Aalto Yliopisto

SCI-C0200 - Fysiikan ja matematiikan menetelmien studio

Tietokoneharjoitustyö: Tehtävä 2. Mansikan tuotanto ja hinta

Aarno Veitola, 1019799, aarno.veitola@aalto.fi

Palautettu: 13. toukokuuta 2022

Sisällys

Tiivistelmä

Tämän tehtävän tavoitteena on simuloida mansikoiden vuosittaisia tuotantomääriä ja hintoja erilaisia matemaattisia malleja simuloimalla. Ongelmaa kuvaavaa matemaattista mallia simuloimalla voidaan tarkastella erilaisten markkinatilanteiden vuosittaista kehittymistä halutulla aikavälillä, sekä tutkia kyseisen systeemin herkkyyttä erilaisille häiriöille. Mansikoiden vuosittaisen tuotantomäärän ja hinnan kehitys ovat tärkeitä alan yrittäjille, sillä kunkin vuoden tuotantomäärät täytyy suhteuttaa edellisen vuoden myyntiin ja markkinoilla olevien mansikoiden määrään. Tämä auttaa kyseistä yritystä maksimoimaan voittonsa ja minimoimaan tappionsa. Alan yrittäjien on myös tärkeä tietää miten häiriöt vaikuttavat markkinatilanteen kehitykseen. Markkinatilanteita ennustamalla voidaan ennustaa markkinoiden kehitystä tulevaisuudessa, jotta alan yrittäjät osaavat suhteuttaa tuotantonsa menneeseen ja tulevaan markkinakehitykseen.

1 Matemaattinen malli

Voimme simuloida markkinoiden kehitystä hyödyntämällä rekursiivista mallia, jossa kasvatettujen mansikoiden määrä q_t tänä vuonna riippuu lineaarisesti edellisen vuoden mansikoiden hinnasta p_{t-1}, eli

$$q_t = \alpha + \beta p_{t-1}, \beta > 0 \tag{1}$$

Tuotteen hinta p_t tänä vuonna puolestaan riippuu lineaarisesti tänä vuonna markkinoilla olevien mansikoiden määrästä q_t, eli

$$p_t = \gamma + \delta q_t, \delta < 0 \tag{2}$$

Parametrejä α, β, γ ja δ varioimalla voimme muunnella markkinoiden käyttäytymistä ja simuloida mallin kehitystä erilaisissa markkinatilanteissa.

Asetetaan rajoitteet $\beta > 0$, sillä korkeat edellisen vuoden hinnat motivoivat kasvattajia kasvattamaan enemmän mansikoita, ja $\delta < 0$, sillä jos mansikoita on paljon markkinoilla, hinta putoaa liikatarjonnan vuoksi.

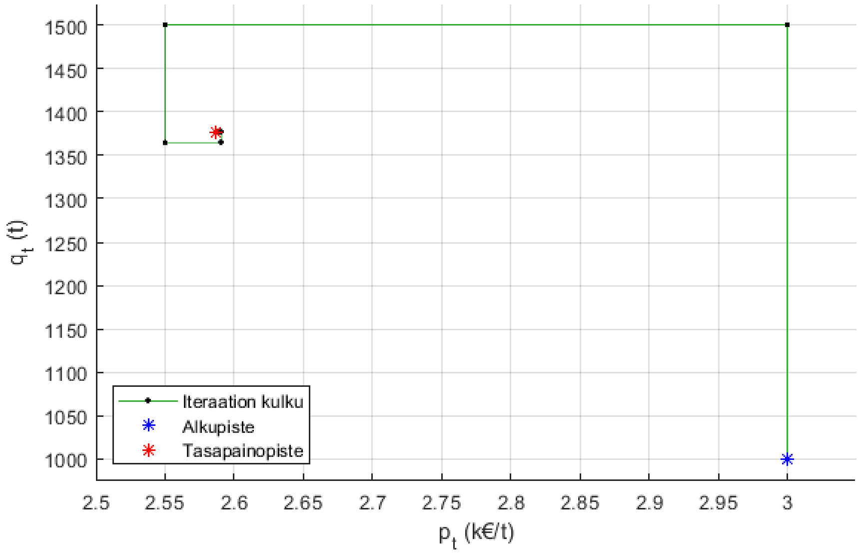
2 Simulaation toteutus

Tarkastellaan kahta eri markkinatilannetta simuloimalla kahdenkymmenen vuoden aikavälillä. Yksi iteraatio kattaa vuoden aikavälin, eli halutun *Cobweb*-tyyppisen iteraation aikaansaamiseen täytyy tuotantomäärä q_t ja hinta p_t molemmat päivittää omalla iteraatiollaan, joten iteraatioaskelten lukumäärä täytyy kaksinkertaistaa kahdenkymmenen vuoden kattamiseksi. Näin ollen valitaan askelten lukumääräksi $n = 40$. Toteutetaan simulaatio niin, että ensin päivitetään tuotantomäärä q_t, jonka jälkeen vasta hinta p_t.

2.1 Markkinatilanne 1

Asetetaan parametreiksi $\alpha = 600\ t$, $\beta = 300\ t^2/k€$, $\gamma = 3\ k€/t$ ja $\delta = -0.0003\ k€/t^2$, sekä alkutilanteeksi $q_0 = 1000\ t$ ja $p_0 = 3\ k€/t$.

Suoritetaan sitten simulaatio askelten lukumäärällä $n = 40$ ajamalla osiossa 6.1.1 kuvattu Matlab-lähdekoodi. Simulaation tulokset ovat kuvattuna kuvassa 1.



Kuva 1: Markkinatilanne 1 mukaisen mansikoiden tuotannon ja hinnan 20 vuoden simulaatio. Mansikoiden tuotantomäärä q_t on kuvattuna mansikoiden hinnan p_t funktiona.

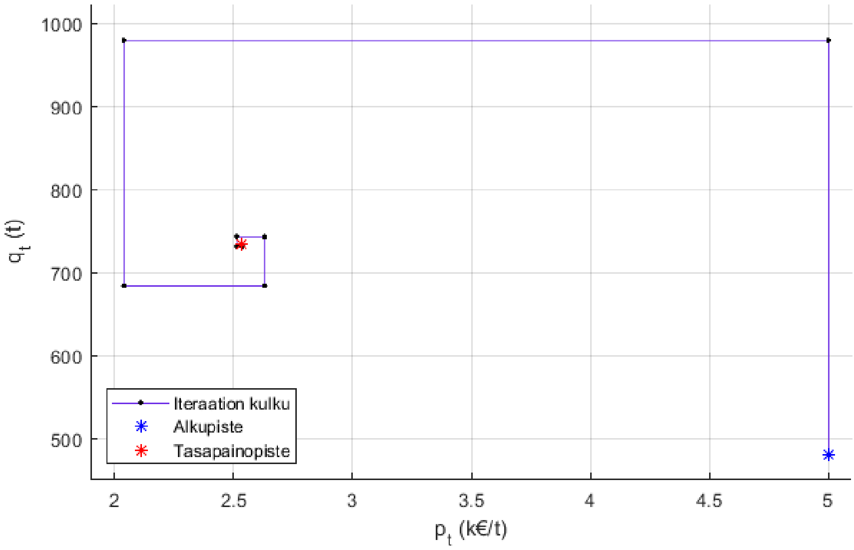
Simulaation tuloksia ja kuvaa 1 tarkastelemalla voidaan huomata, että iteraatio suppenee tasapainoasemaan $(q_t, p_t) \approx (1376.15\ t, 2.59\ k€/t)$. Tällöin siis $q_{t+1} \approx q_t$ ja $p_{t+1} \approx p_t$ pätevät hyvällä tarkkuudella, eli hinta ja tuotanto eivät enää muutu vuodesta toiseen.

2.2 Markkinatilanne 2

Asetetaan parametreiksi $\alpha = 480\ t$, $\beta = 100\ t^2/k€$, $\gamma = 4\ k€/t$ ja $\delta = -0.002\ k€/t^2$, sekä alkutilanteeksi $q_0 = 480\ t$ ja $p_0 = 5\ k€/t$.

Suoritetaan sitten simulaatio askelten lukumäärällä $n = 40$ ajamalla osiossa 6.1.1 kuvattu Matlab-lähdekoodi. Simulaation tulokset ovat kuvattuna kuvassa 2.

Simulaation tuloksia ja kuvaa 2 tarkastelemalla voidaan huomata, että tämä iteraatio puolestaan suppenee tasapainoasemaan $(q_t, p_t) \approx (733.33\ t, 2.53\ k€/t)$,



Kuva 2: Markkinatilanne 2 mukaisen mansikoiden tuotannon ja hinnan 20 vuoden simulaatio. Mansikoiden tuotantomäärä q_t on kuvattuna mansikoiden hinnan p_t funktiona.

jolloin hinta ja tuotantomäärä eivät enää merkittävästi muutu. Kyseinen piste on siis systeemin kiintopiste.

3 Analyyttinen ratkaisu

Systeemien tasapainoasema voidaan ratkaista myös analyyttisesti yhtälöitä (1) ja (2) hyödyntämällä.

Tasapainoasemassa halutaan, että

$$p_{t+1} = p_t$$

$$\Leftrightarrow \gamma + \delta q_{t+1} = p_t$$
$$\Leftrightarrow \gamma + \delta(\alpha + \beta p_t) = p_t$$
$$\Leftrightarrow f(p_t) = \gamma + \delta(\alpha + \beta p_t) - p_t = 0$$

Toisin sanoen siis halutaan löytää funktion $f(p_t)$ nollakohta kummankin markkinatilanteen parametreillä, jonka jälkeen nollakohtaa vastaava tuotantomäärä q_t voidaan ratkaista yhtälöstä (2) seuraavasti:

$$p_t = \gamma + \delta q_t \Leftrightarrow q_t(p_t) = \frac{1}{\delta}(p_t - \gamma)$$

Markkinatilanteelle 1 tasapainopisteen analyyttinen ratkaisu tuottaa tuloksen

$$(q_t, p_t) = \left(\frac{150000}{109}\ t, \frac{282}{109}\ k€/t\right) \approx (1376.15\ t, 2.59\ k€/t)$$

ja markkinatilanteelle 2

$$(q_t, p_t) = \left(\frac{2200}{3}\ t, \frac{38}{15}\ k€/t\right) \approx (733.33\ t, 2.53\ k€/t)$$

Tulokset ovat siis samat kuin kohdan 2 simulaation tulokset.

4 Herkkyysanalyysi

Analysoidaan kummankin aiemmin mainitun markkinatilanteen muodostaman systeemin herkkyyttä varioimalla alkuarvoja q_0' ja p_0' halutulla virheellä. Varioidaan molempia alkuarvoja kymmenalkioisilla vektoreilla, jotka sisältävät tasavälein jakautuneita alkuarvoja väleiltä

$$(q_0')_n \in [(1-\varepsilon)q_0, (1+\varepsilon)q_0]$$

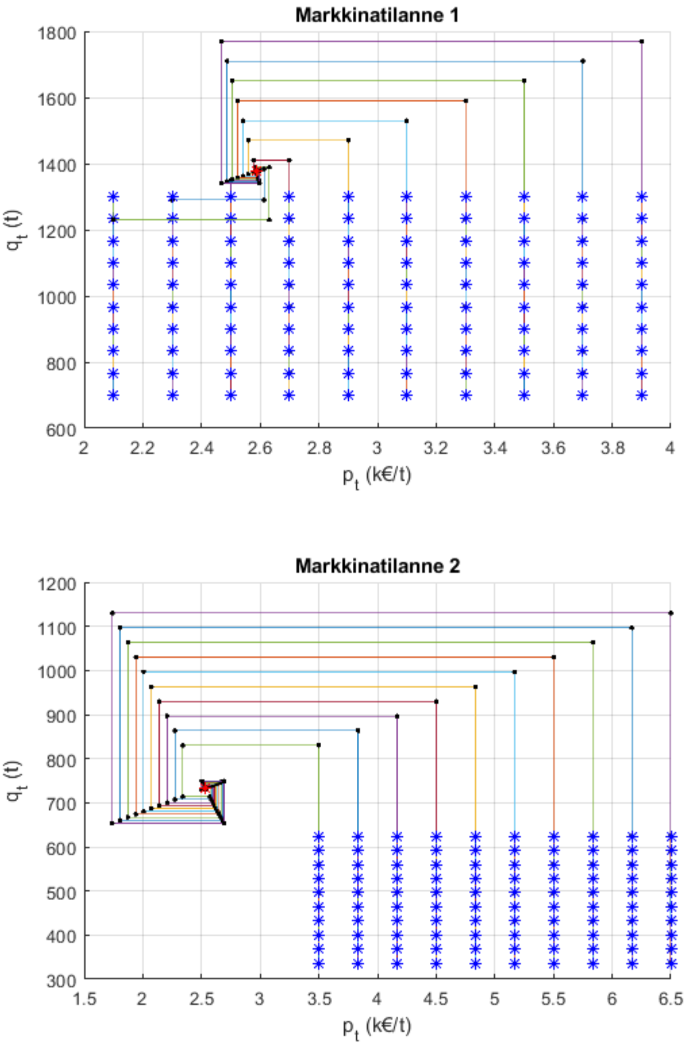
$$(p_0')_n \in [(1-\varepsilon)p_0, (1+\varepsilon)p_0],$$

missä $n = 1, ..., 10$ ja ε on sallittu poikkeama kunkin markkinatilanteen määräämistä alkuarvoista. Tuloksena on sata erilaista alkuarvoparia $((q_0')_n, (p_0')_m)$, $n, m = 1, ..., 10$, joita simuloimalla voidaan tarkastella systeemin herkkyyttä. Herkkyysanalyysissä hyödynnetty koodi on kuvattuna osiossa 6.1.2.

Toteutetaan yllä kuvattu herkkyysanalyysi virheellä $\varepsilon = 0.3$. Tulokset ovat kuvattuna kuvassa 3.

Tarkastellaan herkkyysanalyysin tuloksia virheellä $\varepsilon = 0.3$ kuvasta 3. Huomataan, että molemmissa markkinatilanteissa alkuarvojen eroista huolimatta kaikki simulaatiot johtavat samoihin loppupisteisiin, jotka ovat samat kuin kohdassa 2 ja 3 määritetyt tasapainopisteet. Voidaan myös huomata, että ainakin tässä tapauksessa kaikki iteraatiot suppenevat lähes samaa tahtia kaikilla alkuarvoilla.

Herkkyysanalyysi voidaan toteuttaa myös todella suurilla alkuarvojen variaatioilla. Esimerkiksi virheellä $\varepsilon = 1$ (alkuarvot varioivat 100% alkuperäisistä alkuarvoista) kaikki simulaatiot suppenevat edelleen samaa vauhtia tasapainopisteisiin. Voidaan siis sanoa systeemin olevan molemmissa markkinatilanteissa todella stabiili ja hakeutuvan voimakkaasti tasapainopisteisiin alkuarvojen muutoksista riippumatta.



Kuva 3: Herkkyysanalyysin tulokset sallitun virheen arvolla $\varepsilon = 0.3$. Siniset pisteet kuvaavat simulaatioiden alkupisteitä ja punaiset loppupisteitä. Viivoilla yhdistetyt pisteet kuvaavat kunkin iteraation kulkua.

5 Johtopäätös ja pohdinnat

Osioiden 2, 3 ja 4 tulosten nojalla voidaan tehdä johtopäätöksiä mansikan tuotannon ja hinnan kehityksestä tarkastelluissa markkinatilanteissa.

Molemmissa markkinatilanteissa mansikan tuotanto ja hinta asettuvat riittävän pitkällä aikavälillä tasapainoasemaan, jossa vuosittaisen tuotantomäärän ja hinnan muutokset ovat häiviävän pieniä. Molemmissa markkinatilanteissa tuotantomäärä ja hinta hakeutuvat voimakkasti tasapainoon alkutilasta huolimatta, eli markkinatilanteiden kehitys on erittäin stabiilia.

Simulaatiossa käytettyä mansikan tuotantomäärää ja hintaa vastaavaa matemaattista mallia voitaisiin täydentää asettamalla myös muita riippuvuuksia mansikan tuotantomäärälle. Käytetyssä mallissa oletetaan, että mansikan tuotantomäärä riippuu vain edellisen vuoden mansikan hinnasta, vaikka todellisuudessa ulkokasvatettujen mansikoiden kunkin vuoden tuotantomäärä riippuu myös kasvukauden pituudesta, joka puolestaan riippuu kyseisen kauden keskilämpötilasta. Jos mallilla halutaan kuvata esimerkiksi suomalaisten mansikoiden tuotantoa ja hintaa, voisi malliin lisätä tällaisen satunnaisen lämpötilariippuvuuden.

6 Liitteet

6.1 Matlab-lähdekoodi

6.1.1 Simulaatio

```
clear
iter=20;% Simulaation kesto

%% Markkinatilanne 1

% Parametrit ja alkuarvot
alpha=600; % t
beta=300; % t^2/k€
gamma=3; % k€/t
delta=-0.0003; % k€/t^2
param=[alpha beta gamma delta]'; % Annetaan parametrit vektorina
q0=1000; % t
p0=3; % k€/t

% Simulointi Cobweb-tyyliin
[qlist1,plist1]=cobweb(q0,p0,iter,param);

%% Markkinatilanne 2

% Parametrit ja alkuarvot
alpha=480; % t
beta=100; % t^2/k€
gamma=4; % k€/t
delta=-0.002; % k€/t^2
param=[alpha beta gamma delta]'; % Annetaan parametrit vektorina
q0=480; % t
p0=5; % k€/t

```

```
% Simulointi Cobweb-tyyliin
[qlist2,plist2]=cobweb(q0,p0,iter,param);

%% Plottaus
close all

figure;
hold on
grid on
plot(plist1,qlist1,Marker=".",MarkerEdgeColor="black", ...
    Color=[rand,rand,rand])
plot(plist1(1),qlist1(1),LineStyle="none",Color="blue", ...
    Marker="*")
plot(plist1(iter+1),qlist1(iter+1), ...
    LineStyle="none",Color="red",Marker="*")
legend("Iteraation kulku","Alkupiste","Tasapainopiste", ...
    Location="southwest")
xlabel("p_t (k€/t)"), ylabel("q_t (t)")
axis([2.5 3.05 975 1525])

figure;
hold on
grid on
plot(plist2,qlist2,Marker=".",MarkerEdgeColor="black", ...
    Color=[rand,rand,rand])
plot(plist2(1),qlist2(1),LineStyle="none",Color="blue", ...
    Marker="*")
plot(plist2(iter+1),qlist2(iter+1), ...
    LineStyle="none",Color="red",Marker="*")
legend("Iteraation kulku","Alkupiste","Tasapainopiste", ...
    Location="southwest")
xlabel("p_t (k€/t)"), ylabel("q_t (t)")
axis([1.9 5.1 450 1025])
```

6.1.2 Herkkyysanalyysi

```
clear
iter=20; % Simulaation kesto
N=10; % Alkuarvovektoreiden pituus
accuracy=0.3; % Alkuarvojen varioinnin määrä (epsilon)

%% Markkinatilanne 1

% Parametrit ja alkuarvot
alpha=600; % t
beta=300; % t^2/k€
gamma=3; % k€/t
delta=-0.0003; % k€/t^2
param=[alpha beta gamma delta]'; % Annetaan parametrit vektorina
q0=1000; % t
p0=3; % k€/t

```

```
% Simulointi Cobweb-tyyliin
% Alustetaan vektorit tuloksille
allq1=[];
allp1=[];

% Suoritetaan simulaatio kaikilla alkuarvopareilla
for q=linspace((1-accuracy)*q0,(1+accuracy)*q0,N)
    for p=linspace((1-accuracy)*p0,(1+accuracy)*p0,N)
        [qlist,plist]=cobweb(q,p,iter,param);
        allq1=[allq1 ; qlist];
        allp1=[allp1 ; plist];
    end
end

%% Markkinatilanne 2

% Parametrit ja alkuarvot
alpha=480; % t
beta=100; % t^2/k€
gamma=4; % k€/t
delta=-0.002; % k€/t^2
param=[alpha beta gamma delta]'; % Annetaan parametrit vektorina
q0=480; % t
p0=5; % k€/t

% Simulointi Cobweb-tyyliin
% Alustetaan vektorit tuloksille
allq2=[];
allp2=[];

% Suoritetaan simulaatio kaikilla alkuarvopareilla
for q=linspace((1-accuracy)*q0,(1+accuracy)*q0,N)
    for p=linspace((1-accuracy)*p0,(1+accuracy)*p0,N)
        [qlist,plist]=cobweb(q,p,iter,param);
        allq2=[allq2 ; qlist];
        allp2=[allp2 ; plist];
    end
end

%% Plottaus
close all

figure;
subplot(2,1,1)
hold on
for i=1:N^2
    plot(allp1(i,:),allq1(i,:),Marker=".",MarkerEdgeColor="black")
    plot(allp1(i,1),allq1(i,1),LineStyle="none",Color="blue", ...
        Marker="*")
    plot(allp1(i,iter+1),allq1(i,iter+1), ...
        LineStyle="none",Color="red",Marker="*")
end
xlabel("p_t (k€/t)"), ylabel("q_t (t)")
title("Markkinatilanne 1")
```

```
grid on

subplot(2,1,2)
hold on
for i=1:N^2
    plot(allp2(i,:),allq2(i,:),Marker=".",MarkerEdgeColor="black")
    plot(allp2(i,1),allq2(i,1),LineStyle="none",Color="blue", ...
        Marker="*")
    plot(allp2(i,iter+1),allq2(i,iter+1), ...
        LineStyle="none",Color="red",Marker="*")
end
xlabel("p_t (k€/t)"), ylabel("q_t (t)")
title("Markkinatilanne 2")
grid on
```

6.1.3 Funktiot

```
function [qlist,plist] = cobweb(q0,p0,iterations,parameters)
% Tämä funktio ajaa 'iterations' kestoisen 'Cobweb'-tyyppisen simulaation
% mansikan hinnalle ja tuotantomäärälle

qlist=[q0 zeros(1,iterations)];
plist=[p0 zeros(1,iterations)];

for n=1:2*iterations
    % Kun pariton n, päivitetään q_t:tä ja kun parillinen n,
    % päivitetään p_t:tä
    if mod(n,2)~=0
        qlist(n+1)=mansikkamaara(parameters(1),parameters(2),plist(n));
        plist(n+1)=plist(n);
    else
        qlist(n+1)=qlist(n);
        plist(n+1)=mansikkahinta(parameters(3),parameters(4),qlist(n+1));
    end
end
end
```

```
function q_t = mansikkamaara(alpha,beta,p_prev)
% Laskee tänä vuonna kasvatettujen mansikoiden määrän edellisen vuoden
% hinnan perusteella
q_t=alpha+beta*p_prev;
end
```

```
function p_t = mansikkahinta(gamma,delta,q_t)
% Laskee tuotteen hinnan tänä vuonna tuotteen tarjonnan perusteella
p_t=gamma+delta*q_t;
end
```

6.2 Mathematica-lähdekoodi

6.2.1 Analyyttinen ratkaisu

```
In[80]:= ClearAll["Global`*"]
f[pt_] = γ + δ (α + β pt) - pt;
qt[pt_] = 1 / δ (pt - γ);

(*Markkinatilanne 1*)
α = 600;
β = 300;
γ = 3;
δ = -3 / 10000;
pt1 = Solve[f[pt] == 0, pt, Reals][[1, 1, 2]];
qt1 = qt[pt1];
{qt1, pt1}

(*Markkinatilanne 1*)
α = 480;
β = 100;
γ = 4;
δ = -2 / 1000;
pt2 = Solve[f[pt] == 0, pt, Reals][[1, 1, 2]];
qt2 = qt[pt2];
{qt2, pt2}
```

Out[89]= $\left\{\frac{150000}{109}, \frac{282}{109}\right\}$

Out[96]= $\left\{\frac{2200}{3}, \frac{38}{15}\right\}$