# Estadística Inferencial

## Capítulo VIII - Ejercicio 53

Aaric Llerena Medina

---

Para comparar los salarios que se pagan a los empleados en dos grandes empresas $E1$ y $E2$ se escogen dos muestras aleatorias independientes de tamaños $n_1 = 16$ y $n_2 = 13$ respectivamente de $E_1$ y $E_2$ resultando las desviaciones estándares respectivas $\hat{s}_1 = \$120$ y $\hat{s}_2 = \$55$. Si la diferencia entre las medias muestrales no es mayor que \$65, se acepta que $\mu_1 = \mu_2$. En caso contrario, se acepta que $\mu_1 \neq \mu_2$. ¿Cuál es la probabilidad de aceptar que $\mu_1 \neq \mu_2$ cuando realmente $\mu_1 = \mu_2$? Se asume que los salarios en ambas empresas tienen una distribución normal con varianzas diferentes.

***Solución:***

Dado que las varianzas poblacionales son diferentes, se utiliza el procedimiento de comparación de medias para muestras independientes con varianzas desiguales. La varianza combinada (ponderada) se calcula como:

$$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)\hat{s}_1^2 + (n_2 - 1)\hat{s}_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

Sustituyendo los valores:

$$\begin{aligned} s_p^2 &= \frac{(16-1)(120^2) + (13-1)(55^2)}{16 + 13 - 2} \\ &= \frac{15(14,400) + 12(3,025)}{27} \\ &= \frac{252,300}{27} \approx 9,344.44. \end{aligned}$$

La desviación estándar combinada es:

$$s_p = \sqrt{s_p^2} \approx \sqrt{9,344.44} \approx 96.67$$

La desviación estándar de la diferencia entre las medias muestrales es:

$$\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{s_p^2 \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}$$

Sustituyendo los valores:

$$\begin{aligned} \sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} &= \sqrt{9,344.44 \left( \frac{1}{16} + \frac{1}{13} \right)} \\ &= \sqrt{9,344.44\,(0.0625 + 0.0769)} \\ &\approx \sqrt{1,303.89} \approx 36.09 \end{aligned}$$

El estadístico de prueba para evaluar si $\mu_1 = \mu_2$ es:

$$Z = \frac{\text{diferencia observada} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}}$$

Para la diferencia dada (\$65), bajo la hipótesis nula ($H_0 : \mu_1 = \mu_2$), el estadístico es:

$$Z = \frac{65}{36.09} \approx 1.80$$

Por lo tanto:

$$P\left(|\mu_1 - \mu_2| > 65\right) = P\left(Z > 1.80\right) + P\left(Z < -1.80\right)$$

Usando la tabla de la distribución normal estándar:

- $P(Z > 1.80) \approx 1 - 0.9641 = 0.0359$.
- $P(Z < -1.80) \approx 0.0359$.

Sumando ambas probabilidades:

$$P\left(|\bar{X}_1 - \bar{X}_2| > 65\right) = 0.0359 + 0.0359 = 0.0718$$

Por lo tanto, la probabilidad de aceptar que $\mu_1 \neq \mu_2$ cuando realmente $\mu_1 = \mu_2$ es aproximadamente 0.0718.