

Estadística Inferencial

Capítulo VIII - Ejercicio 24

Aaric Llerena Medina

El costo de producción en dólares de un objeto es 100 veces el valor numérico de su longitud. Suponga que la longitud en metros del objeto es una variable aleatoria con distribución normal $N(0.012, 1.44 \times 10^{-4})$.

- a) ¿Cuál es la distribución del costo medio por objeto si toman al azar n ($n \geq 2$) objetos?
- b) Si el precio de venta de cada objeto es \$2.00, calcular la probabilidad de que la utilidad promedio por objeto de 36 objetos tomados al azar, sea a lo más \$0.5.

Solución:

- a) La longitud L de un objeto se distribuye normalmente con media $\mu_L = 0.012$ metros y varianza $\sigma_L^2 = 1.44 \times 10^{-4} \text{ m}^2$. El costo de producción de un objeto es 100 veces su longitud, es decir, $C = 100L$.

Determinando la media y varianza del costo del objeto es:

- **Media:** $\mu_C = 100 \times \mu_L = 100 \times 0.012 = 1.2$
- **Varianza:** $\sigma_C^2 = (100)^2 \times \sigma_L^2 = 10,000 \times 1.44 \times 10^{-4} = 1.44$

Como se pide una media muestral del costo (\bar{C}) de $n \geq 2$ objetos, es decir, su media y varianza de la media muestral del costo es:

- **Media Muestral:** $\mu_{\bar{C}} = \mu_C = 100$
- **Varianza Muestral:** $\sigma_{\bar{C}}^2 = \frac{\sigma_C^2}{n} = \frac{1.44}{n}$

Por lo tanto, la distribución del costo medio por objeto:

$$\bar{C} \sim N\left(1.2, \frac{1.44}{n}\right)$$

- b) El precio de venta de cada objeto es \$2, por ello, la utilidad es la diferencia entre el precio de venta y el costo, es decir, $2 - C$, por ello la media y la varianza de la utilidad es:

- **Media:** $\mu_U = 2 - \mu_C = 2 - 1.2 = 0.8$
- **Varianza:** $\sigma_U^2 = \sigma_C^2 = 1.44$

Como se debe calcular la probabilidad de 36 objetos, la media y varianza muestral es:

- **Media:** $\mu_{\bar{U}} = \mu_U = 0.8$
- **Varianza:** $\sigma_{\bar{U}}^2 = \frac{\sigma_U^2}{n} = \frac{1.44}{36} = 0.04$

Por ello, la media muestral de la utilidad de 36 objetos, se distribuye como $\bar{U} \sim N(0.8, 0.04)$.

Como se quiere calcular la probabilidad de que la utilidad promedio por objeto de 36 objetos promedio sea a lo más \$0.5, es decir:

$$P(\bar{U} \leq 0.5)$$

Por lo que estandarizando, se obtiene:

$$P\left(Z \leq \frac{0.5 - 0.8}{\sqrt{0.04}}\right) = P\left(Z \leq \frac{-0.3}{0.2}\right) = P(Z \leq -1.5)$$

Usando la tabla de distribución normal:

- $P(Z \leq -1.5) \approx 0.0668$

Por lo tanto, la probabilidad de que la utilidad promedio por objeto sea a lo más \$0.5 es aproximadamente 0.0668.