

Estadística Inferencial

Capítulo X - Ejercicio 31

Aaric Llerena Medina

Un legislador desea probar la hipótesis que más del 65 % de sus representados está a favor de cierta legislación laboral que se está presentando en el congreso, basándose en una muestra al azar de 400 ciudadanos. Si la probabilidad de error tipo I es $\alpha = 0.05$

- a) ¿Qué valor como mínimo debe tener la proporción de la muestra, para que a partir de ese valor, la decisión sea aceptar la hipótesis del legislador?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de tomar la decisión errada de rechazar la propuesta del legislador cuando en realidad el 70 % de los votantes acepta la legislación laboral?

Solución:

- a) Definiendo las hipótesis:

$$H_0 : p \leq 0.65 \quad \text{contra} \quad H_1 : p > 0.65$$

donde p es la proporción de ciudadanos a favor de la legislación.

Para un nivel de significación $\alpha = 0.05$, el valor crítico Z_α es aproximadamente 1.645.

Además, se calcula el estadístico de prueba para una proporción se calcula como:

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1 - p_0)}{n}}}$$

donde \hat{p} es la proporción muestral, $p_0 = 0.65$ es la proporción bajo la hipótesis nula, y $n = 400$ es el tamaño de la muestra.

Para encontrar el valor mínimo de \hat{p} que lleva a la aceptación de H_1 , igualamos el estadístico de prueba al valor crítico:

$$\frac{\hat{p} - 0.65}{\sqrt{\frac{0.65 \times 0.35}{400}}} = 1.645$$

Resolviendo para \hat{p} :

$$\hat{p} = 0.65 + 1.645 \times \sqrt{\frac{0.65 \times 0.35}{400}} \approx 0.689$$

Por lo tanto, el valor mínimo de la proporción muestral debe ser al menos 0.689 para que la decisión sea aceptar la hipótesis del legislador.

b) Como el verdadero porcentaje es $p = 0.70$, entonces el valor z que corresponde es:

$$z = \frac{\hat{p}_{\min} - 0.70}{\sqrt{\frac{0.70 \times 0.30}{400}}} \approx \frac{0.689 - 0.70}{0.02291} \approx -0.48$$

La probabilidad de obtener un resultado menos a \hat{p}_{\min} cuando $p = 0.70$ es:

$$P(\hat{p} < 0.68923) = \Phi(-0.48) \approx 0.3156$$

Por lo tanto, la probabilidad de cometer la decisión errada de rechazar la propuesta del legislador es aproximadamente 31.9%.

