

Clase práctica

✨ Resolución en lógica de primer orden ✨

Paradigmas de Lenguajes de Programación

Departamento de Computación
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

16/06/2025

Agenda

Resolución General ✨

- Repaso

- Método de resolución

- En lógica proposicional

- En lógica de primer orden

- Ejercicios

Resolución lineal y SLD ✨

- Resolución lineal

- Motivación

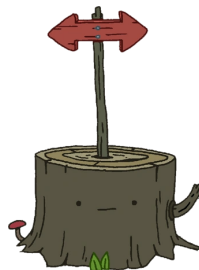
- Cláusulas de Horn

- Resolución SLD

- Árbol de resolución

- De Prolog a resolución

- Ejemplo completo



¿Qué es?

- Procedimiento para determinar la **insatisfactibilidad** de una fórmula.
- Es útil como técnica de **demostración por refutación** (i.e., probar que τ es válida mostrando que $\neg\tau$ es insatisfactible).
- Consiste en la **aplicación sucesiva** de una regla de inferencia a un conjunto de cláusulas.

Satisfactibilidad y validez

En general,

- Una *asignación* asocia variables a valores del dominio.
- Una fórmula τ es **válida** sii toda asignación la hace verdadera.
- Una fórmula τ es **satisfactible** sii alguna asignación la hace verdadera.

El siguiente hecho permite utilizar al método como técnica de demostración:

τ es válida sii $\neg\tau$ es insatisfactible

Cláusulas y FNC

El método trabaja con fórmulas en **forma normal conjuntiva**.

- Conjunción de disyunciones de literales, siendo un *literal* una fórmula atómica o su negación.
- Una *cláusula* es cada una de estas disyunciones de literales. Las representamos en notación de conjuntos.

Ejemplo:

$$\{\neg \text{menor}(X, Y), \text{menor}(c, Y)\}$$

representa la cláusula

$$\forall X. \forall Y. (\neg \text{menor}(X, Y) \vee \text{menor}(c, Y))$$

Cláusulas y FNC

De esta manera, notamos a una fórmula en FNC como un conjunto de cláusulas. Este se entiende como la conjunción de todas ellas.

Por ejemplo, el conjunto que contiene a las cláusulas

- $\{\neg\text{menor}(X, Y), \text{menor}(c, Y)\}$
- $\{\text{impar}(Z), \text{mayor}(Z, w)\}$

representa la fórmula

$$\forall X. \forall Y. (\neg\text{menor}(X, Y) \vee \text{menor}(c, Y)) \wedge \forall Z. (\text{impar}(Z) \vee \text{mayor}(Z, w))$$

Método de Resolución

Repaso

Estrategia

- Para demostrar que **una fórmula** es universalmente válida
Demostramos que **su negación** es insatisfactible.
- Para demostrar que τ se deduce de $\sigma_1, \dots, \sigma_n$
Demostramos que $\sigma_1, \dots, \sigma_n, \neg\tau$ es insatisfactible.
La fórmula es $\sigma_1 \wedge \dots \wedge \sigma_n \Rightarrow \tau$.

Esquema general

- Expresar la o las fórmulas como **cláusulas**.
- Aplicar sucesivamente un **paso de resolución** (generando nuevas cláusulas)...
- Hasta llegar a la cláusula vacía o concluir que no es posible llegar a ella.
- Importante: al aplicar resolución suelen presentarse varias opciones.
Conviene tener un plan.

La regla de resolución en el marco proposicional

$$\frac{\sigma_i = \{A_1, \dots, A_m, Q\} \quad \sigma_j = \{B_1, \dots, B_n, \neg Q\}}{\tau = \{A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_n\}}$$

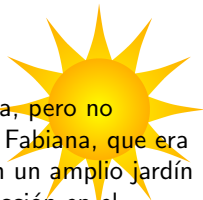
- A τ se la llama **resolvente** (de σ_i y σ_j)
- La regla se apoya en el hecho de que la siguiente proposición es una tautología:

$$(\alpha \vee P) \wedge (\beta \vee \neg P) \Leftrightarrow (\alpha \vee P) \wedge (\beta \vee \neg P) \wedge (\alpha \vee \beta)$$

- El conjunto de cláusulas $\{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$ es lógicamente equivalente a $\{\sigma_1, \dots, \sigma_k, \tau\}$

Ejemplo para entrar en calor

Práctica 7 - Ejercicio 4



Un grupo de amigos quería juntarse a comer en una casa, pero no decidían en cuál. Prevalcían dos propuestas: la casa de Fabiana, que era cómoda y espaciosa, y la de Manuel, más chica pero con un amplio jardín y parrilla al aire libre. Finalmente acordaron basar su elección en el pronóstico del tiempo. Si anunciaban lluvia, se reunirían en la casa de Fabiana; y si no, en la de Manuel. (Desde ya, se juntarían en una sola casa.)

Finalmente el grupo se juntó a comer en la casa de Fabiana, pero no llovió.

Utilizar las siguientes proposiciones para demostrar - mediante el método de resolución - que el pronóstico se equivocó (anunció lluvia y no llovió, o viceversa).

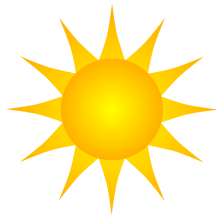
P = "El pronóstico anunció lluvia."

F = "El grupo se reúne en la casa de Fabiana."

M = "El grupo se reúne en la casa de Manuel."

L = "Llueve en el día de la reunión."

Probémoslo



Tenemos...

1. $P \Rightarrow F \leadsto \neg P \vee F$
2. $\neg P \Rightarrow M \leadsto P \vee M$
3. $\neg(F \wedge M) \leadsto \neg F \vee \neg M$
4. F
5. $\neg L$

Queremos ver que:

$$(P \wedge \neg L) \vee (\neg P \wedge L)$$

Negación:

$$\neg((P \wedge \neg L) \vee (\neg P \wedge L)) \leadsto (\neg P \vee L) \wedge (P \vee \neg L)$$

Expresando las cláusulas como conjuntos

1. $\{\neg P, F\}$
2. $\{P, M\}$
3. $\{\neg F, \neg M\}$
4. $\{F\}$
5. $\{\neg L\}$
6. $\{\neg P, L\}$
7. $\{P, \neg L\}$

De 6 y 2: 8. $\{L, M\}$

De 8 y 3: 9. $\{L, \neg F\}$

De 9 y 4: 10. $\{L\}$

De 10 y 5: \square



Ayuda: pensemos en lo que queremos demostrar y ¡hagamos un plan! Suponemos que el pronóstico no anunció lluvia o llovió...

Pasaje a FNC

Paso a paso

1. Eliminar implicación
2. Forma normal negada
3. Forma normal prenexa (opcional)
4. Forma normal de Skolem (dependencias = variables libres dentro del alcance del \exists)
5. Forma normal conjuntiva
6. Distribución de cuantificadores y renombre de variables

La regla de resolución en primer orden

$$\frac{\sigma_i = \{A_1, \dots, A_m, P_1, \dots, P_k\} \quad \sigma_j = \{B_1, \dots, B_n, \neg Q_1, \dots, \neg Q_l\}}{\tau = S(\{A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_n\})}$$

- S es el MGU de $\{P_1 \stackrel{?}{=} \dots \stackrel{?}{=} P_k \stackrel{?}{=} Q_1 \stackrel{?}{=} \dots \stackrel{?}{=} Q_l\}$
es decir, $S(P_1) = \dots = S(P_k) = S(Q_1) = \dots = S(Q_l)$.
- A τ se la llama **resolvente** (de σ_i y σ_j).
- Cada paso de resolución **preserva satisfactibilidad** (Teorema de Herbrand-Skolem-Gödel).

Resolución en lógica de primer orden

⚠ Cosas importantes para recordar¹ ⚠

- Al skolemizar, usar la misma constante o función si y sólo si la variable que estamos eliminando es **la misma** (nunca para otras, aun si tienen el mismo nombre).
- Para encontrar las dependencias, ver qué variables están libres dentro del alcance del \exists (sin contar la que se está eliminando).
- ¡No olvidarse de negar lo que se quiere demostrar! Y recordar que $\neg((\sigma_1 \wedge \dots \wedge \sigma_n) \Rightarrow \tau) = \sigma_1 \wedge \dots \wedge \sigma_n \wedge \neg\tau$.
- Antes de empezar a aplicar pasos de resolución, convencerse de que lo que se quiere demostrar es verdadero, y trazar un plan para demostrarlo (mentalmente o por escrito).
- Recordar bien cómo funciona la unificación, y sustituir siempre **variables** (ni funciones, ni constantes, ni predicados).

¹Seguir las indicaciones de esta lista previene los errores más frecuentes en los parciales.

Ejemplo

Recuperatorio 2° parcial 1° Cuat. 2012

- Representar en forma clausal la siguiente información referida a conjuntos, pertenencia (predicado Pert) e inclusión (predicado Inc).
 - i $\forall X. \forall Y. (\text{Inc}(X, Y) \Leftrightarrow \forall Z. (\text{Pert}(Z, X) \Rightarrow \text{Pert}(Z, Y)))$
 X está incluido en Y si y solo si cada elemento de X es un elemento de Y .
 - ii $\forall X. \neg \text{Pert}(X, \emptyset)$
Ningún elemento pertenece al vacío.
- Usar resolución para probar que el vacío está incluido en todo conjunto.
- Indicar justificando si la prueba realizada es SLD (volveremos sobre esto más adelante).

Ejemplo

Recuperatorio 2° parcial 1° Cuat. 2012

Cast.: $X \subseteq Y$ si y solo si cada elemento de X es un elemento de Y .

1° o.: $\forall X. \forall Y. (\text{Inc}(X, Y) \Leftrightarrow (\forall Z. (\text{Pert}(Z, X) \Rightarrow \text{Pert}(Z, Y))))$

Claus.: $\{\neg \text{Inc}(X_1, Y_1), \neg \text{Pert}(Z_1, X_1), \text{Pert}(Z_1, Y_1)\}$
 $\{\text{Inc}(X_2, Y_2), \text{Pert}(f(X_2, Y_2), X_2)\}$
 $\{\text{Inc}(X_3, Y_3), \neg \text{Pert}(f(X_3, Y_3), Y_3)\}$

Cast.: Ningún elemento pertenece al vacío.

1° o.: $\forall X. \neg \text{Pert}(X, \emptyset)$

Claus.: $\{\neg \text{Pert}(X_4, \emptyset)\}$

Ejemplo (cont.)

Recuperatorio 2° parcial 1° Cuat. 2012

A partir de ellas, se desea demostrar que:

Cast.: El vacío está incluido en todo conjunto.

1° o.: $\forall X. \text{Inc}(\emptyset, X)$

Neg.: $\exists X. \neg \text{Inc}(\emptyset, X)$

Claus.: $\{\neg \text{Inc}(\emptyset, c)\}$

Ejemplo

Recuperatorio 2° parcial 1° Cuat. 2012

Cast.: $X \subseteq Y$ si y solo si cada elemento de X es un elemento de Y .

1° o.: $\forall X. \forall Y. (\text{Inc}(X, Y) \Leftrightarrow (\forall Z. (\text{Pert}(Z, X) \Rightarrow \text{Pert}(Z, Y))))$

Claus.: $\{\neg \text{Inc}(X_1, Y_1), \neg \text{Pert}(Z_1, X_1), \text{Pert}(Z_1, Y_1)\}$
 $\{\text{Inc}(X_2, Y_2), \text{Pert}(f(X_2, Y_2), X_2)\}$
 $\{\text{Inc}(X_3, Y_3), \neg \text{Pert}(f(X_3, Y_3), Y_3)\}$

Cast.: Ningún elemento pertenece al vacío.

1° o.: $\forall X. \neg \text{Pert}(X, \emptyset)$

Claus.: $\{\neg \text{Pert}(X_4, \emptyset)\}$

Ejemplo (cont.)

Recuperatorio 2° parcial 1° Cuat. 2012

A partir de ellas, se desea demostrar que:

Cast.: El vacío está incluido en todo conjunto.

1° o.: $\forall X. \text{Inc}(\emptyset, X)$

Neg.: $\exists X. \neg \text{Inc}(\emptyset, X)$

Claus.: $\{\neg \text{Inc}(\emptyset, c)\}$

Ejemplo (resolviendo)

Recuperatorio 2° parcial 1° Cuat. 2012

$$\frac{\{A_1, \dots, A_m, P_1, \dots, P_k\} \quad \{B_1, \dots, B_n, \neg Q_1, \dots, \neg Q_l\}}{S(\{A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_n\})}$$

donde S es el MGU de $\{P_1, \dots, P_k, Q_1, \dots, Q_l\}$.

1. $\{\neg \text{Inc}(X_1, Y_1), \neg \text{Pert}(Z_1, X_1), \text{Pert}(Z_1, Y_1)\}$
2. $\{\text{Inc}(X_2, Y_2), \text{Pert}(f(X_2, Y_2), X_2)\}$
3. $\{\text{Inc}(X_3, Y_3), \neg \text{Pert}(f(X_3, Y_3), Y_3)\}$
4. $\{\neg \text{Pert}(X_4, \emptyset)\}$
5. $\{\neg \text{Inc}(\emptyset, c)\}$
6. (2 y 5) $\{\text{Pert}(f(\emptyset, c), \emptyset)\}$ $S = \{X_2 := \emptyset, Y_2 := c\}$
7. (6 y 4) \square $S = \{X_4 := f(\emptyset, c)\}$

Otro ejemplo

Recuperatorio 2° parcial 2° Cuat. 2008

Dadas las siguientes definiciones de Descendiente y Abuela a partir de la relación Madre:

- Los hijos son descendientes:

$$\forall X. \forall Y. (\text{Madre}(X, Y) \Rightarrow \text{Descendiente}(Y, X))$$

- La relación de descendencia es transitiva:

$$\forall X. \forall Y. \forall Z. (\text{Descendiente}(X, Y) \wedge \text{Descendiente}(Y, Z) \Rightarrow \text{Descendiente}(X, Z))$$

- La abuela es madre de alguien que es madre de la nieta:

$$\forall X. \forall Y. (\text{Abuela}(X, Y) \Rightarrow \exists Z. (\text{Madre}(X, Z) \wedge \text{Madre}(Z, Y)))$$

Demostrar usando resolución general que los nietos son descendientes; es decir, que

$$\forall X. \forall Y. (\text{Abuela}(X, Y) \Rightarrow \text{Descendiente}(Y, X))$$

Ayuda: tratar de aplicar el método a ciegas puede traer problemas.

Conviene tener en mente lo que se quiere demostrar.

Otro ejemplo

Recuperatorio 2° parcial 2° Cuat. 2008

Cast.: Los hijos son descendientes.

1° o.: $\forall X. \forall Y. (\text{Madre}(X, Y) \Rightarrow \text{Descendiente}(Y, X))$

Claus.: $\{\neg \text{Madre}(X_1, Y_1), \text{Descendiente}(Y_1, X_1)\}$

Cast.: La relación de descendencia es transitiva.

1° o.: $\forall X. \forall Y. \forall Z. (\text{Descendiente}(X, Y) \wedge \text{Descendiente}(Y, Z) \Rightarrow \text{Descendiente}(X, Z))$

Claus.: $\{\neg \text{Descendiente}(X_2, Y_2), \neg \text{Descendiente}(Y_2, Z_2), \text{Descendiente}(X_2, Z_2)\}$

Cast.: La abuela es madre de alguien que es madre de la nieta.

1° o.: $\forall X. \forall Y. (\text{Abuela}(X, Y) \Rightarrow \exists Z. (\text{Madre}(X, Z) \wedge \text{Madre}(Z, Y)))$

Claus.: $\{\neg \text{Abuela}(X_3, Y_3), \text{Madre}(X_3, \text{medio}(X_3, Y_3))\}$
 $\{\neg \text{Abuela}(X_4, Y_4), \text{Madre}(\text{medio}(X_4, Y_4), Y_4)\}$

Otro ejemplo (cont.)

Recuperatorio 2° parcial 2° Cuat. 2008

A partir de ellas, se desea demostrar que:

Cast.: Los nietos son descendientes

1° o.: $\forall X. \forall Y. (Abuela(X, Y) \Rightarrow Descendiente(Y, X))$

Neg.: $\exists X. \exists Y. (Abuela(X, Y) \wedge \neg Descendiente(Y, X))$

Claus.: $\{Abuela(a, b)\}$
 $\{\neg Descendiente(b, a)\}$

Otro ejemplo

Recuperatorio 2° parcial 2° Cuat. 2008

Cast.: Los hijos son descendientes.

1° o.: $\forall X. \forall Y. (\text{Madre}(X, Y) \Rightarrow \text{Descendiente}(Y, X))$

Claus.: $\{\neg \text{Madre}(X_1, Y_1), \text{Descendiente}(Y_1, X_1)\}$

Cast.: La relación de descendencia es transitiva.

1° o.: $\forall X. \forall Y. \forall Z. (\text{Descendiente}(X, Y) \wedge \text{Descendiente}(Y, Z) \Rightarrow \text{Descendiente}(X, Z))$

Claus.: $\{\neg \text{Descendiente}(X_2, Y_2), \neg \text{Descendiente}(Y_2, Z_2), \text{Descendiente}(X_2, Z_2)\}$

Cast.: La abuela es madre de alguien que es madre de la nieta.

1° o.: $\forall X. \forall Y. (\text{Abuela}(X, Y) \Rightarrow \exists Z. (\text{Madre}(X, Z) \wedge \text{Madre}(Z, Y)))$

Claus.: $\{\neg \text{Abuela}(X_3, Y_3), \text{Madre}(X_3, \text{medio}(X_3, Y_3))\}$
 $\{\neg \text{Abuela}(X_4, Y_4), \text{Madre}(\text{medio}(X_4, Y_4), Y_4)\}$

Otro ejemplo (cont.)

Recuperatorio 2° parcial 2° Cuat. 2008

A partir de ellas, se desea demostrar que:

Cast.: Los nietos son descendientes

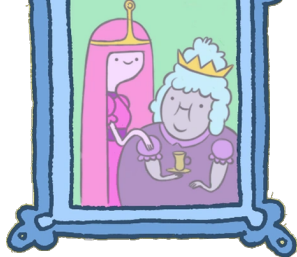
1° o.: $\forall X. \forall Y. (Abuela(X, Y) \Rightarrow Descendiente(Y, X))$

Neg.: $\exists X. \exists Y. (Abuela(X, Y) \wedge \neg Descendiente(Y, X))$

Claus.: $\{Abuela(a, b)\}$
 $\{\neg Descendiente(b, a)\}$

Otro ejemplo (resolviendo)

Recuperatorio 2° parcial 2° Cuat. 2008



1. $\{\neg \text{Madre}(X_1, Y_1), \text{Descendiente}(Y_1, X_1)\}$
2. $\{\neg \text{Descendiente}(X_2, Y_2), \neg \text{Descendiente}(Y_2, Z_2), \text{Descendiente}(X_2, Z_2)\}$
3. $\{\neg \text{Abuela}(X_3, Y_3), \text{Madre}(X_3, \text{medio}(X_3, Y_3))\}$
4. $\{\neg \text{Abuela}(X_4, Y_4), \text{Madre}(\text{medio}(X_4, Y_4), Y_4)\}$
5. $\{\text{Abuela}(a, b)\}$
6. $\{\neg \text{Descendiente}(b, a)\}$

Resolvámoslo con nuestra herramienta.

Resolución General ✨

Repaso

Método de resolución

En lógica proposicional

En lógica de primer orden

Ejercicios

Resolución lineal y SLD ✨

Resolución lineal

Motivación

Cláusulas de Horn

Resolución SLD

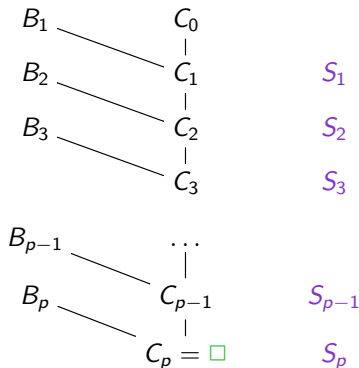
Árbol de resolución

De Prolog a resolución

Ejemplo completo

Cómo mantenernos en línea

Si un conjunto de cláusulas \mathcal{C} es insatisfactible, existe una secuencia de pasos de resolución *lineal* que lo refuta (prueba su insatisfactibilidad). Es decir, una secuencia de la forma:



donde C_0 y cada B_i es un elemento de \mathcal{C} o algún C_j con $j < i$.

Resolución SLD (*Selective Linear Definite*)

La resolución es cara, pero hay cupones de descuento...

- El método de resolución es completo, pero ineficiente.
- El espacio de búsqueda - inicialmente cuadrático - crece en cada paso.
- Resolución lineal reduce el espacio de búsqueda.
- Resolución SLD es lineal y (un poco) más eficiente, preservando completitud...

¡pero no puede aplicarse a cualquier conjunto de cláusulas!

Cláusulas de Horn

- **Cláusula de Horn**

- ▶ Cláusula de la forma $\forall X_1 \dots \forall X_m. C$ tal que la disyunción de literales C tiene **a lo sumo** un literal positivo.

- **Cláusula de definición** (“Definite Clause”)

- ▶ Cláusula de la forma $\forall X_1 \dots \forall X_m. C$ tal que la disyunción de literales C tiene **exactamente** un literal positivo.

- Sea $H = P \cup \{G\}$ un conjunto de cláusulas de Horn (con nombre de variables disjuntos) tal que

- ▶ P conjunto de cláusulas de definición y
- ▶ G una cláusula sin literales positivos.

- $H = P \cup \{G\}$ son las **cláusulas de entrada**.

- ▶ P se conoce como el **programa o base de conocimientos** y
- ▶ G el **goal, meta o cláusula objetivo**.

Cláusulas de Horn



Cláusulas con a lo sumo un literal positivo.

- $\{P(X), P(Y), \neg Q(Y, Z)\}$
- $\{Q(e, Z)\}$ ✓ \rightarrow cláusula de **definición** (*hecho*)
- $\{P(X), \neg P(e)\}$ ✓ \rightarrow cláusula de **definición** (*regla*)
- $\{P(X), \neg P(e), Q(X, Y)\}$
- $\{P(X), \neg P(e), \neg Q(X, Y)\}$ ✓ \rightarrow cláusula de **definición** (*regla*)
- $\{\neg P(X), \neg P(e), \neg Q(X, Y)\}$ ✓ \rightarrow cláusula **objetivo**

⚠ No toda fórmula puede expresarse
como una cláusula de Horn ⚠

$$\forall X.(P(X) \vee Q(X))$$

Resolución SLD

Una secuencia de pasos de **resolución SLD** para un conjunto de cláusulas de Horn H es una secuencia

$$\langle N_0, N_1, \dots, N_p \rangle$$

de **cláusulas objetivo** que satisfacen las siguientes dos condiciones:

1. $N_0 \in H$ (N_0 es la cláusula objetivo de H).
2. *sigue en transparencia siguiente.*

Resolución SLD

2. para todo N_i en la secuencia, $0 < i < p$, si N_i es

$$\{\neg A_1, \dots, \neg A_{k-1}, \neg A_k, \neg A_{k+1}, \dots, \neg A_n\}$$

entonces hay alguna **cláusula de definición** C_i de la forma $\{A, \neg B_1, \dots, \neg B_m\}$ en H , tal que A_k y A son unificables con MGU S , y N_{i+1} es $\{S(\neg A_1, \dots, \neg A_{k-1}, \neg B_1, \dots, \neg B_m, \neg A_{k+1}, \dots, \neg A_n)\}$.

Resolución SLD

Un caso particular de la resolución general.

- Cláusulas de Horn con **exactamente una** cláusula objetivo.
- Resolvemos la cláusula objetivo con una cláusula de definición.
- Eso nos da otra cláusula objetivo.
- Repetimos el proceso con esta nueva cláusula...
- Hasta llegar a la cláusula vacía.
- Si se busca un resultado, computamos la **sustitución respuesta** componiendo todas las sustituciones que fuimos realizando.

$$\frac{\overbrace{\{R, \neg B_1, \dots, \neg B_n\}}^{\text{definición}} \quad \overbrace{\{\neg A_1, \dots, \neg A_{k-1}, \neg A_k, \neg A_{k+1}, \dots, \neg A_m\}}^{\text{objetivo}}}{\underbrace{S(\{\neg A_1, \dots, \neg A_{k-1}, \neg B_1, \dots, \neg B_n, \neg A_{k+1}, \dots, \neg A_m\})}_{\text{nuevo objetivo}}}$$

donde S es el MGU de $\{R \stackrel{?}{=} A_k\}$.

Volviendo al primer ejercicio de LPO que resolvimos...

1. $\{\neg \text{Inc}(X_1, Y_1), \neg \text{Pert}(Z_1, X_1), \text{Pert}(Z_1, Y_1)\}$
2. $\{\text{Inc}(X_2, Y_2), \text{Pert}(f(X_2, Y_2), X_2)\}$
3. $\{\text{Inc}(X_3, Y_3), \neg \text{Pert}(f(X_3, Y_3), Y_3)\}$
4. $\{\neg \text{Pert}(X_4, \emptyset)\}$
5. $\{\neg \text{Inc}(\emptyset, c)\}$
6. (2 y 5) $\{\text{Pert}(f(\emptyset, c), \emptyset)\} \ S = \{X_2 := \emptyset, Y_2 := c\}$
7. (6 y 4) $\square \ S = \{X_4 := f(\emptyset, c)\}$

¿Esto es SLD? ¿Por qué, o por qué no?

Resolución SLD

Ejemplo (computando una solución)

“Los enemigos de mis enemigos son mis amigos.”

1. $\{\text{amigo}(A, B), \neg\text{enemigo}(A, C), \neg\text{enemigo}(C, B)\}$
2. $\{\text{enemigo}(\text{Dulce Princesa}, \text{Rey Helado})\}$
3. $\{\text{enemigo}(\text{Rey Helado}, \text{Ricardio})\}$
4. $\{\text{enemigo}(\text{Rey Helado}, \text{Finn})\}$
5. $\{\neg\text{amigo}(\text{Dulce Princesa}, X)\}$
6. (1 y 5) $\{\neg\text{enemigo}(\text{Dulce Princesa}, C), \neg\text{enemigo}(C, B)\}$
 $S_6 = \{A := \text{Dulce Princesa}, X := B\}$
7. (2 y 6) $\{\neg\text{enemigo}(\text{Rey Helado}, B)\}$
 $S_7 = \{C := \text{Rey Helado}\}$
8. (3 y 7) $\square S_8 = \{B := \text{Ricardio}\}$
 $S = S_8 \circ S_7 \circ S_6 =$
 $\{A := \text{Dulce Princesa}, X := \text{Ricardio}, B := \text{Ricardio},$
 $C := \text{Rey Helado}\}$

Árbol de resolución

¡Es *lineal*!

- La resolución SLD es *lineal*: no hay vuelta atrás posible.
- Si el objetivo puede resolverse con más de una regla, elegir la correcta.
- Si hay más de una, elegir cualquiera.
- Si nos equivocamos, entonces lo que hicimos *no* es parte de la resolución SLD.
- Puede haber varias resoluciones SLD posibles.
- Prolog intenta buscar todas (resolución SLD + backtracking).

Resolución SLD y Prolog

Preguntas generales

- El mecanismo de búsqueda en la resolución SLD ¿está determinado?
- ¿El método es completo?
- ¿Prolog usa resolución SLD? ¿Su método es completo? ¿Está determinado?
- ¿Dónde está el problema (o la diferencia)?

Resolución SLD y Prolog

El ejemplo anterior en Prolog

“Los enemigos de mis enemigos son mis amigos.”

$\{ \text{amigo}(A, B), \neg \text{enemigo}(A, C), \neg \text{enemigo}(C, B) \}$

$\{ \text{enemigo}(\text{Dulce Princesa}, \text{Rey Helado}) \}$

$\{ \text{enemigo}(\text{Rey Helado}, \text{Ricardio}) \}$

$\{ \text{enemigo}(\text{Rey Helado}, \text{Finn}) \}$

$\{ \neg \text{amigo}(\text{Dulce Princesa}, X) \}$

$\text{amigo}(A, B) :- \text{enemigo}(A, C), \text{enemigo}(C, B).$

$\text{enemigo}(\text{dulceprincesa}, \text{reyhelado}).$

$\text{enemigo}(\text{reyhelado}, \text{ricardio}).$

$\text{enemigo}(\text{reyhelado}, \text{finn}).$

$?- \text{amigo}(\text{dulceprincesa}, X).$

¿Cuál es la relación? ¿Cualquier ejemplo se puede traducir así?

¿Qué hay que tener en cuenta?

Resolución SLD y Prolog

Veamos ahora este ejemplo tomado de la práctica de Prolog:

1. `natural(0).`
2. `natural(suc(X)) :- natural(X).`
3. `menorOIgual(X, suc(Y)) :- menorOIgual(X, Y).`
4. `menorOIgual(X,X) :- natural(X).`

¿Qué pasa en Prolog si ejecutamos la consulta
`menorOIgual(0,X)?`

¿Podremos encontrar la respuesta usando resolución?

De Prolog a Resolución

Considerar las siguientes definiciones en prolog:

```
preorder(nil, []).  
preorder(bin(I,R,D), [R|L]) :- append(LI,LD,L), preorder(I,LI),  
                                preorder(D,LD).
```

```
append([],YS,YS).  
append([X|XS],YS,[X|L]) :- append(XS,YS,L).
```

- ¿Qué sucede al realizar la consulta
?- preorder(bin(bin(nil,2,nil),1,nil),Lista).?
- Utilizar el método de resolución para encontrar la solución al problema. Para ello, convertir el programa a forma clausal.
- Indicar si el método de resolución utilizado es o no SLD, y justificar. En caso de ser SLD, ¿respeto el orden en que Prolog hubiera resuelto la consulta?

Último ejercicio

2° parcial 1° Cuat. 2011

En este ejercicio usaremos el método de resolución para demostrar una propiedad de las relaciones binarias; a saber, que una relación no vacía no puede ser a la vez irreflexiva, simétrica y transitiva.

Para esto tomaremos una relación R y se demostrará que, si R satisface las tres propiedades mencionadas, entonces es vacía.

Dadas las siguientes definiciones:

1. R es **irreflexiva**: $\forall X. \neg R(X, X)$
2. R es **simétrica**: $\forall X. \forall Y. (R(X, Y) \Rightarrow R(Y, X))$
3. R es **transitiva**: $\forall X. \forall Y. \forall Z. ((R(X, Y) \wedge R(Y, Z)) \Rightarrow R(X, Z))$
4. R es **vacía**: $\forall X. \neg \exists Y. R(X, Y)$

Utilizando resolución, demostrar que sólo una relación vacía puede cumplir a la vez las propiedades 1 a 3. Indicar si el método de resolución utilizado es o no SLD (y justificar).

Último ejercicio

2° parcial 1° Cuat. 2011

Cast.: R es irreflexiva.

1° o.: $\forall X. \neg R(X, X)$

Claus.: $\{\neg R(X_1, X_1)\}$

Cast.: R es simétrica

1° o.: $\forall X. \forall Y. (R(X, Y) \Rightarrow R(Y, X))$

Claus.: $\{\neg R(X_2, Y_2), R(Y_2, X_2)\}$

Cast.: R es transitiva.

1° o.: $\forall X. \forall Y. \forall Z. ((R(X, Y) \wedge R(Y, Z)) \Rightarrow R(X, Z))$

Claus.: $\{\neg R(X_3, Y_3), \neg R(Y_3, Z_3), R(X_3, Z_3)\}$

Último ejercicio (cont.)

2° parcial 1° Cuat. 2011

Se desea demostrar que:

Cast.: R es vacía:

1° o.: $\forall X. \neg \exists Y. R(X, Y)$

Neg.: $\exists X. \exists Y. R(X, Y)$

Claus.: $\{R(a, b)\}$

Último ejercicio (resolviendo)

2° parcial 1° Cuat. 2011

1. $\{\neg R(X_1, X_1)\}$
2. $\{\neg R(X_2, Y_2), R(Y_2, X_2)\}$
3. $\{\neg R(X_3, Y_3), \neg R(Y_3, Z_3), R(X_3, Z_3)\}$
4. $\{R(a, b)\}$
5. (4 y 2) $\{R(b, a)\}$ $S = \{X_2 := a, Y_2 := b\}$
6. (5 y 3) $\{\neg R(X_6, b), R(X_6, a)\}$ $S = \{Y_3 := b, Z_3 := a\}$ renombrando X_3 a X_6
7. (6 y 4) $\{R(a, a)\}$ $S = \{X_6 := a\}$
8. (7 y 1) \square $S = \{X_1 := a\}$

¿Esta demostración por resolución es SLD? ¿Por qué, o por qué no?

Alternativa SLD (cambiando objetivo)

2° parcial 1° Cuat. 2011

1. $\{\neg R(X_1, X_1)\}$
2. $\{\neg R(X_2, Y_2), R(Y_2, X_2)\}$
3. $\{\neg R(X_3, Y_3), \neg R(Y_3, Z_3), R(X_3, Z_3)\}$
4. $\{R(a, b)\}$
5. $(1 \text{ y } 3) \{\neg R(X_1, Y_3), \neg R(Y_3, X_1)\} \text{ } S = \{X_3 := X_1, Z_3 := X_1\}$
6. $(5 \text{ y } 4) \{\neg R(b, a)\} \text{ } S = \{X_1 := a, Y_3 := b\}$
7. $(6 \text{ y } 2) \{\neg R(a, b)\} \text{ } S = \{X_2 := a, Y_2 := b\}$
8. $(7 \text{ y } 4) \square \text{ } S = \emptyset$

¿Es la única posible?

Otra alternativa SLD (más corta)

2° parcial 1° Cuat. 2011

1. $\{\neg R(X_1, X_1)\}$
2. $\{\neg R(X_2, Y_2), R(Y_2, X_2)\}$
3. $\{\neg R(X_3, Y_3), \neg R(Y_3, Z_3), R(X_3, Z_3)\}$
4. $\{R(a, b)\}$
5. $(1 \text{ y } 3) \{\neg R(X_1, Y_3), \neg R(Y_3, X_1)\} \text{ } S = \{X_3 := X_1, Z_3 := X_1\}$
6. $(5 \text{ y } 2) \{\neg R(X_2, Y_2)\} \text{ } S = \{X_1 := X_2, Y_3 := Y_2\}$
7. $(6 \text{ y } 4) \square \text{ } S = \{X_2 := a, Y_2 := b\}$

