Estadística Inferencial

Capítulo VIII - Ejercicio 30

Aaric Llerena Medina

Una empresa que hace estudios de mercado quiere obtener una muestra aleatoria suficientemente grande de manera que la probabilidad de que la proporción obtenida a favor de un cierto producto resulte inferior al 35 % sea igual a 0.0062.

a) Calcule el tamaño de la muestra a tomar si se supone que la verdadera proporción a favor del producto es $p = 0.4$.

b) Con el tamaño de muestra calculado en a) y si se supone verdadero el valor del parámetro $p = 0.2$, determinar el intervalo $[a, b]$ centrado en p tal que $\bar{P} \in [a, b]$ con probabilidad 0.95.

Solución:

a) Se debe calcular el tamaño de la muestra (n) para que la probabilidad proporcionada de $P(\hat{p} < 0.35) = 0.0062$, dado que la verdadera proporción es $p = 0.4$.

La proporción muestral $\bar{P}$ sigue una distribución normal con p y $\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$, siendo la media y desviación estándar respectivamente, donde n debe ser encontrado.

Estandarizando la probabilidad, se obtiene:

$$P\left(\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}} < \frac{0.35-0.40}{\sqrt{\dfrac{0.40\times 0.60}{n}}}\right) = 0.0062$$

Por lo que operando:

$$P\left(Z < \frac{-0.05}{\sqrt{\dfrac{0.24}{n}}}\right) = 0.0062$$

Buscando el valor en la tabla:

$$-2.50 = -2.5 - 0.00$$

−	0.00	0.01	0.02	⋯
⋮				
2.4				
2.5	0.0062	0.0060	0.0059	
⋮				

Por lo obtenido y reemplazando:

$$\frac{-0.05}{\sqrt{\frac{0.24}{n}}} = 2.50 \Rightarrow n = \left(\frac{2.50 \times \sqrt{0.24}}{-0.05}\right)^2 \Rightarrow n = 600$$

Por lo tanto, el tamaño de la muestra necesario es $n = 600$.

b) Con el tamaño de la muestra $n = 600$ y suponiendo que la verdadera proporción es $p = 0.2$, se debe encontrar el intervalo $[a, b]$ centrado en p tal que se cumpla que $\bar{P} \in [a, b]$ con probabilidad 0.95. Por ello, el intervalo de confianza para una proporción se calcula como:

$$\bar{P} \pm Z \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

Para una probabilidad de 0.95, el valor de Z es aproximadamente 1.96.

$$[a, b] = 0.2 \pm 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.2\,(1-0.2)}{600}}$$

$$[a, b] = [0.1680, 0.2320]$$

$\therefore$ El intervalo es $[0.1680, 0.2320]$, el cual está centrado en $p = 0.2$ con probabilidad 0.95.