Estadística Inferencial

Capítulo VIII - Ejercicio 31

Aaric Llerena Medina

Un fabricante afirma que a lo más el 2 % de todas las piezas producidas son defectuosas. Al parecer esta información es exagerada, por lo que se selecciona una muestra aleatoria de 400 de tales piezas. Si la proporción muestral de defectuosos es mayor que 3 % se rechaza la afirmación, en caso contrario se acepta la afirmación.

a) ¿Cuál es la probabilidad de rechazar la afirmación cuando realmente el 2 % de todas las piezas producidas son defectuosas?

b) ¿Cuál es la probabilidad de aceptar la afirmación cuando realmente el 4 % de todas las piezas producidas son defectuosas?

Solución:

Se define la proporción muestral de defectuosos como $\hat{p}$. La regla de decisión es:

- Si $\hat{p} > 0.03$, se rechaza la afirmación.
- Si $\hat{p} \leq 0.03$, se acepta la afirmación.

a) Cuando la proporción verdadera de defectuosos es $p = 0.02$, la distribución de la proporción muestral $\hat{p}$ es aproximadamente normal con:

- **Media:** $\mu_{\hat{p}} = p = 0.02$.
- **Desviación estándar:** $\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}} = \sqrt{\dfrac{0.02 \times 0.98}{400}} = \sqrt{0.000049} = 0.007$.

Se busca calcular la probabilidad de que $\hat{p} > 0.03$. Estandarizando:

$$Z = \frac{\hat{p} - \mu_{\hat{p}}}{\sigma_{\hat{p}}} = \frac{0.03 - 0.02}{0.007} = \frac{0.01}{0.007} \approx 1.43$$

Por lo tanto,

$$P\left(\hat{p} > 0.03\right) = P\left(Z > 1.43\right)$$

Usando la tabla de la distribución normal estándar:

$$P\left(Z > 1.43\right) = 1 - P\left(Z \leq 1.43\right) \approx 1 - 0.9236 \approx 0.0764$$

Por lo tanto, la probabilidad de rechazar la afirmación cuando realmente el 2 % de las piezas son defectuosas es aproximadamente 0.0764.

b) Cuando la proporción verdadera de defectuosos es $p = 0.04$, la distribución de la proporción muestral $\hat{p}$ es aproximadamente normal con:

- **Media:** $\mu_{\hat{p}} = p = 0.04$.
- **Desviación estándar:** $\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = \sqrt{\frac{0.04 \times 0.96}{400}} = \sqrt{0.000096} = 0.0098$.

Se busca calcular la probabilidad de que $\hat{p} \leq 0.03$. Estandarizando:

$$Z = \frac{\hat{p} - \mu_{\hat{p}}}{\sigma_{\hat{p}}} = \frac{0.03 - 0.04}{0.0098} = \frac{-0.01}{0.0098} \approx -1.02$$

Por lo tanto:

$$P\left(\hat{p} \leq 0.03\right) = P\left(Z \leq -1.02\right)$$

Usando la tabla de la distribución normal estándar:

$$P\left(Z \leq -1.02\right) \approx 0.1539$$

Por lo tanto, la probabilidad de aceptar la afirmación cuando realmente el 4 % de las piezas son defectuosas es aproximadamente 0.1539.