Estadística Inferencial

Capítulo X - Ejercicio 05

Aaric Llerena Medina

Una firma va a comercializar un nuevo producto solo si hay prueba de que al menos el 20 % de todos los consumidores lo prefieren. Para probar esa hipótesis se va a seleccionar al azar 400 consumidores. Si se utiliza como región crítica $\{X < 60\}$ donde X es el número de consumidores en la muestra que prefieren el producto, calcule:

a) El nivel de significación.

b) La probabilidad de cometer error tipo II si realmente $p = 0.10$

Solución:

Sea p la proporción de consumidores que prefieren el producto. Bajo H_0, asumimos que $p = 0.20$. La variable aleatoria X, que representa el número de consumidores en la muestra que prefieren el producto, sigue una distribución binomial:

$$X \sim \text{Binomial}(n = 400, p)$$

Para facilitar los cálculos, se utiliza la aproximación normal para la distribución binomial, dado que n es grande y np y $n(1-p)$ son mayores que 5. Bajo esta aproximación:

$$X \sim N\left(\mu = np, \sigma^2 = np(1-p)\right)$$

Por lo tanto:

- **Media:** $\mu = 400 \cdot 0.20 = 80$.
- **Desviación estándar:** $\sigma = \sqrt{400 \cdot 0.20 \cdot 0.80} = \sqrt{64} = 8$.

La variable estandarizada es:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

a) El nivel de significación α es la probabilidad de rechazar H_0 cuando es verdadera. Esto ocurre si $X < 60$. Se calcula el valor estandarizado correspondiente a $X = 60$ bajo H_0:

$$Z = \frac{60 - 80}{8} = \frac{-20}{8} = -2.5$$

Buscando en la tabla de la distribución normal estándar se obtiene:

$$P(Z < -2.5) = 0.0062$$

Por lo tanto, el nivel de significación es 0.0062.

b) El error tipo II ocurre cuando no se rechaza H_0 siendo falsa. Esto sucede si $X \geq 60$, cuando realmente $p = 0.10$. Bajo esta hipótesis alternativa ($p = 0.10$), los parámetros de la distribución normal aproximada son:

- **Media:** $\mu = np = 400 \times 0.10 = 40$.
- **Varianza:** $\sigma^2 = np(1-p) = 400 \times 0.10 \times 0.90 = 36$.
- **Desviación estándar:** $\sigma = \sqrt{36} = 6$.

La probabilidad de no rechazar H_0 es:

$$\beta = P(X \geq 60 \mid p = 0.10)$$

Estandarizando:

$$Z = \frac{60 - 40}{6} = \frac{20}{6} \approx 3.33$$

Usando la tabla de la distribución normal estándar:

$$P(Z \geq 3.33) = 1 - P(Z \leq 3.33) \approx 1 - 0.9996 = 0.0004$$

Por lo tanto, la probabilidad de error tipo II es $\beta \approx 0.0004$.