Estadística Inferencial

Capítulo X - Ejercicio 40

Aaric Llerena Medina

El jefe de control de la firma de confecciones “INDIO” afirma que sólo el 1 % de las prendas producidas por ellos no satisface el control de calidad. Se desea comprobar esta hipótesis contra la alternativa que supone es un 3 % el porcentaje de prendas que no pasan el control de calidad. Si se quiere correr un riesgo de no más de 5 casos de 100 de rechazar la afirmación del jefe de control si es realmente verdadera y de correr un riesgo de no más de 1 caso de 100 de aceptar la afirmación del jefe de control cuando la alternativa es realmente cierta, ¿cuál debe ser el tamaño de la muestra a seleccionar y cuál la región crítica o de rechazo de la afirmación del jefe de planta?

Solución:

Definiendo la hipótesis:

$$H_0 : p = 0.01 \quad \rightsquigarrow \quad \text{(Solo el 1 \% de las prendas no satisface el control de calidad)}$$

$$H_1 : p = 0.03 \quad \rightsquigarrow \quad \text{(El 3 \% de las prendas no satisface el control de calidad)}$$

Para determinar el tamaño de la muestra, se utiliza el enfoque de prueba de hipótesis para proporciones y como se quiere minimizar el riesgo de cometer el error de tipo I (rechazar H_0 cuando es verdadera) y un error de tipo II (aceptar H_0 cuando es falsa).

Dado que el riesgo de cometer un error de tipo I es $\alpha = 0.05$ y el riesgo de cometer un error de tipo II es $\beta = 0.01$, se utiliza la fórmula para el tamaño de muestra en pruebas de hipótesis para proporciones:

$$n = \left(\frac{Z_\alpha \sqrt{p_0(1-p_0)} + Z_\beta \sqrt{p_1(1-p_1)}}{p_1 - p_0} \right)^2$$

Donde:

- Z_α: es el valor crítico de la distribución normal estándar para $\alpha = 0.05$, que es aproximadamente 1.645.
- Z_β: es el valor crítico de la distribución normal estándar para $\beta = 0.01$, que es aproximadamente 2.326.

- $p_0 = 0.01$ es la proporción bajo la hipótesis nula.
- $p_1 = 0.03$ es la proporción bajo la hipótesis alternativa.

Reemplazando el valor:

$$
\begin{aligned}
n &= \left(\frac{1.645 \times \sqrt{0.01 \times 0.99} + 2.326 \times \sqrt{0.03 \times 0.97}}{0.03 - 0.01}\right)^2 \\
&= \left(\frac{1.645 \times 0.0995 + 2.326 \times 0.1706}{0.02}\right)^2 \\
&= \left(\frac{0.1637 + 0.3968}{0.02}\right)^2 \\
&= \left(\frac{0.5605}{0.02}\right)^2 \\
&= (28.025)^2 \\
n &\approx 785.4
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, el tamaño de muestra requerido es aproximadamente 786.

Asimismo, la región crítica para una prueba de hipótesis sobre una proporción se define como:

$$\text{Rechazar } H_0 \text{ si } \hat{p} > p_0 + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$$

Donde:

- $\hat{p}$ es la proporción muestral de prendas que no pasan el control de calidad.
- $p_0 = 0.01$
- $z_{\alpha/2} = 1.96$
- $n \approx 786$

Reemplazando los valores para calcular el valor crítico:

$$
\begin{aligned}
\text{Valor crítico} &= 0.01 + 1.96\sqrt{\frac{0.01 \times 0.99}{786}} \\
&= 0.01 + 1.96 \times 0.003549 \\
&\approx 0.01 + 0.00696 \\
&\approx 0.01696
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, la región crítica para rechazar la afirmación del jefe de control es si la proporción muestral de prendas que no pasan el control de calidad es mayor que 0.01696.