

Derivación de la densidad de iones y electrones $n = n(T_e)$

Notas sobre plasma basado en el artículo de Lechte 2002 [1]

Aaron Sanabria Martínez*

20 de agosto de 2025

1. Colisiones en el Plasma: Secciones eficaces y frecuencias de colisión

Las colisiones más simples que pueden presentarse en un plasma son aquellas entre electrones con átomos neutros, estas pueden ser elásticas, lo que significa que ambas especies mantienen su identidad y en modelos simples los electrones simplemente rebotan de los neutros, se asume que el cambio de momento de los últimos es negligible. Luego están las colisiones inelásticas, en este caso se dan procesos de ionización, radiación, recombinación. Entre especies con carga neta en el plasma también se pueden encontrar las llamadas colisiones de Coulomb, que como su nombre lo indica se dan por interacciones de Coulomb entre las partículas del plasma.

A groso modo, estos eventos mencionados pueden estudiarse desde la estadística usando el concepto de probabilidad y secciones eficaces. Por ejemplo, para una colisión elástica o inelástica se puede definir la sección eficaz σ que es el área transversal, si modelamos las partículas como esferas, que tendría la partícula si al colisionar un electrón con el neutro, este se reflejara en un ángulo de 90 o si el átomo se ionizara con todos los electrones que lo colisionan.

Sea n_0 la densidad de neutros que hay en un plasma, se define el camino libre medio λ_{mfp} como el recorrido promedio que tendrá el electrón antes de tener una probabilidad de colisionar con otro neutro [2].

$$\lambda_{mfp} = (n_0\sigma)^{-1} \quad (1)$$

Para electrones con velocidad v el tiempo medio entre colisiones es

$$\tau = \lambda_{mfp}/v \quad (2)$$

Al inverso de esta cantidad se le denomina "frecuencia de colisión" se define en términos de una función de distribución como

* aaron.sanabria@ucr.ac.cr

$$\nu = \langle \tau^{-1} \rangle = n_0 \langle \sigma v \rangle = \frac{n_0}{n_e} \int d^3 f_e(v) \sigma(v) v \quad (3)$$

Para cada tipo colisión se puede asignar una frecuencia de colisión de la cual se puede obtener la tasa en la que cada evento da paso a pérdida o adición de partículas de una u otra especie en el plasma, al multiplicar estas frecuencias por la densidad de las partículas se obtiene un término N_{evento} que es la tasa de emisión o fuente, este es el número de eventos que se dan por segundo en un determinado volumen [1].

$$N_{evento}(T_\alpha) = n_\alpha n_\beta \langle \sigma v \rangle_{evento}(T_\alpha) \quad (4)$$

En las colisiones inelásticas se pueden dar los siguientes eventos

- Ionización por impacto: Al colisionar electrones con neutros u iones el proceso resulta en la liberación de dos electrones y un ión de menor Z_α que el original.
- Recombinación de tres cuerpos: Dos electrones y un ión interactúan dando como resultado un neutro o un ión de mayor Z_α que el original.
- Ionización radiativa: un fotón con suficiente energía interactúa con un neutro y como resultado se libera un electrón.
- Recombinación radiativa: un electrón interactúa con un ión y se obtiene un neutro o un ión de mayor Z_α además de la emisión de un fotón.
- Excitación: Debido a colisión se transfiere energía al neutro o ión en ese proceso se irradia la energía de excitación mediante ondas electromagnéticas. En este caso siempre se pierde energía solamente.
- Colisiones de Coulomb: Son elásticas, los electrones calientes le transfieren momento a iones fríos mediante interacciones elásticas de Coulomb.

1.1. Conceptos fundamentales de la teoría cinética y transporte en el Plasma

Los gases ionizados pueden ser especificados por una función de distribución $f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$. Una derivación Eúristica lleva a la conocida ecuación cinética[3]

$$\frac{df_\alpha}{dt} \equiv \left(\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla + \frac{Z_\alpha e}{m_\alpha} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_v \right) f_\alpha = C_\alpha \quad (5)$$

Esta ecuación no toma en cuenta fluctuaciones térmicas. Representa densidades suaves promediadas sobre un volumen con un gran número de partículas. Los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} también varían suavemente, no hay fluctuaciones rápidas de microcampos y microfuerzas. Dichos efectos se consideran solo en el término de colisiones C_α .

Ahora de la mecánica estística es posible obtener los momentos de una distribución, nos interesa el primer y segundo momento[4] de la distribución definidos como

$$n_\alpha = \int d^3v f_\alpha \quad (6)$$

$$\mathbf{u}_\alpha = \frac{1}{n_\alpha} \int d^3v f_\alpha \mathbf{v} \quad (7)$$

$$\mathbf{Q}_\alpha \equiv \frac{m_\alpha n_\alpha \langle v^2 \mathbf{v} \rangle}{2} \quad (8)$$

El momento cero en la Ec. (6) es la densidad de partículas de una especie en el plasma, i.e., el número de partículas de una especie por unidad de volumen. El primer momento Ec.(7) es la velocidad promedio de las partículas de una especie en el plasma. La Ec.(??) es el flujo de energía.

Ahora definimos el flujo de partículas en el plasma como

$$\mathbf{\Gamma}_\alpha \equiv n_\alpha \mathbf{u}_\alpha \quad (9)$$

De la ecuación cinética (5), es posible obtener la siguiente ecuación de continuidad

$$\partial_t n_\alpha + \nabla \cdot \mathbf{\Gamma}_\alpha = S_\alpha \quad (10)$$

donde S_α son las fuentes y/o sumideros de las partículas α . En estado estacionario como sugiere [1] la Eq. (10) se reduce a

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{\Gamma}_\alpha &= S_\alpha \\ \Rightarrow \int_V d^3r \nabla \cdot \mathbf{\Gamma}_\alpha &= \int_V d^3r S_\alpha \\ \Rightarrow \oint_{\partial V} \mathbf{\Gamma}_\alpha \cdot d\mathbf{S} &= \int_V d^3r S_\alpha \end{aligned}$$

Definimos el flujo radial de partículas como

$$\Gamma_n^\alpha \equiv \oint_{\partial V} \mathbf{\Gamma}_\alpha \cdot d\mathbf{S} = \int_V d^3r S \approx \langle S \rangle V \quad (11)$$

Como es visible al adentrarse en balances globales, el concepto de promedios superficiales es fundamental. Conocer todos los parametros del plasma en su superficie será la piedra angular de los modelos que estamos por desarrollar.

Promedio Superficial

Definimos el promedio de una cantidad vectorial en la superficie como

$$\langle \Delta \rangle_{\partial V} \equiv \frac{1}{A} \oint_{\partial V} \Delta \cdot d\mathbf{S} \quad (12)$$

donde A es el área superficial del plasma.

de lo anterior, podemos ver que el flujo radial de partículas es simplemente el promedio superficial del flujo de partículas que atraviesan la superficie, i.e., $\Gamma_n^\alpha = A \langle \Gamma_\alpha \rangle_{\partial V}$ [5].

Ahora a partir de la llamada ecuación de energía [4] derivada de la Eq. (5) se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{3n_\alpha T_\alpha}{2} + \frac{m_\alpha n_\alpha u_\alpha^2}{2} \right) + \nabla \cdot \mathbf{Q} = Z_\alpha e n_\alpha \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_\alpha + \int d^3v \frac{mv^2}{2} C_\alpha \quad (13)$$

En el lado izquierda de la Ec.(13) el primer término corresponde al calentamiento de Joule en el plasma, para explicar el segundo se debe introducir los siguientes términos

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_\alpha &\equiv \mathbf{v} - \mathbf{u}_\alpha \\ \mathbf{R}_\alpha &\equiv \int d^3v m_\alpha \mathbf{v} C_\alpha \\ \mathcal{Q}_\alpha &\equiv \int d^3v \frac{m w_\alpha^2}{2} C_\alpha \\ \frac{3}{2} T_\alpha &\equiv \left\langle \frac{m_\alpha w^2}{2} \right\rangle \end{aligned} \quad (14)$$

Cada una de ellas corresponde a:

- \mathbf{w}_α : desviación de la velocidad de la partícula de la velocidad promedio, i.e., velocidad por movimiento aleatorio. Cumple que $\langle \mathbf{w}_\alpha \rangle = \mathbf{0}$.
- \mathbf{R}_α : fuerza ejercida en la partícula como resultado de la colisión con otras especies en el plasma.
- \mathcal{Q}_α : razón de la energía térmica transferida por colisiones con otras especies.

El segundo término en el lado izquierdo de la Ec.(13) es entonces, **la energía total transferida** por colisiones con otras especies.

$$\int d^3v \frac{m_\alpha v^2}{2} C_\alpha = \mathcal{Q}_\alpha + \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{u}_\alpha \quad (15)$$

Aquí el término $\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{u}_\alpha$ corresponde al trabajo por unidad de tiempo realizado por la fuerza \mathbf{R}_α .

Básicamente el lado izquierdo de la ecuación es la potencia debido al calentamiento de Joule o por colisiones con otras partículas. En el caso estacionario la Ec. (13) se vuelve

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{Q} &= \mathcal{Q}_\alpha + (Z_\alpha e n_\alpha \mathbf{E} + \mathbf{R}_\alpha) \cdot \mathbf{u}_\alpha \\ \int_V d^3r \nabla \cdot \mathbf{Q} &= \mathcal{Q}_\alpha + (Z_\alpha e n_\alpha \mathbf{E} + \mathbf{R}_\alpha) \cdot \mathbf{u}_\alpha \\ \oint_{\partial V} \mathbf{Q} \cdot d\mathbf{S} &= \int_V d^3r [\mathcal{Q}_\alpha + (Z_\alpha e n_\alpha \mathbf{E} + \mathbf{R}_\alpha) \cdot \mathbf{u}_\alpha] \end{aligned}$$

Finalmente llegamos a la siguiente expresión al definir el flujo radial de energía $\Gamma_E \equiv \oint_{\partial V} \mathbf{Q} \cdot d\mathbf{S}$ y $Q \equiv \mathcal{Q}_\alpha + (Z_\alpha e n_\alpha \mathbf{E} + \mathbf{R}_\alpha) \cdot \mathbf{u}_\alpha$.

$$\Gamma_E = \int_V d^3r Q \approx \langle Q \rangle V \quad (16)$$

Trabajaremos con estas definiciones más adelante.

1.2. Procesos de calentamiento en el Plasma

Hasta el momento no se han hecho muchas consideraciones sobre el Plasma con el que se esta trabajando. Ahora para el modelo en estudio imponemos la condición de un confinamiento en el régimen de transporte clásico. Esto es, los flujos de partículas y energía obedecen la ley de Fick's es decir los flujos de partículas y energía pueden ser descritos mediante los gradientes de densidad n_α y temperatura T_α en casos donde el campo \mathbf{B} es uniforme.

Por lo pronto dejaremos de lado los subíndices. Retomemos el estudio de la cantidad \mathbf{Q} que estudiamos en la sección anterior, y añadamos las siguientes definiciones

$$\mathbf{q} \equiv \frac{1}{2} mn \langle w^2 \mathbf{w} \rangle \quad (17)$$

$$\mathbf{P} \equiv mn \langle \mathbf{w} \mathbf{w} \rangle \quad (18)$$

$$p \equiv \frac{1}{3} Tr(\mathbf{P}) = \frac{1}{3} mn \langle w^2 \rangle \quad (19)$$

Ahora profundizamos más en los flujos de calor y las diferentes formas en las que la energía se difunde en el plasma. Comencemos partiendo de lo siguiente

$$\begin{aligned}
\langle w^2 \mathbf{w} \rangle &= \langle (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) [\mathbf{v} - \mathbf{u}] \rangle \\
&= \langle (v^2 + u^2 - 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) [\mathbf{v} - \mathbf{u}] \rangle \\
&= \langle v^2 \mathbf{v} + u^2 \mathbf{v} - 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} - v^2 \mathbf{u} - u^2 \mathbf{u} + 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{u} \rangle \\
&= \langle v^2 \mathbf{v} \rangle + u^2 \langle \mathbf{v} \rangle - u^2 \mathbf{u} - \langle v^2 \rangle \mathbf{u} - 2\mathbf{u} \cdot \langle \mathbf{v} \mathbf{v} \rangle + 2\mathbf{u} \cdot \langle \mathbf{v} \mathbf{u} \rangle \\
&= \langle v^2 \mathbf{v} \rangle + \cancel{u^2 \mathbf{u}} - \cancel{u^2 \mathbf{u}} - \langle v^2 \rangle \mathbf{u} - 2\mathbf{u} \cdot \langle \mathbf{v} \mathbf{v} \rangle + 2\mathbf{u} \cdot \langle \mathbf{v} \mathbf{u} \rangle \\
&= \langle v^2 \mathbf{v} \rangle - \langle v^2 \rangle \mathbf{u} - 2\mathbf{u} \cdot \langle \mathbf{v} \mathbf{v} \rangle + 2\mathbf{u} \cdot \langle \mathbf{v} \mathbf{u} \rangle
\end{aligned}$$

Ahora multiplicamos ambos lados de la ecuación por un factor de $\frac{1}{2}mn$ lo que resulta, usando las definiciones anteriores

$$\mathbf{q} = \mathbf{Q} - \frac{1}{2}mn \langle v^2 \rangle \mathbf{u} - mn \mathbf{u} \cdot [\langle \mathbf{v} \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{v} \mathbf{u} \rangle]$$

Usaremos el siguiente resultado para simplificar más la relación

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} \cdot \langle \mathbf{w} \mathbf{w} \rangle &= \mathbf{u} \cdot \langle (\mathbf{v} - \mathbf{u})(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \rangle \\
&= \mathbf{u} \cdot (\langle \mathbf{v} \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u} \mathbf{u} \rangle - \langle \mathbf{u} \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{v} \mathbf{u} \rangle) \\
&= \mathbf{u} \cdot \langle \mathbf{v} \mathbf{v} \rangle + \cancel{u^2} - \cancel{u^2} - \mathbf{u} \cdot \langle \mathbf{v} \mathbf{u} \rangle \\
&= \mathbf{u} \cdot [\langle \mathbf{v} \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{v} \mathbf{u} \rangle]
\end{aligned}$$

También usaremos el siguiente resultado

$$\begin{aligned}
\langle w^2 \rangle &= \langle v^2 + u^2 - 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \rangle \\
&= \langle v^2 \rangle + u^2 - 2\mathbf{u} \cdot \langle \mathbf{v} \rangle \\
&= \langle v^2 \rangle - u^2
\end{aligned}$$

De allí es fácil ver que

$$\begin{aligned}
\mathbf{q} &= \mathbf{Q} - \frac{1}{2}mnu^2 - \frac{1}{2}mn \langle w^2 \rangle - \mathbf{u} \cdot \mathbf{P} \\
\Rightarrow \mathbf{Q} &= \mathbf{q} + \frac{3}{2}Tn\mathbf{u} - \frac{1}{2}mnu^2\mathbf{u} - \mathbf{P} \cdot \mathbf{u} \\
&= \mathbf{q} + \frac{3}{2}T\mathbf{\Gamma} - \frac{1}{2}mu^2\mathbf{\Gamma} - \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}
\end{aligned} \tag{20}$$

Nótese que por construcción del tensor \mathbf{P} este es anisotrópico, sin embargo, es diagonal y las contracciones $\mathbf{u} \cdot \mathbf{P}$ y $\mathbf{P} \cdot \mathbf{u}$ son equivalentes. Una forma alternativa de ver esto se logra con el tensor $\Pi_{ij} = P_{ij} - p\delta_{ij}$ y usando $p = nT$

$$Q_j = q_j + \frac{5}{2}pu_j + \Pi_{jk}u_k + \frac{1}{2}mu^2\Gamma_j \quad (21)$$

Se tienen los siguientes calentamientos en el plasma[4]

- \mathbf{q} : flujo de calentamiento conductivo.
- $\frac{5}{2}p\mathbf{u}$: flujo de calentamiento convectivo.
- $\mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{u}$: transporte viscoso de energía.
- $\frac{1}{2}mu^2\mathbf{\Gamma}$: convección de energía cinética.

Ahora bien, para un transporte en el cual la velocidad del flujo \mathbf{u} surge en respuesta a gradientes suaves ($\delta \ll 1$) se puede asumir que está cantidad es pequeña, $u \sim \delta v_T \ll v_T$ por lo que la podemos despreciar, a la vez, si la velocidad del flujo es negligible, también podemos asumir que el transporte viscoso de energía es pequeño en comparación a la conducción y convección. Bajo estos supuestos[5]

$$Q_j \approx q_j + \frac{5}{2}T\Gamma_j$$

De lo anterior el flujo de energía Γ_E es dada por

$$\Gamma_E \approx A \langle \mathbf{q} \rangle_{\partial V} + A \frac{5}{2} \langle T\mathbf{\Gamma} \rangle_{\partial V} \quad (22)$$

1.3. Transporte radial y las leyes de Fick

De momento, bajo un transporte clásico donde el campo magnético es homogéneo asumimos que las leyes de Fick se sostienen tal que $q_j = -\chi\partial_j T$ y $\Gamma_j = -D\partial_j n$, más adelante justificaremos esto. De aquí se puede ver que finalmente las relaciones de transporte radial, o flujo de partículas y energía se pueden escribir como

$$\Gamma_n = -A \langle D\nabla n \rangle_{\partial V} \quad (23)$$

$$\Gamma_E = -A \langle \chi \nabla T \rangle_{\partial V} - \frac{5}{2}A \langle T\mathbf{\Gamma} \rangle_{\partial V} \quad (24)$$

Las cantidades χ y D deben ser estudiadas más a fondo antes de asumir que son simplemente coeficientes, ya que podrán depender de la densidad n y la temperatura T .

2. Método usado en el artículo (Aproximaciones)

Se definen las siguientes expresiones correspondientes a procesos atómicos en el Plasma:

- N_{ion} : Número de ionizaciones por unidad $s \cdot m^3$.
- N_{ion_2} : Número de segundas ionizaciones por unidad $s \cdot m^3$.
- N_{rec} : Número de recombinaciones por unidad $s \cdot m^3$.
- N_{rad} : Número de excitaciones por unidad $s \cdot m^3$.
- Q_{ei} : Densidad de potencia tranferida a los iones.
- E_{ion} : Energía de ionización.
- E_{rec} : Energía cinética de un electrón.
- E_{rad} : Promedio sobre todas las energías de radiación.

Las fuentes y sumideros de potencia relacionados a diferentes procesos están dados por $Q_p = N_p E_p$. Las cantidades físicas se definen matemáticamente como:

$$N_{ion} = \langle \sigma v \rangle_{ion} n_e n_0 \quad (25)$$

$$N_{ion_2} = \langle \sigma v \rangle_{ion_2} n_e n_i \quad (26)$$

$$N_{rec} = \langle \sigma v \rangle_{rec} n_e n_i \quad (27)$$

$$N_{rad}^{0/i} = \langle \sigma v \rangle_{rad}^{0/i} n_e n_{0/i} \quad (28)$$

$$Q_{ei} = n_e \frac{\frac{3}{2}(T_e - T_i)}{\tau_{ei}} \quad (29)$$

$$E_{rec} = \frac{3}{2} T_e \quad (30)$$

En este caso n_x son las densidades de partículas de las correspondientes especies que hay en el plasma $x \in i, e, 0$. Además, $e, i, 0$ corresponden a electrones, iones y partículas neutras respectivamente. La cantidad τ_{ei} es el tiempo de relajación para iones cargados simplemente y está aproximado por:

$$\tau_{ei} = \left(\frac{4\pi\epsilon_0}{e^2} \right)^2 \frac{3m_i T_e^{3/2}}{8\sqrt{2\pi m_e n_i} \ln \Lambda} \quad (31)$$

El transporte radial en el plasma en equilibrio está dado por:

- Γ_n : Transporte radial debido a fuentes y sumideros de partículas.
- Γ_E : Transporte radial debido a fuentes y sumideros de energía electrónica.

Del balance de potencias por partículas se tiene que

$$\Gamma_n = V(N_{ion} - N_{rec}) \quad (32)$$

Las partículas creadas por ionización son ya sea recombinadas o trasportadas a las paredes. De la teoría clásica de trasporte se puede estimar este flujo como:

$$\Gamma_n = -AD\nabla n \quad (33)$$

Donde A el área superficial estimada y D la difusividad de partículas en el plasma. El flujo total de potencia se balancea con fuentes y sumideros y se obtiene que

$$\Gamma_E = P_{rf} - V(E_{ion}N_{ion} + E_{ion_2}N_{ion_2} + E_{rec}N_{rec} + E_{rad}^{0/i}N_{rad}^{0/i} + Q_{ei}) \quad (34)$$

Nuevamente de la teoría clásica de transporte se tiene que el flujo de potencia por energía está dado por

$$\Gamma_E = -An_e\chi\nabla T_e + \frac{3}{2}\alpha T_e\Gamma_n \quad (35)$$

donde χ es el coeficiente de difusividad de calor. Además esto asume que **la temperatura en la frontera del plasma es una fracción de la temperatura del volumen**, i.e., $T_e(a) = \alpha T_e$ con $\alpha \in [0, 1]$.

Vamos a asumir lo siguiente para el caso físico a estudiar:

- $T_i \ll T_e$: Temperatura iónica despreciable.
- $n_i \approx n_e = n$: Quasi-neutralidad del plasma.
- $n_0 \gg n$: Plasma parcialmente ionizado (Plasma frio).
- $\nabla T/T \approx \nabla n/n$: Escala de cambio en los gradientes de densidad y temperatura similares.

Tomando la (32) y reemplazando en (35) se obtiene

$$\Gamma_E = -A\chi n\nabla T_e - \frac{3}{2}\alpha ADT_e\nabla n \quad (36)$$

Del último supuesto $n\nabla T_e \approx T_e\nabla n$ usando esto

$$\begin{aligned} \Gamma_E &= \left(\frac{3}{2}\alpha + \frac{\chi}{D}\right) (-AD\nabla n)T_e \\ &= \left(\frac{3}{2}\alpha + \gamma\right) \Gamma_n T_e \end{aligned} \quad (37)$$

Donde se define el parametro $\gamma = \chi/D$. Ahora usando el penúltimo supuesto y despreciando los términos $n/n_0 \ll 1$ obtendremos una ecuación $n = n(T_e)$ multiplicando la ecuación (37) por un factor de $1/n_0V$ y reemplazando los respectivos N_p

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma_E}{n_0V} &= \frac{P_{rf}}{n_0V} - \left(E_{ion} \frac{\langle \sigma v \rangle_{ion} n n_0}{n_0} + \cancel{E_{ion_2} \langle \sigma v \rangle_{ion_2} n \frac{n}{n_0}} + E_{rad}^{0/i} \langle \sigma v \rangle_{rad}^{0/i} n \frac{n_{0/i}}{n_0} + \cancel{\frac{3}{2} T_e \langle \sigma v \rangle_{rec} n \frac{n}{n_0}} + \frac{Q_{ei}}{n_0} \right) \\ &= \frac{P_{rf}}{n_0V} - n \left(E_{ion} \langle \sigma v \rangle_{ion} + E_{rad}^0 \langle \sigma v \rangle_{rad}^0 + \frac{Q_{ei}}{n_0} \right) \end{aligned}$$

Ahora como $\tau_{ei} \propto n_i^{-1}$ y $Q_{ei} \propto \tau_{ei}^{-1}$ se tiene que $Q_{ei} \propto n_i$ lo que implica que $Q_{ei}/n_0 \propto n_i/n_0 \rightarrow 0$

Por tanto se obtiene

$$\frac{\Gamma_E}{n_0V} \approx \frac{P_{rf}}{n_0V} - n(E_{ion} \langle \sigma v \rangle_{ion} + E_{rad}^0 \langle \sigma v \rangle_{rad}^0) \quad (38)$$

De forma similar se procede con la ecuación (37) y reemplazando Γ_n por la ecuación (32)

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma_E}{n_0V} &= \frac{1}{n_0V} \left(\gamma + \frac{3}{2} \alpha \right) V(N_{ion} - N_{rec})T_e \\ &= \left(\gamma + \frac{3}{2} \alpha \right) n T_e \left(\langle \sigma v \rangle_{ion} \frac{n_0}{n_0} - \cancel{\langle \sigma v \rangle_{rec} \frac{n}{n_0}} \right) \\ &= \left(\gamma + \frac{3}{2} \alpha \right) \langle \sigma v \rangle_{ion} n T_e \end{aligned} \quad (39)$$

Ahora igualamos las ecuaciones (38) y (39) y despejamos n

$$\begin{aligned} \frac{P_{rf}}{n_0V} - n(E_{ion} \langle \sigma v \rangle_{ion} + E_{rad}^0 \langle \sigma v \rangle_{rad}^0) &= \left(\gamma + \frac{3}{2} \alpha \right) \langle \sigma v \rangle_{ion} n T_e \\ \Rightarrow \frac{P_{rf}}{n_0V} &= n \left[\left(\gamma + \frac{3}{2} \alpha \right) \langle \sigma v \rangle_{ion} T_e + E_{ion} \langle \sigma v \rangle_{ion} + E_{rad}^0 \langle \sigma v \rangle_{rad}^0 \right] \\ \Rightarrow \frac{P_{rf}}{n_0V} &= n \left\{ \left[\left(\gamma + \frac{3}{2} \alpha \right) T_e + E_{ion} \right] \langle \sigma v \rangle_{ion} + E_{rad}^0 \langle \sigma v \rangle_{rad}^0 \right\} \end{aligned}$$

Finalmente se despeja n

$$n(T_e; P_{rf}, n_0, V, \gamma, \alpha) = \frac{P_{rf}/n_0V}{\left[\left(\gamma + \frac{3}{2} \alpha \right) T_e + E_{ion} \right] \langle \sigma v \rangle_{ion}(T_e) + E_{rad}^0 \langle \sigma v \rangle_{rad}^0(T_e)} \quad (40)$$

Esta expresión es la que se obtiene por [1].

3. Forma diferencial lineal de la densidad $n = n(T_e)$

Nos interesa el caso menos aproximado en particular deshacernos de la aproximación de los gradientes. Acá nos desharemos de la aproximación $\nabla n/n \approx \nabla T/T$. Nuevamente asumimos cuasi-neutralidad y un plasma frío, i.e., $n = n_e \approx n_i$ y $n_0 \gg n$. Retomando nuevamete la ecuación (34) e igualando a la ecuación (35), además de reemplazar los N_p

$$-A \left(n\chi \nabla T_e + \frac{3}{2} \alpha T_e D \nabla n \right) = P_{rf} - V \left(E_{ion} \langle \sigma v \rangle_{ion} n n_0 + E_{ion_2} \langle \sigma v \rangle_{ion_2} n^2 + \frac{3}{2} T_e \langle \sigma v \rangle_{rec} n^2 + E_{rad}^0 \langle \sigma v \rangle_{rad}^{0/i} n n_{0/i} + Q_{ei} \right)$$

Nuevamente dividimos ambos lados de la ecuación por $n_0 V$ y descartamos los términos n/n_0 como lo hicimos en la sección anterior de allí obtenemos

$$\begin{aligned} & -\frac{A}{V} \left(\frac{3}{2} \alpha T_e D \frac{\nabla n}{n_0} \right) = \\ & \frac{P_{rf}}{n_0 V} - \left(E_{ion} \langle \sigma v \rangle_{ion} + E_{rad}^0 \langle \sigma v \rangle_{rad}^0 \right) \frac{n}{n_0} \\ \Rightarrow & \frac{A}{V} \left(\frac{3}{2} \alpha T_e D \frac{\nabla n}{n_0} \right) - \left(E_{ion} \langle \sigma v \rangle_{ion} + E_{rad}^0 \langle \sigma v \rangle_{rad}^0 \right) \frac{n}{n_0} = -\frac{P_{rf}}{n_0 V} \end{aligned}$$

De allí obtenemos la ecuación diferencial parcial en n de

$$\nabla n - \frac{2}{3} \frac{n_0 V}{\alpha A D} \left(E_{ion} \langle \sigma v \rangle_{ion} + E_{rad}^0 \langle \sigma v \rangle_{rad}^0 \right) \frac{n}{T_e} = -\frac{2}{3} \frac{P_{rf}}{\alpha A D} \frac{1}{T_e} \quad (41)$$

Nos interesa la información que podemos sacar de está ecuación. También vale la pena considerar que esto también obedece al caso en que ∇T_e no cambia de forma abrupta a lo largo del plasma ya que de ser así habría que considerar el término que contiene ∇T_e . En resumen este nuevo modelo se da bajo los siguientes supuestos:

- Plasma cuasi-neutro: $n = n_e \approx n_i$.
- La temperatura en los bordes es una fracción de la temperatura del volumen: $T_e(a) = \alpha T_e$ con $\alpha \in [0, 1]$
- Plasma frío: $n \ll n_0$.
- Temperatura iónica baja: $T_i \ll T_e$.
- La temperatura cambia de forma continua y suave a lo largo del plasma: $\nabla T_e \cdot \frac{n}{n_0} \ll 1$

Este modelo también depende de cuatro parámetros los cuales son: P_{rf} , V , n_0 y $\alpha\Upsilon$ donde $\Upsilon \equiv AD$. Pese a que este modelo se da en términos de una expresión diferencial sigue siendo un modelo relativamente fácil de manejar debido a la linealidad de la expresión.

La expresión final queda como

$$\nabla n - \frac{2n_0V}{3\alpha\Upsilon} \left(E_{ion} \langle \sigma v \rangle_{ion}(T_e) + E_{rad}^0 \langle \sigma v \rangle_{rad}^0(T_e) \right) \frac{n}{T_e} = -\frac{2P_{rf}}{3\alpha\Upsilon} \frac{1}{T_e} \quad (42)$$

Podemos tomar la complejidad del problema un paso más adelante lo que haremos en la siguiente sección.

4. Densidad $n = n(T_e)$ en un plasma cuasi-neutral

En este caso mantendremos únicamente tres supuestos:

- Cuasi-neutralidad: $n = n_e \approx n_i$.
- Temperatura en los bordes: $T_e(a) = \alpha T_e$ con $\alpha \in [0, 1]$.
- Temperatura iónica baja: $T_i \ll T_e$.

Igualando las expresiones (34) y (35), usando (33), dividiendo ambos lados de la ecuación por V y de las definiciones de los N_p obtenemos:

$$\begin{aligned} & \frac{A}{V} (n\chi \nabla T_e + \frac{3}{2} \alpha D T_e \nabla n) = \\ & -\frac{P_{rf}}{V} + (E_{ion} \langle \sigma v \rangle_{ion} + E_{rad}^0 \langle \sigma v \rangle_{rad}^0) n_0 n + \\ & \left(E_{ion2} \langle \sigma v \rangle_{ion2} + \frac{3}{2} T_e \langle \sigma v \rangle_{rec} + E_{rad}^i \langle \sigma v \rangle_{rad}^i + \frac{Q_{ei}}{n^2} \right) n^2 \end{aligned}$$

Ahora trabajamos un poco más con la interacción de Coulomb que hasta ahora no se había considerado. Usando las expresiones de Q_{ei} y de τ^{ei} se puede definir la constante $\varpi \equiv \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{4\sqrt{2\pi m_e}}{m_i}$ y se puede reescribir Q_{ei} tal que primero escribimos $1/\tau^{ei}$ usando la Ec. (31)

$$\frac{1}{\tau^{ie}} = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{8\sqrt{2\pi m_e n} \ln \Lambda}{3m_i T_e^{3/2}}$$

Insertamos esto en la expresión de Q_{ei} Ec.(29) tal que

$$\begin{aligned}
Q_{ei} &= \frac{3}{2}n(T_e - T_i) \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{8\sqrt{2\pi m_e n} \ln \Lambda}{3m_i T_e^{3/2}} \\
&= \frac{3}{2}nT_e \left(1 - \frac{T_i}{T_e} \right) \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{8\sqrt{2\pi m_e n} \ln \Lambda}{3m_i T_e^{3/2}} \\
&= \left[\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{4\sqrt{2\pi m_e}}{m_i} \right] \frac{n^2 \ln \Lambda}{T_e^{1/2}} \\
&= \varpi \frac{n^2 \ln \Lambda}{T_e^{1/2}}
\end{aligned} \tag{43}$$

Al reemplazar Q_{ei} se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{3}{2} \frac{\alpha A D T_e}{V} \nabla n - \left(E_{ion2} \langle \sigma v \rangle_{ion2} + \frac{3}{2} T_e \langle \sigma v \rangle_{rec} + E_{rad}^i \langle \sigma v \rangle_{rad}^i + \frac{\varpi \ln \Lambda}{\sqrt{T_e}} \right) n^2 + \\
\left(\chi \frac{A}{V} \nabla T_e - E_{ion} \langle \sigma v \rangle_{ion} n_0 - E_{rad}^0 \langle \sigma v \rangle_{rad}^0 n_0 \right) n = -\frac{P_{rf}}{V}
\end{aligned}$$

Finalmente podemos dejar ∇n sin factores y obtemos la expresión final incluyendo todas las dependencias con T_e

$$\begin{aligned}
\nabla n - \frac{2}{3} \frac{V}{\alpha \mathcal{T} T_e} \left(E_{ion2} \langle \sigma v \rangle_{ion2} (T_e) + \frac{3}{2} T_e \langle \sigma v \rangle_{rec} (T_e) + E_{rad}^i \langle \sigma v \rangle_{rad}^i (T_e) + \frac{\varpi \ln \Lambda(T_e)}{\sqrt{T_e}} \right) n^2 + \\
\frac{2}{3} \frac{1}{\alpha \mathcal{T} T_e} \left[\chi \nabla T_e - n_0 V \left(E_{ion} \langle \sigma v \rangle_{ion} (T_e) - E_{rad}^0 \langle \sigma v \rangle_{rad}^0 (T_e) \right) \right] n = -\frac{2}{3} \frac{P_{rf}}{\alpha \mathcal{T} T_e} \tag{44}
\end{aligned}$$

Recordando que ϖ es una constante, se obtiene una expresión final que depende de cinco parámetros los cuales son: P_{rf} , V , n_0 , $\alpha \mathcal{T}$, y χ .

Nótese que la ecuación (44) es una ecuación diferencial parcial no lineal, lo que hace que sea un problema con una complejidad bastante alta. A partirde aquí trataremos de plantear un 'fit analítico' para la densidad usando una red Neuronal Física (PINN).

Referencias

- [1] C. Lechte, J. Stöber, and U. Stroth, “Plasma parameter limits of magnetically confined low temperature plasmas from a combined particle and power balance,” *Physics of Plasmas*, vol. 9, no. 6, pp. 2839–2846, 06 2002. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1063/1.1467928>
- [2] R. Goldston and P. Rutherford, *Introduction to Plasma Physics*, ser. Introduction to Plasma Physics. Taylor & Francis, 1995.
- [3] F. J.P., *Ideal MHD*. CUP, 2014.

- [4] D. J. S. Per Helander, *Collisional Transport in Magnetized plasmas*, ser. Cambridge Monographs on Plasma Physics. Cambridge University Press, 2005.
- [5] P. D. T. K. D. G. M. P. D. L. S. e. U. Schumacher (auth.), Priv-Doz. Dr. Andreas Dinklage, *Plasma Physics: Confinement, Transport and Collective Effects*, 1st ed., ser. Lecture Notes in Physics №670. Springer, 2005.