Estadística Inferencial

Capítulo VIII - Ejercicio 49

Aaric Llerena Medina

Sea X_1, X_2 una muestra aleatoria escogida de una población normal $N(0,1)$.

a) Determina la distribución de: $F = \left[\frac{X_1 + X_2}{X_1 - X_2}\right]^2$.

b) Calcule la probabilidad $P\left[F < 161\right]$.

Solución:

a) Primero, definimos las variables: $Y_1 = X_1 + X_2$ $Y_2 = X_1 - X_2$. Dado que X_1 y X_2 son independientes y siguen $N(0,1)$, entonces:

- $Y_1 \sim N(0,2)$, ya que $\text{Var}(X_1 + X_2) = \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2) = 1 + 1 = 2$.
- $Y_2 \sim N(0,2)$, ya que $\text{Var}(X_1 - X_2) = \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2) = 1 + 1 = 2$.

Además, Y_1 y Y_2 son independientes porque X_1 y X_2 son independientes y las combinaciones lineales Y_1 y Y_2 son ortogonales. La variable F se define como:

$$F = \left[\frac{Y_1}{Y_2}\right]^2$$

Se sabe que $\frac{Y_1}{Y_2}$ sigue una distribución t de Student con 1 grado de libertad (ya que Y_1 y Y_2 son normales estándar independientes). Sin embargo, al elevar al cuadrado, F sigue una distribución F de Fisher con 1 grado de libertad en el numerador y 1 grado de libertad en el denominador:

$$F \sim F(1,1)$$

Por lo tanto, la distribución de F es $F \sim F(1,1)$.

b) Para calcular la probabilidad $P\left[F < 161\right]$ dado que $F \sim F(1,1)$, se debe buscar $P\left(F < 161\right)$. Usando la propiedad de la distribución F, se tiene:

$$P(F < 161) = P\left(\frac{Y_1^2}{Y_2^2} < 161\right)$$

Usando la tabla de la distribución $F(1,1)$ se obtiene:

$$P(F < 161) \approx 0.9499$$

Por lo tanto, la probabilidad de $P\left[F < 161\right]$ es aproximadamente 0.95.