Estadística Inferencial

Capítulo VIII - Ejercicio 48

Aaric Llerena Medina

Sea $X_1, \ldots, X_{10}$ una muestra aleatoria escogida de una población normal $N(0,1)$.

a) Halle la distribución de $F = \left(\sum_{i=1}^{10} X_i^2\right)/10 / \left(\sum_{i=1}^{5} X_i^2\right)/5$.

b) Calcule la distribución $P\left[F < 1/3.33\right]$.

Solución:

a) Sabemos que si $X_i \sim N(0,1)$, entonces $X_i^2 \sim \chi^2(1)$. Por lo tanto:

- $\sum_{i=1}^{10} X_i^2 \sim \chi^2(10)$, ya que es la suma de 10 variables aleatorias independientes $\chi^2(1)$.
- $\sum_{i=1}^{5} X_i^2 \sim \chi^2(5)$, ya que es la suma de 5 variables aleatorias independientes $\chi^2(1)$.

La variable F se define como:

$$F = \frac{\left(\sum_{i=1}^{10} X_i^2\right)/10}{\left(\sum_{i=1}^{5} X_i^2\right)/5}$$

Esto puede reescribirse como:

$$F = \frac{\left(\sum_{i=1}^{10} X_i^2\right)/10}{\left(\sum_{i=1}^{5} X_i^2\right)/5} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{10} X_i^2\right)/10}{\left(\sum_{i=1}^{5} X_i^2\right)/5} = \frac{\chi^2(10)/10}{\chi^2(5)/5} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\chi^2(10)}{\chi^2(5)}$$

Por definición, esta es una distribución F con 10 grados de libertad en el numerador y 5 grados de libertad en el denominador. Por lo tanto:

$$F \sim F(10,5)$$

b) Se sabe que $F \sim F(10,5)$. Para calcular $P\left[F < 1/3.33\right]$, primero simplificamos el valor: $\frac{1}{3.33} \approx 0.3$. Por lo tanto, se busca $P\left[F < 0.3\right]$:

Para esto, empleamos las tablas de distribución F para calcular la probabilidad. Para ello, el valor es:

$$P\left[F_{10,5} < 0.3\right] \approx 0.0498$$

Por lo tanto, la probabilidad de que F sea menor que $1/3.33$ es aproximadamente $0.0498 \approx 0.05$.