Estadística Inferencial

Capítulo VIII - Ejercicio 12

Aaric Llerena Medina

La vida útil de cierta marca de llantas radiales es una variable aleatoria X cuya distribución es normal con $\mu=38,000$ Km. y $\sigma=3,000$ Km.

- a) Si la utilidad Y (en \$) que produce cada llanta está dada por la relación: Y = 0.2X + 100, ¿cuál es la probabilidad de que la utilidad sea mayor que \$8,900?
- b) Determine el número de tales llantas que debe adquirir una empresa de transporte para conseguir una utilidad media de al menos \$ 7,541 con probabilidad 0.996

Solución:

a) Primero se debe determinar el valor de X para que se cumpla que Y = 8,900:

$$8,900 = 0.2X + 100 \Rightarrow 0.2X = 8,800 \Rightarrow X = \frac{8,800}{0.2} = 44,000$$

Dado que X está distribuido normalmente con medio $\mu=38,000$ y desviación estándar $\sigma=3,000$, estandarizando X=44,000 para la distribución normal estándar:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{44,000 - 38,000}{3,000}$$
$$= \frac{6,000}{3,000}$$
$$Z = 2$$

Por lo tanto, la probabilidad de que X > 44,000 es:

$$P(X > 44,000) = P(Z > 2)$$

Haciendo uso de las propiedades y usando la tabla de la distribución normal estándar:

$$P(Z > 2) = 1 - P(Z < 2)$$

= 1 - 0.9772
= 0.0228

Por lo tanto, la probabilidad de que la utilidad sea mayor que \$8,900 es aproximadamente 0.0228.

b) Para determinar el número de llantas para tener una utilidad media de al menos \$7,541 con probabilidad 0.996, se debe expresar de la siguiente manera:

$$P(0.2\bar{X} + 100 \ge 7,541) = 0.996$$

Esto implica que:

$$P(0.2\bar{X} \ge 7,441) = 0.996 \Rightarrow P(\bar{X} \ge \frac{7,441}{0.2}) = 0.996 \Rightarrow P(\bar{X} \ge 37,205) = 0$$

Dado que \bar{X} está distribuida normalmente con un media $\mu=38,000$ y una desviación estándar $\sigma_{\bar{X}}$, estandarizando se obtiene:

$$Z = \frac{X - 38,000}{\frac{3,000}{\sqrt{n}}}$$

Haciendo uso de $\bar{X} = 37,205$, se obtiene:

$$Z = \frac{37,205 - 38,000}{\frac{3,000}{\sqrt{n}}} = \frac{-795}{\frac{3,000}{\sqrt{n}}} = -\frac{795\sqrt{n}}{3,000}$$

Por lo que obtenemos:

$$P\left(Z \ge -\frac{795\sqrt{n}}{3,000}\right) = 0.996$$

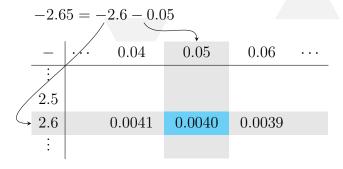
Pero recordar que $P\left(Z\geq z_{0}\right)=1-P\left(Z\leq z_{0}\right),$ entonces para calcular el valor z_{0} necesario:

$$0.996 = P(Z \ge z_0) = 1 - P(Z \le z_0)$$

$$P(Z \le z_0) = 1 - 0.996$$

$$P(Z \le z_0) = 0.004$$

Buscando el valor en la tabla:



Por lo obtenido y reemplazando:

$$-\frac{795\sqrt{n}}{3,000} = -2.65 \Rightarrow n = \left(\frac{-2.65 \times 3,000}{-795}\right)^2 \Rightarrow n = 100$$

Por lo tanto, la empresa de transporte debe adquirir 100 llantas para conseguir una utilidad media de al menos \$7,541 con probabilidad 0.996.