

Estadística Inferencial

Capítulo VIII - Ejercicio 11

Aaric Llerena Medina

La utilidad por la venta de cierto artículo, en miles de soles, es una variable aleatoria con distribución normal. En el 5 % de las ventas la utilidad ha sido menos de 3.42, mientras que el 1 % de las ventas ha sido mayor que 19.32. Si se realizan 16 operaciones de ventas, ¿cuál es la probabilidad de que el promedio de la utilidad por cada operación esté entre \$10,000 y \$12,000?

Solución:

Se conoce que:

- El 5 % de las ventas, la utilidad ha sido menor que 3.42 miles de soles: $P(X < 3.42) = 0.05$.
- El 1 % de las ventas, la utilidad ha sido mayor que S/ 19.32 miles: $P(X > 19.32) = 0.01$.

A partir de esta información, primero determinamos los parámetros μ y σ de la distribución normal. Por lo que usando la tabla de la distribución normal estándar:

- Para $P(X < 3.42) = 0.05$, el valor Z correspondiente es $Z \approx -1.645$. Por lo tanto:

$$\frac{3.42 - \mu}{\sigma} = -1.645 \quad (\text{Ec. 1})$$

- Para $P(X > 19.32) = 0.01$, el valor Z correspondiente es $Z \approx 2.326$. Por lo tanto:

$$\frac{19.32 - \mu}{\sigma} = 2.326$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones:

- De la Ec. 1:

$$3.42 - \mu = -1.645\sigma \Rightarrow \mu = 3.42 + 1.645\sigma$$

- Sustituyendo μ en la Ec. 2:

$$\frac{19.32 - (3.42 + 1.645\sigma)}{\sigma} = 2.326 \Rightarrow \frac{15.90 - 1.645\sigma}{\sigma} = 2.326$$

Simplificando:

$$15.90 - 1.645\sigma = 2.326\sigma \Rightarrow 15.90 = 3.971\sigma \Rightarrow \sigma = \frac{15.90}{3.971} \approx 4.00$$

- Sustituyendo σ en la Ec. 1:

$$\mu = 3.42 + 1.645 \times 4.00 \approx 3.42 + 6.58 = 10.00$$

Por lo tanto, la distribución de X es $N(\mu = 10, \sigma^2 = 16)$.

Ahora, se debe determinar la probabilidad de que el promedio de la utilidad esté en el intervalo $[10,000; 12,000]$.

Se realizan $n = 16$ operaciones de ventas. Sea \bar{X} el promedio de la utilidad por operación. La distribución de \bar{X} es:

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) = N\left(10, \frac{16}{16}\right) = N(10, 1)$$

La desviación estándar de \bar{X} es:

$$\sigma_{\bar{X}} = \sqrt{1} = 1$$

Se busca calcular:

$$P(10 \leq \bar{X} \leq 12)$$

Estandarizando:

- Para $\bar{X} = 10$:

$$Z = \frac{10 - 10}{1} = 0$$

- Para $\bar{X} = 12$:

$$Z = \frac{12 - 10}{1} = 2$$

Por lo tanto:

$$P(10 \leq \bar{X} \leq 12) = P(0 \leq Z \leq 2)$$

Usando la tabla de la distribución normal estándar:

- $P(Z \leq 2) \approx 0.9772$.
- $P(Z \leq 0) = 0.5$.

Restando ambas probabilidades:

$$P(0 \leq Z \leq 2) = P(Z \leq 2) - P(Z \leq 0) = 0.9772 - 0.5 = 0.4772$$

Por lo tanto, la probabilidad de que el promedio de la utilidad por operación esté entre \$10,000 y \$12,000 es aproximadamente 0.4772.