

Desarrollo de un Modelo Global y Modelos 1D en el Estudio de Transporte Clásico en el Plasma

Aaron Sanabria Martínez*
Tutor: Ricardo Solano Piedra†

August 26, 2025

1 Colisiones en el Plasma: Secciones eficaces y frecuencias de colisión. Introducción cualitativa desde una perspectiva en 1D

En esta sección introduciremos de modo cualitativo los distintos conceptos fundamentales en el ámbito de colisiones, si bien éstas, en algunos casos, no son las expresiones generales usadas para casos más amplios y modelos más complejos, introducen de manera simple los conceptos bases en los que se fundamentan los modelos cinéticos.

Las colisiones más simples que pueden presentarse en un plasma son aquellas entre electrones con átomos neutros, estas pueden ser elásticas, lo que significa que ambas especies mantienen su identidad y en modelos simples los electrones simplemente rebotan de los neutros, se asume que el cambio de momento de los últimos es negligible. Luego están las colisiones inelásticas, en este caso se dan procesos de ionización, radiación y/o recombinación. Entre especies con carga neta en el plasma también se pueden encontrar las llamadas colisiones de Coulomb, que como su nombre lo indica, se dan por interacciones de Coulomb entre las partículas del plasma.

A groso modo, estos eventos mencionados pueden estudiarse desde la estadística usando el concepto de probabilidad y secciones eficaces. Por ejemplo, para una colisión elástica o inelástica, se puede definir la sección eficaz σ que es el área transversal que, si modelamos las partículas como esferas rígidas, tendría la partícula si al colisionar un electrón con el neutro este se reflejara en un ángulo de 90° o si el átomo se ionizara con todos los electrones que lo colisionan.

Sea n_0 la densidad de neutros que hay en un plasma, se define el camino libre medio λ_{mfp} como el recorrido promedio que tendrá el electrón antes de tener una probabilidad de colisionar con otro neutro [1].

Introduciremos un simple ejemplo en el caso 1D de forma ilustrativa. Imagínese un loza de grueso dx con neutros, véase la figura abajo. La cantidad de estos por unidad de área es de $n_0 dx$ y el área

*aaron.sanabria@ucr.ac.cr

†risolano@itc

que ocupan en la loza es de $n_0\sigma dx$.

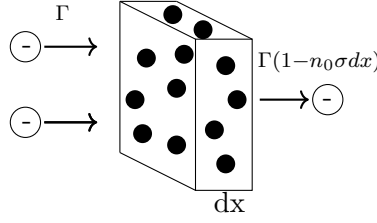


Figure 1: Flujo de electrones Γ incidente sobre una loza de grosor dx que contiene una densidad de neutros n_0 .

Hacia la loza hay un flujo de electrones perpendicular al área transversal de la loza, este flujo incidente los llamaremos $\Gamma(x)$. Ya que consideramos los neutros como esferas rígidas de sección efectiva, si un electrón colisiona con un neutro habrá ionización por lo que el flujo de electrones no es el mismo que sale, el flujo de electrones que no colisiona con los neutros está dado por $\Gamma + d\Gamma = \Gamma(1 - n_0\sigma dx)$. De esto se obtiene que, el cambio de Γ con la distancia x está dada por

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma}{dx} &= -n_0\sigma \\ \Rightarrow \Gamma(x) &= \Gamma_0 \exp(-n_0\sigma x) \end{aligned}$$

Nótese que $n_0\sigma$ tiene unidades de m^{-1} , se define $\lambda_{mfp} = (n_0\sigma)^{-1}$ como el camino libre, trayecto recorrido a partir del cual existe una probabilidad razonable de colisión con un neutro [1]. Para los casos de interés existe un λ_{mfp} cuantitativamente distinto al de este caso, pero la definición cualitativa es la misma.

Para electrones con velocidad v el tiempo medio entre colisiones es

$$\tau = \lambda_{mfp}/v \quad (1)$$

Al inverso de esta cantidad se le denomina "frecuencia de colisión" y se define en términos de una función de distribución como

$$\nu = \langle \tau^{-1} \rangle = n_0 \langle \sigma v \rangle = \frac{n_0}{n_e} \int d^3f_e(v) \sigma(v) v \quad (2)$$

Para cada tipo colisión se puede asignar una frecuencia de colisión de la cual se puede obtener la tasa en la que cada evento da paso a pérdida o adición de partículas de una u otra especie en el plasma. Al multiplicar estas frecuencias por la densidad de las partículas se obtiene un término N_{evento} que es la tasa de emisión o fuente, este es el número de eventos (colisiones que provocan ionización, radiación, colisiones de Coulomb, recombinaciones, etc) que se dan por segundo en un determinado volumen [2].

$$N_{evento}(T_\alpha) = n_\alpha n_\beta \langle \sigma v \rangle_{evento}(T_\alpha) \quad (3)$$

Las expresiones de las Ecs. (1), (2) y (3) sí son definiciones cuantitativas más generales que se usan en problemas de complejidad mayor como el plasma en estudio.

En las colisiones inelásticas se pueden dar los siguientes eventos

- Ionización por impacto: Al colisionar electrones con neutros u iones el proceso resulta en la liberación de dos electrones y un ión de menor Z_α que el original.
- Recombinación de tres cuerpos: Dos electrones y un ión interactúan dando como resultado un neutro o un ión de mayor Z_α que el original.
- Ionización radiativa: un fotón con suficiente energía interactúa con un neutro y como resultado se libera un electrón.
- Recombinación radiativa: un electrón interactúa con un ión y se obtiene un neutro o un ión de mayor Z_α además de la emisión de un fotón.
- Excitación: Debido a colisión se transfiere energía al neutro o ión en ese proceso se irradia la energía de excitación mediante ondas electromagnéticas. En este caso siempre se pierde energía solamente.
- Colisiones de Coulomb: Son elásticas, los electrones calientes le transfieren momento a iones fríos mediante interacciones elásticas de Coulomb.

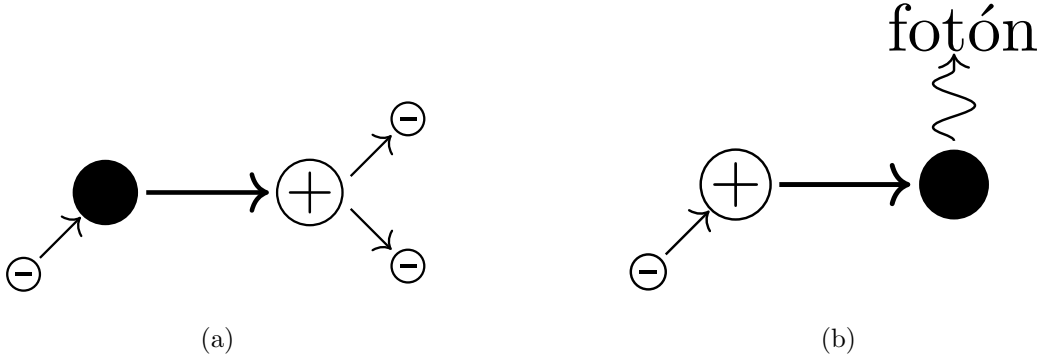


Figure 2: Diagrama de colisiones en un plasma (a) ionización/recombinación por colisión entre especies. (b) recombinación/ionización por procesos radiativos. Nótese que se las flechas son invertibles para obtener los procesos inversos

2 Conceptos fundamentales de la teoría cinética y transporte en el Plasma

2.1 Derivación Heurística de la Ecuación Cinética

Para la derivación de la ecuación cinética o la ecuación de Boltzmann seguimos la siguiente estrategia tal y como lo plantea [3]

1. Derivar la conservación de partículas de un fluido simple en un espacio de fase 3-D.
2. Generalizar a 6-D y dividir las interacciones en aquellas de corto y largo alcance.
3. Añadir el efecto de colisiones donde se asume únicamente **colisiones binarias**.

2.1.1 Conservación de partículas en un espacio de fase 3-D

Primero consideraremos el caso 1-D **sin fuentes ni sumideros** en tal caso para un elemento infinitesimal de volumen

$$\text{Partículas ganadas} = \text{Partículas que entran} - \text{Partículas que salen}$$

Sea $n(x_1, t)$ la densidad de partículas y $\Gamma_1 = nv_1$ el flujo de partículas que entran al volumen.

$$\begin{aligned} \text{Partículas ganadas en un tiempo } \Delta t &= [n(x_1, t + \Delta t) - n(x_1, t)]\Delta x_1\Delta x_2\Delta x_3 \\ \text{Partículas entran en un tiempo } \Delta t &= (\text{flujo que entra})(\text{área})\Delta t = \Gamma_1|_{x_1-\Delta x_1/2}\Delta x_2\Delta x_3 \\ \text{Partículas salen en un tiempo } \Delta t &= (\text{flujo que sale})(\text{área})\Delta t = \Gamma_1|_{x_1+\Delta x_1/2}\Delta x_2\Delta x_3 \end{aligned}$$

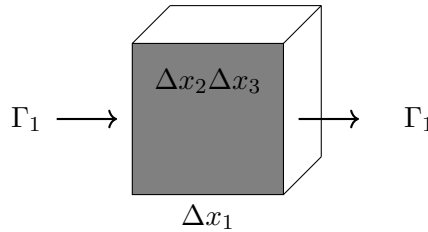


Figure 3: Elemento de volumen en un espacio de fase 3-D con un flujo en la dirección x_1 .

Expandiendo las expresiones en series de Taylor a primer orden

$$\begin{aligned} \text{Ganadas } \Delta t &= [n(x_1, t) + \partial_t n(x_1, t) - n(x_1, t)]\Delta x_1\Delta x_2\Delta x_3 \\ &= \left\{ \left[\Gamma_1|_{x_1} - \frac{\Delta x_1}{2}(\partial_1 \Gamma_1)|_{x_1} \right] - \left[\Gamma_1|_{x_1} + \frac{\Delta x_1}{2}(\partial_1 \Gamma_1)|_{x_1} \right] \right\} \Delta x_2\Delta x_3 \end{aligned}$$

De allí se obtiene la expresión

$$\partial_t n = -\partial_1 \Gamma_1$$

La generalización al caso 3-D es inmediata, tal que

$$\partial_t n(\mathbf{x}, t) + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{\Gamma}(\mathbf{x}, t) = 0$$

2.1.2 Generalización a un espacio de fase 6-D

En un espacio de fase 6-D conformado por los puntos (\mathbf{x}, \mathbf{v}) se procede a generalizar de forma que

$$\begin{aligned} n(\mathbf{x}, t) &\rightarrow f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \text{ (6-D)} && \text{densidad del espacio de fase} \\ \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 &\rightarrow \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 \Delta v_1 \Delta v_2 \Delta v_3 \text{ (6-D)} && \text{elemento de volumen} \end{aligned}$$

Nótese la independencia entre \mathbf{x} y \mathbf{v} , por lo que en general $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$. Ahora generalizamos tomando en cuenta fuentes y sumideros para cada elemento del volumen del espacio de fase. Primero se considerara el caso donde solo haya movimiento en el espacio de fase en las direcciones x_1 y v_1 , luego, de manera análoga al caso en el espacio 3-D será fácil generalizar las expresiones. Imaginemos al espacio físico y al espacio de velocidades la geometría del problema está dada por

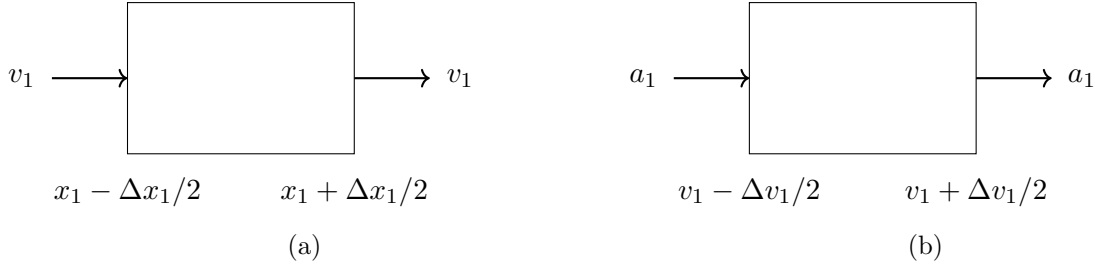


Figure 4: (a) flujo de partícula en el espacio físico. (b) flujo de partículas en el espacio de velocidades.

$$\text{partículas ganadas} = \text{entran} - \text{salen} + \text{fuentes} - \text{sumideros}$$

De está definimos

$$\begin{aligned}
\text{ganadas en } \Delta t &= [f(x_1, v_1, t + \Delta t) - f(x_1, v_1, t)] \Delta \mathbf{x} \Delta \mathbf{v} \\
\text{entran en espacio físico} &= \Delta x_2 \Delta x_3 \Delta t [v_1 f d\mathbf{v}]_{x_1 - \Delta x_1/2} \\
\text{salen en espacio físico} &= \Delta x_2 \Delta x_3 \Delta t [v_1 f d\mathbf{v}]_{x_1 + \Delta x_1/2} \\
\text{aceleran en espacio de velocidad} &= \Delta v_2 \Delta v_3 \Delta t [a_1 f d\mathbf{x}]_{v_1 - \Delta v_1/2} \\
\text{aceleran fuera del espacio de velocidad} &= \Delta v_2 \Delta v_3 \Delta t [a_1 f d\mathbf{x}]_{v_1 + \Delta v_1/2} \\
\text{fuentes – sumideros} &= s \Delta \mathbf{x} \Delta \mathbf{v} \Delta t
\end{aligned}$$

Al aplicar las correspondientes expansiones de Taylor al rededor de t , x_1 y v_1 se obtiene

$$\partial_t f = -\partial_1(v_1 f) - \partial_{v_1}(a_1 f) + s$$

Además recordando que $\partial_i v_j = 0$ se obtiene

$$\partial_t f + v_1 \partial_1 f + a_1 \partial_{v_1} f + f \partial_{v_1} a_1 = s$$

La generalización al espacio 6-D es simple, tal que

$$\partial_t f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) + \mathbf{v} \cdot \nabla f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) + \mathbf{a} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = -f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \nabla_{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{a} + s$$

2.1.3 Ecuación Cinética de Boltzmann

Considerando el caso de interés, el plasma, el término \mathbf{a} puede ser dividido en dos partes, aceleración por interacciones de corto alcance \mathbf{a}_c y por interacciones de largo alcance \mathbf{a}_l tal que

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_s + \mathbf{a}_l$$

El criterio para definir el alcance de las interacciones es el radio de Debye λ_D . Se cataloga como una fuerza de corto alcance a aquellas que se dan en un radio mucho menor al de Debye $r \ll \lambda_D$ y en este caso se asumen solo colisiones de Coulomb las cuales debido al apantallamiento de Debye son despreciables fuera de la esfera de Debye V_D .

Se hace una primera aproximación en la que se limitan las colisiones a ocurrir en un punto tan pequeño que la posición de la partícula no cambia en el espacio físico ni antes ni después de una colisión. Además, la velocidad de la partícula cambia finitamente. Es decir, el resultado de una colisión no puede hacer que la velocidad se dispare al infinito. Entonces consideramos, una colisión en un espacio de fase 6-D implica que \mathbf{x} no cambia y \mathbf{v} puede salir del elemento de volumen en el espacio de velocidades, es decir, el momento de la partícula cambia.

Por otro lado, se desprecian los efectos de las colisiones no binarias, es decir, las colisiones entre tres o más partículas. También, se asume que el número de partículas en un V_D este dentro del límite estadístico y las escalas dimensionales y temporales del problema son tales que, $V_D \ll L$ y $\tau \ll \tau_{pe}$ donde τ_{pe} es el periodo electrónico del plasma.

Consideremos primero las interacciones de largo alcance

$$\mathbf{a}_{l,\alpha} = \frac{Ze}{m_\alpha}(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Para estas interacciones de largo alcance se toma solo el promedio tal que los campos sean suaves y no varíen abruptamente, por lo que \mathbf{E} y \mathbf{B} solo dependen de \mathbf{x} . De allí que

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{a}_{l,\alpha} &= \frac{Ze}{m_\alpha} \nabla_{\mathbf{v}} \cdot (\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)) \\ &= \frac{Ze}{m_\alpha} [\nabla_{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{E} + \nabla_{\mathbf{v}} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B})] \\ &= \frac{Ze}{m_\alpha} [\partial_{v_\mu} (\epsilon_{\mu\nu\rho} v_\nu B_\rho)] \\ &= \frac{Ze}{m_\alpha} \epsilon_{\mu\nu\rho} (B_\rho \partial_{v_\mu} v_\nu + v_\nu \cancel{\partial_{v_\mu} B_\rho}) \\ &= \frac{Ze}{m_\alpha} \epsilon_{\mu\nu\rho} (B_\rho \delta_{\mu\nu}) \\ &= \frac{Ze}{m_\alpha} \epsilon_{\mu\mu\rho} B_\rho = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Bajo los supuestos anteriores, y agregando las interacciones de corto alcance como las únicas fuentes y/o sumideros para partículas de la especie α , la función de distribución cumple

$$\partial_t f_\alpha + \mathbf{v} \cdot \nabla f_\alpha + \frac{Ze}{m_\alpha} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla f_\alpha = C_\alpha \tag{5}$$

Aquí se reemplazo el término de fuentes y sumideros por $s = C_\alpha$ que toma en cuenta únicamente colisiones binarias tal que, siendo C_α la suma del operador de colisiones binarias $C_{\alpha\beta}$ sobre todas las partículas α

$$s \rightarrow C_\alpha = (\delta_t f_\alpha)_c = \sum_{\alpha} C_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \tag{6}$$

donde $C_{\alpha\beta}$ representa el cambio en f_α debido a colisiones con las especies β . Es importante notar que todas las interacciones entre partículas a nivel microscópico son tomadas en cuenta dentro del operador de colisiones.

2.2 Teoría Cinética y Transporte

Los gases ionizados pueden ser especificados por una función de distribución $f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$. Como vimos en el apartado anterior

$$\frac{df_\alpha}{dt} \equiv \left(\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla + \frac{Z_\alpha e}{m_\alpha} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \right) f_\alpha = C_\alpha \quad (7)$$

Esta ecuación no toma en cuenta fluctuaciones termicas; es decir, a pesar de no conocer la dinámica de cada partícula del sistema, por lo que se debe modelar en base a un conjunto de variables aleatorias, asumimos un número de partículas lo suficientemente grande para que la varianza entre las cantidades macroscópicas sea negligible y tengamos propiedades físicas bien definidas como temperatura y presión. La función de distribución representa densidades suaves promediadas sobre un elemento de volumen. Los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} también varían suavemente, no hay fluctuaciones rápidas de microcampos y microfuerzas, es decir, se toma el promedio de esos campos cuyas interacciones son de largo alcance. Los efectos de interacciones a corto alcance se consideran solo en el término de colisiones C_α asumiendo únicamente colisiones binarias.

Ahora de la mecánica estadística es posible obtener los momentos de una distribución, nos interesa el primer y segundo momento[4] de la distribución definidos como

$$n_\alpha \langle g_k \rangle \equiv \int d^3 g_k f_\alpha \quad (8)$$

Donde g_k está dado por $\text{const} \cdot m_\alpha \mathbf{v}^k$, con $\mathbf{v}^k = \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} \otimes \dots \otimes \mathbf{v}$. De ahí obtenemos las siguientes expresiones

$$n_\alpha = \int d^3 v f_\alpha \quad (9)$$

$$\mathbf{u}_\alpha = \frac{1}{n_\alpha} \int d^3 v f_\alpha \mathbf{v} \quad (10)$$

$$\mathbf{Q}_\alpha \equiv \frac{m_\alpha n_\alpha \langle v^2 \mathbf{v} \rangle}{2} \quad (11)$$

El momento cero en la Ec. (9) es la densidad de partículas de una especie en el plasma, i.e., el número de partículas de una especie por unidad de volumen. El primer momento Ec.(10) es la velocidad promedio de las partículas de una especie en el plasma. La Ec.(11) es el flujo de energía y se obtiene de la traza del segundo momento.

Ahora definimos el flujo de partículas en el plasma como

$$\mathbf{\Gamma}_\alpha \equiv n_\alpha \mathbf{u}_\alpha \quad (12)$$

De la ecuación cinética es posible obtener información y expresiones útiles en el contexto del plasma tal que[3]

$$\int d^3v g_k \left[\frac{df_\alpha}{dt} - C_\alpha \right] = 0 \quad (13)$$

Momento 0:

Para el momento cero, usando (13) con $g_k = g_0 = 1$

$$\int d^3v \partial_t f_\alpha + \int \mathbf{v} \cdot \nabla f_\alpha d^3v + \int d^3v \mathbf{a}_{l,\alpha} \cdot \nabla_v f_\alpha = \int d^3v C_\alpha$$

Tomando término a término la ecuación anterior, el primer término

$$\int d^3v \partial_t f_\alpha = \partial_t \left(\int d^3v f_\alpha \right) = \partial_t n_\alpha$$

Para el segundo término primero, considerando que $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{v} f_\alpha) &= \mathbf{v} \cdot \nabla f_\alpha + f_\alpha \nabla \cdot \mathbf{v} \\ \implies \mathbf{v} \cdot \nabla f_\alpha &= \nabla \cdot (\mathbf{v} f_\alpha) \end{aligned}$$

Reemplazando esto en la segunda integral

$$\int d^3v \nabla \cdot (\mathbf{v} f_\alpha) = \nabla \cdot \int d^3v \mathbf{v} f_\alpha = \nabla \cdot (n_\alpha \mathbf{u}_\alpha) = \nabla \cdot \mathbf{\Gamma}_\alpha$$

Luego, para el tercer término, como \mathbf{E} y \mathbf{B} no son dependientes de \mathbf{v} , y como se demostró considerando $\nabla_{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{a}_{l,\alpha} = 0$

$$\mathbf{a}_{l,\alpha} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_\alpha = \nabla_{\mathbf{v}} (\mathbf{a}_{l,\alpha} f_\alpha)$$

Reemplazando esto en la tercera integral, se obtiene

$$\int_V d^3v \nabla_v \cdot (\mathbf{a}_l f_\alpha) = \int_{\partial V} (\mathbf{a}_{l,\alpha} f_\alpha) \cdot d\mathbf{S}_v = 0$$

En el resultado anterior se usó el teorema de la divergencia de Gauss, ahora para visualizar por que se anula, recordemos que integramos sobre todo el espacio de velocidades, una de nuestras suposiciones iniciales fue que la función de distribución f_α decaía lo suficientemente rápido para que en el **límite infinito la probabilidad de tener velocidades infinitas tendiera a cero**, si nos imaginamos el espacio de velocidades como una esfera de radio infinito, la frontera de dicho volumen ∂V debe ser tal que las velocidades en la superficie tiendan a infinito, lo que implica que $f_\alpha \rightarrow 0$, y por tanto la integral de superficie también tenderá a cero.

Reemplazando estos resultados en la expresión (13) se obtiene la siguiente relación

$$\partial_t n_\alpha + \nabla \cdot \mathbf{\Gamma}_\alpha = S_\alpha \quad (14)$$

donde S_α son las fuentes y/o sumideros de las partículas α . Tal que

$$S_\alpha \equiv \int d^3v C_\alpha \quad (15)$$

En estado estacionario como sugiere [2] la Eq. (14) se reduce a

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{\Gamma}_\alpha &= S_\alpha \\ \Rightarrow \int_V d^3r \nabla \cdot \mathbf{\Gamma}_\alpha &= \int_V d^3r S_\alpha \\ \Rightarrow \oint_{\partial V} \mathbf{\Gamma}_\alpha \cdot d\mathbf{S} &= \int_V d^3r S_\alpha \end{aligned}$$

Definimos el flujo radial de partículas como

$$\Gamma_n^\alpha \equiv \oint_{\partial V} \mathbf{\Gamma}_\alpha \cdot d\mathbf{S} = \int_V d^3r S \approx \langle S \rangle V \quad (16)$$

Como es visible al adentrarse en balances globales, el concepto de promedios superficiales es fundamental. Conocer todos los parametros del plasma en su superficie será la piedra angular de los modelos que estamos por desarrollar.

Promedio Superficial

Definimos el promedio de una cantidad vectorial en la superficie como

$$\langle \mathbf{\Delta} \rangle_{\partial V} \equiv \frac{1}{A} \oint_{\partial V} \mathbf{\Delta} \cdot d\mathbf{S} \quad (17)$$

donde A es el área superficial del plasma.

de lo anterior, podemos ver que el flujo radial de partículas es simplemente el promedio superficial del flujo de partículas que atraviesan la superficie, i.e., $\Gamma_n^\alpha = A \langle \Gamma_\alpha \rangle_{\partial V}$ [5].

Ecuación de Energía

Ahora para el momento $g_3 = \frac{1}{2}m_\alpha v^2$ reemplazando en la Ec. (13) se obtiene

$$\int d^3v \frac{1}{2}m_\alpha v^2 \partial_t f_\alpha + \int d^3v \frac{1}{2}m_\alpha v^2 \mathbf{v} \cdot \nabla f_\alpha + \int d^3v \frac{1}{2}m_\alpha v^2 \mathbf{a}_{l,\alpha} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_\alpha - \int d^3v \frac{1}{2}m_\alpha v^2 C_\alpha = 0 \quad (18)$$

Para el primer término se tiene que

$$\int d^3v \frac{1}{2}m_\alpha v^2 \partial_t f_\alpha = \frac{1}{2}m_\alpha \left[\int d^3v \partial_t (v^2 f_\alpha) - \int d^3v f_\alpha \partial_t v^2 \right]$$

Aquí es importante notar que (\mathbf{x}, \mathbf{v}) son puntos en un espacio de fase, la dependencia temporal está contenida en la función de distribución, por lo que en esta perspectiva cinética \mathbf{v} no depende explícitamente del tiempo por lo que $\partial_t v^2 = 0$ de allí que el primer término se reduce a

$$\begin{aligned} \int d^3v \frac{1}{2}m_\alpha v^2 \partial_t f_\alpha &= \partial_t \left(\frac{1}{2}m_\alpha \int d^3v f_\alpha v^2 \right) \\ &= \partial_t \left(\frac{1}{2}m_\alpha \langle v^2 \rangle \right) = \partial_t W_\alpha \end{aligned} \quad (19)$$

En este caso la energía del sistema la definimos como $W_\alpha \equiv m_\alpha \langle v^2 \rangle / 2$.

El segundo termino se puede escribir como

$$\begin{aligned} \int d^3v \frac{1}{2}m_\alpha v^2 \mathbf{v} \cdot \nabla f_\alpha &= \frac{1}{2}m_\alpha \nabla \cdot \left(\int d^3v v^2 \mathbf{v} f_\alpha \right) \\ &= \nabla \cdot \left(\frac{1}{2}m_\alpha \langle v^2 \mathbf{v} \rangle \right) = \nabla \cdot \mathbf{Q}_\alpha \end{aligned} \quad (20)$$

El tercer término es tal que

$$\begin{aligned}
\int d^3v \frac{1}{2} m_\alpha v^2 \mathbf{a}_{l,\alpha} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_\alpha &= \frac{1}{2} m_\alpha \left(\int d^3v \nabla_{\mathbf{v}} \cdot (v^2 f_\alpha \mathbf{a}_{l,\alpha}) - \int d^3v f_\alpha (\nabla v^2) \cdot \mathbf{a}_{l,\alpha} \right) \\
&= \frac{1}{2} m_\alpha \left(\oint_{\partial V} v^2 f_\alpha \mathbf{a}_{l,\alpha} d\mathbf{S}_v - 2 \int d^3v f_\alpha \mathbf{a}_{l,\alpha} \cdot \mathbf{v} \right) \\
&= -m_\alpha \frac{Z_\alpha e}{m_\alpha} \left(\int d^3v f_\alpha \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} + \int d^3v f_\alpha (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} \right) \\
&= -Z_\alpha e \mathbf{E} \cdot \int d^3v f_\alpha \mathbf{v} = -Z_\alpha e n_\alpha \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_\alpha
\end{aligned} \tag{21}$$

Finalmente obtenemos al juntar todo lo anterior que

$$\partial_t W_\alpha + \nabla \cdot \mathbf{Q}_\alpha = Z_\alpha e n_\alpha \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_\alpha + \int d^3v \frac{mv^2}{2} C_\alpha \tag{22}$$

Esta es la llamada ecuación de energía.

En el lado izquierda de la Ec.(22) el primer término corresponde al calentamiento de Joule en el plasma, para explicar el segundo se debe introducir los siguientes términos

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_\alpha &\equiv \mathbf{v} - \mathbf{u}_\alpha \\
\mathbf{R}_\alpha &\equiv \int d^3v m_\alpha \mathbf{v} C_\alpha \\
\mathcal{Q}_\alpha &\equiv \int d^3v \frac{m w_\alpha^2}{2} C_\alpha \\
\frac{3}{2} T_\alpha &\equiv \left\langle \frac{m_\alpha w^2}{2} \right\rangle
\end{aligned} \tag{23}$$

Cada una de ellas corresponde a:

- \mathbf{w}_α : desviación de la velocidad de la partícula de la velocidad promedio, i.e., velocidad por movimiento aleatorio. Cumple que $\langle \mathbf{w}_\alpha \rangle = \mathbf{0}$.
- \mathbf{R}_α : fuerza ejercida en la partícula como resultado de la colisión con otras especies en el plasma.
- \mathcal{Q}_α : razón de la energía térmica transferida por colisiones con otras especies.

El término W en la Ec. (22) se puede escribir de otra forma tomando $\mathbf{v} = \mathbf{u}_\alpha + \mathbf{w}_\alpha$ tal que $\langle v^2 \rangle = u_\alpha^2 + \langle w_\alpha^2 \rangle$ con esto y las definiciones anteriores la ecuación de energía se puede escribir como [4]

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{3n_\alpha T_\alpha}{2} + \frac{m_\alpha n_\alpha u_\alpha^2}{2} \right) + \nabla \cdot \mathbf{Q}_\alpha = Z_\alpha e n_\alpha \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_\alpha + \int d^3v \frac{mv^2}{2} C_\alpha \quad (24)$$

El segundo término en el lado izquierdo de la Ec.(22) es entonces, **la energía total transferida** por colisiones con otras especies.

$$\int d^3v \frac{m_\alpha v^2}{2} C_\alpha = \mathcal{Q}_\alpha + \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{u}_\alpha \quad (25)$$

Aquí el término $\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{u}_\alpha$ corresponde al trabajo por unidad de tiempo realizado por la fuerza \mathbf{R}_α .

Básicamente el lado izquierdo de la ecuación es la potencia debido al calentamiento de Joule o por colisiones con otras partículas. En el caso estacionario la Ec. (22) se vuelve

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{Q}_\alpha &= \mathcal{Q}_\alpha + (Z_\alpha e n_\alpha \mathbf{E} + \mathbf{R}_\alpha) \cdot \mathbf{u}_\alpha \\ \int_V d^3r \nabla \cdot \mathbf{Q}_\alpha &= \mathcal{Q}_\alpha + (Z_\alpha e n_\alpha \mathbf{E} + \mathbf{R}_\alpha) \cdot \mathbf{u}_\alpha \\ \oint_{\partial V} \mathbf{Q}_\alpha \cdot d\mathbf{S} &= \int_V d^3r [\mathcal{Q}_\alpha + (Z_\alpha e n_\alpha \mathbf{E} + \mathbf{R}_\alpha) \cdot \mathbf{u}_\alpha] \end{aligned}$$

Finalmente llegamos a la siguiente expresión al definir el flujo radial de energía $\Gamma_E^\alpha \equiv \oint_{\partial V} \mathbf{Q}_\alpha \cdot d\mathbf{S}$ y $\mathcal{S}_{Q_\alpha} \equiv \mathcal{Q}_\alpha + (Z_\alpha e n_\alpha \mathbf{E} + \mathbf{R}_\alpha) \cdot \mathbf{u}_\alpha$. Este término representa básicamente la disipación de energía por unidad de tiempo en el plasma debido a la interacción con campos y especies diferentes a α .

$$\Gamma_E^\alpha = \int_V d^3r \mathcal{S}_{Q_\alpha} \approx \langle \mathcal{S}_{Q_\alpha} \rangle V \quad (26)$$

Trabajaremos con estas definiciones más adelante.

2.3 Procesos de calentamiento en el Plasma

Hasta el momento no se han hecho muchas consideraciones sobre el Plasma con el que se esta trabajando. Ahora para el modelo en estudio imponemos la condición de un confinamiento en el régimen de transporte clásico. Esto es, los flujos de partículas y energía obdecen la ley de Fick's es decir los flujos de partículas y energía pueden ser descritos mediante los gradientes de densidad n_α y temperatura T_α en casos donde el campo \mathbf{B} es uniforme.

Retomemos el estudio de la cantidad \mathbf{Q}_α que estudiamos en la sección anterior, y añadamos las siguientes definiciones

$$\mathbf{q}_\alpha \equiv \frac{1}{2} m_\alpha n_\alpha \langle w_\alpha^2 \mathbf{w}_\alpha \rangle \quad (27)$$

$$\mathbf{P}_\alpha \equiv m_\alpha n_\alpha \langle \mathbf{w}_\alpha \mathbf{w}_\alpha \rangle \quad (28)$$

$$p_\alpha \equiv \frac{1}{3} Tr(\mathbf{P}_\alpha) = \frac{1}{3} m_\alpha n_\alpha \langle w_\alpha^2 \rangle \quad (29)$$

Ahora profundizamos más en los flujos de calor y las diferentes formas en las que la energía se difunde en el plasma. Comencemos partiendo de lo siguiente

$$\begin{aligned} \langle w_\alpha^2 \mathbf{w}_\alpha \rangle &= \langle (\mathbf{v} - \mathbf{u}_\alpha) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}_\alpha) [\mathbf{v} - \mathbf{u}_\alpha] \rangle \\ &= \langle (v^2 + u_\alpha^2 - 2\mathbf{u}_\alpha \cdot \mathbf{v}) [\mathbf{v} - \mathbf{u}_\alpha] \rangle \\ &= \langle v^2 \mathbf{v} + u_\alpha^2 \mathbf{v} - 2(\mathbf{u}_\alpha \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} - v^2 \mathbf{u}_\alpha - u_\alpha^2 \mathbf{u}_\alpha + 2(\mathbf{u}_\alpha \cdot \mathbf{v}) \mathbf{u}_\alpha \rangle \\ &= \langle v^2 \mathbf{v} \rangle + u_\alpha^2 \langle \mathbf{v} \rangle - u_\alpha^2 \mathbf{u}_\alpha - \langle v^2 \rangle \mathbf{u}_\alpha - 2\mathbf{u}_\alpha \cdot \langle \mathbf{v} \mathbf{v} \rangle + 2\mathbf{u}_\alpha \cdot \langle \mathbf{v} \mathbf{u}_\alpha \rangle \\ &= \langle v^2 \mathbf{v} \rangle + \cancel{u_\alpha^2 \mathbf{u}_\alpha} - \cancel{u_\alpha^2 \mathbf{u}_\alpha} - \langle v^2 \rangle \mathbf{u}_\alpha - 2\mathbf{u}_\alpha \cdot \langle \mathbf{v} \mathbf{v} \rangle + 2\mathbf{u}_\alpha \cdot \langle \mathbf{v} \mathbf{u}_\alpha \rangle \\ &= \langle v^2 \mathbf{v} \rangle - \langle v^2 \rangle \mathbf{u}_\alpha - 2\mathbf{u}_\alpha \cdot \langle \mathbf{v} \mathbf{v} \rangle + 2\mathbf{u}_\alpha \cdot \langle \mathbf{v} \mathbf{u}_\alpha \rangle \end{aligned}$$

Ahora multiplicamos ambos lados de la ecuación por un factor de $\frac{1}{2} m_\alpha n_\alpha$ lo que resulta, usando las definiciones anteriores

$$\mathbf{q}_\alpha = \mathbf{Q}_\alpha - \frac{1}{2} m_\alpha n_\alpha \langle v^2 \rangle \mathbf{u}_\alpha - m_\alpha n_\alpha \mathbf{u}_\alpha \cdot [\langle \mathbf{v} \mathbf{v} - \mathbf{v} \mathbf{u}_\alpha \rangle]$$

Usaremos el siguiente resultado para simplificar más la relación

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_\alpha \cdot \langle \mathbf{w}_\alpha \mathbf{w}_\alpha \rangle &= \mathbf{u}_\alpha \cdot \langle (\mathbf{v} - \mathbf{u}_\alpha)(\mathbf{v} - \mathbf{u}_\alpha) \rangle \\ &= \mathbf{u}_\alpha \cdot (\langle \mathbf{v} \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}_\alpha \mathbf{u}_\alpha \rangle - \langle \mathbf{u}_\alpha \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{v} \mathbf{u}_\alpha \rangle) \\ &= \mathbf{u}_\alpha \cdot \langle \mathbf{v} \mathbf{v} \rangle + \cancel{u_\alpha^2} - \cancel{u_\alpha^2} - \mathbf{u}_\alpha \cdot \langle \mathbf{v} \mathbf{u}_\alpha \rangle \\ &= \mathbf{u}_\alpha \cdot [\langle \mathbf{v} \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{v} \mathbf{u}_\alpha \rangle] \end{aligned}$$

También usaremos el siguiente resultado

$$\begin{aligned} \langle w_\alpha^2 \rangle &= \langle v^2 + u_\alpha^2 - 2\mathbf{u}_\alpha \cdot \mathbf{v} \rangle \\ &= \langle v^2 \rangle + u_\alpha^2 - 2\mathbf{u}_\alpha \cdot \langle \mathbf{v} \rangle \\ &= \langle v^2 \rangle - u_\alpha^2 \end{aligned}$$

De allí es fácil ver que

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}_\alpha &= \mathbf{Q}_\alpha - \frac{1}{2}m_\alpha n_\alpha u_\alpha^2 - \frac{1}{2}m_\alpha n_\alpha \langle w_\alpha^2 \rangle - \mathbf{u}_\alpha \cdot \mathbf{P}_\alpha \\
\Rightarrow \mathbf{Q}_\alpha &= \mathbf{q}_\alpha + \frac{3}{2}T_\alpha n_\alpha \mathbf{u}_\alpha - \frac{1}{2}m_\alpha n_\alpha u_\alpha^2 \mathbf{u}_\alpha - \mathbf{P}_\alpha \cdot \mathbf{u}_\alpha \\
&= \mathbf{q}_\alpha + \frac{3}{2}T_\alpha \mathbf{\Gamma}_\alpha - \frac{1}{2}m_\alpha u_\alpha^2 \mathbf{\Gamma}_\alpha - \mathbf{P}_\alpha \cdot \mathbf{u}_\alpha
\end{aligned} \tag{30}$$

Nótese que por construcción del tensor \mathbf{P}_α este es anisotrópico, sin embargo, es diagonal y las contracciones $\mathbf{u}_\alpha \cdot \mathbf{P}_\alpha$ y $\mathbf{P}_\alpha \cdot \mathbf{u}_\alpha$ son equivalentes. Una forma alternativa de ver esto se logra con el tensor $\mathbf{\Pi}_\alpha = \mathbf{P}_\alpha - p_\alpha \mathbf{1}$

$$\mathbf{Q}_\alpha = \mathbf{q}_\alpha + \frac{3}{2}T_\alpha \mathbf{\Gamma}_\alpha + p_\alpha \mathbf{u}_\alpha + \mathbf{\Pi}_\alpha \cdot \mathbf{u}_\alpha + \frac{1}{2}m_\alpha u_\alpha^2 \mathbf{\Gamma}_\alpha \tag{31}$$

Se tienen los siguientes calentamientos en el plasma[4]

- \mathbf{q}_α : flujo de calentamiento conductivo.
- $\frac{3}{2}T_\alpha \mathbf{\Gamma}_\alpha$: flujo de calentamiento convectivo.
- $p_\alpha \mathbf{u}_\alpha$: Entalpía, trabajo que hace la presión sobre el plasma.
- $\mathbf{\Pi}_\alpha \cdot \mathbf{u}_\alpha$: transporte viscoso de energía.
- $\frac{1}{2}m_\alpha u_\alpha^2 \mathbf{\Gamma}_\alpha$: convección de energía cinética.

Ahora bien, para un transporte en el cual la velocidad del flujo \mathbf{u}_α surge en respuesta a gradientes suaves ($\delta \ll 1$) se puede asumir que está cantidad es pequeña, $u \sim \delta v_T \ll v_T$ por lo que la podemos despreciar, a la vez, si la velocidad del flujo es negligible, también podemos asumir que el transporte viscoso de energía es pequeño en comparación a la conducción y convección. Finalmente, si asumimos que el cambio de volumen debido a la presión es despreciable, podemos deshacernos del término de entalpía. Bajo estos supuestos[5]

$$\mathbf{Q}_\alpha \approx \mathbf{q}_\alpha + \frac{3}{2}T_\alpha \mathbf{\Gamma}_\alpha$$

De lo anterior el flujo de energía Γ_E es dada por

$$\Gamma_E^\alpha \approx A \langle \mathbf{q}_\alpha \rangle_{\partial V} + A \frac{3}{2} \langle T_\alpha \mathbf{\Gamma}_\alpha \rangle_{\partial V} \tag{32}$$

2.4 Transporte radial y las leyes de Fick

A partir de ahora trabajaremos con los electrones en el plasma y dejaremos de lado los subíndices. De momento, bajo un transporte clásico donde el campo magnético es homogéneo asumimos que las leyes de Fick se sostienen tal que $q_j = -\chi \partial_j T$ y $\Gamma_j = -D \partial_j n$, más adelante justificaremos esto. De aquí se puede ver que finalmente las relaciones de transporte radial, o flujo de partículas y energía se pueden escribir como

$$\Gamma_n = -A \langle D \nabla n \rangle_{\partial V} \quad (33)$$

$$\Gamma_E = -A \langle \chi \nabla T \rangle_{\partial V} - \frac{3}{2} A \langle T \mathbf{\Gamma} \rangle_{\partial V} \quad (34)$$

Las cantidades χ y D deben ser estudiadas más a fondo antes de asumir que son simplemente coeficientes, ya que podrán depender de la densidad n y la temperatura T .

3 Método usado en el artículo (Aproximaciones)

Se definen las siguientes expresiones correspondientes a procesos atómicos en el Plasma:

- N_{ion} : Número de ionizaciones por unidad $s \cdot m^3$.
- N_{ion_2} : Número de segundas ionizaciones por unidad $s \cdot m^3$.
- N_{rec} : Número de recombinaciones por unidad $s \cdot m^3$.
- N_{rad} : Número de excitaciones por unidad $s \cdot m^3$.
- Q_{ei} : Densidad de potencia transferida a los iones.
- E_{ion} : Energía de ionización.
- E_{rec} : Energía cinética de un electrón.
- E_{rad} : Promedio sobre todas las energías de radiación.

Las fuentes y sumideros de potencia relacionados a diferentes procesos están dados por $Q_p = N_p E_p$. Las cantidades físicas se definen matemáticamente como:

$$N_{ion} = \langle \sigma v \rangle_{ion} n_e n_0 \quad (35)$$

$$N_{ion_2} = \langle \sigma v \rangle_{ion_2} n_e n_i \quad (36)$$

$$N_{rec} = \langle \sigma v \rangle_{rec} n_e n_i \quad (37)$$

$$N_{rad}^{0/i} = \langle \sigma v \rangle_{rad}^{0/i} n_e n_{0/i} \quad (38)$$

$$Q_{ei} = n_e \frac{\frac{3}{2}(T_e - T_i)}{\tau^{ei}} \quad (39)$$

$$E_{rec} = \frac{3}{2} T_e \quad (40)$$

En este caso n_x son las densidades de partículas de las correspondientes especies que hay en el plasma $x \in i, e, 0$. Además, $e, i, 0$ corresponden a electrones, iones y partículas neutras respectivamente. La cantidad τ_{ei} es el tiempo de relajación para iones cargados simplemente y está aproximado por:

$$\tau_{ei} = \left(\frac{4\pi\epsilon_0}{e^2} \right)^2 \frac{3m_i T_e^{3/2}}{8\sqrt{2\pi m_e n_i} \ln \Lambda} \quad (41)$$

El transporte radial en el plasma en equilibrio está dado por:

- Γ_n : Transporte radial debido a fuentes y sumideros de partículas.
- Γ_E : Transporte radial debido a fuentes y sumideros de energía electrónica.

Del balance de potencias por partículas se tiene que

$$\Gamma_n = V(N_{ion} - N_{rec}) \quad (42)$$

Las partículas creadas por ionización son ya sea recombinadas o transportadas a las paredes. De la teoría clásica de transporte se puede estimar este flujo como:

$$\Gamma_n = -AD\nabla n \quad (43)$$

Donde A el área superficial estimada y D la difusividad de partículas en el plasma. El flujo total de potencia se balancea con fuentes y sumideros y se obtiene que

$$\Gamma_E = P_{rf} - V(E_{ion}N_{ion} + E_{ion_2}N_{ion_2} + E_{rec}N_{rec} + E_{rad}^{0/i}N_{rad}^{0/i} + Q_{ei}) \quad (44)$$

Nuevamente de la teoría clásica de transporte se tiene que el flujo de potencia por energía está dado por

$$\Gamma_E = -An_e\chi\nabla T_e + \frac{3}{2}\alpha T_e\Gamma_n \quad (45)$$

donde χ es el coeficiente de difusividad de calor. Además esto asume que **la temperatura en la frontera del plasma es una fracción de la temperatura del volumen**, i.e., $T_e(a) = \alpha T_e$ con $\alpha \in [0, 1]$.

Vamos a asumir lo siguiente para el caso físico a estudiar:

- $T_i \ll T_e$: Temperatura iónica despreciable.
- $n_i \approx n_e = n$: Quasi-neutralidad del plasma.
- $n_0 \gg n$: Plasma parcialmente ionizado (Plasma frio).
- $\nabla T/T \approx \nabla n/n$: Escala de cambio en los gradientes de densidad y temperatura similares.

Tomando la (42) y reemplazando en (45) se obtiene

$$\Gamma_E = -A\chi n\nabla T_e - \frac{3}{2}\alpha ADT_e\nabla n \quad (46)$$

Del último supuesto $n\nabla T_e \approx T_e\nabla n$ usando esto

$$\begin{aligned} \Gamma_E &= \left(\frac{3}{2}\alpha + \frac{\chi}{D} \right) (-AD\nabla n)T_e \\ &= \left(\frac{3}{2}\alpha + \gamma \right) \Gamma_n T_e \end{aligned} \quad (47)$$

Donde se define el parametro $\gamma = \chi/D$. Ahora usando el penúltimo supuesto y despreciando los términos $n/n_0 \ll 1$ obtendremos una ecuación $n = n(T_e)$ multiplicando la ecuación (47) por un factor de $1/n_0V$ y reemplazando los respectivos N_p

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma_E}{n_0V} &= \frac{P_{rf}}{n_0V} - \left(E_{ion} \frac{\langle \sigma v \rangle_{ion} n n_0}{n_0} + \cancel{E_{ion2} \langle \sigma v \rangle_{ion2} n \frac{n}{n_0}} + E_{rad}^{0/i} \langle \sigma v \rangle_{rad}^{0/i} n \frac{n_{0/i}}{n_0} + \cancel{\frac{3}{2} T_e \langle \sigma v \rangle_{rec} n \frac{n}{n_0}} + \frac{Q_{ei}}{n_0} \right) \\ &= \frac{P_{rf}}{n_0V} - n \left(E_{ion} \langle \sigma v \rangle_{ion} + E_{rad}^0 \langle \sigma v \rangle_{rad}^0 + \frac{Q_{ei}}{n_0} \right) \end{aligned}$$

Ahora como $\tau_{ei} \propto n_i^{-1}$ y $Q_{ei} \propto \tau_{ei}^{-1}$ se tiene que $Q_{ei} \propto n_i$ lo que implica que $Q_{ei}/n_0 \propto n_i/n_0 \rightarrow 0$

Por tanto se obtiene

$$\frac{\Gamma_E}{n_0 V} \approx \frac{P_{rf}}{n_0 V} - n(E_{ion} \langle \sigma v \rangle_{ion} + E_{rad}^0 \langle \sigma v \rangle_{rad}^0) \quad (48)$$

De forma similar se procede con la ecuación (47) y reemplazando Γ_n por la ecuación (42)

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma_E}{n_0 V} &= \frac{1}{n_0 V} \left(\gamma + \frac{3}{2} \alpha \right) V (N_{ion} - N_{rec}) T_e \\ &= \left(\gamma + \frac{3}{2} \alpha \right) n T_e \left(\langle \sigma v \rangle_{ion} \frac{n_0}{n_0} - \langle \sigma v \rangle_{rec} \frac{n}{n_0} \right) \\ &= \left(\gamma + \frac{3}{2} \alpha \right) \langle \sigma v \rangle_{ion} n T_e \end{aligned} \quad (49)$$

Ahora igualamos las ecuaciones (48) y (49) y despejamos n

$$\begin{aligned} \frac{P_{rf}}{n_0 V} - n(E_{ion} \langle \sigma v \rangle_{ion} + E_{rad}^0 \langle \sigma v \rangle_{rad}^0) &= \left(\gamma + \frac{3}{2} \alpha \right) \langle \sigma v \rangle_{ion} n T_e \\ \Rightarrow \frac{P_{rf}}{n_0 V} &= n \left[\left(\gamma + \frac{3}{2} \alpha \right) \langle \sigma v \rangle_{ion} T_e + E_{ion} \langle \sigma v \rangle_{ion} + E_{rad}^0 \langle \sigma v \rangle_{rad}^0 \right] \\ \Rightarrow \frac{P_{rf}}{n_0 V} &= n \left\{ \left[\left(\gamma + \frac{3}{2} \alpha \right) T_e + E_{ion} \right] \langle \sigma v \rangle_{ion} + E_{rad}^0 \langle \sigma v \rangle_{rad}^0 \right\} \end{aligned}$$

Finalmente se despeja n

$$n(T_e; P_{rf}, n_0, V, \gamma, \alpha) = \frac{P_{rf}/n_0 V}{\left[\left(\gamma + \frac{3}{2} \alpha \right) T_e + E_{ion} \right] \langle \sigma v \rangle_{ion} (T_e) + E_{rad}^0 \langle \sigma v \rangle_{rad}^0 (T_e)} \quad (50)$$

Esta expresión es la que se obtiene por [2].

3.1 Forma diferencial lineal de la densidad $n = n(T_e)$

Nos interesa el caso menos aproximado en particular deshacernos de la aproximación de los gradientes. Acá nos desharemos de la aproximación $\nabla n/n \approx \nabla T/T$. Nuevamente asumimos cuasi-neutralidad y un plasma frío, i.e., $n = n_e \approx n_i$ y $n_0 \gg n$. Retomando nuevamete la ecuación (44) e igualando a la ecuación (45), además de reemplazar los N_p

$$\begin{aligned} &-A \left(n \chi \nabla T_e + \frac{3}{2} \alpha T_e D \nabla n \right) = \\ P_{rf} - V &\left(E_{ion} \langle \sigma v \rangle_{ion} n n_0 + E_{ion2} \langle \sigma v \rangle_{ion2} n^2 + \frac{3}{2} T_e \langle \sigma v \rangle_{rec} n^2 + E_{rad}^0 \langle \sigma v \rangle_{rad}^{0/i} n n_{0/i} + Q_{ei} \right) \end{aligned}$$

Nuevamente dividimos ambos lados de la ecuación por $n_0 V$ y descartamos los términos n/n_0 como lo hicimos en la sección anterior de allí obtenemos

$$\begin{aligned} & -\frac{A}{V} \left(\frac{3}{2} \alpha T_e D \frac{\nabla n}{n_0} \right) = \\ & \frac{P_{rf}}{n_0 V} - \left(E_{ion} \langle \sigma v \rangle_{ion} + E_{rad}^0 \langle \sigma v \rangle_{rad}^0 \right) n \\ \Rightarrow & \frac{A}{V} \left(\frac{3}{2} \alpha T_e D \frac{\nabla n}{n_0} \right) - \left(E_{ion} \langle \sigma v \rangle_{ion} + E_{rad}^0 \langle \sigma v \rangle_{rad}^0 \right) n = -\frac{P_{rf}}{n_0 V} \end{aligned}$$

De allí obtenemos la ecuación diferencial parcial en n de

$$\nabla n - \frac{2}{3} \frac{n_0 V}{\alpha A D} \left(E_{ion} \langle \sigma v \rangle_{ion} + E_{rad}^0 \langle \sigma v \rangle_{rad}^0 \right) \frac{n}{T_e} = -\frac{2}{3} \frac{P_{rf}}{\alpha A D} \frac{1}{T_e} \quad (51)$$

Nos interesa la información que podemos sacar de está ecuación. También vale la pena considerar que esto también obedece al caso en que ∇T_e no cambia de forma abrupta a lo largo del plasma ya que de ser así habría que considerar el término que contiene ∇T_e . En resumen este nuevo modelo se da bajo los siguientes supuestos:

- Plasma cuasi-neutro: $n = n_e \approx n_i$.
- La temperatura en los bordes es una fracción de la temperatura del volumen: $T_e(a) = \alpha T_e$ con $\alpha \in [0, 1]$
- Plasma frío: $n \ll n_0$.
- Temperatura iónica baja: $T_i \ll T_e$.
- La temperatura cambia de forma continua y suave a lo largo del plasma: $\nabla T_e \cdot \frac{n}{n_0} \ll 1$

Este modelo también depende de cuatro parámetros los cuales son: P_{rf} , V , n_0 y $\alpha \mathcal{Y}$ donde $\mathcal{Y} \equiv AD$. Pese a que este modelo se da en términos de una expresión diferencial sigue siendo un modelo relativamente fácil de manejar debido a la linealidad de la expresión.

La expresión final queda como

$$\nabla n - \frac{2}{3} \frac{n_0 V}{\alpha \mathcal{Y}} \left(E_{ion} \langle \sigma v \rangle_{ion}(T_e) + E_{rad}^0 \langle \sigma v \rangle_{rad}^0(T_e) \right) \frac{n}{T_e} = -\frac{2}{3} \frac{P_{rf}}{\alpha \mathcal{Y}} \frac{1}{T_e} \quad (52)$$

Podemos tomar la complejidad del problema un paso más adelante lo que haremos en la siguiente sección.

3.2 Densidad $n = n(T_e)$ en un plasma cuasi-neutral

En este caso mantendremos únicamente tres supuestos:

- Cuasi-neutralidad: $n = n_e \approx n_i$.
- Temperatura en los bordes: $T_e(a) = \alpha T_e$ con $\alpha \in [0, 1]$.
- Temperatura iónica baja: $T_i \ll T_e$.

Igualando las expresiones (44) y (45), usando (43), dividiendo ambos lados de la ecuación por V y de las definiciones de los N_p obtenemos:

$$\begin{aligned} & \frac{A}{V}(n\chi\nabla T_e + \frac{3}{2}\alpha DT_e\nabla n) = \\ & -\frac{P_{rf}}{V} + (E_{ion}\langle\sigma v\rangle_{ion} + E_{rad}^0\langle\sigma v\rangle_{rad}^0)n_0n + \\ & \left(E_{ion_2}\langle\sigma v\rangle_{ion_2} + \frac{3}{2}T_e\langle\sigma v\rangle_{rec} + E_{rad}^i\langle\sigma v\rangle_{rad}^i + \frac{Q_{ei}}{n^2}\right)n^2 \end{aligned}$$

Ahora trabajamos un poco más con la interacción de Coulomb que hasta ahora no se había considerado. Usando las expresiones de Q_{ei} y de τ^{ei} se puede definir la constante $\varpi \equiv \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \frac{4\sqrt{2\pi m_e}}{m_i}$ y se puede reescribir Q_{ei} tal que primero escribimos $1/\tau^{ei}$ usando la Ec. (41)

$$\frac{1}{\tau^{ie}} = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \frac{8\sqrt{2\pi m_e n} \ln \Lambda}{3m_i T_e^{3/2}}$$

Insertamos esto en la expresión de Q_{ei} Ec.(39) tal que

$$\begin{aligned} Q_{ei} &= \frac{3}{2}n(T_e - T_i) \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \frac{8\sqrt{2\pi m_e n} \ln \Lambda}{3m_i T_e^{3/2}} \\ &= \frac{3}{2}nT_e \left(1 - \frac{T_i}{T_e}\right) \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \frac{8\sqrt{2\pi m_e n} \ln \Lambda}{3m_i T_e^{3/2}} \\ &= \left[\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \frac{4\sqrt{2\pi m_e}}{m_i}\right] \frac{n^2 \ln \Lambda}{T_e^{1/2}} \\ &= \varpi \frac{n^2 \ln \Lambda}{T_e^{1/2}} \end{aligned} \tag{53}$$

Al reemplazar Q_{ei} se obtiene

$$\frac{3}{2} \frac{\alpha A D T_e}{V} \nabla n - \left(E_{ion_2} \langle \sigma v \rangle_{ion_2} + \frac{3}{2} T_e \langle \sigma v \rangle_{rec} + E_{rad}^i \langle \sigma v \rangle_{rad}^i + \frac{\varpi \ln \Lambda}{\sqrt{T_e}} \right) n^2 + \left(\chi \frac{A}{V} \nabla T_e - E_{ion} \langle \sigma v \rangle_{ion} n_0 - E_{rad}^0 \langle \sigma v \rangle_{rad}^0 n_0 \right) n = -\frac{P_{rf}}{V}$$

Finalmente podemos dejar ∇n sin factores y obtemos la expresión final incluyendo todas las dependencias con T_e

$$\nabla n - \frac{2}{3} \frac{V}{\alpha \mathcal{T} T_e} \left(E_{ion_2} \langle \sigma v \rangle_{ion_2} (T_e) + \frac{3}{2} T_e \langle \sigma v \rangle_{rec} (T_e) + E_{rad}^i \langle \sigma v \rangle_{rad}^i (T_e) + \frac{\varpi \ln \Lambda(T_e)}{\sqrt{T_e}} \right) n^2 + \frac{2}{3} \frac{1}{\alpha \mathcal{T} T_e} \left[\chi \nabla T_e - n_0 V \left(E_{ion} \langle \sigma v \rangle_{ion} (T_e) - E_{rad}^0 \langle \sigma v \rangle_{rad}^0 (T_e) \right) \right] n = -\frac{2}{3} \frac{P_{rf}}{\alpha \mathcal{T} T_e} \quad (54)$$

Recordando que ϖ es una constante, se obtiene una expresión final que depende de cinco parámetros los cuales son: P_{rf} , V , n_0 , $\alpha \mathcal{T}$, y χ .

Nótese que la ecuación (54) es una ecuación diferencial parcial no lineal, lo que hace que sea un problema con una complejidad bastante alta. A partirde aquí trataremos de plantear un 'fit analítico' para la densidad usando una red Neuronal Física (PINN).

References

- [1] G. R.J. and R. P.H., *Introduction to Plasma Physics*, ser. Introduction to Plasma Physics. Taylor & Francis, 1995.
- [2] C. Lechte, J. Stöber, and U. Stroth, “Plasma parameter limits of magnetically confined low temperature plasmas from a combined particle and power balance,” *Physics of Plasmas*, vol. 9, no. 6, pp. 2839–2846, 06 2002. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1063/1.1467928>
- [3] F. J.P., *Ideal MHD*. CUP, 2014.
- [4] D. J. S. Per Helander, *Collisional Transport in Magnetized plasmas*, ser. Cambridge Monographs on Plasma Physics. Cambridge University Press, 2005.
- [5] U. Stroth, *Plasma Physics: Confinement, Transport and Collective Effects*, 1st ed., ser. Lecture Notes in Physics №670, M. G. Dinklage A., Klinger T. and S. L., Eds. Springer, 2005.