Estadística Inferencial

Capítulo VIII - Ejercicio 37

Aaric Llerena Medina

Un lote grande está formado por dos tipos de artículos: A y B. Los pesos de los artículos de tipo A tiene distribución $N(21, 1)$ y los tipos del tipo B, tienen distribución $N(20, 1)$.

a) Si del lote se escoge un artículo al azar, ¿cuál es la probabilidad de que pese entre 19 y 21 si el 80 % son de tipo A y el resto son de tipo B?

b) Si se eligen 200 artículos del lote, ¿cuál es la probabilidad aproximada de que al menos 115 de ellos pesen entre 19 y 21?

Solución:

a) Sea X el peso de un artículo escogido al azar. La probabilidad de que X esté entre 19 y 21 se calcula usando el teorema de la probabilidad total:

$$P(19 \leq X \leq 21) = P(19 \leq X \leq 21 \mid A) \cdot P(A) + P(19 \leq X \leq 21 \mid B) \cdot P(B)$$

Dado que $P(A) = 0.8$ y $P(B) = 0.2$, calculamos cada probabilidad condicional:

- **Para artículos de tipo A:**

$$P(19 \leq X \leq 21 \mid A) = P\left(\frac{19-21}{1} \leq Z \leq \frac{21-21}{1}\right) = P(-2 \leq Z \leq 0)$$

Usando la tabla de la distribución normal estándar:

$$P(-2 \leq Z \leq 0) = P(Z \leq 0) - P(Z \leq -2) = 0.5 - 0.0228 = 0.4772$$

- **Para artículos de tipo B:**

$$P(19 \leq X \leq 21|B) = P\left(\frac{19-20}{1} \leq Z \leq \frac{21-20}{1}\right) = P(-1 \leq Z \leq 1)$$

Usando la tabla de la distribución normal estándar:

$$P(-1 \leq Z \leq 1) = P(Z \leq 1) - P(Z \leq -1) = 0.8413 - 0.1587 = 0.6826$$

Sustituyendo en la fórmula de la probabilidad total:

$$P(19 \leq X \leq 21) = 0.4772 \times 0.8 + 0.6826 \times 0.2 = 0.38176 + 0.13652 = 0.51828$$

Por lo tanto, la probabilidad de que un artículo escogido al azar pese entre 19 y 21 es aproximadamente 0.51828.

b) Sea Y el número de artículos de 200 que pesan entre 19 y 21. La variable Y sigue una distribución binomial ($n = 200, p = 0.5183$). Dado que n es grande, aproximamos esta distribución por una normal con:

- **Media:** $\mu_Y = np = 200 \times 0.5183 = 103.66$.
- **Desviación estándar:** $\sigma_Y = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{200 \times 0.5183 \times 0.4817} \approx \sqrt{49.98} \approx 7.07$.

Se busca calcular $P(Y \geq 115)$, por lo que aplicando la estandarización:

$$P(Y \geq 115) \approx P\left(Z \geq \frac{115 - 103.66}{7.07}\right) = P\left(Z \geq \frac{11.34}{7.07}\right) \approx P\left(Z \geq 1.61\right)$$

Usando la tabla de la distribución normal estándar:

$$P(Z \geq 1.61) = 1 - P(Z \leq 1.61) \approx 1 - 0.0.9463 = 0.0537$$

Por lo tanto, la probabilidad de que al menos 115 de 200 artículos pesen entre 19 y 21 es aproximadamente 0.0537.