Estadística Inferencial

Capítulo VIII - Ejercicio 07

Aaric Llerena Medina

La distribución de las notas del examen final de Mat. I resultó ser normal $N(\mu, \sigma^2)$, con cuartiles 1 y 3 iguales a 6.99 y 11.01 respectivamente.

a) Determine la media y la varianza de la distribución de las notas.

b) Halle el intervalo $[a, b]$ centrado en μ tal que $P\left[a \leq \bar{X} \leq b\right] = 0.9544$, donde $\bar{X}$ es la media de la muestra X_1, X_2, X_3, X_4 escogida de esa población.

Solución:

a) Los cuartiles 1 y 3 son los valores que dividen la distribución en cuatro partes iguales, de modo que el 25 % de los datos están por debajo del primer cuartil y el 75 % están por debajo del tercer cuartil.

Para hallar estos cuartiles de la distribución de $\bar{X}$, se necesita encontrar los valores z tal que $P(Z < z) = 0.25$ y $P(Z < z) = 0.75$ en la distribución normal estándar. Usando la tabla de distribución normal se obtiene:

- **1. Buscando los resultados más cercanos a 0.25 y 0.75 en la tabla:**

$-0.67 = -0.6 - 0.07$

$-$	$\cdots$	0.07	$Z_{0.25}$	0.08	$\cdots$
$\vdots$					
0.5					
0.6		0.2514	**0.25**	0.2483	
$\vdots$					

$0.67 = 0.6 + 0.07$

$+$	$\cdots$	0.07	$Z_{0.75}$	0.08	$\cdots$
$\vdots$					
0.5					
0.6		0.7486	**0.75**	0.7517	
$\vdots$					

**Nota: Se está trabajando con 4 decimales.*

- **2. Como no se tiene un valor exacto para los valores, se debe interpolar con los valores cercanos:**

-0.67	$z_{0.25}$	-0.68
0.2514	0.25	0.2483

0.67	$z_{0.75}$	0.68
0.7486	0.75	0.7517

Resolviendo:

$$\frac{-0.67 - z_{0.25}}{0.2514 - 0.25} = \frac{z_{0.25} - (-0.68)}{0.25 - 0.2483} \qquad \frac{z_{0.75} - 0.67}{0.75 - 0.7486} = \frac{0.68 - z_{0.75}}{0.7517 - 0.75}$$

$$\frac{-0.67 - z_{0.25}}{0.0014} = \frac{z_{0.25} + 0.68}{0.0017} \qquad \frac{z_{0.75} - 0.67}{0.0014} = \frac{0.68 - z_{0.75}}{0.0017}$$

Continuando las operaciones y determinando los valores aproximados:

$$z_{0.25} = \frac{9.52 \times 10^{-4} + 1.139 \times 10^{-3}}{-0.0017 - 0.0014} \qquad z_{0.75} = \frac{9.52 \times 10^{-4} + 1.139 \times 10^{-3}}{0.0017 + 0.0014}$$

$$z_{0.25} \approx -0.6745 \qquad z_{0.75} \approx 0.6745$$

Por lo tanto:

- Q1 de la normal estándar es $z_{0.25} = -0.6745$
- Q3 de la normal estándar es $z_{0.75} = 0.6745$

´Recordando la fórmula de estandarización y despejando para tener los datos ya conocidos:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \Rightarrow Z \cdot \sigma = X - \mu \Rightarrow X = \mu + Z \cdot \sigma$$

Aplicando estos a cuartiles:

- Para el primer cuartil (percentil 25) para una distribución normal es aproximadamente $\mu - 0.6745\sigma = 6.99$
- Para el tercer cuartil (percentil 75) para una distribución normal es aproximadamente $\mu + 0.6745\sigma = 11.01$

Dado que se tiene dos ecuaciones con dos variables, se plantea el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \mu - 0.6745\sigma = 6.99 \\ \mu + 0.6745\sigma = 11.01 \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones:

$$2\mu = 18 \Rightarrow \mu = 9$$

Sustituyendo $\mu = 9$ en la primera ecuación:

$$9 - 0.6745\sigma = 6.99 \Longrightarrow 0.6745\sigma = 2.01 \Longrightarrow \sigma = \frac{2.01}{0.6745} \approx 2.98$$

Por lo tanto, la media es $\mu = 9$ y la varianza es $\sigma^2 \approx 2.98^2 \approx 8.8804$

b) Para hallar el intervalo $[a, b]$ centrado en μ tal que $P\left[a \leq \bar{X} \leq b\right] = 0.9544$, donde $\bar{X}$ es la media de una muestra de tamaño $n = 4$, que sigue una distribución normal:

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) = N\left(9, \frac{8.88}{4}\right) = N(9, 2.22)$$

De la distribución normal, la desviación estándar de $\bar{X}$ es:

$$\sigma_{\bar{X}} = \sqrt{2.22} \approx 1.49$$

Lo solicitado es calcular los valores a y b que está centrado en μ, es decir, es simétrico, por lo tanto los valores se pueden expresar como:

$$a = \mu - k\sigma_{\bar{X}}, \quad b = \mu + k\sigma_{\bar{X}}$$

En una distribución normal, los intervalos de la forma $[\mu - k\sigma_{\bar{X}}, \mu + k\sigma_{\bar{X}}]$ están centrados en la media μ y tiene una amplitud de $2k\sigma_{\bar{X}}$

Según la distribución normal estándar $Z \sim N(0, 1)$, para $[\mu - k\sigma_{\bar{X}}, \mu + k\sigma_{\bar{X}}]$ el intervalo es $[-k, k]$. Recordar que una de las propiedades más conocidas de la distribución normal es que aproximadamente el 95 % de los datos se encuentra dentro de $\pm 2\sigma$ de la media. Es decir:

$$\begin{aligned} P(-2 \leq Z \leq 2) &= 0.9544 & \\ P(Z \leq 2) - P(Z \leq -2) &= 0.9544 & \text{Buscando los valores } z \text{ en tablas.} \\ 0.9772 - 0.0228 &= 0.9544 & \text{Se valida el enunciado} \end{aligned}$$

Se concluye que $k = 2$, por lo tanto, los valores de a y b son:

$$a = 9 - 2 \times 1.49 = 9 - 2.98 = 6.02$$

$$b = 9 + 2 \times 1.49 = 9 + 2.98 = 11.98$$

Por lo tanto, el intervalo $[a, b]$ es $[6.02, 11.98]$