Estadística Inferencial

Capítulo X - Ejercicio 25

Aaric Llerena Medina

En un estudio estadístico del año pasado se afirma que los ingresos familiares mensuales en el distrito de San Isidro tienen una media \$400 y una desviación estándar de \$100. Diseñe una prueba para probar la hipótesis de la media con un riesgo de 0.17 % de rechazarla si es verdadera y con un riesgo de aceptarla en 572 de 10,000 casos cuando la media es realmente \$363.

Solución:

Se definen las hipótesis a partir que se sospecha que los ingresos han disminuido, se plantea un contraste unilateral en la cola izquierda:

$$H_0 : \mu = 400 \quad \text{contra} \quad H_1 : \mu < 400$$

Se supone que la variable X (ingreso familiar) es normal con desviación estándar $\sigma = 100$. Se toma una muestra de tamaño n, la media muestral $\bar{X}$ se distribuye como:

Bajo ambas hipótesis, se supone que la variable X (ingreso familiar) es normal con desviación estándar $\sigma = 100$. Si se toma una muestra de tamaño n, la media muestral $\overline{X}$ se distribuye como

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{100}{\sqrt{n}}\right)$$

Por ello, la prueba consistirá en rechazar H_0 si la media muestral es menor que un valor crítico c, es decir, se rechaza H_0 si $\bar{X} < c$.

Primero, se debe determinar el tamaño de la muestra y el valor crítico, para ello, se requiere determinar la probabilidad de tipo I y II:

- **La probabilidad de error tipo I:**

$$\alpha = P\left(\bar{X} < c \mid \mu = 400\right) = 0.0017$$

  Estandarizando la probabilidad:

$$P\left(\frac{\bar{X} - 400}{100/\sqrt{n}} < \frac{c - 400}{100/\sqrt{n}}\right) = P(Z < z_\alpha) = 0.0017$$

Se debe buscar en la tabla de distribución normal el valor z para 0.0017, obteniendo $z_\alpha \approx -2.93$, de este modo se tiene la ecuación:

$$\frac{c - 400}{100/\sqrt{n}} = -2.93$$

- **La probabilidad de error tipo II:**

$$\beta = P\left(\bar{X} \geq c \mid \mu = 363\right) = 0.0572$$

Estandarizando bajo $\mu = 363$:

$$P\left(\frac{\bar{X} - 363}{100/\sqrt{n}} \geq \frac{c - 363}{100/\sqrt{n}}\right) = 0.0572$$

Es decir,

$$P\left(Z < \frac{c - 363}{100/\sqrt{n}}\right) = 1 - 0.0572 = 0.9428$$

Buscando el valor z de 0.9428 según las tabla de la normalidad estándar es 1.58. Entonces, el valor correspondiente:

$$\frac{c - 363}{100/\sqrt{n}} = z_{1-\beta} \approx 1.58$$

Procedemos a despejar n y c. De las ecuaciones anteriores se tiene:

$$c - 400 = -2.93\left(\frac{100}{\sqrt{n}}\right) \quad \text{y} \quad c - 363 = 1.58\left(\frac{100}{\sqrt{n}}\right)$$

Operando:

$$(c - 363) - (c - 400) = [1.58 + 2.93]\left(\frac{100}{\sqrt{n}}\right)$$

$$37 = 4.51 \times \left(\frac{100}{\sqrt{n}}\right)$$

$$n = \left(\frac{4.51 \times 100}{37}\right)^2 \approx 148.5763$$

Por lo tanto, se toma al entero más próximo, $n = 149$.

Asimismo, utilizando el valor n para calcular c:

$$c = 400 - 2.93\left(\frac{100}{\sqrt{149}}\right) \approx 376$$

Por lo tanto, se ha diseñado una prueba con una muestra de $n = 149$ observaciones, por lo que la regla de decisión es:

$$\text{Rechazar } H_0 \quad \text{si} \quad \bar{X} < 376$$

Esta prueba tendrá:

$$\alpha = 0.0017 \quad (\text{probabilidad de rechazar } H_0 \text{ cuando } \mu = 400)$$

$$\beta = 0.0572 \quad (\text{probabilidad de no rechazar } H_0 \text{ cuando } \mu = 363)$$