Estadística Inferencial

Capítulo VIII - Ejercicio 34

Aaric Llerena Medina

Un nuevo producto va a salir al mercado si por lo menos el $\bar{p}_0$ (100 %) de n personas encuestadas, aceptan el producto. Calcular los valores de n y $\bar{p}_0$ de manera que haya una probabilidad de 0.1112 de que el producto no saldrá al mercado cuando realmente el 58 % lo aceptan y una probabilidad de 0.0228 de que el producto saldrá al mercado cuando realmente el 50 % lo aceptan.

Solución:

Se desea determinar los valores de n (tamaño de la muestra) y $\bar{p}_0$ (proporción mínima de aceptación) de manera que las probabilidades:

- Que el producto no salga al mercado cuando realmente el 58 % lo acepta sea 0.1112.
- Que el producto salga al mercado cuando realmente el 50 % lo acepta sea 0.0228

a) **Caso 1: Probabilidad de que el producto no salga al mercado cuando** $p = 0.58$

Si el producto no sale al mercado, significa que la proporción muestral $\hat{p}$ es menor que $\bar{p}_0$. Por lo tanto:

$$P\left(\hat{p} < \bar{p}_0 \mid p = 0.58\right) = 0.1112$$

La proporción muestral $\hat{p}$ sigue una distribución aproximadamente normal con:

- **Media:** $\mu_{\hat{p}} = p = 0.58$.
- **Desviación estándar:** $\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}} = \sqrt{\dfrac{0.58 \times 0.42}{n}} = \sqrt{\dfrac{0.2436}{n}}$.

Estandarizando:

$$P\left(\hat{p} < \bar{p}_0\right) = P\left(Z < \frac{\bar{p}_0 - 0.58}{\sqrt{\dfrac{0.2436}{n}}}\right) = 0.1112$$

Usando la tabla de la distribución normal estándar, el valor Z que deja un área de 0.1112 a la izquierda es $Z \approx -1.22$. Por lo tanto:

$$\frac{\bar{p}_0 - 0.58}{\sqrt{\dfrac{0.2436}{n}}} = -1.22$$

Despejando $\bar{p}_0$:

$$\bar{p}_0 = 0.58 - 1.22 \cdot \sqrt{\frac{0.2436}{n}} \tag{*}$$

b) **Caso 2: Probabilidad de que el producto salga al mercado cuando** $p = 0.50$

Si el producto sale al mercado, significa que la proporción muestral $\hat{p}$ es mayor o igual que $\bar{p}_0$. Por lo tanto:

$$P\left(\hat{p} \geq \bar{p}_0 \mid p = 0.50\right) = 0.0228$$

La proporción muestral $\hat{p}$ sigue una distribución aproximadamente normal con:

- **Media:** $\mu_{\hat{p}} = p = 0.50$.
- **Desviación estándar:** $\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = \sqrt{\frac{0.50 \times 0.50}{n}} = \sqrt{\frac{0.25}{n}}$.

Estandarizando:

$$P\left(\hat{p} \geq \bar{p}_0\right) = P\left(Z \geq \frac{\bar{p}_0 - 0.50}{\sqrt{\frac{0.25}{n}}}\right) = 0.0228$$

Usando la tabla de la distribución normal estándar, el valor Z que deja un área de 0.0228 a la derecha es $Z \approx 2.0$. Por lo tanto:

$$\frac{\bar{p}_0 - 0.50}{\sqrt{\frac{0.25}{n}}} = 2.0$$

Despejando $\bar{p}_0$:

$$\bar{p}_0 = 0.50 + 2.0 \cdot \sqrt{\frac{0.25}{n}} \tag{**}$$

Resolviendo las ecuaciones, igualamos (*) y (**):

$$0.58 - 1.22 \cdot \sqrt{\frac{0.2436}{n}} = 0.50 + 2.0 \cdot \sqrt{\frac{0.25}{n}}$$

$$0.08 = 1.22 \cdot \sqrt{\frac{0.2436}{n}} + 2.0 \cdot \sqrt{\frac{0.25}{n}}$$

$$0.08 = \sqrt{\frac{1}{n}} \times \left(1.22 \cdot \sqrt{0.2436} + 2.0 \cdot \sqrt{0.25}\right)$$

$$\frac{0.08}{1.6021} = \sqrt{\frac{1}{n}}$$

$$n = \left(\frac{1.6021}{0.08}\right)^2 \approx 401.05$$

$\therefore$ El valor de n es 402 personas.

Para determinar el valor de $\bar{p}_0$ sustituimos $n = 402$ en la ecuación (*):

$$\begin{aligned}
\bar{p}_0 &= 0.50 + 2.0 \cdot \sqrt{\frac{0.25}{402}} \\
&\approx 0.50 + 2.0 \cdot \sqrt{0.000622} \\
&\approx 0.50 + 2.0 \cdot 0.0249 \\
&\approx 0.50 + 0.0498 \\
\bar{p}_0 &\approx 0.5498
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\bar{p}_0 \approx 0.55$ (es decir, $55\,\%$).