

Estadística Inferencial

Capítulo X - Ejercicio 16

Aaric Llerena Medina

Un reporte estadístico, afirma que los fumadores adultos de cigarrillos en Lima consumen en promedio 10 cigarrillos por día. Un grupo de alumnos que hace un trabajo en estadística aplicada va a comprobar esta afirmación. Para esto ha escogido una muestra aleatoria de 36 fumadores adultos y se observó una media de 9 y una desviación estándar de 3 cigarrillos por día.

- a) En el nivel de significación de 0.05, ¿es posible concluir que el consumo promedio de cigarrillos ha bajado?
- b) Determine la potencia de esta prueba si el valor real de la media es 8 cigarrillos por día.

Solución:

Según los datos del problema:

- Media muestral: $\bar{X} = 9$.
- Tamaño de la muestra: $n = 36$.
- Desviación estándar muestral: $s = 3$.
- Nivel de significación: $\alpha = 0.05$.

Definiendo las hipótesis:

$$H_0 : \mu = 10 \quad \text{contra} \quad H_1 : \mu < 10$$

donde μ es el consumo promedio de cigarrillos por día.

- a) El estadístico de prueba para la media, asumiendo una distribución normal, se calcula como:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

donde $\mu_0 = 10$ es la media bajo la hipótesis nula. Sustituyendo los valores:

$$Z = \frac{9 - 10}{3/\sqrt{36}} = \frac{-1}{0.5} = -2$$

Para un nivel de significación $\alpha = 0.05$, el valor crítico Z_α buscando en tabla de distribución normal estándar es aproximadamente -1.645. Ahora, la regla de decisión es:

- Si $Z_{\text{calc}} < Z_\alpha$, se rechaza H_0 .
- Si $Z_{\text{calc}} \geq Z_\alpha$, no se rechaza H_0 .

En este caso, $Z_{\text{calc}} = -2 < -1.645$, por lo que se rechaza la hipótesis nula.

- b) La potencia de la prueba es la probabilidad de rechazar la hipótesis nula cuando la verdadera media es 8 cigarrillos por día. Primero se determina el valor crítico en términos de la media muestral:

$$\bar{x}_{\text{crit}} = 10 + z_{\alpha} \times \frac{3}{\sqrt{36}} = 10 - 1.645 \times 0.5 = 10 - 0.8225 = 9.1775$$

Con la verdadera media $\mu = 8$, la distribución de la media muestral es $N(8, 0.5)$. La potencia es:

$$\text{Potencia} = P(Z < 9.1775 \mid \mu = 8) = P(Z > 2)$$

Estandarizando:

$$z_{\text{real}} = \frac{9.1775 - 8}{0.5} \approx 2.36$$

Calculando la potencia:

$$\text{Potencia} = \Phi(2.36) \approx 0.9909$$

Por lo tanto, esto indica que si la verdadera media es 8 cigarrillos por día, la prueba tiene aproximadamente un 99 % de probabilidad de detectar la disminución.

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{9 - 8}{3/\sqrt{36}} = \frac{1}{0.5} = 2$$

La potencia de la prueba está dado por:

$$\text{Potencia} = P(Z > -1.645 \mid \mu = 8) = P(Z > 2)$$