Methods and tools for industrial automation

Fundamentals of discrete/continuous systems

Roberto Sacile
(roberto.sacile@unige.it)

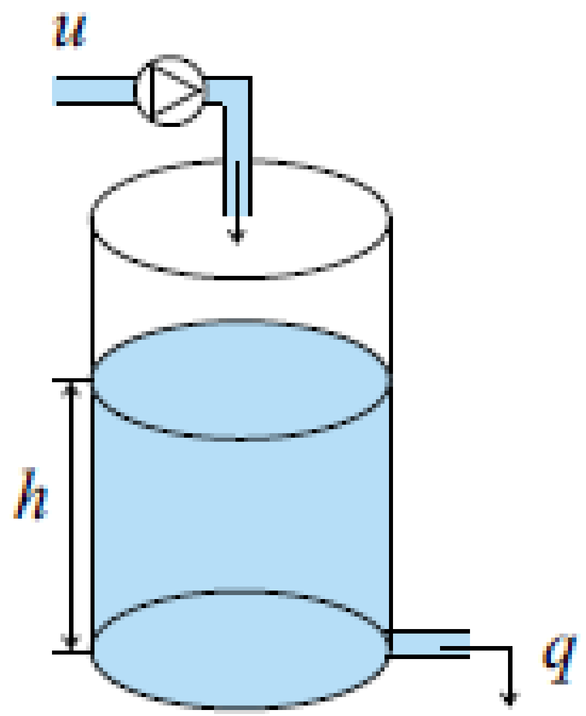
Tank Model

Variabili:

altezza serbatoio	h	m
flusso d'ingresso	u	m^3/s
flusso d'uscita	q	m^3/s
velocità d'uscita	v	m/s

Parametri:

sezione serbatoio	A	m^2
sezione apertura	a	m^2
accelerazione di gravità	g	m/s^2



Tank Model

$v(t) = \sqrt{2gh(t)}$	Legge di Torricelli
$q(t) = av(t)$	Flusso di uscita
$\frac{d}{dt}[Ah(t)] = u(t) - q(t)$	Bilancio di massa

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{d}{dt}h(t) & = & -\frac{a\sqrt{2g}}{A}\sqrt{h(t)} + \frac{1}{A}u(t) \\ q(t) & = & a\sqrt{2g}\sqrt{h(t)} \end{array} \right.$$

Tank Model in State-Space

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = & f(x(t), u(t)) \\ y(t) & = & g(x(t), u(t)) \end{cases} \qquad \dot{x} \triangleq \frac{dx}{dt}$$

- $u(t)$ è l' *ingresso* del sistema (variabili esogene)
- $y(t)$ è l' *uscita* del sistema (variabili di interesse o misure)
- $x(t)$ è lo *stato* del sistema

Continuous linear time invariant system

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = & ax(t) + bu(t) \\ x(0) & = & x_0 \end{cases}$$

$$x(t) = \underbrace{e^{at}x_0}_{\text{risposta libera}} + \underbrace{\int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau}_{\text{risposta forzata}}$$

$$\begin{array}{rcll} x_\ell(t) & = & e^{at}x_0 & \text{effetto delle condizioni iniziali} \\ x_f(t) & = & \int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau & \text{effetto dell'ingresso} \end{array}$$

Continuous linear time invariant system

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = & Ax(t) + Bu(t) \\ x(0) & = & x_0 \end{cases}$$

$$x(t) = \underbrace{e^{At}x_0}_{\text{risposta libera}} + \underbrace{\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau}_{\text{risposta forzata}}$$

Discrete linear time invariant system (scalar)

$$\begin{cases} x(k+1) &= ax(k) + bu(k) \\ x(0) &= x_0 \end{cases}$$

$$x(k) = \underbrace{a^k x_0}_{\text{risposta libera}} + \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} a^i bu(k-1-i)}_{\text{risposta forzata}}$$

Discrete linear time invariant system (vector)

$$\begin{cases} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ x(0) &= x_0 \end{cases}$$

$$x(k) = \underbrace{A^k x_0}_{\text{risposta libera}} + \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} A^i B u(k-1-i)}_{\text{risposta forzata}}$$

C2D (continuous to discrete for linear systems)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

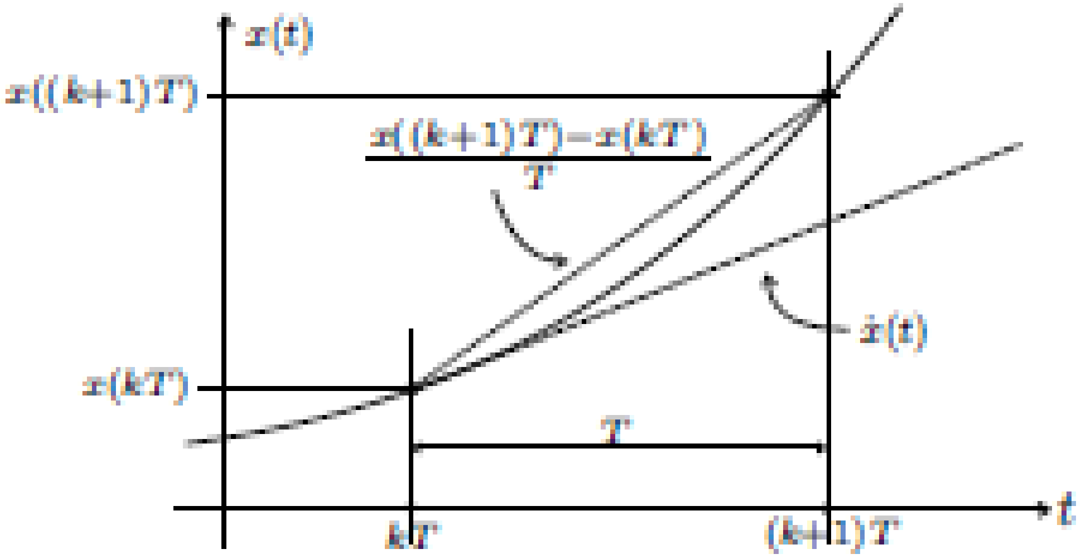
$$x(0) = x_0$$

$$\begin{cases} \tilde{x}(k+1) &= \tilde{A}\tilde{x}(k) + \tilde{B}\tilde{u}(k) \\ \tilde{y}(k) &= \tilde{C}\tilde{x}(k) + \tilde{D}\tilde{u}(k) \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \tilde{A} \triangleq e^{AT} & \tilde{B} \triangleq \left(\int_0^T e^{A(T-\tau)} d\tau\right) B \\ \tilde{C} \triangleq C & \tilde{D} \triangleq D \end{array}}$$

See C2D Matlab function

Continuous to discrete for general systems



(1707-1783)

$$x((k+1)T) = (I + TA)x(kT) + TBu(kT)$$

Continuous to discrete for general systems (example on a linear system)

$$\begin{cases} \tilde{x}(k+1) & = & \tilde{A}\tilde{x}(k) + \tilde{B}\tilde{u}(k) \\ \tilde{y}(k) & = & \tilde{C}\tilde{x}(k) + \tilde{D}\tilde{u}(k) \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \tilde{A} \triangleq I + AT & \tilde{B} \triangleq TB \\ \tilde{C} \triangleq C & \tilde{D} \triangleq D \end{array}}$$

Nota: $e^{TA} = I + TA + \cdots + \frac{T^n A^n}{n!} + \ldots$

Linearization

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = & f(x(t), u(t)) \\ y(t) & = & g(x(t), u(t)) \end{cases}$$

- Sia (x_r, u_r) un equilibrio: $f(x_r, u_r) = 0$
- Obiettivo: studiare il sistema per piccole variazioni $\Delta u(t) \triangleq u(t) - u_r$ e $\Delta x(0) \triangleq x(0) - x_r$.
- L'evoluzione di $\Delta x(t) \triangleq x(t) - x_r$ è data da

$$\dot{\Delta} x(t) = \dot{x}(t) - \dot{x}_r = f(x(t), u(t))$$

$$= f(\Delta x(t) + x_r, \Delta u(t) + u_r)$$

$$\approx \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x_r, u_r)}_{A} \Delta x(t) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial u}(x_r, u_r)}_{B} \Delta u(t)$$

Linearization

$$\Delta y(t) \approx \underbrace{\frac{\partial g}{\partial x}(x_r, u_r)}_{C} \Delta x(t) + \underbrace{\frac{\partial g}{\partial u}(x_r, u_r)}_{D} \Delta u(t)$$

dove $\Delta y(t) \triangleq y(t) - g(x_r, u_r)$ è la deviazione dell'uscita dall'equilibrio.

- Le variazioni $\Delta x(t)$, $\Delta y(t)$, e $\Delta u(t)$ sono quindi governate (in prima approssimazione) dal sistema *linearizzato* (A, B, C, D).
- Per sistemi nonlineari a tempo-discreto, vale un ragionamento analogo.

Application of discrete PID controller