Estadística Inferencial

Capítulo VIII - Ejercicio 38

Aaric Llerena Medina

Se sabe que el tiempo (en minutos) que lleva realziar una prueba de ecografía en el servicio médico de la PUCP es una variable X que tiene distribución normal con media 30.

a) Halle la desviación estándar de la distribución si en el 2.28 % de los casos las ecografías duran más de 40 minutos.

b) ¿Qué probabilidad hay que el tiempo medio de 16 ecografías no sea mayor a 28 minutos?

c) Si la proporción de ecografías que indican quiste es 0.10, ¿qué probabilidad hay de que 10 ecografías a lo más uno indique quiste?

Solución:

a) Sabemos que $P(X > 40) = 0.0228$, por lo que estandarizando:

$$P\left(Z > \frac{40-30}{\sigma}\right) = 0.0228$$

Usando la tabla de la distribución normal estándar, el valor Z que deja un área de 0.0228 a la derecha es $Z = 2$. Por lo tanto:

$$\frac{40-30}{\sigma} = 2 \Rightarrow \frac{10}{\sigma} = 2 \Rightarrow \sigma = \frac{10}{2} = 5$$

Por lo tanto, la desviación estándar de la distribución es $\sigma = 5$ minutos.

b) Sea $\bar{X}$ el tiempo medio de 16 ecografías. Dado que $X \sim N(30, 5^2)$, la distribución de $\bar{X}$ es:

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) = N\left(30, \frac{25}{16}\right)$$

Por lo tanto, la desviación estándar de $\bar{X}$ es:

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{5}{\sqrt{16}} = \frac{5}{4} = 1.25$$

Se busca calcular $P\left(\bar{X} \leq 28\right)$, por lo que estandarizando:

$$Z = \frac{28-30}{1.25} = \frac{-2}{1.25} = -1.6$$

Usando la tabla de la distribución normal estándar: $P\left(Z \leq -1.6\right) \approx 0.0548$.

Por lo tanto, la probabilidad de que el tiempo medio de 16 ecografías no sea mayor a 28 minutos es aproximadamente 0.0548.

c) Sea Y el número de ecografías (de 10) que indican quiste. La variable Y sigue una distribución binomial ($n = 10, p = 0.10$). Se busca calcular:

$$P(Y \leq 1) = P(Y = 0) + P(Y = 1)$$

Usando la fórmula de la distribución binomial:

- Para $Y = 0$:

$$P(Y = 0) = \binom{10}{0}(0.10)^0(0.90)^{10} = 1 \times 1 \times 0.3487 \approx 0.3487$$

- Para $Y = 1$:

$$P(Y = 1) = \binom{10}{1}(0.10)^1(0.90)^9 = 10 \times 0.10 \times 0.3874 \approx 0.3874$$

Sumando ambas probabilidades:

$$P(Y \leq 1) = 0.3487 + 0.3874 = 0.7361$$

Por lo tanto, la probabilidad de que en 10 ecografías a lo más una indique quiste es aproximadamente 0.7361.