Estadística Inferencial

Capítulo VIII - Ejercicio 03

Aaric Llerena Medina

Si $\bar{X}$ denota la media de la muestra aleatoria $X_1, X_2, \ldots, X_9$ de tamaño 9 escogida de la población (X) normal $N(6, 6^2)$.

a) Describa la distribución de la probabilidad de la variable aleatoria $\bar{X}$.

b) Halle el percentil 80 de la distribución de $\bar{X}$.

c) Si $Y = 3X - 5$, calcular $P\left[\bar{Y} > 28\right]$.

Solución:

a) Es de mencionar que la variable $\bar{X}$ representa la media de una muestra aleatoria de tamaño 9, por ello, se calcula la media y varianza de la población:

- **Media de la población:**

$$\mu_{\bar{X}} = 6$$

- **Varianza de la población:**

$$\sigma^2_{\bar{X}} = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{6^2}{9} = 4$$

Así, la distribución de $\bar{X}$ es normal con media 6 y varianza 4, es decir, $\bar{X} \sim N(6, 4)$.

b) Para hallar el percentil 80 de la distribución de $\bar{X}$, se necesita encontrar el valor z tal que $P(Z < z) = 0.80$ en la distribución normal estándar. Usando la tabla de distribución normal se obtiene:

- **1. Buscando los resultados más cercanos a 0.80 en la tabla:**

$$0.84 = 0.8 + 0.04$$

	$\cdots$	0.04	**X**	0.05	$\cdots$
$\vdots$					
0.7					
0.8		0.7995	**0.8000**	0.8023	
$\vdots$					

**Nota: Se está trabajando con 4 decimales.*

- **2. Como no se tiene un valor para 0.80, se debe interpolar con los valores cercanos:**

0.84	Z	0.85
0.7995	0.80	0.8023

Resolviendo:

$$\frac{Z - 0.84}{0.80 - 0.7995} = \frac{0.85 - Z}{0.8023 - 0.80}$$
$$\frac{Z - 0.84}{0.0005} = \frac{0.85 - Z}{0.0023}$$
$$0.0023Z - 0.0023 \cdot 0.84 = 0.85 \cdot 0.0005 - 0.0005Z$$
$$(0.0023 + 0.0005)\,Z = 0.85 \cdot 0.0005 + 0.0023 \cdot 0.84$$
$$Z = \frac{0.85 \cdot 0.0005 + 0.0023 \cdot 0.84}{0.0023 + 0.0005}$$
$$Z \approx 0.8418$$

Ahora, convertir el valor z a un valor de $\bar{X}$ y usar la fórmula de estandarización y despejando:

$$z = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\sqrt{\sigma^2_{\bar{X}}}} \Rightarrow z \cdot \sigma_{\bar{X}} = \bar{X} - \mu_{\bar{X}} \Rightarrow \bar{X} = z \cdot \sigma_{\bar{X}} + \mu_{\bar{X}} \Rightarrow \bar{X} = 0.8418 \cdot 2 + 6 \Rightarrow \bar{X} = 7.6836$$

Por lo tanto, el percentil 80 de la distribución de $\bar{X}$ es aproximadamente 7.6836.

c) Ahora, considerar la variable $Y = 3X - 5$, y calculando los estadísticos:

- **Media de Y:** $\mu_Y = 3\mu_X - 5 = 3 \cdot 6 - 5 = 18 - 5 = 13$.
- **Varianza de Y:** $\sigma^2_Y = 3^2 \cdot \sigma^2_X = 9 \cdot 36 = 324$.

Asimismo, la media de la muestra $\bar{Y}$ de tamaño 9 es:

- **La media de $\bar{Y}$:** $\mu_{\bar{Y}} = \mu_Y = 13$.
- **La varianza de $\bar{Y}$:** $\sigma^2_{\bar{X}} = \dfrac{\sigma^2_Y}{n} = \dfrac{324}{9} = 36$.

Ahora, calculamos lo solicitado $P\left(\bar{Y} > 28\right)$:

$$P\left(\bar{Y} > 28\right) = P\left(\frac{Y - \mu_{\bar{Y}}}{\sigma_{\bar{Y}}} > \frac{28 - 13}{6}\right) = P\,(Z > 2.5) = 1 - P\,(Z < 2.5)$$

Usando la tabla de distribución normal estándar, se obtiene que $P\,(Z < 2.5) \approx 0.9938$, entonces: $1 - P\,(Z < 2.5)$ es igual a $1 - 0.9938 = 0.0062$.

Por lo tanto, la probabilidad de que $\bar{Y} > 28$ es aproximadamente 0.0062.