財務工程的主軸在於，如何利用市場資料，計算出一個理論上無法由該商品進行套利的價格（也就是公平價格）Black-Scholes 假設股價服從幾何布朗運動如下：

$$dS(t) = \mu S_t dt + \sigma S(t) dW(t)$$

所代表的是在$t$時間點到下一個瞬間時間點下股票價格的增減。其中，$\mu$為股票之趨勢，可視為股票瞬間報酬率之期望值，由於人是風險趨避者，厭惡不確定性，因此股票之瞬間報酬率必須大於無風險利率，實際情況我們並不知道$\mu$為多少（也有辦法求出），但在評價衍生性金融商品時，根據 Harrison 與 Krep（1979）提出之方法，將機率測度由真實世界之機率測度轉為風險中立機率測度，$\widetilde{W}(t) = W(t) + \int_0^t \frac{\mu - r}{\sigma} dt$，後所評價出之價格也為無套利價格，而股價的動態過程變為：

$$dS(t) = rS_t dt + \sigma S(t) \widetilde{W}(t)$$

其中$r$代表的是瞬間無風險利率利率，在 Black-Scholes 的假設下，市場利率並不存在期間結構（Term-Structure），各天期皆使用同一個利率$r$，實證上該利率以 3M 或 6M 表現最佳，在某些情況下 Black-Scholes 允許將利率與波動度變為一個與時間相關的確定性函數，但並非每種商品在該假設下都會滿足無套利（有提前履約性質的基本上無法滿足），詳細可參考，Paul Wilmott on Quantitative Finance 一書。

現在回頭看如何估計股價 Black-Scholes 歷史波動度，假設我們有過去六十一天的歷史資料，$t_0, t_1, \ldots, t_{60}$，我們可以得到六十日的連續複利下肢年畫報

酬率

$$\frac{S(t_i)}{S(t_{i-1})} = e^{y_i \Delta t}, i = 1,2, \dots ,60$$

$\Delta t$，為間格一日的年化時間差，將上式左右兩邊同取$log$，我們可以得到：

$$\log S(t_i) - \log S(t_{i-1}) = y_i \Delta t$$

在 Black-Scholes 假設下我們可以透過伊藤引理（Ito’s lemma）得到股價的瞬間報酬率動態過程為：

$$d \log S(t) \ = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma W(t)$$

注意，以微積分來看，我們可以看成（注意：在隨機微積分下布朗運動其實是不可微的，此處參考 Kerry Back 之 A Course in Derivative Securities，該部分尚有疑慮）:

$$d \log S(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\log S(t + \Delta t) - \log S(t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) \Delta t + \sigma [W(t + \Delta t) - W(t)]}{\Delta t}$$

回到前面一天的情況來看，我們可以得到：

$$y_i = \frac{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) \Delta t + \sigma [W(t + \Delta t) - W(t)]}{\Delta t} = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) + \frac{\sigma [W(t + \Delta t) - W(t)]}{\Delta t}$$

其中，$[W(t + \Delta t) - W(t)] \sim Normal(0, \Delta t)$，因此，$y \sim Normal\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2, \frac{\sigma^2}{\Delta t}\right)$，估計$y$之標準差我們可以得到為$\frac{\sigma}{\sqrt{\Delta t}}$；如果想要直接估計$\sigma$，可估計$y\sqrt{\Delta t}$之標準差即可，同樣的估計$y$之平均並加上$\frac{1}{2}\sigma^2$，即可得到股票之歷史期望報酬率。