

Estadística Inferencial

Capítulo X - Ejercicio 13

Aaric Llerena Medina

El gerente de la cadena de tiendas REPLAY afirma que en promedio cada cliente gastó \$500 el año pasado. Sin embargo analizando el mercado, nosotros creemos, que dicho gerente ha exagerado. Para someter a prueba estas hipótesis se tomó una muestra aleatoria de 100 clientes que el año pasado habían comprado en dicha tienda, esta reveló una media de \$470 y una desviación estándar \$100.

- En el nivel de significación $\alpha = 0.015$, ¿es posible concluir que los clientes de esta tienda están gastando menos?
- Si la verdadera media del consumo es \$450, halle la probabilidad de aceptar la hipótesis del gerente.

Solución:

Según los datos del problema:

- Media muestral: $\bar{X} = 470$.
- Desviación estándar muestral: $s = 100$.
- Tamaño de la muestra: $n = 100$.
- Nivel de significación: $\alpha = 0.015$.

Definiendo las hipótesis:

$$H_0 : \mu = 500 \quad \text{contra} \quad H_1 : \mu < 500$$

donde μ es el gasto promedio por cliente.

- Para un nivel de significación $\alpha = 0.015$ con cola izquierda, el valor $z_{\text{crítico}} = z_{0.015} \approx -2.170$.

Por lo tanto, el valor crítico es:

$$\bar{X} = z_{\text{crítico}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} + \mu_0 = -2.17 \cdot \frac{100}{\sqrt{100}} + 500 = 478.3$$

La región crítica es $RC = \{\bar{X} < 478.3\}$. Por lo tanto, se rechaza H_0 .

Asimismo, para comprobar se puede usar el estadístico de prueba:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

donde $\mu_0 = 500$ es la media bajo la hipótesis nula. Sustituyendo los valores:

$$Z = \frac{470 - 500}{100/\sqrt{100}} = \frac{-30}{10} = -3$$

Como el valor crítico ya determinado es -2.17. Se establece la regla decisión:

- Si $Z_{\text{calc}} < Z_{\alpha}$, se rechaza H_0 .
- Si $Z_{\text{calc}} \geq Z_{\alpha}$, no se rechaza H_0 .

En este caso, $Z_{\text{calc}} = -3 < -2.17$, por lo que rechazamos la hipótesis nula.

- b) Probabilidad de aceptar H_0 si la verdadera media es \$450, para ello, se utiliza el valor de $\bar{x}_{\text{crítico}}$ ya calculado anteriormente, con el valor de 478.3.

Ahora, se calcula probabilidad de que $\bar{x} \geq 478.3$, si $\mu = 450$, es decir:

$$z = \frac{478.3 - 450}{100/\sqrt{100}} = 2.83$$

Finalmente, para determinar la probabilidad:

$$P(Z \geq 2.83) = 1 - P(Z \leq 2.83) \approx 1 - 0.9977 \approx 0.0023$$

Por lo tanto, existe una probabilidad muy baja de 0.0023 de aceptar la hipótesis del gerente si el verdadero promedio es \$450.