Estadística Inferencial

Capítulo VIII - Ejercicio 22

Aaric Llerena Medina

Una empresa comercializa fardos de algodón cuyo peso X se distribuye normalmente con una media de 250 Kg. y una desviación estándar de 4 kg. El costo por fardo está dado por: Y = aX + 52. Halle el valor de a, si se sabe que la media de los costos de 4 fardos escogidos al azar es siempre mayor que \$3,100 con probabilidad 0.0228.

Solución:

El peso X de un fardo de algodón se distribuye normalmente con una media de 250 Kg y una desviación estándar de 4 Kg. Por ello, la media muestral \bar{X} sigue una distribución normal:

- Media Muestral: $\mu_{\bar{X}} = \mu_X = 250$.
- Desviación Estándar muestral: $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{4}{\sqrt{4}} = \frac{4}{2} = 2$

La media muestral \bar{X} de una muestra de 4 fardos escogidos se distribuye como $X \sim N$ (250, 2²).

El costo de un fardo es Y = aX + 52. La media del costo de un fardo es:

$$\mu_Y = a\mu_x + 52 = a(250) + 52 = 250a + 52$$

La media de la media muestral del costo es:

$$\mu_{\bar{Y}} = a\mu_{\bar{X}} + 52 = a(250) + 52 = 250a + 52$$

La varianza de la media muestral del costo es:

$$\sigma_{\bar{Y}}^2 = a^2 \sigma_{\bar{X}}^2 = a^2 \times 4 = 4a^2$$

La desviación estándar de la media muestral del costo es:

$$\sigma_{\bar{Y}} = 2a$$

Entonces, la media muestral \bar{Y} sigue una distribución aproximadamente normal

$$\bar{Y} \sim N \left(250a + 52, 4a^2 \right)$$

Por lo tanto, se debe encontrar:

$$P(\bar{Y} > 3, 100) = 0.0228$$

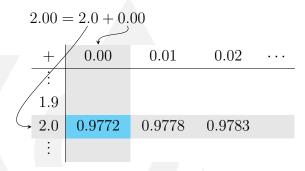
Estandarizando:

$$P\left(Z > \frac{3100 - (250a + 52)}{2a}\right) = 0.0228$$

Haciendo uso de las propiedades y usando la tabla de la distribución normal estándar:

$$P(Z > \alpha) = 1 - P(Z < \alpha)$$
$$0.0228 = 1 - P(Z < \alpha)$$
$$P(Z < \alpha) = 0.9772$$

Buscando el valor en la tabla:



Por lo obtenido y reemplazando:

$$\frac{3100 - (250a + 52)}{2a} \approx 2$$

Resolviendo la ecuación:

$$3100 - 250a - 52 = 4a$$
$$3,048 = 254a$$
$$a = \frac{3,048}{254}$$
$$a = 12$$

Por lo tanto, el valor de a es aproximadamente 12.