Estadística Inferencial

Capítulo X - Ejercicio 17

Aaric Llerena Medina

El gerente de producción de la compañía de cerveza "DORADA" revisa su línea de producción. El llenado automático debe dar un contenido medio 320 cm^3. Una muestra aleatoria de 36 latas de cerveza de su producción ha dado un contenido medio de 317 cm^3 y una desviación estándar de 12 cm^3.

a) Determine la región de rechazo para una prueba unilateral en el nivel de significación 0.015. ¿Hay suficiente razón para creer que existe una baja en la media de los contenidos?

b) ¿Con qué probabilidad esta prueba no detecta una diferencia igual a 8 cm^3 en el promedio de los contenidos y por debajo de lo que indica la hipótesis nula?

Solución:

Se desea contrastar la siguiente hipótesis:

- $H_0 : \mu = 320$ el contenido medio es menor a 320 cm^3.
- $H_1 : \mu < 320$ el proceso cumple con lo establecido.

Para ello, se hará uso de la prueba unilateral (cola inferior) con nivel de significación $\alpha = 0.015$.

a) Dado que $n = 36$, el error estándar de la media es:

$$SE = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{12}{6} = 2$$

El estadístico de prueba (usando la distribución t con $n - 1 = 35$ grados de libertad) es:

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{SE} = \frac{\bar{X} - 320}{2}$$

Para un nivel de significación $\alpha = 0.015$ en una prueba unilateral (cola inferior), se rechaza H_0 si $t < t_{\alpha,35}$. Buscando en la tabla de distribución t se tiene:

$$t_{0.015,35} \approx -2.17$$

La región de rechazo en términos de la media muestral se determina resolviendo:

$$\frac{\bar{X} - 320}{2} < -2.17 \Rightarrow \bar{X} < 320 - 2.17 \times 2 = 320 - 4.34 = 315.66$$

Por tanto, la región de rechazo es:

$$RC = \{\bar{X} < 315.66\}$$

Por lo tanto, dado que la media muestral observada es $\bar{X} = 317$ cm^3 y 317 no es menor que 315.66, no se rechaza H_0. Además, al nivel de significación de 0.015, no hay suficiente evidencia para concluir que el contenido medio es inferior a 320 cm^3.

b) Para calcular la probabilidad de error tipo II cuando la diferencia real es de 8cm^3 por debajo de la media indicada en H_0. Es decir, suponemos que la verdadera media es:

$$\mu = 320 - 8 = 312\text{cm}^3$$

En este caso, la distribución de la media muestral es:

$$\bar{X} \sim N\left(312, \left(\frac{12}{6}\right)^2\right) = N(312, 2^2)$$

La prueba no detecta la diferencia cuando $\bar{X}$ es mayor o igual que 315.66. Por ello, sea β la probabilidad de error tipo II:

$$\beta = P\left(\bar{X} \geq 315.66 \mid \mu = 312\right)$$

Estandarizamos:

$$Z = \frac{\bar{X} - 312}{2}$$

Entonces:

$$\beta = P\left(Z \geq \frac{315.66 - 312}{2}\right) = P\left(Z \geq \frac{3.66}{2}\right) = P\left(Z \geq 1.83\right)$$

Buscando en la tabla de la distribución normal estándar:

$$P(Z \geq 1.83) = 1 - P(Z \leq 1.83) \approx 1 - 0.9664 \approx 0.0336$$

Por lo tanto, la probabilidad de que la prueba no detecte (es decir, no rechace H_0) una diferencia real de 8 cm^3 por debajo de la media indicada es aproximadamente 3.36 %.