Estadística Inferencial

Capítulo VIII - Ejercicio 12

Aaric Llerena Medina

La vida útil de cierta marca de llantas radiales es una variable aleatoria X cuya distribución es normal con $\mu = 38,000$ Km. y $\sigma = 3,000$ Km.

a) Si la utilidad Y (en $) que produce cada llanta está dada por la relación: $Y = 0.2X + 100$, ¿cuál es la probabilidad de que la utilidad sea mayor que $8,900?

b) Determine el número de tales llantas que debe adquirir una empresa de transporte para conseguir una utilidad media de al menos $ 7,541 con probabilidad 0.996

Solución:

a) Primero se debe determinar el valor de X para que se cumpla que $Y = 8,900$:

$$8,900 = 0.2X + 100 \Rightarrow 0.2X = 8,800 \Rightarrow X = \frac{8,800}{0.2} = 44,000$$

Dado que X está distribuido normalmente con medio $\mu = 38,000$ y desviación estándar $\sigma = 3,000$, estandarizando $X = 44,000$ para la distribución normal estándar:

$$\begin{aligned} Z &= \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{44,000 - 38,000}{3,000} \\ &= \frac{6,000}{3,000} \\ Z &= 2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la probabilidad de que $X > 44,000$ es:

$$P\left(X > 44,000\right) = P\left(Z > 2\right)$$

Haciendo uso de las propiedades y usando la tabla de la distribución normal estándar:

$$\begin{aligned} P\left(Z > 2\right) &= 1 - P\left(Z < 2\right) \\ &= 1 - 0.9772 \\ &= 0.0228 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la probabilidad de que la utilidad sea mayor que $8,900 es aproximadamente 0.0228.

b) Para determinar el número de llantas para tener una utilidad media de al menos $7,541 con probabilidad 0.996, se debe expresar de la siguiente manera:

$$P\left(0.2\bar{X} + 100 \geq 7,541\right) = 0.996$$

Esto implica que:

$$P\left(0.2\bar{X} \geq 7,441\right) = 0.996 \Rightarrow P\left(\bar{X} \geq \frac{7,441}{0.2}\right) = 0.996 \Rightarrow P\left(\bar{X} \geq 37,205\right) = 0$$

Dado que $\bar{X}$ está distribuida normalmente con un media $\mu = 38,000$ y una desviación estándar $\sigma_{\bar{X}}$, estandarizando se obtiene:

$$Z = \frac{X - 38,000}{\dfrac{3,000}{\sqrt{n}}}$$

Haciendo uso de $\bar{X} = 37,205$, se obtiene:

$$Z = \frac{37,205 - 38,000}{\dfrac{3,000}{\sqrt{n}}} = \frac{-795}{\dfrac{3,000}{\sqrt{n}}} = -\frac{795\sqrt{n}}{3,000}$$

Por lo que obtenemos:

$$P\left(Z \geq -\frac{795\sqrt{n}}{3,000}\right) = 0.996$$

Pero recordar que $P\left(Z \geq z_0\right) = 1 - P\left(Z \leq z_0\right)$, entonces para calcular el valor z_0 necesario:

$$0.996 = P\left(Z \geq z_0\right) = 1 - P\left(Z \leq z_0\right)$$
$$P\left(Z \leq z_0\right) = 1 - 0.996$$
$$P\left(Z \leq z_0\right) = 0.004$$

Buscando el valor en la tabla:

$$-2.65 = -2.6 - 0.05$$

$-$	$\cdots$	0.04	0.05	0.06	$\cdots$
$\vdots$					
2.5					
2.6		0.0041	0.0040	0.0039	
$\vdots$					

Por lo obtenido y reemplazando:

$$-\frac{795\sqrt{n}}{3,000} = -2.65 \Rightarrow n = \left(\frac{-2.65 \times 3,000}{-795}\right)^2 \Rightarrow n = 100$$

Por lo tanto, la empresa de transporte debe adquirir 100 llantas para conseguir una utilidad media de al menos $7,541 con probabilidad 0.996.