Estadística Inferencial

Capítulo VIII - Ejercicio 35

Aaric Llerena Medina

Por su experiencia el departamento de una tienda comercial sabe que sus ventas se pagan con: dinero en efectivo, con cheque o al crédito, con probabilidades respectivas: 0.3, 0.3 y 0.4. La probabilidad de que una venta sea por más de \$50 es igual a 0.2 si esta es en efectiva, es igual a 0.9 si esta es con cheque y es igual a 0.6 si esta es al crédito.

Si se escoge una muestra aleatoria de 256 personas que ingresan a la tienda, ¿cuál es la probabilidad de que el porcentaje de personas que hayan comprado por más de \$50 sea al menos 50 %?

Solución:

Se conoce la siguiente información sobre las ventas en la tienda comercial:

- Las ventas se pagan con:
  - **Efectivo:** Probabilidad $P(E) = 0.3$.
  - **Cheque:** Probabilidad $P(C) = 0.3$.
  - **Crédito:** Probabilidad $P(K) = 0.4$.
- La probabilidad de que una venta sea por más de \$50, dado el método de pago, es:
  - **Efectivo:** $P(M \mid E) = 0.2$.
  - **Cheque:** $P(M \mid C) = 0.9$.
  - **Crédito:** $P(M \mid K) = 0.6$.

Para calcular la probabilidad total de que una venta sea por más de \$50, se hace uso del teorema de la probabilidad total:

$$P(M) = P(M \mid E) \cdot P(E) + P(M \mid C) \cdot P(C) + P(M \mid K) \cdot P(K)$$

Sustituyendo los valores:

$$P(M) = 0.2 \times 0.3 + 0.9 \times 0.3 + 0.6 \times 0.4 = 0.57$$

Por lo tanto, la probabilidad de que una venta sea por más de \$50 es $P(M) = 0.57$.

Para la distribución de la proporción muestral, se toma una muestra aleatoria de $n = 256$ personas. La proporción muestral $\hat{p}$ de personas que compran por más de \$50 sigue una distribución aproximadamente normal (dado que n es grande) con:

- **Media:** $\mu_{\hat{p}} = P(M) = 0.57$.
- **Desviación estándar:** $\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\dfrac{P(M)\left[1 - P(M)\right]}{n}} = \sqrt{\dfrac{0.57 \times 0.43}{256}} = \sqrt{\dfrac{0.2451}{256}} \approx \sqrt{0.000957} \approx 0.0309$.

Por lo tanto, el cálculo de la probabilidad de que al menos el 50 % de las personas compren por más de \$50, se busca:

$$P\left(\hat{p} \geq 0.50\right)$$

Estandarizando:

$$Z = \frac{\hat{p} - \mu_{\hat{p}}}{\sigma_{\hat{p}}} = \frac{0.50 - 0.57}{0.0309} = \frac{-0.07}{0.0309} \approx -2.27$$

Por lo tanto:

$$P\left(\hat{p} \geq 0.50\right) = P\left(Z \geq -2.27\right)$$

Usando la tabla de la distribución normal estándar:

$$P\left(Z \geq -2.27\right) = 1 - P\left(Z < -2.27\right) \approx 1 - 0.0116 = 0.9884$$

Por lo tanto, la probabilidad de que el porcentaje de personas que hayan comprado por más de \$50 sea al menos 50 % es aproximadamente 0.9884.