

克拉克(CLARKE)和帕克(PARK)变换

1918 年, Fortescue 提出对称分量法, 为解决多相(三相)不对称交流系统的分析和计算提供了一个有效方法。对称分量法是用于线性系统的坐标变换法。它将不对称多相系统(后面均以三相系统为代表)以同等待定变量的三个三相对称系统来代替, 其中正序、负序系统是两个对称、相序相反的三相系统; 零序系统是一个三相幅值相同、三相量同相的系统, 用来反映三相量之和不为零的不平衡量。

CLARKE 变换

首先是将基于 3 轴、2 维的定子静止坐标系的各物理量变换到 2 轴的定子静止坐标系中。该过程称为 Clarke 变换,

PARK 变换

此刻, 已获得基于 $\alpha\beta$ 2 轴正交坐标系的定子电流矢量。下一步是将其变换至随转子磁通同步旋转的 2 轴系统中。该变换称为 Park 变换

在矢量控制中包括以下系统变换

从三相变换成二相系统 **Clarke** 变换

直角坐标系的旋转 ($\alpha\beta$ 静止) 到 (旋转 dq) , 称为 Park 变换

反之称为 Park 反变换

关于 park 变换

从数学意义上讲, park 变换没有什么, 只是一个坐标变换而已, 从 abc 坐标变换到 dq0 坐标, $u_a, u_b, u_c, i_a, i_b, i_c$, 磁链 a, 磁链 b, 磁链 c 这些量都变换到 dq0 坐标中, 如果有需要可以逆变换回来。

从物理意义上讲, park 变换就是将 i_a, i_b, i_c 电流投影, 等效到 d,q 轴上, 将定子上的电流都等效到直轴和交轴上去。对于稳态来说, 这么一等效之后, i_q, i_d 正好就是一个常数了。

从观察者的角度来说, 我们的观察点已经从定子转移到转子上去, 我们不再关心定子三个绕组所产生的旋转磁场, 而是关心这个等效之后的直轴和交轴所产生的旋转磁场了。

Clarke 变换将原来的三相绕组上的电压回路方程式简化成两相绕组上的电压回路方程式, 从三相定子 A—B—C 坐标系变换到两相定子 $\alpha-\beta$ 坐标系。也称为 3/2 变换。

但 Clarke 变换后, 转矩仍然依靠转子通量, 为了方便控制和计算, 再对其进行 Park 变换变换后的坐标系以转子相同的速度旋转, 且 d 轴与转子磁通位置相同, 则转矩表达式仅与 θ 有关。

详解:

一,

最近在搞双馈反应发电机(下称 DFIG), 搞着搞着对乱七八糟的坐标变换上火。尤其是双 PWM 的控制, 好多文章上都用了开关函数。没错, 在三相坐标下开关函数就类似于阶跃函数一样, 很容易理解; 但是被变换到 dq0 坐标系中就完全乱了。小整理一下, 以下如有纰漏, 请予以河蟹。

二,

派克变换在李光琦的那本《电力系统暂态分析》中是这样定义:

$$P = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos \theta & \cos(\theta - 120^\circ) & \cos(\theta + 120^\circ) \\ -\sin \theta & -\sin(\theta - 120^\circ) & -\sin(\theta + 120^\circ) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

(1)

把 P 作用到三相坐标上即可得到 $dq0$ 坐标系下的对应量。

改变换的规定是定子三相绕组按顺时针依次间隔 120° 排列，每相线圈的正方向满足右手定则；对于旋转的 $dq0$ 坐标系则是按 q 轴正方向超前 d 轴 90° 来安排；角度当然是以逆时针方向为正。图就不给了，有兴趣的话参见这本书的第 33 页图 2-18。

值得说明的是，该书所说的“定子各绕组电流产生的磁通方向与各该项绕组轴线的正方向相反时电流为正值”不影响派克变换，产生影响的是 q 轴的方向规定，比如，若将 q 轴正方向改为滞后 d 轴 90° （即原来的正方向刚好相反），则 P 矩阵中第二行的负号可以全部去掉。

按照书上的指示，该矩阵将三相变量转换为了相对静止的 $dq0$ 坐标系中的变量，求解微分方程的时候提供了方便。但是注意到，首先这个 P 不是正交矩阵，那么由 P 变换出来的电压电流量就不能满足功率守恒；其次还有一个模糊的疑问：对于三相平衡量，在一个平面里面就可以完全描述，怎么就到了用三个量描述了（由二维 到三维）？

三，

讨论之前，先铺垫几个公式。

首先是坐标变换公式。

任何线性空间的坐标事实上都是由若干个线性无关的向量构成（最大无关组）。比如最常见的三维平直空间由三个向量确定：

$$X^T = [1 \quad 0 \quad 0]$$

$$Y^T = [0 \quad 1 \quad 0]$$

$$Z^T = [0 \quad 0 \quad 1]$$

（更正：把三个向量右上的字母 T 去掉）

这就是说任何该空间中的某点总能用这三个向量的某个线性组合确定，而且这种组合是唯一的。

现在约定空间中的某向量 S 即：

$$S = k_x X + k_y Y + k_z Z$$

(2)

（式中的系数即是所谓的坐标）写成下面的统一形式：

$$S = B_{xyz} K_{xyz}^T$$

(3)

其中：

$$B_{xyz} = [X^T \quad Y^T \quad Z^T]$$

$$K_{xyz} = [k_x \quad k_y \quad k_z]$$

B 就相当于是在坐标系中的基底。这里要把基底中向量按列向量的方式排列，于是在后面的推导中就方便一些。

好了，到这一步，基本可以看出一些猫腻。任何一点的坐标实际上都是(2)式所表达的形式，只是为了方便通常把基底向量给省去了。那么，不同的坐标系，区别仅在于基底矩阵 **B** 的不同。进而，由(3)式可知如果：

$$B_{xyz} = B_{dq0} M$$

(4)

将此式代入(3)式有：

$$S = B_{dq0} M K_{xyz}^T$$

(5)

如果把上式等号左边第二、三项视为一个整体，可以看到同一个向量 **S** 现在由一个新的基底表示，即向量 **S** 在新的坐标系中被表示了出来。记：

$$K_{dq0}^T = M K_{xyz}^T$$

(6)

则向量 **S** 又可以表示为：

$$S = B_{dq0} K_{dq0}^T$$

(7)

至此，得到了坐标变换公式(6)。总结坐标的转换方法，可见(4)式很重要。该式左边的矩阵被分解，得到一个新基底矩阵和一个系数矩阵 **M**（即坐标变换矩阵）。而后将 **M** 阵左乘原来的坐标列向量即可得到新坐标系下的坐标列向量。值得说明的是，在求取 **M** 的过程中，要先找好两个坐标系下的基向量组，然后一定要按列向量的方式排列开形成 **B** 矩阵。否则上面所有推导的公式将不再适用。

其次是三个坐标系的基底。

先不说明原因。

第一，**xyz** 坐标系的基底不用说，就是上面提到的 **B_{xyz}** 阵。

第二，关于 **dq0** 坐标系，由于这是一个旋转的坐标系，故需要用角度（**Slta**）来表示其瞬时位置。把 **dq0** 坐标系看成 **xy** 两轴围绕 **z** 轴旋转的坐标系即可。

第三，关于 **abc** 坐标系，这是最重要的。它的基底这样规定：三个空间向量，它们在平面上的投影为三个互成 120° 的向量，且投影为单位长度；在垂直于平面的方向上，三个空间向量都指向相同的方向，对 **z** 轴的投影为 1/3 个单位长度；当然三个空间向量都是从原点出发，图从略。

四，

派克变换的初步推导。

先推倒从 **abc** 系到静止的 **xyz** 系的过渡矩阵 **M1**，如下所示：

由

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}_{\leftarrow}$$

$$B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}_{\leftarrow}$$

$$C = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}_{\leftarrow}$$

这三个基地向量可以列出 **abc** 坐标系下的基底矩阵

$$B_{abc} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}_{\leftarrow}$$

利用(4)式，将 **B_{abc}** 分解到 **B_{xyz}** 中

$$B_{abc} = B_{xyz} M_1$$

(8)

同理，再将 **B_{xyz}** 分解到 **B_{dq0}** 中

$$B_{dq0} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \cos(\theta + 90^\circ) & 0 \\ \sin \theta & \sin(\theta + 90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_{xyz} = B_{dq0} M_2$$

(9)

在 **B_{dq0}** 中各列的分别是 d, q, 0 轴的基底向量，不难推得，

$$M_2 M_1 = \begin{bmatrix} \cos \theta & \cos(\theta - 120^\circ) & \cos(\theta + 120^\circ) \\ -\sin \theta & -\sin(\theta - 120^\circ) & -\sin(\theta + 120^\circ) \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}_{\leftarrow}$$

(10)

但是，拿(10)对比(1)式，很遗憾两者还是不一样，这说明可能中间作出的某些规定有问题，不妨换个思路考虑。

五，

通用相量和派克变换。

考虑一个三相系统的三相电压 $U_{abc} = [u_a \quad u_b \quad u_c]$ 。式中的每个分量都有一个电压方程可以决定，但是由于人为的干预，可以做到让这三个分量在时间上两两相差 120 个电角度（极对数为一时电角度就是机械角度）。假设电压是三相

平衡的（前提是三相对称，即使不对称，也可以用对称分量法转换为对称量来考虑），这就是说，

$$u_a + u_b + u_c = 0$$

(11)

考虑一个平面上的三相轴 **abc**，两两之间互成 120° ，正方向均由原点指向无穷远处。可以验证，如果设想有一个原点出发的向量在该平面上，并由这个向量出发向三个轴做射影，那么可以验证三个射影长度（包括负长度）之和满足(11)式。需要注意，(11)式并不表示三个轴上的射影构成的向量之和正好是设想从原点出发的向量。(11)式只是说明在数值上的一个关系。

如果三相量不平衡，可以通过一个代换：

$$u_a + u_b + u_c = 3u_0$$

(12)

并记：

$$u'_a = u_a - u_0$$

$$u'_b = u_b - u_0$$

$$u'_c = u_c - u_0$$

(13)

则 u'_a 、 u'_b 、 u'_c 又能重新形成平衡量。(12)式也就是为何在(10)式中第三行出现 $1/3$ 的原因。

继续。如果三相量是平衡的，那么在平面上用两个不平行的轴就可以完全表征，三根轴实属多余。在平面直角坐标系中我们知道一个点的位置可以有两个数确定。这两个数对应于横轴和纵轴上相应的刻度。对于三相轴，在平面上的任意一点可以由其中任意两个轴确定。如果非要用三个数值描述平面上的一点也不是不可行，此时由三相轴到两轴的变换应该属于克拉克变换（Clark），变化矩阵不再是方阵。果真如此，写出变换方程后应该是两式三变量，显然方程不够用。但是三相平衡时就相当于补充了一个(11)式，此时方程组有唯一解。更一般的情况是给定(12)式，这样 u_0 可以为 0 也可以不为 0，总之 u_0 是已知的，这样就包括了平衡与不平衡两种情况。

从代数方面考虑，同步发电机运行的时候，电动势相量和电网电压相量之间会存在一个角度差，即功角。该角度是动态变化的。如果站在转子的角度上，这个功角在正常情况下只是作小幅变化，如振荡或者不动。但是如果站在定子上看则该角度的变化还要叠加上一个同步速。正是这个同步速的叠加导致了微分方程求解的困难。进一步考虑，如果能将这两个速度想减，则可以消去这个同步速的干扰，从而微分方程也好解了。

由恒等式：

$$\cos(\theta - \alpha) = \frac{2}{3} [\cos \theta \cos \alpha + \cos(\theta - 120^\circ) \cos(\alpha - 120^\circ) + \cos(\theta - 120^\circ) \cos(\alpha - 120^\circ)]$$

(14)

$$\sin(\theta - \alpha) = -\frac{2}{3} [\cos \theta \sin \alpha + \cos(\theta - 120^\circ) \sin(\alpha - 120^\circ) + \cos(\theta - 120^\circ) \sin(\alpha - 120^\circ)]$$

(15)

可以想象上式中的 β 和 α 都是带有同步速旋转的量，则等式左边的意义就是两式相减，实现了消去同步速的目的。应用上，将 α 换作三相电磁量即可。最后在附上补充的(12)式，整个方程就是一个可逆的线性变换。将 $2/3$ 提到整个矩阵外，则得到(1)式。

六，

如果想不到(14)(15)式则要推导(1)式有些困难。从基底的角度去考虑派克变换的话则有助于理解，可是得到的结果却与派克原始变换不一样。

实际上(10)式也是可行的，变换本身没有错。上文中还提到过一个功率守恒的问题，不妨说一下，派克变换并不是功率守恒变换，即 abc 下的功率和 $dq0$ 下的功率不一致。这是由于派克变换不是正交变换。刚才也提到(10)式并没有问题，那么对(10)式进行施密特正交化，并按列向量单位化，则可以得到如下矩阵：

$$P = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos \theta & \cos(\theta - 120^\circ) & \cos(\theta + 120^\circ) \\ -\sin \theta & -\sin(\theta - 120^\circ) & -\sin(\theta + 120^\circ) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

(16)

可以验证（没验证），对(1)式进行上述整理后也是(16)式的形式。这样，从代数的角度和从几何的角度出发的两种坐标转换推导，最终在功率守恒这一原则下实现了统一。不过，有文献指出，(16)式中根号的出现很带来不必要的麻烦。尽管派克变换不是功率守恒变换，但是认为的加以修正（系数）还是比(16)式应用起来简便，故派克变换是最常用的一种变换。

七，

其它问题。

$dq0$ 坐标中的 0 轴是 z 轴么？我认为 0 轴是什么不重要。因为从代数的推导过程中可以看出， 0 轴的存在是为了补充一个有用方程从而方程组有唯一解；但是另一方面，从几何的角度， 0 轴完全可以和 z 轴重合，此时 z 轴的意义代表着不平衡的分量。原本平衡的三相量如果用一个通用相量表示，则这个通用相量只在一个平面内旋转；如果三相量不平衡，这个通用相量就要在假想的空间中旋转（尽管空间的 z 轴实际意义是不平衡量的大小）。与此相仿，如果对 abc 坐标系也用几何的观点考虑，该系的基底就不能是仅存在于一个平面上，而是一个三维空间，正如上文所规定的那样。 abc 系中每个基底向量已经考虑了不平衡量的存在（三相不平衡量对每相来说都是一样的，这在(13)式中可以看出来），所以每个向量都有 z 轴的分量（对应 0 轴）。

为什么说变换有好几种？在推导的过程中即可看出：比如对基底向量的不同规定，可以得出不同的变换阵；而然只要属于为建立 $dq0$ 系而进行的变换，那么通过正交单位化总能得到(16)式（ q 轴的正方向会影响到第二行的符号）。如果不考虑 0 轴的存在，就是克拉克变换；甚至还有到四维空间的变换，这在输电线路似乎要用到。不过对于研究 DFIG 来说，派克变换已经足够。

推荐一本书，阿德金丝的《交流电机统一理论》（B.Adkins, *The General Theory of Alternating Current Machines*）。