Estadística Inferencial

Capítulo X - Ejercicio 07

Aaric Llerena Medina

Un sistema automático de producción está controlado si el 90 % de la producción no es defectuosa. Para comprobar esta hipótesis se seleccionan al azar 10 objetos de la producción y se decidirá rechazar que el proceso está controlado si menos de ocho objetos no son defectuosos. Suponiendo independencia:

a) Plantee las hipótesis de esta prueba.

b) Obtenga el nivel de significación.

c) Determine la potencia del contraste si solo 60 % de la producción es no defectuosa.

Solución:

Sea p la proporción de objetos no defectuosos en la producción y sea X la variable aleatoria que representa el número de objetos no defectuosos en una muestra de tamaño $n = 10$. Dado que las observaciones son independientes, se tiene:

$$X \sim \text{Binomial}(n = 10,\, p)$$

a) El proceso está controlado si $p = 0.90$. Por ello, se definen las hipótesis de la siguiente forma:

- $H_0 : p = 0.90$ el proceso está controlado.
- $H_1 : p < 0.90$ el proceso no está controlado.

La regla de decisión es rechazar H_0 si se observa que $X < 8$, es decir, si en la muestra hay menos de 8 objetos no defectuosos.

b) El nivel de significación α es la probabilidad de rechazar H_0 cuando esta es verdadera. Cuando H_0, se tiene $p = 0.90$ y la región de rechazo es:

$$RC = \{X < 8\}$$

Por lo tanto,

$$\alpha = P(X < 8 \mid p = 0.90) = \sum_{x=0}^{7} \binom{10}{x} (0.90)^x (0.10)^{10-x}$$

Para facilitar el cálculo se puede obtener esta probabilidad mediante el complemento de la cola superior:

$$P(X < 8) = 1 - P(X \geq 8) = 1 - [P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10)]$$

Se calculan los términos:

- Para $P\left(X = 8\right)$:

$$P(X = 8) = \binom{10}{8}(0.90)^8(0.10)^2 = 45 \times 0.43047 \times 0.01 \approx 0.1937$$

- Para $P\left(X = 9\right)$:

$$P(X = 9) = \binom{10}{9}(0.90)^9(0.10)^1 = 10 \times 0.38742 \times 0.10 \approx 0.3874$$

- Para $P\left(X = 10\right)$:

$$P(X = 10) = \binom{10}{10}(0.90)^{10}(0.10)^0 = (0.90)^{10} \approx 0.3487$$

Por lo tanto:

$$P(X \geq 8) \approx 0.1937 + 0.3874 + 0.3487 = 0.9298$$

y así,

$$\alpha = 1 - 0.9298 \approx 0.0702$$

Por lo tanto, el nivel de significación de la prueba es 0.00702.

c) La potencia del contraste es la probabilidad de rechazar H_0 cuando la hipótesis alternativa es verdadera. Supongamos que en realidad solo el 60 % de la producción es no defectuosa, es decir, $p = 0.60$. Entonces, $X \sim \text{Binomial}(n = 10,\, 0.60)$, y la potencia es:

$$\text{Potencia} = P(\text{rechazar } H_0 \mid p = 0.60) = P(X < 8 \mid p = 0.60)$$

Nuevamente,

$$P(X < 8) = 1 - P(X \geq 8) = 1 - \sum_{x=8}^{10} \binom{10}{x}(0.60)^x(0.40)^{10-x}$$

Se calculan los términos:

- Para $P\left(X = 8\right)$:

$$P(X = 8) = \binom{10}{8}(0.60)^8(0.40)^2 = 45 \times 0.01678 \times 0.16 \approx 0.1209$$

- Para $P\left(X=9\right)$:

$$P(X=9)=\binom{10}{9}(0.60)^{9}(0.40)^{1}=10\times 0.01007\times 0.40\approx 0.0403$$

- Para $P\left(X=10\right)$:

$$P(X=10)=\binom{10}{10}(0.60)^{10}(0.40)^{0}=(0.60)^{10}\approx 0.0061$$

Entonces,

$$P(X\geq 8)\approx 0.1209+0.0403+0.0061\approx 0.1673$$

Así, la potencia es:

$$\text{Potencia}=1-0.1673\approx 0.8327$$

Por lo tanto, la potencia del contraste cuando solo el 60 % de la producción es no defectuosa es aproximadamente 83.27 %.