Estadística Inferencial

Capítulo VIII - Ejercicio 46

Aaric Llerena Medina

Dos muestras aleatorias independientes de tamaños 7 y 13 respectivamente se toman de una misma población que está normalmente distribuida, ¿cuál es la probabilidad de que la varianza de la primera muestra sea mayor o igual al triple de la varianza de la segunda muestra?

Solución:

Dado que las muestras provienen de la misma población normal, las varianzas muestrales siguen distribuciones chi-cuadrado escaladas:

$$\frac{(n_1-1)\hat{S}_1^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n_1-1) \quad \text{y} \quad \frac{(n_2-1)\hat{S}_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n_2-1)$$

Como se pide que la varianza de la primera muestra sea mayor o igual al triple de la varianza de la segunda, se busca calcular:

$$P\left(\hat{S}_1^2 \geq 3\hat{S}_2^2\right)$$

Dividiendo ambos lados por $\hat{S}_2^2$, se obtiene:

$$P\left(\frac{\hat{S}_1^2}{\hat{S}_2^2} \geq 3\right)$$

La razón $\frac{\hat{S}_1^2}{\hat{S}_2^2}$ sigue una distribución F de Fisher con $n_1 - 1 = 6$ grados de libertad en el numerador y $n_2 - 1 = 12$ grados de libertad en el denominador:

$$\frac{\hat{S}_1^2}{\hat{S}_2^2} \sim F_{6,12}$$

Se busca calcular:

$$P\left(F_{6,12} \geq 3\right) = 1 - P\left(F_{6,12} \leq 3\right)$$

Usando la tabla de la distribución $F_{6,12}$, encontramos que:

$$\begin{aligned} P\left(F_{6,12} \geq 3\right) &= 1 - P\left(F_{6,12} \leq 3\right) \\ &\approx 1 - 0.9502 \\ &\approx 0.0498 \end{aligned}$$

La probabilidad de que la varianza de la primera muestra sea mayor o igual al triple de la varianza de la segunda muestra es aproximadamente 0.05.