EXCEL VBA 進階班

Lecture 10

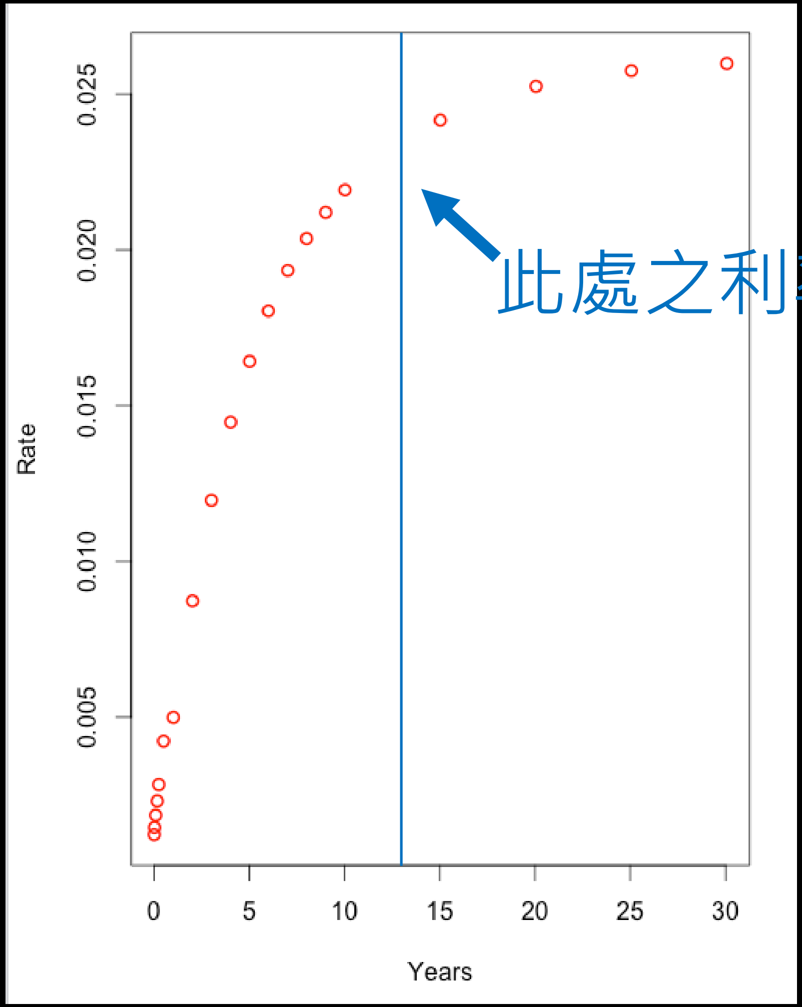
SECTION 17. 殖利率曲線建構方法

利率曲線建立

- 市場上有各天期利率的報價（使用 LIBOR）
- 但此時假如我們關心的是兩個報價之間（如 6Y）
  - 該如何靠現有資訊求得一可靠之利率？

Tenor	Rate
1D	2.375
2D	2.6
1W	2.75
2W	2.77
1M	2.825
2M	2.825
3M	2.825
4M	2.875
5M	2.915
6M	3
9M	3.035
12M	3.15
2Y	2.478

利率曲線建立



此處之利率應為多少合理？

利率曲線建立

- 我們希望得到一個給定任何 $T \geq t$ 都能得到相對應 $R(t,T)$ 之函數。
- 函數建立出之利率曲線能盡量滿足無套利之特性：
  - 精確性
  - 平滑
  - 無負的遠期利率

利率曲線建立

- 準確性（Accuracy）：利用該函數得到之利率評價市場上現有具流動性之商品，其價格應與市場價格接近。
- Antonio 與 Roseburgh（2010）以政府公債與 swap 為例，市場上兩種相似商品的報價可能還是會因賦稅或流動性等問題而有所差距，因此該以何者為主應看評價需求決定。

利率曲線建立

- 平滑（ Smoothness ）：回顧在連續複利之下：

$$P(t,T) = \exp\left(-\int_t^T f(t,u)du\right) = \exp\big(-R(t,T)(T-t)\big)$$

- 由此可得：

$$R(t,T) = \frac{1}{T-t}\int_t^T f(t,u)du$$

利率曲線建立

- 經由上頁可以知道，$R(t,T)$ 是瞬間遠期利率之積分，代表 $R(t,T)$ 處處可微分 ➔ $R(t,T)$ 為一個平滑曲線。
- 許多評價模型依照此假設建立，因此利率曲線函數如不滿足該假設，則無法用來校準模型。

利率曲線建立

- 此處介紹三種方式：
  - Natural Cubic Spline
  - Nelson-Seigel Model
  - Nelson-Seigel-Sevsson Model

利率曲線建立：NOTATION

- 假設現在我們有 $r_1, r_2, \ldots, r_n$ 個利率，對應到 $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ 個不同的天期（以年化時間計）。
- 某些方法下，我們另外會令：$r_0 = 0,\ t_0 = 0$。
- 以下開始逐一介紹。

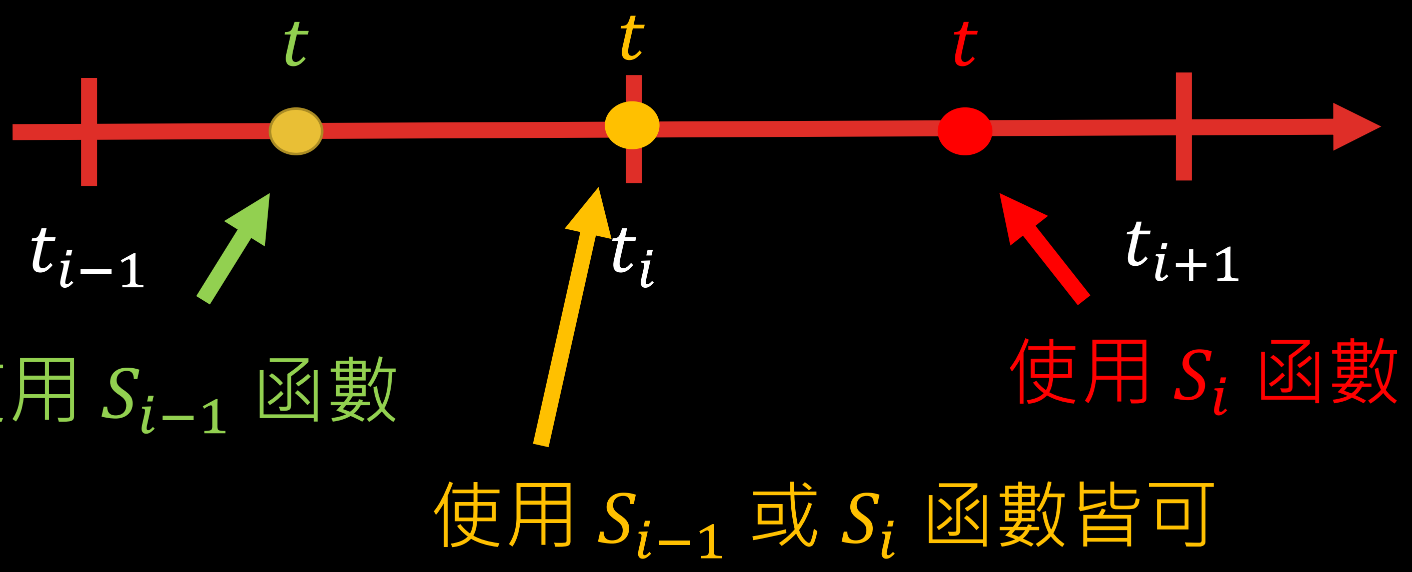
利率曲線建立：NATURAL CUBIC SPLINE

- 現在我們有 $(t_1, r_1), \ldots, (t_n, r_n)$ 組資料。
- 我們假設在每個時間區間 $[t_i, t_{i+1}], i = 1,2, \ldots, n-1$ 中，利率為一個三次方程式如下：

$$S_i(t) = r_i + a_i(t - t_i) + b_i(t - t_i)^2 + c_i(t - t_i)^3, t \in [t_i, t_{i+1}]$$

利率曲線建立：NATURAL CUBIC SPLINE

- 注意：由於該區間為閉區間，當 $t = t_{i+1}, for\ i = 1,2,\ldots,n-1$ 時，可以用 S_i 函數，亦可以用 S_{i+1} 函數。



利率曲線建立：NATURAL CUBIC SPLINE

- 我們希望：

$$S_i(t_i) = r_i, i = 1,2, \dots , n-1$$

- 且我們希望該函數一次可為，因此：

$$S'_i(t_{i+1}) = S'_{i+1}(t_{i+1}), i = 1, \dots , n-2$$

利率曲線建立：NATURAL CUBIC SPLINE

- 第一個條件可以產生 $n-1$ 個方程式。
- 第二個條件可以產生 $n-2$ 個方程式。
- 而我們所有 $3(n-1)=3n-3$ 個未知參數。
- 到此為止為所有 Cubic Spline 之共同部分。
- 各種 Cubic Spline 有不同假設，以下介紹 Natural Cubic Spline。

利率曲線建立：NATURAL CUBIC SPLINE

- Natural cubic spline 假設該函數二次可微，因此：

$$S''_i(t_{i+1}) = S''_{i+1}(t_{i+1}), i = 1, \dots, n-2$$

- 為了要增加方程式數量至與未知數相同，我們假設：

$$S''_1(t_1) = 0$$

$$S''_{n-1}(t_{n-1}) = 0$$

- 由此可加方程式數量增加至 $3n-3$，此即為 Natural Cubic Spline。

利率曲線建立：NATURAL CUBIC SPLINE

- 回顧：

$$S_i(t) = r_i + a_i(t - t_i) + b_i(t - t_i)^2 + c_i(t - t_i)^3, t \in [t_i, t_{i+1}]$$

- 微分後可得：

$$S'_i(t) = a_i + 2b_i(t - t_i) + 3c_i(t - t_i)^2$$

$$S''_i(t) = 2b_i + 6c_i(t - t_i)$$

利率曲線建立：NATURAL CUBIC SPLINE

- 將這些結果代入前述方程式，回顧二階微分部分：

$$S''_i(t_{i+1}) = S''_{i+1}(t_{i+1})$$

- 因此，

$$2b_i + 6c_i(t_{i+1} - t_i) = 2b_{i+1} + 6c_{i+1}(t_{i+1} - t_{i+1})$$

- 移項後可以得：

$$c_i = \frac{b_{i+1} - b_i}{3(t_{i+1} - t_i)}$$

利率曲線建立：NATURAL CUBIC SPLINE

- 將結果代入 $S_i(t_i) = r_i$ 之部分，得：

$$a_i = \frac{(r_{i+1} - r_i)}{(t_{i+1} - t_i)} - \frac{(t_{i+1} - t_i)}{3}(2b_i + b_{i+1})$$

利率曲線建立：NATURAL CUBIC SPLINE

- 由於，

$$S''_1(t_1) = 0$$

$$S''_{n-1}(t_{n-1}) = 0$$

- 因此，

$$b_1 = 0$$

$$b_{n-1} = 0$$

利率曲線建立：NATURAL CUBIC SPLINE

- 所有參數整理後皆可以用 b 來表示，因此一階微分的部分可以整理為下頁之形式：
- 註：
  - $\delta_i = t_{i+1} - t_i$
  - $\Delta_i = r_{i+1} - r_i$

利率曲線建立：NATURAL CUBIC SPLINE

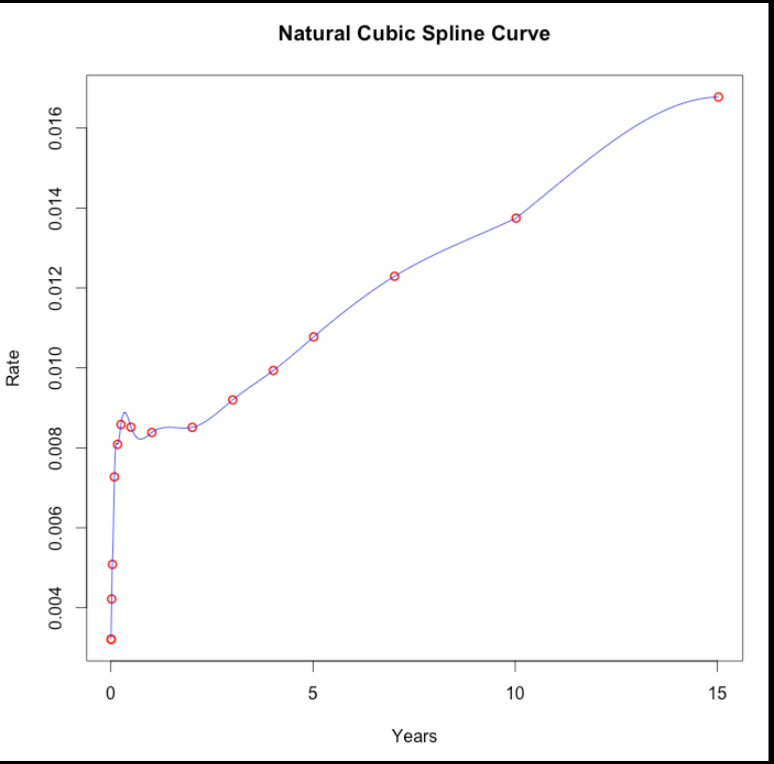
$$
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & & & & \\
\delta_1 & 2(\delta_1+\delta_2) & \delta_2 & & & & \\
0 & \delta_2 & 2(\delta_2+\delta_3) & & & & \\
0 & 0 & \delta_3 & \ddots & & & \\
 & & & & \delta_{n-2} & 2(\delta_{n-2}+\delta_{n-1}) & \delta_{n-1} \\
 & & & & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 \\
3\left(\frac{\Delta_2}{\delta_2}-\frac{\Delta_1}{\delta_1}\right) \\
\vdots \\
3\left(\frac{\Delta_{n-1}}{\delta_{n-1}}-\frac{\Delta_{n-2}}{\delta_{n-2}}\right) \\
0
\end{bmatrix}
$$

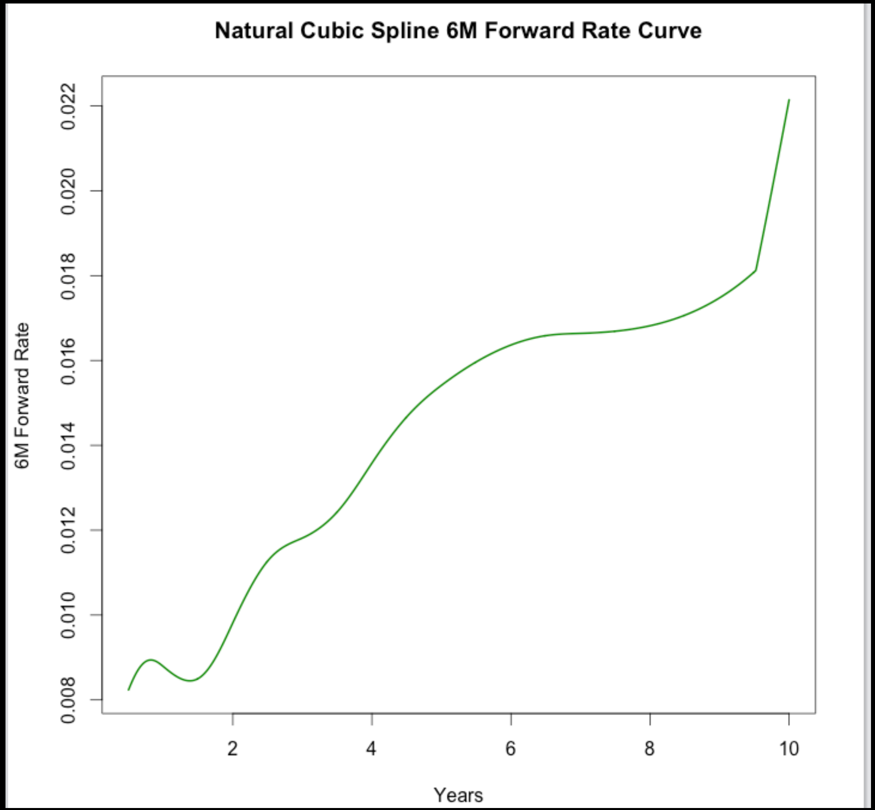
利率曲線建立：NATURAL CUBIC SPLINE

- 解出該線性方程組，即求得所有的 b_i，並可反推出 a_i 與 c_i。
- Natural Cubic Spline 不同於線性內插，可以造出平滑之利率曲線，但對於長天期的資料上可能會有以下問題：
  - 利率曲線通常會隨著天期變長曲度逐漸下降，但因 cubic spline 不一定會滿足此結果，造成不符合直覺的利率曲線與遠期利率。

利率曲線建立：NATURAL CUBIC SPLINE

- Natural Cubic Spline 使長天期利率與反推之遠期利率表現異常：





利率曲線建立：NATURAL CUBIC SPLINE

- 上述之線性內插與 Natural Cubic Spline遠期利率可能為負。
- 以下要介紹的三個方法是依據瞬間遠期利率之定義得出之結果，此些方法在建構出利率曲線函數的同時，也得出了描繪瞬間遠期利率之函數。

利率曲線建立：NELSON-SEIGEL MODEL

- 固定在評價日時間點為 0，Nelson 與 Seigel（1987）假設瞬間遠期利率服從一函數如下：

$$f(0,t) = f(t) = \beta_0 + \beta_1 e^{-t/\tau_1} + \beta_2 \frac{t}{\tau_1} e^{-t/\tau_1}$$

利率曲線建立：NELSON-SEIGEL MODEL

- 由於依照定義，$R(0,t)=\frac{1}{t}\int_0^t f(u)du$，因此將上式積分除以天期後，可以得到即期利率之函數如下：

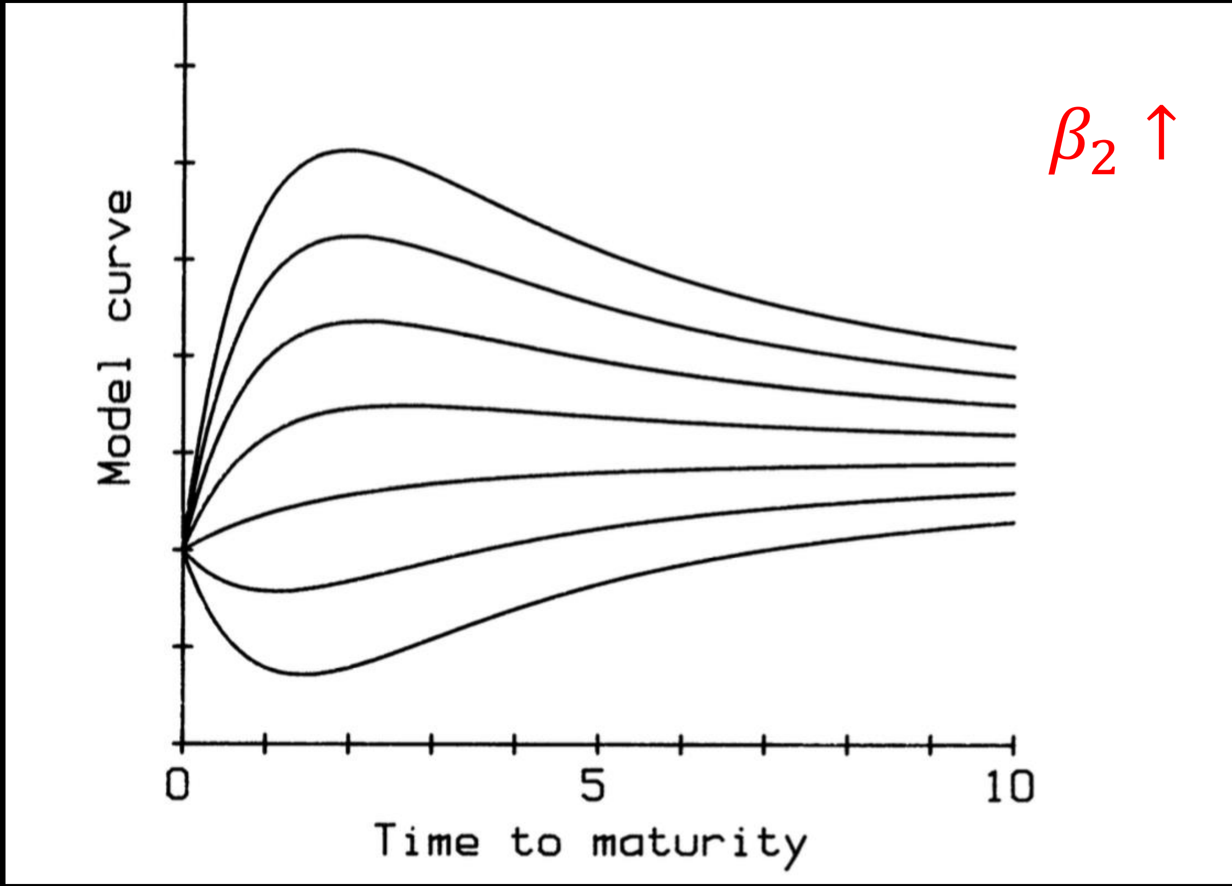
$$\hat{R}(t)=\beta_0+\beta_1\left[\frac{1-e^{-t/\tau_1}}{(t/\tau_1)}\right]+\beta_2\left[\frac{1-e^{-t/\tau_1}}{(t/\tau_1)}-e^{-t/\tau_1}\right]$$

- $\hat{R}(t)$ 為依照瞬間遠期利率得出之 $R(0,t)$
- Nelson-Seigel Model 各參數代表的意義如下：

利率曲線建立：NELSON-SEIGEL MODEL

- β_0：consol rate，代表瞬間遠期利率與即期利率隨著天期越長將回歸之均數，$\beta_0 > 0$。
- $\beta_0 + \beta_1$：瞬間短期利率，代表到期日只有一瞬間之即期利率，下部分短利模型會詳細介紹，$\beta_0 + \beta_1 > 0$。
- β_2：代表利率曲線之曲度，詳細參考下頁圖形。
- τ_1：代表利率回歸至 consol rate 之速度，$\tau_1 > 0$

利率曲線建立：NELSON-SEIGEL MODEL



$\beta_2 \uparrow$

利率曲線建立：NELSON-SEIGEL MODEL

- Nelson-Seigel Model 各參數與圖形之關係：

Shape of the spot rate	β_0	β_1	β_2	τ_1	Condition
Increasing, concave	+	−	+	+	$\lvert\beta_1\rvert \geqslant \lvert\beta_2\rvert$
Increasing	+	−	−	+	$\lvert\beta_1\rvert \geqslant \lvert\beta_2\rvert$
Decreasing, convex	+	+	−	+	$\lvert\beta_1\rvert \geqslant \lvert\beta_2\rvert$
Decreasing	+	+	+	+	$\lvert\beta_1\rvert \geqslant \lvert\beta_2\rvert$
Hump, above β_0	+	+	+	+	$\lvert\beta_1\rvert < \lvert\beta_2\rvert$
Hump, crosses β_0	+	−	+	+	$\lvert\beta_1\rvert < \lvert\beta_2\rvert$
Trough, below β_0	+	−	−	+	$\lvert\beta_1\rvert < \lvert\beta_2\rvert$
Trough, crosses β_0	+	+	−	+	$\lvert\beta_1\rvert < \lvert\beta_2\rvert$

利率曲線建立：NELSON-SEIGEL MODEL

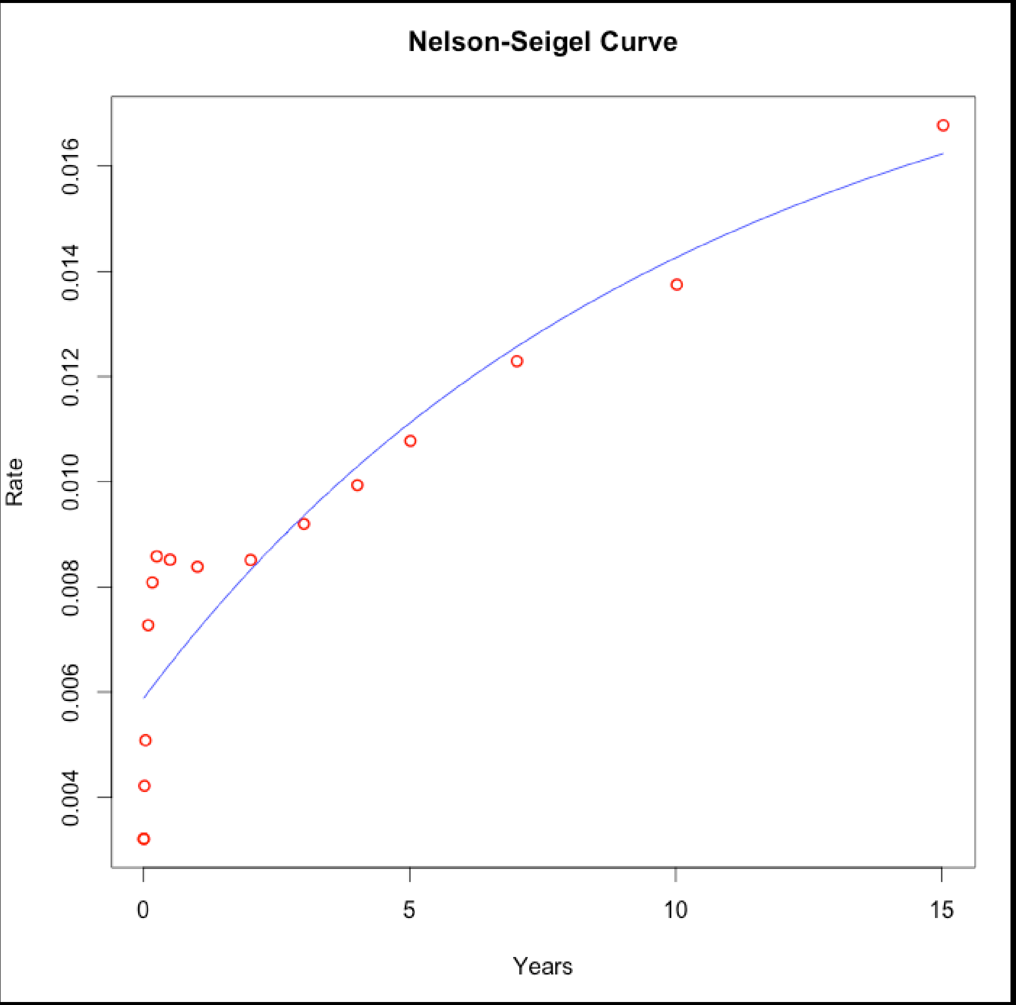
- 求得之方式，依照 Gilli、Große 與 Schumann（2010）之建議，為找一組參數極小化下式：

$$\min_{\beta_0,\beta_1,\beta_2,\tau_1} \sum_{i=1}^{n} \left(r_i - \hat{R}(t_i)\right)^2$$

利率曲線建立：NELSON-SEIGEL MODEL

- 該模型富有經濟意涵，可以漸進許多種利率曲線之特性，又不會發生不符假設之情況，實務上與 Cubic Spline 比，大部份更偏好 Nelson-Seigel。
- 但該方法缺點在於參數的不足使得模型之曲線未必能通過原始資料的點，以及實際利率曲線太複雜時，無法順利描繪出該圖形。

利率曲線建立：NELSON-SEIGEL MODEL



利率曲線建立：NELSON-SEIGEL-SEVSSON MODEL

- 針對上述的問題，Sevsson 對模型進行改進，增加兩個參數 β_3、τ_2 使瞬間遠期利率變為下列形式：

$$f(t) = \beta_0 + \beta_1 e^{-t/\tau_1} + \beta_2 \frac{t}{\tau_1} e^{-t/\tau_1} + \beta_3 \frac{t}{\tau_2} e^{-t/\tau_2}$$

利率曲線建立：NELSON-SEIGEL-SEVSSON MODEL

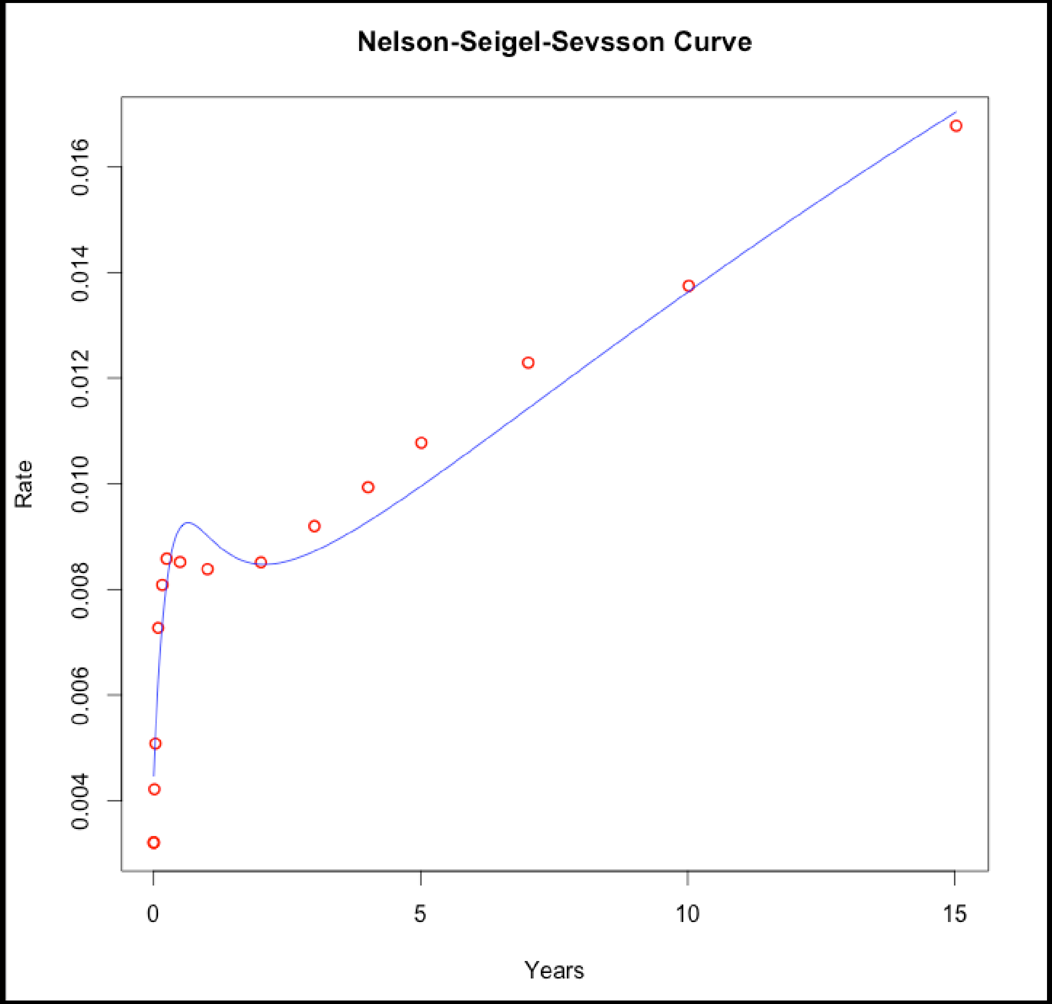
- 與 Nelson-Seigel 相同，將其積分除以天期可以得到即期利率之函數：

$$\hat{r}(t) = \beta_0 + \beta_1 \left[\frac{1 - e^{-t/\tau_1}}{(t/\tau_1)}\right] + \beta_2 \left[\frac{1 - e^{-t/\tau_1}}{(t/\tau_1)} - e^{-t/\tau_1}\right] + \beta_3 \left[\frac{1 - e^{-t/\tau_2}}{(t/\tau_2)} - e^{-t/\tau_2}\right]$$

利率曲線建立：NELSON-SEIGEL-SEVSSON MODEL

- 原有之參數限制與 Nelson-Seigel 相同。
- 而新參數限制如下：
- $\tau_2 > 0$
- β_2 與 β_3 相同沒有任何限制。

利率曲線建立：NELSON-SEIGEL-SEVSSON MODEL



利率曲線建立：NELSON-SEIGEL-SEVSSON MODEL

- Nelson-Seigel 與 Nelson-Seigel-Sevsson 為各國央行常用之模型，可以利用少數參數建立出平滑之利率曲線，亦可得出瞬間遠期利率函數。

利率曲線建立：NELSON-SEIGEL-SEVSSON MODEL

CENTRAL BANK	***MODEL***
Belgium	Nelson-Siegel, Svensson
Canada	Svensson
USA	Fisher-Nychka-Zervos (Spline)
Finland	Nelson-Siegel
France	Nelson-Siegel, Svensson
Germany	Svensson
Italy	Nelson-Siegel
Japan	Fisher-Nychka-Zervos (Spline)
Norway	Svensson
Spain	Svensson
UK	Anderson and Sleath (Spline) (until 2001 Svensson)
Sweden	Fisher-Nychka-Zervos (Spline), before Svensson
Switzerland	Svensson
EU	Svensson

利率曲線建立：NELSON-SEIGEL-SEVSSON MODEL

- 但此二方法仍有以下缺點：
  - 利率曲線可能無法通過原有資料。
  - 遠期利率可能為負之缺點仍無法克服。

利率曲線建立：其他方法

- Natural cubic spline 為 cubic spline 中的其中一種，根據假設的不同其他還有 :
  - Hermite cubic spline
  - Financial cubic splin
- 對於瞬間遠期利率為負的問題，可以參考 monotone convex 內插方法，該方法可直接對瞬間遠期利率進行內插，並防止有負的瞬間遠期利率發生，不過較為複雜。
- http://finmod.co.za/Monotone%20Convex%20Interpolation.pdf

SECTION 18. 無套利模型

無套利模型

- Vasicek 與 CIR 為早期的短利模型，稱為均衡模型（Equilibrium Model），期由經濟學之角度出發，根據經濟學假設得出短利動態過程。
- 但在模型假設的限制之下，殖利率曲線只能得到限定的形式，當市場資料太複雜時，模型與市場之殖利率曲線會相去甚遠。

無套利模型

- 至此，由 Ho 與 Lee（1986）開始發展出無套利模型（Arbitrage-Free Model）。
- 無套利模型中含有與時間相關的函數，因此可以調整該函數來符合市場上之利率期間結構，使模型校準結果能符合市場之殖利率曲線。
- 其中，最廣為人知的，便是 Hull-White 模型，又稱 Extended Vasicek。

無套利模型: HULL - WHITE

- 顧名思義，Hull-White 模型為 Vasicek 模型之延伸，最原始之 Hull-White 模型如下：

$$dr(t) = \kappa\big(\theta(t) - r(t)\big)dt + \sigma dW(t)$$

- 與 Vasicek 不同之處在於，θ 變為了一個與時間相關之確定性函數。
- 另外可以將上式整理為：

$$dr(t) = \big(\vartheta(t) - \kappa r(t)\big)dt + \sigma dW(t)$$

- 其中，$\vartheta(t) = \kappa\theta(t)$，之後將會沿用此形式。

無套利模型: HULL - WHITE

- 令 f^M 為評價日市場上隱含之瞬間短期利率（由市場 zero rate 反推得到之瞬間遠期利率），可以得到 ϑ 為 :

$$\vartheta(t) = \frac{\partial f^M(0,t)}{\partial T} + \kappa f^M(0,t) + \frac{\sigma^2}{2\kappa}(1 - e^{-\kappa t})^2$$

- 其中 $\frac{\partial f^M(0,t)}{\partial T}$，為對交割日進行微分。

無套利模型: HULL - WHITE

- Hull-White 模型短利之條件期望值與變異數如下：

$$\alpha(t) = f^M(0,t) + \frac{\sigma^2}{2\kappa^2}(1 - e^{-\kappa t})^2$$

$$E\{r(t)|\mathcal{F}_s\} = r(s)e^{-\kappa(t-s)} + \alpha(t) - \alpha(s)e^{-\kappa(t-s)}$$

$$Var\{r(t)|\mathcal{F}_s\} = \frac{\sigma^2}{2\kappa^2}\left[e^{-2\kappa(t-s)}\right]$$

無套利模型: HULL - WHITE

- 根據前述，Hull-White 模型可以整理成以下形式：

$$r(t) = x(t) + \alpha(t)$$

$$dx(t) = -\kappa x(t)dt + \sigma dW(t)$$

無套利模型: HULL - WHITE

- 上次提到的 affine model，也可以整理成以下形式（Brigo 與 Mercurio 是使用以下形式）：

$$P(t,T) = A(t,T)e^{-B(t,T)}$$

- 在 Hull-White 中我們得到 :

$$B(t,T) = \frac{1}{\kappa}\left[1 - e^{-\kappa(T-t)}\right]$$

$$A(t,T) = \frac{P^M(0,T)}{P^M(0,t)} \exp\left\{B(t,T)f^M(0,t) - \frac{\sigma^2}{4\kappa}[1 - e^{-2\kappa t}]B(t,T)^2\right\}$$

無套利模型: HULL - WHITE

- 其中，$P^M(0,t)$ 為交易日當天市場上零息債之價格。
- 由上述可以看出，Hull-White 零息債價格封閉解中含有市場上零息債價格，因此參數可以有無限多組解。
- 沒有辦法直接利用封閉解與零息債殖利率曲線進行模型校準。

無套利模型: HULL - WHITE

- Hull-White 最初是以三元樹之方式來校準模型與進行評價。
- 如要利用蒙地卡羅法，需要另外的模型校準方式。
- 可以參考 Gurrieri、Nakabayashi 與 Wong 所推導出之 swaption 波動度近似解，並利用其與市場報價來教準模型：
- https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1514192

SECTION 19. 最小平方蒙地卡羅法

美式評價問題

- 一般歐式選擇權，因為只能於到期日履約，因此只要計算到期日資產價格所反映出之選擇權報酬，在折現回評價日，並計算平均即可。

- 但美式選擇權因可提前履約，<u>每一條路徑每個時間點都需判斷是否應繼續持有或提前履約</u>，因此除一般蒙地卡羅法外，需再另外加上判斷的動作。

最小平方蒙地卡羅法

- Longstaff 與 Schwartz 於2001年提出的最小平方蒙地卡羅法解決了這個問題。
- 其概念為利用日期到推的方式，藉由最小平方回歸計算持續持有之期望值，並與即刻履約之報酬比較來決定個條路徑是否繼續持有，以下舉一例子介紹。

最小平方蒙地卡羅法

- 假設一個履約價格為1.1元的美式賣權距離到期日有三年、標的資產目前價格為1元、且無風險利率為6%，我們將每期時間長度設為一年，模擬八條路徑的結果如下。

Stock price paths				
Path	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
1	1.00	1.09	1.08	1.34
2	1.00	1.16	1.26	1.54
3	1.00	1.22	1.07	1.03
4	1.00	.93	.97	.92
5	1.00	1.11	1.56	1.52
6	1.00	.76	.77	.90
7	1.00	.92	.84	1.01
8	1.00	.88	1.22	1.34

最小平方蒙地卡羅法

- 因美式賣權可即刻履約，因此由第一期($t = 1$)開始我們必須計算每條路徑、每個時間點($t = 1, 2, 3$)之報酬 $\max(1.1 - S(t), 0)$ 。

- 首先計算出到期($t = 3$)與到期前一期($t = 2$)即刻履約之報酬，如該路徑在$t = 2$時為正報酬，則需與其在$t = 3$之期望報酬做比較決定是否續持有。

最小平方蒙地卡羅法

- 如下圖所示，在$t = 2$時，路徑1, 3, 4, 6, 7為正報酬，因此將此些路徑於$t = 3$ 的報酬折現回來進行回歸。

將相應路徑到其報酬折現

Cash-flow matrix at time 3

Path	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
1	—	—	.00
2	—	—	.00
3	—	—	.07
4	—	—	.18
5	—	—	.00
6	—	—	.20
7	—	—	.09
8	—	—	.00

Regression at time 2

Path	Y	X
1	.00 × .94176	1.08
2	—	—
3	.07 × .94176	1.07
4	.18 × .94176	.97
5	—	—
6	.20 × .94176	.77
7	.09 × .94176	.84
8	—	—

最小平方蒙地卡羅法

- 回歸方式如下：

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 X^2$$

- X為$t = 2$之正報酬， Y為相對應路徑折現回來之$t = 3$報酬。

- 而求出之線性回歸方程式即為在$t = 2$時對$t = 3$之期望報酬，將X 帶入求兩其相應的期望報酬。

最小平方蒙地卡羅法

- 下圖左邊為$t = 2$即刻履約之報酬，右邊為持續持有之報酬，如即刻履約大於持續履約，則該路徑會在$t = 2$時執行賣權。

即刻履約

Optimal early exercise decision at time 2

Path	Exercise	Continuation
1	.02	.0369
2	—	—
3	.03	.0461
4	.13	.1176
5	—	—
6	.33	.1520
7	.26	.1565
8	—	—

最小平方蒙地卡羅法

- 在$t = 2$之報酬即被更新為除了即刻履約的路徑之外皆為零，即刻履約的路徑為正報酬，如下圖。

Cash-flow matrix at time 2

Path	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
1	—	.00	.00
2	—	.00	.00
3	—	.00	.07
4	—	.13	.00
5	—	.00	.00
6	—	.33	.00
7	—	.26	.00
8	—	.00	.00

最小平方蒙地卡羅法

- 接著再對時間點$t = 1$重複相同動作，路徑1, 4, 6, 7, 8在$t = 1$時為正報酬，則將$t = 2$時相對應報酬折現回來進行回歸。

Regression at time 1

Path	Y	X
1	.00 × .94176	1.09
2	—	—
3	—	—
4	.13 × .94176	.93
5	—	—
6	.33 × .94176	.76
7	.26 × .94176	.92
8	.00 × .94176	.88

最小平方蒙地卡羅法

- 下圖左邊為$t=1$即刻履約之報酬，右邊為持續持有之報酬，如即刻履約大於持續履約，則該路徑會在$t=1$時執行賣權。

Optimal early exercise decision at time 1

Path	Exercise	Continuation
1	.01	.0139
2	—	—
3	—	—
4	.17	.1092
5	—	—
6	.34	.2866
7	.18	.1175
8	.22	.1533

最小平方蒙地卡羅法

- 同樣更新報酬後即得到所有路 因每個路徑只會有一次履約或不履約，因此只會有一個或沒有

Option cash flow matrix

Path	$t=1$	$t=2$	$t=3$
1	.00	.00	.00
2	.00	.00	.00
3	.00	.00	.07
4	.17	.00	.00
5	.00	.00	.00
6	.34	.00	.00
7	.18	.00	.00
8	.22	.00	.00

最小平方蒙地卡羅法

- 最小平方法的優點在於可以將所有路徑執行的時間點都找出，根據本例我們另一個 $8X3$的矩陣為stopping rule，第(i,j)個元素代表第i個路徑在t=j的時間點，如果此賣權在這條路徑這個時間點履約，則元素(i,j)等於一，否則則等於零。

Stopping rule

Path	$t=1$	$t=2$	$t=3$
1	0	0	0
2	0	0	0
3	0	0	1
4	1	0	0
5	0	0	0
6	1	0	0
7	1	0	0
8	1	0	0

最小平方蒙地卡羅法

- 接著各路徑stopping rule如有不等於零的元素，則參照該點之報酬折現回到$t = 0$的時間點，如沒有該路徑之報酬即為零，將所有折現回之報酬加總平均後，即為此美式賣權之價格。

最小平方蒙地卡羅法

- 注意：此範例並未發生一個狀況，Path 3在t=1時如果payoff並未為0，則與其比較的並非t=2之payoff，而是t=3的payoff往前折現一回t=2。
- 此方法所求得的為美式選擇權最低解，代表美式選擇權低於此價格，則內涵價值被低估。