Práctica N° 5 - Inferencia de tipos

Aclaraciones:

Los ejercicios marcados con el símbolo ★ constituyen un subconjunto mínimo de ejercitación. Sin embargo, aconsejamos fuertemente hacer todos los ejercicios.

Gramáticas a tener en cuenta:

- Términos **anotados**
  $M ::= x \mid \lambda x\!:\!\sigma.M \mid M\,M \mid \mathsf{True} \mid \mathsf{False} \mid \mathsf{if}\ M\ \mathsf{then}\ M\ \mathsf{else}\ M$
  $\mid \mathsf{zero} \mid \mathsf{succ}(M) \mid \mathsf{pred}(M) \mid \mathsf{isZero}(M) \mid \mu x\!:\sigma.M$

  Donde la letra x representa un *nombre de variable* arbitrario. Tales nombres se toman de un conjunto infinito dado $\mathfrak{X} = \{w, w_1, w_2, \ldots, x, x_1, x_2, \ldots, y, y_1, y_2, \ldots, f, f_1, f_2, \ldots\}$
- Términos **sin anotaciones**
  $U ::= x \mid \lambda x.U \mid U\ U \mid \mathsf{True} \mid \mathsf{False} \mid \mathsf{if}\ U\ \mathsf{then}\ U\ \mathsf{else}\ U \mid \mathsf{zero} \mid \mathsf{succ}(U) \mid \mathsf{pred}(U) \mid \mathsf{isZero}(U) \mid \mu x.U$
- Tipos
  $\tau ::= \mathsf{Bool} \mid \mathsf{Nat} \mid \tau \to \tau \mid X_n$
  Donde n es un número natural, de tal modo que X_n representa una *variable de tipos* arbitraria tomada de un conjunto $\mathfrak{T} = \{X_1, X_2, X_3, \ldots\}$.
  Nota: también podemos referirnos a las variables de tipos como *incógnitas*.

Ejercicio 1

Determinar qué expresiones son sintácticamente válidas y, para las que lo sean, indicar a qué gramática pertenecen (tipos, términos anotados o términos sin anotaciones).

I. $\lambda x\!:\mathsf{Bool}.\mathsf{succ}(x)$
II. $\lambda x.\mathsf{isZero}(x)$
III. $X_1 \to \sigma$
IV. $erase(f\ y)$
V. X_1
VI. $X_1 \to (\mathsf{Bool} \to X_2)$
VII. $\lambda x\!: X_1 \to X_2.\,\mathsf{if\ zero\ then\ True\ else\ zero\ succ(True)}$
VIII. $erase(\lambda f\!: \mathsf{Bool} \to \mathsf{s}.\lambda y\!: \mathsf{Bool}.f\ y)$

Ejercicio 2

Determinar el resultado de aplicar la sustitución S a las siguientes expresiones

I. $S = \{X_1 := \mathsf{Nat}\}$ $\quad S(\{x : X_1 \to \mathsf{Bool}\})$
II. $S = \{X_1 := X_2 \to X_3,\ X_4 := \mathsf{Bool}\}$ $\quad S(\{x : X_4 \to \mathsf{Bool}\}) \vdash S(\lambda x\!: X_1 \to \mathsf{Bool}.x) : S(\mathsf{Nat} \to X_2)$

Ejercicio 3

Unir con flechas los tipos que unifican entre sí (entre una fila y la otra). Para cada par unificable, exhibir el *mgu* ("most general unifier").

$X_1 \to X_2$	Nat	$X_2 \to \mathsf{Bool}$	$X_3 \to X_4 \to X_5$
X_1	$\mathsf{Nat} \to \mathsf{Bool}$	$(\mathsf{Nat} \to X_2) \to \mathsf{Bool}$	$\mathsf{Nat} \to X_2 \to \mathsf{Bool}$

Ejercicio 4

Decidir, utilizando el algoritmo de inferencia, cuáles de las siguientes expresiones son tipables. Mostrar qué reglas y sustituciones se aplican en cada paso y justificar por qué no son tipables aquéllas que fallan.

I. $\lambda z.$ if z then zero else succ(zero)

II. $\lambda y.$ succ($(\lambda x.x)\ y$)

III. $\lambda x.$ if isZero(x) then x else (if x then x else x)

IV. $\lambda x.\lambda y.$ if x then y else succ(zero)

V. if True then (λx.zero)zero else (λx.zero)False

VI. ($\lambda f.$ if True then $f$zero else f False) ($\lambda x.$ zero)

VII. $\lambda x.\lambda y.\lambda z.$ if z then y else succ(x)

Ejercicio 5 ★

Utilizando el algoritmo de inferencia, inferir el tipo de las siguientes expresiones o demostrar que no son tipables. En cada paso donde se realice una unificación, mostrar el conjunto de ecuaciones a unificar y la sustitución obtenida como resultado de la misma.

- $\lambda x.\ \lambda y.\ \lambda z.\ z\ x\ y\ z$
- $\lambda x.\ x\ (w\ (\lambda y.w\ y))$
- $\lambda x.\lambda y.\ xy$
- $\lambda x.\lambda y.\ yx$
- $\lambda x.(\lambda x.\ x)$
- $\lambda x.(\lambda y.\ y)x$
- $(\lambda z.\lambda x.\ x\ (z\ (\lambda y.\ z)))$ True

Ejercicio 6 *(Numerales de Church)*

Indicar tipos σ y τ apropiados de modo que los términos de la forma $\lambda y : \sigma.\lambda x : \tau.y^n(x)$ resulten tipables para todo n natural. El par (σ, τ) debe ser el mismo para todos los términos. Observar si tienen todos el mismo tipo. Notación: $M^0(N) = N, M^{n+1}(N) = M(M^n(N))$. *Sugerencia:* empezar haciendo inferencia para $n = 2$ – es decir, calcular el juicio de tipado más general para $\lambda y.\lambda x.y(yx)$ – y generalizar el resultado.

Ejercicio 7

I. Utilizar el algoritmo de inferencia sobre la siguiente expresión: $\lambda y.(x\ y)\ (\lambda z.x_2)$

II. Una vez calculado, demostrar (utilizando chequeo de tipos) que el juicio encontrado es correcto.

III. ¿Qué ocurriría si x_2 fuera x?

Ejercicio 8

Tener en cuenta el tipo de los pares definido como: $\tau ::= \ldots \mid \tau \times \tau$

Con expresiones nuevas definidas como: $M ::= \ldots \mid \langle M,\ M\rangle \mid \pi_1(M) \mid \pi_2(M)$

Y las siguientes reglas de tipado:

$$\frac{\Gamma \vdash M : \tau \qquad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash \langle M, N\rangle : \tau \times \sigma} \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \tau \times \sigma}{\Gamma \vdash \pi_1(M) : \tau} \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \tau \times \sigma}{\Gamma \vdash \pi_2(M) : \sigma}$$

Se extiende el algoritmo $\mathcal{I}$ con las siguientes reglas:

$\mathcal{I}(\Gamma \mid \langle M_1, M_2\rangle) = (\tau \times \sigma \mid E_1 \cup E_2)$
donde:

- $\mathcal{I}(\Gamma \mid M_1) = (\tau \mid E_1)$
- $\mathcal{I}(\Gamma \mid M_2) = (\sigma \mid E_2)$

$\mathcal{I}(\Gamma \mid \pi_1(M)) = (\sigma \mid \{\tau \stackrel{?}{=} \sigma \times \rho\} \cup E)$
donde $\mathcal{I}(\Gamma \mid M) = (\tau \mid E)$

$\mathcal{I}(\Gamma \mid \pi_2(M)) = (\rho \mid \{\tau \stackrel{?}{=} \sigma \times \rho\} \cup E)$
donde $\mathcal{I}(\Gamma \mid M) = (\tau \mid E)$

I. Tipar la expresión $(\lambda f.\langle f,\underline{2}\rangle)\ (\lambda x.x\ \underline{1})$ utilizando la versión extendida del algoritmo.

II. Intentar tipar la siguiente expresión utilizando la versión extendida del algoritmo.
$(\lambda f.\langle f\ \underline{2},\ f\ \mathsf{True}\rangle)\ (\lambda x.x)$
Mostrar en qué punto la inferencia falla y por qué motivo.

Ejercicio 9 ★

Se extienden el Cálculo Lambda y algoritmo de inferencia para soportar uniones disjuntas de la siguiente manera:

$$\begin{array}{lll} \tau & ::= & \ldots \mid \tau + \tau \\ M & ::= & \ldots \mid \mathsf{left}_\tau(M) \mid \mathsf{right}_\tau(M) \mid \mathsf{case}\ M\ \mathsf{of}\ \mathsf{left}(x) \rightsquigarrow M \parallel \mathsf{right}(y) \rightsquigarrow M \end{array}$$

$\mathcal{I}(\Gamma \mid \mathsf{left}_\sigma(M)) = (\tau + \sigma \mid E)$
donde $\mathcal{I}(\Gamma \mid M) = (\tau \mid E)$

$\mathcal{I}(\Gamma \mid \mathsf{right}_\sigma(M)) = (\sigma + \tau \mid E)$
donde $\mathcal{I}(\Gamma \mid M) = (\tau \mid E)$

$\mathcal{I}(\Gamma \mid \mathsf{case}\ M_1\ \mathsf{of}\ \mathsf{left}(x) \rightsquigarrow M_2 \parallel \mathsf{right}(y) \rightsquigarrow M_3) = (\tau_2 \mid \{\tau_1 \stackrel{?}{=} X_x + X_y, \tau_2 \stackrel{?}{=} \tau_3\} \cup E_1 \cup E_2 \cup E_3)$
donde:

- $\mathcal{I}(\Gamma \mid M_1) = (\tau_1 \mid E_1)$
- $\mathcal{I}(\Gamma, x : X_x \mid M_2) = (\tau_2 \mid E_2)$
- $\mathcal{I}(\Gamma, y : X_y \mid M_3) = (\tau_3 \mid E_3)$
- X_x y X_y variables frescas.

Utilizando esta extensión del algoritmo, encontrar los juicios de tipado más generales para los siguientes términos o indicar por qué no es posible:

I. $\mathsf{case}\ \mathsf{left}(\underline{1})\ \mathsf{of}\ \mathsf{left}(x) \rightsquigarrow \mathsf{isZero}(x) \parallel \mathsf{right}(y) \rightsquigarrow \mathsf{True}$

II. $\mathsf{case}\ \mathsf{right}(z)\ \mathsf{of}\ \mathsf{left}(x) \rightsquigarrow \mathsf{isZero}(x) \parallel \mathsf{right}(y) \rightsquigarrow y$

III. $\mathsf{case}\ \mathsf{right}(\mathsf{zero})\ \mathsf{of}\ \mathsf{left}(x) \rightsquigarrow \mathsf{isZero}(x) \parallel \mathsf{right}(y) \rightsquigarrow y$

IV. $\mathsf{case}\ x\ \mathsf{of}\ \mathsf{left}(x) \rightsquigarrow \mathsf{isZero}(x) \parallel \mathsf{right}(y) \rightsquigarrow y$

V. $\mathsf{case}\ \mathsf{left}(z)\ \mathsf{of}\ \mathsf{left}(x) \rightsquigarrow z \parallel \mathsf{right}(y) \rightsquigarrow y$

VI. $\mathsf{case}\ z\ \mathsf{of}\ \mathsf{left}(x) \rightsquigarrow z \parallel \mathsf{right}(y) \rightsquigarrow y$

Ejercicio 10

Se extienden el Cálculo Lambda y algoritmo de inferencia para soportar listas de la siguiente manera:

$$\begin{array}{lll} \tau & ::= & \ldots \mid [\tau] \\ M & ::= & \ldots \mid [\ ]_\tau \mid M :: M \mid \mathsf{foldr}\ M\ \mathsf{base} \hookrightarrow M;\ \mathsf{rec}(h, r) \hookrightarrow M \end{array}$$

$\mathcal{I}(\Gamma \mid [\ ]_\tau) = ([\tau] \mid \emptyset)$

$\mathcal{I}(\Gamma \mid M_1 :: M_2) = (\tau_2 \mid \{\tau_2 \stackrel{?}{=} [\tau_1]\} \cup E_1 \cup E_2)$
donde:

- $\mathcal{I}(\Gamma \mid M_1) = (\tau_1 \mid E_1)$
- $\mathcal{I}(\Gamma \mid M_2) = (\tau_2 \mid E_2)$

$\mathcal{I}(\Gamma \mid \mathsf{foldr}\, M_1\, \mathsf{base} \hookrightarrow M_2;\ \mathsf{rec}(h, r) \hookrightarrow M_3) = (\tau_2 \mid \{\tau_1 \stackrel{?}{=} [X_h], \tau_2 \stackrel{?}{=} \tau_3, \tau_3 \stackrel{?}{=} X_r\} \cup E_1 \cup E_2 \cup E_3)$
donde:

- $\mathcal{I}(\Gamma \mid M_1) = (\tau_1 \mid E_1)$
- $\mathcal{I}(\Gamma \mid M_2) = (\tau_2 \mid E_2)$
- $\mathcal{I}(\Gamma, h : X_h, r : X_r \mid M_3) = (\tau_3 \mid E_3)$
- X_h y X_r variables frescas.

Utilizando esta extensión del algoritmo, encontrar los juicios de tipado más generales para los siguientes términos o indicar por qué no es posible:

I. $\mathsf{foldr}\ x :: [\,]\ \mathsf{base} \hookrightarrow [\,];\ \mathsf{rec}(h, r) \hookrightarrow \mathsf{isZero}(h) :: r$

II. $\mathsf{foldr}\ (\lambda x.\mathsf{succ}(x)) :: [\,]\ \mathsf{base} \hookrightarrow [\,];\ \mathsf{rec}(x, r) \hookrightarrow \mathsf{if}\ p\ x\ \mathsf{then}\ x :: r\ \mathsf{else}\ r$

III. $\mathsf{foldr}\ x\ \mathsf{base} \hookrightarrow x;\ \mathsf{rec}(h, r) \hookrightarrow \mathsf{isZero}(h) :: r$

IV. $\mathsf{foldr}\ x\ \mathsf{base} \hookrightarrow \mathsf{True};\ \mathsf{rec}(h, x) \hookrightarrow x$