Estadística Inferencial

Capítulo X - Ejercicio 23

Aaric Llerena Medina

Una máquina produce cierta parte componente cuya longitud debería ser 1.2 cm. promedio. Por un estudio anterior se sabe que la longitud de la componente se distribuye según la ley de probabilidad normal con desviación estándar de 0.5 cm. Existe la preocupación de que han cambiado los ajustes realizados a la máquina que las produce. Para salir de la preocupación se requiere diseñar una prueba de hipótesis con probabilidad de error tipo I igual a 0.0287.

a) Halle el tamaño de la muestra y la región crítica sabiendo que si la verdadera media es 1.6 cm, entonces, la probabilidad de error tipo II sería igual a 0.0179.

b) Si con el tamaño de la muestra hallado en a) resulta que $Z = -2$, halle la media de la muestra, ¿cuál sería su opinión al respecto?

Solución:

Se trata de una prueba bilateral, por lo que definimos la hipótesis nula y la hipótesis alternativa:

$$H_0 : \mu = 1.2 \quad \text{contra} \quad H_1 : \mu \neq 1.2$$

a) De los datos tenemos:

- Media bajo H_0: $\mu_0 = 1.2$ cm.
- Desviación estándar poblacional: $\sigma = 0.5$ cm.
- Probabilidad de error tipo I (α): 0.0287.
- Probabilidad de error tipo II (β) cuando $\mu = 1.6$ cm: 0.0179.

Para la prueba de dos colas, se usa las fórmulas relacionadas con los errores tipo I y tipo II:

$$\alpha = P(\text{ Rechazar } H_0 \mid H_0 \text{ es verdadera }) = 0.0287$$

$$\beta = P(\text{ No rechazar } H_0 \mid H_1 \text{ es verdadera }) = 0.0179$$

Asimismo, el valor Z de cada error es:

- **Error tipo I:** $Z_{1-\alpha/2} = Z_{0.9857} \approx 2.19$.
- **Error tipo II:** $Z_{1-\beta} = Z_{0.9821} \approx 2.10$.

La fórmula para el tamaño de la muestra es:

$$n = \left[\frac{\left(Z_{1-\alpha/2} + Z_{1-\beta}\right)\sigma}{\mu_1 - \mu_0}\right]^2 = \left[\frac{(2.19 + 2.10)\cdot 0.5}{1.6 - 1.2}\right]^2 = \left[\frac{2.145}{0.4}\right]^2 = (5.3625)^2 \approx 28.7564$$

Por ser n un número entero, se redondea al entero siguiente, por lo tanto, el tamaño de la muestra es 29.

Ahora, se determina la región crítica en términos de la media muestral partir de:

$$\bar{X} \leq \mu_0 - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{o} \quad \bar{X} \geq \mu_0 + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Con $n = 29$, $\sigma = 0.5$ y $z_{1-\alpha/2} \approx 2.19$, se tiene:

- **Límite inferior:** $L = 1.2 - 2.19\cdot\dfrac{0.5}{\sqrt{29}} = 0.9967$.
- **Límite superior:** $U = 1.2 + 2.19\cdot\dfrac{0.5}{\sqrt{29}} = 1.4033$.

Por lo tanto, la regla de decisión es rechazar H_0 si

$$\bar{X} < 0.9984 \quad \text{o} \quad \bar{X} > 1.4033$$

b) Dado que el tamaño de la muestra $n = 29$, se obtiene un valor del estadístico de prueba $Z = -2$, la media muestral se calcula como:

$$\bar{X} = \mu_0 + Z\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Sustituyendo los valores:

$$\bar{X} = 1.2 + (-2)\cdot\frac{0.5}{\sqrt{29}} = 1.0143$$

Por lo tanto, a media de la muestra es aproximadamente 1.0142 cm. No se rechaza la hipótesis nula al nivel de significación 0.0287.