prueba.

Solución:

a) Definiendo las hipótesis:

$$H_0 : p = 0.13 \quad \text{contra} \quad H_1 : p \neq 0.13$$

donde p es la proporción de conductores que conducen bajo los efectos del alcohol.

b) Para un nivel de significación $\alpha = 0.03$, la región de rechaza se determina utilizando la distribución normal estándar. Se tiene los datos: $\hat{p} = \dfrac{80}{500} = 0.16$ siendo la proporción muestral, $p_0 = 0.13$ es la proporción bajo la hipótesis nula, y $n = 500$ es el tamaño de la muestra. Por ello, el estadístico de prueba para una proporción es:

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{0.16 - 0.13}{\sqrt{\dfrac{0.13 \times 0.87}{500}}} = \frac{0.03}{\sqrt{\dfrac{0.1131}{500}}} = \frac{0.03}{0.0150} \approx 2$$

Por lo tanto, para una prueba bilateral con $\alpha = 0.03$, los valores críticos son $Z_{1-\alpha/2}$ y $Z_{\alpha/2}$. Utilizando la tabla de distribución normal estándar, $Z_{0.015} \approx 2.17$. Por lo tanto, la región de rechazo es:

$$Z < -2.17 \quad \text{o} \quad Z > 2.17$$

c) Dado que $Z_{\text{calc}} = 2$ no está en la región de rechazo, no se rechaza la hipótesis nula. Por lo tanto, no hay suficiente evidencia para concluir que la proporción de conductores bajo los efectos del alcohol sea diferente del 13 % al nivel de significación de 0.03.

d) La probabilidad P de la prubea es el valor-p, que es la probabilidad de obtener un valor Z más extremos que el calculado bajo la hipótesis nula. Para una prueba bilateral, el valor-p se calcula como:

$$\text{Valor-}p = 2 \times P(Z > |Z_{\text{calc}}|)$$

Dado que $Z_{\text{calc}} = 2$, el valor-p es:

$$\text{Valor-}p = 2 \times P(Z > 2) = 2 \times [1 - P(Z < 2)] = 2 \times (1 - 0.9772) \approx 0.0456$$

Por lo tanto, el valor-p es aproximadamente 0.0456.