EXCEL VBA 進階班

Lecture 9

SECTION 14. 物件導向實作範例

利率衍生性金融商品評價 – 基礎類別

物件導向實作範例

- 最後兩次上課用利用物件導向實作利率衍生性金融商品評價範例。
- 我們將逐一介紹裡面的各個類別，包括使用方法以及建立原因。
- 之後也會放到 Github 上，有興趣的人可以參與修改與增減。

物件導向實作範例 : MATRIX

- 第一個我們需要的是一個比陣列更方便科學計算的類別，在 R 與 Matlab 語言中都有矩陣方便取值與計算，我們希望也能擁有。
- 因此建立了一個 Matrix 類別，裡面具有以下屬性 :
  - data_ : 一個 Double 的二維陣列，用來儲存舉陣內的元素
  - nRow_ : 該陣列 row 之數量
  - nCol_ :該陣列 column 之數量

物件導向實作範例 : MATRIX

- 陣列並沒有給定一個特別的建構式，我們創造第一個 Property，data，將一個二維陣列傳入即可變成矩陣。
- 也可以利用 data 傳出將其快速變回陣列。
- 注意 : row 跟 column 的數量在給予資料時決定，因此每次使用 data 輸入新陣列十方法中也會自動跟著確認並更動 nRow_ 與 nCol_。

物件導向實作範例：MATRIX

```
Public Property Let data(value() As Double)

If ArrayFunction.getDimension(value) <> 2 Then
    errorInputIncorrect ("data")
End If

data_ = value
nRow_ = UBound(value, 1)
nCol_ = UBound(value, 2)

End Property
```

```
Sub matrixExample()

Dim i As Integer
Dim j As Integer
Dim mat As New Matrix
ReDim inputData(3, 3) As Double

For i = 1 To 3
    For j = 1 To 3
        inputData(i, j) = i * j
    Next j
Next i

mat.data = inputData
Range("A1:C3").value = mat.data

End Sub
```

	A	B	C
1	1	2	3
2	2	4	6
3	3	6	9

物件導向實作範例 : MATRIX

- 為了讓我們觀察資料沒那麼困難，直接寫一個方法，建立一個新的工作表並貼上矩陣內部資料，該方法命名為 printToWorksheet 。
- 預設並無給該新增工作表名稱，可以利用 sheetName 參數賦予名稱，但注意名稱是否重複。

```
Sub matrixExample()

Dim i As Integer
Dim j As Integer
Dim mat As New Matrix
ReDim inputData(3, 3) As Double

For i = 1 To 3
    For j = 1 To 3
        inputData(i, j) = i * j
    Next j
Next i

mat.data = inputData
mat.printToWorksheet

End Sub
```

	A	B	C
1	1	2	3
2	2	4	6
3	3	6	9

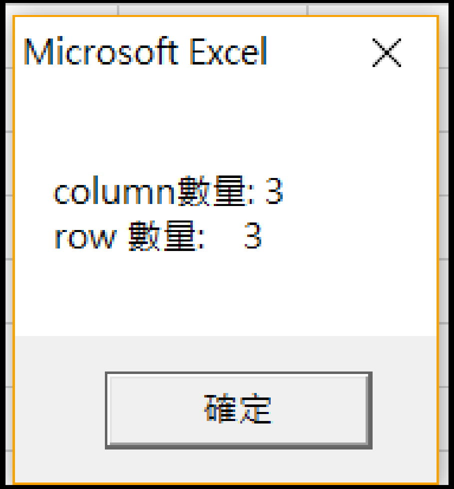
物件導向實作範例 : MATRIX

- 我們想知道該矩陣的大小，因此需要方法取得 nRow_ 與 nCol _，就以沒有 “_” 之名稱來命名 :
  - nRow : 取得 nRow_
  - nCol : 取得 nCol_
- 但注意，不將兩個函數設為 Property 的原因在於，我們不希望兩個數值被任意更改，而是依照 data_ 的大小決定，因此每次使用 data 更改陣列內容都會重新確認一次 column 與 row 之數量。

物件導向實作範例 : MATRIX

- 我們希望能存取裡面每個元素的值，因此創造第一個 Property，elem，給定，row 與 col 之編號回傳或更改該元素。
- i : 代表 row
- j : 代表 column

```
Sub matrixExample()

Dim i As Integer
Dim j As Integer
Dim mat As New Matrix
ReDim inputData(3, 3) As Double

For i = 1 To 3
    For j = 1 To 3
        inputData(i, j) = i * j
    Next j
Next i

mat.data = inputData

MsgBox "column數量: " & mat.nCol & Chr(10) & _
          "row 數量:    " & mat.nRow

End Sub
```



物件導向實作範例 : MATRIX

- 再來，我們希望能一次傳出或傳入一整個 row 或是 column，因此建立 row 以及 col Property。
- 由於我們希望傳出的部分還是一個 Matrix，以方便繼續利用矩陣的一些特性，因此依照 Property Let 與 Get 要是同一種資料型態的特性，我們將傳出傳入都設為 Matrix。

物件導向實作範例：MATRIX

```
Public Property Let col(i As Integer, ByVal colVec As Matrix)

If Not MatrixFunction.isColVec(colVec) Then
    errorInputIncorrect ("col")
End If

Dim j As Integer

For j = 1 To nRow_
    data_(j, i) = colVec.elem(j, 1)
Next j

End Property
```

```
Public Property Get col(i As Integer) As Matrix

Dim j As Integer
ReDim vecData(nRow_, 1) As Double

For j = 1 To nRow_
    vecData(j, 1) = data_(j, i)
Next j

Dim colVec As New Matrix
colVec.data = vecData

Set col = colVec
End Property
```

物件導向實作範例：MATRIX

- 最後再傳出傳入矩陣內部資料的部分，我們還希望能改變矩陣內簿子矩陣的值，或將子矩陣傳出。

$$\begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} \\ x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3} \end{bmatrix}$$

想取出此部分

物件導向實作範例 : MATRIX

- 這部分使用 subMat Property。
- 注意方法內並沒有刻意檢查輸入矩陣與對應範圍大小是否相等或超出邊界，使用時請自行注意。

物件導向實作範例 : MATRIX

- 其他有許多應用方法 :
  - fill : 矩陣所有元素填入某個值
  - transpose : 矩陣轉至
  - clone : 矩陣複製

物件導向實作範例 : MATRIX

- 值得注意一提的是 operationOnScalar 與 findIf 方法 :
  - operationOnScalar : 矩陣內部所有元素加減乘除上一個常數
  - findIf : 找出矩陣內部

物件導向實作範例 : MATRIX

- 之前在 TimeSeries 時我們曾經利用過 enumerator 與 Run 來模擬給予不同運算子並進行運算。
- 但注意 : Run 會大幅降低執行速度，由其實重複使用時，因每次執行還需去尋找是否有同名函數。
- 對此，我們可以利用介面建立一個運算子系統，實作再分派至各個運算子類別。

物件導向實作範例 : MATRIX

- 以算數運算子為例，我們建立一個 ArithmeticOperator 介面，再把加減乘除四種不同的情況分散至四個類別。

物件導向實作範例 : MATRIX

- ArithmeticOperator

```
Option Explicit
Option Base 1

Public Function evaluate(elem1 As Double, elem2 As Double) As Double: End Function
```

物件導向實作範例：MATRIX

- 加法運算子（Addition）：

```
Option Explicit
Option Base 1
Implements ArithmeticOperator
Friend Function ArithmeticOperator_evaluate(elem1 As Double, elem2 As Double) As Double
ArithmeticOperator_evaluate = elem1 + elem2
End Function
```

物件導向實作範例 : MATRIX

- 另外關於矩陣對矩陣元素運算以及矩陣乘法，包含多個矩陣之間計算的，另外寫一個模組存方相關函數。
- 參考 MatrixFunction 模組。

SECTION 15. 利率模型

利率介紹

基礎知識複習

- 利率與匯率市場不同，由於利率有期間結構，不同天期的利率有所不同，因此相較起來更為複雜，首先先介紹部分利率種類、與利率曲線建立方式。

基礎知識複習：ZERO RATE & ZERO COUPON BOND

- 在即期利率部分，評價時最關心的為各天期之 zero rate，亦即除了交易日與到期日，其他中間時間點並沒有任何現金流之利率（常使用 LIBOR）。
- 以下簡介零息債，以及各種計息方式與價格之間的關係：

基礎知識複習：ZERO RATE & ZERO COUPON BOND

- 假設一零息債：
  - 評價日時間點為 $t \leq T$。
  - 天期為 T 。
  - 到期時支付 1 元，
- 其價格為 $P(t,T)$。
- 由上述可知，在到期日 T 時，其價格為：$P(T,T) = 1$

基礎知識複習：ZERO RATE & ZERO COUPON BOND

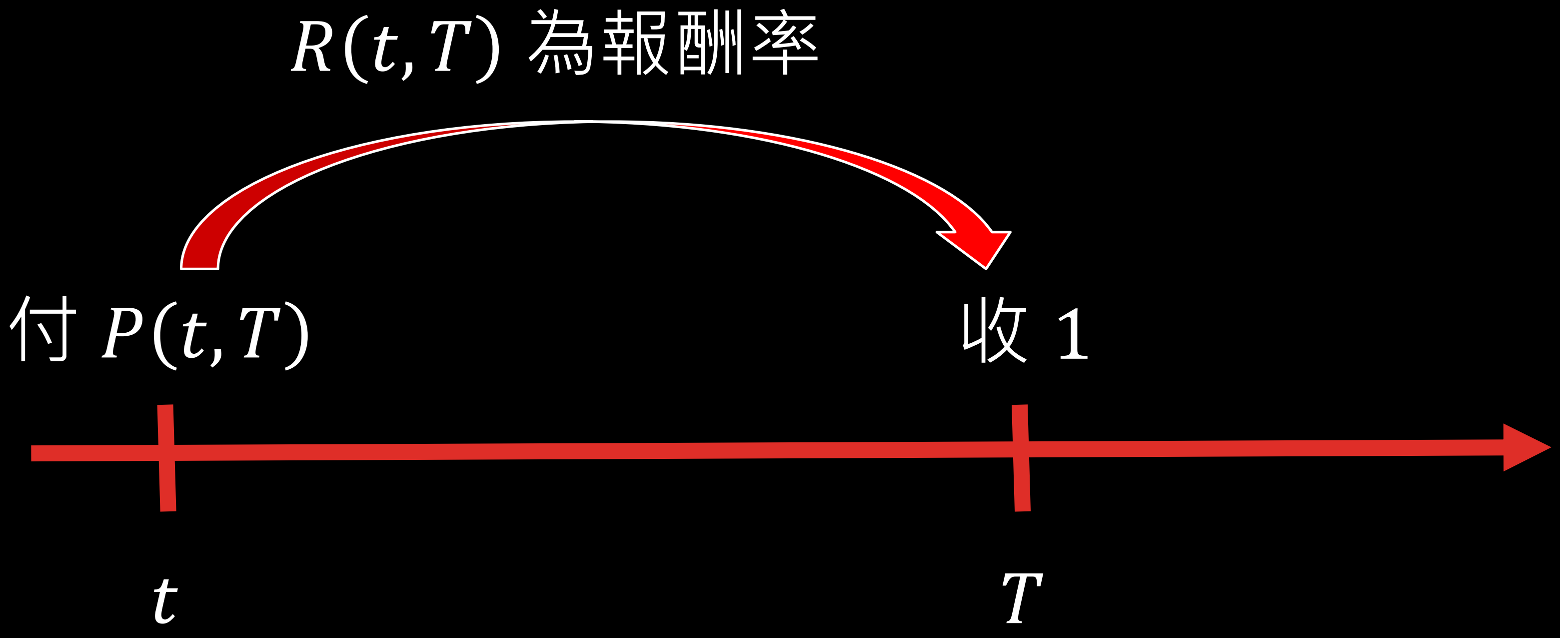
- 注意，零息債出現之現金流只有：

1. 交易日付出的金額。
2. 到期日收取 1 元。

- 並沒有其他中間的現金流。

基礎知識複習：ZERO RATE & ZERO COUPON BOND

- 假設在 t 到 T 此段時間中， 報酬率為一常數 $R(t,T)$，在各種不同的利率計算方式下為：



基礎知識複習：ZERO RATE & ZERO COUPON BOND

- 單利：
  - $P(t,T)\big(1+R(t,T)(T-t)\big)=1$
  - $R(t,T)=\dfrac{1-P(t,T)}{\big((T-t)P(t,T)\big)}$
- 複利，假設一年複利 k 次：
  - $P(t,T)\left(1+\dfrac{R(t,T)}{k}\right)^{k(T-t)}=1$
  - $R(t,T)=\dfrac{k}{[P(t,T)]^{\frac{1}{k(T-t)}}}-k$

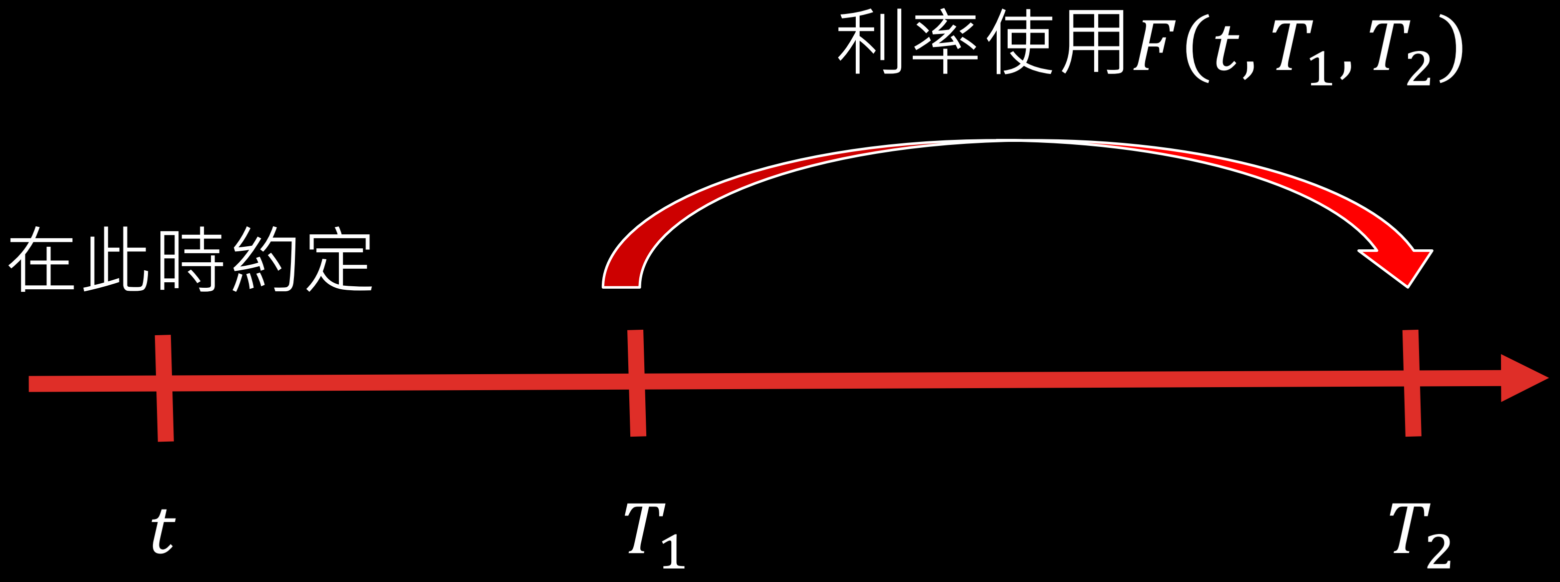
基礎知識複習：ZERO RATE & ZERO COUPON BOND

- 當 $k \to \infty$ 時，$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{R(t,T)}{k}\right)^{k(T-t)} = e^{R(t,T)(T-t)}$，此即為連續複利。
- 連續複利：
  - $P(t,T)e^{R(t,T)(T-t)} = 1$
  - $R(t,T) = -\frac{\log P(t,T)}{(T-t)}$

基礎知識複習：FORWARD RATE

- 令 $t < T_1 < T_2$ 為三個時間點，t 為目前之交易日，一個遠期利率（forward rate）$F(t, T_1, T_2)$ 為我們在交易日約定好了 T_1 至 T_2 期間所使用之利率。
- 等同於我們在 t 時間點，估計 $R(T_1, T_2)$。

基礎知識複習：FORWARD RATE



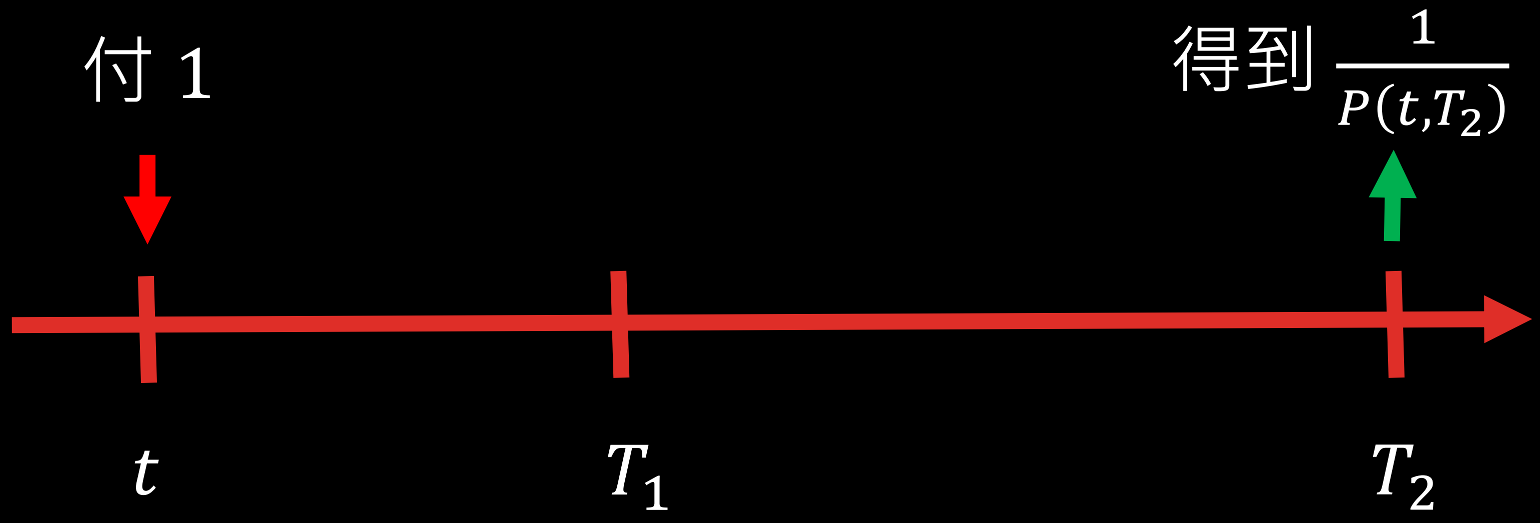
基礎知識複習：FORWARD RATE

- 如何找出遠期利率？以下舉一個單利的例子：
- 考慮兩個不同的投資計畫：

計畫 1.	計畫 2.
在 t 時間點花 1 元買入 $\frac{1}{P(t,T_2)}$ 單位的 $T_2-maturity$ 零息債。	1.在 t 時間點花 1 元買入 $\frac{1}{P(t,T_1)}$ 單位的 $T_1-maturity$ 零息債。 2.在 t 時間約定好在 T_1 時存入 $\frac{1}{P(t,T_1)}$ 元，並以 $F(t,T_1,T_2)$ 計息至 T_2。

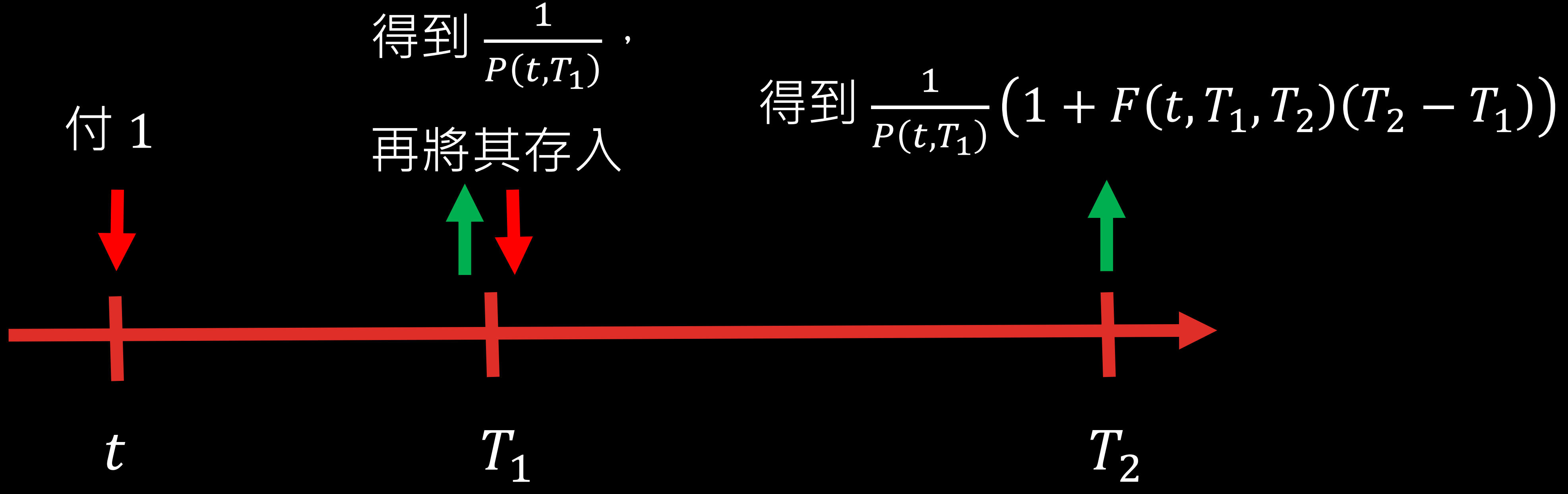
基礎知識複習：FORWARD RATE

- 兩個計畫現金流分別如下：
- 計畫 1.：



基礎知識複習：FORWARD RATE

- 兩個計畫現金流分別如下：
- 計畫 2.：



基礎知識複習：FORWARD RATE

- 由於兩個投資組合期初建構成本皆為 1 元，兩者到期應有相同報酬，否則可以依賣出低報酬、買入高報酬進行套利 ➔ 期初不用任何建構成本即可得到正報酬。
- 根據無套利理論，兩者報酬應相同，亦即：

$$\frac{1}{P(t,T_1)}\left(1+F(t,T_1,T_2)(T_2-T_1)\right)=\frac{1}{P(t,T_2)}$$

基礎知識複習：FORWARD RATE

- 經過移項後可得：

$$F(t,T_1,T_2) = \frac{1}{(T_2 - T_1)}\left(\frac{P(t,T_1)}{P(t,T_2)} - 1\right)$$

- 以相同方式可得連續複利下之遠期利率為：

$$F(t,T_1,T_2) = \frac{1}{(T_2 - T_1)}\log\frac{P(t,T_1)}{P(t,T_2)}$$

基礎知識複習：INSTANTANEOUS FORWARD RATE

- 不論單利還是連續複利，當 $S \to T^+$ 時，一遠期利率 $F(t,T,S)$ 都服從以下關係：
- 單利：

$$\lim_{S\to T^+} F(t,T,S) = -\lim_{S\to T^+} \frac{1}{P(t,S)} \frac{P(t,S)-P(t,T)}{S-T} = -\frac{1}{P(t,T)} \frac{\partial P(t,T)}{\partial T} = -\frac{\partial \log P(t,T)}{\partial T}$$

基礎知識複習：INSTANTANEOUS FORWARD RATE

- 連續複利：

$$\lim_{S\to T^+} F(t,T,S) = -\lim_{S\to T^+} \frac{\log P(t,S) - \log P(t,T)}{S-T} = -\frac{\partial \log P(t,T)}{\partial T}$$

- 我們稱此為瞬間遠期利率（instantaneous forward rate）：

$$f(t,T) = \lim_{S\to T^+} F(t,T,S)$$

基礎知識複習：INSTANTANEOUS FORWARD RATE

- 在瞬間遠期利率之下，不論是單利還是連續複利，一零息債券價格可以由以下方法表示：

$$P(t,T) = \exp\left(-\int_t^T f(t,u)du\right)$$

SECTION 17. 短利模型

Affine Model、均衡模型

利率模型

- 對於利率商品的評價，我們需要用來描繪利率變動之模型，此次介紹部分描繪瞬間短期利率（Short Rate，簡稱短利）之模型。

SHORT RATE MODEL

- 回顧 Black-Scholes：

$$d\log S(t) = \left(r_d - r_f - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dW(t)$$

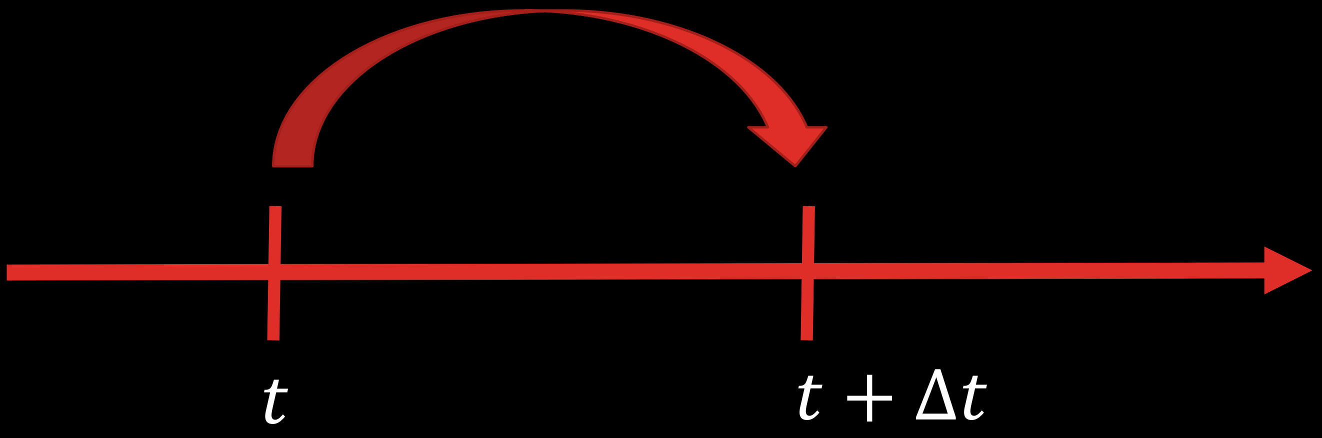
- 我們令每一瞬間的本國無風險利率為 r_d，且其為一個不會變動的常數，通常該無風險利率是以政府公債殖利率、或是 LIBOR 以及其他可能具流動性利率商品（例如 IRS）推出來。

SHORT RATE MODEL

- r_d、r_f 代表的是連續複利之無風險利率，且不論天期長利率皆相同（即使是 $\Delta t \to 0$）。
- 現在不考量跨國，假設某國之零息債殖利率為一函數 $r(t)$。
- 如下頁圖示，在每一個時間點 t，利率期間為一瞬間 $\Delta t \to 0$ 所使用的即期利率為 $r(t)$，該一瞬間的利率即為短利。

SHORT RATE MODEL

此段時間使用的利率為 $r(t)$



$\Delta t \to 0$

SHORT RATE MODEL

- 在 Black-Scholes 下我們假設 $r(t)$ 為一個常數 r，因此不論目前時間 t 與到期時間 T 為何，只要 $T-t$ 為常數，該零息債之價格皆相同。
- 但實際市場上之利率並非固定不變，因此在評價利率商品時，需要一模型來模擬短利在每一瞬間的變化 $dr(t)$。

SHORT RATE MODEL：短利模型與債券價格之關係

- Cox（1985）根據 Vasicek（1977） 所得出的結果做延伸得到，評價日為 t ，到期日為 T ，面額為 1 之零息債，其價格為一函數 P 如下：

$$P(r,t,T)=\tilde{E}_t\left[e^{-\int_t^T r(u)du}\right]$$

$\tilde{E}$ 代表計價單位為零息債之測度，詳細過程如下：

SHORT RATE MODEL：短利模型與債券價格之關係

- 假設短利為一零息債價格的唯一隨機來源，並服從一伊藤過程：

$$dr(t) = a(r(t),t)dt + \sigma(r(t),t)dW(t)$$

- 零息債價格為一個與 $r(t)$ 以及到期日 T 有關之函數 $P(r,t,T)$。

SHORT RATE MODEL：短利模型與債券價格之關係

- 根據伊藤引理，可以得到以下結果：

$$dP(r,t,T) = \frac{\partial P}{\partial t}dt + \frac{\partial P}{\partial r}dr + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}(dr)^2$$

- 將上頁 dr 代入可以得：

$$dP(r,t,T) = \left[\frac{\partial P}{\partial r}a(r,t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}\sigma^2(r,t) + \frac{\partial P}{\partial t}\right]dt + \frac{\partial P}{\partial r}\sigma(r,t)dW(t)$$

SHORT RATE MODEL：短利模型與債券價格之關係

- 令：

$$\alpha(r,t,T)=\frac{1}{P(r,t,T)}\left[\frac{\partial P}{\partial r}a(r,t)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}\sigma^2(r,t)+\frac{\partial P}{\partial t}\right]$$

$$q(r,t,T)=-\frac{1}{P(r,t,T)}\frac{\partial P}{\partial r}\sigma(r,t)$$

SHORT RATE MODEL：短利模型與債券價格之關係

- 可以使得到期日為 T 之零息債價格成為一個類似 B-S 模型下之匯率價格的動態過程：

$$\frac{dP(r,t,T)}{P(r,t,T)} = \alpha(r,t,T)dt - q(r,t,T)dW(t)$$

SHORT RATE MODEL：短利模型與債券價格之關係

- 由此，一交易員賣出 ω_2 單位到期日為 T_2 之零息債，可以藉由買入 ω_1 單位到期日為 T_1 之零息債進行避險。
- 整個投資組合 I 之瞬間價值變化如下：

$$dI(t) = [\omega_1\alpha(r,t,T_1) - \omega_2\alpha(r,t,T_2)]dt - [\omega_1 q(r,t,T_1) - \omega_2 q(r,t,T_2)]dW(t)$$

SHORT RATE MODEL：短利模型與債券價格之關係

- 當兩個權重滿足以下條件：

$$\omega_1 = \frac{I(t)q(r,t,T_2)}{q(r,t,T_1) - q(r,t,T_2)}$$

$$\omega_2 = \frac{I(t)q(r,t,T_1)}{q(r,t,T_1) - q(r,t,T_2)}$$

SHORT RATE MODEL：短利模型與債券價格之關係

- 我們可以得到：

$$dI(t) = \frac{I(t)[\alpha(r,t,T_1)q(r,t,T_2) - \alpha(r,t,T_2)q(r,t,T_1)]}{q(r,t,T_1) - q(r,t,T_2)}dt$$

SHORT RATE MODEL：短利模型與債券價格之關係

- 此時該投資組合價值的變動只與時間 dt 有關，因此根據無套利理論，其報酬應等於無風險利率 $r(t)$，可以得到：

$$\frac{I(t)[\alpha(r,t,T_1)q(r,t,T_2)-\alpha(r,t,T_2)q(r,t,T_1)]}{q(r,t,T_1)-q(r,t,T_2)}dt = I(t)r(t)dt$$

SHORT RATE MODEL：短利模型與債券價格之關係

- 兩邊同除 $I(t)$，得：

$$\frac{[\alpha(r,t,T_1)q(r,t,T_2)-\alpha(r,t,T_2)q(r,t,T_1)]}{q(r,t,T_1)-q(r,t,T_2)}dt = r(t)dt$$

- 將其重新整理過，可以得到：

$$\frac{\alpha(r,t,T_1)-r(t)}{q(r,t,T_1)} = \frac{\alpha(r,t,T_2)-r(t)}{q(r,t,T_2)}$$

SHORT RATE MODEL：短利模型與債券價格之關係

- 由於 T_1 與 T_2 為一開始就給定的，因此可以知該比率，$\frac{\alpha(r,t,T)-r(t)}{q(r,t,T\ )}$，與到期日 T 並無關。

- 我們將 $\lambda(r,t)=\frac{\alpha(r,t,T)-r(t)}{q(r,t,T\ )}$ 稱為 market price of risk。

SHORT RATE MODEL：短利模型與債券價格之關係

- 將其移項得：

$$\alpha(r,t,T) - \lambda(t,T)q(r,t,T\ ) - r(t) = 0$$

- 回顧 $\alpha(r,t,T)$ 與 $q(r,t,T)$ 為：

$$\alpha(r,t,T) = \frac{1}{P(r,t,T)}\left[\frac{\partial P}{\partial r}a(r,t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}\sigma^2(r,t) + \frac{\partial P}{\partial t}\right]$$

$$q(r,t,T) = -\frac{1}{P(r,t,T)}\frac{\partial P}{\partial r}\sigma(r,t)$$

SHORT RATE MODEL：短利模型與債券價格之關係

- 經過整理，得到：

$$\frac{\partial P}{\partial r}\left(a(r,t)+\lambda(r,t)\sigma(r,t)\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}\sigma^2(r,t)+\frac{\partial P}{\partial t}-rP(r,t,T)=0$$

- 邊界條件為：$P(r(T),T,T)=1$
- 所有的短利模型與零息債券價格皆服從此關係。

SHORT RATE MODEL：AFFINE MODEL 與 CALIBRATION

- 在風險中立機率測度中，我們令$\lambda(r,t)=0$，債券價格之偏微分方程變為：

$$\frac{\partial P}{\partial r}a(r,t)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}\sigma^2(r,t)+\frac{\partial P}{\partial t}-rP(r,t,T)=0$$

SHORT RATE MODEL：AFFINE MODEL 與 CALIBRATION

- 假設一短利模型在風險中立機率測度下為下列樣式：

$$dr(t) = \big(\mu_0(t) + \mu_1(t)r(t)\big)dt + \sqrt{\sigma_0^2(t) + \sigma_1^2(t)r(t)}dW(t)$$

- 其中 $\mu_0(t)$、$\mu_1(t)$、$\sigma_0^2(t)$、$\sigma_1^2(t)$為只與時間 t 有關之函數。
- 我們稱該短利模型之動態過程擁有 affine drift 與 affine square of the diffusion coefficient，可以依固定的步驟求出其零息債價格封閉解。

SHORT RATE MODEL：AFFINE MODEL 與 CALIBRATION

- 我們猜想零息債券價格的封閉解如下式：

$$P(r,t,T) = e^{-A(t,T)-C(t,T)r(t)}$$

$$A(T,T) = C(T,T) = 0$$

SHORT RATE MODEL：AFFINE MODEL 與 CALIBRATION

- 回顧前述的零期債在風險中立機率測度中之偏微分方程：

$$\frac{\partial P}{\partial r}a(r,t)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}\sigma^2(r,t)+\frac{\partial P}{\partial t}-rP(r,t,T)=0$$

- 邊界條件為 : $P(r(T),T,T)=1$

SHORT RATE MODEL：AFFINE MODEL 與 CALIBRATION

- 經由假設我們可以得到我們可以得到：

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \left(-rC_t(t,T) - A_t(t,T)\right)P(r,t,T)$$

$$\frac{\partial P}{\partial r} = -C(t,T)P(r,t,T)$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} = C^2(t,T)P(r,t,T)$$

SHORT RATE MODEL：AFFINE MODEL 與 CALIBRATION

- 整個方程式經過整理後得到以下樣式：

$$(-rC_t - A_t)P - (\mu_0 + \mu_1 r)CP + \frac{1}{2}(\sigma_0^2 + \sigma_1^2 r)C^2 P - rP = 0$$

- 重新經過整理後，得到：

$$\left(-A_t - \mu_0 C + \frac{1}{2}\sigma_0^2 C^2\right) - \left(C_t + \mu_1 C - \frac{1}{2}\sigma_1^2 C^2 + 1\right) r = 0$$

SHORT RATE MODEL：AFFINE MODEL 與 CALIBRATION

- 經由上式我們可以得知：

$$A_t = -\mu_0 C + \frac{1}{2}\sigma_0^2 C^2$$

$$A(T,T) = 0$$

$$C_t = -\mu_1 C + \frac{1}{2}\sigma_1^2 C^2 - 1$$

$$C(T,T) = 0$$

SHORT RATE MODEL：AFFINE MODEL 與 CALIBRATION

- 首先解出 C ，參考 Claudio Pacati （2012），在 μ_1 與 σ_1^2 為常數時， C 擁有封閉解，其他情況至少可以利用數值方法求出解， Pacati 建議如有需要數值解時，以 Runge-Kutta method 會有好的表現。
- 接著 A 之部分可以以直接積分的方式求出：

$$A(t,T) = -\int_t^T \mu_0(u)C(u,T)du + \frac{1}{2}\int_t^T \sigma_0^2(u)C^2(u,T)du$$

SHORT RATE MODEL：AFFINE MODEL 與 CALIBRATION

- 至此可以得知，只要短利的動態過程在風險中立機率測度中為：

$$dr(t) = \big(\mu_0(t) + \mu_1(t)r(t)\big)dt + \sqrt{\sigma_0^2(t) + \sigma_1^2(t)r(t)}dW(t)$$

- 我們皆可以利用上述方法得到債券價格封閉解。
- 而市場上存在各天期的利率報價，可以用其反推出各天期零息債殖利率，或是直接使用市場上有代表性之利率，例如 LIBOR，假設我們擁有下頁的資料：

SHORT RATE MODEL：AFFINE MODEL 與 CALIBRATION

Tenor	Rate
1D	2.375
2D	2.6
1W	2.75
2W	2.77
1M	2.825
2M	2.825
3M	2.825
4M	2.875
5M	2.915
6M	3
9M	3.035
12M	3.15
2Y	2.478
3Y	2.495
4Y	2.535
5Y	2.605
7Y	2.763
10Y	2.95

SHORT RATE MODEL：AFFINE MODEL 與 CALIBRATION

- 一連續複利零息債之殖利率為：

$$y^{model}(t,T) = -\frac{\log P(r,t,T)}{T-t}$$

- $P(r,t,T)$ 可藉由 affine model 之封閉解得到。

SHORT RATE MODEL：AFFINE MODEL 與 CALIBRATION

- 有 n 個不同天期下的利率，則可以使用以下的方式來校準短利模型：

$$\min \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(y_i^{MKT} - y^{model}(t, T_i)\right)^2}{\left(y_i^{MKT}\right)^2}$$

SHORT RATE MODEL：AFFINE MODEL 與 CALIBRATION

- 不同模型間也存在其他的方法，以下介紹最初的兩個短利模型：
  - Vasicek Model
  - Cox-Ingersoll-Ross（CIR）Model

SHORT RATE MODEL：VASICEK MODEL

- 下面介紹最初的利率模型，Vasicek 模型。
- Vasicek （1977）令

$$a(r(t),t) = \kappa\big(\theta - r(t)\big)$$

$$\sigma(r(t),t) = \sigma$$

- 得出短利之動態過程為：

$$dr(t) = \kappa\big(\theta - r(t)\big)dt + \sigma dW(t)$$

SHORT RATE MODEL：VASICEK MODEL

- 其中的 κ、θ、σ 為非負的常數，分別有下的經濟意涵：
  - θ：長期的瞬間短期利率均數。
  - κ：回歸均數的速度。
  - σ：短利的波動度。

SHORT RATE MODEL：VASICEK MODEL

- Vasicek 為 affine model ：

$$\mu_0(t) = \kappa\theta$$

$$\mu_1(t) = -\kappa$$

$$\sigma_0^2(t) = \sigma^2$$

$$\sigma_1^2(t) = 0$$

SHORT RATE MODEL：VASICEK MODEL

- 可以得到偏微分方程如下：

$$C_t = \kappa C - 1$$

$$A_t = -\theta C + \frac{1}{2}\sigma^2 C^2$$

SHORT RATE MODEL：VASICEK MODEL

- 解出偏微分方程後得：

$$C(t,T) = \frac{1 - e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa}$$

$$A(t,T) = \int_t^T \left[\theta C(s,T) - \frac{\sigma^2}{2} C^2(s,T)\right] ds$$

$$= \left(\frac{\theta}{\kappa} - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2}\right)(T-t) + \left(\frac{\theta}{\kappa^2} - \frac{\sigma^2}{2\kappa^3}\right)\left(e^{-\kappa(T-t)} - 1\right) + \frac{\sigma^2}{4\kappa^3}\left(e^{-\kappa(T-t)} - 1\right)^2$$

SHORT RATE MODEL：VASICEK MODEL

- 除了利用評價日零息值債價格或殖利率校準模型外，根據 Brigo、Dalessandro、Neugebauer 與 Triki（2007），我們可以得到 Vasicek 短利之解如下：
- 令 $0 \leq s < t$，

$$r(t) = \theta\left(1 - e^{-\kappa(t-s)}\right) + r(s)e^{-\kappa(t-s)} + \sigma e^{-\kappa t}\int_s^t e^{\kappa u}\, dW(u)$$

SHORT RATE MODEL：VASICEK MODEL

- 因此，給定一組 $\Delta t = t_i - t_{i-1}$ 固定的資料（例如過去十年 3M LIBOR 之資料），可以利用下列線性迴歸的方式求得 Vasicek 參數：

$$r(t_i) = c + br(t_{i-1}) + \delta\epsilon(t_i)$$

SHORT RATE MODEL：VASICEK MODEL

- 其中，
- $c = \theta\left(1 - e^{-\kappa \Delta t}\right)$
- $b = e^{-\kappa \Delta t}$
- $\epsilon \sim N(0,1)$
- $\delta = \sigma\sqrt{\frac{1-e^{-2\kappa\Delta t}}{2\kappa}}$

SHORT RATE MODEL：VASICEK MODEL

- 可以經由線性迴歸求出之參數反推 Vasicek 參數，但注意使用之資料必須夠多（Brigo 使用了十五年的日資料），資料不足的情況會使 κ 的估計出現問題。

SHORT RATE MODEL：VASICEK MODEL

- Vasicek 存在以下的缺點：
  - 由於參數不足，能描繪的殖利率曲線樣式有限。
  - 利率可能為負。
- 下面對上述兩點詳加敘述。

SHORT RATE MODEL：VASICEK MODEL

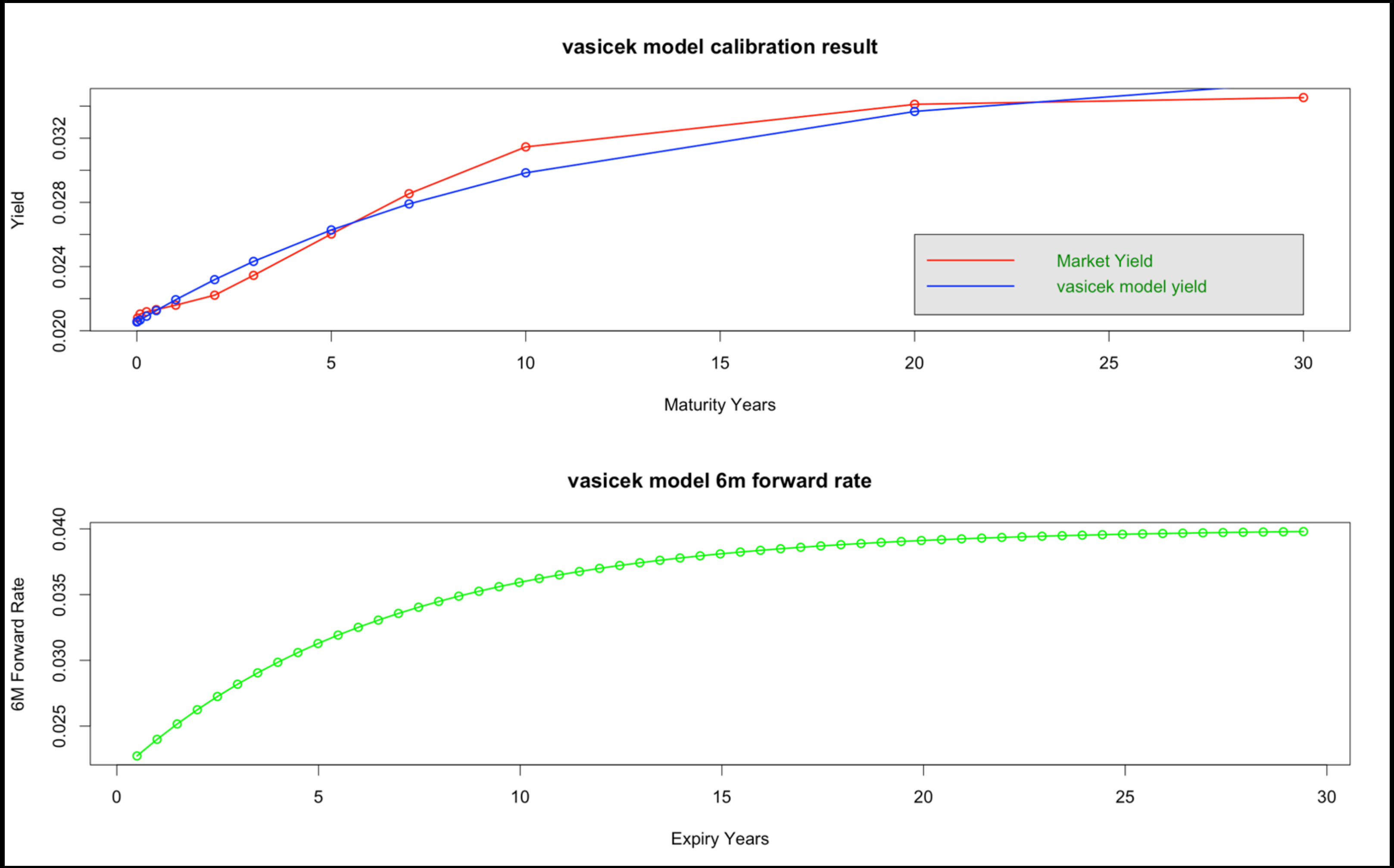
- 對於利率可能為負的部分，在模擬時可以用以下方法處理：

1. 取絕對值
2. 取 $\max(r(t), 0)$
3. 重新抽一亂數使得 $r(t-\Delta t) + \Delta r(t-\Delta t) \geq 0$

SHORT RATE MODEL：VASICEK MODEL

- 第二個缺點之部分，Vasicek 受限於參數不足，描繪出之殖利率曲線僅限於類似下圖之形狀：

SHORT RATE MODEL : VASICEK MODEL



SHORT RATE MODEL：VASICEK MODEL

- 當殖利率曲線為凹性或其他形狀時，Vasicek 參數不論作任何調整皆無法近似市場殖利率曲線，此為該模型一大缺點。

SHORT RATE MODEL：CIR MODEL

- Cox、Ingersoll 與 Ross（1985）藉由經濟學中的一般均衡，得出下式：

$$a(r(t),t) = \big(a - br(t)\big)$$

$$\sigma(r(t),t) = \sigma\sqrt{r(t)}$$

- 得出短利之動態過程為：

$$dr(t) = \big(a - br(t)\big)dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t)$$

SHORT RATE MODEL：CIR MODEL

- 也可以經過整理，令$\kappa = b$ ，$\theta = \frac{a}{b}$
- 使動態過程變為：

$$dr(t) = \kappa\big(\theta - r(t)\big)dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t)$$

SHORT RATE MODEL：CIR MODEL

- 其中的 κ、θ、σ 為常數，與 Vasicek 相同分別有下的經濟意涵：
  - θ：長期的瞬間短期利率均數。
  - κ：回歸均數的速度，$\kappa \geq 0$。
  - σ：短利的波動度。
- 除此之外，當 $\frac{2\kappa\theta}{\sigma^2} > 0$ 時，CIR 可以保證永遠不出現負的利率。

SHORT RATE MODEL：CIR MODEL

- CIR 同樣為 affine model ：

$$\mu_0(t) = \kappa\theta$$

$$\mu_1(t) = -\kappa$$

$$\boxed{\begin{gathered}\sigma_0^2(t) = 0 \\ \sigma_1^2(t) = \sigma^2\end{gathered}}$$

與 Vasicek 相反

SHORT RATE MODEL：CIR MODEL

- 可以得到偏微分方程如下：

$$C_t = 1 - \kappa C - \frac{1}{2}\sigma^2 C^2$$

$$A_t = \kappa\theta C$$

SHORT RATE MODEL：CIR MODEL

- 解方程式得：

$$\gamma = \sqrt{\kappa^2 + 2\sigma^2}$$

$$\phi(t,T) = (\kappa + \gamma)\left(e^{\gamma(T-t)} - 1\right) + 2\gamma$$

$$C(t,T) = \frac{2\left(e^{\gamma(T-t)} - 1\right)}{\phi(t,T)}$$

$$A(t,T) = -\frac{2\kappa\theta}{\sigma^2}\left[\frac{(\kappa+\gamma)(T-t)}{2} + \log\frac{2\gamma}{\phi(t,T)}\right]$$

SHORT RATE MODEL：CIR MODEL

- 由於 CIR 在 drift term 部分有出現 $\sqrt{r(t)}$ ，當利率為負時會出現負數，因此 CIR 利率不可為負，可依照前述參數限制式避免此問題。
- 但殖利率曲線形狀問題一樣沒有改善。

SHORT RATE MODEL：模擬離散化

- 回顧推導偏微分方程時，我們假設短利模型為：

$$dr(t) = a(r(t), t)dt + \sigma(r(t), t)dW(t)$$

- 因此我們以一般 Euler 離散化近似 $r(t + \Delta t)$ 時，為：

$$r(t + \Delta t) = r(t) + a(r(t), t)\Delta t + \sigma(r(t), t)(\Delta t)^{\frac{1}{2}} Z$$

$$Z \sim N(0,1)$$

SHORT RATE MODEL：模擬離散化

- 但 Euler 離散化並非該動態過程之真正一階泰勒展開式近似，在模擬過程中會產生誤差，使收斂速度減慢，Kloeden 與 Platen （1992）證明了利用一階泰勒展開式近似（Milstein 離散化）之收斂較佳。

SHORT RATE MODEL：模擬離散化

- Milstein 離散化如下：

$$r(t+\Delta t)=r(t)+a(r(t),t)\Delta t+\sigma(r(t),t)\sqrt{\Delta t}Z+\boxed{\frac{1}{2}\sigma(r(t),t)\frac{\partial\sigma(r(t),t)}{\partial r(t)}\Delta t(Z^2-1)}$$

新增

SHORT RATE MODEL：模擬離散化

- 對 Vasicek 來說：
  - $\sigma(r(t),t)=\sigma$
  - $\frac{\partial\sigma(r(t),t)}{\partial r(t)}=0$ ➔ 兩種離散化並無分別。
- 對 CIR 來說：
  - $\sigma(r(t),t)=\sigma\sqrt{r(t)}$
  - $\frac{\partial\sigma(r(t),t)}{\partial r(t)}=\sigma\frac{1}{\sqrt{r(t)}}$ ➔ 因此新增 $\frac{1}{4}\sigma^2\Delta t(Z^2-1)$ 項。

SHORT RATE MODEL：類別

- 由於每個動態過程都有重複的部分，我們可以想辦法將重複部分縮減到最小，一般的 affine model 皆為 diffusion process，分為 drift term（後面乘上 dt）與 diffusion term （後面乘上 $dW(t)$）兩部分。
- 因此我們可以分別建立 drift 與 diffusion 兩個介面，描繪一個 affine model 的兩部分。
- 但缺點在於 Milstein 離散化方法下的額外項是依照兩者來決定，VBA 在符號運算上不若 R、Matlab 與 mathematica 方便，因此離散化方法僅限 Euler。

SHORT RATE MODEL：類別

- Drift 與 Diffusion 類別擁有以下相同的方法 :
  - clone : 複製一份
  - parameters : 取得或輸入參數，使用 collection
  - nextIncrement : 給定前一步的狀態變數數值，回傳下一步新增的微增量，Diffusion 額外需要一個標準常態分配亂數。

SHORT RATE MODEL：類別

- Drift :

```
Public Property Let parameters(params As Collection): End Property
Public Property Get parameters() As Collection: End Property
Public Function nextIncrement(value As Double) As Double: End Function
Public Function clone() As Drift: End Function
```

SHORT RATE MODEL：類別

- Diffusion :

```
Public Property Let parameters(params As Collection): End Property
Public Property Get parameters() As Collection: End Property
Public Function nextIncrement(value As Double, randNum As Double) As Double: End Function
Public Function clone() As Diffusion: End Function
```

SHORT RATE MODEL：類別

- 目前提供的有
  - Vasicek（又稱作 Ornstein-Uhlenbeck process ）drift
  - Vasicek diffusion
  - CIR diffusion （diffusion 與 Vasicek 相同）
  - geometric Brownian motion drift
  - geometric Borwnian motion diffusion
  - Constant elasticity of variance model diffusion（drift與 Vasicek 相同）