Estadística Inferencial

Capítulo VIII - Ejercicio 50

Aaric Llerena Medina

Para comparar la duración promedio (en meses) μ_1 y μ_2 de dos marcas de baterías $B1$ y $B2$ se escogen dos muestras aleatorias independientes de tamaños respectivos $n_1 = 32$ y $n_2 = 36$. Si la media muestral de $B1$ es mayor que la media muestral de $B2$ en más de 2 meses, se acepta que $\mu_1 > \mu_2$. En caso contrario se acepta que $\mu_1 = \mu_2$. Calcular la probabilidad de aceptar que $\mu_1 > \mu_2$ cuando realmente $\mu_1 = \mu_2$. Suponga que las varianzas de las duraciones de $B1$ y $B2$ son respectivamente $\sigma_1^2 = 16$ y $\sigma_2^2 = 9$.

Solución:

La regla de decisión es:

- Si $\bar{X}_1 - \bar{X}_2 > 2$, se acepta que $\mu_1 > \mu_2$.
- En caso contrario, se acepta que $\mu_1 = \mu_2$.

Además, se sabe que las varianzas de las duraciones de $B1$ y $B2$ son $\sigma_1^2 = 16$ y $\sigma_2^2 = 9$, por lo que la diferencia de medias muestrales $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ sigue una distribución normal con:

- **Media:** $\mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \mu_1 - \mu_2$.
- **Varianza:** $\sigma^2_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2} = \dfrac{16}{32} + \dfrac{9}{36} = 0.5 + 0.25 = 0.75$.
- **Desviación estándar:** $\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{0.75} \approx 0.866$.

Se desea calcular la probabilidad de aceptar que $\mu_1 > \mu_2$ cuando realmente $\mu_1 = \mu_2$, por lo que la media de la diferencia de medias muestrales es: $\mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \mu_1 - \mu_2 = 0$.

Se busca calcular la probabilidad de que $\bar{X}_1 - \bar{X}_2 > 2$, por lo que estandarizando:

$$Z = \frac{2 - 0}{0.866} = \frac{2}{0.866} \approx 2.31$$

Por lo tanto:

$$P\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 > 2\right) = P\left(Z > 2.31\right)$$

Usando la tabla de la distribución normal estándar:

$$P(Z > 2.31) = 1 - P(Z \leq 2.31) \approx 1 - 0.9896 = 0.0104$$

Por lo tanto, la probabilidad de aceptar que $\mu_1 > \mu_2$ cuando realmente $\mu_1 = \mu_2$ es aproximadamente 0.0104.