

# Estadística Inferencial

## Capítulo X - Ejercicio 12

Aaric Llerena Medina

---

El tiempo de falla, en horas, de cierta componente electrónica es una variable aleatoria  $X$  que tiene distribución exponencial con parámetro  $\beta$ . Para realizar la prueba de la hipótesis nula  $H_0 : \beta = 0.01$  contra  $H_1 : \beta < 0.01$  se escogen dos de tales componentes al azar y se observa sus tiempos de falla. Si se decide rechazar  $H_0$  cuando el tiempo de falla de por lo menos una de ellas es menor que 400 horas, halle la probabilidad de error tipo I.

### **Solución:**

Dado  $H_0$  con  $\beta = 0.01$ , la función de distribución acumulada (CDF) para una componente es

$$F(x) = 1 - e^{-0.01x}$$

Por ello, la probabilidad de que una componente tenga tiempo de falla menor que 400 horas es:

$$P(X < 400 | H_0) = F(400) = 1 - e^{-0.01 \cdot 400} = 1 - e^{-4}$$

Por lo tanto, la probabilidad de que un componente falle antes de 400 horas es  $1 - e^{-4} \approx 0.9817$ .

Ahora, considerar el caso de que fallen ambos componentes después de 400 horas:

$$P(X_1 \geq 400 \text{ y } X_2 \geq 400) = P(X_1 \geq 400) \cdot P(X_2 \geq 400) = [e^{-0.01 \cdot 400}]^2 = (e^{-4})^2 = e^{-8}$$

Luego, la probabilidad de que al menos una falle antes de 400 horas es

$$\alpha = 1 - P(X_1 \geq 400 \text{ y } X_2 \geq 400) = 1 - e^{-8}$$

Por lo tanto, la probabilidad que al menos uno de los componentes falle antes de 400 horas es:

$$P(\text{al menos una falle antes de 400 horas}) = 1 - e^{-8}$$

Por lo tanto, la probabilidad de error tipo I es  $1 - e^{-8} \approx 0.9997$ .