$\vdash$ Lógica de Primer Orden

Deducción Natural: el regreso

Paradigmas de Lenguajes de Programación

Departamento de Ciencias de la Computación
Universidad de Buenos Aires

30 de mayo de 2025

Vamos a ver

- ✨ Sintaxis de lógica de primer orden
- ✨ Repaso: unificación en LPO $\rightarrow$ para Resolución
- ✨ Deducción natural para lógica de primer orden
- ✨ Semántica: para demostrar invalidez de juicios

Sintaxis de lógica de primer orden

Lenguajes de primer orden

En vez de variables proposicionales, tenemos:

- ✨ Variables: $\chi = \{X, Y, Z, \dots\}$;
- ✨ Conjunto de símbolos de función: $\mathcal{F} = \{f, g, h, \dots\}$ con aridad ≥ 0;
- ✨ Conjunto (no vacío) de símbolos de predicado: $\mathcal{P} = \{P, Q, R, \dots\}$ con aridad ≥ 0.

Funciones de aridad 0 se las llama constantes.

Sintaxis de lógica de primer orden

Términos de primer orden

$$t ::= X \mid f(t_1, \ldots, t_n)$$

Fórmulas de primer orden

$$\sigma ::= \mathbf{P}(t_1, \ldots, t_n) \mid \forall\, X.\sigma \mid \exists\, X.\sigma \mid \perp \mid \sigma \Rightarrow \sigma \mid \sigma \wedge \sigma \mid \sigma \vee \sigma \mid \neg\sigma$$

donde $\mathbf{P}$ es un predicado de aridad n y los cuantificadores *ligan* variables.

También podemos *sustituir* ocurrencias libres de variables por un término en una fórmula:

$$\sigma\{X := t\}$$

¡Cuidado con el nombre de las variables! Hay que evitar la captura de variables.

Sintaxis de lógica de primer orden

Ejemplos y ejercicios

1. Dados $\mathcal{F} = \{c, f, g\}$, de aridades 0, 1 y 2, y $\mathcal{P} = \{P\}$ binario, determinar si son términos, fórmulas o no son expresiones bien formadas:
   - c
   - $\forall\, f(P(X,Y)).g(Y,c)$
   - $P(f(X),Y) \Rightarrow \exists Y.P(c,Y)$
   - $f(g(c,X))$
   - $\forall Y.(\exists X g(X,Y))$
   - $\forall Y.(\exists X P(X,Y))$

Sintaxis de lógica de primer orden

Ejemplos y ejercicios

1. Dados $\mathcal{F} = \{c, f, g\}$, de aridades 0, 1 y 2, y $\mathcal{P} = \{P\}$ binario, determinar si son términos, fórmulas o no son expresiones bien formadas:
   - c
   - $\forall f(P(X,Y)).g(Y,c)$
   - $P(f(X),Y) \Rightarrow \exists Y.P(c,Y)$
   - $f(g(c,X))$
   - $\forall Y.(\exists X g(X,Y))$
   - $\forall Y.(\exists X P(X,Y))$
2. Identificar variable libres y ligadas de las siguientes fórmulas y realizar la sustitución marcada:
   - $\sigma = \exists X.P(X,Y)$ con $\sigma\{Y := f(Z)\}$
   - $\sigma = P(f(X),Y) \Rightarrow \forall X.P(g(X,Y),Y)$ con $\sigma\{Y := f(X)\}$
   - $\sigma = \exists X.P(f(X),Y) \wedge P(X, g(Y,c))$ con $\sigma\{Y := g(X,Z)\}$

Unificación para LPO

Adaptación de Unificación en expresiones de primer orden

La adaptación del algoritmo de unificación para LPO es importante para Resolución Lógica. Recuerdo idea: ¿Cómo sustituir las variables para obtener las mismas expresiones?

Dados $\mathcal{F} = \{a, b, f, g\}$, de aridades 0, 0, 1 y 1, y $\mathcal{P} = \{P, Q\}$ predicados unario y binario, unir las expresiones entre una fila y la otra que se unifican entre sí:

$$\begin{array}{cccc} P(a) & g(X) & f(b) & Q(Y, f(X)) \\ P(X) & P(b) & Q(f(X), Y) & f(X) \end{array}$$

Deducción natural en LPO

Reglas básicas

$$\frac{}{\Gamma, \tau \vdash \tau}\ \text{ax}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \tau \quad \Gamma \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \tau \wedge \sigma}\ \wedge_i \qquad \frac{\Gamma \vdash \tau \wedge \sigma}{\Gamma \vdash \tau}\ \wedge_{e_1} \qquad \frac{\Gamma \vdash \tau \wedge \sigma}{\Gamma \vdash \sigma}\ \wedge_{e_2}$$

$$\frac{\Gamma, \tau \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \tau \Rightarrow \sigma}\ \Rightarrow_i \qquad \frac{\Gamma \vdash \tau \Rightarrow \sigma \quad \Gamma \vdash \tau}{\Gamma \vdash \sigma}\ \Rightarrow_e$$

$$\frac{\Gamma \vdash \tau}{\Gamma \vdash \tau \vee \sigma}\ \vee_{i_1} \qquad \frac{\Gamma \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \tau \vee \sigma}\ \vee_{i_2} \qquad \frac{\Gamma \vdash \tau \vee \sigma \quad \Gamma, \tau \vdash \rho \quad \Gamma, \sigma \vdash \rho}{\Gamma \vdash \rho}\ \vee_e$$

$$\frac{\Gamma, \tau \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg \tau}\ \neg_i \qquad \frac{\Gamma \vdash \tau \quad \Gamma \vdash \neg \tau}{\Gamma \vdash \bot}\ \neg_e$$

$$\frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \tau}\ \bot_e$$

Lógica intuicionista (LJ)

$$\frac{\Gamma \vdash \neg\neg \tau}{\Gamma \vdash \tau}\ \neg\neg_e$$

Lógica clásica (LK)

Lógica Primer Orden (LPO)

$$\frac{\Gamma \vdash \sigma \quad X \notin fv(\Gamma)}{\Gamma \vdash \forall X.\sigma}\ \forall_i$$

$$\frac{\Gamma \vdash \forall X.\sigma}{\Gamma \vdash \sigma\{X := t\}}\ \forall_e$$

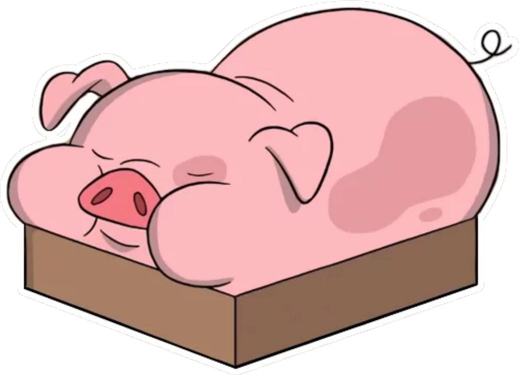
$$\frac{\Gamma \vdash \sigma\{X := t\}}{\Gamma \vdash \exists X.\sigma}\ \exists_i$$

$$\frac{\Gamma \vdash \exists X.\sigma \quad \Gamma, \sigma \vdash \tau \quad X \notin fv(\Gamma, \tau)}{\Gamma \vdash \tau}\ \exists_e$$

Deducción Natural en LPO

Ejemplos y ejercicios

- ✨ Universal implica existencial: $\forall X.P(X) \Rightarrow \exists X.P(X)$
- ✨ Universal/disyunción: $\forall X.(P(X) \vee \sigma) \iff (\forall X.P(X)) \vee \sigma$, asumiendo que $X \notin \mathsf{fv}(\sigma)$.
  Para la dirección $\Rightarrow$ es necesario usar principios de razonamiento clásicos.
- ✨ Existencial/disyunción: $\exists X.(P(X) \vee Q(X)) \iff (\exists X.P(X) \vee \exists X.Q(X))$.
- ✨ De parcial: $(\exists\, X.P(X)) \Rightarrow (\forall\, Y.(P(Y) \Rightarrow Q(Y))) \Rightarrow \exists\, Z.Q(Z)$



INTERVALO

Semántica de la Lógica de Primer Orden

Estructura Semántica de una LPO

Dado un lenguaje de primer orden (es decir, sus funciones y sus predicados), llamamos *estructura* al par $(\mathcal{M}, I)$ tal que:

- ✨ $\mathcal{M}$ es un conjunto no vacío llamado universo
- ✨ I es una función que interpreta (le da una semántica) a cada símbolo en términos de $\mathcal{M}$.
  - Símbolos de constantes en elementos (destacados) de $\mathcal{M}$.
  - Símbolos de funciones en funciones de $\mathcal{M}$.
  - Símbolos de predicados en relaciones de $\mathcal{M}$.

Semántica de la Lógica de Primer Orden

Estructura Semántica de una LPO

Dado un lenguaje de primer orden (es decir, sus funciones y sus predicados), llamamos *estructura* al par $(\mathcal{M}, I)$ tal que:

- ✨ $\mathcal{M}$ es un conjunto no vacío llamado universo
- ✨ I es una función que interpreta (le da una semántica) a cada símbolo en términos de $\mathcal{M}$.
  - Símbolos de constantes en elementos (destacados) de $\mathcal{M}$.
  - Símbolos de funciones en funciones de $\mathcal{M}$.
  - Símbolos de predicados en relaciones de $\mathcal{M}$.

Además tenemos asignaciones que a cada variable le asocian un elemento de $\mathcal{M}$. Combinándola con I, se la puede extender a todos los términos de la lógica.

Tenemos entonces que, fijada una estructura:

- ✨ Fórmulas verdadera para alguna asignación: *satisfactible*
- ✨ Fórmulas verdaderas para cualquier asignación: *válidas*

Lo que se prueba por DN son fórmulas *universalmente válidas* y valen para cualquier estructura y asignación.

Semántica de la Lógica de Primer Orden

Ejemplos y ejercicios

Sea N la interpretación aritmética donde $D_I = \mathbb{N}$ y

$$\begin{array}{ll} \overline{c}^0 & \text{es el } 0, \\ \overline{P}^2 & \text{es } =, \\ \overline{f}_1^1 & \text{es la función sucesor,} \\ \overline{f}_2^2 & \text{es } +, \\ \overline{f}_3^2 & \text{es } \times \end{array}$$

Hallar, si es posible, asignaciones que satisfagan y que no satisfagan las siguientes fórmulas.

1. $P(f_2(X_1, X_1), f_3(f_1(X_1), f_1(X_1)))$
2. $P(f_2(X_1, c), X_2) \Rightarrow P(f_2(X_1, X_2), X_3)$
3. $\neg P(f_3(X_1, X_2), f_3(X_2, X_3))$
4. $\forall X_1.P(f_3(X_1, X_2), X_3)$
5. $\forall X_1.(P(f_3(X_1, c), X_1) \Rightarrow P(X_1, X_2))$

¿Pr∃gunt∀s?