Estadística Inferencial

Capítulo VIII - Ejercicio 29

Aaric Llerena Medina

Suponga que el 40 % de los votos de los electores de una ciudad favorecen al candidato A.

a) Si se selecciona una muestra aleatoria de 600 electores de la ciudad, ¿cuál es la probabilidad de que la proporción muestral de votos a favor de A esté entre 37 % y 45 %?

b) ¿Qué tamaño de muestra se debería escoger si se quiere tener una probabilidad igual a 0.97 de que la proporción de votos a favor de A en la muestra no se diferencie de la proporción supuesta en más del 2 %?

Solución:

a) Ya que tenemos una muestra $n = 600$ que se considera grande, por lo que podemos aproximar la distribución normal de la proporción $\hat{p}$ con media y desviación estándar:

- **Media:** $\mu_{\bar{p}} = p = 0.40$
- **Desviación estándar:** $\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}} = \sqrt{\dfrac{0.40 \times 0.60}{600}} = 0.020$

Se desea calcular $P\left(0.37 \leq \hat{p} \leq 0.45\right)$, por lo que estandarizando se obtiene:

- Para $\hat{p} = 0.37$:

$$Z = \frac{0.37 - 0.40}{0.020} = -1.5$$

- Para $\hat{p} = 0.45$:

$$Z = \frac{0.45 - 0.40}{0.020} = 2.5$$

La probabilidad se expresa como:

$$P\left(0.37 \leq \hat{p} \leq 0.45\right) = P\left(-1.5 \leq Z \leq 2.5\right)$$

Usando la tabla de distribución normal:

- $P\left(Z \leq -1.5\right) \approx 0.0668$
- $P\left(Z \leq 2.5\right) \approx 0.9938$

Reemplazando los datos:

$$\begin{aligned} P\left(0.37 \leq \hat{p} \leq 0.45\right) &= P\left(-1.5 \leq Z \leq 2.5\right) \\ &= 0.9938 - 0.0668 \\ &= 0.9270 \end{aligned}$$

La probabilidad de que la proporción muestral esté entre 37 % y 45 % es 0.9270.

b) Para determinar el tamaño de la muestra (n) que tenga una probabilidad del 0.97 de que la proporción de votos a favor de A en la muestra no se diferencie de la proporción supuesta en más del 2 %, es decir:

$$P\left(|\hat{p} - p| \leq 0.02\right) = 0.97$$

Estandarizando:

$$P\left(\left|\frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}}\right| \leq \frac{0.02}{\sqrt{\dfrac{0.40 \times 0.60}{n}}}\right) = 0.97$$

Lo que implica:

$$P\left(|Z| \leq \frac{0.02}{\sqrt{\dfrac{0.24}{n}}}\right) = 0.97$$

Esto significa que:

$$P\left(-\frac{0.02}{\sqrt{\dfrac{0.24}{n}}} \leq Z \leq \frac{0.02}{\sqrt{\dfrac{0.24}{n}}}\right) = 0.97$$

Continuando operando:

$$P\left(Z \leq \frac{0.02}{\sqrt{\dfrac{0.24}{n}}}\right) - P\left(Z \leq -\frac{0.02}{\sqrt{\dfrac{0.24}{n}}}\right) = 0.97$$

Dado que $P\left(Z \leq -a\right) = 1 - P\left(Z \leq a\right)$:

$$2P\left(Z \leq \frac{0.02}{\sqrt{\dfrac{0.24}{n}}}\right) - 1 = 0.97 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{0.02}{\sqrt{\dfrac{0.24}{n}}}\right) = 0.985$$

Buscando el valor en la tabla:

$$2.17 = 2.1 + 0.07$$

+	$\cdots$	0.06	0.07	0.08	$\cdots$
$\vdots$					
2.0					
2.1		0.9846	0.9850	0.9854	
$\vdots$					

Por lo obtenido y reemplazando:

$$\frac{0.02}{\sqrt{\dfrac{0.24}{n}}} = 2.17 \Rightarrow n = \left(\frac{2.17 \times \sqrt{0.24}}{0.02}\right)^2 \approx 2,825.34$$

Por lo tanto, el valor de n es 2,826.