Actividad 6

Luis Aarón Cerón Ramírez

April 24, 2018

1 Introducción

El siguiente trabajo tiene la finalidad de por medio del uso de herramientas computacionales resolver modelos matemáticos de situaciones físicas de manera numérica. El objetivo de este trabajo es resolver y grafícar el modelo de dos resortes con dos masas acopladas a cada resorte.

2 Marco teórico

El modelo consiste en dos resortes y dos pesos. Un resorte con constante k_1 , es sujetado al techo y colgado de este una masa m_1, a está masa se le colocá otro resorte con constante k_2, a este se le coloca otra masa m_2.

Permitiendo que el sistema se encuentre en equilibrio, medimos el desplazamiento del centro del masa de cada peso en equilibrio como función de tiempo y lo denotamos por $x_1(t)$ y $x_2(t)$.

2.1 Asumiendo la Ley de Hooke

Bajo la suposición de pequeñas oscilaciones, las fuerzas de restauración son de la forma:
$-k_1 l_1$ y $-k_2 l_2$
donde $l1$ y l_2 son las elongaciones de los resortes.
Observando los movimientos del sistema, tenemos entonces las siguientes ecuaciones las cuales modelan a los resortes con masas. Las ecuaciones son:

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= -k_1x_1 - k_2(x_1 - x_2) \\ m_2\ddot{x}_2 &= -k_2(x_2 - x_1) \end{aligned} \tag{1}$$

Las cuales son dos ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden. Para encontrar x_1 sin tener x_2, resolvemos la primer ecuación para x_2 obtenemos:

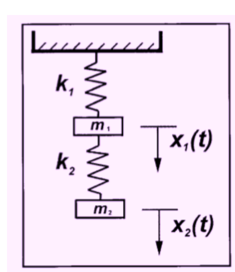


Figure 1: Diagrama de los dos resortes acoplados

$$x_2 = \frac{m_1 \ddot{x}_1}{k_2} + \frac{(k_1 + k_2)x_1}{k_2} \tag{2}$$

Sustituyendo x_2 en la ecuación diferencial y simplificando tenemos:

$$m_1 m_2 x_1^{(4)} + (m_2 k_1 + k_2(m_1 + m_2))\ddot{x}_1 + k_1 k_2 x_1 = 0 \tag{3}$$

Como se puede observar el movimiento del primer puesto es determinado por la ecuación diferencial de cuarto orden. Ahora para encontrar la ecuación que solo tenga x_2 resolvemos para x_1:
Despejando x_1, tenemos:

$$x_1 = \frac{m_2}{k_2}\ddot{x}_2 + x_2 \tag{4}$$

Sustituyendo, obtenemos una ecuación de la siguiente forma:

$$m_1 m_2 x_2^{(4)} + (m_2 k_1 + k_2(m_1 + m_2))\ddot{x}_2 + k_1 k_2 x_2 = 0 \tag{5}$$

Como se puede ver es similar a la ecuación para el primer peso. El movimiento de los pesos obedecen a estas ecuaciones, y son solo la velocidad y desplazamientos iniciales las que se necesitan para determinar los casos específicos.
Tipícamente en este tipo de modelos se tienen las condiciones iniciales de $x_1(0)$ y $x_2(0)$ y las velocidades iniciales $\dot{x}_1(0)$ y $\dot{x}_2(0)$. Para resolver las ecuaciones (3) y (5),debemos conocer los valores de las derivadas $\ddot{x}_1(0)$, $\dddot{x}_1(0)$, $\ddot{x}_2(0)$ y $\dddot{x}_2(0)$. El valor de las segundas derivada estáns determinadas al evaluar las ecuaciones (2) y (4) en un tiempo t=0, mientras que los valores de las terceras derivadas se encuentran al evaluar las ecuaciones (2) y (4) en un tiempo t= 0.
Los movimientos para cualquier conjuntos de condiciones iniciales son determinados al resolver las dos ecuaciones diferenciales de cuarto orden.
Una forma alternativa de resolverlo es convirtiendo las ecuaciones de segundo orden en un sistema de cuatro ecuaciones de primer orden con los siguientes cambios $\dot{x}_1 = u$ y $\dot{x}_2 = v$, con lo que tenemos:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= u \\
\dot{u} &= -\frac{k_1}{m_1}x_1 - \frac{k_2}{m_1}(x_1 - x_2) \\
\dot{x}_2 &= v \\
\dot{v} &= -\frac{k_2}{m_2}(x_2 - x_1)
\end{aligned} \tag{6}$$

y solo necesitamos considerar las cuatro condiciones iniciales $x_1(0)$,u(0), $x_2(0)$ y v(0).

2.2 Algunos ejemplos con pesos idénticos

Ahora consideremos un modelo con dos masas iguales que puede ser normalizadas como $m_1 = m_2 = 1$. En el caso de no amortiguamiento y sin fuerzas externas, la ecuación caracteristíca de las ecuaciones diferenciales (3) y (5) es:

$$m^4 + (k_1 + 2k_2)m^2 + k_1 k_2 = 0 \tag{7}$$

La cual tiene raíces en:

$$\pm\sqrt{-\frac{1}{2}k_1 - k_2 \pm \sqrt{k_1^2 + 4k_2^2}} \tag{8}$$

2.3 Amortiguamiento

El tipo mas común de amortiguamiento encontrado en los principios de los cursos es el amortiguamiento viscoso, la fuerza de amortiguamiento es proporcional a la velocidad.
El amortiguamiento del primer peso depende solo de su velocidad y no de la velocidad del segundo peso y viceversa. Adicionando el termino -$\delta_1 \dot{x}_1$ a la primer ecuación y -$\delta_2 \dot{x}_2$ a la segunda ecuación (1). Asumimos que el coeficiente de amortiguamiemto δ_1 y δ_2 son pequeño. El modelo se convierte en:

$$\begin{gathered} m_1 \ddot{x}_1 = -\delta_1 \dot{x}_1 - k_1 x_1 - k_2(x_1 - x_2) \\ m_2 \ddot{x}_2 = -\delta \dot{x}_2 - k_2(x_2 - x_1) \end{gathered} \tag{9}$$

Para obtener una ecuación de movimiento de x_1 que no involucre a x_2, resolvemos la primer ecuación en (9) para x_2 y sustituir en la segunda ecuación, obteniendo:

$$m_1 m_2 x_1^4 + (m_1\delta_1 + m_2\delta_2)\dddot{x}_1 + (m_2 k_1 + k_2(m_1 + m_2) + \delta_1\delta_2)\ddot{x}_1 + (k_1\delta_2 + k_2(\delta_1 + \delta_2)\dot{x}_1) + k_1 k_2 x_1 = 0 \tag{10}$$

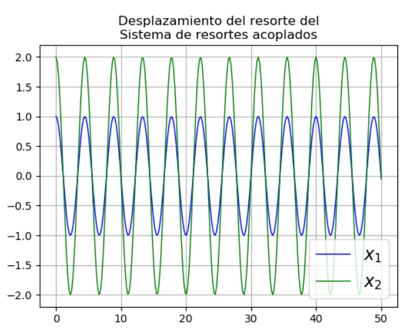
y de manera similar, podemos resolver la segunda ecuación en (9) para x_1 y sustituir en la primer ecuación para obtener una ecuación de cuarto orden que involucra solo x_2, obteniendo:

$$m_1 m_2 x_2^4 + (m_1\delta_1 + m_2\delta_2)\dddot{x}_2 + (m_2 k_1 + k_2(m_1 + m_2) + \delta_1\delta_2)\ddot{x}_2 + (k_1\delta_2 + k_2(\delta_1 + \delta_2)\dot{x}_2) + k_1 k_2 x_2 = 0 \tag{11}$$

Así obtenemos las mismas ecuaciones diferenciales lineales que representan a los pesos.

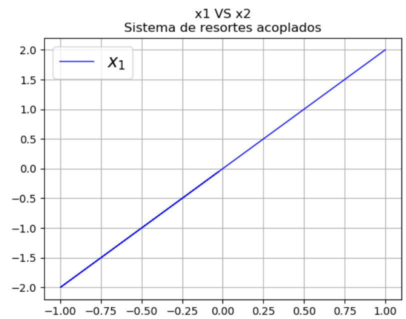
3 Resultados

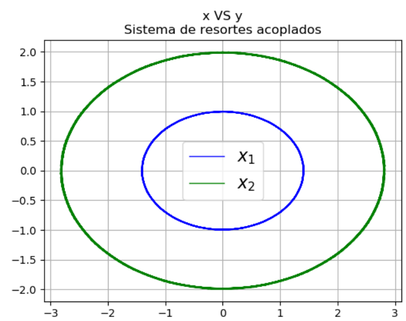
Para este reporte se busco resolver los ejemplos 2.1, 2.2, 2.3 y 2.4 de manera numérica del texto con la ayuda de jupyter lab, así como obtener sus grafícas, además de obtener el error relativo como función del tiempo.



4 Conclusión

El uso de herramientas computacionales para resolver problemas fisícos, es una aplicación muy importantes de estas herramientas. Este tipo de aplicaciones facilitan la resolución de problemas que de si se hicieran a mano esto seria muy cansado y complicado pues las computadoras nos brindan una gran

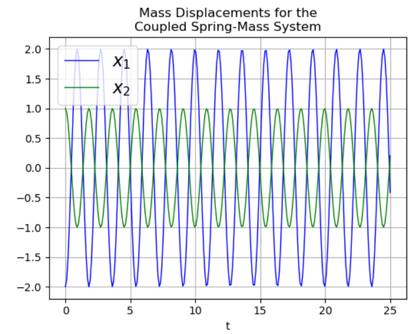


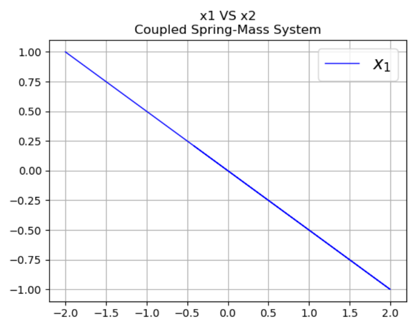


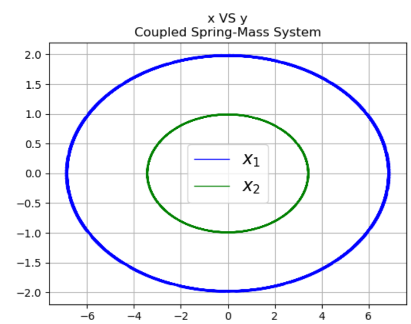
exactitud en las operaciones. Así como las herramientas que nos brindan como la graficación, lo que nos ofrece tener muchas mas posibilidades de visualizar los comportamientos de los fenómenos.

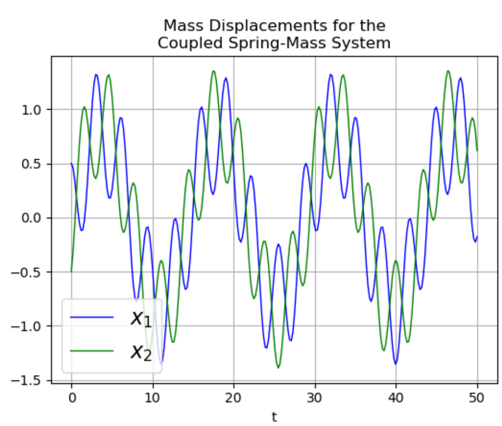
5 Apendice

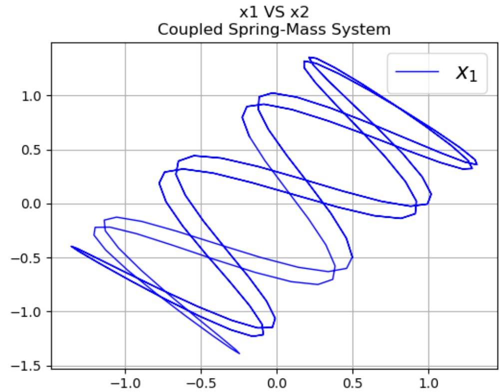
Preguntas antes de terminar:
¿En general te pareció interesante esta actividad de modelación matemática? ¿Qué te gustó mas? ¿Qué no te gustó?
Me parecio muy interesante el hecho de poder usar esta herramienta para facilitar el analisis, y me gusto la forma en que se puede tener una idea mejor del como se comporta el modelo por medio de las graficas.
La cantidad de material te pareció ¿bien?, ¿suficiente?, ¿demasiado?
Me parecio que tenia un poco demas, ya queeran bastantes graficas las que se tenin que hacer
¿Qué parte fue la que menos te interesó hacer?
El reporte, pues sigo teniendo problemas a la hora de colocar las imagenes
¿Cuál es tu primera impresión de Jupyter Lab?
Me parecio muy parecido a jupyter notebook en casi todo, pero debe ser porque no explore demasiado
Respecto al uso de funciones de SciPy, ¿ya habías visto integración numérica en tus cursos anteriores? ¿Cuál es tu experiencia?.
NO de esta manera, que fue una buena de complementar el trabajo
El tema de sistema de masas acopladas con resortes, ¿ya lo habías resuelto en tu curso de Mecánica 2?
no recuerdo si lo resolvi en mecanica dos pero si en mecanica teorica
¿Qué le quitarías o agregarías a esta actividad para hacerla más interesante y divertida?
menos graficas y mas modelos

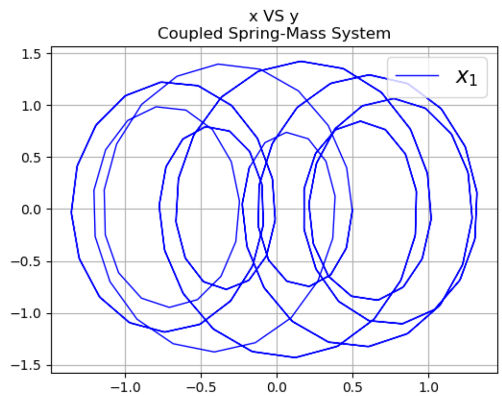

Mass Displacements for the
Coupled Spring-Mass System
x_1
x_2
t

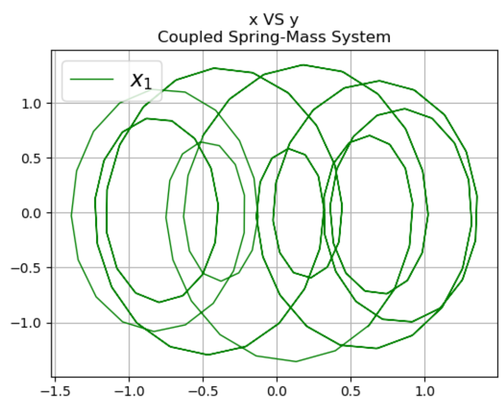

x1 VS x2
Coupled Spring-Mass System
x_1

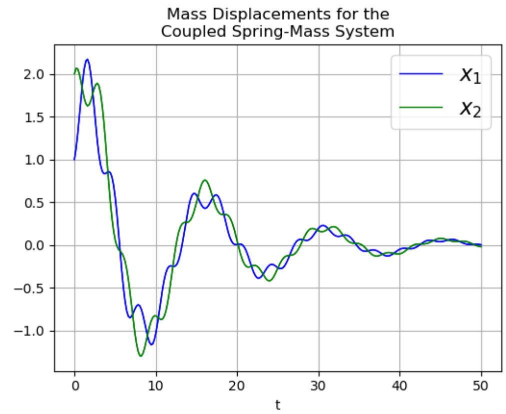

x VS y
Coupled Spring-Mass System
x_1
x_2


Mass Displacements for the
Coupled Spring-Mass System
x_1
x_2
t

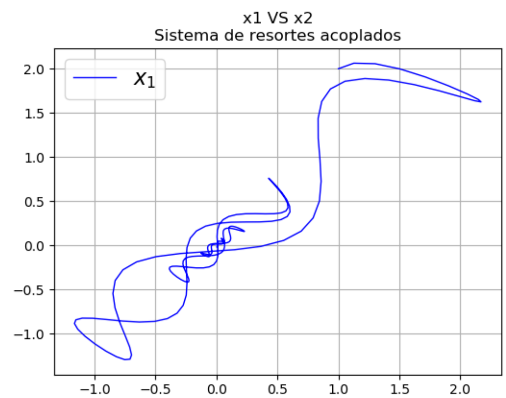

x1 VS x2
Coupled Spring-Mass System
x_1
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.5
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0


x VS y
Coupled Spring-Mass System
x_1
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.5
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0

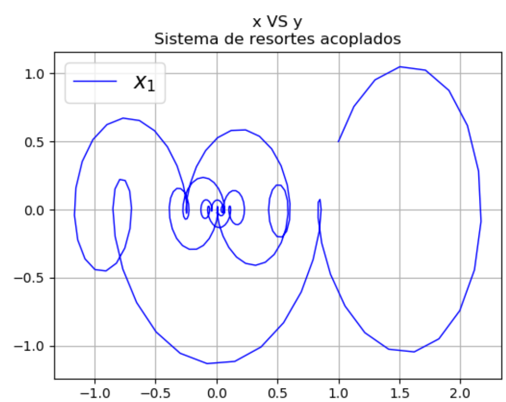

x VS y
Coupled Spring-Mass System
x_1
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.5
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0



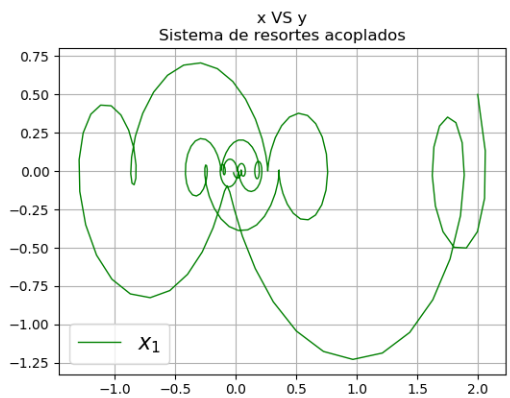
Mass Displacements for the
Coupled Spring-Mass System
x_1
x_2
t



x1 VS x2
Sistema de resortes acoplados
x_1



x VS y
Sistema de resortes acoplados
x_1


x VS y
Sistema de resortes acoplados
0.75
0.50
0.25
0.00
−0.25
−0.50
−0.75
−1.00
−1.25
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
x_1