Estadística Inferencial

Capítulo VIII - Ejercicio 41

Aaric Llerena Medina

Si X_1, X_2, \ldots, X_8 son ocho variables aleatorias independientes y distribuidas cada una normal N(10, 32), calcular la probabilidad de que la varianza muestral $S^2 = \sum (X_i - \bar{X})^2 / 8$ sea menor o igual que 56.28.

Solución:

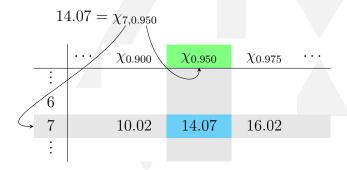
Dado que las variables X_1, X_2, \dots, X_8 son independientes y siguen una distribución normal N (10, 32), la varianza muestral S^2 sigue una distribución chi-cuadrado escalada. Es decir:

$$\frac{8 \cdot S^2}{\sigma^2} \sim \chi_7^2$$

donde $\sigma^2=32$ y n=8, ya que son 7 los grados de libertad, asimismo, $S^2=56.28$, por lo que reemplazando:

$$\frac{8 \times 56.28}{32} = \frac{450.24}{32} = 14.07$$

Por lo tanto, se debe encontrar el valor de $P(\chi_7^2 \le 14.07)$. Buscando el valor 14.07 en la tabla de la distribución chi-cuadrado con 7 grados de libertad:



Por tabla, se encuentra que:

$$P\left(\chi_7^2 \le 14.07\right) \approx 0.95$$

Por lo tanto, la probabilidad de que la varianza muestral S^2 sea menor o igual que 56.28 es aproximadamente 0.95.