Estadística Inferencial

Capítulo VIII - Ejercicio 17

Aaric Llerena Medina

Una empresa vende bloques de mármol cuyo peso se distribuye normalmente con una media de 200 kilogramos.

a) Calcule la varianza del peso de los bloques, si la probabilidad de que el peso esté entre 165 Kg. y 235 Kg. es 0.9876?

b) ¿Qué tan grande debe ser la muestra para que haya una probabilidad de 0.9938 de que el peso medio de la muestra sea inferior a 205 Kg?

Solución:

a) Como el peso de los bloques de mármol sigue una distribución normal, entonces, $N\left(200, \sigma^2\right)$ y como la probabilidad que esté entre 165 y 235 kilogramos es 0.9876, es igual a:

$$P\left(165 \leq X \leq 235\right) = 0.9876$$

$$P\left(\frac{165 - 200}{\sigma} \leq Z \leq \frac{235 - 200}{\sigma}\right) = 0.9876$$

$$P\left(\frac{-35}{\sigma} \leq Z \leq \frac{35}{\sigma}\right) = 0.9876$$

Haciendo uso la simetría de la distribución normal, esto implica:

$$P\left(Z \leq \frac{35}{\sigma}\right) - P\left(Z \leq \frac{-35}{\sigma}\right) = 0.9876$$

Dado que $P\left(Z \leq -a\right) = 1 - P\left(Z \leq a\right)$, resulta:

$$2P\left(Z \leq \frac{35}{\sigma}\right) - 1 = 0.9876$$

$$P\left(Z \leq \frac{35}{\sigma}\right) = 0.9938$$

Buscando el valor en la tabla:

$$2.50 = 2.5 + 0.00$$

+	0.00	0.01	0.02	⋯
⋮				
2.4				
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	
⋮				

Por lo obtenido y reemplazando:

$$\frac{35}{\sigma} = 2.5 \Rightarrow \sigma = \frac{35}{2.5} = 14 \Longleftrightarrow \sigma^2 = 196$$

Por lo tanto, la varianza (σ^2) es 196.

b) Como se debe encontrar el tamaño de la muestra n tal que $P\left(\bar{X} < 205\right) = 0.9938$ además, recordar que la media muestral $\bar{X}$ sigue una distribución normal $N\left(200, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$. Por lo que:

$$P\left(Z < \frac{205 - 200}{\dfrac{14}{\sqrt{n}}}\right) = 0.9938$$

$$P\left(Z < \frac{5\sqrt{n}}{14}\right) = 0.9938$$

Se debe buscar el valor en la tabla, pero este ya fue calculado $P\left(Z < 2.50\right) = 0.9938$, entonces:

$$\frac{5\sqrt{n}}{14} = 2.5 \Rightarrow n = \left(\frac{2.5 \times 14}{5}\right)^2 \Rightarrow n = 49$$

Por lo tanto, el tamaño de la muestra debe ser 49 para que la probabilidad de que la media muestral sea inferior a 250 Kg sea 0.9938.