Estadística Inferencial

Capítulo VIII - Ejercicio 45

Aaric Llerena Medina

Dos muestras aleatorias independientes de tamaños 21 y 9 respectivamente se toman de una misma población que está normalmente distribuida, ¿cuál es la probabilidad de que la varianza de la primera muestra sea al menos el cuádruple de la varianza de la segunda?

Solución:

Dada que se tiene dos muestras aleatorias independientes de tamaño $n_1 = 21$ y $n_2 = 9$, respectivamente de una misma población que sigue una distribución normal $N(\mu, \sigma^2)$, se debe calcular la probabilidad de que la varianza de la primera muestra sea al menos el cuádruple de la varianza de la segunda, es decir, $P(S_1^2 \geq 4S_2^2)$.

Como se está comparando varianzas de dos muestras, se debe utilizar la distribución F de Fisher. Se sabe que:

$$\frac{(n_1 - 1) S_1^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n_1 - 1} \qquad \frac{(n_2 - 1) S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n_2 - 1}$$

Donde S_1^2 y S_2^2 son las varianzas muestrales de las dos muestras, asimismo, $\chi^2_{n_1-1}$ y $\chi^2_{n_2-1}$ son distribuciones chi-cuadrado con $n_1 - 1$ y $n_2 - 1$ grados de libertad. Por ello, la distribución F se expresa como:

$$F = \frac{S_1^2/\sigma^2}{S_2^2/\sigma^2} = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F_{n_1-1, n_2-1}$$

Como se debe calcular $P(S_1^2 \geq 4S_2^2)$, esto es, $P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} \geq 4\right)$ y como $\frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F_{20,8}$, esto se puede expresar la probabilidad como:

$$P(F_{20,8} \geq 4) \approx 0.025$$

Por lo tanto, la probabilidad de que la varianza de la primera muestra sea al menos el cuádruple de la varianza de la segunda es aproximadamente 0.025.