

Simulación FDTD en 3D de una Onda Electromagnética Plana Incidente sobre un Diélectrico Esférico Proyecto Programado

C17208. Aaron Sanabria Martínez*

27 de noviembre de 2025

Resumen

En la teoría electromagnética aplicada al estudio de materiales dieléctricos y sus aplicaciones, las soluciones de las ecuaciones de Maxwell son inevitablemente necesarias. El estudio de ondas incidentes sobre capas acopladas perfectamente PML es uno de los problemas de interés. Se estudian las soluciones para un PML que es esfera dieléctrica centrada en una caja con ondas electromagnéticas (EMW) incidentes en el espacio 3D, mediante el método FTDT. El énfasis del proyecto es estudiar y analizar las soluciones numéricas como comprobación del método FDTD. En este trabajo se implementó el método numérico usando C++, se discretizó el espacio y las ecuaciones de Amperè-Maxwell y Faraday en el espacio reciproco. Se obtuvieron y graficaron los campos **E** y **H**. Se comparó la solución a distintas frecuencias usando datos de una expansión de Bessel. Las amplitudes teóricas y experimentales se obtuvieron datos cercanos, pero no del todo correcto con lo que se esperaba de la solución analítica, esto sugiere un problema en el manejo de datos en la implementación, sin embargo los perfiles de los campos se comportan como se espera lejos y dentro de la región del dieléctrico, el método es rápido y efectivo. El método es rápido y versátil. Los perfiles estudiados de los campos se ven como se esperaban. Se implementó un código funcional, pero no se descarta algún fallo semántico que genera leves diferencias entre los esperado analíticamente y los resultados números.

Objetivos

Objetivo General:

Analizar la interacción de ondas electromagnéticas planas en tres dimensiones y un medio dieléctrico esférico usando el método de diferencias finitas en el dominio temporal (FDTD) y comparar la solución numérica con los resultados analíticos obtenidos mediante expansiones de Bessel.

* aaron.sanabria@ucr.ac.cr

Objetivos Específicos

1. Plantear la solución en C++.
2. Discretizar el espacio del sistema a estudiar en grillas finitas.
3. Utilizar el método de FDTD para discretizar las ecuaciones de Faraday y Amperè en su forma diferencial que gobiernan el problema.
4. Plantear las condiciones de frontera e iniciales del problema para ondas que se propagan e interaccionan con un medio dieléctrico disipativo.
5. Simular el sistema y obtener el campo **E** y los vectores **D** y **H**.
6. Comparar los resultados numéricos con aquellos obtenidos analíticamente.

Índice

1. Introducción al problema	3
2. Marco Teórico	3
2.1. Ecuaciones de Maxwell en regiones lejos de fuentes	3
2.2. Material disipativo	4
3. Metodología	4
3.1. Capa Acoplada Perfectamente	5
4. Resultados	7
5. Análisis	10
6. Conclusiones	12
7. Sobre el proyecto	13

1. Introducción al problema

El estudio de las ondas electromagnéticas (EMW) y de los materiales y medios dieléctricos son conceptos fundamentales y esenciales en el desarrollo de la teoría electromagnética. Usualmente el primer encuentro que se tiene en el estudio de las Ondas Electromagnéticas (EMW) introducen el problema en un medio completamente vacío donde la radiación no interactúa con ningún medio. Esto, pese a que da una intuición de como se comporta la radiación, no permite extender el conocimiento a los muchos fenómenos que surgen cuando las EMW interactúan con el medio. Efectos de resonancia de gran interés surgen cuando las ondas que se propagan en espacio vacío interactúan con un medio dieléctrico.

La simulación de ondas electromagnéticas en materiales dieléctricos es importante en muchas aplicaciones que controlan energía electromagnética, algunos ejemplos son cristales fotónicos y estructuras dieléctricas de aceleración. Muchos materiales de gran importancia son anisotrópicos y presentan fenómenos de gran importancia, por tanto, simular sistemas con tensores dieléctricos resulta una tarea de suma bastante fructífera [1]. Los métodos de diferencias finitas en el dominio temporal (FDTD) son de los métodos más simples, tanto conceptual como a nivel de implementación dentro de las técnicas de ondas completas usadas para resolver problemas en electromagnetismo[2]. Dichas técnicas permiten simulaciones de gran tamaño que pueden llegar a ser muy eficientes, además de flexibles al simular materiales complejos como medios dispersivos[1].

En este proyecto se busca estudiar la interacción de EMW planas en tres dimensiones que al propagarse se encuentran con un medio dieléctrico esférico utilizando herramientas computacionales siguiendo la metodología propuesta por [3] con el método FDTD. También, debido a la geometría del problema, se desea comparar los resultados numéricos obtenidos respecto a las soluciones analíticas obtenidas usando expansiones de Bessel modificadas. Para resolver el problema se propondrá una solución en C++.

2. Marco Teórico

2.1. Ecuaciones de Maxwell en regiones lejos de fuentes

Un campo que es función tanto del tiempo como de las coordenadas espaciales puede ser llamado onda [4]. En la simulación de un medio con una constante dieléctrica diferente a 1, en una región del espacio donde no hay cargas libres ni corrientes libres; es decir, en el espacio recíproco $\mathbf{D}(\omega) = \varepsilon_0 \varepsilon_r^*(\omega) \mathbf{E}(\omega)$, se tiene que se debe cumplir la ley de Faraday y la ley de Amperè tal que

$$\partial_t \mathbf{D} = \nabla \times \mathbf{H}, \quad (1)$$

$$\partial_t \mathbf{H} = -\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{E} \quad (2)$$

donde \mathbf{D} es el vector de desplazamiento. Normalizando las expresiones

$$\tilde{\mathbf{E}} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \mathbf{E}, \quad (3)$$

$$\tilde{\mathbf{D}} = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}} \mathbf{D} = c \mathbf{D}, \quad (4)$$

lo que nos lleva a

$$\partial_t \tilde{\mathbf{D}} = c \nabla \times \mathbf{H}, \quad (5)$$

$$\tilde{\mathbf{D}}(\omega) = \epsilon_r^*(\omega) \tilde{\mathbf{E}}, \quad (6)$$

$$\partial_t \mathbf{H} = -c \nabla \times \tilde{\mathbf{E}} \quad (7)$$

donde $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ es la velocidad de la luz en el vacío.

2.2. Material disipativo

Cuando un material tiene conductividad finita, se debe añadir un término de corriente de conducción a la ley de Amperé [2], por tanto, en una región libre de fuentes la ley de Amperé se vuelve

$$\sigma \mathbf{E} + \epsilon \partial_t \mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{H} \quad (8)$$

Para un medio dieléctrico disipativo tal como el que nos disponemos a estudiar, se tiene entonces que [3]

$$\epsilon_r^*(\omega) = \epsilon_r + \frac{\sigma}{i\omega\epsilon_0} \quad (9)$$

Sustituyendo en $\mathbf{D}(\omega)$, se tiene que

$$\mathbf{D}(\omega) = \epsilon_r \mathbf{E}(\omega) + \frac{1}{i\omega\epsilon_0} \mathbf{E}(\omega) \quad (10)$$

En el espacio de tiempo por propiedades de la transformada de Fourier,

3. Metodología

La intención es resolver el set de Ecs. (5) en un medio dieléctrico disipativo, primero consideraremos ondas en espacio vacío que reducen el set de ecuaciones a (5) y (7) que se pueden escribir como

$$\partial_t \tilde{D}_i = c\epsilon_{ijk}\partial_j H_k, \quad (11)$$

$$\partial_t H_i = -c\epsilon_{ijk}\partial_j \tilde{E}_k \quad (12)$$

Para resolver este problema es necesario discretizar el espacio tal que asumiremos que **E** y **H** están entrelazados en una celda cúbica, esto se conoce como la celda de Yee véase la figura 3.

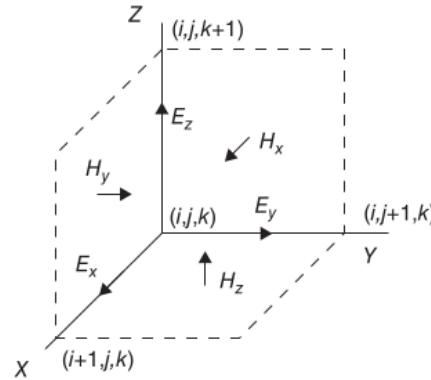


Figura 1: Celda de Yee. Tomado de [3]

Discretizando mediante diferencias finitas de segundo orden, se obtiene,

```

dx [i,j,k] += 0.5*(hz[i,j,k] - hz[i, j-1, k] - hy[i,j,k] + hy[i,j, k - 1])
dy [i,j,k] += 0.5*(hx[i,j,k] - hx[i, j, k-1] - hz[i,j,k] + hz[i-1,j, k])
dz [i,j,k] += 0.5*(hy[i,j,k] - hy[i-1, j, k] - hx[i,j,k] + hx[i,j-1, k])
hx [i,j,k] += 0.5*(ey[i,j, k+1] - ey[i, j, k] - ez[i,j+1,k] + ez[i,j, k])
hy [i,j,k] += 0.5*(ez[i+1,j,k] - ez[i, j, k] - ex[i,j,k+1] + ex[i-1,j, k])
hz [i,j,k] += 0.5*(ex[i,j+1,k] - ex[i, j, k] - ex[i+1,j,k] + ey[i,j, k])

```

En tres dimensiones, el campo **E** se atenúa como el cuadrado de la distancia al propagarse desde la fuente puntual, esto genera problemas para visualizarlo, por tanto, se usará una antena de dipolo para visualizar mejor la propagación del campo [3].

3.1. Capa Acoplada Perfectamente

Las capas acopladas perfectamente es un artificio para la computación de las grillas del FDTD. Todos los PML actúan como materiales disipativo, que absorben los campos que se alejan del interior de la grilla. Es anisotrópico y se construye de tal manera que no hay perdida en la dirección tangencial a la interface entre la región sin disipación y la de PML [2].

La idea básica del un PML es que una onda que se propaga en un medio *A* e incide en un medio *B*, la cantidad de reflexión está dada por las impedancias de dos medios dados por la ecuación

$$\Gamma = \frac{\eta_B - \eta_A}{\eta_B + \eta_A} \quad (13)$$

donde Γ es el coeficiente de reflexión, y η_A y η_B son las impedancias del medio. En tres dimensiones las ecuaciones luego de tomar en cuenta la disipación del medio se vuelven ¹,

$$i\omega \left[1 + \frac{\sigma_D(x)}{i\omega \varepsilon_0} \right] \left[1 + \frac{\sigma_D(y)}{i\omega \varepsilon_0} \right] D_z = c(\partial_x H_y - \partial_y H_x) + c \frac{\sigma_D(z)}{i\omega \varepsilon_0} (\partial_x H_y - \partial_y H_x) \quad (14)$$

ahora definimos,

$$I_{D_z} = \frac{\text{curl.h}}{i\omega} \quad (15)$$

Sea $xn(i) = \sigma_D(i)\Delta t/2\varepsilon_0$ un parámetro auxiliar que varia conductividades, se define también un parámetro g tal que

$$f_{i1} = xn(i) \quad (16)$$

$$g_{i2}(i) = \frac{1}{1 + xn(i)} \quad (17)$$

$$g_{i3}(i) = \frac{1 - xn(i)}{1 + xn(i)} \quad (18)$$

De tal manera que la discretización es

$$\begin{aligned} \text{curl.h} &= H_y^n \left(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2} \right) - H_y^n \left(i - \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2} \right) \\ &\quad - H_x^n \left(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2} \right) + H_x^n \left(i, j - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2} \right), \end{aligned} \quad (19)$$

$$I_{D_z}^{n+1/2} \left(i, j, k + \frac{1}{2} \right) = I_{D_z}^{n-1/2} \left(i, j, k + \frac{1}{2} \right) + \text{curl.h}, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} D_z^{n+1/2} \left(i, j, k + \frac{1}{2} \right) &= g_{i3}(i)g_{j3}(j)D_z^{n-1/2} \left(i, j, k + \frac{1}{2} \right) \\ &\quad + g_{i2}(i)g_{j2}(j) \left[0,5\text{curl.h} + g_{k1}(k)I_{D_z}^{n+1/2} \left(i, j, k + \frac{1}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad (21)$$

Estas relaciones debe derivarse para cada una de las tres dimensiones para cumplir con todas las nueve ecuaciones. Para el dieléctrico también se deben especificar los parámetros en la grilla.

¹La derivación de las ecuaciones es fácil, sin embargo es trabajoso y no aporta valor didáctico por lo que se decidió no adjuntar la derivación

4. Resultados

Basado en la solución presentada por [3] se implementó un puerto a C++ usando paralización de memoria compartida con OpenMP, los gráficos que se presentan a continuación fueron generados mediante Gnuplot, el cuál también se uso para filtrar los datos obtenidos del código.

Antes de comenzar con los resultados obtenidos quiero aclarar que me referiré al campo auxiliar \mathbf{H} como campo magnético, ya que en este caso la permisividad se toma como constante tanto fuera como dentro de PML. Ambos campos son proporcionales en este caso, por conveniencia es más simple denominar al campo obtenido como campo magnético. No es este el caso para el vector de desplazamiento \mathbf{D} y el campo eléctrico \mathbf{E} , en este caso no se hará mención del primero.

Recordando que en este caso lo que tenemos la solución de los campos $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, \omega)$ y $\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, \omega)$ ², se obtuvo para un espacio de $(40 \times 40 \times 40) \text{ cm}^3$ la solución completa de estas cantidades para tres frecuencias distintas. A partir de esto, y debido a la complejidad de los datos, se decidió que la mejor forma de presentar los resultados es mediante la presentación de la magnitud total del campo eléctrico y no de sus componentes por separado, ya que esta fue la forma que encontré más optima para presentar el comportamiento general de las ondas de forma compacta y simple de entender.

En el siguiente gráfico³ de la figura 2 se muestra la amplitud del campo eléctrico total $E(20, y, 20, \omega)$ donde se tomaron tres frecuencias 50 MHz, 100 MHz y 200 MHz (lineas continuas), y se comparan con resultados analíticos al usar la ecuación de Helmholtz para calcular el campo eléctrico usando las funciones de Bessel y de Legendre [3].

Ahora, en la figura 3 se puede ver un contorno del campo eléctrico proyectado en el plano XY para distintos valores de z , donde que hay una esfera dieléctrica en el centro del espacio de solución (el PML). Cada una de estas proyecciones presenta una mayor o menor intensidad en el campo eléctrico dependiendo de la posición en z . También puede observarse claramente la silueta de la esfera en algunos de los gráficos.

En la figura 4 se tiene una proyección 3D de la intensidad del campo eléctrico en distintos planos, donde se fija una de las coordenadas espaciales en 38cm en una región dentro de la esfera dieléctrica. La idea es visualizar la intensidad del campo en el espacio cercano a la esfera lo que nos permite identificar como afecta este objeto a la magnitud de la onda incidente.

Similar al caso anterior, en la figura 5 se tiene la proyección en 3D de la intensidad de campo eléctrico en diferentes planos, donde se fija una de las coordenadas espaciales en 26cm en una región cercana, pero no en el interior de la esfera dieléctrica, esto nos permitirá luego analizar y discutir bajo una mejor base el efecto del PML sobre el campo eléctrico incidente.

Por último, sobre la magnitud del campo eléctrico nos interesa estudiar una región lejos de la esfera, en la figura 6 podemos ver la proyección en distintos planos donde se fija una de las coordenadas espaciales en 38cm.

²en este caso particular no nos interesa el campo magnético o el campo auxiliar, ya que su magnitud es muy pequeña comparada con lo encontrado para E

³los gráficos están vectorizados, en caso de no poder apreciar bien su contenido es posible hacer zoom en el documento sin perder calidad.

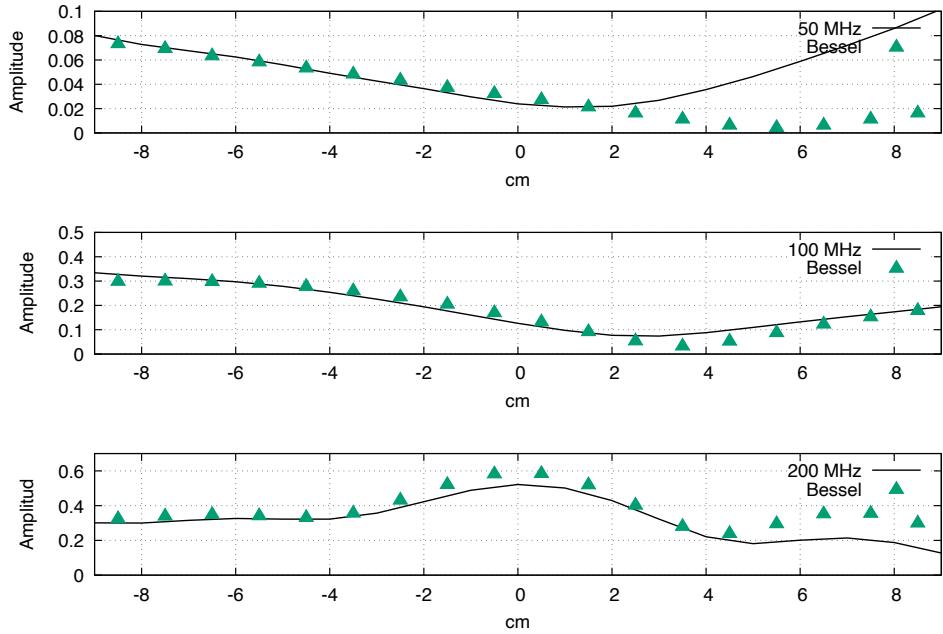


Figura 2: Comparación del calculo de FDTD (lineas) con datos obtenidos de [3] sobre una expansión de Bessel (triángulos) a lo largo del eje principal de una esfera dieléctrica de 20cm de diámetro, con $\epsilon_r = 30$ y $\sigma = 0,3$.

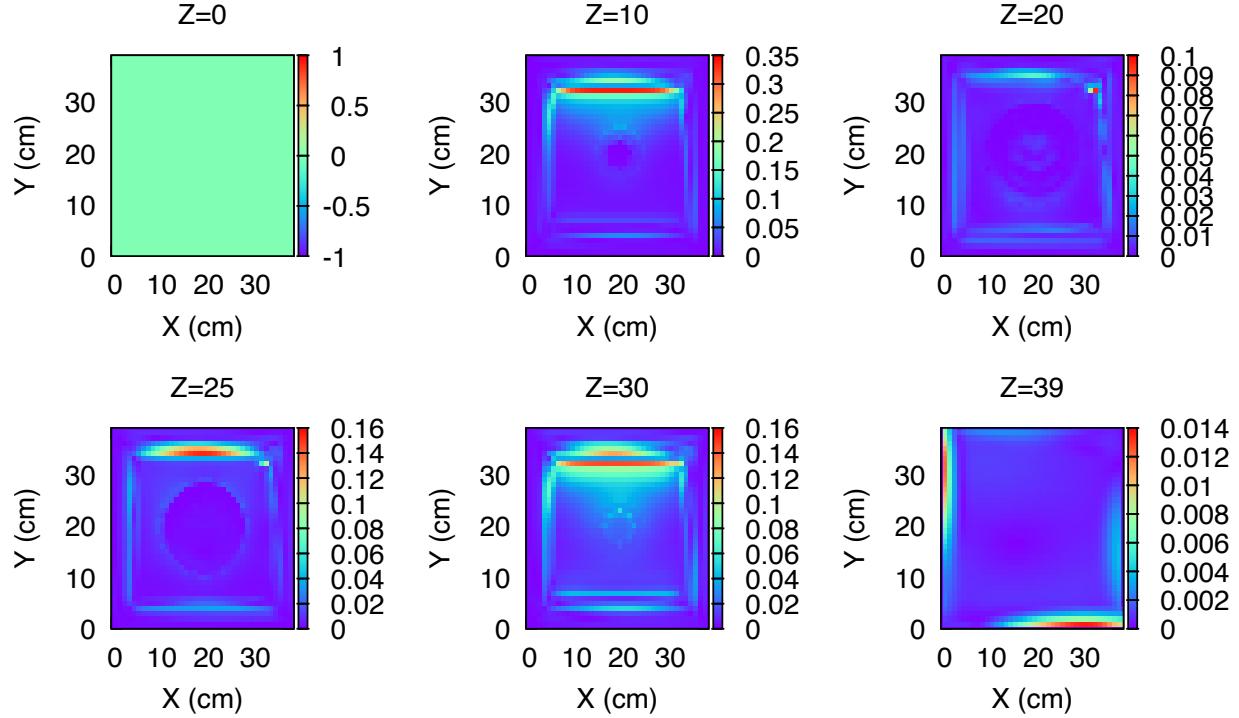


Figura 3: Contorno de la magnitud del campo eléctrico $E(x, y, z)$ calculado en diferentes z

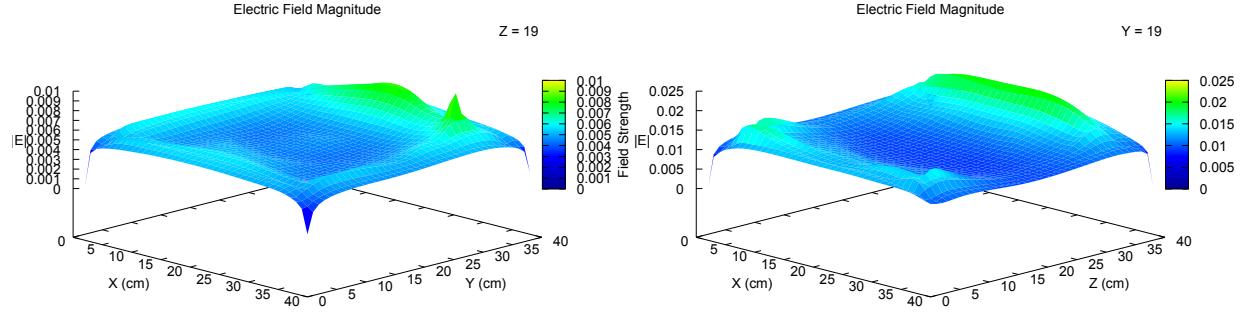


Figura 4: Visualización en 3D de la magnitud del campo magnético $E(x, y, z)$ proyectado en diferentes planos fijando la coordenada espacial a 19cm . Figura de la izquierda plano XY. Figura de la derecha plano XZ.

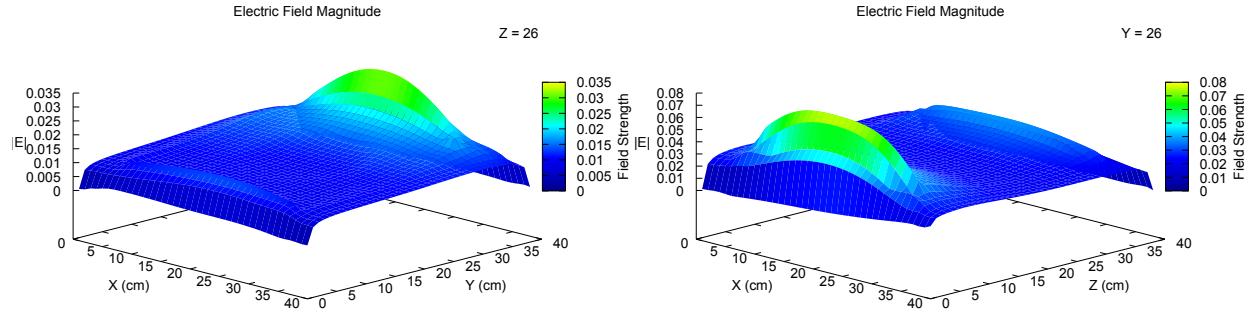


Figura 5: Visualización en 3D de la magnitud del campo eléctrico $E(x, y, z)$ proyectado en diferentes planos fijando la coordenada espacial a 26cm . Figura de la izquierda plano XY. Figura de la derecha plano XZ.

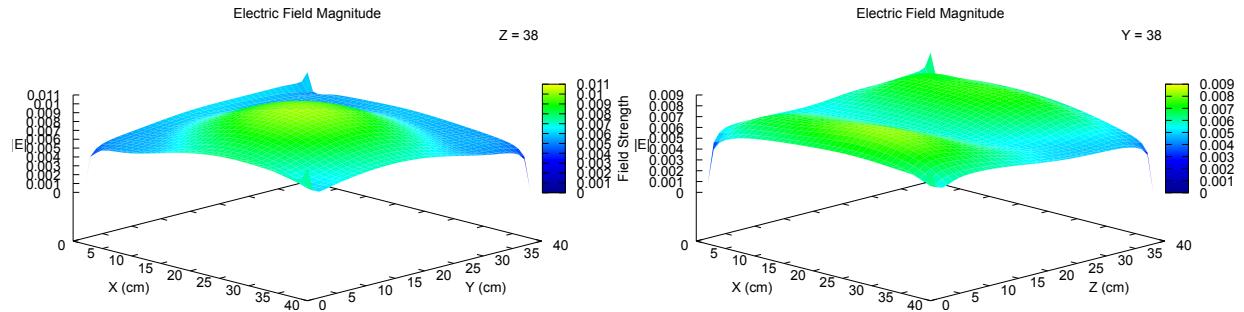


Figura 6: Visualización en 3D de la magnitud del campo eléctrico $E(x, y, z)$ proyectado en diferentes planos fijando la coordenada espacial a 38cm . Figura de la izquierda plano XY. Figura de la derecha plano XZ.

También se estudio el comportamiento de ciertas componentes del campo eléctrico y magnético, se determinó que las componentes que presentan algún comportamiento interesante son las com-

ponentes $E_z(x, y, z)$ y $H_y(x, y, z)$ de los campos calculados. Primero en la figura 7 se presenta la proyección de la componente z del campo eléctrico en una región dentro de la esfera. De forma similar, la figura 8 presenta la misma componente del campo eléctrico, pero en una región alejada del PML. La proyección en el plano YZ resultó prácticamente nula, razón por la cual no se incluye, esto también se exhibe en la magnitud del campo eléctrico E , y las otras componentes, por lo que se puede aproximar el campo eléctrico como $\mathbf{E}(y, z)$.

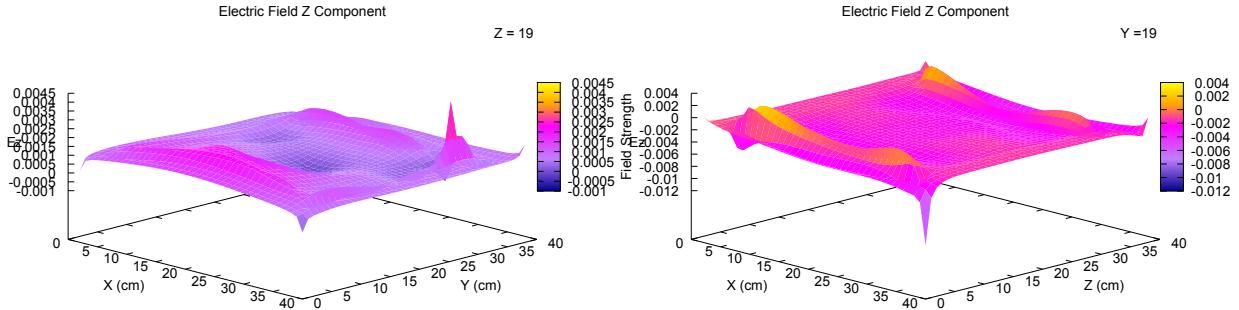


Figura 7: Visualización en 3D de la componente z , del campo eléctrico $E_z(x, y, z)$ proyectado en diferentes planos fijando la coordenada espacial a 19cm . Figura de la izquierda plano XY. Figura de la derecha plano XZ.

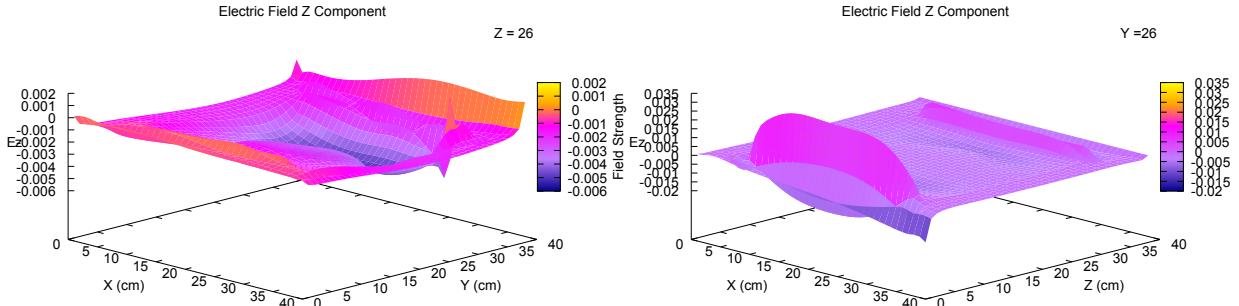


Figura 8: Visualización en 3D de la componente z , del campo eléctrico $E_z(x, y, z)$ proyectado en diferentes planos fijando la coordenada espacial a 26cm . Figura de la izquierda plano XY. Figura de la derecha plano XZ.

Para terminar esta sección de resultados, se tiene en las figuras 9 y 10 la componente y del campo magnético, $H_z(x, y, z)$ proyectado en distintos planos. La proyección en el plano XY resultó poco interesante, ya que la componentes es prácticamente nula, por lo que se tiene que el campo magnético es más aproximado a $\mathbf{H}(x, y)$.

5. Análisis

En la figura 2 se puede notar que la aproximación numérica es decente para las frecuencias de 100MHz y 200MHz , sin embargo, para la frecuencia 50MHz a medida que aumenta x la aproxi-

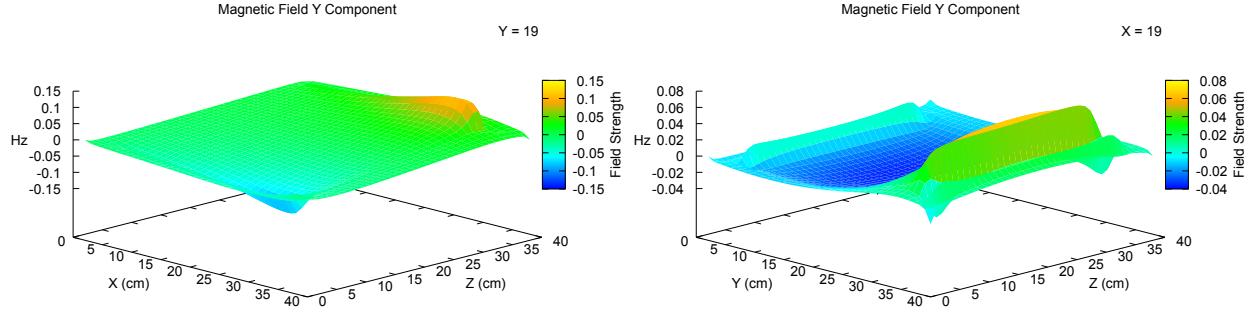


Figura 9: Visualización en 3D de la componente y , del campo magnético $H_y(x, y, z)$ proyectado en diferentes planos fijando la coordenada espacial a 19cm . Figura de la izquierda plano XZ. Figura de la derecha plano YZ.

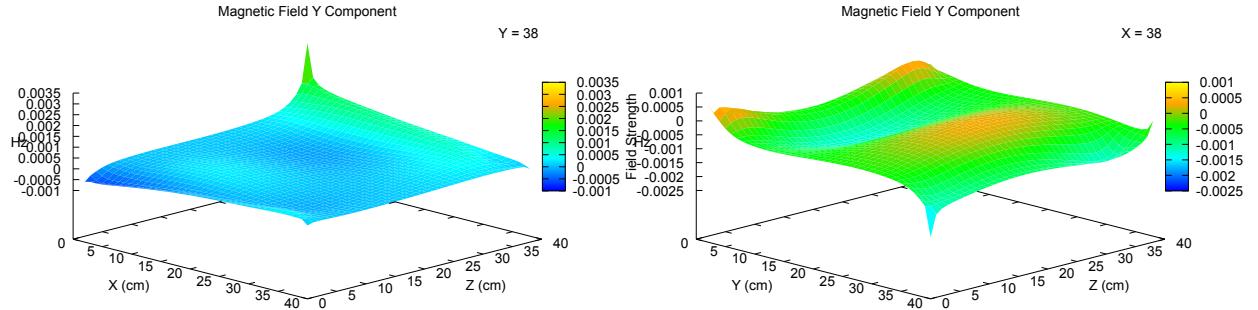


Figura 10: Visualización en 3D de la componente y , del campo magnético $H_y(x, y, z)$ proyectado en diferentes planos fijando la coordenada espacial a 38cm . Figura de la izquierda plano XZ. Figura de la derecha plano YZ.

mación se va deteriorando, esto sin embargo, no es un problema del método como tal sino más bien un error en la semántica del código, esto se puede comprobar de la solución de [3] donde se obtiene un mejor ajuste de los datos. Pese a una exhaustiva revisión del código no se pudo encontrar el bug, sin embargo, el debuggin llevado a cabo garantiza que la estructura del código es correcta y los ordenes de magnitud son correctos en todos las pruebas que se llevaron a cabo, sin embargo no fue posible encontrar el problema exacto que genera el desajuste de datos, la hipótesis es que el problema está relacionado con la transformada de Fourier, sin embargo, no se logra encontrar exactamente el problema. La teoría y la solución del problema realizada en Python sugiere que debe existir cierto error. Sin embargo, puede verse que el comportamiento de los resultados es similar en comportamiento que se puede ver de la solución teórica.

De la figura 3 puede verse claramente que hay una distorsión de la magnitud del campo eléctrico dentro de la región de la esfera, esto se puede ver de las proyecciones en $Z = 10, 20, 25$ y 30 regiones que están cercanas a la esfera, en $Z = 0$ y $Z = 39$ se puede ver que la magnitud es bastante uniforme, este comportamiento también se refleja en las superficies de las figuras 4, 5 y 6, de todas ellas se puede ver que para las superficies en contacto con la esfera dieléctrica, hay un claro cambio del campo en las fronteras. Esto claro es de esperarse ya que en las componentes

perpendiculares del campo eléctrico a la superficie del dieléctrico deben cambiar. En este caso, como el dieléctrico tiene geometría esférica y el campo eléctrico se resolvió en coordenadas cartesianas, no es posible notar la parte paralela a la superficies. No obstante, el hecho de que podamos distinguir la región dentro como fuera de la esfera es un resultado necesario para confirmar que el campo obtenido numéricamente se comporta físicamente como se espera. Además, cabe recalcar que la solución de los campos en todo el espacio están en una distancia corta con el dieléctrico, por lo tanto no se puede esperar un campo totalmente uniforme, debe haber una deformación del campo incluso en regiones fuera del dieléctrico y dentro del espacio de la solución.

El comportamiento de los campos también, y como es de esperar se refleja en la componente E_z donde en ambas proyecciones de la superficie es apreciable la distorsión del campo, lo interesante pasa en el plano XZ para la componente en z del campo eléctrico, parece haber una dependencia más fuerte del campo eléctrico para valores de z en los bordes, especialmente en el borde de z cercanos a cero, esto se puede apreciar en las figuras 7 y 8 en los gráficos de la derecha. Comportamiento similar se presenta para la componente del campo magnético H_y de la figura 9 que está dentro de la esfera, que es donde podemos ver su mayor variación en el plano YZ , este es realmente el único gráfico donde se puede apreciar un campo magnético que varía fuertemente, los otros pese no a ser homogéneos, varían suavemente. Para el campo eléctrico en todas las superficies obtenidas para el plano XY se tiene un comportamiento justo como el que se discute para la magnitud del campo. Claramente, los datos sugieren que la mayor contribución del campo eléctrico es su componente E_z y para el campo magnético es H_y , realmente, los datos obtenidos de la simulación ⁴, sugieren que los campos son perpendiculares entre y que se deforman cerca del dieléctrico estos comportamientos son totalmente esperados.

6. Conclusiones

Se implementó la solución de campos electromagnéticas incidentes sobre un PML en C++ con paralelización de memoria compartida donde se plantearon las ecuaciones de Maxwell con las condiciones de frontera para el problema, del código se logró calcular numéricamente los campos **E** y **H**⁵.

Se analizó el comportamiento de los campos eléctrico y magnético al interactuar con el PML viendo su comportamiento y comparando con la solución analítica, donde se concluye que el comportamiento de los campos es consistente con los que se espera teóricamente para estos al haber un cambio de interfaz entre dos medios.

Se reconoce que puede existir un error semántico en el código de C++ que provoca que los campos no se ajusten tan bien como se espera de otras implementaciones numéricas realizadas, sin embargo, no se logra determinar la causa exacta del problema.

Como reflexión final, todavía hay espacio de mejora para el código que genera un comportamiento esperado, pero no termina de calzar con otras implementaciones, además durante la implementación se reconoce que es un código que puede ser optimizado, principalmente en su estructura funcional. Corregir estos problemas y obtener resultados más convincentes es definitivamente un reto, y puede

⁴pueden consultarse en el repositorio

⁵D se calcula dentro del código pero no se guarda el output

ser un proyecto a futuro ⁶

7. Sobre el proyecto

Este proyecto se puede encontrar en su totalidad en el repositorio <https://github.com/Aaron299792/Impeding-waves-on-PML-.git> aquí se encuentra el código en C++ así como un Jupyter notebook con la solución en python. Dentro de este repositorio se pueden encontrar todos los datos y scripts usados en el proyecto. Además en el directorio `simul` puede encontrarse una simulación corta de la magnitud del campo eléctrico proyectada sobre el plano XY para todos los valores de z .

Referencias

- [1] G. R. Werner and J. R. Cary, “A stable fdtd algorithm for non-diagonal, anisotropic dielectrics,” *Journal of Computational Physics*, vol. 226, no. 1, pp. 1085–1101, 2007.
- [2] J. B. Schneider, “Understanding the finite-difference time-domain method,” 2010. Last updated April 08, 2025.
- [3] D. M. S. Jennifer E. Houle, *Electromagnetic Simulation Using the FDTD Method with Python*. Wiley-IEEE Press, 3. ed., 2020.
- [4] H. R.F., *Time-harmonic electromagnetic fields*. Institute of Electrical and Electronics Enginee, 1965.

⁶referirse al repositorio para ver el proyecto en su totalidad este informe es solo una breve presentación de los resultados generales.