

## Práctica N° 6 - Lógica de primer orden

Aclaraciones:

Los ejercicios marcados con el símbolo ★ constituyen un subconjunto mínimo de ejercitación. Sin embargo, aconsejamos fuertemente hacer todos los ejercicios.

### SINTAXIS DE LA LÓGICA DE PRIMER ORDEN

#### Ejercicio 1

Dados  $\mathcal{F} = \{d, f, g\}$ , donde  $d$  itene aridad 0,  $f$  aridad 2 y  $g$  aridad 3. ¿Cuáles de las siguientes cadenas son términos sobre  $\mathcal{F}$ ?

- I.  $g(d, d)$
- II.  $f(X, g(Y, Z), d)$
- III.  $g(X, f(d, Z), d)$
- IV.  $g(X, h(Y, Z), d)$
- V.  $f(f(g(d, X), f(g(d, X), Y, g(Y, d))), g(d, d)), g(f(d, d, X), d), Z)$

#### Ejercicio 2

Sean  $c$  una constante,  $f$  un símbolo de función de aridad 1 y  $S$  y  $B$ , dos símbolos de predicado binarios. ¿Cuáles de las siguientes cadenas son fórmulas?

- |  |  |
|--|--|
| I. $S(c, X)$                                     | VII. $(S(X, Y) \Rightarrow S(Y, f(f(X))))$ |
| II. $B(c, f(c))$                                 | VIII. $B(X, Y) \Rightarrow f(X)$           |
| III. $f(c)$                                      | IX. $S(X, f(Y)) \wedge B(X, Y)$            |
| IV. $B(B(c, X), Y)$                              | X. $\forall X. B(X, f(X))$                 |
| V. $S(B(c), Z)$                                  | XI. $\exists X. B(Y, X(c))$                |
| VI. $(B(X, Y) \Rightarrow (\exists Z. S(Z, Y)))$ |  |

#### Ejercicio 3

Sea  $\sigma = \exists X. P(Y, Z) \wedge \forall Y. \neg Q(Y, X) \vee P(Y, Z)$

- I. Identificar todas las variables libres y ligadas.
- II. Calcular  $\sigma\{X := W\}$ ,  $\sigma\{Y := W\}$ ,  $\sigma\{Y := f(X)\}$  y  $\sigma\{Z := g(Y, Z)\}$ .

## Ejercicio 4

Dada  $\sigma = \neg \forall X. (\exists Y. P(X, Y, Z)) \wedge \forall Z. P(X, Y, Z)$

- I. Identificar todas las variables libres y ligadas.
- II. Calcular  $\sigma\{X := t\}$ ,  $\sigma\{Y := t\}$  y  $\sigma\{Z := t\}$  con  $t = g(f(g(Y, Y)), Y)$ .
- III. Calcular  $\sigma\{X := t, Y := t, Z := t\}$  con  $t = g(f(g(Y, Y)), Y)$ .
- IV. Calcular  $\sigma(\{X := t\} \circ \{Y := t\} \circ \{Z := t\})$  con  $t = g(f(g(Y, Y)), Y)$ .

## UNIFICACIÓN

### Ejercicio 5 ★

Unir con flechas las expresiones que unifican entre sí (entre una fila y la otra). Para cada par unificable, exhibir el *mgu* (“most general unifier”). Asumir que *a* es una constante, *X*, *Y*, *Z* son variables, *f* y *g* son símbolos de función, y *P* y *Q* predicados.

$P(f(X))$	$P(a)$	$P(Y)$	$Q(X, f(Y))$	$Q(X, f(Z))$	$Q(X, f(a))$	$X$	$f(X)$
$P(X)$	$P(f(a))$	$P(g(Z))$	$Q(f(Y), X)$	$Q(f(Y), f(X))$	$Q(f(Y), Y)$	$f(f(c))$	$f(g(Y))$

### Ejercicio 6 ★

Determinar, para cada uno de los siguientes pares de términos de primer orden, si son unificables o no. En cada caso justificar su respuesta exhibiendo una secuencia exitosa o fallida (según el caso) del algoritmo de Martelli-Montanari. Asimismo, en caso de que los términos sean unificables indicar el *mgu* (“most general unifier”). Notación: *X*, *Y*, *Z* variables; *a*, *b*, *c* constantes; *f*, *g* símbolos de función.

- I.  $f(X, X, Y)$  y  $f(a, b, Z)$
- II.  $Y$  y  $f(X)$
- III.  $f(g(c, Y), X)$  y  $f(Z, g(Z, a))$
- IV.  $f(a)$  y  $g(Y)$
- V.  $f(X)$  y  $X$
- VI.  $g(X, Y)$  y  $g(f(Y), f(X))$

### Ejercicio 7

Preguntas para pensar.

- I. La relación entre términos *unifica con*, ¿es reflexiva? ¿Es simétrica? ¿Es transitiva?
- II. ¿Existe algún término *t* tal que todo término *s* unifique con él?
- III. ¿Cómo aplicaría el algoritmo de unificación al problema de determinar si, dado un conjunto finito de términos, existe un unificador común a todos?

### Ejercicio 8 ★

Sean las constantes *Nat* y *Bool* y la función binaria  $\rightarrow$  (representada como un operador infijo), determinar el resultado de aplicar el algoritmo MGU (“most general unifier”) sobre las ecuaciones planteadas a continuación. En caso de tener éxito, mostrar la sustitución resultante.

- |  |  |
|--|--|
| I. MGU $\{\mathbf{T}_1 \rightarrow \mathbf{T}_2 \doteq \mathbf{Nat} \rightarrow \mathbf{Bool}\}$                             | V. MGU $\{\mathbf{T}_2 \rightarrow \mathbf{T}_1 \rightarrow \mathbf{Bool} \doteq \mathbf{T}_2 \rightarrow \mathbf{T}_3\}$                                      |
| II. MGU $\{\mathbf{T}_1 \rightarrow \mathbf{T}_2 \doteq \mathbf{T}_3\}$  | VI. MGU $\{\mathbf{T}_1 \rightarrow \mathbf{Bool} \doteq \mathbf{Nat} \rightarrow \mathbf{Bool}, \mathbf{T}_1 \doteq \mathbf{T}_2 \rightarrow \mathbf{T}_3\}$  |
| III. MGU $\{\mathbf{T}_1 \rightarrow \mathbf{T}_2 \doteq \mathbf{T}_2\}$   | VII. MGU $\{\mathbf{T}_1 \rightarrow \mathbf{Bool} \doteq \mathbf{Nat} \rightarrow \mathbf{Bool}, \mathbf{T}_2 \doteq \mathbf{T}_1 \rightarrow \mathbf{T}_1\}$ |
| IV. MGU $\{(\mathbf{T}_2 \rightarrow \mathbf{T}_1) \rightarrow \mathbf{Bool} \doteq \mathbf{T}_2 \rightarrow \mathbf{T}_3\}$ | VIII. MGU $\{\mathbf{T}_1 \rightarrow \mathbf{T}_2 \doteq \mathbf{T}_3 \rightarrow \mathbf{T}_4, \mathbf{T}_3 \doteq \mathbf{T}_2 \rightarrow \mathbf{T}_1\}$  |

## DEDUCCIÓN NATURAL

### Ejercicio 9 ★

Demostrar en deducción natural que vale  $\vdash \sigma$  para cada una de las siguientes fórmulas, **sin usar principios de razonamiento clásicos**, salvo que se indique lo contrario:

- I. Intercambio ( $\forall$ ):  $\forall X.\forall Y.P(X, Y) \iff \forall Y.\forall X.P(X, Y)$ .
- II. Intercambio ( $\exists$ ):  $\exists X.\exists Y.P(X, Y) \iff \exists Y.\exists X.P(X, Y)$ .
- III. Intercambio ( $\exists/\forall$ ):  $\exists X.\forall Y.P(X, Y) \implies \forall Y.\exists X.P(X, Y)$ .
- IV. Universal implica existencial:  $\forall X.P(X) \implies \exists X.P(X)$ .
- V. Diagonal ( $\forall$ ):  $\forall X.\forall Y.P(X, Y) \implies \forall X.P(X, X)$ .
- VI. Diagonal ( $\exists$ ):  $\exists X.P(X, X) \implies \exists X.\exists Y.P(X, Y)$ .
- VII. de Morgan (I):  $\neg\exists X.P(X) \iff \forall X.\neg P(X)$ .
- VIII. de Morgan (II):  $\neg\forall X.P(X) \iff \exists X.\neg P(X)$ .  
Para la dirección  $\Rightarrow$  es necesario usar principios de razonamiento clásicos.
- IX. Universal/conjunción:  $\forall X.(P(X) \wedge Q(X)) \iff (\forall X.P(X) \wedge \forall X.Q(X))$ .
- X. Universal/disjunción:  $\forall X.(P(X) \vee \sigma) \iff (\forall X.P(X)) \vee \sigma$ , asumiendo que  $X \notin \text{fv}(\sigma)$ .  
Para la dirección  $\Rightarrow$  es necesario usar principios de razonamiento clásicos.
- XI. Existencial/disjunción:  $\exists X.(P(X) \vee Q(X)) \iff (\exists X.P(X) \vee \exists X.Q(X))$ .
- XII. Existencial/conjunción:  $\exists X.(P(X) \wedge \sigma) \iff (\exists X.P(X) \wedge \sigma)$ , asumiendo que  $X \notin \text{fv}(\sigma)$ .
- XIII. Principio del bebedor:  $\exists X.(P(X) \implies \forall X.P(X))$ .  
En este ítem es necesario usar principios de razonamiento clásicos.

### Ejercicio 10 ★

Demostrar en deducción natural:  $(\forall X.\forall Y.R(X, f(Y))) \Rightarrow (\forall X.R(X, f(f(X))))$ .

### Ejercicio 11

Una fórmula  $\sigma$  está en *forma normal negada* (f.n.n.) si se puede producir con la siguiente gramática:

$$\sigma ::= P(t_1, \dots, t_n) \mid \neg P(t_1, \dots, t_n) \mid \sigma \wedge \sigma \mid \sigma \vee \sigma \mid \forall X.\sigma \mid \exists X.\sigma$$

Es decir, una fórmula está en f.n.n. si no tiene ocurrencias del conectivo de la implicación ( $\Rightarrow$ ) y todas las ocurrencias del conectivo de la negación ( $\neg$ ) acompañan a fórmulas atómicas (es decir, la negación sólo puede encontrarse en las “hojas” de la fórmula). Demostrar que toda fórmula  $\sigma$  es equivalente a una fórmula en forma normal negada. Es decir, para cada fórmula  $\sigma$  existe una fórmula  $\sigma'$  en f.n.n. tal que  $\vdash \sigma \iff \sigma'$ .

## Ejercicio 12

Una fórmula  $\sigma$  está en *forma normal prenexa* (f.n.p.) si es de la forma  $Q_1X_1. \dots Q_nX_n.\tau$  donde cada  $Q_i$  es un cuantificador ( $\forall$  o  $\exists$ ) y  $\tau$  es una fórmula en forma normal negada sin ocurrencias de cuantificadores. Demostrar que toda fórmula  $\sigma$  es equivalente a una fórmula en forma normal prenexa. Es decir, para cada fórmula  $\sigma$  existe una fórmula  $\sigma'$  en f.n.p. tal que  $\vdash \sigma \iff \sigma'$ .

## SEMÁNTICA

### Ejercicio 13 ★

Sea  $\mathcal{L}$  el lenguaje de primer orden que incluye (junto con las variables, conectivos y cuantificadores) la constante  $a_1$ , el símbolo de función  $f$  de aridad 2 y el símbolo de predicado  $P$  de aridad 2. Sea  $\sigma$  la fórmula

$$\forall X_1.\forall X_2.(P(f(X_1, X_2), a_1) \Rightarrow P(X_1, X_2))$$

Definamos una interpretación  $I$  para  $\mathcal{L}$  como sigue.  $D_I$  es  $\mathbb{Z}$ ,  $\bar{a}_1$  es 0,  $\bar{f}(X, Y)$  es  $X - Y$ ,  $\bar{P}(X, Y)$  es  $X < Y$ . Escribir la interpretación de  $\sigma$  en castellano. ¿El enunciado es verdadero o falso? Hallar una interpretación de  $\sigma$  en la cual el enunciado tenga el valor de verdad opuesto.

### Ejercicio 14 ★

Sea  $N$  la interpretación aritmética donde  $D_I = \mathbb{N}$  y

$$\begin{array}{ll} \bar{c}^0 & \text{es el } 0, \\ \bar{P}^2 & \text{es } =, \\ \bar{f}_1^1 & \text{es la función sucesor,} \\ \bar{f}_2^2 & \text{es } +, \\ \bar{f}_3^2 & \text{es } \times \end{array}$$

Hallar, si es posible, asignaciones que satisfagan y que no satisfagan las siguientes fórmulas.

- I.  $P(f_2(X_1, X_1), f_3(f_1(X_1), f_1(X_1)))$
- II.  $P(f_2(X_1, c), X_2) \Rightarrow P(f_2(X_1, X_2), X_3)$
- III.  $\neg P(f_3(X_1, X_2), f_3(X_2, X_3))$
- IV.  $\forall X_1.P(f_3(X_1, X_2), X_3)$
- V.  $\forall X_1.(P(f_3(X_1, c), X_1) \Rightarrow P(X_1, X_2))$

### Ejercicio 15

Demostrar que ninguna de las siguientes fórmulas es lógicamente válida.

- I.  $\forall X_1.\exists X_2.P(X_1, X_2) \Rightarrow \exists X_2.\forall X_1.P(X_1, X_2)$
- II.  $\forall X_1.\forall X_2.(P(X_1, X_2) \Rightarrow P(X_2, X_1))$
- III.  $\forall X_1.\neg Q(X_1) \Rightarrow Q(c)$
- IV.  $(\forall X_1.P(X_1, X_1)) \Rightarrow \exists X_2.\forall X_1.P(X_1, X_2)$

## EJERCICIOS EXTRA DE DEDUCCIÓN NATURAL (OPCIONAL)

### Ejercicio 16

Dar derivaciones en DN de las siguientes fórmulas.

- I.  $(\forall X.P(X)) \Rightarrow P(a)$
- II.  $P(a) \Rightarrow \exists X.P(X)$
- III.  $(\forall X.\forall Y.(R(X, Y) \Rightarrow \neg R(Y, X))) \Rightarrow \forall X.\neg R(X, X)$
- IV.  $(\forall X.\forall Y.R(X, Y)) \Rightarrow \forall X.R(X, X)$
- V.  $(\exists X.P(X)) \Rightarrow (\forall Y.Q(Y)) \Rightarrow \forall X.\forall Y.(P(X) \Rightarrow Q(Y))$
- VI.  $(\forall X.(P(X) \Rightarrow Q(X))) \wedge (\exists X.P(X)) \Rightarrow \exists X.Q(X)$
- VII.  $(\neg \forall X.(P(X) \vee Q(X))) \Rightarrow \neg \forall X.P(X)$
- VIII.  $(\exists X.(P(X) \Rightarrow Q(X))) \Rightarrow (\forall X.P(X)) \Rightarrow \exists X.Q(X)$
- IX.  $(\forall X.(P(X) \Rightarrow Q(X))) \wedge (\neg \exists X.Q(X)) \Rightarrow \forall X.\neg P(X)$
- X.  $(\forall X.(\exists Y.R(Y, X) \Rightarrow P(X))) \Rightarrow (\exists X.\exists Y.R(X, Y)) \Rightarrow \exists X.P(X)$
- XI.  $(\exists X.(P(X) \vee Q(X))) \Rightarrow (\forall X.\neg Q(X)) \Rightarrow \exists X.P(X)$
- XII.  $(\neg \forall X.\exists Y.R(X, Y)) \Rightarrow \neg \forall X.R(X, X)$
- XIII.  $(\neg \exists X.\forall Y.R(Y, X) \Rightarrow \exists X.\exists Y.\neg R(X, Y))$
- XIV.  $\neg(\forall X.P(X) \wedge \exists X.\neg P(X))$
- XV.  $(\exists X.(R(X, X) \wedge P(X))) \Rightarrow \neg \forall X.(P(X) \Rightarrow \neg \exists Y.R(X, Y))$
- XVI.  $(\exists X.P(X) \Rightarrow \forall X.Q(X)) \Rightarrow \forall Y.(P(Y) \Rightarrow Q(Y))$
- XVII.  $\neg(\forall X.(P(X) \wedge Q(X))) \wedge \forall X.P(X) \Rightarrow \neg \forall X.Q(X)$
- XVIII.  $(\forall X.(R(X, X) \Rightarrow Q(X))) \wedge \exists X.\forall Y.R(X, Y) \Rightarrow \exists X.Q(X)$