Estadística Inferencial

Capítulo VIII - Ejercicio 57

Aaric Llerena Medina

Cierta marca de cigarrillos es preferida por el 30 % de mujeres y el 25 % de hombres. En una encuesta hecha a 300 personas de cada sexo elegidas aleatoriamente, ¿cuál es la probabilidad de que la proporción muestral de mujeres que prefieren esa marca sea mayor a la de los hombres?

Solución:

Definimos las proporciones poblacionales:

- **Mujeres:** $p_M = 0.30$
- **Hombres:** $p_H = 0.25$

Los tamaños de las muestras son:

- $n_M = 300$ (mujeres)
- $n_H = 300$ (hombres)

Las proporciones muestrales $\hat{p}_M$ y $\hat{p}_H$ siguen distribuciones normales con medias y varianzas dadas por:

- **Mujeres:**

$$\mu_{\hat{p}_M} = p_M = 0.30$$
$$\sigma^2_{\hat{p}_M} = \frac{p_M(1-p_M)}{n_M} = \frac{0.30 \times 0.70}{300} = \frac{0.21}{300} = 0.0007$$
$$\sigma_{\hat{p}_M} = \sqrt{0.0007} \approx 0.02646$$

- **Hombres:**

$$\mu_{\hat{p}_H} = p_H = 0.25$$
$$\sigma^2_{\hat{p}_H} = \frac{p_H(1-p_H)}{n_H} = \frac{0.25 \times 0.75}{300} = \frac{0.1875}{300} = 0.000625$$
$$\sigma_{\hat{p}_H} = \sqrt{0.000625} \approx 0.025$$

Ahora, definimos $D = \hat{p}_M - \hat{p}_H$. La distribución de D es normal con:

$$\mu_D = \mu_{\hat{p}_M} - \mu_{\hat{p}_H} = 0.30 - 0.25 = 0.05$$
$$\sigma^2_D = \sigma^2_{\hat{p}_M} + \sigma^2_{\hat{p}_H} = 0.0007 + 0.000625 = 0.001325$$
$$\sigma_D = \sqrt{0.001325} \approx 0.0364$$

Queremos encontrar la probabilidad de que $D > 0$:

$$P(D > 0) = P\left(Z > \frac{0 - \mu_D}{\sigma_D}\right) = P\left(Z > \frac{-0.05}{\sqrt{0.001325}}\right) = P(Z > -1.37)$$

Usando la tabla de la distribución normal estándar:

$$P(Z > -1.37) = 1 - P(Z \leq -1.37) \approx 1 - 0.0853 = 0.9147$$

La probabilidad de que la proporción muestral de mujeres que prefieren la marca sea mayor que la de los hombres es 0.9147.