Estadística Inferencial

Capítulo VIII - Ejercicio 10

Aaric Llerena Medina

Si el tiempo de vida de una batería es una variable aleatoria X con distribución exponencial de parámetro: $1/\theta$. Se escoge una muestra de n baterías.

a) Halle el error estándar de la media muestral $\bar{X}$.

b) Si la muestra aleatoria es de tamaño $n = 64$. ¿con qué probabilidad diferirá $\bar{X}$ del verdadero valor de θ en menos de un error estándar?

c) ¿Qué tamaño de muestra mínimo sería necesario para que la media muestral $\bar{X}$ tenga un error estándar menor a un $5\,\%$ del valor real de θ?

d) Asumiendo muestra grande, ¿qué tamaño de muestra sería necesario para que $\bar{X}$ difiera de θ en menos del $10\,\%$ de θ con $95\,\%$ de probabilidad?

Solución:

Dado que el tiempo de vida de una batería X sigue una distribución exponencial con parámetro $\lambda = \dfrac{1}{\theta}$ se tiene que:

- **Media:** $\mathbb{E}\left[X\right] = \theta$
- **Varianza:** $\operatorname{Var}\left(X\right) = \theta^2$

a) El error estándar de la media muestral $\bar{X}$ se calcula:

$$\text{Error estándar } = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{\theta}{\sqrt{n}}$$

b) La probabilidad de que $\bar{X}$ difiera de θ en menos de un error estándar, dado que $n = 64$ el error estándar es:

$$\text{Error estándar } = \frac{\theta}{\sqrt{64}} = \frac{\theta}{8}$$

Se pide calcular la probabilidad de que $\bar{X}$ esté dentro de un error estándar de θ, es decir:

$$P\left(|\bar{X} - \theta| < \frac{\theta}{8}\right)$$

Dado que $\bar{X}$ sigue aproximadamente una distribución normal $N\left[\theta, \left(\dfrac{\theta^2}{64}\right)\right]$, estandarizando:

$$P\left(-\frac{\theta/8}{\theta/8} < Z < \frac{\theta/8}{\theta/8}\right) = P\left(-1 < Z < 1\right)$$

Usando la tabla de distribución normal:

- $P(Z \leq -1) \approx 0.1587$
- $P(Z \leq 1) \approx 0.8413$

**Nota: Se está trabajando con 4 decimales.*

Por lo tanto, la probabilidad es:

$$\begin{aligned} P(-1 < Z < 1) &= P(Z < 1) - P(Z < -1) \\ &= 0.8413 - 0.1587 \\ &= 0.6826 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la probabilidad que difiera $\bar{X}$ del verdadero valor de θ en menos de un error estándar es 0.6826.

c) Para determinar una muestra mínimo con un un error estándar menor a un 5 % del valor real de θ, es decir:

$$\frac{\theta}{\sqrt{n}} < 0.05\theta \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} < 0.05 \Rightarrow \sqrt{n} > 20 \Rightarrow n > 400$$

Por lo tanto, el tamaño de muestra mínimo es $n = 401$.

d) Para determinar una muestra grande con un $\bar{X}$ difiera de θ en menos del 10 % de θ con un 95 % de probabilidad, es decir:

$$P(|\bar{X} - \theta| < 0.10\theta) = 0.95$$

Por lo que estandarizando:

$$P\left(-\frac{0.10\theta}{\theta/\sqrt{n}} < Z < \frac{0.10\theta}{\theta/\sqrt{n}}\right) = P\left(-0.10\sqrt{n} < Z < 0.10\sqrt{n}\right) = 0.95$$

Para una probabilidad del 95 %, los valores críticos son ± 1.96:

$$0.10\sqrt{n} = 1.96 \Rightarrow \sqrt{n} = 19.6 \Rightarrow n = (19.6)^2 = 384.16$$

Redondeando al entero superior, $n = 385$.