Estadística Inferencial

Capítulo X - Ejercicio 06

Aaric Llerena Medina

Una familia cosiste de 10 personas en las que k de ellas sufren alguna enfermedad y el resto son sanas. Para realizar la prueba de $H_0 : k = 4$ contra $H_1 : k < 4$, se seleccionan de esa familia 3 personas al azar. Si dos de las tres sufren alguna enfermedad se rechaza H_0, en caso contrario se acepta H_0.

a) Halle la probabilidad de error tipo I.

b) Halle la probabilidad de error tipo II si $k = 3$.

Solución:

Una familia de 10 personas tiene k miembros enfermos. Se realiza la prueba de hipótesis:

$$H_0 : k = 4 \quad \text{vs} \quad H_1 : k < 4$$

se seleccionan al azar 3 personas de esa familia. Si dos de las tres seleccionadas sufren alguna enfermedad, se rechaza H_0. En caso contrario, se acepta H_0.

a) El error tipo I ocurre cuando se rechaza H_0 siendo verdadera ($k = 4$). Bajo H_0, la distribución del número de enfermos en la muestra sigue una distribución hipergeométrica con:

- Población total: $N = 10$.
- Número de enfermos: $K = 4$.
- Tamaño de la muestra: $n = 3$.

La probabilidad de rechazar H_0 (error tipo I) es:

$$\alpha = P(\text{Rechazar } H_0 \mid k = 4) = P(X \geq 2 \mid k = 4)$$

donde X es el número de enfermos en la muestra. Calculamos las probabilidades hipergeométricas:

- Para $X = 2$:

$$P(X = 2) = \frac{\binom{4}{2}\binom{6}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{6 \times 6}{120} = \frac{36}{120} = 0.3$$

- Para $X = 3$:

$$P(X=3) = \frac{\binom{4}{3}\binom{6}{0}}{\binom{10}{3}} = \frac{4 \times 1}{120} = \frac{4}{120} \approx 0.03$$

Sumando ambas probabilidades:

$$\alpha = 0.3 + 0.03 = 0.33$$

Por lo tanto, la probabilidad de error tipo I es $\alpha \approx 0.33$.

b) El error tipo II ocurre cuando se acepta H_0 siendo falsa ($k = 3$). Cuando $H_1 : k = 3$, la probabilidad de aceptar H_0 es:

$$\beta = P(\text{Aceptar } H_0 \mid k = 3) = P(X \leq 1 \mid k = 3)$$

Calculando las probabilidades hipergeométricas:

- Para $X = 0$:

$$P(X=0) = \frac{\binom{3}{0}\binom{7}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{1 \times 35}{120} = \frac{35}{120} \approx 0.2917$$

- Para $X = 1$:

$$P(X=1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{7}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{3 \times 21}{120} = \frac{63}{120} = 0.525$$

Sumando ambas probabilidades:

$$\beta = 0.2917 + 0.525 = 0.8167$$

Por lo tanto, la probabilidad de error tipo II es $\beta \approx 0.8167$.