

# Facultad de Ciencias

## Teoría del riesgo 2021

Septiembre, 2020

## ● Introducción

## ● Introducción

- La actividad aseguradora está difundida en el mundo entero; son de uso corriente los seguros de automóviles, incendios, robos, vida, etc

## ● **Introducción**

- La actividad aseguradora está difundida en el mundo entero; son de uso corriente los seguros de automóviles, incendios, robos, vida, etc
- Esta actividad responde a la incertidumbre que sienten los individuos ante algunas situaciones que pueden provocar daños, tanto materiales como personales

## ● **Introducción**

- La actividad aseguradora está difundida en el mundo entero; son de uso corriente los seguros de automóviles, incendios, robos, vida, etc
- Esta actividad responde a la incertidumbre que sienten los individuos ante algunas situaciones que pueden provocar daños, tanto materiales como personales
- El miedo a que ocurran dichos acontecimientos se intenta eliminar mediante la compra de un seguro que compensará al asegurado en el caso de producirse algún daño

## ● Introducción

- La actividad aseguradora está difundida en el mundo entero; son de uso corriente los seguros de automóviles, incendios, robos, vida, etc
- Esta actividad responde a la incertidumbre que sienten los individuos ante algunas situaciones que pueden provocar daños, tanto materiales como personales
- El miedo a que ocurran dichos acontecimientos se intenta eliminar mediante la compra de un seguro que compensará al asegurado en el caso de producirse algún daño
- La base de esta actividad radica en la *existencia de un equilibrio entre la prestación que hará la compañía de seguros y la contraprestación que ella recibe del asegurado*

- Algunos antecedentes históricos

## ● Algunos antecedentes históricos

- En sus inicios, el seguro era una forma de solidaridad entre los miembros de una comunidad. Consistía en un fondo o bolsa en la que todas las personas depositaban parte de su dinero

## ● Algunos antecedentes históricos

- En sus inicios, el seguro era una forma de solidaridad entre los miembros de una comunidad. Consistía en un fondo o bolsa en la que todas las personas depositaban parte de su dinero
- Con el capital que acumulaban entre todos, se pagaban los daños que sufrían algunos de ellos. Por ejemplo:  
Antiguamente existía en algunos puertos la costumbre de que todos los armadores de barcos que hacían una determinada línea, aportaban a un fondo común una cantidad de dinero en función del número de navíos que poseían

## ● Algunos antecedentes históricos

- En sus inicios, el seguro era una forma de solidaridad entre los miembros de una comunidad. Consistía en un fondo o bolsa en la que todas las personas depositaban parte de su dinero
- Con el capital que acumulaban entre todos, se pagaban los daños que sufrían algunos de ellos. Por ejemplo:  
Antiguamente existía en algunos puertos la costumbre de que todos los armadores de barcos que hacían una determinada línea, aportaban a un fondo común una cantidad de dinero en función del número de navíos que poseían
- Armadores cuyos barcos se hundían o eran saqueados por piratas, recibían una compensación económica procedente del fondo común para poder adquirir otro barco para continuar su actividad laboral

- La Ciencia Actuarial tal como hoy se concibe comienza en el siglo **XVII**

- La Ciencia Actuarial tal como hoy se concibe comienza en el siglo **XVII**
- Durante este periodo las necesidades comerciales dieron lugar a operaciones que acarreaban un interés compuesto; los seguros marítimos eran algo habitual y el cálculo de las rentas vitalicias comenzaba a aparecer

- La Ciencia Actuarial tal como hoy se concibe comienza en el siglo **XVII**
- Durante este periodo las necesidades comerciales dieron lugar a operaciones que acarreaban un interés compuesto; los seguros marítimos eran algo habitual y el cálculo de las rentas vitalicias comenzaba a aparecer
- Este tipo de operaciones requería algo más que el juicio intuitivo y comercial de los primeros aseguradores

- La Ciencia Actuarial tal como hoy se concibe comienza en el siglo **XVII**
- Durante este periodo las necesidades comerciales dieron lugar a operaciones que acarreaban un interés compuesto; los seguros marítimos eran algo habitual y el cálculo de las rentas vitalicias comenzaba a aparecer
- Este tipo de operaciones requería algo más que el juicio intuitivo y comercial de los primeros aseguradores
- Uno de los pilares de la Ciencia Actuarial fue la *Teoría de Probabilidades*

- La Ciencia Actuarial tal como hoy se concibe comienza en el siglo **XVII**
- Durante este periodo las necesidades comerciales dieron lugar a operaciones que acarreaban un interés compuesto; los seguros marítimos eran algo habitual y el cálculo de las rentas vitalicias comenzaba a aparecer
- Este tipo de operaciones requería algo más que el juicio intuitivo y comercial de los primeros aseguradores
- Uno de los pilares de la Ciencia Actuarial fue la *Teoría de Probabilidades*
- *Las bases del análisis estadístico* en el seguro, fueron establecidas por *Blaise Pascal* en 1654 en colaboración con el también matemático *Pierre de Fermat*

- Otro de los pilares es el concepto de tablas de vida, basadas en las investigaciones sobre la mortalidad

- Otro de los pilares es el concepto de tablas de vida, basadas en las investigaciones sobre la mortalidad
- Las primeras tablas son debidas a *John Graunt* (1662)

- Otro de los pilares es el concepto de tablas de vida, basadas en las investigaciones sobre la mortalidad
- Las primeras tablas son debidas a *John Graunt* (1662)
- En 1693 *Edmund Halley*, matemático inglés, publicó un famoso documento describiendo la construcción de tablas de vida completas a partir de la hipótesis de estacionariedad de la población, así como el método de valoración de las rentas vitalicias, que es, en esencia, el mismo que se utiliza hoy en día

- Otro de los pilares es el concepto de tablas de vida, basadas en las investigaciones sobre la mortalidad
- Las primeras tablas son debidas a *John Graunt* (1662)
- En 1693 *Edmund Halley*, matemático inglés, publicó un famoso documento describiendo la construcción de tablas de vida completas a partir de la hipótesis de estacionariedad de la población, así como el método de valoración de las rentas vitalicias, que es, en esencia, el mismo que se utiliza hoy en día
- Las tablas de *Halley* se utilizaron por la mayoría de las compañías de seguros inglesas creadas durante el siglo **XVIII**

- Otro de los pilares es el concepto de tablas de vida, basadas en las investigaciones sobre la mortalidad
- Las primeras tablas son debidas a *John Graunt* (1662)
- En 1693 *Edmund Halley*, matemático inglés, publicó un famoso documento describiendo la construcción de tablas de vida completas a partir de la hipótesis de estacionariedad de la población, así como el método de valoración de las rentas vitalicias, que es, en esencia, el mismo que se utiliza hoy en día
- Las tablas de *Halley* se utilizaron por la mayoría de las compañías de seguros inglesas creadas durante el siglo **XVIII**
- En este siglo, la Ciencia Actuarial tiene aportaciones de las matemáticas de los seguros no vida, la teoría de la decisión y la teoría estadístico-matemática de la estabilidad

## ● Clasificación de los seguros

- **Clasificación de los seguros**

- Los seguros se pueden clasificar en dos grandes grupos:  
*seguros de vida y seguros de no vida*

## ● Clasificación de los seguros

- Los seguros se pueden clasificar en dos grandes grupos:  
*seguros de vida y seguros de no vida*
- Un seguro de vida es aquel en el que una entidad aseguradora se compromete, mediante el cobro de una prima única o periódica, a pagar la prestación convenida en el caso de que se cumpla la circunstancia prevista en el contrato: que la persona o personas fallezcan o sobrevivan a un periodo de tiempo determinado

## ● Clasificación de los seguros

- Los seguros se pueden clasificar en dos grandes grupos:  
*seguros de vida y seguros de no vida*
- Un seguro de vida es aquel en el que una entidad aseguradora se compromete, mediante el cobro de una prima única o periódica, a pagar la prestación convenida en el caso de que se cumpla la circunstancia prevista en el contrato: que la persona o personas fallezcan o sobrevivan a un periodo de tiempo determinado
- Existen distintas modalidades de seguros de vida

## ● Clasificación de los seguros

- Los seguros se pueden clasificar en dos grandes grupos:  
*seguros de vida y seguros de no vida*
- Un seguro de vida es aquel en el que una entidad aseguradora se compromete, mediante el cobro de una prima única o periódica, a pagar la prestación convenida en el caso de que se cumpla la circunstancia prevista en el contrato: que la persona o personas fallezcan o sobrevivan a un periodo de tiempo determinado
- Existen distintas modalidades de seguros de vida
  - Seguros de vida en caso de muerte

## ● Clasificación de los seguros

- Los seguros se pueden clasificar en dos grandes grupos:  
*seguros de vida y seguros de no vida*
- Un seguro de vida es aquel en el que una entidad aseguradora se compromete, mediante el cobro de una prima única o periódica, a pagar la prestación convenida en el caso de que se cumpla la circunstancia prevista en el contrato: que la persona o personas fallezcan o sobrevivan a un periodo de tiempo determinado
- Existen distintas modalidades de seguros de vida
  - Seguros de vida en caso de muerte
  - Seguros de vida en caso de vida

## ● Clasificación de los seguros

- Los seguros se pueden clasificar en dos grandes grupos:  
*seguros de vida y seguros de no vida*
- Un seguro de vida es aquel en el que una entidad aseguradora se compromete, mediante el cobro de una prima única o periódica, a pagar la prestación convenida en el caso de que se cumpla la circunstancia prevista en el contrato: que la persona o personas fallezcan o sobrevivan a un periodo de tiempo determinado
- Existen distintas modalidades de seguros de vida
  - Seguros de vida en caso de muerte
  - Seguros de vida en caso de vida
  - Seguros de vida mixtos.

- Los *seguros de no vida* van dirigidos a cubrir daños materiales que ocasionan pérdidas económicas

- Los *seguros de no vida* van dirigidos a cubrir daños materiales que ocasionan pérdidas económicas
- Los más frecuentes son los de automóviles, incendios, robos, etc.

- Los *seguros de no vida* van dirigidos a cubrir daños materiales que ocasionan pérdidas económicas
- Los más frecuentes son los de automóviles, incendios, robos, etc.
- En este caso, las prestaciones o indemnizaciones están en función de la cuantía del daño

- **Objetivos de las Matemáticas Actuariales**

## ● **Objetivos de las Matemáticas Actuariales**

- Su objetivo es el estudio cuantitativo de las operaciones de seguro (y financieras) para optimizar las decisiones sobre las magnitudes que intervienen en ellas, considerando que estas operaciones las realiza un ente asegurador (o financiero)

## • **Objetivos de las Matemáticas Actuariales**

- Su objetivo es el estudio cuantitativo de las operaciones de seguro (y financieras) para optimizar las decisiones sobre las magnitudes que intervienen en ellas, considerando que estas operaciones las realiza un ente asegurador (o financiero)
- Forma parte del objetivo de la Matemática Actuarial

## • **Objetivos de las Matemáticas Actuariales**

- Su objetivo es el estudio cuantitativo de las operaciones de seguro (y financieras) para optimizar las decisiones sobre las magnitudes que intervienen en ellas, considerando que estas operaciones las realiza un ente asegurador (o financiero)
- Forma parte del objetivo de la Matemática Actuarial
  - El cálculo de primas, reservas, valores garantizados, etc., en las operaciones de seguros de vida

## • **Objetivos de las Matemáticas Actuariales**

- Su objetivo es el estudio cuantitativo de las operaciones de seguro (y financieras) para optimizar las decisiones sobre las magnitudes que intervienen en ellas, considerando que estas operaciones las realiza un ente asegurador (o financiero)
- Forma parte del objetivo de la Matemática Actuarial
  - El cálculo de primas, reservas, valores garantizados, etc., en las operaciones de seguros de vida
  - El análisis cuantitativo de los sistemas actuariales en los seguros colectivos, sociales y planes de pensiones

## • **Objetivos de las Matemáticas Actuariales**

- Su objetivo es el estudio cuantitativo de las operaciones de seguro (y financieras) para optimizar las decisiones sobre las magnitudes que intervienen en ellas, considerando que estas operaciones las realiza un ente asegurador (o financiero)
- Forma parte del objetivo de la Matemática Actuarial
  - El cálculo de primas, reservas, valores garantizados, etc., en las operaciones de seguros de vida
  - El análisis cuantitativo de los sistemas actuariales en los seguros colectivos, sociales y planes de pensiones
  - El estudio de los problemas de tarificación y reservas técnicas en los seguros no vida

## • **Objetivos de las Matemáticas Actuariales**

- Su objetivo es el estudio cuantitativo de las operaciones de seguro (y financieras) para optimizar las decisiones sobre las magnitudes que intervienen en ellas, considerando que estas operaciones las realiza un ente asegurador (o financiero)
- Forma parte del objetivo de la Matemática Actuarial
  - El cálculo de primas, reservas, valores garantizados, etc., en las operaciones de seguros de vida
  - El análisis cuantitativo de los sistemas actuariales en los seguros colectivos, sociales y planes de pensiones
  - El estudio de los problemas de tarificación y reservas técnicas en los seguros no vida
  - La determinación de las magnitudes de estabilidad del ente asegurador y el análisis de su solvencia

- Riesgo

## ● Riesgo

- *Definición*: Se entiende por riesgo, en la literatura actuarial, no sólo al objeto asegurado, sino también, a la posibilidad de producirse, por azar, un acontecimiento que origine una pérdida económica o patrimonial

## ● Riesgo

- *Definición*: Se entiende por riesgo, en la literatura actuarial, no sólo al objeto asegurado, sino también, a la posibilidad de producirse, por azar, un acontecimiento que origine una pérdida económica o patrimonial
- Un individuo puede adoptar distintas conductas a la hora de enfrentarse al riesgo, una particularmente asociada al seguro, es la de prevención y previsión, que conlleva a actitudes de ahorro y de aseguramiento (como mecanismo para reducir la incertidumbre del asegurado a través del pago de la prima)

## ● Riesgo

- *Definición*: Se entiende por riesgo, en la literatura actuarial, no sólo al objeto asegurado, sino también, a la posibilidad de producirse, por azar, un acontecimiento que origine una pérdida económica o patrimonial
- Un individuo puede adoptar distintas conductas a la hora de enfrentarse al riesgo, una particularmente asociada al seguro, es la de prevención y previsión, que conlleva a actitudes de ahorro y de aseguramiento (como mecanismo para reducir la incertidumbre del asegurado a través del pago de la prima)
- Este último constituye la forma más adecuada y técnicamente eficaz para cubrir riesgos

- **Características del riesgo**

- **Características del riesgo**

- Las características esenciales del riesgo, para ser objeto del seguro, son las siguientes

- **Características del riesgo**

- Las características esenciales del riesgo, para ser objeto del seguro, son las siguientes
  - **Incierto y aleatorio.** Debe tener una relativa incertidumbre

- **Características del riesgo**

- Las características esenciales del riesgo, para ser objeto del seguro, son las siguientes

- **Incierto y aleatorio.** Debe tener una relativa incertidumbre
- **Factibilidad.** Debe existir posibilidad de que el riesgo se consume

## ● Características del riesgo

- Las características esenciales del riesgo, para ser objeto del seguro, son las siguientes
  - **Incierto y aleatorio.** Debe tener una relativa incertidumbre
  - **Factibilidad.** Debe existir posibilidad de que el riesgo se consume
  - **Fortuito.** El riesgo debe provenir de un acto o acontecimiento ajeno a la voluntad humana de producirlo

## ● Características del riesgo

- Las características esenciales del riesgo, para ser objeto del seguro, son las siguientes
  - **Incierto y aleatorio.** Debe tener una relativa incertidumbre
  - **Factibilidad.** Debe existir posibilidad de que el riesgo se consume
  - **Fortuito.** El riesgo debe provenir de un acto o acontecimiento ajeno a la voluntad humana de producirlo
  - **Monto económico:** La realización del riesgo debe producir una necesidad traducible a un valor económico, que se satisface con la indemnización correspondiente

- El proceso de modelación del riesgo

- **El proceso de modelación del riesgo**
- Recordemos que un modelo matemático, estadístico, actuarial, o de cualquier naturaleza, es una representación simplificada de algún fenómeno real

## ● El proceso de modelación del riesgo

- Recordemos que un modelo matemático, estadístico, actuarial, o de cualquier naturaleza, es una representación simplificada de algún fenómeno real
- En un contexto actuarial específico, proponer un modelo para describir una situación, se basa en la experiencia y conocimiento que se tenga del fenómeno bajo estudio, así como de la información histórica que posea sobre él

## ● El proceso de modelación del riesgo

- Recordemos que un modelo matemático, estadístico, actuarial, o de cualquier naturaleza, es una representación simplificada de algún fenómeno real
- En un contexto actuarial específico, proponer un modelo para describir una situación, se basa en la experiencia y conocimiento que se tenga del fenómeno bajo estudio, así como de la información histórica que posea sobre él
- El modelo debe proveer un balance entre simplicidad (*parsimonia*) y conformidad (*ajuste*) con la información disponible para elaborarlo

- **El proceso de modelado**

- **El proceso de modelado**
- Sin pretender ser exhaustivos, podemos reconocer ciertos pasos a seguir para modelar una situación actuarial

- **El proceso de modelado**
- Sin pretender ser exhaustivos, podemos reconocer ciertos pasos a seguir para modelar una situación actuarial
- Es importante remarcar que, aunque los pasos se enumeren ordenadamente, la dinámica del proceso permite regresar a algunos puntos anteriores, para su mejor especificación

## • El proceso de modelado

- Sin pretender ser exhaustivos, podemos reconocer ciertos pasos a seguir para modelar una situación actuarial
- Es importante remarcar que, aunque los pasos se enumeren ordenadamente, la dinámica del proceso permite regresar a algunos puntos anteriores, para su mejor especificación
- Finalmente, hay que recordar que modelar tiene algo de *técnica y mucho de arte*

## ● PASOS

## ● PASOS

- Uno o más modelos pueden seleccionarse de acuerdo al conocimiento inicial y experiencia que posea el analista, además de la naturaleza de la información disponible

## ● PASOS

- Uno o más modelos pueden seleccionarse de acuerdo al conocimiento inicial y experiencia que posea el analista, además de la naturaleza de la información disponible
  - Ajustar el modelo con la información disponible.

## ● PASOS

- Uno o más modelos pueden seleccionarse de acuerdo al conocimiento inicial y experiencia que posea el analista, además de la naturaleza de la información disponible
  - Ajustar el modelo con la información disponible.
  - Realizar pruebas de *bondad de ajuste* del modelo, para determinar si su ajuste es adecuado para los datos utilizados

## ● PASOS

- Uno o más modelos pueden seleccionarse de acuerdo al conocimiento inicial y experiencia que posea el analista, además de la naturaleza de la información disponible
  - Ajustar el modelo con la información disponible.
  - Realizar pruebas de *bondad de ajuste* del modelo, para determinar si su ajuste es adecuado para los datos utilizados
  - Considerar la posibilidad de utilizar otros modelos.

## ● PASOS

- Uno o más modelos pueden seleccionarse de acuerdo al conocimiento inicial y experiencia que posea el analista, además de la naturaleza de la información disponible
  - Ajustar el modelo con la información disponible.
  - Realizar pruebas de *bondad de ajuste* del modelo, para determinar si su ajuste es adecuado para los datos utilizados
  - Considerar la posibilidad de utilizar otros modelos.
  - Si existen varios modelos que pueden ser adecuados, entonces, es necesario compararlos para decidir por alguno de ellos.

## ● PASOS

- Uno o más modelos pueden seleccionarse de acuerdo al conocimiento inicial y experiencia que posea el analista, además de la naturaleza de la información disponible
  - Ajustar el modelo con la información disponible.
  - Realizar pruebas de *bondad de ajuste* del modelo, para determinar si su ajuste es adecuado para los datos utilizados
  - Considerar la posibilidad de utilizar otros modelos.
  - Si existen varios modelos que pueden ser adecuados, entonces, es necesario compararlos para decidir por alguno de ellos.
  - Finalmente, el modelo seleccionado puede adaptarse para aplicarlo en el futuro. Esto puede involucrar algún ajuste de los parámetros, previendo cambios por alguna característica exógena, como inflación, cambios del mercado asegurado o cualquiera otra

- Distribuciones asociadas al monto de una pérdida

- **Distribuciones asociadas al monto de una pérdida**
- Cuando se manifiesta un riesgo, la Cía aseguradora tiene la obligación de cubrir el monto de la reclamación que genera tal evento

- **Distribuciones asociadas al monto de una pérdida**
- Cuando se manifiesta un riesgo, la Cía aseguradora tiene la obligación de cubrir el monto de la reclamación que genera tal evento
- Dadas las características del riesgo, este monto es claramente aleatorio, por lo que es susceptible de modelarse a través de una variable aleatoria,  $X$

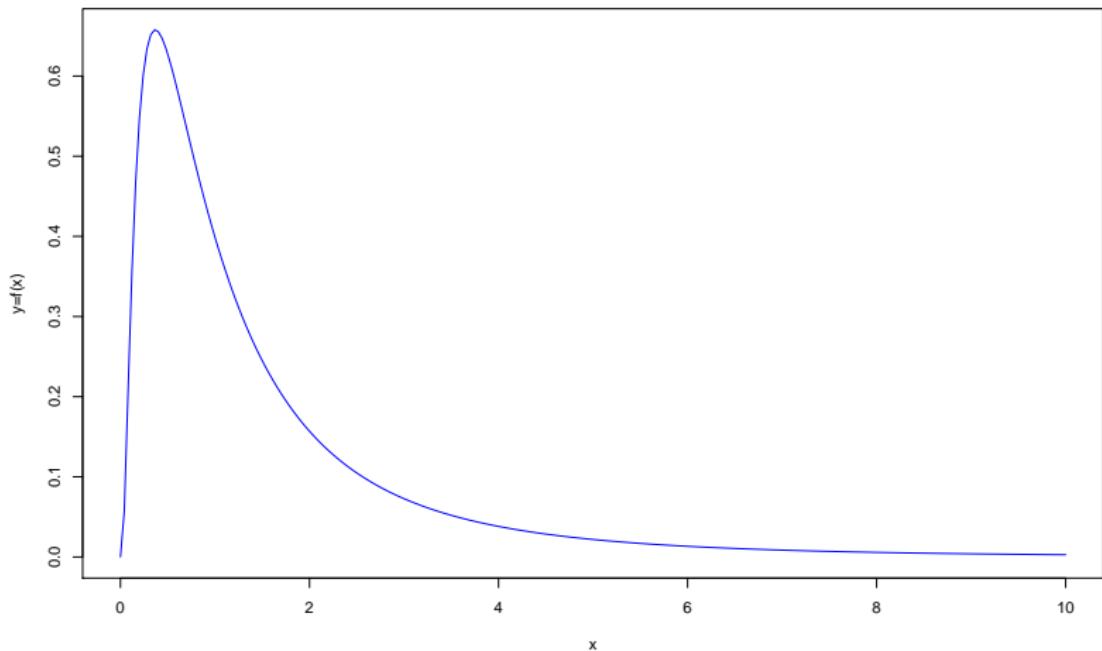
- **Distribuciones asociadas al monto de una pérdida**
- Cuando se manifiesta un riesgo, la Cía aseguradora tiene la obligación de cubrir el monto de la reclamación que genera tal evento
- Dadas las características del riesgo, este monto es claramente aleatorio, por lo que es susceptible de modelarse a través de una variable aleatoria, **X**
- Ya que el monto del siniestro es una cantidad *no negativa*, los modelos probabilísticos asociados deben contemplar esta y otras características. Concretamente

- **Distribuciones asociadas al monto de una pérdida**
- Cuando se manifiesta un riesgo, la Cía aseguradora tiene la obligación de cubrir el monto de la reclamación que genera tal evento
- Dadas las características del riesgo, este monto es claramente aleatorio, por lo que es susceptible de modelarse a través de una variable aleatoria, **X**
- Ya que el monto del siniestro es una cantidad *no negativa*, los modelos probabilísticos asociados deben contemplar esta y otras características. Concretamente
- La variable asociada al monto de reclamación es mayor o igual que cero (*no negativa*)

- **Distribuciones asociadas al monto de una pérdida**
- Cuando se manifiesta un riesgo, la Cía aseguradora tiene la obligación de cubrir el monto de la reclamación que genera tal evento
- Dadas las características del riesgo, este monto es claramente aleatorio, por lo que es susceptible de modelarse a través de una variable aleatoria,  $\mathbf{X}$
- Ya que el monto del siniestro es una cantidad *no negativa*, los modelos probabilísticos asociados deben contemplar esta y otras características. Concretamente
- La variable asociada al monto de reclamación es mayor o igual que cero (*no negativa*)
  - $X : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$

- La distribución de esta variable es generalmente sesgada a la derecha

Forma común de la distribución del monto de pérdida



- La distribución puede ser de *colas pesadas* lo que podría implicar el uso de *distribuciones para valores extremos* en su modelación

- La distribución puede ser de *colas pesadas* lo que podría implicar el uso de *distribuciones para valores extremos* en su modelación
- Entonces, dadas estas características de los montos asociados a un riesgo, es necesario identificar las familias de modelos (densidades y/o distribuciones) más adecuados para su modelación, recordando que deben ser modelos con soporte en los *reales no negativos*

- La distribución puede ser de *colas pesadas* lo que podría implicar el uso de *distribuciones para valores extremos* en su modelación
- Entonces, dadas estas características de los montos asociados a un riesgo, es necesario identificar las familias de modelos (densidades y/o distribuciones) más adecuados para su modelación, recordando que deben ser modelos con soporte en los *reales no negativos*
- **Definición 1.** Una *familia de distribuciones paramétrica* es un conjunto de distribuciones en donde cada miembro está determinado por uno o varios valores fijos y finitos, llamados *parámetros* (de ahí el nombre paramétrica)

- Principales familias paramétricas para modelar el monto de riesgo

- Principales familias paramétricas para modelar el monto de riesgo
- Familia de distribuciones exponencial

- Principales familias paramétricas para modelar el monto de riesgo
- Familia de distribuciones exponencial
- La distribución exponencial es un modelo apropiado para los montos, ya que cumple con los requicitos para su modelación; no obstante, esta distribución tiene *colas ligeras* por lo que no resultaría adecuada si el seguro genera una gran proporción de reclamaciones con montos muy grandes

- **Principales familias paramétricas para modelar el monto de riesgo**
- **Familia de distribuciones exponencial**
- La distribución exponencial es un modelo apropiado para los montos, ya que cumple con los requicitos para su modelación; no obstante, esta distribución tiene *colas ligeras* por lo que no resultaría adecuada si el seguro genera una gran proporción de reclamaciones con montos muy grandes
- Las características de esta v.a. son

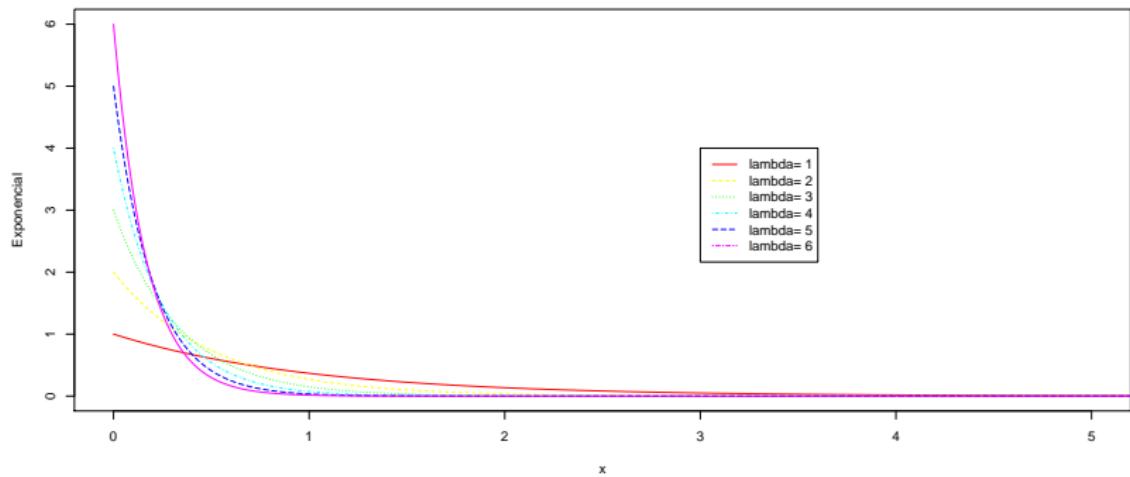
- **Principales familias paramétricas para modelar el monto de riesgo**
- **Familia de distribuciones exponencial**
- La distribución exponencial es un modelo apropiado para los montos, ya que cumple con los requicitos para su modelación; no obstante, esta distribución tiene *colas ligeras* por lo que no resultaría adecuada si el seguro genera una gran proporción de reclamaciones con montos muy grandes
- Las características de esta v.a. son
  - $f(x; \theta) = \theta e^{-\theta x}, \quad \theta > 0, x \geq 0$

- **Principales familias paramétricas para modelar el monto de riesgo**
- **Familia de distribuciones exponencial**
- La distribución exponencial es un modelo apropiado para los montos, ya que cumple con los requicitos para su modelación; no obstante, esta distribución tiene *colas ligeras* por lo que no resultaría adecuada si el seguro genera una gran proporción de reclamaciones con montos muy grandes
- Las características de esta v.a. son
  - $f(x; \theta) = \theta e^{-\theta x}, \quad \theta > 0, x \geq 0$
  - $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\theta}; \mathbb{V}(X) = \frac{1}{\theta^2}; M_X(t) = \left( \frac{\theta}{\theta - t} \right), t < \theta.$

- **Principales familias paramétricas para modelar el monto de riesgo**
- **Familia de distribuciones exponencial**
- La distribución exponencial es un modelo apropiado para los montos, ya que cumple con los requicitos para su modelación; no obstante, esta distribución tiene *colas ligeras* por lo que no resultaría adecuada si el seguro genera una gran proporción de reclamaciones con montos muy grandes
- Las características de esta v.a. son
  - $f(x; \theta) = \theta e^{-\theta x}, \quad \theta > 0, x \geq 0$
  - $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\theta}; \mathbb{V}(X) = \frac{1}{\theta^2}; M_X(t) = \left( \frac{\theta}{\theta - t} \right), t < \theta.$
  - $\theta$  es un *parámetro de escala*

## Distribuciones asociadas al monto de una pérdida

Diversas formas de la distribución exponencial





## ● Familia de distribuciones Gamma

## ● Familia de distribuciones Gamma

- La distribución Gamma es una de las distribuciones más populares para modelar variables aleatorias con soporte no negativo

## ● Familia de distribuciones Gamma

- La distribución Gamma es una de las distribuciones más populares para modelar variables aleatorias con soporte no negativo
- Ya que esta distribución tiene colas ligeras, puede usarse para modelar datos en los que no ocurran muchas reclamaciones con valores grandes

## ● Familia de distribuciones Gamma

- La distribución Gamma es una de las distribuciones más populares para modelar variables aleatorias con soporte no negativo
- Ya que esta distribución tiene colas ligeras, puede usarse para modelar datos en los que no ocurran muchas reclamaciones con valores grandes
- Se dice que **X** v.a. tiene distribución Gamma si su función de densidad es

## ● Familia de distribuciones Gamma

- La distribución Gamma es una de las distribuciones más populares para modelar variables aleatorias con soporte no negativo
- Ya que esta distribución tiene colas ligeras, puede usarse para modelar datos en los que no ocurran muchas reclamaciones con valores grandes
- Se dice que **X** v.a. tiene distribución Gamma si su función de densidad es

- $$f(x; \alpha, \theta) = \frac{\theta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\theta x}}{\Gamma(\alpha)}, \quad x \geq 0, \quad \alpha \geq 0, \quad \theta \geq 0$$

## ● Familia de distribuciones Gamma

- La distribución Gamma es una de las distribuciones más populares para modelar variables aleatorias con soporte no negativo
- Ya que esta distribución tiene colas ligeras, puede usarse para modelar datos en los que no ocurran muchas reclamaciones con valores grandes
- Se dice que **X** v.a. tiene distribución Gamma si su función de densidad es
  - $f(x; \alpha, \theta) = \frac{\theta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\theta x}}{\Gamma(\alpha)}$ ,  $x \geq 0, \alpha \geq 0, \theta \geq 0$
  - Con  $\Gamma(\cdot)$  la función Gamma definida como

## • Familia de distribuciones Gamma

- La distribución Gamma es una de las distribuciones más populares para modelar variables aleatorias con soporte no negativo
- Ya que esta distribución tiene colas ligeras, puede usarse para modelar datos en los que no ocurran muchas reclamaciones con valores grandes
- Se dice que **X** v.a. tiene distribución Gamma si su función de densidad es

- $$f(x; \alpha, \theta) = \frac{\theta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\theta x}}{\Gamma(\alpha)}, \quad x \geq 0, \quad \alpha \geq 0, \quad \theta \geq 0$$

- Con  $\Gamma(\cdot)$  la función Gamma definida como

- $$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$

- Las características de la distribución Gamma son

- Las características de la distribución Gamma son

- $\mathbb{E}(X) = \frac{\alpha}{\theta}; \quad \mathbb{V}(X) = \frac{\alpha}{\theta^2}; \quad M_X(t) = \left(\frac{\theta}{\theta - t}\right)^\alpha, \quad t < \theta$

- Las características de la distribución Gamma son

- $\mathbb{E}(X) = \frac{\alpha}{\theta}; \quad \mathbb{V}(X) = \frac{\alpha}{\theta^2}; \quad M_X(t) = \left(\frac{\theta}{\theta - t}\right)^\alpha, \quad t < \theta$
- $\mathbb{E}(X^r) = \frac{\Gamma(\alpha + r)}{\theta^r \Gamma(r)}$

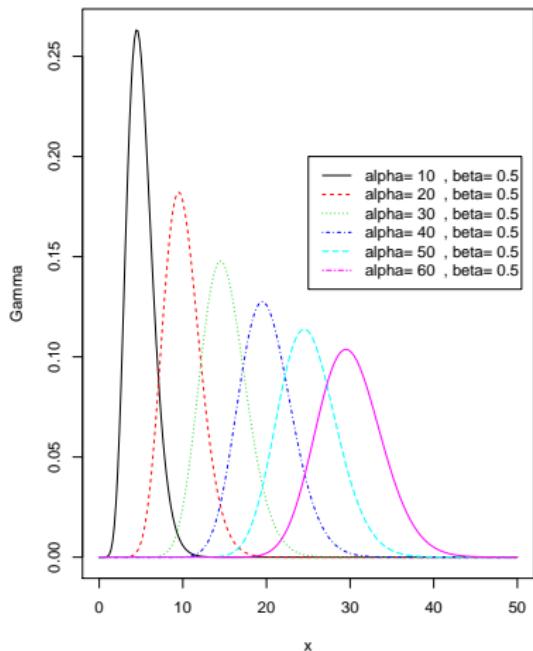
- Las características de la distribución Gamma son

- $\mathbb{E}(X) = \frac{\alpha}{\theta}; \quad \mathbb{V}(X) = \frac{\alpha}{\theta^2}; \quad M_X(t) = \left(\frac{\theta}{\theta - t}\right)^\alpha, \quad t < \theta$
- $\mathbb{E}(X^r) = \frac{\Gamma(\alpha + r)}{\theta^r \Gamma(r)}$
- $\alpha$  es un *parámetro de forma* y  $\theta$  es de escala.

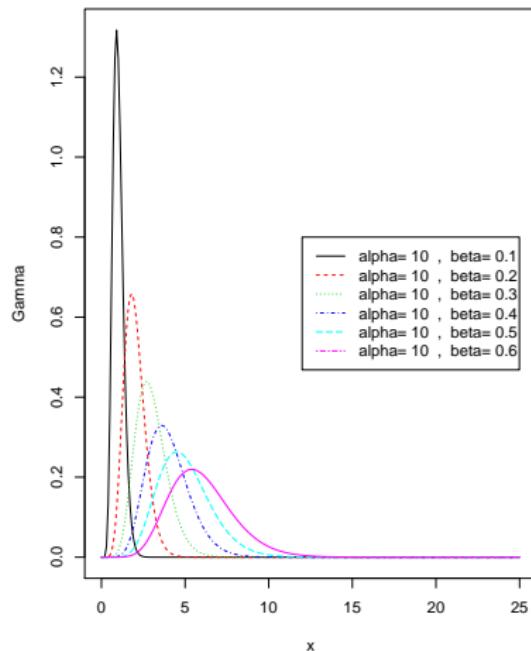
- Las características de la distribución Gamma son

- $\mathbb{E}(X) = \frac{\alpha}{\theta}; \quad \mathbb{V}(X) = \frac{\alpha}{\theta^2}; \quad M_X(t) = \left(\frac{\theta}{\theta - t}\right)^\alpha, \quad t < \theta$
- $\mathbb{E}(X^r) = \frac{\Gamma(\alpha + r)}{\theta^r \Gamma(r)}$
- $\alpha$  es un *parámetro de forma* y  $\theta$  es de escala.
- La distribución exponencial es un caso particular de la Gamma.  
En concreto, es una  $Gamma(1, \theta)$ .

Diversas formas de la distribución Gamma



Diversas formas de la distribución Gamma



- Familia de distribuciones Log-Normal

## ● Familia de distribuciones Log-Normal

- Uno de los modelos más usados para ajustar datos del monto de reclamación de un siniestro, es la distribución  $\log - normal(\mu, \sigma^2)$

## ● Familia de distribuciones Log-Normal

- Uno de los modelos más usados para ajustar datos del monto de reclamación de un siniestro, es la distribución  $\log - normal(\mu, \sigma^2)$
- Esta distribución es asimétrica con cola derecha pesada (más pesada que la exponencial y Gamma, pero no de las más pesadas), lo que permite acumular una mayor densidad de probabilidad en esta cola

## ● Familia de distribuciones Log-Normal

- Uno de los modelos más usados para ajustar datos del monto de reclamación de un siniestro, es la distribución  $\log - normal(\mu, \sigma^2)$
- Esta distribución es asimétrica con cola derecha pesada (más pesada que la exponencial y Gamma, pero no de las más pesadas), lo que permite acumular una mayor densidad de probabilidad en esta cola
- Puede utilizarse para modelar siniestros que generen grandes montos de reclamación con una proporción relativamente alta

## ● Familia de distribuciones Log-Normal

- Uno de los modelos más usados para ajustar datos del monto de reclamación de un siniestro, es la distribución  $\log - normal(\mu, \sigma^2)$
- Esta distribución es asimétrica con cola derecha pesada (más pesada que la exponencial y Gamma, pero no de las más pesadas), lo que permite acumular una mayor densidad de probabilidad en esta cola
- Puede utilizarse para modelar siniestros que generen grandes montos de reclamación con una proporción relativamente alta
- Esta distribución guarda una estrecha relación con la Normal. De hecho, una variable aleatoria se distribuye Log-normal, si el logaritmo natural de ella, se distribuye Normal, es decir

- $\mathbf{X} \sim \log-normal(\mu, \sigma^2)$ , si  $\ln(\mathbf{X}) \sim N(\mu, \sigma^2)$

- $\mathbf{X} \sim \log-normal(\mu, \sigma^2)$ , si  $\ln(\mathbf{X}) \sim N(\mu, \sigma^2)$
- La función de densidad de esta variable aleatoria es

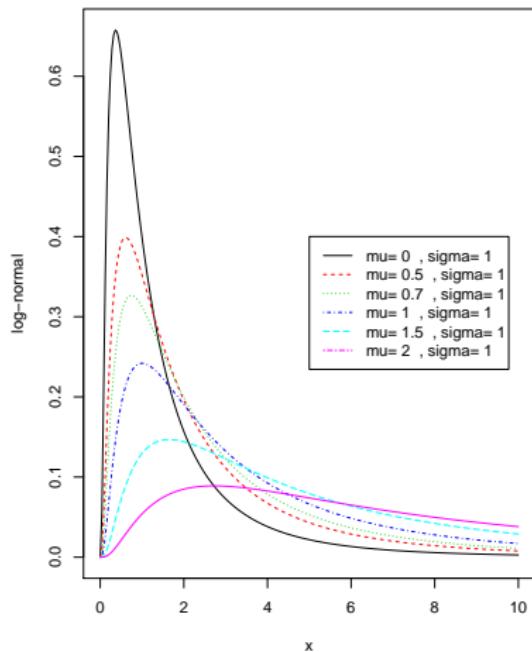
- $\mathbf{X} \sim \log-normal(\mu, \sigma^2)$ , si  $\ln(\mathbf{X}) \sim N(\mu, \sigma^2)$
- La función de densidad de esta variable aleatoria es
- $f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}x} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln(x)-\mu)^2}, x > 0, \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$

- $\mathbf{X} \sim \log-normal(\mu, \sigma^2)$ , si  $\ln(\mathbf{X}) \sim N(\mu, \sigma^2)$
- La función de densidad de esta variable aleatoria es
- $f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}x} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln(x)-\mu)^2}$ ,  $x > 0$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma^2 > 0$
- Algunas características de esta distribución son

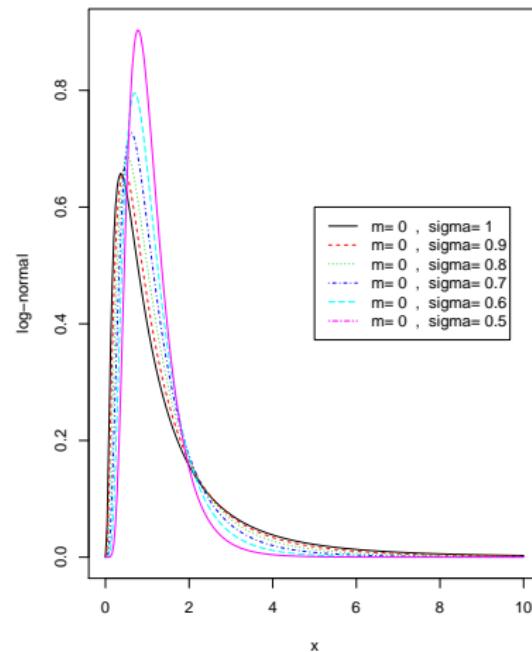
- $\mathbf{X} \sim \log-normal(\mu, \sigma^2)$ , si  $\ln(\mathbf{X}) \sim N(\mu, \sigma^2)$
- La función de densidad de esta variable aleatoria es
- $f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}x} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln(x)-\mu)^2}$ ,  $x > 0$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma^2 > 0$
- Algunas características de esta distribución son
  - $\mathbb{E}(X) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$ ;  $\mathbb{V}(X) = e^{2\mu + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1)$ ;
  - $\mathbb{E}(X^r) = e^{r\mu + \frac{r^2\sigma^2}{2}}$  (momentos de orden  $r=1,2,\dots$ )

- $\mathbf{X} \sim \log-normal(\mu, \sigma^2)$ , si  $\ln(\mathbf{X}) \sim N(\mu, \sigma^2)$
- La función de densidad de esta variable aleatoria es
- $f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}x} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln(x)-\mu)^2}$ ,  $x > 0$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma^2 > 0$
- Algunas características de esta distribución son
  - $\mathbb{E}(X) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$ ;  $\mathbb{V}(X) = e^{2\mu + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1)$ ;  
 $\mathbb{E}(X^r) = e^{r\mu + \frac{r^2\sigma^2}{2}}$  (momentos de orden  $r=1,2,\dots$ )
  - Pese a su relación con la normal, ninguno de los parámetros es de *localización* ni de *escala*.

Diversas formas de la distribución log-normal



Diversas formas de la distribución log-normal



- Familia de distribuciones Weibull

## ● Familia de distribuciones Weibull

- La distribución Weibull puede considerarse como una generalización de la exponencial. En este caso, se incorpora un parámetro de forma, lo que permite mayor flexibilidad sobre la forma que posea la distribución de los datos, y se conserva el parámetro de escala de la exponencial

## ● Familia de distribuciones Weibull

- La distribución Weibull puede considerarse como una generalización de la exponencial. En este caso, se incorpora un parámetro de forma, lo que permite mayor flexibilidad sobre la forma que posea la distribución de los datos, y se conserva el parámetro de escala de la exponencial
- En general, es una distribución con colas más pesadas que la Gamma y la log-normal, pero aún no de las más pesadas, por lo que puede ser un modelo adecuado para los montos grandes de reclamación, que ocurren con una moderada alta probabilidad

## ● Familia de distribuciones Weibull

- La distribución Weibull puede considerarse como una generalización de la exponencial. En este caso, se incorpora un parámetro de forma, lo que permite mayor flexibilidad sobre la forma que posea la distribución de los datos, y se conserva el parámetro de escala de la exponencial
- En general, es una distribución con colas más pesadas que la Gamma y la log-normal, pero aún no de las más pesadas, por lo que puede ser un modelo adecuado para los montos grandes de reclamación, que ocurren con una moderada alta probabilidad
- Se dice que **X** v.a. tiene una distribución  $Weibull(\alpha, \theta)$ , si tiene una función de densidad dada por

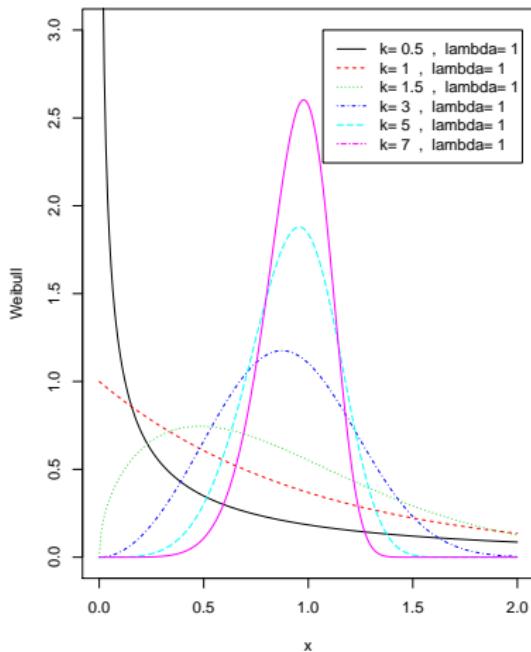
- $f(x) = \frac{\alpha}{\theta} \left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha-1} \exp\left\{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^\alpha\right\}, \quad x > 0, \quad \alpha > 0, \quad \theta > 0$

- $f(x) = \frac{\alpha}{\theta} \left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha-1} \exp\left\{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^\alpha\right\}, \quad x > 0, \quad \alpha > 0, \quad \theta > 0$
- Con  $\alpha$  parámetro de forma y  $\theta$  parámetro de escala. Obsérvese que si  $\alpha = 1$  la Weibull se convierte en una *Exponencial*( $\theta$ )

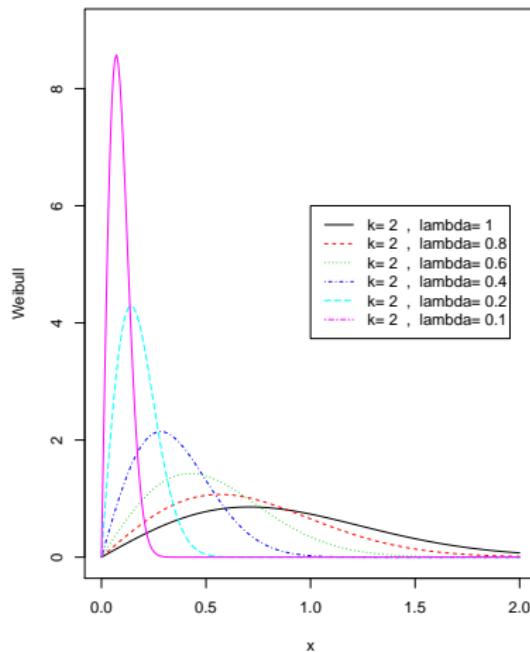
- $f(x) = \frac{\alpha}{\theta} \left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha-1} \exp\left\{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^\alpha\right\}, \quad x > 0, \quad \alpha > 0, \quad \theta > 0$
- Con  $\alpha$  parámetro de forma y  $\theta$  parámetro de escala. Obsérvese que si  $\alpha = 1$  la Weibull se convierte en una  $Exponencial(\theta)$
- Sus características son

- $f(x) = \frac{\alpha}{\theta} \left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha-1} \exp\left\{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^\alpha\right\}, \quad x > 0, \quad \alpha > 0, \quad \theta > 0$
- Con  $\alpha$  parámetro de forma y  $\theta$  parámetro de escala. Obsérvese que si  $\alpha = 1$  la Weibull se convierte en una  $Exponencial(\theta)$
- Sus características son
- $\mathbb{E}(X) = \theta\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right); \quad \mathbb{V}(X) = \theta^2 \left[\Gamma\left(2 + \frac{2}{\alpha}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)\right];$   
 $M_X(t) = \theta^t\Gamma\left(1 + \frac{t}{\alpha}\right)$

Diversas formas de la distribución Weibull



Distribución Weibull con diferentes parámetros de escala



## ● Familia de distribuciones Pareto

## ● Familia de distribuciones Pareto

- La distribución Pareto es una distribución con cola derecha aún más pesada que la Log-normal y la Weibull, por lo que resultará de gran utilidad para modelar siniestros que generen reclamaciones muy grandes con altas frecuencias

## ● Familia de distribuciones Pareto

- La distribución Pareto es una distribución con cola derecha aún más pesada que la Log-normal y la Weibull, por lo que resultará de gran utilidad para modelar siniestros que generen reclamaciones muy grandes con altas frecuencias
- Esta distribución surge al considerar que la probabilidad de que una v.a.,  $X$ , tome un valor superior a un valor determinado,  $x$ , tiene la forma funcional

## • Familia de distribuciones Pareto

- La distribución Pareto es una distribución con cola derecha aún más pesada que la Log-normal y la Weibull, por lo que resultará de gran utilidad para modelar siniestros que generen reclamaciones muy grandes con altas frecuencias
- Esta distribución surge al considerar que la probabilidad de que una v.a.,  $X$ , tome un valor superior a un valor determinado,  $x$ , tiene la forma funcional

- $\mathbb{P}(X > x) = \left(\frac{\theta}{x}\right)^\alpha, \quad x \geq \theta, \quad \alpha > 0, \quad \theta > 0$

## • Familia de distribuciones Pareto

- La distribución Pareto es una distribución con cola derecha aún más pesada que la Log-normal y la Weibull, por lo que resultará de gran utilidad para modelar siniestros que generen reclamaciones muy grandes con altas frecuencias
- Esta distribución surge al considerar que la probabilidad de que una v.a.,  $X$ , tome un valor superior a un valor determinado,  $x$ , tiene la forma funcional

- $\mathbb{P}(X > x) = \left(\frac{\theta}{x}\right)^\alpha, \quad x \geq \theta, \quad \alpha > 0, \quad \theta > 0$

- Entonces, la función de distribución de la Pareto es

## • Familia de distribuciones Pareto

- La distribución Pareto es una distribución con cola derecha aún más pesada que la Log-normal y la Weibull, por lo que resultará de gran utilidad para modelar siniestros que generen reclamaciones muy grandes con altas frecuencias
- Esta distribución surge al considerar que la probabilidad de que una v.a.,  $X$ , tome un valor superior a un valor determinado,  $x$ , tiene la forma funcional

- $\mathbb{P}(X > x) = \left(\frac{\theta}{x}\right)^\alpha, \quad x \geq \theta, \quad \alpha > 0, \quad \theta > 0$

- Entonces, la función de distribución de la Pareto es

- $F(x) = 1 - \mathbb{P}(X > x) = 1 - \left(\frac{\theta}{x}\right)^\alpha$

## • Familia de distribuciones Pareto

- La distribución Pareto es una distribución con cola derecha aún más pesada que la Log-normal y la Weibull, por lo que resultará de gran utilidad para modelar siniestros que generen reclamaciones muy grandes con altas frecuencias
- Esta distribución surge al considerar que la probabilidad de que una v.a.,  $X$ , tome un valor superior a un valor determinado,  $x$ , tiene la forma funcional

- $\mathbb{P}(X > x) = \left(\frac{\theta}{x}\right)^\alpha, \quad x \geq \theta, \quad \alpha > 0, \quad \theta > 0$

- Entonces, la función de distribución de la Pareto es

- $F(x) = 1 - \mathbb{P}(X > x) = 1 - \left(\frac{\theta}{x}\right)^\alpha$

- Con función de densidad dada por

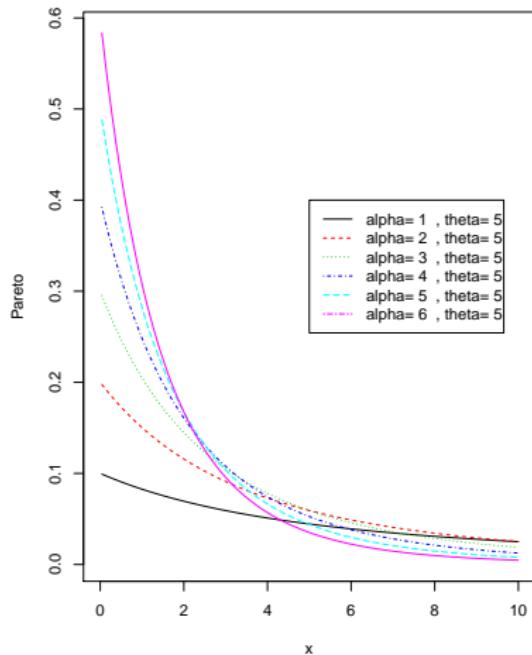
- $f(x; \alpha, \theta) = F'(x) = \frac{\alpha \theta^\alpha}{x^{\alpha+1}}, \quad x \geq \theta, \quad \alpha > 0, \quad \theta > 0$

- $f(x; \alpha, \theta) = F'(x) = \frac{\alpha\theta^\alpha}{x^{\alpha+1}}, \quad x \geq \theta, \quad \alpha > 0, \quad \theta > 0$
- Algunas de sus características son

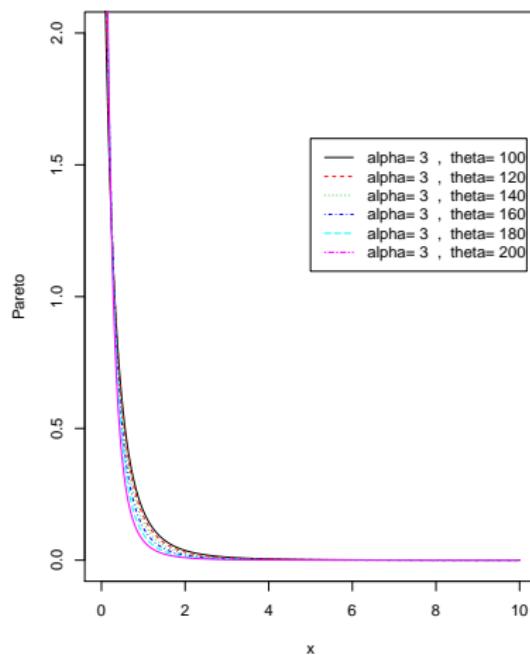
- $f(x; \alpha, \theta) = F'(x) = \frac{\alpha\theta^\alpha}{x^{\alpha+1}}, \quad x \geq \theta, \quad \alpha > 0, \quad \theta > 0$
- Algunas de sus características son
  - $\mathbb{E}(X) = \frac{\alpha\theta}{(\alpha-1)}$ ;  $\mathbb{V}(X) = \frac{\alpha\theta^2}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2}$ ;
  - $\mathbb{E}(X^r) = \frac{\alpha\theta^r}{(\alpha-r)}$ ,  $\alpha > r$ ,  $r = 1, 2, \dots$

- $f(x; \alpha, \theta) = F'(x) = \frac{\alpha\theta^\alpha}{x^{\alpha+1}}, \quad x \geq \theta, \quad \alpha > 0, \quad \theta > 0$
- Algunas de sus características son
  - $\mathbb{E}(X) = \frac{\alpha\theta}{(\alpha-1)}$ ;  $\mathbb{V}(X) = \frac{\alpha\theta^2}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2}$ ;  
 $\mathbb{E}(X^r) = \frac{\alpha\theta^r}{(\alpha-r)}$ ,  $\alpha > r$ ,  $r = 1, 2, \dots$
  - $\alpha$  es un parámetro de forma y  $\theta$  de escala

Diversas formas de la distribución Pareto



Diversas formas de la distribución Pareto



- Familia de distribuciones Pareto de segundo tipo

- **Familia de distribuciones Pareto de segundo tipo**
- La distribución Pareto de *segundo tipo* es simplemente la distribución Pareto de primer tipo trasladada al origen

- **Familia de distribuciones Pareto de segundo tipo**
- La distribución Pareto de *segundo tipo* es simplemente la distribución Pareto de primer tipo trasladada al origen
- Concretamente, si  $\mathbf{X}$  tiene distribución Pareto de primer tipo, entonces  $\mathbf{Y} = \mathbf{X} - \theta$  tiene distribución *Pareto de segundo tipo*.  
Con función de densidad

- **Familia de distribuciones Pareto de segundo tipo**
- La distribución Pareto de *segundo tipo* es simplemente la distribución Pareto de primer tipo trasladada al origen
- Concretamente, si  $\mathbf{X}$  tiene distribución Pareto de primer tipo, entonces  $\mathbf{Y} = \mathbf{X} - \theta$  tiene distribución *Pareto de segundo tipo*.  
Con función de densidad

- $$f(x; \alpha, \theta) = \frac{\alpha \theta^\alpha}{(x + \theta)^{\alpha+1}}, \quad x \geq 0, \quad \alpha > 0, \quad \theta > 0$$

- **Familia de distribuciones Pareto de segundo tipo**
- La distribución Pareto de *segundo tipo* es simplemente la distribución Pareto de primer tipo trasladada al origen
- Concretamente, si  $\mathbf{X}$  tiene distribución Pareto de primer tipo, entonces  $\mathbf{Y} = \mathbf{X} - \theta$  tiene distribución *Pareto de segundo tipo*.

Con función de densidad

- $$f(x; \alpha, \theta) = \frac{\alpha \theta^\alpha}{(x + \theta)^{\alpha+1}}, \quad x \geq 0, \quad \alpha > 0, \quad \theta > 0$$
- Características de esta distribución

## • Familia de distribuciones Pareto de segundo tipo

- La distribución Pareto de *segundo tipo* es simplemente la distribución Pareto de primer tipo trasladada al origen
- Concretamente, si  $\mathbf{X}$  tiene distribución Pareto de primer tipo, entonces  $\mathbf{Y} = \mathbf{X} - \theta$  tiene distribución *Pareto de segundo tipo*.

Con función de densidad

- $f(x; \alpha, \theta) = \frac{\alpha \theta^\alpha}{(x + \theta)^{\alpha+1}}, \quad x \geq 0, \quad \alpha > 0, \quad \theta > 0$

- Características de esta distribución

- $\mathbb{E}(X) = \frac{\theta}{(\alpha - 1)}; \quad \text{Var}(X) = \frac{\alpha \theta^2}{(\alpha - 2)(\alpha - 1)^2};$

$$\mathbb{E}(X^r) = \frac{\theta^r \Gamma(r+1) \Gamma(\alpha - r)}{\Gamma(\alpha)}, \quad -1 < r < \alpha$$

$$\mathbb{E}(X^r) = \frac{\theta^r r!}{(\alpha - 1)(\alpha - 2) \cdots (\alpha - r)} \quad \text{si } \alpha \text{ es entero}$$

## • Familia de distribuciones Pareto de segundo tipo

- La distribución Pareto de *segundo tipo* es simplemente la distribución Pareto de primer tipo trasladada al origen
- Concretamente, si  $\mathbf{X}$  tiene distribución Pareto de primer tipo, entonces  $\mathbf{Y} = \mathbf{X} - \theta$  tiene distribución *Pareto de segundo tipo*.

Con función de densidad

- $f(x; \alpha, \theta) = \frac{\alpha \theta^\alpha}{(x + \theta)^{\alpha+1}}, \quad x \geq 0, \quad \alpha > 0, \quad \theta > 0$

- Características de esta distribución

- $\mathbb{E}(X) = \frac{\theta}{(\alpha - 1)}; \quad \text{Var}(X) = \frac{\alpha \theta^2}{(\alpha - 2)(\alpha - 1)^2};$

$$\mathbb{E}(X^r) = \frac{\theta^r \Gamma(r+1) \Gamma(\alpha - r)}{\Gamma(\alpha)}, \quad -1 < r < \alpha$$

$$\mathbb{E}(X^r) = \frac{\theta^r r!}{(\alpha - 1)(\alpha - 2) \cdots (\alpha - r)} \quad \text{si } \alpha \text{ es entero}$$

- Con  $\Gamma(\cdot)$  la función Gamma, ya definida anteriormente

## • Familia de distribuciones Burr

## ● Familia de distribuciones Burr

- La experiencia en pagos de montos reclamación, ha mostrado que la Pareto es apropiada para modelarlos, particularmente, cuando ocurren reclamaciones excepcionalmente grandes

## ● Familia de distribuciones Burr

- La experiencia en pagos de montos reclamación, ha mostrado que la Pareto es apropiada para modelarlos, particularmente, cuando ocurren reclamaciones excepcionalmente grandes
- No obstante, algunas veces es necesario tener distribuciones para colas pesadas, que sean más flexibles que la Pareto, por ejemplo, que consideren una función de densidad no monótona

## ● Familia de distribuciones Burr

- La experiencia en pagos de montos reclamación, ha mostrado que la Pareto es apropiada para modelarlos, particularmente, cuando ocurren reclamaciones excepcionalmente grandes
- No obstante, algunas veces es necesario tener distribuciones para colas pesadas, que sean más flexibles que la Pareto, por ejemplo, que consideren una función de densidad no monótona
- Tal flexibilidad la proporciona la *distribución Burr* que tiene un parámetro de forma,  $\beta$ , adicional

## ● Familia de distribuciones Burr

- La experiencia en pagos de montos reclamación, ha mostrado que la Pareto es apropiada para modelarlos, particularmente, cuando ocurren reclamaciones excepcionalmente grandes
- No obstante, algunas veces es necesario tener distribuciones para colas pesadas, que sean más flexibles que la Pareto, por ejemplo, que consideren una función de densidad no monótona
- Tal flexibilidad la proporciona la *distribución Burr* que tiene un parámetro de forma,  $\beta$ , adicional
- En concreto, si  $\mathbf{X}$  es una v.a. con distribución Pareto de segundo tipo, entonces

## • Familia de distribuciones Burr

- La experiencia en pagos de montos reclamación, ha mostrado que la Pareto es apropiada para modelarlos, particularmente, cuando ocurren reclamaciones excepcionalmente grandes
- No obstante, algunas veces es necesario tener distribuciones para colas pesadas, que sean más flexibles que la Pareto, por ejemplo, que consideren una función de densidad no monótona
- Tal flexibilidad la proporciona la *distribución Burr* que tiene un parámetro de forma,  $\beta$ , adicional
- En concreto, si  $\mathbf{X}$  es una v.a. con distribución Pareto de segundo tipo, entonces
- 

$$\mathbf{X}^{1/\beta} \sim Burr(\theta, \alpha, \beta)$$

- Cuya función de densidad está dada por

- Cuya función de densidad está dada por

- 

$$f(x) = \frac{\beta\alpha\theta^\alpha x^{\beta-1}}{(x^\beta + \theta)^{\alpha+1}} \quad x \geq 0, \quad \theta > 0, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0$$

- Cuya función de densidad está dada por

- 

$$f(x) = \frac{\beta\alpha\theta^\alpha x^{\beta-1}}{(x^\beta + \theta)^{\alpha+1}} \quad x \geq 0, \quad \theta > 0, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0$$

- El momento de orden  $r$  de esta distribución es

- Cuya función de densidad está dada por

- 

$$f(x) = \frac{\beta\alpha\theta^\alpha x^{\beta-1}}{(x^\beta + \theta)^{\alpha+1}} \quad x \geq 0, \quad \theta > 0, \alpha > 0, \beta > 0$$

- El momento de orden  $r$  de esta distribución es

- 

$$\mathbb{E}(x^r) = \frac{\theta^{r/\beta} \Gamma(\alpha - r/\beta) \Gamma(r/\beta + 1)}{\Gamma(\alpha)}, \text{ que existe si } r < \alpha\beta$$

- Cuya función de densidad está dada por



$$f(x) = \frac{\beta\alpha\theta^\alpha x^{\beta-1}}{(x^\beta + \theta)^{\alpha+1}} \quad x \geq 0, \quad \theta > 0, \alpha > 0, \beta > 0$$

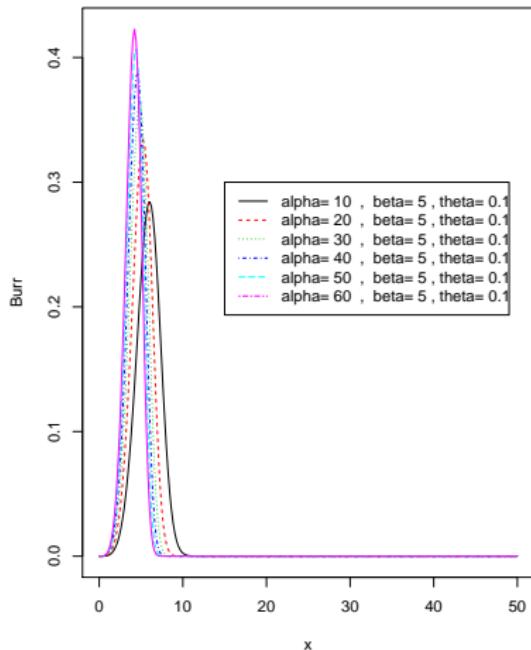
- El momento de orden  $r$  de esta distribución es



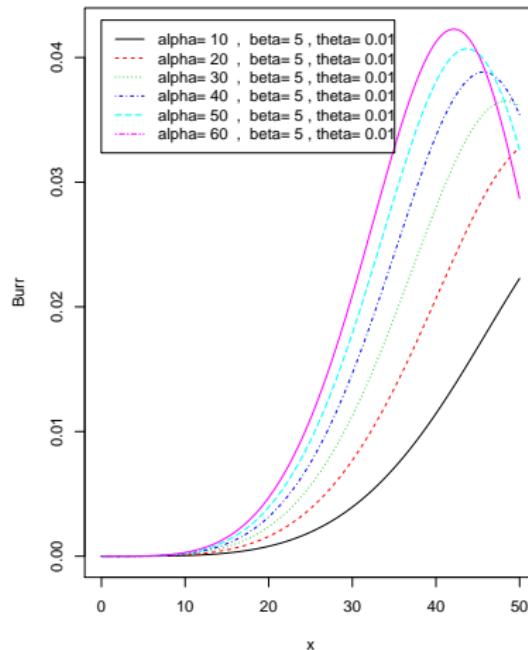
$$\mathbb{E}(x^r) = \frac{\theta^{r/\beta} \Gamma(\alpha - r/\beta) \Gamma(r/\beta + 1)}{\Gamma(\alpha)}, \text{ que existe si } r < \alpha\beta$$

- $\alpha$  y  $\beta$  son parámetros de forma y  $\theta$  de escala, respectivamente

Diversas formas de la distribución Burr



Diversas formas de la distribución Burr



- Estas son algunas distribuciones de uso común para modelar los montos que genera la realización de un riesgo

- Estas son algunas distribuciones de uso común para modelar los montos que genera la realización de un riesgo
- Por supuesto, no están contemplados todos los modelos, son solamente los más utilizados para este objetivo

- Estas son algunas distribuciones de uso común para modelar los montos que genera la realización de un riesgo
- Por supuesto, no están contemplados todos los modelos, son solamente los más utilizados para este objetivo
- Por ejemplo, no hemos introducido distribuciones como: Loglogística, Paralogística, Pareto generalizada, Gamma inversa, Weibull inversa, Beta, Beta generalizada, Exponencial inversa, etc.

- Estas son algunas distribuciones de uso común para modelar los montos que genera la realización de un riesgo
- Por supuesto, no están contemplados todos los modelos, son solamente los más utilizados para este objetivo
- Por ejemplo, no hemos introducido distribuciones como: Loglogística, Paralogística, Pareto generalizada, Gamma inversa, Weibull inversa, Beta, Beta generalizada, Exponencial inversa, etc.
- Ninguno de estos modelos corresponde a los típicos de valores extremos como la Gumbel o la Fréchet, por ejemplo

- Estas son algunas distribuciones de uso común para modelar los montos que genera la realización de un riesgo
- Por supuesto, no están contemplados todos los modelos, son solamente los más utilizados para este objetivo
- Por ejemplo, no hemos introducido distribuciones como: Loglogística, Paralogística, Pareto generalizada, Gamma inversa, Weibull inversa, Beta, Beta generalizada, Exponencial inversa, etc.
- Ninguno de estos modelos corresponde a los típicos de valores extremos como la Gumbel o la Fréchet, por ejemplo
- Dada esta lista (no exhaustiva) de posibles modelos, es claro que la elección del mismo para modelar una situación particular, no será tarea fácil, en general

## ● Ajuste de funciones de probabilidad

- **Ajuste de funciones de probabilidad**
- Ahora veamos cómo se hace un ajuste de estos modelos (distribuciones) en una situación donde se tienen datos reales.

- **Ajuste de funciones de probabilidad**
- Ahora veamos cómo se hace un ajuste de estos modelos (distribuciones) en una situación donde se tienen datos reales.
- Cuando se dispone de un conjunto de observaciones pertenecientes a una determinada variable aleatoria con distribución desconocida, lo primero que conviene hacer es tratar de identificar alguna distribución teórica (modelo) que pudiera ajustar bien dichas observaciones

## ● Ajuste de funciones de probabilidad

- Ahora veamos cómo se hace un ajuste de estos modelos (distribuciones) en una situación donde se tienen datos reales.
- Cuando se dispone de un conjunto de observaciones pertenecientes a una determinada variable aleatoria con distribución desconocida, lo primero que conviene hacer es tratar de identificar alguna distribución teórica (modelo) que pudiera ajustar bien dichas observaciones
- En otras palabras, se trataría de comprobar si estos datos se distribuyen de acuerdo a alguna distribución conocida (gamma, Pareto, log-normal , binomial, Poisson, etc.), pues ello facilitaría la realización de inferencias sobre la población.  
Este proceso se realiza mediante tres etapas básicas

- Reconocimiento de la familia de modelos (densidades) subyacente a los datos

- Reconocimiento de la familia de modelos (densidades) subyacente a los datos
- Estimación de los parámetros que determinan la densidad particular de esta familia que ajusta a los datos recabados

- Reconocimiento de la familia de modelos (densidades) subyacente a los datos
- Estimación de los parámetros que determinan la densidad particular de esta familia que ajusta a los datos recabados
- Verificación de lo adecuado del ajuste del modelo a los datos

## ● Reconocimiento del modelo

## ● Reconocimiento del modelo

- Esta primer etapa combina el conocimiento previo que el usuario posea sobre los datos, con las diferentes técnicas de estadística descriptiva que puedan determinar, por ejemplo

## ● Reconocimiento del modelo

- Esta primer etapa combina el conocimiento previo que el usuario posea sobre los datos, con las diferentes técnicas de estadística descriptiva que puedan determinar, por ejemplo
  - Forma de la densidad subyacente

## ● Reconocimiento del modelo

- Esta primer etapa combina el conocimiento previo que el usuario posea sobre los datos, con las diferentes técnicas de estadística descriptiva que puedan determinar, por ejemplo
  - Forma de la densidad subyacente
  - Simetría de la densidad

## ● Reconocimiento del modelo

- Esta primer etapa combina el conocimiento previo que el usuario posea sobre los datos, con las diferentes técnicas de estadística descriptiva que puedan determinar, por ejemplo
  - Forma de la densidad subyacente
  - Simetría de la densidad
  - Unimodalidad o multimodalidad de la densidad

## ● Reconocimiento del modelo

- Esta primer etapa combina el conocimiento previo que el usuario posea sobre los datos, con las diferentes técnicas de estadística descriptiva que puedan determinar, por ejemplo
  - Forma de la densidad subyacente
  - Simetría de la densidad
  - Unimodalidad o multimodalidad de la densidad
  - Forma de la función de distribución

## ● Reconocimiento del modelo

- Esta primer etapa combina el conocimiento previo que el usuario posea sobre los datos, con las diferentes técnicas de estadística descriptiva que puedan determinar, por ejemplo
  - Forma de la densidad subyacente
  - Simetría de la densidad
  - Unimodalidad o multimodalidad de la densidad
  - Forma de la función de distribución
- En la mayoría de los casos se tienen algún conocimiento sobre el modelo que pudo generar la información, ya sea por experiencia empírica o por la literatura del área particular de aplicación, un buen principio es tomar en cuenta esto y complementarlo con las descripciones gráficas y numéricas que proporciona el análisis descriptivo

- Las compañías de seguros, generalmente contemplan la recabación de datos relacionados con los montos de reclamación de lo siniestros (*severidad*) y del número de estos siniestros (*frecuencia*) que implican la selección de modelos para variables continuas, para los primeros, y modelos para variables discretas en los segundos

- Las compañías de seguros, generalmente contemplan la recabación de datos relacionados con los montos de reclamación de lo siniestros (*severidad*) y del número de estos siniestros (*frecuencia*) que implican la selección de modelos para variables continuas, para los primeros, y modelos para variables discretas en los segundos
- Las herramientas descriptivas permiten tener diversas medidas asociadas a las características de la distribución subyacente a cualquiera de estos tipos de datos

- Las compañías de seguros, generalmente contemplan la recabación de datos relacionados con los montos de reclamación de lo siniestros (*severidad*) y del número de estos siniestros (*frecuencia*) que implican la selección de modelos para variables continuas, para los primeros, y modelos para variables discretas en los segundos
- Las herramientas descriptivas permiten tener diversas medidas asociadas a las características de la distribución subyacente a cualquiera de estos tipos de datos
- **Métodos numéricos**

- Las compañías de seguros, generalmente contemplan la recabación de datos relacionados con los montos de reclamación de lo siniestros (*severidad*) y del número de estos siniestros (*frecuencia*) que implican la selección de modelos para variables continuas, para los primeros, y modelos para variables discretas en los segundos
- Las herramientas descriptivas permiten tener diversas medidas asociadas a las características de la distribución subyacente a cualquiera de estos tipos de datos
- **Métodos numéricos**
  - Medidas de tendencia central (Media, mediana, moda)

- Las compañías de seguros, generalmente contemplan la recabación de datos relacionados con los montos de reclamación de lo siniestros (*severidad*) y del número de estos siniestros (*frecuencia*) que implican la selección de modelos para variables continuas, para los primeros, y modelos para variables discretas en los segundos
- Las herramientas descriptivas permiten tener diversas medidas asociadas a las características de la distribución subyacente a cualquiera de estos tipos de datos
- **Métodos numéricos**
  - Medidas de tendencia central (Media, mediana, moda)
  - Medidas de dispersión (Varianza, desviación estándar, rango, rango intercuartílico, coeficiente de variación)

- Las compañías de seguros, generalmente contemplan la recabación de datos relacionados con los montos de reclamación de lo siniestros (*severidad*) y del número de estos siniestros (*frecuencia*) que implican la selección de modelos para variables continuas, para los primeros, y modelos para variables discretas en los segundos
- Las herramientas descriptivas permiten tener diversas medidas asociadas a las características de la distribución subyacente a cualquiera de estos tipos de datos
- **Métodos numéricos**
  - Medidas de tendencia central (Media, mediana, moda)
  - Medidas de dispersión (Varianza, desviación estándar, rango, rango intercuartílico, coeficiente de variación)
  - Medidas de forma (sesgo, curtosis)

- Métodos gráficos

- Métodos gráficos

- Histogramas

- **Métodos gráficos**

- Histogramas
- Diagramas de tallo y hoja

## ● Métodos gráficos

- Histogramas
- Diagramas de tallo y hoja
- Box plot

## • Métodos gráficos

- Histogramas
- Diagramas de tallo y hoja
- Box plot
- Curvas suavizadas de densidad (densidades tipo kernel)

## ● Métodos gráficos

- Histogramas
- Diagramas de tallo y hoja
- Box plot
- Curvas suavizadas de densidad (densidades tipo kernel)
- Curva de la función de distribución empírica

## ● Métodos gráficos

- Histogramas
- Diagramas de tallo y hoja
- Box plot
- Curvas suavizadas de densidad (densidades tipo kernel)
- Curva de la función de distribución empírica
- Gráficas de probabilidad

- **Estimación de los parámetros**

- **Estimación de los parámetros**

- Una vez que se ha reconocido la familia a la que pertenece el modelo que pueda ajustar a los datos, el siguiente paso es determinar concretamente cuál de los modelos de esta familia es el que se ajusta a nuestra información. Es decir, necesitamos estimar los parámetros de este modelo particular

- **Estimación de los parámetros**

- Una vez que se ha reconocido la familia a la que pertenece el modelo que pueda ajustar a los datos, el siguiente paso es determinar concretamente cuál de los modelos de esta familia es el que se ajusta a nuestra información. Es decir, necesitamos estimar los parámetros de este modelo particular

- **Métodos de estimación**

- **Estimación de los parámetros**

- Una vez que se ha reconocido la familia a la que pertenece el modelo que pueda ajustar a los datos, el siguiente paso es determinar concretamente cuál de los modelos de esta familia es el que se ajusta a nuestra información. Es decir, necesitamos estimar los parámetros de este modelo particular

- **Métodos de estimación**

- Aunque existen diversos métodos para estimar los parámetros de una distribución, los más usuales son

- **Método de momentos.** (Karl Pearson ( $\approx 1900$ ))

- **Método de momentos.** (Karl Pearson ( $\approx 1900$ ))
- Supongamos que observamos los valores de una muestra aleatoria  $x_1, \dots, x_n$  de una distribución  $F(x|\theta)$ , donde  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p)$  es un vector de  $p$  parámetros.

- **Método de momentos.** (Karl Pearson ( $\approx 1900$ ))
- Supongamos que observamos los valores de una muestra aleatoria  $x_1, \dots, x_n$  de una distribución  $F(x|\theta)$ , donde  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p)$  es un vector de  $p$  parámetros.
- Denotemos por  $\mu_k(\theta) = \mathbb{E}(X^k|\theta)$ , el k-ésimo momento poblacional

- **Método de momentos.** (Karl Pearson ( $\approx 1900$ ))
- Supongamos que observamos los valores de una muestra aleatoria  $x_1, \dots, x_n$  de una distribución  $F(x|\theta)$ , donde  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p)$  es un vector de  $p$  parámetros.
- Denotemos por  $\mu_k(\theta) = \mathbb{E}(X^k|\theta)$ , el k-ésimo momento poblacional



$$\mu_k(\theta) = \mathbb{E}(X^k|\theta) = \int x^k f(x) dx$$

- **Método de momentos.** (Karl Pearson ( $\approx 1900$ ))
- Supongamos que observamos los valores de una muestra aleatoria  $x_1, \dots, x_n$  de una distribución  $F(x|\theta)$ , donde  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p)$  es un vector de  $p$  parámetros.
- Denotemos por  $\mu_k(\theta) = \mathbb{E}(X^k|\theta)$ , el k-ésimo momento poblacional



$$\mu_k(\theta) = \mathbb{E}(X^k|\theta) = \int x^k f(x) dx$$

- Y por

- **Método de momentos.** (Karl Pearson ( $\approx 1900$ ))
- Supongamos que observamos los valores de una muestra aleatoria  $x_1, \dots, x_n$  de una distribución  $F(x|\theta)$ , donde  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p)$  es un vector de  $p$  parámetros.
- Denotemos por  $\mu_k(\theta) = \mathbb{E}(X^k|\theta)$ , el k-ésimo momento poblacional



$$\mu_k(\theta) = \mathbb{E}(X^k|\theta) = \int x^k f(x) dx$$

- Y por



$$M_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^k$$

- **Método de momentos.** (Karl Pearson ( $\approx 1900$ ))
- Supongamos que observamos los valores de una muestra aleatoria  $x_1, \dots, x_n$  de una distribución  $F(x|\theta)$ , donde  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p)$  es un vector de  $p$  parámetros.
- Denotemos por  $\mu_k(\theta) = \mathbb{E}(X^k|\theta)$ , el k-ésimo momento poblacional



$$\mu_k(\theta) = \mathbb{E}(X^k|\theta) = \int x^k f(x) dx$$

- Y por



$$M_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^k$$

- El correspondiente k-ésimo momento muestral

- El método de momentos es muy simple y consiste en igualar los primeros  $p$  momentos poblacionales a sus correspondientes  $p$  momentos muestrales, y resolver el sistema de ecuaciones simultáneas que resulta. Específicamente

- El método de momentos es muy simple y consiste en igualar los primeros  $p$  momentos poblacionales a sus correspondientes  $p$  momentos muestrales, y resolver el sistema de ecuaciones simultáneas que resulta. Específicamente



$$\mu_k(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^k, \quad k = 1, 2, \dots, p$$

- El método de momentos es muy simple y consiste en igualar los primeros  $p$  momentos poblacionales a sus correspondientes  $p$  momentos muestrales, y resolver el sistema de ecuaciones simultáneas que resulta. Específicamente
- $$\mu_k(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^k, \quad k = 1, 2, \dots, p$$
- Las soluciones de este sistema son los estimadores
$$\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_p)$$

- El método de momentos es muy simple y consiste en igualar los primeros  $p$  momentos poblacionales a sus correspondientes  $p$  momentos muestrales, y resolver el sistema de ecuaciones simultáneas que resulta. Específicamente

- 

$$\mu_k(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^k, \quad k = 1, 2, \dots, p$$

- Las soluciones de este sistema son los estimadores  $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_p)$
- En las distribuciones usuales el número de parámetros a estimar,  $p$ , generalmente es pequeño 1, 2 ó 3

- La forma concreta de las ecuaciones sería

- La forma concreta de las ecuaciones sería



$$\mu_1(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p) = M_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}$$

$$\mu_2(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p) = M_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2$$

⋮

$$\mu_p(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p) = M_p = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^p$$

- La forma concreta de las ecuaciones sería

- 

$$\mu_1(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p) = M_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}$$

$$\mu_2(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p) = M_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2$$

$$\vdots$$

$$\mu_p(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p) = M_p = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^p$$

- Como tenemos  $p$  ecuaciones con  $p$  incógnitas, entonces el sistema tiene solución única. Llamaremos  $\hat{\theta}_i$  a la solución de la  $i$ -ésima ecuación

- **Máxima verosimilitud**

- **Máxima verosimilitud**

- Este es, probablemente, el método más común de estimar un parámetro.

## ● Máxima verosimilitud

- Este es, probablemente, el método más común de estimar un parámetro.
- Para implementarlo es necesario definir primero la *verosimilitud*, que no es más que la distribución conjunta de la muestra

## ● Máxima verosimilitud

- Este es, probablemente, el método más común de estimar un parámetro.
- Para implementarlo es necesario definir primero la *verosimilitud*, que no es más que la distribución conjunta de la muestra
- Si los datos son continuos, esta es propiamente una función de distribución conjunta, y si son discretos, es una función conjunta de probabilidad

## ● Máxima verosimilitud

- Este es, probablemente, el método más común de estimar un parámetro.
- Para implementarlo es necesario definir primero la *verosimilitud*, que no es más que la distribución conjunta de la muestra
- Si los datos son continuos, esta es propiamente una función de distribución conjunta, y si son discretos, es una función conjunta de probabilidad
- Una vez determinada la verosimilitud, se procede a maximizarla con respecto a los parámetros de interés

## ● Máxima verosimilitud

- Este es, probablemente, el método más común de estimar un parámetro.
- Para implementarlo es necesario definir primero la *verosimilitud*, que no es más que la distribución conjunta de la muestra
- Si los datos son continuos, esta es propiamente una función de distribución conjunta, y si son discretos, es una función conjunta de probabilidad
- Una vez determinada la verosimilitud, se procede a maximizarla con respecto a los parámetros de interés
- Los valores de los parámetros que la maximizan son los *estimadores máximo verosímiles*

- Debido al hecho común de que las observaciones se suponen *independientes e idénticamente distribuidas* (i.i.d.), la forma de la verosimilitud es

- Debido al hecho común de que las observaciones se suponen *independientes e idénticamente distribuidas* (i.i.d.), la forma de la verosimilitud es



$$L(\theta, \underline{X}) = \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta)$$

- Debido al hecho común de que las observaciones se suponen *independientes e idénticamente distribuidas* (i.i.d.), la forma de la verosimilitud es



$$L(\theta, \underline{X}) = \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta)$$

- Generalmente no se maximiza la verosimilitud, sino el logaritmo de ésta, conocida como *log-verosimilitud*

- Debido al hecho común de que las observaciones se suponen *independientes e idénticamente distribuidas* (i.i.d.), la forma de la verosimilitud es



$$L(\theta, \underline{X}) = \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta)$$

- Generalmente no se maximiza la verosimilitud, sino el logaritmo de ésta, conocida como *log-verosimilitud*



$$\ell(\theta, \underline{X}) = \log [L(\theta, \underline{X})] = \sum_{i=1}^n \log f(x_i|\theta)$$

## ● Observaciones

## ● Observaciones

- El punto donde alcanza su máximo la verosimilitud, es el mismo en el que lo alcanza la log-verosimilitud, porque el logaritmo es una función monótona creciente

## ● Observaciones

- El punto donde alcanza su máximo la verosimilitud, es el mismo en el que lo alcanza la log-verosimilitud, porque el logaritmo es una función monótona creciente
- Los estimadores máximo verosímiles son los valores de  $\theta$  que *hacen más probable la observación de esos datos*, o que *maximizan la probabilidad de haber observado esos datos*

## ● Observaciones

- El punto donde alcanza su máximo la verosimilitud, es el mismo en el que lo alcanza la log-verosimilitud, porque el logaritmo es una función monótona creciente
- Los estimadores máximo verosímiles son los valores de  $\theta$  que *hacen más probable la observación de esos datos*, o que *maximizan la probabilidad de haber observado esos datos*
- Los estimadores máximo verosímiles tiene varias de las propiedades deseables de un buen estimador (insesgamiento, consistencia, eficiencia), aunque algunas de ellas sólo las alcanzan de forma asintótica (*n grande*)

## ● Observaciones

- El punto donde alcanza su máximo la verosimilitud, es el mismo en el que lo alcanza la log-verosimilitud, porque el logaritmo es una función monótona creciente
- Los estimadores máximo verosímiles son los valores de  $\theta$  que *hacen más probable la observación de esos datos*, o que *maximizan la probabilidad de haber observado esos datos*
- Los estimadores máximo verosímiles tiene varias de las propiedades deseables de un buen estimador (insesgamiento, consistencia, eficiencia), aunque algunas de ellas sólo las alcanzan de forma asintótica ( $n$  grande)
- Una de las características más importantes de este estimador es que tiene una distribución asintótica normal

## ● Observaciones

- El punto donde alcanza su máximo la verosimilitud, es el mismo en el que lo alcanza la log-verosimilitud, porque el logaritmo es una función monótona creciente
- Los estimadores máximo verosímiles son los valores de  $\theta$  que *hacen más probable la observación de esos datos*, o que *maximizan la probabilidad de haber observado esos datos*
- Los estimadores máximo verosímiles tiene varias de las propiedades deseables de un buen estimador (insesgamiento, consistencia, eficiencia), aunque algunas de ellas sólo las alcanzan de forma asintótica (*n grande*)
- Una de las características más importantes de este estimador es que tiene una distribución asintótica normal
- 

$$\hat{\theta}_{MV} \stackrel{d}{\sim} N(\theta, \text{var}(\hat{\theta}_{MV}))$$

- Continúa observaciones...

- Continúa observaciones...

- Este hecho es importantísimo para hacer inferencias sobre nuestros parámetros

- Continúa observaciones...

- Este hecho es importantísimo para hacer inferencias sobre nuestros parámetros
- Método de estimación de parámetros a través de la igualación de percentiles (percentil matching estimate)

- **Continúa observaciones...**

- Este hecho es importantísimo para hacer inferencias sobre nuestros parámetros
- **Método de estimación de parámetros a través de la igualación de percentiles (percentil matching estimate)**
- Un método de uso común en teoría de riesgos para estimar los parámetros de un modelo, es el de igualar los percentiles estimados con los datos, a los percentiles teóricos obtenidos del modelo subyacente

- **Continúa observaciones...**

- Este hecho es importantísimo para hacer inferencias sobre nuestros parámetros
- **Método de estimación de parámetros a través de la igualación de percentiles (percentil matching estimate)**
- Un método de uso común en teoría de riesgos para estimar los parámetros de un modelo, es el de igualar los percentiles estimados con los datos, a los percentiles teóricos obtenidos del modelo subyacente
- En concreto, el método trabaja de la siguiente forma

- **Continúa observaciones...**

- Este hecho es importantísimo para hacer inferencias sobre nuestros parámetros
- **Método de estimación de parámetros a través de la igualación de percentiles (percentil matching estimate)**
- Un método de uso común en teoría de riesgos para estimar los parámetros de un modelo, es el de igualar los percentiles estimados con los datos, a los percentiles teóricos obtenidos del modelo subyacente
- En concreto, el método trabaja de la siguiente forma
- Denotemos por  $\pi_q(\theta)$  el  $100 \times q$  percentil de la distribución subyacente a los datos, que en el caso de una distribución continua, es la solución a



$$F(\pi_q(\theta)|\theta) = q$$



$$F(\pi_q(\theta)|\theta) = q$$

- El estimador de  $\theta$  por igualación de percentiles es la solución a las  $p$  ecuaciones



$$F(\pi_q(\theta)|\theta) = q$$

- El estimador de  $\theta$  por igualación de percentiles es la solución a las  $p$  ecuaciones



$$\pi_{qk}(\hat{\theta}) = \hat{\pi}_{qk}, \quad k = 1, 2, \dots, p$$



$$F(\pi_q(\theta)|\theta) = q$$

- El estimador de  $\theta$  por igualación de percentiles es la solución a las  $p$  ecuaciones



$$\pi_{qk}(\hat{\theta}) = \hat{\pi}_{qk}, \quad k = 1, 2, \dots, p$$

- Donde las  $qk$ 's son  $p$  percentiles elegidos de manera arbitraria

## ● Pruebas de bondad de ajuste

- **Pruebas de bondad de ajuste**

- Los procedimientos para probar qué tan bien se ajusta un modelo a un conjunto de datos, reciben el nombre genérico de *pruebas bondad de ajuste*

- **Pruebas de bondad de ajuste**

- Los procedimientos para probar qué tan bien se ajusta un modelo a un conjunto de datos, reciben el nombre genérico de *pruebas bondad de ajuste*
- Como mencionamos líneas arriba, en la determinación de un modelo paramétrico, es necesario asignar una distribución para los datos de severidad, de frecuencia o ambos

## ● Pruebas de bondad de ajuste

- Los procedimientos para probar qué tan bien se ajusta un modelo a un conjunto de datos, reciben el nombre genérico de *pruebas bondad de ajuste*
- Como mencionamos líneas arriba, en la determinación de un modelo paramétrico, es necesario asignar una distribución para los datos de severidad, de frecuencia o ambos
- Para distribuciones asociadas a la frecuencia de reclamaciones, existen algunas guías que pueden sugerir el modelo en una situación particular, como el hecho que una distribución Poisson posea media y varianza iguales, que puede comprobarse calculando las correspondientes versiones muestrales de estos parámetros

- Si, como ocurre frecuentemente, la varianza es mayor a la media, entonces tendríamos evidencia empírica para suponer un modelo binomial negativo

- Si, como ocurre frecuentemente, la varianza es mayor a la media, entonces tendríamos evidencia empírica para suponer un modelo binomial negativo
- No obstante esto, no existen de manera general este tipo de indicaciones que sugieran qué distribución elegir cuando tenemos datos de severidad

- Si, como ocurre frecuentemente, la varianza es mayor a la media, entonces tendríamos evidencia empírica para suponer un modelo binomial negativo
- No obstante esto, no existen de manera general este tipo de indicaciones que sugieran qué distribución elegir cuando tenemos datos de severidad
- Por esta razón, es necesario recurrir a procesos generales como las pruebas de bondad de ajuste, que puedan auxiliarnos en esta importante tarea

- **Planteamiento general de una prueba de bondad de ajuste**

- **Planteamiento general de una prueba de bondad de ajuste**
- Este tipo de pruebas son esencialmente pruebas de hipótesis, con la característica particular de que la hipótesis que queremos probar no es, como generalmente ocurre, acerca del valor particular de algún(os) parámetro(s), sino sobre una función de distribución específica

- **Planteamiento general de una prueba de bondad de ajuste**
- Este tipo de pruebas son esencialmente pruebas de hipótesis, con la característica particular de que la hipótesis que queremos probar no es, como generalmente ocurre, acerca del valor particular de algún(os) parámetro(s), sino sobre una función de distribución específica
- Estas pruebas se enuncian como

- **Planteamiento general de una prueba de bondad de ajuste**
- Este tipo de pruebas son esencialmente pruebas de hipótesis, con la característica particular de que la hipótesis que queremos probar no es, como generalmente ocurre, acerca del valor particular de algún(os) parámetro(s), sino sobre una función de distribución específica
- Estas pruebas se enuncian como
- 

$$\mathbb{H}_0 : F(x) = F_0(x) \quad \forall x \quad vs. \quad \mathbb{H}_a : F(x) \neq F_0(x) \quad p.a.x$$

- **Planteamiento general de una prueba de bondad de ajuste**
- Este tipo de pruebas son esencialmente pruebas de hipótesis, con la característica particular de que la hipótesis que queremos probar no es, como generalmente ocurre, acerca del valor particular de algún(os) parámetro(s), sino sobre una función de distribución específica
- Estas pruebas se enuncian como
- 

$$\mathbb{H}_0 : F(x) = F_0(x) \quad \forall x \quad vs. \quad \mathbb{H}_a : F(x) \neq F_0(x) \quad p.a.x$$

- Con  $F_0$  la distribución que suponemos sigue nuestros datos

- Como podemos observar, necesitamos definir qué distribución es la que consideramos que ajusta a nuestra información

- Como podemos observar, necesitamos definir qué distribución es la que consideramos que ajusta a nuestra información
- A este respecto podemos tener diversas opciones

- Como podemos observar, necesitamos definir qué distribución es la que consideramos que ajusta a nuestra información
- A este respecto podemos tener diversas opciones
  - $F_0$  es totalmente conocida. En el sentido que se conoce su forma funcional y su(s) parámetro(s)

- Como podemos observar, necesitamos definir qué distribución es la que consideramos que ajusta a nuestra información
- A este respecto podemos tener diversas opciones
  - $F_0$  es totalmente conocida. En el sentido que se conoce su forma funcional y su(s) parámetro(s)
  - $F_0$  es parcialmente conocida. Se conoce su forma funcional pero se desconoce algún(os) de su(s) parámetro(s)

- Como podemos observar, necesitamos definir qué distribución es la que consideramos que ajusta a nuestra información
- A este respecto podemos tener diversas opciones
  - $F_0$  es totalmente conocida. En el sentido que se conoce su forma funcional y su(s) parámetro(s)
  - $F_0$  es parcialmente conocida. Se conoce su forma funcional pero se desconoce algún(os) de su(s) parámetro(s)
  - $F_0$  es totalmente desconocida. Se conoce su forma funcional pero se desconocen su(s) parámetro(s)

- Como podemos observar, necesitamos definir qué distribución es la que consideramos que ajusta a nuestra información
- A este respecto podemos tener diversas opciones
  - $F_0$  es totalmente conocida. En el sentido que se conoce su forma funcional y su(s) parámetro(s)
  - $F_0$  es parcialmente conocida. Se conoce su forma funcional pero se desconoce algún(os) de su(s) parámetro(s)
  - $F_0$  es totalmente desconocida. Se conoce su forma funcional pero se desconocen su(s) parámetro(s)
- Contrario a las pruebas de hipótesis usuales, en las de bondad de ajuste *no se especifica la hipótesis alternativa*, ya que el modelo propuesto en la hipótesis nula, *no se compara* contra uno alternativo que debería estar especificado en la hipótesis alternativa

- La razón de este hecho es que *estamos interesados en verificar que la distribución de nuestros datos es la que proponemos* y si no lo es, no es de interés saber qué otra distribución sí es

- La razón de este hecho es que *estamos interesados en verificar que la distribución de nuestros datos es la que proponemos* y si no lo es, no es de interés saber qué otra distribución sí es
- **Algunas pruebas de bondad de ajuste**

- La razón de este hecho es que *estamos interesados en verificar que la distribución de nuestros datos es la que proponemos* y si no lo es, no es de interés saber qué otra distribución sí es
- **Algunas pruebas de bondad de ajuste**
- Presentaremos de manera sencilla algunas de las pruebas más comunes para realizar bondad de ajuste

- La razón de este hecho es que *estamos interesados en verificar que la distribución de nuestros datos es la que proponemos* y si no lo es, no es de interés saber qué otra distribución sí es
- **Algunas pruebas de bondad de ajuste**
- Presentaremos de manera sencilla algunas de las pruebas más comunes para realizar bondad de ajuste
- Dado que nuestros datos sobre la severidad de una pérdida pueden presentar *truncamiento por la izquierda*, que corresponde a aquellas pérdidas que no rebasaron el deducible, y *censura por la derecha*, que son las pérdidas que sobrepasaron el límite de póliza, las estadísticas se deben modificar para contemplar estas particularidades de los datos

- Prueba Kolmogorov-Smirnoff (K-S)

- Prueba Kolmogorov-Smirnoff (K-S)
- La estadística *Kolmogorov-Smirnoff* se define como

- Prueba Kolmogorov-Smirnoff (K-S)
- La estadística *Kolmogorov-Smirnoff* se define como
- 

$$D = \sup_x |F_n(x) - F_0(x)|$$

- Prueba Kolmogorov-Smirnoff (K-S)
- La estadística *Kolmogorov-Smirnoff* se define como
- 

$$D = \sup_x |F_n(x) - F_0(x)|$$

- Que se puede expresar mediante las dos estadísticas

- Prueba Kolmogorov-Smirnoff (K-S)
- La estadística *Kolmogorov-Smirnoff* se define como



$$D = \sup_x |F_n(x) - F_0(x)|$$

- Que se puede expresar mediante las dos estadísticas



$$\begin{aligned} D^+ &= \sup_x \{F_n(x) - F_0(x)\} \text{ y} \\ D^- &= \sup_x \{F_0(x) - F_n(x)\} \end{aligned}$$

- Prueba Kolmogorov-Smirnoff (K-S)
- La estadística *Kolmogorov-Smirnoff* se define como



$$D = \sup_x |F_n(x) - F_0(x)|$$

- Que se puede expresar mediante las dos estadísticas



$$\begin{aligned} D^+ &= \sup_x \{F_n(x) - F_0(x)\} \text{ y} \\ D^- &= \sup_x \{F_0(x) - F_n(x)\} \end{aligned}$$

- Y se calcula mediante



$$\begin{aligned} D^+ &= \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{i}{n} - z_{(i)} \right\} \\ D^- &= \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ z_{(i)} - \frac{(i-1)}{n} \right\} \\ D &= \max \{D^+, D^-\} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} D^+ &= \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{i}{n} - z_{(i)} \right\} \\ D^- &= \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ z_{(i)} - \frac{(i-1)}{n} \right\} \\ D &= \max \{D^+, D^-\} \end{aligned}$$

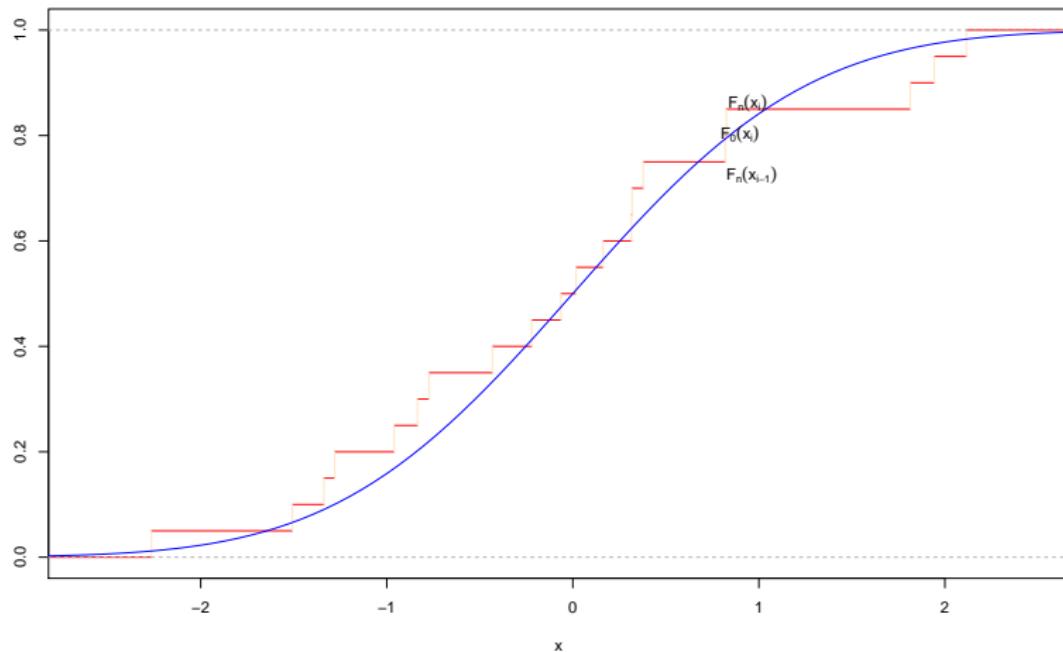
- Con  $z_i = F(x_i)$  y  $z_{(i)}$  el  $i$ -ésimo elemento en la muestra ordenada de las  $z'_i$ s.

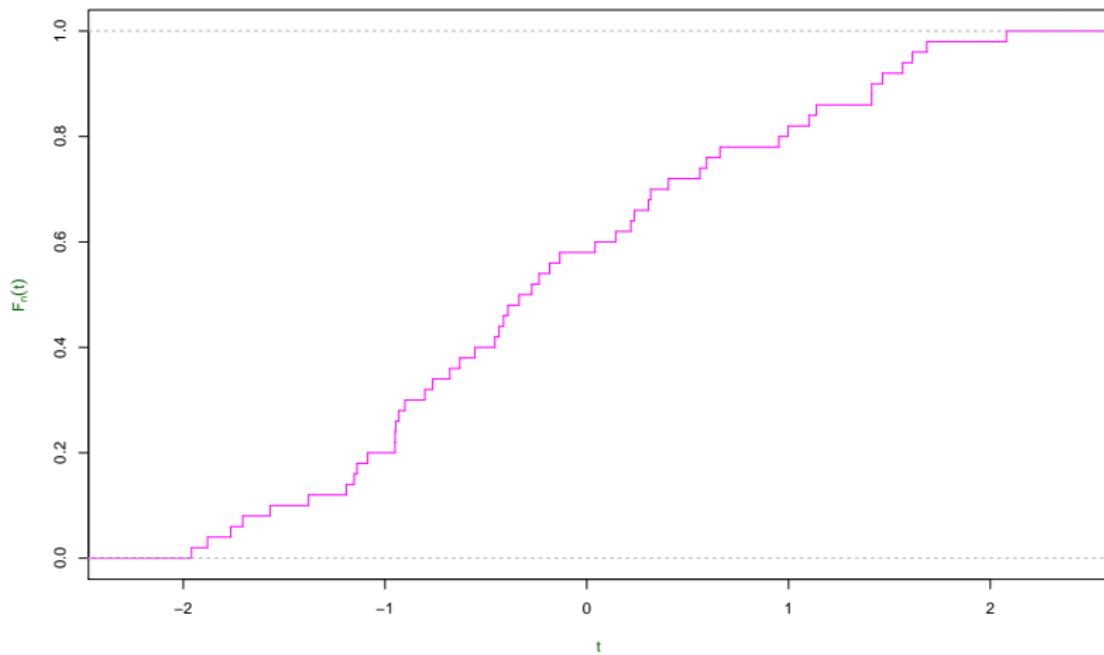


$$\begin{aligned} D^+ &= \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{i}{n} - z_{(i)} \right\} \\ D^- &= \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ z_{(i)} - \frac{(i-1)}{n} \right\} \\ D &= \max \{D^+, D^-\} \end{aligned}$$

- Con  $z_i = F(x_i)$  y  $z_{(i)}$  el  $i$ -ésimo elemento en la muestra ordenada de las  $z'_i$ s.
- Esta prueba se usa para datos desagregados y para variables aleatorias continuas, i.e.,  $F_0$  es una función de distribución continua.  $F_n$  es la función de distribución empírica, y se calcula con los datos reales

## Detalle de las diferencias



**Función de distribución empírica**

- Prueba Anderson-Darling (A-D)

- **Prueba Anderson-Darling (A-D)**

- Esta prueba es similar a la  $K - S$  pero mide las diferencias entre las funciones empírica y propuesta de distinta manera

- **Prueba Anderson-Darling (A-D)**

- Esta prueba es similar a la  $K - S$  pero mide las diferencias entre las funciones empírica y propuesta de distinta manera
- Una característica a destacar de esta prueba es que asigna mayor peso a las colas de la distribución, es decir, enfatiza la bondad de ajuste que se tenga en las colas entre el modelo propuesto y la función de distribución empírica, que es el modelo asociado a los datos reales

- **Prueba Anderson-Darling (A-D)**

- Esta prueba es similar a la  $K - S$  pero mide las diferencias entre las funciones empírica y propuesta de distinta manera
- Una característica a destacar de esta prueba es que asigna mayor peso a las colas de la distribución, es decir, enfatiza la bondad de ajuste que se tenga en las colas entre el modelo propuesto y la función de distribución empírica, que es el modelo asociado a los datos reales
- La forma explícita de la *Anderson-Darling* es

## ● Prueba Anderson-Darling (A-D)

- Esta prueba es similar a la  $K - S$  pero mide las diferencias entre las funciones empírica y propuesta de distinta manera
- Una característica a destacar de esta prueba es que asigna mayor peso a las colas de la distribución, es decir, enfatiza la bondad de ajuste que se tenga en las colas entre el modelo propuesto y la función de distribución empírica, que es el modelo asociado a los datos reales
- La forma explícita de la *Anderson-Darling* es
- 

$$\begin{aligned} A^2 &= n \int_0^1 \frac{[F_n(x) - F_0(x)]^2}{F_0(x) [1 - F_0(x)]} dF_0(x) dx \\ &= -n - \frac{1}{n} (2i - 1) \sum_{i=1}^n \left\{ \log(z_{(i)}) + \log(1 - z_{(n+1-i)}) \right\} \end{aligned}$$

- Al igual que  $K - S$  esta es una prueba que no trabaja con datos agrupados

- Al igual que  $K - S$  esta es una prueba que no trabaja con datos agrupados
- **Prueba Ji-cuadrada de bondad de ajuste**

- Al igual que  $K - S$  esta es una prueba que no trabaja con datos agrupados
- **Prueba Ji-cuadrada de bondad de ajuste**
- Esta es probablemente la más popular de las pruebas de bondad de ajuste, además de que, contrario a  $K - S$  y  $A - D$ , es una prueba para distribuciones continuas y discretas; de hecho, también tiene una versión multivariada

- Al igual que  $K - S$  esta es una prueba que no trabaja con datos agrupados
- **Prueba Ji-cuadrada de bondad de ajuste**
- Esta es probablemente la más popular de las pruebas de bondad de ajuste, además de que, contrario a  $K - S$  y  $A - D$ , es una prueba para distribuciones continuas y discretas; de hecho, también tiene una versión multivariada
- La prueba se basa en particionar el rango de las variables observadas en  $k$  celdas o clases, y calcular el número de observaciones que se esperaría tener en cada clase si la hipótesis nula fuera correcta, i.e., si  $F_0$  es cierta, y compararlo contra el número de observaciones que realmente cayeron en cada celda

- Si denotamos por  $\mathbb{E}_j$  al número esperado y por  $O_j$  al observado en la celda  $j$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$ , la estadística *Ji-cuadrada de bondad de ajuste* es

- Si denotamos por  $\mathbb{E}_j$  al número esperado y por  $O_j$  al observado en la celda  $j$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$ , la estadística *Ji-cuadrada de bondad de ajuste* es



$$\chi^2 = \sum_{j=1}^k \frac{(\mathbb{E}_j - O_j)^2}{\mathbb{E}_j}$$

- Si denotamos por  $\mathbb{E}_j$  al número esperado y por  $O_j$  al observado en la celda  $j$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$ , la estadística *Ji-cuadrada de bondad de ajuste* es



$$\chi^2 = \sum_{j=1}^k \frac{(\mathbb{E}_j - O_j)^2}{\mathbb{E}_j}$$

- Si los valores observados ( $O_j$ ) y esperados ( $\mathbb{E}_j$ ) son similares, el valor de esta estadística es pequeño, e indicaría que  $F_0$  es cierta

- Si denotamos por  $\mathbb{E}_j$  al número esperado y por  $O_j$  al observado en la celda  $j$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$ , la estadística *Ji-cuadrada de bondad de ajuste* es



$$\chi^2 = \sum_{j=1}^k \frac{(\mathbb{E}_j - O_j)^2}{\mathbb{E}_j}$$

- Si los valores observados ( $O_j$ ) y esperados ( $\mathbb{E}_j$ ) son similares, el valor de esta estadística es pequeño, e indicaría que  $F_0$  es cierta
- Si, por el contrario, estos valores son muy distintos, su valor debería ser grande e implicaría que  $F_0$  es falsa

- Distribuciones para valores extremos

- Distribuciones para valores extremos
- Teoría de valores extremos

- Distribuciones para valores extremos
- Teoría de valores extremos
- La Teoría de Valores Extremos (Extreme value theory) consiste en el empleo de una serie de técnicas estadísticas para la identificación y modelado de observaciones extremas o *outliers*

- **Distribuciones para valores extremos**

- **Teoría de valores extremos**

- La Teoría de Valores Extremos (Extreme value theory) consiste en el empleo de una serie de técnicas estadísticas para la identificación y modelado de observaciones extremas o *outliers*
- Su objeto es determinar qué tan extrema puede ser la mayor o menor observación registrada de un fenómeno aleatorio, es decir, estudia el comportamiento del *valor máximo o mínimo* de una variable aleatoria

- **Distribuciones para valores extremos**
- **Teoría de valores extremos**
- La Teoría de Valores Extremos (Extreme value theory) consiste en el empleo de una serie de técnicas estadísticas para la identificación y modelado de observaciones extremas o *outliers*
- Su objeto es determinar qué tan extrema puede ser la mayor o menor observación registrada de un fenómeno aleatorio, es decir, estudia el comportamiento del *valor máximo o mínimo* de una variable aleatoria
- El comportamiento inusual de una variable aleatoria merece una consideración especial, ya que puede tener un gran impacto para las decisiones que se desprendan del análisis de la información a la que pertenece

- Para explicar este tipo de sucesos que ocurren, generalmente, con muy baja frecuencia pero que tienen una influencia muy significativa sobre todo un modelo, la *Teoría de Valores Extremos* emplea métodos matemáticos basados en comportamientos asintóticos, distribuciones, procesos estocásticos y leyes límite

- Para explicar este tipo de sucesos que ocurren, generalmente, con muy baja frecuencia pero que tienen una influencia muy significativa sobre todo un modelo, la *Teoría de Valores Extremos* emplea métodos matemáticos basados en comportamientos asintóticos, distribuciones, procesos estocásticos y leyes límite
- Diferentes investigaciones provenientes de múltiples disciplinas científicas, han desarrollado métodos para cuantificar eventos extremos y sus consecuencias de un modo estadísticamente óptimo, dando lugar a distribuciones de probabilidad que permiten la modelación de los valores máximos o mínimos de una variable aleatoria

- De forma simplificada, nuestro problema es el siguiente:

- De forma simplificada, nuestro problema es el siguiente:
- Dada una muestra independiente  $X_1, X_2, \dots, X_n$  de una distribución desconocida,  $\mathbf{F}$ , queremos *estimar la cola de  $\mathbf{F}$*

- De forma simplificada, nuestro problema es el siguiente:
- Dada una muestra independiente  $X_1, X_2, \dots, X_n$  de una distribución desconocida,  $\mathbf{F}$ , queremos *estimar la cola de  $\mathbf{F}$*
- Los problemas más importantes son:

- De forma simplificada, nuestro problema es el siguiente:
- Dada una muestra independiente  $X_1, X_2, \dots, X_n$  de una distribución desconocida,  $\mathbf{F}$ , queremos *estimar la cola de  $\mathbf{F}$*
- Los problemas más importantes son:
  - Las observaciones en la cola de la distribución son escasas

- De forma simplificada, nuestro problema es el siguiente:
- Dada una muestra independiente  $X_1, X_2, \dots, X_n$  de una distribución desconocida,  $\mathbf{F}$ , queremos *estimar la cola de  $\mathbf{F}$*
- Los problemas más importantes son:
  - Las observaciones en la cola de la distribución son escasas
  - Por lo general, queremos estimar valores por encima del valor máximo de la muestra

- De forma simplificada, nuestro problema es el siguiente:
- Dada una muestra independiente  $X_1, X_2, \dots, X_n$  de una distribución desconocida,  $\mathbf{F}$ , queremos *estimar la cola de  $\mathbf{F}$*
- Los problemas más importantes son:
  - Las observaciones en la cola de la distribución son escasas
  - Por lo general, queremos estimar valores por encima del valor máximo de la muestra
  - Las técnicas usuales de estimación de densidades ajustan bien en las zonas donde los datos tienen mayor densidad, pero pueden ser inadecuadas para estimar las colas

- Los modelos correspondientes a esta teoría de valores extremos, tienen aplicaciones en muchas áreas, una de las principales es las ciencias ambientales, donde se estudian valores extremos, por ejemplo, en: Nivel de una presa, velocidad del viento, nivel de un río, concentración de contaminantes, niveles de precipitación pluvial, etc.

- Los modelos correspondientes a esta teoría de valores extremos, tienen aplicaciones en muchas áreas, una de las principales es las ciencias ambientales, donde se estudian valores extremos, por ejemplo, en: Nivel de una presa, velocidad del viento, nivel de un río, concentración de contaminantes, niveles de precipitación pluvial, etc.
- Nosotros nos enfocaremos en aplicarla dentro del marco del seguro

- Los modelos correspondientes a esta teoría de valores extremos, tienen aplicaciones en muchas áreas, una de las principales es las ciencias ambientales, donde se estudian valores extremos, por ejemplo, en: Nivel de una presa, velocidad del viento, nivel de un río, concentración de contaminantes, niveles de precipitación pluvial, etc.
- Nosotros nos enfocaremos en aplicarla dentro del marco del seguro
- En esta área, el análisis de la siniestralidad extrema es de gran interés, puesto que constituye un riesgo que pone en peligro la estabilidad y solvencia de entidades aseguradoras

## ● Distribución del máximo

- Distribución del máximo
- Definamos

- Distribución del máximo

- Definamos



$$M_n = \max \{X_1, \dots, X_n\}$$

- **Distribución del máximo**

- Definamos



$$M_n = \max \{X_1, \dots, X_n\}$$

- Entonces, la distribución de este máximo es

- **Distribución del máximo**

- Definamos



$$M_n = \max \{X_1, \dots, X_n\}$$

- Entonces, la distribución de este máximo es



$$\mathbb{P}(M_n \leq x) = \mathbb{P}(X_1 \leq x, \dots, X_n \leq x) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \leq x) = F^n(x)$$

- Distribución del máximo

- Definamos



$$M_n = \max \{X_1, \dots, X_n\}$$

- Entonces, la distribución de este máximo es



$$\mathbb{P}(M_n \leq x) = \mathbb{P}(X_1 \leq x, \dots, X_n \leq x) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \leq x) = F^n(x)$$

- Si conocemos  $F$ , conocemos la distribución del máximo, pero las expresiones analíticas para  $F^n$  pueden ser complicadas.

Frecuentemente  $F$  es desconocida

- Entonces, dada la posible complejidad de encontrar esta distribución, intentaremos buscar una distribución límite que sirva para aproximar la distribución de  $M_n$ , de la misma manera como la distribución normal sirve para aproximar la suma de una gran variedad de variables aleatorias independientes

- Entonces, dada la posible complejidad de encontrar esta distribución, intentaremos buscar una distribución límite que sirva para aproximar la distribución de  $M_n$ , de la misma manera como la distribución normal sirve para aproximar la suma de una gran variedad de variables aleatorias independientes
- Recordar que el resultado que se tiene con las sumas de variables i.i.d. y el Teorema Central del Límite: Por la Ley Fuerte de Grandes Números, si  $\mu = \mathbb{E}(X_i)$ , entonces

- Entonces, dada la posible complejidad de encontrar esta distribución, intentaremos buscar una distribución límite que sirva para aproximar la distribución de  $M_n$ , de la misma manera como la distribución normal sirve para aproximar la suma de una gran variedad de variables aleatorias independientes
- Recordar que el resultado que se tiene con las sumas de variables i.i.d. y el Teorema Central del Límite: Por la Ley Fuerte de Grandes Números, si  $\mu = \mathbb{E}(X_i)$ , entonces



$$\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \longrightarrow \mu$$

- Y si estandarizamos (realizamos una transformación lineal), tenemos

- Y si estandarizamos (realizamos una transformación lineal), tenemos



$$\frac{\bar{X}_n - \mu_n}{\sigma_n} \longrightarrow N(0, 1)$$

- Y si estandarizamos (realizamos una transformación lineal), tenemos



$$\frac{\bar{X}_n - \mu_n}{\sigma_n} \longrightarrow N(0, 1)$$

- Con  $\mu_n = \mu$  y  $\sigma_n = \sigma/\sqrt{n}$

- Y si estandarizamos (realizamos una transformación lineal), tenemos
  - $$\frac{\bar{X}_n - \mu_n}{\sigma_n} \longrightarrow N(0, 1)$$
- Con  $\mu_n = \mu$  y  $\sigma_n = \sigma/\sqrt{n}$
- Entonces, hay que buscar un resultado del tipo

- Y si estandarizamos (realizamos una transformación lineal), tenemos



$$\frac{\bar{X}_n - \mu_n}{\sigma_n} \longrightarrow N(0, 1)$$

- Con  $\mu_n = \mu$  y  $\sigma_n = \sigma/\sqrt{n}$
- Entonces, hay que buscar un resultado del tipo



$$\mathbb{P}\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\right) = F^n(a_n X + b_n) \longrightarrow G(x)$$

- Entonces, nos preguntamos

- Entonces, nos preguntamos
  - ¿Cuáles son las distribuciones límite posibles?

- Entonces, nos preguntamos
  - ¿Cuáles son las distribuciones límite posibles?
  - ¿Cuáles son las constantes  $a_n$  y  $b_n$ ? ¿Son únicas?

- Entonces, nos preguntamos

- ¿Cuáles son las distribuciones límite posibles?
- ¿Cuáles son las constantes  $a_n$  y  $b_n$ ? ¿Son únicas?
- ¿Qué condiciones debe satisfacer  $F$  para que se cumpla un resultado así?

- Entonces, nos preguntamos

- ¿Cuáles son las distribuciones límite posibles?
- ¿Cuáles son las constantes  $a_n$  y  $b_n$ ? ¿Son únicas?
- ¿Qué condiciones debe satisfacer  $F$  para que se cumpla un resultado así?
- Si hay varias  $G$  posibles, conociendo  $F$ , ¿cómo sabemos, cuál de ellas es el límite? ¿Es único?

- Entonces, nos preguntamos

- ¿Cuáles son las distribuciones límite posibles?
- ¿Cuáles son las constantes  $a_n$  y  $b_n$ ? ¿Son únicas?
- ¿Qué condiciones debe satisfacer  $F$  para que se cumpla un resultado así?
- Si hay varias  $G$  posibles, conociendo  $F$ , ¿cómo sabemos, cuál de ellas es el límite? ¿Es único?

- **¿Cuáles son las distribuciones límite posibles?**

- Entonces, nos preguntamos

- ¿Cuáles son las distribuciones límite posibles?
- ¿Cuáles son las constantes  $a_n$  y  $b_n$ ? ¿Son únicas?
- ¿Qué condiciones debe satisfacer  $F$  para que se cumpla un resultado así?
- Si hay varias  $G$  posibles, conociendo  $F$ , ¿cómo sabemos, cuál de ellas es el límite? ¿Es único?

- ¿Cuáles son las distribuciones límite posibles?**



$$\text{Gumbel} \quad : \quad G(x) = \exp(-e^{-x}) \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Fréchet} \quad : \quad G(x, \alpha) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \exp(-x^{-\alpha}) & x \geq 0, \alpha > 0 \end{cases}$$

$$\text{Weibull} \quad : \quad G(x, \alpha) = \begin{cases} \exp(-(-x)^{-\alpha}) & x < 0, \alpha > 0 \\ 1 & x \geq \mu \end{cases}$$

- Estas tres distribuciones reciben el nombre de distribuciones de valores extremos (DVE)

- Estas tres distribuciones reciben el nombre de distribuciones de valores extremos (DVE)
- **Ejemplo**

- Estas tres distribuciones reciben el nombre de distribuciones de valores extremos (DVE)
- **Ejemplo**
- Supongamos que  $F$  es la distribución exponencial con parámetro *uno*. Es decir

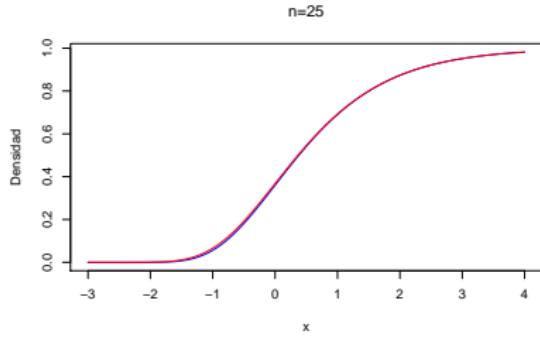
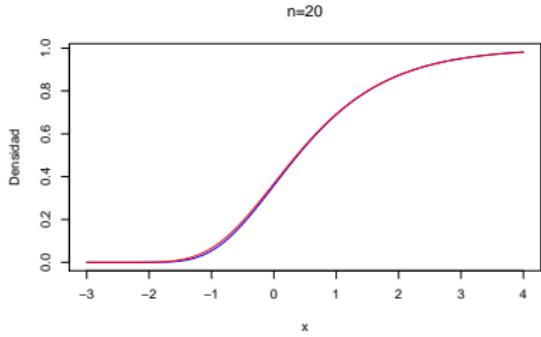
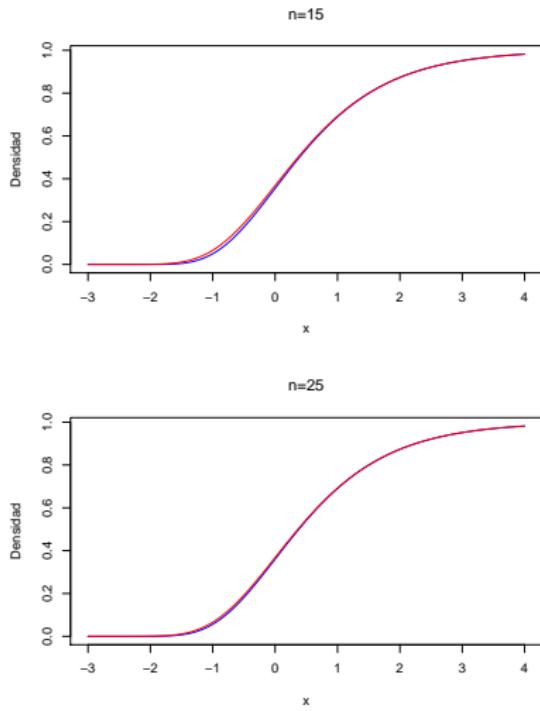
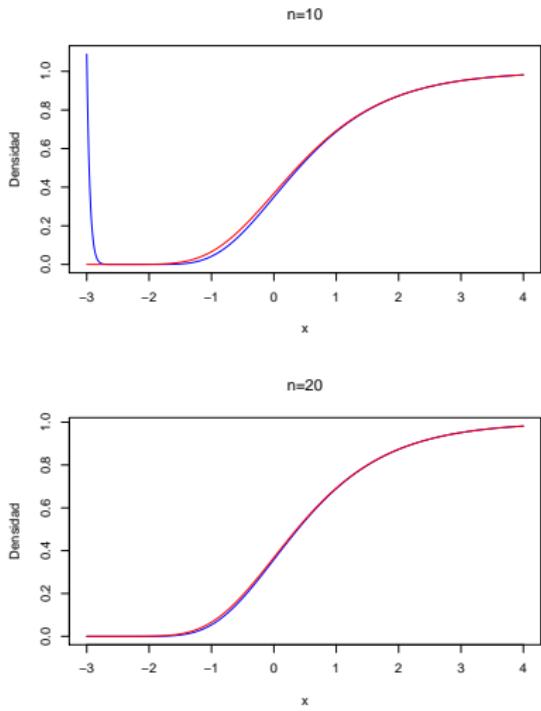
- Estas tres distribuciones reciben el nombre de distribuciones de valores extremos (DVE)
- **Ejemplo**
- Supongamos que  $F$  es la distribución exponencial con parámetro *uno*. Es decir
- 

$$\begin{aligned} F(x) &= 1 - e^{-x} \implies F^n(x) = (1 - e^{-x})^n \text{ y} \\ F(x + \log n) &= \left(1 - e^{-x-\log n}\right)^n \\ &= \left(1 - \frac{1}{n}e^{-x}\right)^n \longrightarrow \exp(-e^{-x}) \end{aligned}$$

- Estas tres distribuciones reciben el nombre de distribuciones de valores extremos (DVE)
- **Ejemplo**
- Supongamos que  $F$  es la distribución exponencial con parámetro *uno*. Es decir
- 

$$\begin{aligned}F(x) &= 1 - e^{-x} \implies F^n(x) = (1 - e^{-x})^n \text{ y} \\F(x + \log n) &= \left(1 - e^{-x-\log n}\right)^n \\&= \left(1 - \frac{1}{n}e^{-x}\right)^n \rightarrow \exp(-e^{-x})\end{aligned}$$

- por lo tanto, las constantes de normalización  $a_n = 1$  y  $b_n = \log n$ , conducen a que  $M_n$  tenga como límite una distribución Gumbel



## ● La distribución Cauchy

## ● La distribución Cauchy

- Consideremos ahora la distribución Cauchy, cuya función de densidad de probabilidad es

## ● La distribución Cauchy

- Consideremos ahora la distribución Cauchy, cuya función de densidad de probabilidad es



$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}$$

## ● La distribución Cauchy

- Consideremos ahora la distribución Cauchy, cuya función de densidad de probabilidad es



$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}$$

- Se define la función de *Supervivencia* de una variable aleatoria, como:  $S(x) = 1 - F(x)$ . Y observemos que  $S'(x) = -f(x)$ . Entonces

## ● La distribución Cauchy

- Consideremos ahora la distribución Cauchy, cuya función de densidad de probabilidad es



$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}$$

- Se define la función de *Supervivencia* de una variable aleatoria, como:  $S(x) = 1 - F(x)$ . Y observemos que  $S'(x) = -f(x)$ . Entonces



$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{S(x)}{(\pi x)^{-1}} \stackrel{L'Hôpital}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\pi^{-1} x^{-2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi x^2}{\pi(1+x^2)} = 1$$

- Por lo tanto

- Por lo tanto



$$S(x) = 1 - F(x) \sim (\pi x)^{-1}$$

- Por lo tanto



$$S(x) = 1 - F(x) \sim (\pi x)^{-1}$$

- De donde tenemos que, para  $x > 0$

- Por lo tanto



$$S(x) = 1 - F(x) \sim (\pi x)^{-1}$$

- De donde tenemos que, para  $x > 0$



$$S\left(\frac{nx}{\pi}\right) = 1 - F\left(\frac{nx}{\pi}\right) \sim (nx)^{-1}$$

- Por lo tanto



$$S(x) = 1 - F(x) \sim (\pi x)^{-1}$$

- De donde tenemos que, para  $x > 0$



$$S\left(\frac{nx}{\pi}\right) = 1 - F\left(\frac{nx}{\pi}\right) \sim (nx)^{-1}$$

- Y por lo tanto

- Por lo tanto



$$S(x) = 1 - F(x) \sim (\pi x)^{-1}$$

- De donde tenemos que, para  $x > 0$



$$S\left(\frac{nx}{\pi}\right) = 1 - F\left(\frac{nx}{\pi}\right) \sim (nx)^{-1}$$

- Y por lo tanto



$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(M_n \leq \frac{nx}{\pi}\right) &= \left(1 - F\left(\frac{nx}{\pi}\right)\right)^n \\ &= \left(1 - \frac{1}{n} \left(\frac{1}{x} + o(1)\right)\right)^n \\ &\longrightarrow \exp\{-x^{-1}\} \quad \text{Fréchet} \quad \alpha = 1 \end{aligned}$$

- Las familias correspondientes a estas distribuciones del valor extremo

- **Las familias correspondientes a estas distribuciones del valor extremo**
- Si introducimos parámetros de localización y escala a las distribuciones del valor extremo anteriores, obtenemos una familia de distribuciones para cada una de ellas. A saber

- Las familias correspondientes a estas distribuciones del valor extremo
- Si introducimos parámetros de localización y escala a las distribuciones del valor extremo anteriores, obtenemos una familia de distribuciones para cada una de ellas. A saber



$$Gumbel(x; \mu, \sigma) = \exp\left(-e^{-(x-\mu)/\sigma}\right) \quad x \in \mathbb{R}$$

$$Fréchet(x; \alpha, \mu, \sigma) = \begin{cases} 0 & x < \mu \\ \exp\left(-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{-\alpha}\right) & x \geq \mu, \alpha > 0 \end{cases}$$

$$Weibull = \begin{cases} \exp\left(-\left(-\frac{(x-\mu)}{\sigma}\right)^\alpha\right) & 0 \leq x < \mu, \alpha > 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

- Las familias correspondientes a estas distribuciones del valor extremo
- Si introducimos parámetros de localización y escala a las distribuciones del valor extremo anteriores, obtenemos una familia de distribuciones para cada una de ellas. A saber

$$Gumbel(x; \mu, \sigma) = \exp\left(-e^{-(x-\mu)/\sigma}\right) \quad x \in \mathbb{R}$$

$$Fréchet(x; \alpha, \mu, \sigma) = \begin{cases} 0 & x < \mu \\ \exp\left(-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{-\alpha}\right) & x \geq \mu, \alpha > 0 \end{cases}$$

$$Weibull = \begin{cases} \exp\left(-\left(-\frac{(x-\mu)}{\sigma}\right)^\alpha\right) & 0 \leq x < \mu, \alpha > 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

- Observamos que  $\mu$  es el extremo izquierdo para la distribución de Fréchet y el extremo derecho para la distribución Weibull

- Estos tres tipos de distribuciones se pueden combinar en una sola distribución (hiper modelo), que se conoce como: *La distribución generalizada de valores extremos (GVE)*. Que tiene la forma

- Estos tres tipos de distribuciones se pueden combinar en una sola distribución (hiper modelo), que se conoce como: *La distribución generalizada de valores extremos (GVE)*. Que tiene la forma



$$G(x; \xi, \mu, \sigma) = \exp \left\{ - \left( 1 + \xi \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right)_+^{-1/\xi} \right\}$$

- Estos tres tipos de distribuciones se pueden combinar en una sola distribución (hiper modelo), que se conoce como: *La distribución generalizada de valores extremos* (GVE). Que tiene la forma



$$G(x; \xi, \mu, \sigma) = \exp \left\{ - \left( 1 + \xi \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right)_+^{-1/\xi} \right\}$$

- Con  $y_+ = \max \{y, 0\}$

- Estos tres tipos de distribuciones se pueden combinar en una sola distribución (hiper modelo), que se conoce como: *La distribución generalizada de valores extremos* (GVE). Que tiene la forma



$$G(x; \xi, \mu, \sigma) = \exp \left\{ - \left( 1 + \xi \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right)_+^{-1/\xi} \right\}$$

- Con  $y_+ = \max \{y, 0\}$
- Para  $\xi > 0$  se tiene la distribución Fréchet con  $\alpha = 1/\xi$

- Estos tres tipos de distribuciones se pueden combinar en una sola distribución (hiper modelo), que se conoce como: *La distribución generalizada de valores extremos* (GVE). Que tiene la forma



$$G(x; \xi, \mu, \sigma) = \exp \left\{ - \left( 1 + \xi \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right)_+^{-1/\xi} \right\}$$

- Con  $y_+ = \max \{y, 0\}$
- Para  $\xi > 0$  se tiene la distribución Fréchet con  $\alpha = 1/\xi$
- Para  $\xi < 0$ , la distribución Weibull con  $\alpha = -1/\xi$ , y

- Estos tres tipos de distribuciones se pueden combinar en una sola distribución (hiper modelo), que se conoce como: *La distribución generalizada de valores extremos* (GVE). Que tiene la forma



$$G(x; \xi, \mu, \sigma) = \exp \left\{ - \left( 1 + \xi \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right)_+^{-1/\xi} \right\}$$

- Con  $y_+ = \max \{y, 0\}$
- Para  $\xi > 0$  se tiene la distribución Fréchet con  $\alpha = 1/\xi$
- Para  $\xi < 0$ , la distribución Weibull con  $\alpha = -1/\xi$ , y
- La distribución Gumbel se obtiene como el límite cuando  $\xi \rightarrow 0$

- Estos tres tipos de distribuciones se pueden combinar en una sola distribución (hiper modelo), que se conoce como: *La distribución generalizada de valores extremos* (GVE). Que tiene la forma



$$G(x; \xi, \mu, \sigma) = \exp \left\{ - \left( 1 + \xi \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right)_+^{-1/\xi} \right\}$$

- Con  $y_+ = \max \{y, 0\}$
- Para  $\xi > 0$  se tiene la distribución Fréchet con  $\alpha = 1/\xi$
- Para  $\xi < 0$ , la distribución Weibull con  $\alpha = -1/\xi$ , y
- La distribución Gumbel se obtiene como el límite cuando  $\xi \rightarrow 0$
- Al parámetro  $\xi$  se le conoce como parámetro de forma

- Excesos sobre un umbral

- **Excesos sobre un umbral**

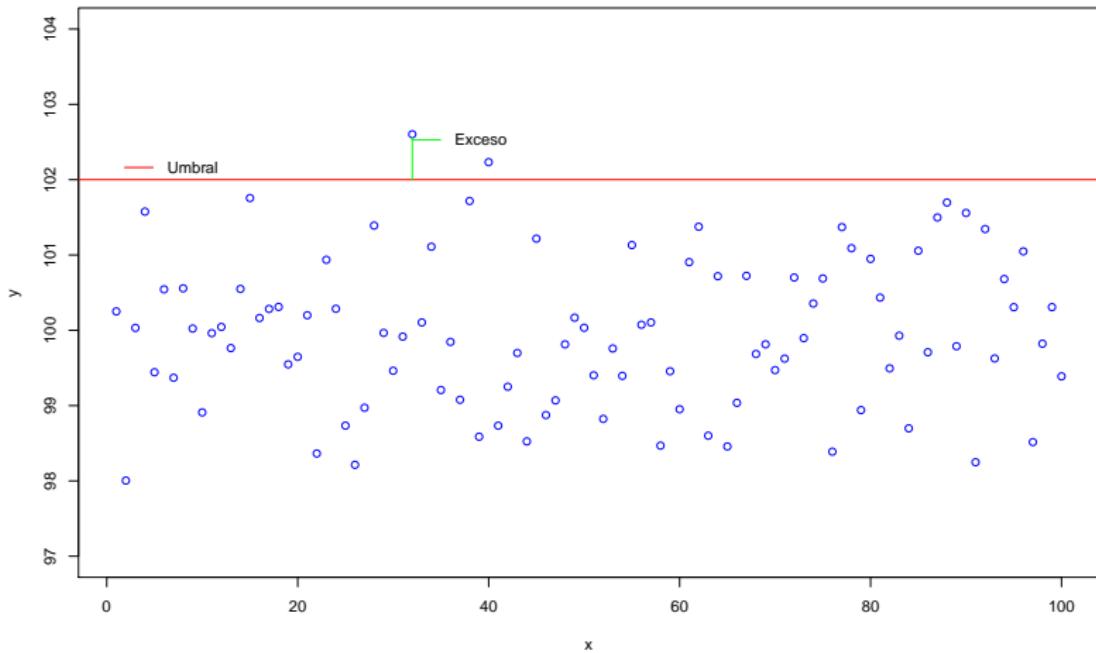
- En coberturas de riesgo de un seguro, resultan de particular interés aquellos montos de reclamación que exceden cierto umbral

- **Excesos sobre un umbral**

- En coberturas de riesgo de un seguro, resultan de particular interés aquellos montos de reclamación que exceden cierto umbral
- Es claro que el estudio de estos valores que exceden el umbral, es de vital importancia para la solvencia de la compañía

- **Excesos sobre un umbral**

- En coberturas de riesgo de un seguro, resultan de particular interés aquellos montos de reclamación que exceden cierto umbral
- Es claro que el estudio de estos valores que exceden el umbral, es de vital importancia para la solvencia de la compañía
- Por tal razón, puede ser más conveniente utilizar modelos con umbrales para estudiar estos valores extremos, que utilizar una distribución GVE



- Entonces, estamos interesados en la distribución de

- Entonces, estamos interesados en la distribución de



$$F_u(x) = \mathbb{P}(X - u < x | X > u) = \frac{F(x+u) - F(u)}{1 - F(u)}$$

- Entonces, estamos interesados en la distribución de
- 

$$F_u(x) = \mathbb{P}(X - u < x | X > u) = \frac{F(x+u) - F(u)}{1 - F(u)}$$

- A  $F_u(\cdot)$  se le conoce como la distribución de vida residual, del exceso de vida o del exceso de pérdida, esta última definición es la que tiene sentido para el área aseguradora.

- Distribución Pareto Generalizada

- **Distribución Pareto Generalizada**

- Si la función de distribución del máximo de una variable aleatoria es un elemento de  $GVE$ , entonces, para  $u$  suficientemente grande, la distribución  $F_u(\cdot)$ , puede aproximarse a través de la distribución Pareto generalizada, cuya función de distribución es

## • Distribución Pareto Generalizada

- Si la función de distribución del máximo de una variable aleatoria es un elemento de GVE, entonces, para  $u$  suficientemente grande, la distribución  $F_u(\cdot)$ , puede aproximarse a través de la distribución Pareto generalizada, cuya función de distribución es



$$H(x; \xi, \beta) = 1 - \left( \frac{\xi x}{\beta} \right)_+^{-1/\xi}, \quad x > 0$$

## • Distribución Pareto Generalizada

- Si la función de distribución del máximo de una variable aleatoria es un elemento de GVE, entonces, para  $u$  suficientemente grande, la distribución  $F_u(\cdot)$ , puede aproximarse a través de la distribución Pareto generalizada, cuya función de distribución es



$$H(x; \xi, \beta) = 1 - \left( \frac{\xi x}{\beta} \right)_+^{-1/\xi}, \quad x > 0$$

- Con  $\beta = \sigma + \xi(u - \mu)$ ,  $\sigma, \xi, \mu$  los parámetros correspondientes al elemento de GVE,  $u$  el valor del umbral

- Propiedad importante de la distribución Pareto Generalizada

- Propiedad importante de la distribución Pareto Generalizada
- Para  $\xi \in \mathbb{R}$ ,  $F$  es un elemento de la familia GVE, si y sólo si

- Propiedad importante de la distribución Pareto Generalizada
- Para  $\xi \in \mathbb{R}$ ,  $F$  es un elemento de la familia GVE, si y sólo si
  -

$$\lim_{u \uparrow w_F} \sup_{0 < x < w_F - u} |F_u(x) - H_{\xi, \beta(u)}(x)| = 0$$

- Propiedad importante de la distribución Pareto Generalizada
- Para  $\xi \in \mathbb{R}$ ,  $F$  es un elemento de la familia GVE, si y sólo si
  -

$$\lim_{u \uparrow w_F} \sup_{0 < x < w_F - u} |F_u(x) - H_{\xi, \beta(u)}(x)| = 0$$

- para alguna función positiva  $\beta$  y  $w_F$  el extremo final de  $F$

- Propiedad importante de la distribución Pareto Generalizada
- Para  $\xi \in \mathbb{R}$ ,  $F$  es un elemento de la familia GVE, si y sólo si
  -

$$\lim_{u \uparrow w_F} \sup_{0 < x < w_F - u} |F_u(x) - H_{\xi, \beta(u)}(x)| = 0$$

- para alguna función positiva  $\beta$  y  $w_F$  el extremo final de  $F$
- Esta propiedad dice que la función Pareto generalizada es una buena aproximación de los excesos de una distribución de la familia GVE, para un umbral,  $u$ , grande. Este resultado se puede reformular como

- Propiedad importante de la distribución Pareto Generalizada
- Para  $\xi \in \mathbb{R}$ ,  $F$  es un elemento de la familia GVE, si y sólo si
  -

$$\lim_{u \uparrow w_F} \sup_{0 < x < w_F - u} |F_u(x) - H_{\xi, \beta(u)}(x)| = 0$$

- para alguna función positiva  $\beta$  y  $w_F$  el extremo final de  $F$
- Esta propiedad dice que la función Pareto generalizada es una buena aproximación de los excesos de una distribución de la familia GVE, para un umbral,  $u$ , grande. Este resultado se puede reformular como

- 

$$1 - F_u(x) = \Pr(X - u > x | X > u) \approx 1 - H_{\xi, \beta(u)}(x), \quad x > 0$$

- Propiedad importante de la distribución Pareto Generalizada
- Para  $\xi \in \mathbb{R}$ ,  $F$  es un elemento de la familia GVE, si y sólo si
  -

$$\lim_{u \uparrow w_F} \sup_{0 < x < w_F - u} |F_u(x) - H_{\xi, \beta(u)}(x)| = 0$$

- para alguna función positiva  $\beta$  y  $w_F$  el extremo final de  $F$
- Esta propiedad dice que la función Pareto generalizada es una buena aproximación de los excesos de una distribución de la familia GVE, para un umbral,  $u$ , grande. Este resultado se puede reformular como

- 

$$1 - F_u(x) = \Pr(X - u > x | X > u) \approx 1 - H_{\xi, \beta(u)}(x), \quad x > 0$$

- Es necesario que  $u$  sea lo suficientemente grande

- Si  $X$  tiene función de distribución Pareto Generalizada con parámetros  $\xi < 1$  y  $\beta$ . Entonces, para  $u < w_F$

- Si  $X$  tiene función de distribución Pareto Generalizada con parámetros  $\xi < 1$  y  $\beta$ . Entonces, para  $u < w_F$



$$e(x) = \mathbb{E}(X - u | X > u) = \frac{\beta + \xi u}{1 - \xi}, \quad \beta + \xi u > 0$$

- Si  $X$  tiene función de distribución Pareto Generalizada con parámetros  $\xi < 1$  y  $\beta$ . Entonces, para  $u < w_F$



$$e(x) = \mathbb{E}(X - u | X > u) = \frac{\beta + \xi u}{1 - \xi}, \quad \beta + \xi u > 0$$

- Estos dos resultados proporcionan una técnica gráfica para elegir un umbral,  $u$ , suficientemente grande para justificar que  $F_u$  se aproxime por una Pareto Generalizada, a partir de la versión muestral,  $e_n$ , de esta función y su linealidad para una distribución GVE

- El enfoque que utilizaremos para modelar datos extremos será el que considera los valores por encima de un umbral

- El enfoque que utilizaremos para modelar datos extremos será el que considera los valores por encima de un umbral
- Entonces, la idea es seleccionar un umbral alto y considerar los valores de la muestra que están por encima de este umbral, para ajustar un modelo Pareto Generalizado

- El enfoque que utilizaremos para modelar datos extremos será el que considera los valores por encima de un umbral
- Entonces, la idea es seleccionar un umbral alto y considerar los valores de la muestra que están por encima de este umbral, para ajustar un modelo Pareto Generalizado
- Ejemplificaremos este ajuste a través de varias librerías de **R**

- Ajuste de una Pareto Generalizada a la base de datos de reclamaciones grandes, de la sociedad de actuarios

- Ajuste de una Pareto Generalizada a la base de datos de reclamaciones grandes, de la sociedad de actuarios
- Como vimos, nuestra segunda opción importante en los modelos de teoría del valor extremo, es la Pareto Generalizada, que surge a partir del método conocido como *P.O.T.* (Peaks over threshold method), que consiste en modelar los valores extremos que exceden a un cierto umbral,  $u$ , ya sea que modelemos todos los datos,  $X_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , o los valores que exceden a este umbral  $Y_i = X_i - u$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$

- **Ajuste de una Pareto Generalizada a la base de datos de reclamaciones grandes, de la sociedad de actuarios**
- Como vimos, nuestra segunda opción importante en los modelos de teoría del valor extremo, es la Pareto Generalizada, que surge a partir del método conocido como *P.O.T.* (Peaks over threshold method), que consiste en modelar los valores extremos que exceden a un cierto umbral,  $u$ , ya sea que modelemos todos los datos,  $X_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , o los valores que exceden a este umbral  $Y_i = X_i - u$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$
- Al intentar aplicar este método surgen algunas cuestiones que debemos resolver

- **Ajuste de una Pareto Generalizada a la base de datos de reclamaciones grandes, de la sociedad de actuarios**

- Como vimos, nuestra segunda opción importante en los modelos de teoría del valor extremo, es la Pareto Generalizada, que surge a partir del método conocido como *P.O.T.* (Peaks over threshold method), que consiste en modelar los valores extremos que exceden a un cierto umbral,  $u$ , ya sea que modelemos todos los datos,  $X_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , o los valores que exceden a este umbral  $Y_i = X_i - u$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$
- Al intentar aplicar este método surgen algunas cuestiones que debemos resolver
  - La primera consiste en *determinar o elegir el umbral*,  $u$ . Esta elección está sujeta a un problema conocido como *el problema de la varianza y el sesgo*

- ...sigue cuestiones que resolver

- ...sigue cuestiones que resolver
  - Porque, cuanto menor sea el umbral mayor es el número de observaciones que utilizaremos para ajustar el modelo, lo que, generalmente, puede disminuir la varianza de los estimadores, pero puede incrementarse el sesgo si se utilizan observaciones que no pertenecen a la cola de la distribución

- ...sigue cuestiones que resolver

- Porque, cuanto menor sea el umbral mayor es el número de observaciones que utilizaremos para ajustar el modelo, lo que, generalmente, puede disminuir la varianza de los estimadores, pero puede incrementarse el sesgo si se utilizan observaciones que no pertenecen a la cola de la distribución
- Por otro lado, si se reduce el número de observaciones (con un umbral más grande), se reduce el sesgo, porque podemos suponer que todas las observaciones sí pertenecen a la cola de la distribución, pero, al utilizar pocos datos en nuestra estimación, incrementamos la varianza de los estimadores y, en consecuencia, de nuestro modelo

- ...sigue cuestiones que resolver

- ...sigue cuestiones que resolver
  - La segunda cuestión es determinar qué función de distribución ajusta a esos datos que exceden el umbral fijado en el paso anterior

- ...sigue cuestiones que resolver
  - La segunda cuestión es determinar qué función de distribución ajusta a esos datos que exceden el umbral fijado en el paso anterior
  - Por supuesto, se trata de encontrar una distribución condicional al hecho de que los valores extremos hayan superado el umbral,  $u$

- ...sigue cuestiones que resolver
  - La segunda cuestión es determinar qué función de distribución ajusta a esos datos que exceden el umbral fijado en el paso anterior
  - Por supuesto, se trata de encontrar una distribución condicional al hecho de que los valores extremos hayan superado el umbral,  $u$
  - Como ya dijimos, esta distribución es la *distribución Pareto Generalizada*

- ...sigue cuestiones que resolver
  - La segunda cuestión es determinar qué función de distribución ajusta a esos datos que exceden el umbral fijado en el paso anterior
  - Por supuesto, se trata de encontrar una distribución condicional al hecho de que los valores extremos hayan superado el umbral,  $u$
  - Como ya dijimos, esta distribución es la *distribución Pareto Generalizada*
  - Este resultado está garantizado por el *teorema de Pickands-Balkema-de Haan* (*Balkema y de Haan (1974); Pickands (1975)*) que muestra que bajo condiciones de máximos dominios de atracción, la distribución generalizada de Pareto es la distribución límite para los excesos sobre un umbral  $u$  cuando éste es grande

- Elección del umbral

- **Elección del umbral**

- El teorema de Pickands-Balkema-de Haan, enuncia que la distribución generalizada de Pareto ajusta aquellos valores que exceden un determinado umbral cuando este umbral,  $u$ , es suficientemente grande

## • Elección del umbral

- El teorema de Pickands-Balkema-de Haan, enuncia que la distribución generalizada de Pareto ajusta aquellos valores que exceden un determinado umbral cuando este umbral,  $u$ , es suficientemente grande
- La dificultad radica en determinar ese umbral a partir del cual es posible ajustar la distribución de Pareto Generalizada

- **Elección del umbral**

- El teorema de Pickands-Balkema-de Haan, enuncia que la distribución generalizada de Pareto ajusta aquellos valores que exceden un determinado umbral cuando este umbral,  $u$ , es suficientemente grande

- La dificultad radica en determinar ese umbral a partir del cual es posible ajustar la distribución de Pareto Generalizada

- **Uso de la función media de exceso**

- **Elección del umbral**

- El teorema de Pickands-Balkema-de Haan, enuncia que la distribución generalizada de Pareto ajusta aquellos valores que exceden un determinado umbral cuando este umbral,  $u$ , es suficientemente grande

- La dificultad radica en determinar ese umbral a partir del cual es posible ajustar la distribución de Pareto Generalizada

- **Uso de la función media de exceso**

- La función media de exceso teórica de la distribución de Pareto Generalizada es:

- **Elección del umbral**

- El teorema de Pickands-Balkema-de Haan, enuncia que la distribución generalizada de Pareto ajusta aquellos valores que exceden un determinado umbral cuando este umbral,  $u$ , es suficientemente grande

- La dificultad radica en determinar ese umbral a partir del cual es posible ajustar la distribución de Pareto Generalizada

- **Uso de la función media de exceso**

- La función media de exceso teórica de la distribución de Pareto Generalizada es:

- $$e(x) = \mathbb{E}(X - u | X > u) = \frac{\beta + \xi u}{1 - \xi} = \frac{\beta}{1 - \xi} + \frac{\xi}{1 - \xi}u, \quad \beta + \xi u > 0$$

- **Elección del umbral**

- El teorema de Pickands-Balkema-de Haan, enuncia que la distribución generalizada de Pareto ajusta aquellos valores que exceden un determinado umbral cuando este umbral,  $u$ , es suficientemente grande
- La dificultad radica en determinar ese umbral a partir del cual es posible ajustar la distribución de Pareto Generalizada

- **Uso de la función media de exceso**

- La función media de exceso teórica de la distribución de Pareto Generalizada es:

- $e(x) = \mathbb{E}(X - u | X > u) = \frac{\beta + \xi u}{1 - \xi} = \frac{\beta}{1 - \xi} + \frac{\xi}{1 - \xi} u, \quad \beta + \xi u > 0$

- Que es una función lineal de  $u$ , con pendiente  $\frac{\xi}{1 - \xi}$ , una vez que se ha definido un umbral adecuadamente grande.

- Dada una muestra ordenada de forma descendente:  
 $(X_{1:n}, X_{2:n}, \dots, X_{n:n})$ , la función empírica de exceso medio se estima como:

- Dada una muestra ordenada de forma descendente:  $(X_{1:n}, X_{2:n}, \dots, X_{n:n})$ , la función empírica de exceso medio se estima como:

$$\bullet \quad \hat{e}_x(x) = \frac{\sum_{i=1}^n (X_{i:n} - u)^+}{\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{(X_{i:n} > u)}}$$

- Dada una muestra ordenada de forma descendente:

$(X_{1:n}, X_{2:n}, \dots, X_{n:n})$ , la función empírica de exceso medio se estima como:

$$\bullet \quad \hat{e}_x(x) = \frac{\sum_{i=1}^n (X_{i:n} - u)^+}{\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{(X_{i:n} > u)}}$$

- El numerador es la suma de los excesos sobre el umbral,  $u$ , y el denominador el número de valores mayores a este umbral, es decir, se estima a través de la media aritmética de los valores que exceden a  $u$

- Dada una muestra ordenada de forma descendente:  $(X_{1:n}, X_{2:n}, \dots, X_{n:n})$ , la función empírica de exceso medio se estima como:

$$\bullet \quad \hat{e}_x(x) = \frac{\sum_{i=1}^n (X_{i:n} - u)^+}{\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{(X_{i:n} > u)}}$$

- El numerador es la suma de los excesos sobre el umbral,  $u$ , y el denominador el número de valores mayores a este umbral, es decir, se estima a través de la media aritmética de los valores que exceden a  $u$
- En la práctica, es común que los umbrales sean los propios datos de la muestra, i.e.,  $u = X_{k+1}$ , y la expresión reduce a:

- Dada una muestra ordenada de forma descendente:  $(X_{1:n}, X_{2:n}, \dots, X_{n:n})$ , la función empírica de exceso medio se estima como:

$$\bullet \quad \hat{e}_x(x) = \frac{\sum_{i=1}^n (X_{i:n} - u)^+}{\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{(X_{i:n} > u)}}$$

- El numerador es la suma de los excesos sobre el umbral,  $u$ , y el denominador el número de valores mayores a este umbral, es decir, se estima a través de la media aritmética de los valores que exceden a  $u$
- En la práctica, es común que los umbrales sean los propios datos de la muestra, i.e.,  $u = X_{k+1}$ , y la expresión reduce a:

$$\bullet \quad \hat{e}_n(X_k) = \frac{\sum_{i=1}^k X_i}{k} - X_{k+1}$$

- La gráfica de la función media de excesos es una gráfica de los puntos

- La gráfica de la función media de excesos es una gráfica de los puntos
  - $(X_{k:n}, \hat{e}_n(X_{k:n}))$ ,  $k = 1, \dots, n - 1$

- La gráfica de la función media de excesos es una gráfica de los puntos
  - $(X_{k:n}, \hat{e}_n(X_{k:n}))$ ,  $k = 1, \dots, n - 1$
- Entonces, para encontrar el umbral,  $u$ , para el cual es razonable pensar que el ajuste a través de la distribución generalizada de Pareto es adecuado, se debe *elegir el umbral, tomando el valor a partir del cual la gráfica toma una forma lineal ascendente*, ya que la gráfica de exceso medio para la distribución Pareto generalizada es lineal y tiende a infinito con pendiente positiva

## ● Medidas de riesgo

- **Medidas de riesgo**

- Los modelos probabilísticos (las densidades o distribuciones mencionadas anteriormente) nos proporcionan una descripción de la exposición al riesgo, no obstante, necesitamos describir esta exposición con algún valor numérico o con unos pocos valores numéricos

- **Medidas de riesgo**

- Los modelos probabilísticos (las densidades o distribuciones mencionadas anteriormente) nos proporcionan una descripción de la exposición al riesgo, no obstante, necesitamos describir esta exposición con algún valor numérico o con unos pocos valores numéricos
- Estos valores son funciones del modelo y se conocen como *indicadores clave de riesgo*

## ● **Medidas de riesgo**

- Los modelos probabilísticos (las densidades o distribuciones mencionadas anteriormente) nos proporcionan una descripción de la exposición al riesgo, no obstante, necesitamos describir esta exposición con algún valor numérico o con unos pocos valores numéricos
- Estos valores son funciones del modelo y se conocen como *indicadores clave de riesgo*
- Estos indicadores son resúmenes numéricos sobre el comportamiento del riesgo, parecidos a los que usamos para describir una variable aleatoria

- **Medidas de riesgo**

- Los modelos probabilísticos (las densidades o distribuciones mencionadas anteriormente) nos proporcionan una descripción de la exposición al riesgo, no obstante, necesitamos describir esta exposición con algún valor numérico o con unos pocos valores numéricos
- Estos valores son funciones del modelo y se conocen como *indicadores clave de riesgo*
- Estos indicadores son resúmenes numéricos sobre el comportamiento del riesgo, parecidos a los que usamos para describir una variable aleatoria
- Informan a los administradores de riesgo, sobre el grado en que la compañía está sujeta a un particular aspecto del riesgo

- Una medida de riesgo está en correspondencia con la pérdida asociada a este riesgo

- Una medida de riesgo está en correspondencia con la pérdida asociada a este riesgo
- Una medida de riesgo proporciona un solo número que intenta cuantificar la exposición a este riesgo.

- Una medida de riesgo está en correspondencia con la pérdida asociada a este riesgo
- Una medida de riesgo proporciona un solo número que intenta cuantificar la exposición a este riesgo.
- Esta medida se denota como  $\rho(x)$ . Es conveniente pensar a  $\rho(x)$  como la cantidad de activos requeridos para protegerse de las consecuencias adversas del riesgo, X

- Una medida de riesgo está en correspondencia con la pérdida asociada a este riesgo
- Una medida de riesgo proporciona un solo número que intenta cuantificar la exposición a este riesgo.
- Esta medida se denota como  $\rho(x)$ . Es conveniente pensar a  $\rho(x)$  como la cantidad de activos requeridos para protegerse de las consecuencias adversas del riesgo, X
- **Coherencia de una medida de riesgo**

- Una medida de riesgo está en correspondencia con la pérdida asociada a este riesgo
- Una medida de riesgo proporciona un solo número que intenta cuantificar la exposición a este riesgo.
- Esta medida se denota como  $\rho(x)$ . Es conveniente pensar a  $\rho(x)$  como la cantidad de activos requeridos para protegerse de las consecuencias adversas del riesgo, X
- **Coherencia de una medida de riesgo**
- Wang, Young y Panjer (1997) introducen ciertos axiomas, que representan propiedades deseables de una medida de riesgo.  
Artzner et al. (1997) introduce el concepto de *coherencia* y se considera el *parteaguas* en medición de riesgo

- Una *medida de riesgo coherente*, es una medida de riesgo  $\rho(x)$  con las cuatro propiedades siguientes. Para cualesquiera dos variables aleatorias de pérdida X y Y :

- Una *medida de riesgo coherente*, es una medida de riesgo  $\rho(x)$  con las cuatro propiedades siguientes. Para cualesquiera dos variables aleatorias de pérdida X y Y :
  - **Subaditividad:**  $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$

- Una *medida de riesgo coherente*, es una medida de riesgo  $\rho(x)$  con las cuatro propiedades siguientes. Para cualesquiera dos variables aleatorias de pérdida X y Y :
  - **Subaditividad:**  $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$
  - **Monotonía:** Si  $X \leq Y$  para todas las posibles consecuencias, entonces  $\rho(X) \leq \rho(Y)$

- Una *medida de riesgo coherente*, es una medida de riesgo  $\rho(x)$  con las cuatro propiedades siguientes. Para cualesquiera dos variables aleatorias de pérdida X y Y :
  - **Subaditividad:**  $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$
  - **Monotonía:** Si  $X \leq Y$  para todas las posibles consecuencias, entonces  $\rho(X) \leq \rho(Y)$
  - **Homogeneidad positiva:** Para cualquier constante positiva  $c$ ,  $\rho(cX) = c\rho(X)$

- Una *medida de riesgo coherente*, es una medida de riesgo  $\rho(x)$  con las cuatro propiedades siguientes. Para cualesquiera dos variables aleatorias de pérdida X y Y :
  - **Subaditividad:**  $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$
  - **Monotonía:** Si  $X \leq Y$  para todas las posibles consecuencias, entonces  $\rho(X) \leq \rho(Y)$
  - **Homogeneidad positiva:** Para cualquier constante positiva  $c$ ,  $\rho(cX) = c\rho(X)$
  - **Invarianza a translaciones:** Para cualquier constante positiva  $c$ ,  $\rho(X + c) = \rho(X) + c$

- Una medida de riesgo coherente, es una medida de riesgo  $\rho(x)$  con las cuatro propiedades siguientes. Para cualesquiera dos variables aleatorias de pérdida X y Y :
  - **Subaditividad:**  $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$
  - **Monotonía:** Si  $X \leq Y$  para todas las posibles consecuencias, entonces  $\rho(X) \leq \rho(Y)$
  - **Homogeneidad positiva:** Para cualquier constante positiva  $c$ ,  $\rho(cX) = c\rho(X)$
  - **Invarianza a translaciones:** Para cualquier constante positiva  $c$ ,  $\rho(X + c) = \rho(X) + c$
- Subaditividad significa que la medida de riesgo (y, por lo tanto, el capital requerido para darle soporte) de dos riesgos combinados, no será mayor que los riesgos considerados por separado

- Subadditividad refleja el hecho que diversificar el riesgo puede ser benéfico para una empresa

- Subadditividad refleja el hecho que diversificar el riesgo puede ser benéfico para una empresa
- **Valor en Riesgo (VaR)**

- Subadditividad refleja el hecho que diversificar el riesgo puede ser benéfico para una empresa
- **Valor en Riesgo (VaR)**
- El *VaR* es la medida estándar para medir exposición al riesgo

- Subadditividad refleja el hecho que diversificar el riesgo puede ser benéfico para una empresa
- **Valor en Riesgo (VaR)**
- El  $VaR$  es la medida estándar para medir exposición al riesgo
- En términos generales,  $VaR$  es el capital requerido para asegurar, con alto grado de certeza, que la empresa no será técnicamente insolvente

- Subadditividad refleja el hecho que diversificar el riesgo puede ser benéfico para una empresa
- **Valor en Riesgo (VaR)**
- El *VaR* es la medida estándar para medir exposición al riesgo
- En términos generales, *VaR* es el capital requerido para asegurar, con alto grado de certeza, que la empresa no será técnicamente insolvente
- El grado de certeza se elige de manera arbitraria. En la práctica se usan valores grandes como 99.95% para toda la empresa, o 95% para una sola clase de riesgo

- Subadditividad refleja el hecho que diversificar el riesgo puede ser benéfico para una empresa
- **Valor en Riesgo (VaR)**
- El *VaR* es la medida estándar para medir exposición al riesgo
- En términos generales, *VaR* es el capital requerido para asegurar, con alto grado de certeza, que la empresa no será técnicamente insolvente
- El grado de certeza se elige de manera arbitraria. En la práctica se usan valores grandes como 99.95% para toda la empresa, o 95% para una sola clase de riesgo
- El *VaR* mide la pérdida que se podría sufrir, en condiciones normales del mercado, en un intervalo de tiempo y con un determinado nivel de confianza

- Por ejemplo, un inversionista que tiene un portafolios de activos por un valor de 10 millones de pesos, podría establecer que el *VaR* diario de su portafolios es 250,000 con un nivel de confianza de 95%

- Por ejemplo, un inversionista que tiene un portafolios de activos por un valor de 10 millones de pesos, podría establecer que el *VaR* diario de su portafolios es 250,000 con un nivel de confianza de 95%
- En otras palabras, solamente uno de cada 20 días de operación del mercado ( $1/20 = 5\%$ ), en condiciones normales, la pérdida que ocurrirá puede ser mayor o igual a 250,000

- Definición técnica del VaR

- **Definición técnica del VaR**

- Sea  $X$  una v. a. con función de distribución,  $F(x)$ , que denota pérdida. *El Valor en Riesgo (VaR) de  $X$  al 100% $p$  nivel de confianza*, denotado por  $VaR_p(X)$  o  $\pi_p$ , es el  $p$ -ésimo percentil de la distribución de  $X$

- **Definición técnica del VaR**

- Sea  $X$  una v. a. con función de distribución,  $F(x)$ , que denota pérdida. *El Valor en Riesgo (VaR)* de  $X$  al  $100\%p$  nivel de confianza, denotado por  $VaR_p(X)$  o  $\pi_p$ , es el  $p$ -ésimo percentil de la distribución de  $X$

- $\mathbb{P}(X > \pi_p) = 1 - p$

## • Definición técnica del VaR

- Sea  $X$  una v. a. con función de distribución,  $F(x)$ , que denota pérdida. *El Valor en Riesgo (VaR)* de  $X$  al  $100\%p$  nivel de confianza, denotado por  $VaR_p(X)$  o  $\pi_p$ , es el  $p$ -ésimo percentil de la distribución de  $X$

$$\bullet \mathbb{P}(X > \pi_p) = 1 - p$$

- Pese a la popularidad de esta medida, conviene aclarar que *VaR* no es subaditiva, lo que la convierte en una medida *incoherente* de riesgo, y no refleja el efecto por la diversificación de los riesgos

## ● Ejemplos

## • Ejemplos

- Calculemos el  $VaR$  de algunas de las distribuciones de uso común como modelos de pérdida

## • Ejemplos

- Calculemos el *VaR* de algunas de las distribuciones de uso común como modelos de pérdida
  - **Distribución Normal( $\mu, \sigma^2$ )**. Aunque esta distribución puede ser cuestionable como modelo de pérdida, suele considerarse por su gran uso en estadística. Para encontrar su *VaR*, tenemos

## • Ejemplos

- Calculemos el *VaR* de algunas de las distribuciones de uso común como modelos de pérdida

- **Distribución Normal( $\mu, \sigma^2$ )**. Aunque esta distribución puede ser cuestionable como modelo de pérdida, suele considerarse por su gran uso en estadística. Para encontrar su *VaR*, tenemos

•

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[X > VaR_p(x)] &= 1 - p \\ \Rightarrow \mathbb{P}[X \leq VaR_p(x)] &= p \\ \Rightarrow \mathbb{P}\left[\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{VaR_p(x) - \mu}{\sigma}\right] &= p \\ \Rightarrow \mathbb{P}\left[z \leq \frac{VaR_p(x) - \mu}{\sigma}\right] &= p \\ \Rightarrow \frac{VaR_p(x) - \mu}{\sigma} &= \Phi^{-1}(p) \Rightarrow VaR_p(x) \\ &= \mu + \sigma\Phi^{-1}(p)\end{aligned}$$

- **Distribución Exponencial( $\theta$ )**. Recordar que su función de distribución es  $1 - e^{-x/\theta}$ . Entonces

- **Distribución Exponencial( $\theta$ )**. Recordar que su función de distribución es  $1 - e^{-x/\theta}$ . Entonces
- 

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[X \leq VaR_p(x)] &= p \\ \Rightarrow 1 - e^{-VaR_p(x)/\theta} &= p \\ \Rightarrow VaR_p(x) &= -\theta \log(1 - p)\end{aligned}$$

- **Distribución Exponencial( $\theta$ )**. Recordar que su función de distribución es  $1 - e^{-x/\theta}$ . Entonces



$$\begin{aligned}\mathbb{P}[X \leq VaR_p(x)] &= p \\ \Rightarrow 1 - e^{-VaR_p(x)/\theta} &= p \\ \Rightarrow VaR_p(x) &= -\theta \log(1 - p)\end{aligned}$$

- Log-normal( $\mu, \sigma^2$ ) y Pareto( $\alpha, \theta$ ) se dejan como ejercicio al lector

- TailVaR (TVaR)

- TailVaR (TVaR)
- Definición técnica del TVaR

- **TailVaR (TVaR)**
- **Definición técnica del TVaR**
- Sea  $X$  v. a. con función de distribución  $F(X)$ , que denota pérdida. El  $TVaR$  de  $X$  al  $100\%p$  nivel de seguridad, denotado por  $TVaR_p(X)$ , es la pérdida esperada dado que ésta excede el  $p$ -ésimo percentil de la distribución de  $X$

- TailVaR (TVaR)
- Definición técnica del TVaR
- Sea  $X$  v. a. con función de distribución  $F(X)$ , que denota pérdida. El TVaR de  $X$  al  $100\%p$  nivel de seguridad, denotado por  $TVaR_p(X)$ , es la pérdida esperada dado que ésta excede el  $p$ -ésimo percentil de la distribución de  $X$

$$\bullet \quad TVaR_p(X) = \mathbb{E}(X|X > \pi_p) = \frac{\int_{\pi_p}^{\infty} xf(x)dx}{1 - F(\pi_p)}$$

- TailVaR (TVaR)
- Definición técnica del TVaR
- Sea  $X$  v. a. con función de distribución  $F(X)$ , que denota pérdida. El TVaR de  $X$  al  $100\%p$  nivel de seguridad, denotado por  $TVaR_p(X)$ , es la pérdida esperada dado que ésta excede el  $p$ -ésimo percentil de la distribución de  $X$

$$\bullet \quad TVaR_p(X) = \mathbb{E}(X|X > \pi_p) = \frac{\int_{\pi_p}^{\infty} xf(x)dx}{1 - F(\pi_p)}$$

- Una forma alternativa más interesante de escribir esta cantidad, es:

- TailVaR (TVaR)
- Definición técnica del TVaR
- Sea  $X$  v. a. con función de distribución  $F(X)$ , que denota pérdida. El TVaR de  $X$  al  $100\%p$  nivel de seguridad, denotado por  $TVaR_p(X)$ , es la pérdida esperada dado que ésta excede el  $p$ -ésimo percentil de la distribución de  $X$

$$\bullet \quad TVaR_p(X) = \mathbb{E}(X|X > \pi_p) = \frac{\int_{\pi_p}^{\infty} xf(x)dx}{1 - F(\pi_p)}$$

- Una forma alternativa más interesante de escribir esta cantidad, es:

$$\bullet \quad TVaR_p(X) = \mathbb{E}(X|X > \pi_p) = \frac{\int_p^1 VaR_u(X)du}{1 - p}$$

- Esta expresión del  $TVaR$  implica que puede verse como un promedio de todos los valores  $VaR$  por encima del valor de seguridad  $p$

- Esta expresión del  $TVaR$  implica que puede verse como un promedio de todos los valores  $VaR$  por encima del valor de seguridad  $p$
- Lo que significa que proporciona mucho más información sobre la cola de la distribución que la que da el  $VaR$

- Esta expresión del  $TVaR$  implica que puede verse como un promedio de todos los valores  $VaR$  por encima del valor de seguridad  $p$
- Lo que significa que proporciona mucho más información sobre la cola de la distribución que la que da el  $VaR$
- $TVaR$  recibe otros nombres en el campo de los seguros:  
*Conditional Tail Expectation(CTE)*, *Tail Conditional Expectation (TCE)* y *Expected Shortfall (ES)*

- Esta expresión del  $TVaR$  implica que puede verse como un promedio de todos los valores  $VaR$  por encima del valor de seguridad  $p$
- Lo que significa que proporciona mucho más información sobre la cola de la distribución que la que da el  $VaR$
- $TVaR$  recibe otros nombres en el campo de los seguros:  
*Conditional Tail Expectation(CTE)*, *Tail Conditional Expectation (TCE)* y *Expected Shortfall (ES)*
- Finalmente, podemos decir que el  $TVaR$  es el valor esperado de las perdidas en aquellos casos en que se excede el nivel de seguridad previamente fijado

- Esta expresión del  $TVaR$  implica que puede verse como un promedio de todos los valores  $VaR$  por encima del valor de seguridad  $p$
- Lo que significa que proporciona mucho más información sobre la cola de la distribución que la que da el  $VaR$
- $TVaR$  recibe otros nombres en el campo de los seguros:  
*Conditional Tail Expectation(CTE)*, *Tail Conditional Expectation (TCE)* y *Expected Shortfall (ES)*
- Finalmente, podemos decir que el  $TVaR$  es el valor esperado de las perdidas en aquellos casos en que se excede el nivel de seguridad previamente fijado
- $TVaR$  refleja con mayor fidelidad los eventos extremos que pueden amenazar la posición financiera de la entidad

- Otra forma común de escribir el  $TVaR$  es

- Otra forma común de escribir el *TVaR* es

$$\bullet \quad TVaR_p(X) = \mathbb{E}(X | X > \pi_p) = \pi_p + \frac{\int_{\pi_p}^{\infty} (x - \pi_p) f(x) dx}{1 - p} = VaR_p(X) + e(\pi_p)$$

- Otra forma común de escribir el  $TVaR$  es

$$\bullet TVaR_p(X) = \mathbb{E}(X|X > \pi_p) = \pi_p + \frac{\int_{\pi_p}^{\infty} (x - \pi_p) f(x) dx}{1 - p} = VaR_p(X) + e(\pi_p)$$

- A  $e(\pi_p)$  se le conoce como *la función media de exceso de pérdida*. Entonces,  $TVaR$  es mayor que su correspondiente  $VaR$  por el promedio de exceso de todas las pérdidas que exceden al  $VaR$

- Otra forma común de escribir el  $TVaR$  es

$$\bullet TVaR_p(X) = \mathbb{E}(X|X > \pi_p) = \pi_p + \frac{\int_{\pi_p}^{\infty} (x - \pi_p) f(x) dx}{1 - p} = VaR_p(X) + e(\pi_p)$$

- A  $e(\pi_p)$  se le conoce como *la función media de exceso de pérdida*. Entonces,  $TVaR$  es mayor que su correspondiente  $VaR$  por el promedio de exceso de todas las pérdidas que exceden al  $VaR$
- Contrario al  $VaR$ ,  $TVaR$  es una medida de riesgo coherente, por lo que refleja el efecto de la diversificación de riesgos

- Otra forma común de escribir el  $TVaR$  es

$$\bullet TVaR_p(X) = \mathbb{E}(X|X > \pi_p) = \pi_p + \frac{\int_{\pi_p}^{\infty} (x - \pi_p) f(x) dx}{1 - p} = VaR_p(X) + e(\pi_p)$$

- A  $e(\pi_p)$  se le conoce como *la función media de exceso de pérdida*. Entonces,  $TVaR$  es mayor que su correspondiente  $VaR$  por el promedio de exceso de todas las pérdidas que exceden al  $VaR$
- Contrario al  $VaR$ ,  $TVaR$  es una medida de riesgo coherente, por lo que refleja el efecto de la diversificación de riesgos
- Dado un umbral de confianza, en datos reales, el  $TVaR$  es más difícil de calcular que el  $VaR$ , ya que ambas se calculan con los datos (generalmente escasos) acumulados en la cola de la distribución (mayor error de estimación)

## ● Ejemplos

- Ejemplos
- Exponencial( $\theta$ )

- Ejemplos

- Exponencial( $\theta$ )

- $VaR_p(X) = -\theta \log(1 - p)$ , y podemos mostrar que,

- Ejemplos

- Exponencial( $\theta$ )

- $VaR_p(X) = -\theta \log(1 - p)$ , y podemos mostrar que,

- $e(x) = \frac{\int_{\pi_p}^{\infty} S(x)dx}{S(\pi_p)}$

- Ejemplos

- Exponencial( $\theta$ )

- $VaR_p(X) = -\theta \log(1 - p)$ , y podemos mostrar que,

- $e(x) = \frac{\int_{\pi_p}^{\infty} S(x)dx}{S(\pi_p)}$

- Con  $S(\cdot)$  la función de supervivencia de la variable aleatoria.  
Utilizando este resultados tenemos

- Ejemplos

- Exponencial( $\theta$ )

- $VaR_p(X) = -\theta \log(1 - p)$ , y podemos mostrar que,

- $e(x) = \frac{\int_{\pi_p}^{\infty} S(x) dx}{S(\pi_p)}$

- Con  $S(\cdot)$  la función de supervivencia de la variable aleatoria.

Utilizando este resultados tenemos



$$\begin{aligned} e(x) &= \frac{\int_{\pi_p}^{\infty} e^{-x/\theta} dx}{1-p} \\ &= \frac{-\theta e^{-x/\theta} \Big|_{\pi_p}^{\infty}}{1-p} \\ &= \frac{\theta e^{-\pi_p/\theta}}{1-p} = \frac{\theta(1-p)}{(1-p)} \\ &= \theta \end{aligned}$$

- Por lo tanto

$$TVaR_p(X) = VaR_p(X) + e(x) = -\theta \log(1-p) + \theta$$

- Por lo tanto

$$TVaR_p(X) = VaR_p(X) + e(x) = -\theta \log(1-p) + \theta$$

- Pareto( $\alpha, \theta$ )

- Por lo tanto

$$TVaR_p(X) = VaR_p(X) + e(x) = -\theta \log(1-p) + \theta$$

- **Pareto( $\alpha, \theta$ )**
- Esta distribución tiene

- Por lo tanto

$$TVaR_p(X) = VaR_p(X) + e(x) = -\theta \log(1-p) + \theta$$

- **Pareto( $\alpha, \theta$ )**
- Esta distribución tiene

- $VaR_p = \theta \left[ (1-p)^{-1/\alpha} - 1 \right] \quad y \quad S(x) = \left( \frac{\theta}{\theta+x} \right)^\alpha$

- Por lo tanto

$$TVaR_p(X) = VaR_p(X) + e(x) = -\theta \log(1-p) + \theta$$

- **Pareto( $\alpha, \theta$ )**
- Esta distribución tiene

- $VaR_p = \theta \left[ (1-p)^{-1/\alpha} - 1 \right] \quad y \quad S(x) = \left( \frac{\theta}{\theta+x} \right)^\alpha$

- Calculemos  $e(x) = \frac{\int_{\pi p}^{\infty} S(x) dx}{S(\pi p)}$

- Por lo tanto

$$TVaR_p(X) = VaR_p(X) + e(x) = -\theta \log(1-p) + \theta$$

- **Pareto( $\alpha, \theta$ )**

- Esta distribución tiene

- $VaR_p = \theta \left[ (1-p)^{-1/\alpha} - 1 \right] \quad y \quad S(x) = \left( \frac{\theta}{\theta+x} \right)^\alpha$

- Calculemos  $e(x) = \frac{\int_{\pi p}^{\infty} S(x) dx}{S(\pi p)}$



$$\begin{aligned} e(x) &= \frac{\int_{\pi p}^{\infty} \left( \frac{\theta}{\theta+x} \right)^\alpha dx}{1-p} \\ &= \frac{\theta^\alpha (\theta + \pi p)^{1-\alpha}}{\alpha - 1} \\ &= \frac{\theta^\alpha (\theta + \pi p) \left( \frac{1}{\theta + \pi p} \right)^\alpha}{(\alpha - 1)(1-p)} \end{aligned}$$

- Si remplazamos  $\pi_p$ , por su valor y realizamos las operaciones algebraicas, obtenemos

- Si remplazamos  $\pi_p$ , por su valor y realizamos las operaciones algebraicas, obtenemos

$$• e(x) = \frac{\theta + \pi_p}{\alpha - 1}$$

- Si remplazamos  $\pi_p$ , por su valor y realizamos las operaciones algebraicas, obtenemos

$$e(x) = \frac{\theta + \pi_p}{\alpha - 1}$$

- Por lo que finalmente tenemos

- Si remplazamos  $\pi_p$ , por su valor y realizamos las operaciones algebraicas, obtenemos

$$e(x) = \frac{\theta + \pi_p}{\alpha - 1}$$

- Por lo que finalmente tenemos

$$\bullet \quad TVaR_p(X) = VaR_p(X) + \frac{\theta + \pi_p}{\alpha - 1} = VaR_p(X) + \frac{VaR_p(X) + \theta}{\alpha - 1}$$

- Si remplazamos  $\pi_p$ , por su valor y realizamos las operaciones algebraicas, obtenemos

$$e(x) = \frac{\theta + \pi_p}{\alpha - 1}$$

- Por lo que finalmente tenemos

$$\bullet \quad TVaR_p(X) = VaR_p(X) + \frac{\theta + \pi_p}{\alpha - 1} = VaR_p(X) + \frac{VaR_p(X) + \theta}{\alpha - 1}$$

- Casos Normal y Log-normal se dejan como ejercicio al lector

## ● Distribuciones discretas

- **Distribuciones discretas**

- Además de modelar el monto de reclamación, también interesa modelar la frecuencia con las que estas pérdidas ocurren

- **Distribuciones discretas**

- Además de modelar el monto de reclamación, también interesa modelar la frecuencia con las que estas pérdidas ocurren
- Como es de suponer, los modelos para caracterizar esta frecuencia de pérdidas, corresponden a distribuciones para variables aleatorias discretas

- **Distribuciones discretas**

- Además de modelar el monto de reclamación, también interesa modelar la frecuencia con las que estas pérdidas ocurren
- Como es de suponer, los modelos para caracterizar esta frecuencia de pérdidas, corresponden a distribuciones para variables aleatorias discretas
- Es importante señalar que este tipo de distribuciones también pueden utilizarse cuando los montos de pérdida se agrupan en una tabla de frecuencias, situación muy común en el quehacer de las compañías aseguradoras

## ● Distribuciones discretas

- Además de modelar el monto de reclamación, también interesa modelar la frecuencia con las que estas pérdidas ocurren
- Como es de suponer, los modelos para caracterizar esta frecuencia de pérdidas, corresponden a distribuciones para variables aleatorias discretas
- Es importante señalar que este tipo de distribuciones también pueden utilizarse cuando los montos de pérdida se agrupan en una tabla de frecuencias, situación muy común en el quehacer de las compañías aseguradoras
- Antes de iniciar la presentación de los modelos para v.a. discretas y sus características, es conveniente recordar una importante función asociada a estas variables

- La función generadora de probabilidades

- **La función generadora de probabilidades**

- Sea  $N$  una v.a. discreta, con función de probabilidad denotada como  $p_k = \mathbb{P}(N = k)$ ,  $k = 0, 1, 2\dots$  que representa, en nuestro caso, la probabilidad de que exactamente  $k$  reclamaciones ocurran

- **La función generadora de probabilidades**
- Sea  $N$  una v.a. discreta, con función de probabilidad denotada como  $p_k = \mathbb{P}(N = k)$ ,  $k = 0, 1, 2\dots$  que representa, en nuestro caso, la probabilidad de que exactamente  $k$  reclamaciones ocurran
- La función generadora de probabilidades (f.g.p.) para esta v.a. es

- **La función generadora de probabilidades**
- Sea  $N$  una v.a. discreta, con función de probabilidad denotada como  $p_k = \mathbb{P}(N = k)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  que representa, en nuestro caso, la probabilidad de que exactamente  $k$  reclamaciones ocurran
- La función generadora de probabilidades (f.g.p.) para esta v.a. es

$$\bullet \quad \mathbb{P}_N(z) = \mathbb{E}(z^N) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$$

- **La función generadora de probabilidades**

- Sea  $N$  una v.a. discreta, con función de probabilidad denotada como  $p_k = \mathbb{P}(N = k)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  que representa, en nuestro caso, la probabilidad de que exactamente  $k$  reclamaciones ocurran
- La función generadora de probabilidades (f.g.p.) para esta v.a. es

$$\bullet \mathbb{P}_N(z) = \mathbb{E}(z^N) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$$

- Que recibe este nombre porque

- **La función generadora de probabilidades**

- Sea  $N$  una v.a. discreta, con función de probabilidad denotada como  $p_k = \mathbb{P}(N = k)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  que representa, en nuestro caso, la probabilidad de que exactamente  $k$  reclamaciones ocurran
- La función generadora de probabilidades (f.g.p.) para esta v.a. es

$$\bullet \quad \mathbb{P}_N(z) = \mathbb{E}(z^N) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$$

- Que recibe este nombre porque



$$\frac{1}{k!} \frac{d^k}{dz^k} \mathbb{P}_N(0) = \mathbb{P}(N = k)$$

- La familia de distribuciones Binomial( $n,q$ )

- **La familia de distribuciones Binomial( $n,q$ )**

- Esta distribución caracteriza el número de éxitos o fracasos, según sea el caso, en  $n$  ensayos Bernoulli independientes. Su función de densidad de probabilidad es

## ● La familia de distribuciones Binomial(n,q)

- Esta distribución caracteriza el número de éxitos o fracasos, según sea el caso, en  $n$  ensayos Bernoulli independientes. Su función de densidad de probabilidad es

- $p_k = \mathbb{P}(N = k) = \binom{n}{x} q^k (1 - q)^{n-k}, \quad x = 0, 1, \dots, n, \quad 0 < q < 1$

## ● La familia de distribuciones Binomial(n,q)

- Esta distribución caracteriza el número de éxitos o fracasos, según sea el caso, en  $n$  ensayos Bernoulli independientes. Su función de densidad de probabilidad es

- $p_k = \mathbb{P}(N = k) = \binom{n}{x} q^k (1 - q)^{n-k}, \quad x = 0, 1, \dots, n, \quad 0 < q < 1$

- Cuyas características son

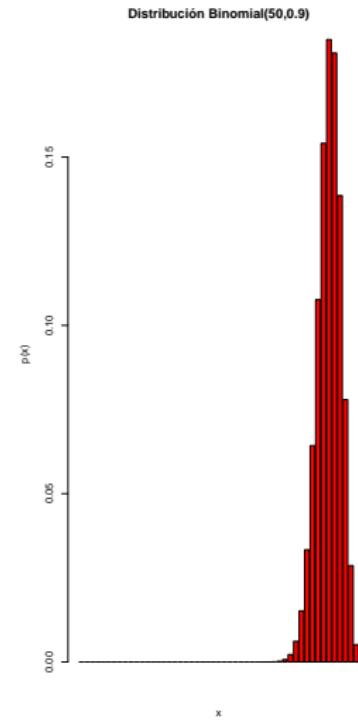
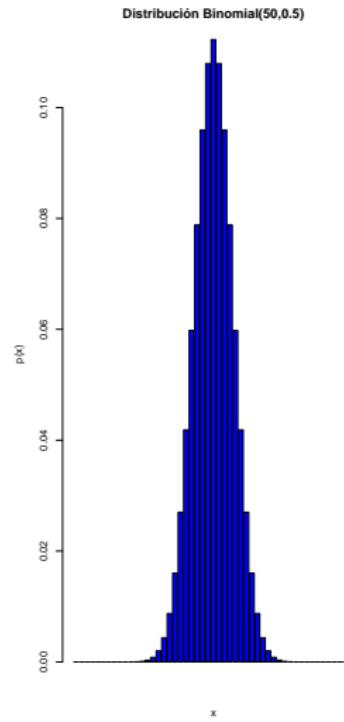
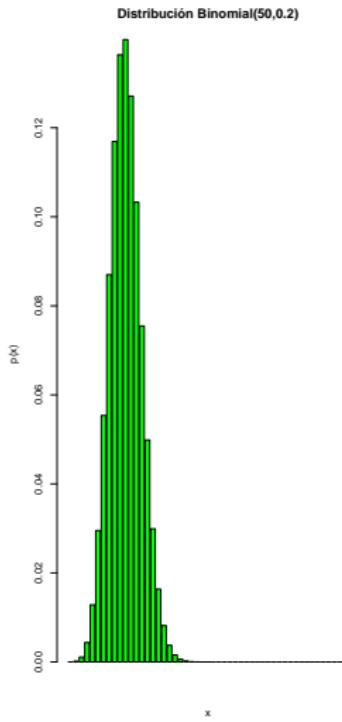
## ● La familia de distribuciones Binomial(n,q)

- Esta distribución caracteriza el número de éxitos o fracasos, según sea el caso, en  $n$  ensayos Bernoulli independientes. Su función de densidad de probabilidad es

- $p_k = \mathbb{P}(N = k) = \binom{n}{x} q^k (1 - q)^{n-k}, \quad x = 0, 1, \dots, n, \quad 0 < q < 1$

- Cuyas características son

- $\mathbb{E}(N) = nq; \quad \mathbb{V}(N) = nq(1 - q); \quad \mathbb{P}(N) = (1 + q(z - 1))^n; \quad M_N(t) = [(1 - q) + qe^t]^n$





- La familia de distribuciones Geométrica( $\beta$ )

- **La familia de distribuciones Geométrica( $\beta$ )**

- La distribución geométrica caracteriza el número,  $X$ , de ensayos Bernoulli necesarios para obtener un éxito;  
 $x = 1, 2, 3, \dots$ , o también es...

## ● La familia de distribuciones Geométrica( $\beta$ )

- La distribución geométrica caracteriza el número,  $X$ , de ensayos Bernoulli necesarios para obtener un éxito;  $x = 1, 2, 3, \dots$ , o también es...
- La distribución de probabilidad del número  $Y=X-1$  de fallas antes de obtener el primer éxito;  $y = 0, 1, 2, 3, \dots$

## ● La familia de distribuciones Geométrica( $\beta$ )

- La distribución geométrica caracteriza el número,  $X$ , de ensayos Bernoulli necesarios para obtener un éxito;  $x = 1, 2, 3, \dots$ , o también es...
- La distribución de probabilidad del número  $Y=X-1$  de fallas antes de obtener el primer éxito;  $y = 0, 1, 2, 3, \dots$
- Entonces, si  $p = \frac{\beta}{1 + \beta}$  es la probabilidad de un éxito, la función de densidad de probabilidad de esta variable aleatoria es

## ● La familia de distribuciones Geométrica( $\beta$ )

- La distribución geométrica caracteriza el número,  $X$ , de ensayos Bernoulli necesarios para obtener un éxito;  $x = 1, 2, 3, \dots$ , o también es...
- La distribución de probabilidad del número  $Y=X-1$  de fallas antes de obtener el primer éxito;  $y = 0, 1, 2, 3, \dots$
- Entonces, si  $p = \frac{\beta}{1 + \beta}$  es la probabilidad de un éxito, la función de densidad de probabilidad de esta variable aleatoria es
- 

$$\mathbb{P}(N = k) = \left(\frac{\beta}{1 + \beta}\right)^{k-1} \frac{1}{1 + \beta}; \quad k = 1, 2, \dots \text{ o bien}$$

$$\mathbb{P}(N = k) = \left(\frac{\beta}{1 + \beta}\right)^k \frac{1}{1 + \beta}; \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

- Con características

## ● La familia de distribuciones Geométrica( $\beta$ )

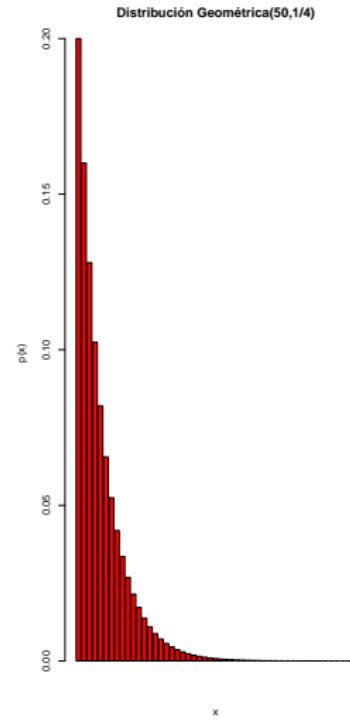
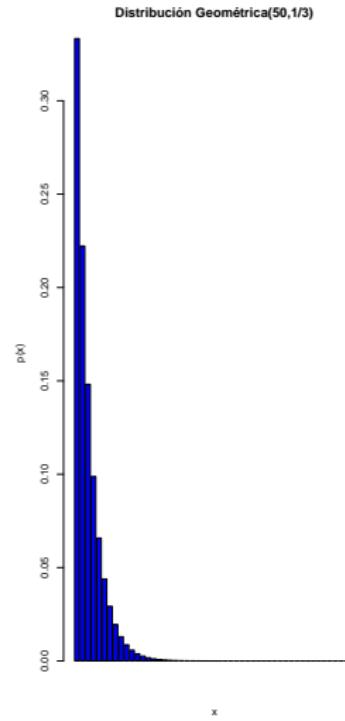
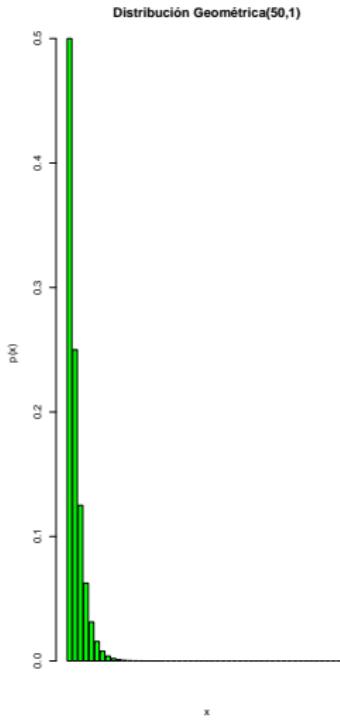
- La distribución geométrica caracteriza el número,  $X$ , de ensayos Bernoulli necesarios para obtener un éxito;  $x = 1, 2, 3, \dots$ , o también es...
- La distribución de probabilidad del número  $Y=X-1$  de fallas antes de obtener el primer éxito;  $y = 0, 1, 2, 3, \dots$
- Entonces, si  $p = \frac{\beta}{1 + \beta}$  es la probabilidad de un éxito, la función de densidad de probabilidad de esta variable aleatoria es
- 

$$\mathbb{P}(N = k) = \left( \frac{\beta}{1 + \beta} \right)^{k-1} \frac{1}{1 + \beta}; \quad k = 1, 2, \dots \text{ o bien}$$

$$\mathbb{P}(N = k) = \left( \frac{\beta}{1 + \beta} \right)^k \frac{1}{1 + \beta}; \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

- Con características

●  $\mathbb{E}(N) = \beta; \quad \mathbb{V}(N) = \beta(1 + \beta); \quad \mathbb{P}(N) = (1 - \beta(z - 1))^{-1}; \quad M_N(t) = [1 + \beta(1 - e^t)]^{-1}$



- La familia de distribuciones Poisson( $\lambda$ )

## ● La familia de distribuciones Poisson( $\lambda$ )

- Esta es, probablemente, la más importante de las distribuciones discretas para modelar la frecuencia de reclamaciones

## ● La familia de distribuciones Poisson( $\lambda$ )

- Esta es, probablemente, la más importante de las distribuciones discretas para modelar la frecuencia de reclamaciones
- La distribución Poisson puede contemplarse como el caso límite de la distribución  $Binomial(n, p)$ , donde  $n$  es muy grande y la probabilidad de ocurrencia  $p$  es constante y muy pequeña

## ● La familia de distribuciones Poisson( $\lambda$ )

- Esta es, probablemente, la más importante de las distribuciones discretas para modelar la frecuencia de reclamaciones
- La distribución Poisson puede contemplarse como el caso límite de la distribución  $Binomial(n, p)$ , donde  $n$  es muy grande y la probabilidad de ocurrencia  $p$  es constante y muy pequeña
- En este caso,  $N$  sigue una distribución Poisson con parámetro  $\lambda = np$

## ● La familia de distribuciones Poisson( $\lambda$ )

- Esta es, probablemente, la más importante de las distribuciones discretas para modelar la frecuencia de reclamaciones
- La distribución Poisson puede contemplarse como el caso límite de la distribución  $Binomial(n, p)$ , donde  $n$  es muy grande y la probabilidad de ocurrencia  $p$  es constante y muy pequeña
- En este caso,  $N$  sigue una distribución Poisson con parámetro  $\lambda = np$
- Decimos que  $N \sim Poisson(\lambda)$ , si  $N$  tiene función de densidad de probabilidad dada por

## ● La familia de distribuciones Poisson( $\lambda$ )

- Esta es, probablemente, la más importante de las distribuciones discretas para modelar la frecuencia de reclamaciones
- La distribución Poisson puede contemplarse como el caso límite de la distribución  $Binomial(n, p)$ , donde  $n$  es muy grande y la probabilidad de ocurrencia  $p$  es constante y muy pequeña
- En este caso,  $N$  sigue una distribución Poisson con parámetro  $\lambda = np$
- Decimos que  $N \sim Poisson(\lambda)$ , si  $N$  tiene función de densidad de probabilidad dada por

- $\mathbb{P}(N = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}; \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad \lambda > 0$

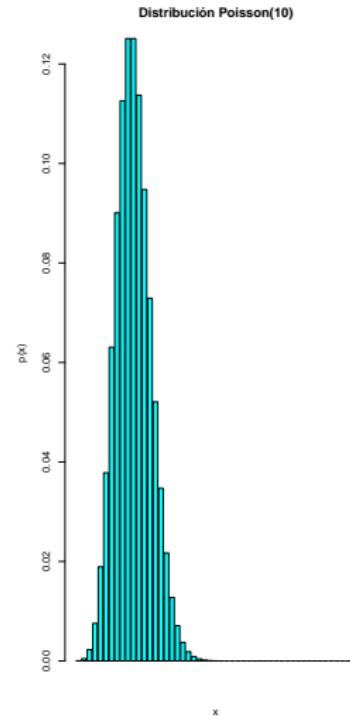
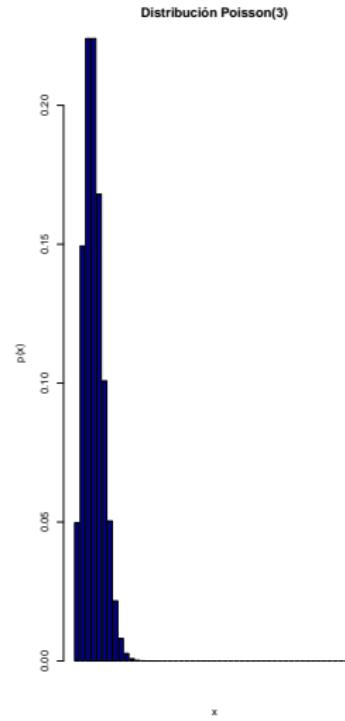
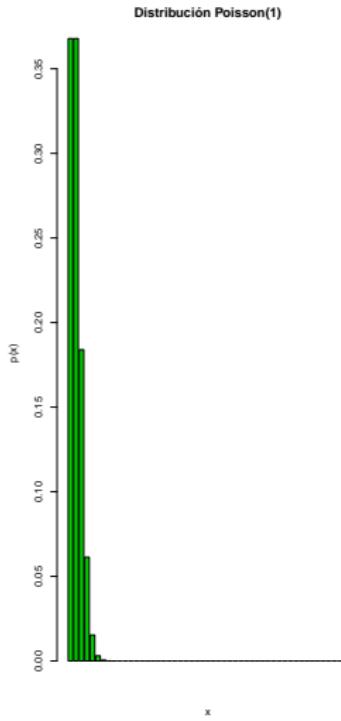
- Con características

- Con características

- $\mathbb{E}(N) = \lambda; \quad \mathbb{V}(N) = \lambda; \quad \mathbb{P}(N) = e^{\lambda(z-1)}; \quad M_N(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$

- Con características

- $\mathbb{E}(N) = \lambda; \quad \mathbb{V}(N) = \lambda; \quad \mathbb{P}(N) = e^{\lambda(z-1)}; \quad M_N(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$
- El hecho de que la Poisson tenga media y varianza igual, proporciona un fuerte evidencia empírica para determinar si un conjunto particular de frecuencias de reclamaciones sigue esta distribución. Bastaría calcular la media y varianza de los datos y ver si estas cantidades son similares



- Familia de distribuciones Binomial Negativa  $(\beta, k)$

- **Familia de distribuciones Binomial Negativa ( $\beta, k$ )**
- Una distribución que puede usarse como alternativa a una Poisson es la *Binomial Negativa*. Existen al menos dos razones para considerar esta distribución en lugar de la Poisson.

- **Familia de distribuciones Binomial Negativa ( $\beta, k$ )**
- Una distribución que puede usarse como alternativa a una Poisson es la *Binomial Negativa*. Existen al menos dos razones para considerar esta distribución en lugar de la Poisson.
  - Dado que esta distribución tiene dos parámetros, es más flexible, en el sentido de que puede tener formas más diversas, que la Poisson que únicamente tiene un parámetro

- **Familia de distribuciones Binomial Negativa ( $\beta, k$ )**
- Una distribución que puede usarse como alternativa a una Poisson es la *Binomial Negativa*. Existen al menos dos razones para considerar esta distribución en lugar de la Poisson.
  - Dado que esta distribución tiene dos parámetros, es más flexible, en el sentido de que puede tener formas más diversas, que la Poisson que únicamente tiene un parámetro
  - Como su varianza es más grande que su media, constituye también una alternativa para modelar datos de conteo sobredispersos, que son muy comunes en aplicaciones reales

- **Familia de distribuciones Binomial Negativa ( $\beta, k$ )**
- Una distribución que puede usarse como alternativa a una Poisson es la *Binomial Negativa*. Existen al menos dos razones para considerar esta distribución en lugar de la Poisson.
  - Dado que esta distribución tiene dos parámetros, es más flexible, en el sentido de que puede tener formas más diversas, que la Poisson que únicamente tiene un parámetro
  - Como su varianza es más grande que su media, constituye también una alternativa para modelar datos de conteo sobredispersos, que son muy comunes en aplicaciones reales
- Una forma estándar de concebir esta distribución es en una situación de *muestreo por cuota*

- Este esquema de muestreo es típico de investigaciones de mercado, en las que se pide a un individuo entrevistar a un número no definido de sujetos ( $n$ ) hasta que una parte de ellos ( $m$ : *cuota fija*) haya contestado afirmativamente a alguna pregunta o haya preferido un producto

- Este esquema de muestreo es típico de investigaciones de mercado, en las que se pide a un individuo entrevistar a un número no definido de sujetos ( $n$ ) hasta que una parte de ellos ( $m$ : *cuota fija*) haya contestado afirmativamente a alguna pregunta o haya preferido un producto
- Se asume que la probabilidad,  $p$ , de que obtengamos una respuesta afirmativa, es la misma para cualquier sujeto

- Este esquema de muestreo es típico de investigaciones de mercado, en las que se pide a un individuo entrevistar a un número no definido de sujetos ( $n$ ) hasta que una parte de ellos ( $m$ : *cuota fija*) haya contestado afirmativamente a alguna pregunta o haya preferido un producto
- Se asume que la probabilidad,  $p$ , de que obtengamos una respuesta afirmativa, es la misma para cualquier sujeto
- Este esquema es similar al que se modelaría con una Binomial, pero, mientras en la Binomial el número de “éxitos”,  $m$ , es aleatorio y el número de ensayos,  $n$ , es fijo, en este caso sucede exactamente al revés: el número de “éxitos”,  $m$ , es fijo (no aleatorio) y el número de ensayos ( $n$ : total de entrevistados necesarios para tener  $m$  éxitos) es aleatorio

- La función de densidad de esta v.a. es

- La función de densidad de esta v.a. es

$$\bullet \quad \mathbb{P}(N = k) = \binom{m+k-1}{k} \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^m \left(\frac{1}{1+\beta}\right)^k \quad k=0,1,2,\dots$$

- La función de densidad de esta v.a. es

$$\bullet \quad \mathbb{P}(N = k) = \binom{m+k-1}{k} \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^m \left(\frac{1}{1+\beta}\right)^k \quad k=0,1,2,\dots$$

- Obsérvese que si  $k = 1$ , la Binomial Negativa se convierte en la Geométrica. Al igual que en nuestra definición de la densidad geométrica, aquí  $p = \frac{\beta}{1 + \beta}$

- La función de densidad de esta v.a. es

$$\bullet \quad \mathbb{P}(N = k) = \binom{m+k-1}{k} \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^m \left(\frac{1}{1+\beta}\right)^k \quad k=0,1,2,\dots$$

- Obsérvese que si  $k = 1$ , la Binomial Negativa se convierte en la Geométrica. Al igual que en nuestra definición de la densidad geométrica, aquí  $p = \frac{\beta}{1 + \beta}$
- Características de esta v.a.

- La función de densidad de esta v.a. es

$$\bullet \quad \mathbb{P}(N = k) = \binom{m+k-1}{k} \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^m \left(\frac{1}{1+\beta}\right)^k \quad k=0,1,2,\dots$$

- Obsérvese que si  $k = 1$ , la Binomial Negativa se convierte en la Geométrica. Al igual que en nuestra definición de la densidad geométrica, aquí  $p = \frac{\beta}{1 + \beta}$
- Características de esta v.a.
- 

$$\mathbb{E}(N) = k\beta; \quad \mathbb{V}(N) = k\beta(1+\beta); \quad P_N(t) = [1 - \beta(1-t)]^{-k}; \quad M_N(t) = \left[ \frac{1}{1 + \beta(1 - e^t)} \right]^k$$

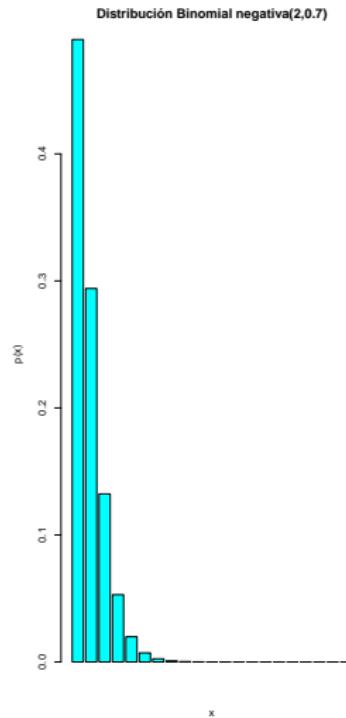
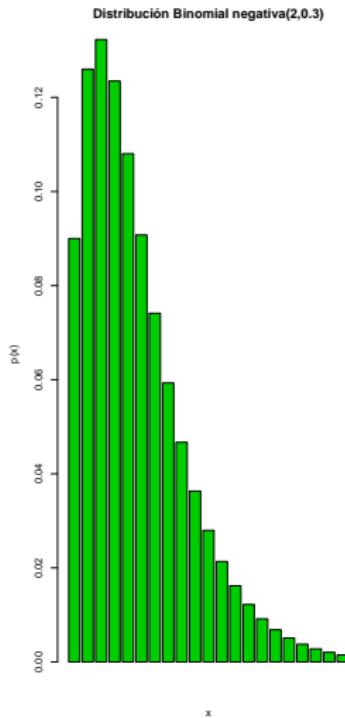
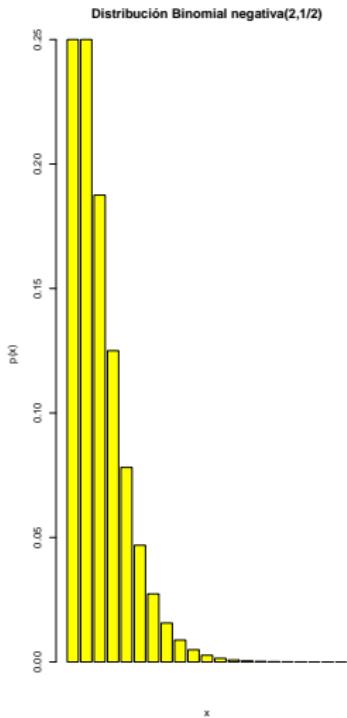
- La función de densidad de esta v.a. es

•  $\mathbb{P}(N = k) = \binom{m+k-1}{k} \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^m \left(\frac{1}{1+\beta}\right)^k \quad k=0,1,2,\dots$

- Obsérvese que si  $k = 1$ , la Binomial Negativa se convierte en la Geométrica. Al igual que en nuestra definición de la densidad geométrica, aquí  $p = \frac{\beta}{1 + \beta}$
- Características de esta v.a.
- 

$$\mathbb{E}(N) = k\beta; \quad \mathbb{V}(N) = k\beta(1+\beta); \quad P_N(t) = [1 - \beta(z - 1)]^{-k}; \quad M_N(t) = \left[ \frac{1}{1 + \beta(1 - e^t)} \right]^k$$

- Ya que  $\beta > 0$ , entonces la varianza de la binomial negativa es mayor que su media, razón por la que suele usarse como alternativa a la Poisson cuando ésta es sobre dispersa  
( $Var > media$ )



- Distribuciones de la clase  $(a,b,0)$

- **Distribuciones de la clase (a,b,0)**
- Ahora vamos a definir una clase general de distribuciones discretas, que será de mucha utilidad para la modelación de frecuencias de reclamaciones.

- **Distribuciones de la clase  $(a,b,0)$**
- Ahora vamos a definir una clase general de distribuciones discretas, que será de mucha utilidad para la modelación de frecuencias de reclamaciones.
- **La clase  $(a,b,0)$**

- **Distribuciones de la clase  $(a,b,0)$**
- Ahora vamos a definir una clase general de distribuciones discretas, que será de mucha utilidad para la modelación de frecuencias de reclamaciones.
- **La clase  $(a,b,0)$**
- **Definición 2** Una distribución de frecuencias  $\{p_k\}$  es miembro de la clase  $(a, b, 0)$  si existen constantes  $a$  y  $b$  tales que

- **Distribuciones de la clase  $(a,b,0)$**

- Ahora vamos a definir una clase general de distribuciones discretas, que será de mucha utilidad para la modelación de frecuencias de reclamaciones.

- **La clase  $(a,b,0)$**

- **Definición 2** Una distribución de frecuencias  $\{p_k\}$  es miembro de la clase  $(a, b, 0)$  si existen constantes  $a$  y  $b$  tales que

$$\bullet \quad \frac{p_k}{p_{k-1}} = a + \frac{b}{k}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

- **Distribuciones de la clase  $(a,b,0)$**

- Ahora vamos a definir una clase general de distribuciones discretas, que será de mucha utilidad para la modelación de frecuencias de reclamaciones.

- **La clase  $(a,b,0)$**

- **Definición 2** Una distribución de frecuencias  $\{p_k\}$  es miembro de la clase  $(a, b, 0)$  si existen constantes  $a$  y  $b$  tales que

$$\bullet \quad \frac{p_k}{p_{k-1}} = a + \frac{b}{k}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

- Donde  $a$  y  $b$  son constantes propias de cada distribución. En la siguiente tabla se muestran los miembros de esta clase, con cada uno de sus valores de estas constantes, así como el valor de la función de probabilidad en cero,  $p_0$ .

## Distribuciones de la clase (a,b,0)

Distribución	a	b	$p_0$
$Binomial(n,q)$	$-\frac{q}{1-q}$	$(n+1)\frac{q}{1-q}$	$(1+q)^n$
 $Poisson(\lambda)$	0	$\lambda$	$e^{-\lambda}$
$BN(\beta,k)$	$\frac{\beta}{1+\beta}$	$(k-1)\frac{\beta}{1+\beta}$	$(1+\beta)^{-k}$
$Geométrica(\beta)$	$\frac{\beta}{1+\beta}$	0	$(1+\beta)^{-1}$

## Distribuciones de la clase (a,b,0)

Distribución	a	b	$p_0$
$Binomial(n,q)$	$-\frac{q}{1-q}$	$(n+1)\frac{q}{1-q}$	$(1+q)^n$
$Poisson(\lambda)$	0	$\lambda$	$e^{-\lambda}$
$BN(\beta,k)$	$\frac{\beta}{1+\beta}$	$(k-1)\frac{\beta}{1+\beta}$	$(1+\beta)^{-k}$
$Geométrica(\beta)$	$\frac{\beta}{1+\beta}$	0	$(1+\beta)^{-1}$

- La clase( $a, b, 0$ ) es una hiper familia de distribuciones discretas, cuyos miembros son las distribuciones mencionadas

## Distribuciones de la clase (a,b,0)

Distribución	a	b	$p_0$
<i>Binomial(n,q)</i>	$-\frac{q}{1-q}$	$(n+1)\frac{q}{1-q}$	$(1+q)^n$
<i>Poisson(λ)</i>	0	$\lambda$	$e^{-\lambda}$
<i>BN(β,k)</i>	$\frac{\beta}{1+\beta}$	$(k-1)\frac{\beta}{1+\beta}$	$(1+\beta)^{-k}$
<i>Geométrica(β)</i>	$\frac{\beta}{1+\beta}$	0	$(1+\beta)^{-1}$

- La clase( $a, b, 0$ ) es una hiper familia de distribuciones discretas, cuyos miembros son las distribuciones mencionadas
- Esta clase provee una forma de encontrar las probabilidades de las distribuciones discretas, a través de esta fórmula recursiva, y resulta bastante práctica al momento de querer ajustarlas a nuestros datos. Además, podemos reescribir la fórmula de tal manera que quede como una función lineal. Es decir

$$\bullet \quad \frac{kp_k}{p_{k-1}} = ak + b, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

$$\bullet \quad \frac{kp_k}{p_{k-1}} = ak + b, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

- Con esta forma lineal es posible identificar, por medio de su pendiente, la distribución de probabilidad. Esto es, si la pendiente es igual a cero, entonces se trata de una distribución Poisson; si es negativa, entonces será Binomial y si es positiva es una distribución Binomial Negativa

$$\bullet \quad \frac{kp_k}{p_{k-1}} = ak + b, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

- Con esta forma lineal es posible identificar, por medio de su pendiente, la distribución de probabilidad. Esto es, si la pendiente es igual a cero, entonces se trata de una distribución Poisson; si es negativa, entonces será Binomial y si es positiva es una distribución Binomial Negativa
- Concretamente tenemos

$$\bullet \quad \frac{kp_k}{p_{k-1}} = ak + b, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

- Con esta forma lineal es posible identificar, por medio de su pendiente, la distribución de probabilidad. Esto es, si la pendiente es igual a cero, entonces se trata de una distribución Poisson; si es negativa, entonces será Binomial y si es positiva es una distribución Binomial Negativa
- Concretamente tenemos

$$\bullet \quad \text{Binomial}(n, q) \quad \frac{kp_k}{p_{k-1}} = (n+1) \frac{q}{1-q} - \frac{q}{1-q} k \quad \text{que es una línea recta con pendiente negativa}$$

$$\bullet \frac{kp_k}{p_{k-1}} = ak + b, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

- Con esta forma lineal es posible identificar, por medio de su pendiente, la distribución de probabilidad. Esto es, si la pendiente es igual a cero, entonces se trata de una distribución Poisson; si es negativa, entonces será Binomial y si es positiva es una distribución Binomial Negativa
- Concretamente tenemos

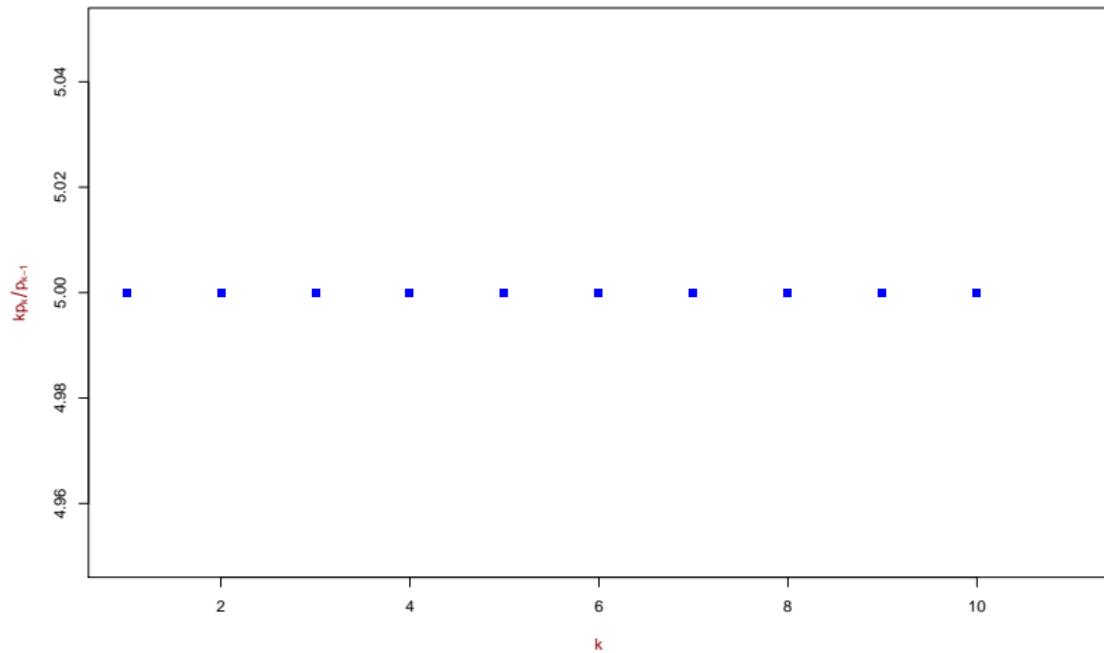
- $Binomial(n, q) \quad \frac{kp_k}{p_{k-1}} = (n+1)\frac{q}{1-q} - \frac{q}{1-q}k$  que es una línea recta con pendiente *negativa*
- $Poisson(\lambda) \quad \frac{kp_k}{p_{k-1}} = \lambda + 0k$  que es una línea recta con pendiente *cero*

•  $\frac{kp_k}{p_{k-1}} = ak + b, \quad k = 1, 2, 3, \dots$

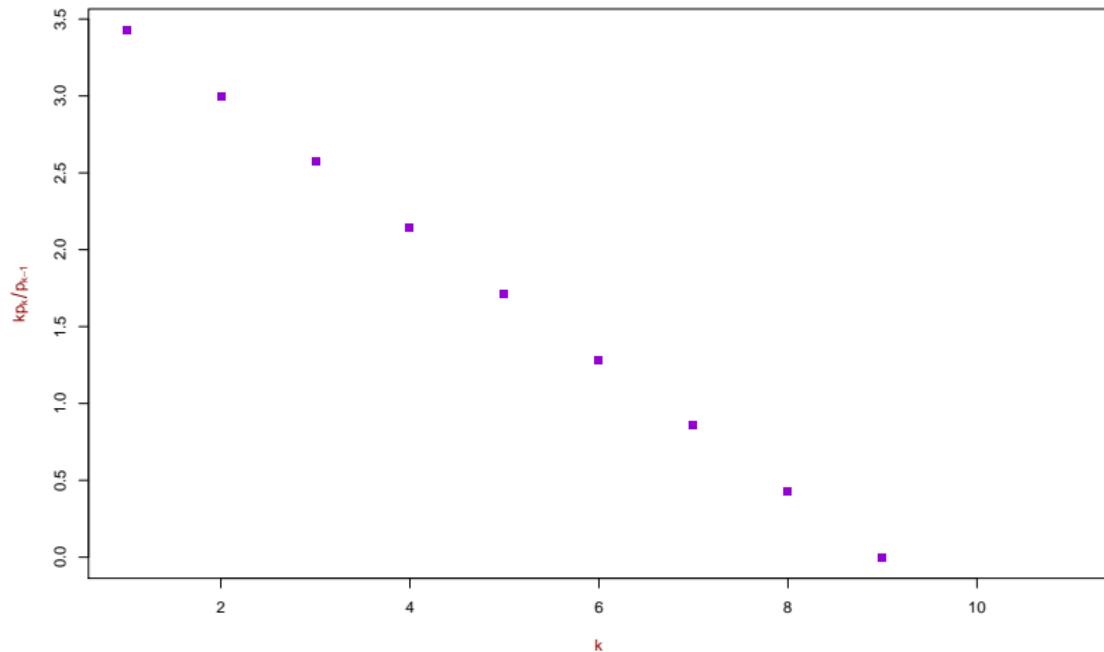
- Con esta forma lineal es posible identificar, por medio de su pendiente, la distribución de probabilidad. Esto es, si la pendiente es igual a cero, entonces se trata de una distribución Poisson; si es negativa, entonces será Binomial y si es positiva es una distribución Binomial Negativa
- Concretamente tenemos

- $Binomial(n, q) \quad \frac{kp_k}{p_{k-1}} = (n+1)\frac{q}{1-q} - \frac{q}{1-q}k \quad$  que es una línea recta con pendiente *negativa*
- $Poisson(\lambda) \quad \frac{kp_k}{p_{k-1}} = \lambda + 0k \quad$  que es una línea recta con pendiente *cero*
- $BN(\beta, r) \quad \frac{kp_k}{p_{k-1}} = (r-1)\frac{\beta}{1+\beta} + \frac{\beta}{1+\beta}k \quad$  que es una línea recta con pendiente *positiva*

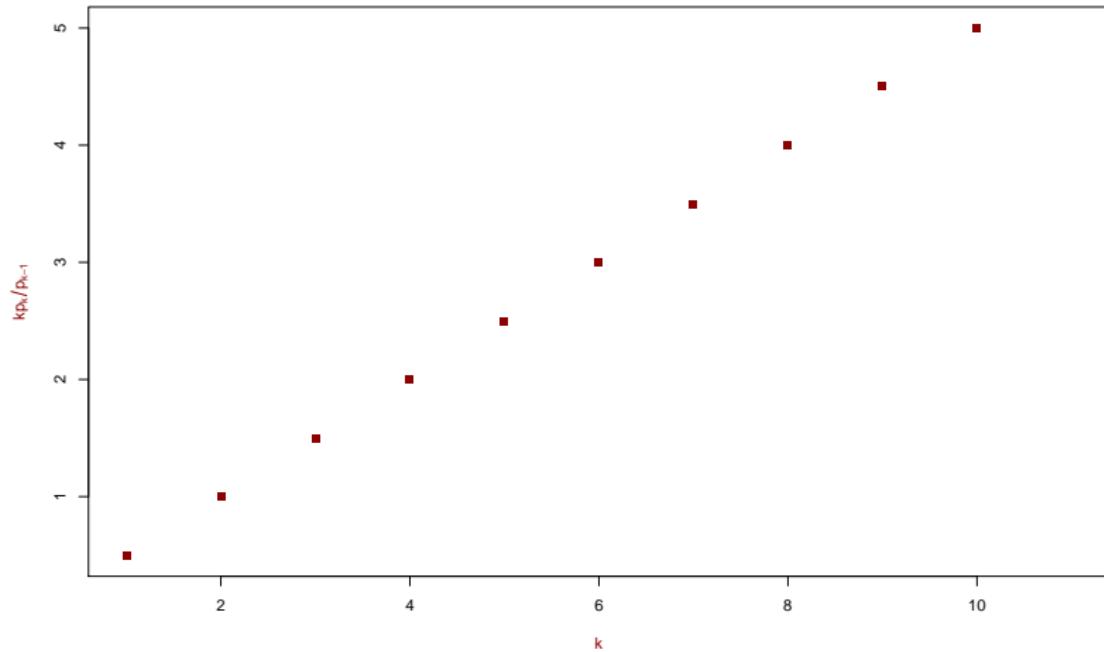
## Distribución Poisson



## Distribución Binomial



## Distribución Binomial Negativa



- Distribuciones de clase (a, b, 1)

## ● Distribuciones de clase (a, b, 1)

- Algunas veces las distribuciones de frecuencia anteriores no describen adecuadamente el comportamiento de un conjunto de datos real

## ● Distribuciones de clase (a, b, 1)

- Algunas veces las distribuciones de frecuencia anteriores no describen adecuadamente el comportamiento de un conjunto de datos real
- Por ejemplo, porque la distribución elegida no ajusta adecuadamente a la cola de los datos, o porque el miembro elegido de la clase (a, b, 0) no captura, en alguna parte, la forma de la distribución de los datos

## ● Distribuciones de clase (a, b, 1)

- Algunas veces las distribuciones de frecuencia anteriores no describen adecuadamente el comportamiento de un conjunto de datos real
- Por ejemplo, porque la distribución elegida no ajusta adecuadamente a la cola de los datos, o porque el miembro elegido de la clase (a, b, 0) no captura, en alguna parte, la forma de la distribución de los datos
- Un problema adicional ocurre con la cola izquierda de la distribución, en particular con la probabilidad en cero

## ● Distribuciones de clase (a, b, 1)

- Algunas veces las distribuciones de frecuencia anteriores no describen adecuadamente el comportamiento de un conjunto de datos real
- Por ejemplo, porque la distribución elegida no ajusta adecuadamente a la cola de los datos, o porque el miembro elegido de la clase (a, b, 0) no captura, en alguna parte, la forma de la distribución de los datos
- Un problema adicional ocurre con la cola izquierda de la distribución, en particular con la probabilidad en cero
- Para datos de seguros, la probabilidad en cero denota la probabilidad de que no ocurran reclamaciones en un determinado periodo de tiempo

- En situaciones donde la ocurrencia de pérdidas es baja, la probabilidad en cero toma un valor grande. Por lo que hay que prestar especial atención sobre el ajuste en este punto

- En situaciones donde la ocurrencia de pérdidas es baja, la probabilidad en cero toma un valor grande. Por lo que hay que prestar especial atención sobre el ajuste en este punto
- En contraste, existen situaciones en las que la probabilidad de no sufrir pérdidas en un periodo determinado, es prácticamente cero, como sucede, por ejemplo, para un seguro de autos de una gran flota de vehículos, o en un seguro de enfermedades

- En situaciones donde la ocurrencia de pérdidas es baja, la probabilidad en cero toma un valor grande. Por lo que hay que prestar especial atención sobre el ajuste en este punto
- En contraste, existen situaciones en las que la probabilidad de no sufrir pérdidas en un periodo determinado, es prácticamente cero, como sucede, por ejemplo, para un seguro de autos de una gran flota de vehículos, o en un seguro de enfermedades
- Es fácil hacer un ajuste a la probabilidad en cero de los modelos que componen la clase  $(a, b, 0)$ , para considerar estas situaciones

- **La clase  $(a, b, 1)$**  es la familia de distribuciones que satisfacen la fórmula recursiva

- La clase  $(a, b, 1)$  es la familia de distribuciones que satisfacen la fórmula recursiva

$$\bullet \quad \frac{p_k}{p_{k-1}} = a + \frac{b}{k} \quad k = 2, 3, \dots \quad \text{o} \quad \frac{kp_k}{p_{k-1}} = ak + b \quad (\text{forma lineal})$$

- La clase  $(a, b, 1)$  es la familia de distribuciones que satisfacen la fórmula recursiva

$$\bullet \quad \frac{p_k}{p_{k-1}} = a + \frac{b}{k} \quad k = 2, 3, \dots \quad \text{o} \quad \frac{kp_k}{p_{k-1}} = ak + b \quad (\text{forma lineal})$$

- La única diferencia con la anterior es que ésta inicia en  $p_1$  y no en  $p_0$ . Identificamos dos tipos de estas distribuciones

- La clase **(a, b, 1)** es la familia de distribuciones que satisfacen la fórmula recursiva

$$\bullet \quad \frac{p_k}{p_{k-1}} = a + \frac{b}{k} \quad k = 2, 3, \dots \quad \text{o} \quad \frac{k p_k}{p_{k-1}} = a k + b \quad (\text{forma lineal})$$

- La única diferencia con la anterior es que ésta inicia en  $p_1$  y no en  $p_0$ . Identificamos dos tipos de estas distribuciones
  - **Truncada en cero (zero-truncated)**: cuando  $p_0 = 0$

- La clase  $(a, b, 1)$  es la familia de distribuciones que satisfacen la fórmula recursiva

$$\bullet \quad \frac{p_k}{p_{k-1}} = a + \frac{b}{k} \quad k = 2, 3, \dots \quad \text{o} \quad \frac{k p_k}{p_{k-1}} = a k + b \quad (\text{forma lineal})$$

- La única diferencia con la anterior es que ésta inicia en  $p_1$  y no en  $p_0$ . Identificamos dos tipos de estas distribuciones
  - Truncada en cero (zero-truncated): cuando  $p_0 = 0$
  - Modificada en cero (zero-modified): cuando  $p_0 > 0$

- La clase **(a, b, 1)** es la familia de distribuciones que satisfacen la fórmula recursiva

$$\bullet \quad \frac{p_k}{p_{k-1}} = a + \frac{b}{k} \quad k = 2, 3, \dots \quad \text{o} \quad \frac{k p_k}{p_{k-1}} = a k + b \quad (\text{forma lineal})$$

- La única diferencia con la anterior es que ésta inicia en  $p_1$  y no en  $p_0$ . Identificamos dos tipos de estas distribuciones
  - Truncada en cero (zero-truncated): cuando  $p_0 = 0$
  - Modificada en cero (zero-modified): cuando  $p_0 > 0$
- Es claro que lo que estamos haciendo es modificar a nuestra voluntad el valor asignado a las probabilidades para el valor nulo de la variable aleatoria en cuestión

- La clase **(a, b, 1)** es la familia de distribuciones que satisfacen la fórmula recursiva

$$\bullet \quad \frac{p_k}{p_{k-1}} = a + \frac{b}{k} \quad k = 2, 3, \dots \quad \text{o} \quad \frac{kp_k}{p_{k-1}} = ak + b \quad (\text{forma lineal})$$

- La única diferencia con la anterior es que ésta inicia en  $p_1$  y no en  $p_0$ . Identificamos dos tipos de estas distribuciones
  - Truncada en cero (zero-truncated): cuando  $p_0 = 0$
  - Modificada en cero (zero-modified): cuando  $p_0 > 0$
- Es claro que lo que estamos haciendo es modificar a nuestra voluntad el valor asignado a las probabilidades para el valor nulo de la variable aleatoria en cuestión
- Estas modificaciones deben responder al problema particular que estemos modelando.

- Una distribución de la clase  $(a, b, 1)$  tiene la misma forma que su correspondiente en la clase  $(a, b, 0)$ , en el sentido que sus probabilidades son las mismas salvo una constante de proporcionalidad.

- Una distribución de la clase  $(a, b, 1)$  tiene la misma forma que su correspondiente en la clase  $(a, b, 0)$ , en el sentido que sus probabilidades son las mismas salvo una constante de proporcionalidad.
- Relación entre estas clases

- Una distribución de la clase  $(a, b, 1)$  tiene la misma forma que su correspondiente en la clase  $(a, b, 0)$ , en el sentido que sus probabilidades son las mismas salvo una constante de proporcionalidad.
- Relación entre estas clases

- Sea  $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$  la fgp de un miembro de la clase  $(a, b, 0)$  y  $P^M(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k^M z^k$  la fgp del miembro correspondiente de la clase  $(a, b, 1)$

Como dijimos, se tiene que

- Una distribución de la clase  $(a, b, 1)$  tiene la misma forma que su correspondiente en la clase  $(a, b, 0)$ , en el sentido que sus probabilidades son las mismas salvo una constante de proporcionalidad.
- Relación entre estas clases

- Sea  $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$  la fgp de un miembro de la clase  $(a, b, 0)$  y  $P^M(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k^M z^k$  la fgp del miembro correspondiente de la clase  $(a, b, 1)$

Como dijimos, se tiene que

$$\bullet \quad p_k^M = cp_k, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

- Una distribución de la clase  $(a, b, 1)$  tiene la misma forma que su correspondiente en la clase  $(a, b, 0)$ , en el sentido que sus probabilidades son las mismas salvo una constante de proporcionalidad.
- Relación entre estas clases

- Sea  $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$  la fgp de un miembro de la clase  $(a, b, 0)$  y  $P^M(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k^M z^k$  la fgp del miembro correspondiente de la clase  $(a, b, 1)$

Como dijimos, se tiene que

- $p_k^M = cp_k, \quad k = 1, 2, 3, \dots$
- Con  $p_0^M$  un número arbitrario. Entonces



$$\begin{aligned} P^M(z) &= p_0^M + \sum_{k=1}^{\infty} p_k^M z^k \\ &= p_0^M + c \sum_{k=1}^{\infty} p_k z^k \\ &= p_0^M + c [P(z) - p_0] \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}P^M(z) &= p_0^M + \sum_{k=1}^{\infty} p_k^M z^k \\&= p_0^M + c \sum_{k=1}^{\infty} p_k z^k \\&= p_0^M + c [P(z) - p_0]\end{aligned}$$

- Ya que  $P^M(1) = P(1) = 1$ , entonces



$$\begin{aligned} P^M(z) &= p_0^M + \sum_{k=1}^{\infty} p_k^M z^k \\ &= p_0^M + c \sum_{k=1}^{\infty} p_k z^k \\ &= p_0^M + c [P(z) - p_0] \end{aligned}$$

- Ya que  $P^M(1) = P(1) = 1$ , entonces

- $1 = p_0^M + c(1 - p_0)$



$$\begin{aligned} P^M(z) &= p_0^M + \sum_{k=1}^{\infty} p_k^M z^k \\ &= p_0^M + c \sum_{k=1}^{\infty} p_k z^k \\ &= p_0^M + c [P(z) - p_0] \end{aligned}$$

- Ya que  $P^M(1) = P(1) = 1$ , entonces

- $1 = p_0^M + c(1 - p_0)$

- Y obtenemos



$$\begin{aligned} P^M(z) &= p_0^M + \sum_{k=1}^{\infty} p_k^M z^k \\ &= p_0^M + c \sum_{k=1}^{\infty} p_k z^k \\ &= p_0^M + c [P(z) - p_0] \end{aligned}$$

- Ya que  $P^M(1) = P(1) = 1$ , entonces

- $1 = p_0^M + c(1 - p_0)$

- Y obtenemos

- $c = \frac{1 - p_0^M}{1 - p_0}, \quad o \quad p_0^M = 1 - c(1 - p_0)$



$$\begin{aligned}P^M(z) &= p_0^M + \sum_{k=1}^{\infty} p_k^M z^k \\&= p_0^M + c \sum_{k=1}^{\infty} p_k z^k \\&= p_0^M + c [P(z) - p_0]\end{aligned}$$

- Ya que  $P^M(1) = P(1) = 1$ , entonces

- $1 = p_0^M + c(1 - p_0)$

- Y obtenemos

- $c = \frac{1 - p_0^M}{1 - p_0}, \quad o \quad p_0^M = 1 - c(1 - p_0)$

- Si remplazamos este valor en la expresión para  $P^M(z)$ , tenemos



$$\begin{aligned}
 P^M(z) &= p_0^M + \sum_{k=1}^{\infty} p_k^M z^k \\
 &= p_0^M + c \sum_{k=1}^{\infty} p_k z^k \\
 &= p_0^M + c [P(z) - p_0]
 \end{aligned}$$

- Ya que  $P^M(1) = P(1) = 1$ , entonces

- $1 = p_0^M + c(1 - p_0)$

- Y obtenemos

- $c = \frac{1 - p_0^M}{1 - p_0}$ , o  $p_0^M = 1 - c(1 - p_0)$

- Si remplazamos este valor en la expresión para  $P^M(z)$ , tenemos

- $\left(1 - \frac{1 - p_0^M}{1 - p_0}\right) + \frac{1 - p_0^M}{1 - p_0} P(z)$



$$\begin{aligned}
 P^M(z) &= p_0^M + \sum_{k=1}^{\infty} p_k^M z^k \\
 &= p_0^M + c \sum_{k=1}^{\infty} p_k z^k \\
 &= p_0^M + c [P(z) - p_0]
 \end{aligned}$$

- Ya que  $P^M(1) = P(1) = 1$ , entonces

- $1 = p_0^M + c(1 - p_0)$

- Y obtenemos

- $c = \frac{1 - p_0^M}{1 - p_0}$ , o  $p_0^M = 1 - c(1 - p_0)$

- Si remplazamos este valor en la expresión para  $P^M(z)$ , tenemos

- $\left(1 - \frac{1 - p_0^M}{1 - p_0}\right) + \frac{1 - p_0^M}{1 - p_0} P(z)$

- Que es un promedio ponderado de las fgps de una distribución degenerada y la del miembro correspondiente de la clase  $(a, b, 0)$

- Además tenemos

- Además tenemos

$$\bullet \quad p_k^M = \frac{1 - p_0^M}{1 - p_0} p_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

- Además tenemos

$$\bullet \quad p_k^M = \frac{1 - p_0^M}{1 - p_0} p_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

- Si ahora denotamos  $P^T(z)$  a la *fgp* de una distribución truncada en cero, correspondiente a la *fgp* de un miembro de la clase  $(a, b, 0)$ ,  $P(z)$ . Remplazando  $p_0^M = 0$  en las expresiones anteriores, tenemos

- Además tenemos

$$\bullet \quad p_k^M = \frac{1 - p_0^M}{1 - p_0} p_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

- Si ahora denotamos  $P^T(z)$  a la *fgp* de una distribución truncada en cero, correspondiente a la *fgp* de un miembro de la clase  $(a, b, 0)$ ,  $P(z)$ . Remplazando  $p_0^M = 0$  en las expresiones anteriores, tenemos

- 

$$\begin{aligned} P^T(z) &= \frac{P(z) - p_0}{1 - p_0}, \\ p_k^T &= \frac{p_k}{1 - p_0}, \quad k = 1, 2, \dots, \\ p_k^M &= (1 - p_0^M)p_k^T, \quad k = 1, 2, \dots \text{ y} \\ P^M(z) &= p_0^M + (1 - p_0^M)P^T(z) \end{aligned}$$

- Además tenemos

$$\bullet \quad p_k^M = \frac{1 - p_0^M}{1 - p_0} p_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

- Si ahora denotamos  $P^T(z)$  a la *fgp* de una distribución truncada en cero, correspondiente a la *fgp* de un miembro de la clase  $(a, b, 0)$ ,  $P(z)$ . Remplazando  $p_0^M = 0$  en las expresiones anteriores, tenemos

- 

$$\begin{aligned} P^T(z) &= \frac{P(z) - p_0}{1 - p_0}, \\ p_k^T &= \frac{p_k}{1 - p_0}, \quad k = 1, 2, \dots, \\ p_k^M &= (1 - p_0^M)p_k^T, \quad k = 1, 2, \dots \text{ y} \\ P^M(z) &= p_0^M + (1 - p_0^M)P^T(z) \end{aligned}$$

- También un promedio ponderado entre una distribución degenerada y el correspondiente miembro de la clase  $(a, b, 0)$ , truncada en cero.

- Ejercicio urgente pa' aclarar esto

- Ejercicio urgente pa' aclarar esto
- Consideraremos una binomial negativa ( $\beta = 0.5, r = 2.5$ ).

Determinemos los primeros cuatro valores de sus probabilidades para los casos *cero-truncado* y *cero-modificado*, con  $p_0^M = 0.6$ .

- **Ejercicio urgente pa' aclarar esto**
- Consideraremos una binomial negativa ( $\beta = 0.5, r = 2.5$ ).  
Determinemos los primeros cuatro valores de sus probabilidades para los casos *cero-truncado* y *cero-modificado*, con  $p_0^M = 0.6$ .
- Primero, observemos que  $BN$  pertenece a la clase  $(a, b, 0)$ . En este caso

- Ejercicio urgente pa' aclarar esto

- Consideraremos una binomial negativa ( $\beta = 0.5, r = 2.5$ ).

Determinemos los primeros cuatro valores de sus probabilidades para los casos *cero-truncado* y *cero-modificado*, con  $p_0^M = 0.6$ .

- Primero, observemos que  $BN$  pertenece a la clase  $(a, b, 0)$ . En este caso

- $a = \frac{0.5}{1.5} = \frac{1}{3}$ ,       $b = \frac{(2.5 - 1) * 0.5}{1.5} = \frac{1}{2}$    y    $p_0 = (1 + 0.5)^{-2.5} = 0.362887$

- Ejercicio urgente pa' aclarar esto
- Consideremos una binomial negativa ( $\beta = 0.5, r = 2.5$ ).

Determinemos los primeros cuatro valores de sus probabilidades para los casos *cero-truncado* y *cero-modificado*, con  $p_0^M = 0.6$ .

- Primero, observemos que  $BN$  pertenece a la clase  $(a, b, 0)$ . En este caso

- $a = \frac{0.5}{1.5} = \frac{1}{3}$ ,       $b = \frac{(2.5 - 1) * 0.5}{1.5} = \frac{1}{2}$       y       $p_0 = (1 + 0.5)^{-2.5} = 0.362887$

- Si no tuvieramos ninguna modificación, entonces calcularíamos los otros tres valores a través de la fórmula recursiva correspondiente, como

- Ejercicio urgente pa' aclarar esto
- Consideremos una binomial negativa ( $\beta = 0.5, r = 2.5$ ).

Determinemos los primeros cuatro valores de sus probabilidades para los casos *cero-truncado* y *cero-modificado*, con  $p_0^M = 0.6$ .

- Primero, observemos que  $BN$  pertenece a la clase  $(a, b, 0)$ . En este caso

- $a = \frac{0.5}{1.5} = \frac{1}{3}$ ,       $b = \frac{(2.5 - 1) * 0.5}{1.5} = \frac{1}{2}$        $y$        $p_0 = (1 + 0.5)^{-2.5} = 0.362887$

- Si no tuvieramos ninguna modificación, entonces calcularíamos los otros tres valores a través de la fórmula recursiva correspondiente, como

- $p_k = p_{k-1} \left( a + \frac{b}{k} \right) = p_{k-1} \left( a + b \frac{1}{k} \right)$

- Dado que ya calculamos las constantes  $a$  y  $b$ , y la primer probabilidad,  $p_0$ , las probabilidades restantes son

- Dado que ya calculamos las constantes  $a$  y  $b$ , y la primer probabilidad,  $p_0$ , las probabilidades restantes son
- 

$$p_1 = 0.362887 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \frac{1}{1} \right) = 0.302406$$

$$p_2 = 0.302406 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right) = 0.176404$$

$$p_3 = 0.176404 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \frac{1}{3} \right) = 0.088202$$

- Dado que ya calculamos las constantes  $a$  y  $b$ , y la primer probabilidad,  $p_0$ , las probabilidades restantes son
- 

$$p_1 = 0.362887 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \frac{1}{1} \right) = 0.302406$$

$$p_2 = 0.302406 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right) = 0.176404$$

$$p_3 = 0.176404 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \frac{1}{3} \right) = 0.088202$$

- Pero estas modificaciones cambiarán las probabilidades del modelo original

- Dado que ya calculamos las constantes  $a$  y  $b$ , y la primer probabilidad,  $p_0$ , las probabilidades restantes son
  -

$$p_1 = 0.362887 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \frac{1}{1} \right) = 0.302406$$

$$p_2 = 0.302406 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right) = 0.176404$$

$$p_3 = 0.176404 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \frac{1}{3} \right) = 0.088202$$

- Pero estas modificaciones cambiarán las probabilidades del modelo original
- En el caso *cero-truncado* forzamos el modelo a tomar  $p_0^T = 0$ . Ya que el modelo original asigna una probabilidad positiva al valor cero, tendremos que incrementar las probabilidades originales en este modelo truncado en cero

- Entonces, el primer valor de esta distribución truncada es

$$p_1^T = 0.302406 / (1 - 0.362887) = 0.474651. \text{ Posteriormente tenemos}$$

- Entonces, el primer valor de esta distribución truncada es

$$p_1^T = 0.302406 / (1 - 0.362887) = 0.474651. \text{ Posteriormente tenemos}$$

- 

$$p_2^T = 0.474651 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right) = 0.276880$$

$$p_3^T = 0.276880 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \frac{1}{3} \right) = 0.138440$$

- Entonces, el primer valor de esta distribución truncada es

$$p_1^T = 0.302406 / (1 - 0.362887) = 0.474651. \text{ Posteriormente tenemos}$$

- 

$$p_2^T = 0.474651 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right) = 0.276880$$

$$p_3^T = 0.276880 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \frac{1}{3} \right) = 0.138440$$

- En el caso de *cero-modificado* observamos que se asigna una probabilidad mayor en cero,  $p_0^M = 0.6$ , de la que se tiene con el modelo original, por lo tanto, habrá que decrementar las probabilidades originales. Dado este valor inicial, calculamos

$$p_1^M = (1 - 0.6)(0.302406) / (1 - 0.362887) = 0.189860. \text{ De aquí tenemos}$$

- Entonces, el primer valor de esta distribución truncada es

$$p_1^T = 0.302406 / (1 - 0.362887) = 0.474651. \text{ Posteriormente tenemos}$$



$$p_2^T = 0.474651 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right) = 0.276880$$

$$p_3^T = 0.276880 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \frac{1}{3} \right) = 0.138440$$

- En el caso de *cero-modificado* observamos que se asigna una probabilidad mayor en cero,  $p_0^M = 0.6$ , de la que se tiene con el modelo original, por lo tanto, habrá que decrementar las probabilidades originales. Dado este valor inicial, calculamos

$$p_1^M = (1 - 0.6)(0.302406) / (1 - 0.362887) = 0.189860. \text{ De aquí tenemos}$$



$$p_2^M = 0.189860 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right) = 0.110752$$

$$p_3^M = 0.110752 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \frac{1}{3} \right) = 0.055376$$

## ● Variables y Modificaciones de cobertura

## ● **Variables y Modificaciones de cobertura**

- En esta sección vamos a definir conceptos necesarios para el desarrollo de la teoría probabilística y estadística que abarcan los *seguros*

## ● Variables y Modificaciones de cobertura

- En esta sección vamos a definir conceptos necesarios para el desarrollo de la teoría probabilística y estadística que abarcan los *seguros*
- Primero, es claro que existen distintos tipos de acuerdos entre las compañías aseguradoras y el asegurado, bajo los cuales se buscan satisfacer las necesidades de ambos, a través de las distintas coberturas que se ofrecen en *las pólizas de seguros*

## ● **Variables y Modificaciones de cobertura**

- En esta sección vamos a definir conceptos necesarios para el desarrollo de la teoría probabilística y estadística que abarcan los *seguros*
- Primero, es claro que existen distintos tipos de acuerdos entre las compañías aseguradoras y el asegurado, bajo los cuales se buscan satisfacer las necesidades de ambos, a través de las distintas coberturas que se ofrecen en *las pólizas de seguros*
- Entonces, para desarrollar los modelos que contemplen estas modificaciones de cobertura, es indispensable definir las nuevas variables que generalmente se observan en los diversos tipos de cobertura, y por medio de las cuales desarrollaremos la teoría posterior

- Hasta ahora, hemos supuesto que la cantidad de pérdida,  $X$ , es también la cantidad a pagar por las reclamaciones. Sin embargo, hay modificaciones a las pólizas por las que el asegurador puede ser responsable únicamente de un porcentaje o proporción de esta pérdida, que constituye propiamente la *severidad* de la misma. Por ejemplo cuando la póliza tiene:

- Hasta ahora, hemos supuesto que la cantidad de pérdida,  $X$ , es también la cantidad a pagar por las reclamaciones. Sin embargo, hay modificaciones a las pólizas por las que el asegurador puede ser responsable únicamente de un porcentaje o proporción de esta pérdida, que constituye propiamente la *severidad* de la misma. Por ejemplo cuando la póliza tiene:
  - **Deducibles**

- Hasta ahora, hemos supuesto que la cantidad de pérdida,  $X$ , es también la cantidad a pagar por las reclamaciones. Sin embargo, hay modificaciones a las pólizas por las que el asegurador puede ser responsable únicamente de un porcentaje o proporción de esta pérdida, que constituye propiamente la *severidad* de la misma. Por ejemplo cuando la póliza tiene:
  - Deducibles
  - Límites de póliza

- Hasta ahora, hemos supuesto que la cantidad de pérdida,  $X$ , es también la cantidad a pagar por las reclamaciones. Sin embargo, hay modificaciones a las pólizas por las que el asegurador puede ser responsable únicamente de un porcentaje o proporción de esta pérdida, que constituye propiamente la *severidad* de la misma. Por ejemplo cuando la póliza tiene:
  - Deducibles
  - Límites de póliza
  - Coaseguro

- Hasta ahora, hemos supuesto que la cantidad de pérdida,  $X$ , es también la cantidad a pagar por las reclamaciones. Sin embargo, hay modificaciones a las pólizas por las que el asegurador puede ser responsable únicamente de un porcentaje o proporción de esta pérdida, que constituye propiamente la *severidad* de la misma. Por ejemplo cuando la póliza tiene:
  - Deducibles
  - Límites de póliza
  - Coaseguro
- Antes de representar estas modificaciones al pago de las pérdidas mediante variables aleatorias y las funciones que las describen, es conveniente distinguir entre dos asociadas a esta situación

- Una v.a. relacionada al pago de la pérdida, en la que el valor *cero* es posible, y ocurre cuando *hay una pérdida sin pago*

- Una v.a. relacionada al pago de la pérdida, en la que el valor *cero* es posible, y ocurre cuando *hay una pérdida sin pago*
- La segunda corresponde a la que mide “el pago del pago”, que queda indefinida *si no hay pago*

- Una v.a. relacionada al pago de la pérdida, en la que el valor *cero* es posible, y ocurre cuando *hay una pérdida sin pago*
- La segunda corresponde a la que mide “el pago del pago”, que queda indefinida *si no hay pago*
- **Deductible:** Cantidad o porcentaje establecido en una póliza cuyo importe debe superarse para que se pague una reclamación

- Una v.a. relacionada al pago de la pérdida, en la que el valor *cero* es posible, y ocurre cuando *hay una pérdida sin pago*
- La segunda corresponde a la que mide “el pago del pago”, que queda indefinida *si no hay pago*
- **Deductible:** Cantidad o porcentaje establecido en una póliza cuyo importe debe superarse para que se pague una reclamación
- En términos técnicos: Las pólizas de seguro se venden con un *deductible*,  $d$ , por pago de la pérdida

- Una v.a. relacionada al pago de la pérdida, en la que el valor *cero* es posible, y ocurre cuando *hay una pérdida sin pago*
- La segunda corresponde a la que mide “el pago del pago”, que queda indefinida *si no hay pago*
- **Deductible:** Cantidad o porcentaje establecido en una póliza cuyo importe debe superarse para que se pague una reclamación
- En términos técnicos: Las pólizas de seguro se venden con un *deductible*,  $d$ , por pago de la pérdida
- Cuando la pérdida,  $X$ , es menor que  $d$ , la compañía aseguradora *no paga nada*. Cuando la pérdida es superior a  $d$ , la compañía paga  $X - d$

- Una v.a. relacionada al pago de la pérdida, en la que el valor *cero* es posible, y ocurre cuando *hay una pérdida sin pago*
- La segunda corresponde a la que mide “el pago del pago”, que queda indefinida *si no hay pago*
- **Deductible:** Cantidad o porcentaje establecido en una póliza cuyo importe debe superarse para que se pague una reclamación
- En términos técnicos: Las pólizas de seguro se venden con un *deductible*,  $d$ , por pago de la pérdida
- Cuando la pérdida,  $X$ , es menor que  $d$ , la compañía aseguradora *no paga nada*. Cuando la pérdida es superior a  $d$ , la compañía paga  $X - d$
- Entonces, definimos las variables aleatorias asociadas:

- La siguiente variable que denota “el pago del pago”

- La siguiente variable que denota “el pago del pago”

$$\bullet \quad Y^P = \begin{cases} \text{no definida,} & \text{si } X \leq d \\ X - d, & \text{si } X > d \end{cases} .$$

- La siguiente variable que denota “el pago del pago”

$$\bullet \quad Y^P = \begin{cases} \text{no definida,} & \text{si } X \leq d \\ X - d, & \text{si } X > d \end{cases} .$$

- Esta variable tiene dos características importantes, la primera de ellas, es que está truncada por la izquierda, ya que aquellas observaciones por debajo del valor del deducible,  $d$ , son omitidas y está trasladada debido a que los valores que toma la v.a. empiezan a partir de  $d$

- La siguiente variable que denota “el pago del pago”

$$\bullet \quad Y^P = \begin{cases} \text{no definida,} & \text{si } X \leq d \\ X - d, & \text{si } X > d \end{cases} .$$

- Esta variable tiene dos características importantes, la primera de ellas, es que está truncada por la izquierda, ya que aquellas observaciones por debajo del valor del deducible,  $d$ , son omitidas y está trasladada debido a que los valores que toma la v.a. empiezan a partir de  $d$
- Mientras que la que está asociada al pago por la pérdida es:

- La siguiente variable que denota “el pago del pago”

$$\bullet \quad Y^P = \begin{cases} \text{no definida,} & \text{si } X \leq d \\ X - d, & \text{si } X > d \end{cases} .$$

- Esta variable tiene dos características importantes, la primera de ellas, es que está truncada por la izquierda, ya que aquellas observaciones por debajo del valor del deducible,  $d$ , son omitidas y está trasladada debido a que los valores que toma la v.a. empiezan a partir de  $d$
- Mientras que la que está asociada al pago por la pérdida es:

$$\bullet \quad Y^L = (Y - d)_+ = \begin{cases} 0, & \text{si } X \leq d \\ X - d, & \text{si } X > d \end{cases}$$

- La siguiente variable que denota “el pago del pago”

$$\bullet \quad Y^P = \begin{cases} \text{no definida,} & \text{si } X \leq d \\ X - d, & \text{si } X > d \end{cases} .$$

- Esta variable tiene dos características importantes, la primera de ellas, es que está truncada por la izquierda, ya que aquellas observaciones por debajo del valor del deducible,  $d$ , son omitidas y está trasladada debido a que los valores que toma la v.a. empiezan a partir de  $d$
- Mientras que la que está asociada al pago por la pérdida es:

$$\bullet \quad Y^L = (Y - d)_+ = \begin{cases} 0, & \text{si } X \leq d \\ X - d, & \text{si } X > d \end{cases}$$

- $Y^L$  es una v.a. mixta con una masa de probabilidad en cero, y posiblemente continua para valores mayores a éste. Notemos que  $Y^P = Y^L|Y^L > 0 = Y^L|X > d$

- Dadas las definiciones anteriores, se tiene que:

- Dadas las definiciones anteriores, se tiene que:
- 

$$f_{Y^P} = \frac{f_X(y+d)}{S_X(d)}, y > 0$$

$$S_{Y^P} = \frac{S_X(y+d)}{S_X(d)}$$

$$F_{Y^P} = \frac{F_X(y+d) - F_X(d)}{1 - F_X(d)}$$

$$h_{Y^P} = \frac{f_X(y+d)}{S_X(y+d)} = h_X(y+d)$$

- Dadas las definiciones anteriores, se tiene que:



$$f_{Y^P} = \frac{f_X(y+d)}{S_X(d)}, y > 0$$

$$S_{Y^P} = \frac{S_X(y+d)}{S_X(d)}$$

$$F_{Y^P} = \frac{F_X(y+d) - F_X(d)}{1 - F_X(d)}$$

$$h_{Y^P} = \frac{f_X(y+d)}{S_X(y+d)} = h_X(y+d)$$



$$f_{Y^L} = f_X(y+d), y > 0$$

$$S_{Y^L} = S_X(y+d), y \geq 0$$

$$F_{Y^L} = F_X(y+d), y \geq 0$$

- Dadas las definiciones anteriores, se tiene que:



$$f_{Y^P} = \frac{f_X(y+d)}{S_X(d)}, y > 0$$

$$S_{Y^P} = \frac{S_X(y+d)}{S_X(d)}$$

$$F_{Y^P} = \frac{F_X(y+d) - F_X(d)}{1 - F_X(d)}$$

$$h_{Y^P} = \frac{f_X(y+d)}{S_X(y+d)} = h_X(y+d)$$



$$f_{Y^L} = f_X(y+d), y > 0$$

$$S_{Y^L} = S_X(y+d), y \geq 0$$

$$F_{Y^L} = F_X(y+d), y \geq 0$$

- Con  $S(\cdot)$  y  $h(\cdot)$  las correspondientes funciones de *supervivencia* y *riesgo*, respectivamente

- Dadas las definiciones anteriores, se tiene que:



$$f_{Y^P} = \frac{f_X(y+d)}{S_X(d)}, y > 0$$

$$S_{Y^P} = \frac{S_X(y+d)}{S_X(d)}$$

$$F_{Y^P} = \frac{F_X(y+d) - F_X(d)}{1 - F_X(d)}$$

$$h_{Y^P} = \frac{f_X(y+d)}{S_X(y+d)} = h_X(y+d)$$



$$f_{Y^L} = f_X(y+d), y > 0$$

$$S_{Y^L} = S_X(y+d), y \geq 0$$

$$F_{Y^L} = F_X(y+d), y \geq 0$$

- Con  $S(\cdot)$  y  $h(\cdot)$  las correspondientes funciones de *supervivencia* y *riesgo*, respectivamente
- Si cambia el deducible, se modifica la frecuencia de los pagos; sin embargo, la frecuencia de pérdidas permanece inalterada

- **Ejemplo:** Supongamos que nuestra variable individual de pérdida se distribuye Pareto con  $\alpha = 3$  y  $\theta = 2000$ , y tenemos un deducible de 500. Utilizando las fórmulas anteriores, tenemos

- **Ejemplo:** Supongamos que nuestra variable individual de pérdida se distribuye Pareto con  $\alpha = 3$  y  $\theta = 2000$ , y tenemos un deducible de 500. Utilizando las fórmulas anteriores, tenemos



$$f_{YP}(y) = \frac{3(2000)^3(2000 + y + 500)^{-4}}{(2000)^3(2000 + 500)^{-3}} = \frac{3(2500)^3}{(2500 + y)^4}$$

$$S_{YP}(y) = \left(\frac{2500}{2500 + y}\right)^3$$

$$F_{YP}(y) = 1 - \left(\frac{2500}{2500 + y}\right)^3$$

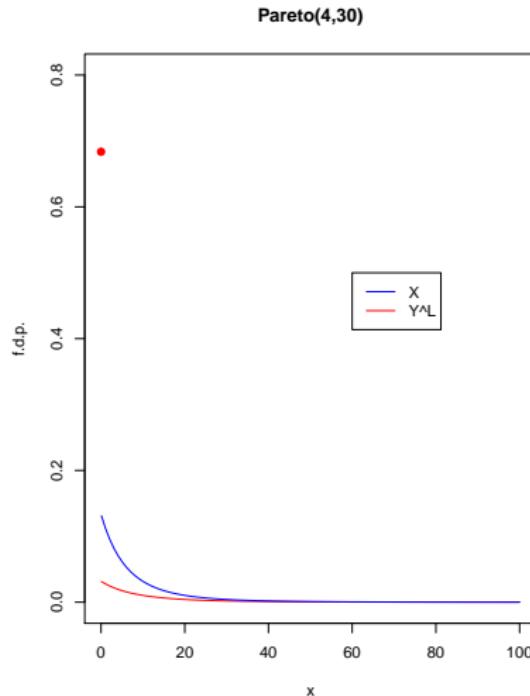
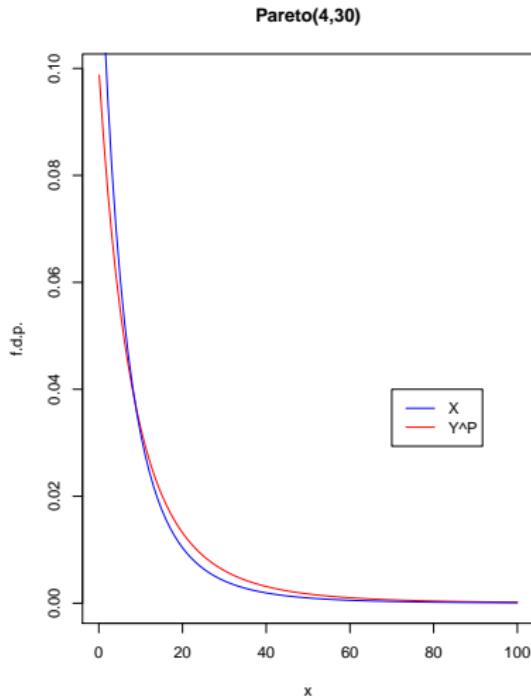
$$h_{YP}(y) = \frac{3}{2500 + y}$$

- **Ejemplo:** Supongamos que nuestra variable individual de pérdida se distribuye Pareto con  $\alpha = 3$  y  $\theta = 2000$ , y tenemos un deducible de 500. Utilizando las fórmulas anteriores, tenemos

$$\begin{aligned}f_{Y^P}(y) &= \frac{3(2000)^3(2000 + y + 500)^{-4}}{(2000)^3(2000 + 500)^{-3}} = \frac{3(2500)^3}{(2500 + y)^4} \\S_{Y^P}(y) &= \left(\frac{2500}{2500 + y}\right)^3 \\F_{Y^P}(y) &= 1 - \left(\frac{2500}{2500 + y}\right)^3 \\h_{Y^P}(y) &= \frac{3}{2500 + y}\end{aligned}$$

- Que es una distribución  $Pareto(3, 2500)$ . Para nuestra variable de pérdida, tenemos:

$$\begin{aligned}
 f_{YL}(y) &= \begin{cases} 0.488, & \text{si } y = 0 \\ \frac{3(2000)^3}{(2500 + y)^4}, & \text{si } y > 0 \end{cases} \\
 S_{YL}(y) &= \begin{cases} 0.512, & \text{si } y = 0 \\ \frac{(2000)^3}{(2500 + y)^4}, & \text{si } y > 0 \end{cases} \\
 F_{YL}(y) &= \begin{cases} 0.488, & \text{si } y = 0 \\ 1 - \frac{3(2000)^3}{(2500 + y)^4}, & \text{si } y > 0 \end{cases} \\
 h_{YL}(y) &= \begin{cases} \text{no definida,} & \text{si } y = 0 \\ \frac{3}{2500 + y}, & \text{si } y > 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$



## ● Valores esperados

## ● Valores esperados

- El  $k$ -ésimo momento de estas variables se definen como:

## ● Valores esperados

- El  $k$ -ésimo momento de estas variables se definen como:

$$\bullet \quad \mathbb{E} [(X - d)^k | X > d] = \frac{\int_d^{\infty} (x - d)^k f(x) dx}{1 - F(d)}$$

## ● Valores esperados

- El  $k$ -ésimo momento de estas variables se definen como:

$$\bullet \quad \mathbb{E} [(X - d)^k | X > d] = \frac{\int_d^{\infty} (x - d)^k f(x) dx}{1 - F(d)}$$

- Para  $Y^P$ , y como:

## ● Valores esperados

- El  $k$ -ésimo momento de estas variables se definen como:

$$\bullet \quad \mathbb{E} [(X - d)^k | X > d] = \frac{\int_d^{\infty} (x - d)^k f(x) dx}{1 - F(d)}$$

- Para  $Y^P$ , y como:

$$\bullet \quad \mathbb{E} [(X - d)_+^k] = \int_d^{\infty} (x - d)^k f(x) dx$$

## • Valores esperados

- El  $k$ -ésimo momento de estas variables se definen como:

$$\bullet \quad \mathbb{E} [(X - d)^k | X > d] = \frac{\int_d^{\infty} (x - d)^k f(x) dx}{1 - F(d)}$$

- Para  $Y^P$ , y como:

$$\bullet \quad \mathbb{E} [(X - d)_+^k] = \int_d^{\infty} (x - d)^k f(x) dx$$

- Para  $Y^L$ . Definimos  $\min(X, d) = (X \wedge d)$ . Entonces, obsérvese que

## • Valores esperados

- El  $k$ -ésimo momento de estas variables se definen como:

$$\bullet \quad \mathbb{E} [(X - d)^k | X > d] = \frac{\int_d^{\infty} (x - d)^k f(x) dx}{1 - F(d)}$$

- Para  $Y^P$ , y como:

$$\bullet \quad \mathbb{E} [(X - d)_+^k] = \int_d^{\infty} (x - d)_+^k f(x) dx$$

- Para  $Y^L$ . Definimos  $\min(X, d) = (X \wedge d)$ . Entonces, obsérvese que

$$\bullet \quad X = (X - d)_+ + (X \wedge d)$$

- De donde se desprende que, en una póliza con un deducible ordinario, el costo esperado por pérdida es:

## • Valores esperados

- El  $k$ -ésimo momento de estas variables se definen como:

$$\bullet \quad \mathbb{E} [(X - d)^k | X > d] = \frac{\int_d^{\infty} (x - d)^k f(x) dx}{1 - F(d)}$$

- Para  $Y^P$ , y como:

$$\bullet \quad \mathbb{E} [(X - d)_+^k] = \int_d^{\infty} (x - d)_+^k f(x) dx$$

- Para  $Y^L$ . Definimos  $\min(X, d) = (X \wedge d)$ . Entonces, obsérvese que

$$\bullet \quad X = (X - d)_+ + (X \wedge d)$$

- De donde se desprende que, en una póliza con un deducible ordinario, el costo esperado por pérdida es:

$$\bullet \quad \mathbb{E} [(X - d)_+] = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X \wedge d)$$

## • Valores esperados

- El  $k$ -ésimo momento de estas variables se definen como:

$$\bullet \quad \mathbb{E} [(X - d)^k | X > d] = \frac{\int_d^{\infty} (x - d)^k f(x) dx}{1 - F(d)}$$

- Para  $Y^P$ , y como:

$$\bullet \quad \mathbb{E} [(X - d)_+^k] = \int_d^{\infty} (x - d)^k f(x) dx$$

- Para  $Y^L$ . Definimos  $\min(X, d) = (X \wedge d)$ . Entonces, obsérvese que

$$\bullet \quad X = (X - d)_+ + (X \wedge d)$$

- De donde se desprende que, en una póliza con un deducible ordinario, el costo esperado por pérdida es:

$$\bullet \quad \mathbb{E} [(X - d)_+] = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X \wedge d)$$

- Y el costo esperado por pago es:

## • Valores esperados

- El  $k$ -ésimo momento de estas variables se definen como:

$$\bullet \quad \mathbb{E} [(X - d)^k | X > d] = \frac{\int_d^{\infty} (x - d)^k f(x) dx}{1 - F(d)}$$

- Para  $Y^P$ , y como:

$$\bullet \quad \mathbb{E} [(X - d)_+^k] = \int_d^{\infty} (x - d)^k f(x) dx$$

- Para  $Y^L$ . Definimos  $\min(X, d) = (X \wedge d)$ . Entonces, obsérvese que

$$\bullet \quad X = (X - d)_+ + (X \wedge d)$$

- De donde se desprende que, en una póliza con un deducible ordinario, el costo esperado por pérdida es:

$$\bullet \quad \mathbb{E} [(X - d)_+] = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X \wedge d)$$

- Y el costo esperado por pago es:

$$\bullet \quad \frac{\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X \wedge d)}{1 - F(d)}$$

- Y, ¿cómo se calcula  $\mathbb{E}(X \wedge d)$ ? En general, el  $k$ -ésimo momento es:

- Y, ¿cómo se calcula  $\mathbb{E}(X \wedge d)$ ? En general, el  $k$ -ésimo momento es:

$$\bullet \quad \mathbb{E}[(X \wedge d)^k] = \int_{-\infty}^d x^k f(x) dx + d^k [1 - F(d)]$$

- Y, ¿cómo se calcula  $\mathbb{E}(X \wedge d)$ ? En general, el  $k$ -ésimo momento es:

$$\bullet \quad \mathbb{E}[(X \wedge d)^k] = \int_{-\infty}^d x^k f(x) dx + d^k [1 - F(d)]$$

- Tres resultados que serán de gran utilidad en el desarrollo de varias fórmulas y de cálculos, son:

- Y, ¿cómo se calcula  $\mathbb{E}(X \wedge d)$ ? En general, el  $k$ -ésimo momento es:

$$\bullet \quad \mathbb{E}[(X \wedge d)^k] = \int_{-\infty}^d x^k f(x) dx + d^k [1 - F(d)]$$

- Tres resultados que serán de gran utilidad en el desarrollo de varias fórmulas y de cálculos, son:

$$\bullet \quad \mathbb{E}(X) = \int_0^\infty [1 - F(x)] dx = \int_0^\infty S(x) dx$$

$$\mathbb{E}[(X \wedge d)] = \int_0^d [1 - F(x)] dx$$

$$\mathbb{E}[(X - d)_+] = \int_d^\infty [1 - F(x)] dx$$

- Y, ¿cómo se calcula  $\mathbb{E}(X \wedge d)$ ? En general, el  $k$ -ésimo momento es:

$$\bullet \quad \mathbb{E}[(X \wedge d)^k] = \int_{-\infty}^d x^k f(x) dx + d^k [1 - F(d)]$$

- Tres resultados que serán de gran utilidad en el desarrollo de varias fórmulas y de cálculos, son:

$$\bullet \quad \mathbb{E}(X) = \int_0^\infty [1 - F(x)] dx = \int_0^\infty S(x) dx$$

$$\mathbb{E}[(X \wedge d)] = \int_0^d [1 - F(x)] dx$$

$$\mathbb{E}[(X - d)_+] = \int_d^\infty [1 - F(x)] dx$$

- Calculemos estas esperanzas en el caso de la  $Pareto(3, 2000)$ , con deducible de 500.

- Y, ¿cómo se calcula  $\mathbb{E}(X \wedge d)$ ? En general, el  $k$ -ésimo momento es:

$$\bullet \quad \mathbb{E}[(X \wedge d)^k] = \int_{-\infty}^d x^k f(x) dx + d^k [1 - F(d)]$$

- Tres resultados que serán de gran utilidad en el desarrollo de varias fórmulas y de cálculos, son:

$$\bullet \quad \begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_0^\infty [1 - F(x)] dx = \int_0^\infty S(x) dx \\ \mathbb{E}[(X \wedge d)] &= \int_0^d [1 - F(x)] dx \\ \mathbb{E}[(X - d)_+] &= \int_d^\infty [1 - F(x)] dx \end{aligned}$$

- Calculemos estas esperanzas en el caso de la  $Pareto(3, 2000)$ , con deducible de 500.

$$\bullet \quad \begin{aligned} F(500) &= 1 - \left( \frac{2000}{2000 + 500} \right)^3 = 0.488, \\ \mathbb{E}(X \wedge 500) &= \frac{2000}{2} \left[ 1 - \left( \frac{2000}{2000 + 500} \right)^2 \right] = 360 \end{aligned}$$

- Recordemos que la  $Pareto(\alpha, \theta)$  tiene esperanza  $\theta/(\alpha - 1)$

- Recordemos que la  $Pareto(\alpha, \theta)$  tiene esperanza  $\theta/(\alpha - 1)$
- Entonces, nuestra variable que denota esta pérdida tiene  
$$\mathbb{E}(X) = 2000/2 = 1000$$

- Recordemos que la  $Pareto(\alpha, \theta)$  tiene esperanza  $\theta/(\alpha - 1)$
- Entonces, nuestra variable que denota esta pérdida tiene  $\mathbb{E}(X) = 2000/2 = 1000$
- Por lo tanto, el costo esperado por pérdida es  $1000 - 360 = 640$  y el costo esperado por pago es  $640/(1 - 0.488) = 1250$ .

- La tasa de eliminación de pérdidas y el efecto de inflación en deducibles ordinarios

- **La tasa de eliminación de pérdidas y el efecto de inflación en deducibles ordinarios**
- Una cantidad que puede ser importante para evaluar el impacto de un deducible, es *la tasa de eliminación de pérdida*

- **La tasa de eliminación de pérdidas y el efecto de inflación en deducibles ordinarios**

- Una cantidad que puede ser importante para evaluar el impacto de un deducible, es *la tasa de eliminación de pérdida*
- **Definición:** La *tasa de eliminación de pérdida* es el cociente de decremento en el pago esperado con un deducible ordinario, respecto al pago sin este deducible

- **La tasa de eliminación de pérdidas y el efecto de inflación en deducibles ordinarios**

- Una cantidad que puede ser importante para evaluar el impacto de un deducible, es *la tasa de eliminación de pérdida*
- **Definición:** La *tasa de eliminación de pérdida* es el cociente de decremento en el pago esperado con un deducible ordinario, respecto al pago sin este deducible
- Sin el deducible, el pago esperado es  $\mathbb{E}(X)$ . Con el deducible, este pago esperado es  $\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X \wedge d)$ . Por lo tanto, la tasa de eliminación de pérdida es:

- **La tasa de eliminación de pérdidas y el efecto de inflación en deducibles ordinarios**

- Una cantidad que puede ser importante para evaluar el impacto de un deducible, es *la tasa de eliminación de pérdida*
- **Definición:** La *tasa de eliminación de pérdida* es el cociente de decremento en el pago esperado con un deducible ordinario, respecto al pago sin este deducible
- Sin el deducible, el pago esperado es  $\mathbb{E}(X)$ . Con el deducible, este pago esperado es  $\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X \wedge d)$ . Por lo tanto, la tasa de eliminación de pérdida es:

$$\bullet \frac{\mathbb{E}(X) - [\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X \wedge d)]}{\mathbb{E}(X)} = \frac{\mathbb{E}(X \wedge d)}{\mathbb{E}(X)}$$

- **La tasa de eliminación de pérdidas y el efecto de inflación en deducibles ordinarios**

- Una cantidad que puede ser importante para evaluar el impacto de un deducible, es *la tasa de eliminación de pérdida*
- **Definición:** La *tasa de eliminación de pérdida* es el cociente de decremento en el pago esperado con un deducible ordinario, respecto al pago sin este deducible
- Sin el deducible, el pago esperado es  $\mathbb{E}(X)$ . Con el deducible, este pago esperado es  $\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X \wedge d)$ . Por lo tanto, la tasa de eliminación de pérdida es:

$$\bullet \frac{\mathbb{E}(X) - [\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X \wedge d)]}{\mathbb{E}(X)} = \frac{\mathbb{E}(X \wedge d)}{\mathbb{E}(X)}$$

- Siempre que  $\mathbb{E}(X)$  existe

- Siguiendo con nuestro ejemplo de la Pareto(3,2000), con un deducible ordinario de 500. La tasa de eliminación de pérdida es  $360/1000 = 0.36$ . Entonces, el 36% de la pérdida puede ser eliminada al introducir un deducible ordinario de 500

- Siguiendo con nuestro ejemplo de la Pareto(3,2000), con un deducible ordinario de 500. La tasa de eliminación de pérdida es  $360/1000 = 0.36$ . Entonces, el 36% de la pérdida puede ser eliminada al introducir un deducible ordinario de 500
- **El efecto de la inflación**

- Siguiendo con nuestro ejemplo de la Pareto(3,2000), con un deducible ordinario de 500. La tasa de eliminación de pérdida es  $360/1000 = 0.36$ . Entonces, el 36% de la pérdida puede ser eliminada al introducir un deducible ordinario de 500
- **El efecto de la inflación**
- Es obvio que la inflación incrementa los costos, pero cuando existe un deducible, el efecto de la inflación se magnifica:

- Siguiendo con nuestro ejemplo de la Pareto(3,2000), con un deducible ordinario de 500. La tasa de eliminación de pérdida es  $360/1000 = 0.36$ . Entonces, el 36% de la pérdida puede ser eliminada al introducir un deducible ordinario de 500
- **El efecto de la inflación**
- Es obvio que la inflación incrementa los costos, pero cuando existe un deducible, el efecto de la inflación se magnifica:
- Algunos eventos que formalmente producían pérdidas por debajo del deducible, ahora requerirán de pago de la pérdida, por efecto de la inflación. Es decir, ahora hay más reclamaciones que exceden el deducible

- El efecto relativo de la inflación se magnifica, ya que el deducible se sustrae posterior a la inflación

- El efecto relativo de la inflación se magnifica, ya que el deducible se sustrae posterior a la inflación
- El deducible no incrementa con la inflación, pero los reclamos que exceden el deducible crecerán más que la tasa de inflación

- El efecto relativo de la inflación se magnifica, ya que el deducible se sustrae posterior a la inflación
- El deducible no incrementa con la inflación, pero los reclamos que exceden el deducible crecerán más que la tasa de inflación
- Por ejemplo, suponga que un evento produce una pérdida de 600 sin efecto de inflación, y tiene un deducible de 500, entonces, el pago es de 100.

- El efecto relativo de la inflación se magnifica, ya que el deducible se sustrae posterior a la inflación
- El deducible no incrementa con la inflación, pero los reclamos que exceden el deducible crecerán más que la tasa de inflación
- Por ejemplo, suponga que un evento produce una pérdida de 600 sin efecto de inflación, y tiene un deducible de 500, entonces, el pago es de 100.
- Si la inflación es del 10%, la pérdida incrementará a 660, y el pago a 160, lo que equivale a un incremento del 60% sobre el pago sin inflación, y este costo extra debe ser absorbido por la aseguradora

- Pago esperado por reclamo, considerando la tasa de inflación

- Pago esperado por reclamo, considerando la tasa de inflación
- Consideraremos un deducible,  $d$ , y una tasa de inflación constante,  $r$ , a lo largo del periodo.

- Pago esperado por reclamo, considerando la tasa de inflación
- Consideraremos un deducible,  $d$ , y una tasa de inflación constante,  $r$ , a lo largo del periodo.
- El pago esperado por pérdida será

- Pago esperado por reclamo, considerando la tasa de inflación
- Consideremos un deducible,  $d$ , y una tasa de inflación constante,  $r$ , a lo largo del periodo.
- El pago esperado por pérdida será

$$\bullet \quad \mathbb{E}[(1+r)X] - \mathbb{E}[(1+r)X \wedge d]$$

- Pago esperado por reclamo, considerando la tasa de inflación
- Consideremos un deducible,  $d$ , y una tasa de inflación constante,  $r$ , a lo largo del periodo.
- El pago esperado por pérdida será
  - $\mathbb{E}[(1 + r)X] - \mathbb{E}[(1 + r)X \wedge d]$
- Que puede reescribirse como

- Pago esperado por reclamo, considerando la tasa de inflación
- Consideremos un deducible,  $d$ , y una tasa de inflación constante,  $r$ , a lo largo del periodo.
- El pago esperado por pérdida será
  - $\mathbb{E}[(1+r)X] - \mathbb{E}[(1+r)X \wedge d]$
- Que puede reescribirse como
  - $(1+r) \left[ \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}\left(X \wedge \frac{d}{1+r}\right) \right]$

- Pago esperado por reclamo, considerando la tasa de inflación
- Consideremos un deducible,  $d$ , y una tasa de inflación constante,  $r$ , a lo largo del periodo.
- El pago esperado por pérdida será
  - $\mathbb{E}[(1+r)X] - \mathbb{E}[(1+r)X \wedge d]$
- Que puede reescribirse como
  - $(1+r) \left[ \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}\left(X \wedge \frac{d}{1+r}\right) \right]$
- Veamos esto último

- Pago esperado por reclamo, considerando la tasa de inflación
- Consideremos un deducible,  $d$ , y una tasa de inflación constante,  $r$ , a lo largo del periodo.
- El pago esperado por pérdida será
  - $\mathbb{E}[(1+r)X] - \mathbb{E}[(1+r)X \wedge d]$
- Que puede reescribirse como
  - $(1+r) \left[ \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}\left(X \wedge \frac{d}{1+r}\right) \right]$
- Veamos esto último

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left\{((1+r)X - d)_+\right\} &= (1+r)\mathbb{E}\left\{\left(X - \frac{d}{1+r}\right)_+\right\} \\ &= (1+r)\left\{\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}\left(X \wedge \frac{d}{1+r}\right)\right\}\end{aligned}$$

- Y el pago esperado considerando esta tasa de inflación, es:

- Y el pago esperado considerando esta tasa de inflación, es:

$$\bullet \frac{(1+r) \left[ \mathbb{E}(X) - \mathbb{E} \left( X \wedge \frac{d}{1+r} \right) \right]}{1 - F(d/(1+r))}$$

- Y el pago esperado considerando esta tasa de inflación, es:

$$\bullet \frac{(1+r) \left[ \mathbb{E}(X) - \mathbb{E} \left( X \wedge \frac{d}{1+r} \right) \right]}{1 - F(d/(1+r))}$$

- Seguimos con nuestro ejemplo. Supongamos una tasa de inflación  $r = 10\%$ . Recordemos que el costo esperado por la pérdida es 640 y el pago esperado 1250. Con un 10% de inflación tenemos:

- Y el pago esperado considerando esta tasa de inflación, es:

$$\bullet \frac{(1+r) \left[ \mathbb{E}(X) - \mathbb{E} \left( X \wedge \frac{d}{1+r} \right) \right]}{1 - F(d/(1+r))}$$

- Seguimos con nuestro ejemplo. Supongamos una tasa de inflación  $r = 10\%$ . Recordemos que el costo esperado por la pérdida es 640 y el pago esperado 1250. Con un 10% de inflación tenemos:

$$\bullet \mathbb{E} \left( X \wedge \frac{500}{1.1} \right) = \mathbb{E} (X \wedge 454.55) = \frac{2000}{2} \left[ 1 - \left( \frac{2000}{2000 + 454.55} \right)^2 \right] = 336.08$$

- Y el pago esperado considerando esta tasa de inflación, es:

$$\bullet \frac{(1+r) \left[ \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}\left(X \wedge \frac{d}{1+r}\right) \right]}{1 - F(d/(1+r))}$$

- Seguimos con nuestro ejemplo. Supongamos una tasa de inflación  $r = 10\%$ . Recordemos que el costo esperado por la pérdida es 640 y el pago esperado 1250. Con un 10% de inflación tenemos:

$$\bullet \mathbb{E}\left(X \wedge \frac{500}{1.1}\right) = \mathbb{E}(X \wedge 454.55) = \frac{2000}{2} \left[ 1 - \left( \frac{2000}{2000 + 454.55} \right)^2 \right] = 336.08$$

- Y el costo esperado por pérdida después del efecto de inflación es  $1.1 * (1000 - 336.08) = 730.32$ , que incrementa un 14.11%  $((730.32 - 640)/640)$ , el pago sin inflación que era de 640. Para calcular el costo por el pago, primero

- Y el pago esperado considerando esta tasa de inflación, es:

$$\bullet \frac{(1+r) \left[ \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}\left(X \wedge \frac{d}{1+r}\right) \right]}{1 - F(d/(1+r))}$$

- Seguimos con nuestro ejemplo. Supongamos una tasa de inflación  $r = 10\%$ . Recordemos que el costo esperado por la pérdida es 640 y el pago esperado 1250. Con un 10% de inflación tenemos:

$$\bullet \mathbb{E}\left(X \wedge \frac{500}{1.1}\right) = \mathbb{E}(X \wedge 454.55) = \frac{2000}{2} \left[ 1 - \left( \frac{2000}{2000 + 454.55} \right)^2 \right] = 336.08$$

- Y el costo esperado por pérdida después del efecto de inflación es  $1.1 * (1000 - 336.08) = 730.32$ , que incrementa un 14.11%  $((730.32 - 640)/640)$ , el pago sin inflación que era de 640. Para calcular el costo por el pago, primero

$$\bullet F(454.55) = 1 - \left( \frac{2000}{2000 + 454.55} \right)^3 = 0.459$$

- De donde obtenemos que este costo es  $730.32/(1 - 0.459) = 1350$ , que aumenta un 8% con respecto al de 1250 sin inflación

- De donde obtenemos que este costo es  $730.32/(1 - 0.459) = 1350$ , que aumenta un 8% con respecto al de 1250 sin inflación
- **Límite de póliza**

- De donde obtenemos que este costo es  $730.32/(1 - 0.459) = 1350$ , que aumenta un 8% con respecto al de 1250 sin inflación
- **Límite de póliza**
- Lo opuesto al deducible es un límite de póliza. Un límite de póliza típico es un contrato donde, para las pérdidas menores a un umbral,  $u$ , la aseguradora paga la pérdida total, pero para aquellas mayores a  $u$ , la aseguradora sólo paga  $u$ .

- De donde obtenemos que este costo es  $730.32/(1 - 0.459) = 1350$ , que aumenta un 8% con respecto al de 1250 sin inflación
- **Límite de póliza**
- Lo opuesto al deducible es un límite de póliza. Un límite de póliza típico es un contrato donde, para las pérdidas menores a un umbral,  $u$ , la aseguradora paga la pérdida total, pero para aquellas mayores a  $u$ , la aseguradora sólo paga  $u$ .
- La v. a. asociada a esta reclamación es  $Y = \min(X, u)$ , que puede escribirse como:

- De donde obtenemos que este costo es  $730.32/(1 - 0.459) = 1350$ , que aumenta un 8% con respecto al de 1250 sin inflación
- **Límite de póliza**
- Lo opuesto al deducible es un límite de póliza. Un límite de póliza típico es un contrato donde, para las pérdidas menores a un umbral,  $u$ , la aseguradora paga la pérdida total, pero para aquellas mayores a  $u$ , la aseguradora sólo paga  $u$ .
- La v. a. asociada a esta reclamación es  $Y = \min(X, u)$ , que puede escribirse como:

- $$Y = (X \wedge u) = \begin{cases} X, & \text{si } X \leq u \\ u, & \text{si } X > u \end{cases}$$

- Con funciones de densidad y distribución dadas por:

- Con funciones de densidad y distribución dadas por:

$$\bullet \quad f_Y(y) = \begin{cases} f_X(y), & y < u \\ 1 - F_X(u), & y = u \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} F_X(y), & y < u \\ 1, & y \geq u \end{cases}$$

- Con funciones de densidad y distribución dadas por:

$$\bullet \quad f_Y(y) = \begin{cases} f_X(y), & y < u \\ 1 - F_X(u), & y = u \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} F_X(y), & y < u \\ 1, & y \geq u \end{cases}$$

- Obsérvese que los resultados que hemos establecido para un deducible,  $d$ , pueden adaptarse directamente cuando se trata de un límite de póliza, simplemente cambiando  $d$  por  $u$ .

- Con funciones de densidad y distribución dadas por:

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(y), & y < u \\ 1 - F_X(u), & y = u \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} F_X(y), & y < u \\ 1, & y \geq u \end{cases}$$

- Obsérvese que los resultados que hemos establecido para un deducible,  $d$ , pueden adaptarse directamente cuando se trata de un límite de póliza, simplemente cambiando  $d$  por  $u$ .
- Ahora desarrollemos nuestro ejemplo con un límite en la póliza de 3000 y una tasa de inflación del 10%. El costo esperado en este caso es:

- Con funciones de densidad y distribución dadas por:

$$\bullet \quad f_Y(y) = \begin{cases} f_X(y), & y < u \\ 1 - F_X(u), & y = u \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} F_X(y), & y < u \\ 1, & y \geq u \end{cases}$$

- Obsérvese que los resultados que hemos establecido para un deducible,  $d$ , pueden adaptarse directamente cuando se trata de un límite de póliza, simplemente cambiando  $d$  por  $u$ .
- Ahora desarrollemos nuestro ejemplo con un límite en la póliza de 3000 y una tasa de inflación del 10%. El costo esperado en este caso es:

$$\bullet \quad \mathbb{E}(X \wedge 3000) = \frac{2000}{2} \left[ 1 - \left( \frac{2000}{2000 + 3000} \right)^2 \right] = 840$$

- Y la proporción de reducción es  $(1000 - 840)/1000 = 0.16$ .  
Después de aplicar la tasa de inflación, el costo esperado es:

- Y la proporción de reducción es  $(1000 - 840)/1000 = 0.16$ .  
Después de aplicar la tasa de inflación, el costo esperado es:

$$\bullet \quad 1.1 * \mathbb{E}(X \wedge 3000/1.1) = 1.1 * \frac{2000}{2} \left[ 1 - \left( \frac{2000}{2000 + 3000/1.1} \right)^2 \right] = 903.11$$

- Y la proporción de reducción es  $(1000 - 840)/1000 = 0.16$ .  
Después de aplicar la tasa de inflación, el costo esperado es:
  - $1.1 * \mathbb{E}(X \wedge 3000/1.1) = 1.1 * \frac{2000}{2} \left[ 1 - \left( \frac{2000}{2000 + 3000/1.1} \right)^2 \right] = 903.11$
- Con una proporción de reducción de  
 $(1100 - 903.11)/1100 = 0.179$ . El porcentaje de crecimiento entre estos costos es de  $7.5\% = 1 - (903.11/840)$ , que es menor que la tasa de inflación. El efecto es opuesto al del deducible

## ● Coaseguro

- **Coaseguro**

- En pólizas con *coaseguro*, la cantidad de reclamo es proporcional a la cantidad de pérdida por un factor de coaseguro

## ● Coaseguro

- En pólizas con *coaseguro*, la cantidad de reclamo es proporcional a la cantidad de pérdida por un factor de coaseguro
- Este factor de coaseguro  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ , es la proporción de pago que le corresponde a la compañía aseguradora, mientras el poseedor de la póliza paga la fracción restante. La v.a. para este pago es:

$$\bullet \quad Y = \alpha X$$

## ● Coaseguro

- En pólizas con *coaseguro*, la cantidad de reclamo es proporcional a la cantidad de pérdida por un factor de coaseguro
- Este factor de coaseguro  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ , es la proporción de pago que le corresponde a la compañía aseguradora, mientras el poseedor de la póliza paga la fracción restante. La v.a. para este pago es:

$$\bullet \quad Y = \alpha X$$

- Cuya densidad puede expresarse como:

## ● Coaseguro

- En pólizas con *coaseguro*, la cantidad de reclamo es proporcional a la cantidad de pérdida por un factor de coaseguro
- Este factor de coaseguro  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ , es la proporción de pago que le corresponde a la compañía aseguradora, mientras el poseedor de la póliza paga la fracción restante. La v.a. para este pago es:

$$\bullet \quad Y = \alpha X$$

- Cuya densidad puede expresarse como:

$$\bullet \quad f_Y(y) = \frac{1}{\alpha} f_X\left(\frac{y}{\alpha}\right)$$

## ● Coaseguro

- En pólizas con *coaseguro*, la cantidad de reclamo es proporcional a la cantidad de pérdida por un factor de coaseguro
- Este factor de coaseguro  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ , es la proporción de pago que le corresponde a la compañía aseguradora, mientras el poseedor de la póliza paga la fracción restante. La v.a. para este pago es:

$$\bullet \quad Y = \alpha X$$

- Cuya densidad puede expresarse como:

$$\bullet \quad f_Y(y) = \frac{1}{\alpha} f_X\left(\frac{y}{\alpha}\right)$$

- $Y$  tiene valor esperado  $\mathbb{E}(Y) = \alpha \mathbb{E}(X)$ .

## ● Coaseguro, deducibles y límites

## ● Coaseguro, deducibles y límites

- Por supuesto, pueden aplicarse todas las modificaciones de una póliza que hemos visto: *deductible ordinario*, *límite de póliza*, *coaseguro* e *inflación* para generar una póliza más general. En este caso la variable aleatoria asociada es:

## • Coaseguro, deducibles y límites

- Por supuesto, pueden aplicarse todas las modificaciones de una póliza que hemos visto: *deductible ordinario*, *límite de póliza*, *coaseguro* e *inflación* para generar una póliza más general. En este caso la variable aleatoria asociada es:

- $$Y = \alpha(1 + r) \left[ \left( X \wedge \frac{u}{1+r} \right) - \left( X \wedge \frac{d}{1+r} \right) \right]$$

## • Coaseguro, deducibles y límites

- Por supuesto, pueden aplicarse todas las modificaciones de una póliza que hemos visto: *deductible ordinario*, *límite de póliza*, *coaseguro* e *inflación* para generar una póliza más general. En este caso la variable aleatoria asociada es:

$$\bullet \quad Y = \alpha(1+r) \left[ \left( X \wedge \frac{u}{1+r} \right) - \left( X \wedge \frac{d}{1+r} \right) \right]$$

- Que podemos reescribir

## • Coaseguro, deducibles y límites

- Por supuesto, pueden aplicarse todas las modificaciones de una póliza que hemos visto: *deductible ordinario*, *límite de póliza*, *coaseguro* e *inflación* para generar una póliza más general. En este caso la variable aleatoria asociada es:

$$\bullet \quad Y = \alpha(1+r) \left[ \left( X \wedge \frac{u}{1+r} \right) - \left( X \wedge \frac{d}{1+r} \right) \right]$$

- Que podemos reescribir

$$\bullet \quad Y = \begin{cases} 0, & X < \frac{d}{1+r} \\ \alpha [(1+r)X - d], & \frac{d}{1+r} \leq X < \frac{u}{1+r} \\ \alpha(u-d), & X \geq \frac{u}{1+r} \end{cases}$$

## • Coaseguro, deducibles y límites

- Por supuesto, pueden aplicarse todas las modificaciones de una póliza que hemos visto: *deductible ordinario*, *límite de póliza*, *coaseguro* e *inflación* para generar una póliza más general. En este caso la variable aleatoria asociada es:

$$\bullet \quad Y = \alpha(1+r) \left[ \left( X \wedge \frac{u}{1+r} \right) - \left( X \wedge \frac{d}{1+r} \right) \right]$$

- Que podemos reescribir

$$\bullet \quad Y = \begin{cases} 0, & X < \frac{d}{1+r} \\ \alpha [(1+r)X - d], & \frac{d}{1+r} \leq X < \frac{u}{1+r} \\ \alpha(u-d), & X \geq \frac{u}{1+r} \end{cases}$$

- Con un pago esperado por pérdida

## • Coaseguro, deducibles y límites

- Por supuesto, pueden aplicarse todas las modificaciones de una póliza que hemos visto: *deductible ordinario*, *límite de póliza*, *coaseguro* e *inflación* para generar una póliza más general. En este caso la variable aleatoria asociada es:

- $$Y = \alpha(1+r) \left[ \left( X \wedge \frac{u}{1+r} \right) - \left( X \wedge \frac{d}{1+r} \right) \right]$$

- Que podemos reescribir

$$Y = \begin{cases} 0, & X < \frac{d}{1+r} \\ \alpha [(1+r)X - d], & \frac{d}{1+r} \leq X < \frac{u}{1+r} \\ \alpha(u-d), & X \geq \frac{u}{1+r} \end{cases}$$

- Con un pago esperado por pérdida

- $$\mathbb{E}(Y^L) = \alpha(1+r) \left[ \mathbb{E} \left( X \wedge \frac{u}{1+r} \right) - \mathbb{E} \left( X \wedge \frac{d}{1+r} \right) \right]$$

- Y valor esperado por pago

- Y valor esperado por pago

$$\bullet \quad \mathbb{E}(Y^P) = \frac{\mathbb{E}(Y^L)}{1 - F_X\left(\frac{d}{1+r}\right)}$$

- Y valor esperado por pago

$$\bullet \quad \mathbb{E}(Y^P) = \frac{\mathbb{E}(Y^L)}{1 - F_X\left(\frac{d}{1+r}\right)}$$

- Obsérvese que podemos calcular todas las expresiones involucradas en esta últimas fórmulas, conociendo el modelo asociado a nuestra v.a. de pérdida.

- **Ejemplo:** Una compañía de seguros ofrece dos tipos de pólizas: Tipo I y Tipo II. La de Tipo I no tiene deducible, pero tiene un límite de 3000. Por el contrario, la de Tipo II no tiene límite, pero tiene un deducible  $d$ . Las pérdidas siguen una distribución  $Pareto(\alpha = 3, \theta = 2000)$ . Encontrar  $d$  de tal manera que las dos pólizas tengan la misma cantidad de pérdida esperada

- **Ejemplo:** Una compañía de seguros ofrece dos tipos de pólizas: Tipo I y Tipo II. La de Tipo I no tiene deducible, pero tiene un límite de 3000. Por el contrario, la de Tipo II no tiene límite, pero tiene un deducible  $d$ . Las pérdidas siguen una distribución  $Pareto(\alpha = 3, \theta = 2000)$ . Encontrar  $d$  de tal manera que las dos pólizas tengan la misma cantidad de pérdida esperada

$$\bullet \quad \mathbb{E}(T_I) = \mathbb{E}(X \wedge 3000) = \frac{2000}{2} \left[ 1 - \left( \frac{2000}{2000 + 3000} \right)^2 \right] = 840$$
$$\mathbb{E}(T_{II}) = \mathbb{E} [(x - d)_+] = \int_d^{\infty} \left( \frac{2000}{x + 2000} \right)^3 dx = \frac{2000}{2} \left[ \left( \frac{2000}{2000 + d} \right)^2 \right]$$

- **Ejemplo:** Una compañía de seguros ofrece dos tipos de pólizas: Tipo I y Tipo II. La de Tipo I no tiene deducible, pero tiene un límite de 3000. Por el contrario, la de Tipo II no tiene límite, pero tiene un deducible  $d$ . Las pérdidas siguen una distribución  $Pareto(\alpha = 3, \theta = 2000)$ . Encontrar  $d$  de tal manera que las dos pólizas tengan la misma cantidad de pérdida esperada

$$\bullet \quad \mathbb{E}(T_I) = \mathbb{E}(X \wedge 3000) = \frac{2000}{2} \left[ 1 - \left( \frac{2000}{2000 + 3000} \right)^2 \right] = 840$$
$$\mathbb{E}(T_{II}) = \mathbb{E} [(x - d)_+] = \int_d^{\infty} \left( \frac{2000}{x + 2000} \right)^3 dx = \frac{2000}{2} \left[ \left( \frac{2000}{2000 + d} \right)^2 \right]$$

- Ya que  $\mathbb{E}(T_I) = \mathbb{E}(T_{II})$ , despejamos  $d$ , y tenemos que el deducible debe ser  $d = 182.18$

- “**Ostro**”: Una compañía de mantenimiento de un hospital, paga el costo total por uso de la sala de emergencia de sus clientes. Ha visto que el costo sigue una distribución exponencial con media 1000. La cía. está evaluando imponer un deducible de 200, por el uso de esta sala

- “**Ostro**”: Una compañía de mantenimiento de un hospital, paga el costo total por uso de la sala de emergencia de sus clientes. Ha visto que el costo sigue una distribución exponencial con media 1000. La cía. está evaluando imponer un deducible de 200, por el uso de esta sala
  - Calcule la tasa de eliminación de pérdida debido al deducible de 200. Interprete esta tasa.

- “**Ostro**”: Una compañía de mantenimiento de un hospital, paga el costo total por uso de la sala de emergencia de sus clientes. Ha visto que el costo sigue una distribución exponencial con media 1000. La cía. está evaluando imponer un deducible de 200, por el uso de esta sala
  - Calcule la tasa de eliminación de pérdida debido al deducible de 200. Interprete esta tasa.
  - Suponga que la cía. decide imponer este deducible de 200 por el uso de la sala, además de un límite de 5000 y con un factor de coaseguro del 80%. Calcule la cantidad de reclamación esperada por el evento de pérdida y la cantidad esperada por pago, que debe realizar la empresa.

- “**Ostro**”: Una compañía de mantenimiento de un hospital, paga el costo total por uso de la sala de emergencia de sus clientes. Ha visto que el costo sigue una distribución exponencial con media 1000. La cía. está evaluando imponer un deducible de 200, por el uso de esta sala
  - Calcule la tasa de eliminación de pérdida debido al deducible de 200. Interprete esta tasa.
  - Suponga que la cía. decide imponer este deducible de 200 por el uso de la sala, además de un límite de 5000 y con un factor de coaseguro del 80%. Calcule la cantidad de reclamación esperada por el evento de pérdida y la cantidad esperada por pago, que debe realizar la empresa.
  - Suponga una inflación uniforme del 8%. Calcule los pagos del inciso anterior aplicando esta tasa.

- Primero, observamos que la parametrización de la exponencial que tiene sentido, de acuerdo a la información es:

- Primero, observamos que la parametrización de la exponencial que tiene sentido, de acuerdo a la información es:

$$\bullet \quad f(x) = \frac{1}{1000} e^{-x/1000}$$

- Primero, observamos que la parametrización de la exponencial que tiene sentido, de acuerdo a la información es:

$$\bullet \quad f(x) = \frac{1}{1000} e^{-x/1000}$$

- Que tiene  $E(X) = 1000$ . Para nuestro primer punto, tenemos que calcular

- Primero, observamos que la parametrización de la exponencial que tiene sentido, de acuerdo a la información es:

$$\bullet \quad f(x) = \frac{1}{1000} e^{-x/1000}$$

- Que tiene  $E(X) = 1000$ . Para nuestro primer punto, tenemos que calcular

$$\bullet \quad \frac{\mathbb{E}(X \wedge 200)}{\mathbb{E}(X)} = \frac{\int_0^{200} e^{-x/1000}}{1000} = \frac{1000 * (1 - e^{-0.2})}{1000} = 18.12\%$$

- Primero, observamos que la parametrización de la exponencial que tiene sentido, de acuerdo a la información es:

$$\bullet \quad f(x) = \frac{1}{1000} e^{-x/1000}$$

- Que tiene  $E(X) = 1000$ . Para nuestro primer punto, tenemos que calcular

$$\bullet \quad \frac{\mathbb{E}(X \wedge 200)}{\mathbb{E}(X)} = \frac{\int_0^{200} e^{-x/1000}}{1000} = \frac{1000 * (1 - e^{-0.2})}{1000} = 18.12\%$$

- El 18.12% de la pérdida puede ser eliminada imponiendo un deducible de 200. Para nuestro segundo punto, tenemos:  
 $d = 200$ ,  $u = 5000$  y  $\alpha = 80\%$ , y debemos calcular

- Primero, observamos que la parametrización de la exponencial que tiene sentido, de acuerdo a la información es:

$$\bullet \quad f(x) = \frac{1}{1000} e^{-x/1000}$$

- Que tiene  $E(X) = 1000$ . Para nuestro primer punto, tenemos que calcular

$$\bullet \quad \frac{\mathbb{E}(X \wedge 200)}{\mathbb{E}(X)} = \frac{\int_0^{200} e^{-x/1000}}{1000} = \frac{1000 * (1 - e^{-0.2})}{1000} = 18.12\%$$

- El 18.12% de la pérdida puede ser eliminada imponiendo un deducible de 200. Para nuestro segundo punto, tenemos:  
 $d = 200$ ,  $u = 5000$  y  $\alpha = 80\%$ , y debemos calcular

$$\bullet \quad \mathbb{E}(Y) = \alpha [\mathbb{E}(X \wedge u) - \mathbb{E}(X \wedge d)]$$

- Observemos que el segundo término de la expresión entre corchetes cuadrados, es parte del desarrollo que realizamos en el inciso anterior, y vale 181.2. Para el primer elemento de este corchete, tenemos

- Observemos que el segundo término de la expresión entre corchetes cuadrados, es parte del desarrollo que realizamos en el inciso anterior, y vale 181.2. Para el primer elemento de este corchete, tenemos

- $\mathbb{E}(X \wedge u) = \mathbb{E}(X \wedge 5000) = \int_0^{5000} e^{-x/1000} = 1000 * (1 - e^{-5}) = 993.262$

- Observemos que el segundo término de la expresión entre corchetes cuadrados, es parte del desarrollo que realizamos en el inciso anterior, y vale 181.2. Para el primer elemento de este corchete, tenemos

$$\bullet \quad \mathbb{E}(X \wedge u) = \mathbb{E}(X \wedge 5000) = \int_0^{5000} e^{-x/1000} = 1000 * (1 - e^{-5}) = 993.262$$

- De estas dos cantidades tenemos que

- Observemos que el segundo término de la expresión entre corchetes cuadrados, es parte del desarrollo que realizamos en el inciso anterior, y vale 181.2. Para el primer elemento de este corchete, tenemos

$$\bullet \quad \mathbb{E}(X \wedge u) = \mathbb{E}(X \wedge 5000) = \int_0^{5000} e^{-x/1000} = 1000 * (1 - e^{-5}) = 993.262$$

- De estas dos cantidades tenemos que

$$\bullet \quad \mathbb{E}(Y) = 0.8 * [\mathbb{E}(X \wedge 5000) - \mathbb{E}(X \wedge 200)] = 0.8 * (993.262 - 181.2) = 649.649$$

- Observemos que el segundo término de la expresión entre corchetes cuadrados, es parte del desarrollo que realizamos en el inciso anterior, y vale 181.2. Para el primer elemento de este corchete, tenemos

$$\bullet \quad \mathbb{E}(X \wedge u) = \mathbb{E}(X \wedge 5000) = \int_0^{5000} e^{-x/1000} = 1000 * (1 - e^{-5}) = 993.262$$

- De estas dos cantidades tenemos que
  - $\mathbb{E}(Y) = 0.8 * [\mathbb{E}(X \wedge 5000) - \mathbb{E}(X \wedge 200)] = 0.8 * (993.262 - 181.2) = 649.649$
- Que es la cantidad de reclamación esperada por uso de la sala. Cuyo pago esperado es de:

- Observemos que el segundo término de la expresión entre corchetes cuadrados, es parte del desarrollo que realizamos en el inciso anterior, y vale 181.2. Para el primer elemento de este corchete, tenemos

$$\bullet \quad \mathbb{E}(X \wedge u) = \mathbb{E}(X \wedge 5000) = \int_0^{5000} e^{-x/1000} = 1000 * (1 - e^{-5}) = 993.262$$

- De estas dos cantidades tenemos que
  - $\mathbb{E}(Y) = 0.8 * [\mathbb{E}(X \wedge 5000) - \mathbb{E}(X \wedge 200)] = 0.8 * (993.262 - 181.2) = 649.649$
- Que es la cantidad de reclamación esperada por uso de la sala. Cuyo pago esperado es de:

$$\bullet \quad \frac{\mathbb{E}(Y)}{1 - F_X(d)} = \frac{\mathbb{E}(Y)}{e^{-200/1000}} = \frac{649.649}{0.8187} = 793.4831$$

- Observemos que el segundo término de la expresión entre corchetes cuadrados, es parte del desarrollo que realizamos en el inciso anterior, y vale 181.2. Para el primer elemento de este corchete, tenemos

$$\bullet \quad \mathbb{E}(X \wedge u) = \mathbb{E}(X \wedge 5000) = \int_0^{5000} e^{-x/1000} = 1000 * (1 - e^{-5}) = 993.262$$

- De estas dos cantidades tenemos que
  - $\mathbb{E}(Y) = 0.8 * [\mathbb{E}(X \wedge 5000) - \mathbb{E}(X \wedge 200)] = 0.8 * (993.262 - 181.2) = 649.649$
- Que es la cantidad de reclamación esperada por uso de la sala. Cuyo pago esperado es de:

$$\bullet \quad \frac{\mathbb{E}(Y)}{1 - F_X(d)} = \frac{\mathbb{E}(Y)}{e^{-200/1000}} = \frac{649.649}{0.8187} = 793.4831$$

- El punto final se deja como ejercicio al lector. (El resultado es: 709.5099).

- El impacto del deducible en la frecuencia de los reclamos

- **El impacto del deducible en la frecuencia de los reclamos**
- Un componente importante para analizar el efecto en las modificaciones de las pólizas, concierne al cambio en la distribución de frecuencias de los pagos cuando se impone un deducible o cuando se modifica

- **El impacto del deducible en la frecuencia de los reclamos**
- Un componente importante para analizar el efecto en las modificaciones de las pólizas, concierne al cambio en la distribución de frecuencias de los pagos cuando se impone un deducible o cuando se modifica
- Si se impone o incrementa el deducible, esperaríamos pocos pagos por periodo; si se reduce, esperaríamos más pagos

- **El impacto del deducible en la frecuencia de los reclamos**
- Un componente importante para analizar el efecto en las modificaciones de las pólizas, concierne al cambio en la distribución de frecuencias de los pagos cuando se impone un deducible o cuando se modifica
- Si se impone o incrementa el deducible, esperaríamos pocos pagos por periodo; si se reduce, esperaríamos más pagos
- Podemos cuantificar este proceso, asumiendo que las modificaciones de cobertura no afectan el proceso que produce las pérdidas que pagará la aseguradora

- **El impacto del deducible en la frecuencia de los reclamos**
- Un componente importante para analizar el efecto en las modificaciones de las pólizas, concierne al cambio en la distribución de frecuencias de los pagos cuando se impone un deducible o cuando se modifica
- Si se impone o incrementa el deducible, esperaríamos pocos pagos por periodo; si se reduce, esperaríamos más pagos
- Podemos cuantificar este proceso, asumiendo que las modificaciones de cobertura no afectan el proceso que produce las pérdidas que pagará la aseguradora
- Por ejemplo, individuos con una póliza con deducible de 250 por daño en automóvil, puede ser menos posible que se vean involucrados en un accidente que aquellos con cobertura total

- Supongamos que  $X_j$  representa la j-ésima pérdida sin modificaciones de cobertura en la póliza. Sea  $N^L$  el número de pérdidas

- Supongamos que  $X_j$  representa la  $j$ -ésima pérdida sin modificaciones de cobertura en la póliza. Sea  $N^L$  el número de pérdidas
- Consideraremos una modificación en la cobertura tal que  $\nu$  es la probabilidad de que las pérdidas resulten en pago. Por ejemplo, si hay un deducible  $d$ , entonces  $\nu = \mathbb{P}(X > d)$

- Supongamos que  $X_j$  representa la j-ésima pérdida sin modificaciones de cobertura en la póliza. Sea  $N^L$  el número de pérdidas
- Consideremos una modificación en la cobertura tal que  $\nu$  es la probabilidad de que las pérdidas resulten en pago. Por ejemplo, si hay un deducible  $d$ , entonces  $\nu = \mathbb{P}(X > d)$
- Definimos la indicadora,  $I_j = 1$  si la j-ésima pérdida resulta en pago e  $I_j = 0$  de otra forma

- Supongamos que  $X_j$  representa la j-ésima pérdida sin modificaciones de cobertura en la póliza. Sea  $N^L$  el número de pérdidas
- Consideremos una modificación en la cobertura tal que  $\nu$  es la probabilidad de que las pérdidas resulten en pago. Por ejemplo, si hay un deducible  $d$ , entonces  $\nu = \mathbb{P}(X > d)$
- Definimos la indicadora,  $I_j = 1$  si la j-ésima pérdida resulta en pago e  $I_j = 0$  de otra forma
- $I_j \sim Bernoulli(\nu)$  con fgp  $P_{I_j}(z) = 1 - \nu + \nu z = 1 + \nu(z - 1)$

- Supongamos que  $X_j$  representa la j-ésima pérdida sin modificaciones de cobertura en la póliza. Sea  $N^L$  el número de pérdidas
- Consideremos una modificación en la cobertura tal que  $\nu$  es la probabilidad de que las pérdidas resulten en pago. Por ejemplo, si hay un deducible  $d$ , entonces  $\nu = \mathbb{P}(X > d)$
- Definimos la indicadora,  $I_j = 1$  si la j-ésima pérdida resulta en pago e  $I_j = 0$  de otra forma
- $I_j \sim Bernoulli(\nu)$  con fgp  $P_{I_j}(z) = 1 - \nu + \nu z = 1 + \nu(z - 1)$
- Entonces,  $N^P = I_1 + \cdots + I_{N^L}$  es el número de pagos. Si  $I_1, I_2, \dots$ , son independientes e independientes de  $N^L$ , entonces  $N^P$  tiene distribución compuesta con  $N^L$  la distribución primaria y Bernoulli como distribución secundaria. Entonces

$$\bullet \quad P_{NP} = P_{NL} [P_{Ij}(z)] = P_{NL} [1 + \nu(z - 1)]$$

$$\bullet \quad P_{NP} = P_{NL} [P_{I_j}(z)] = P_{NL} [1 + \nu(z - 1)]$$

- En el caso especial en que la distribución de  $N^L$  depende de un parámetro  $\theta$ , tenemos:

$$\bullet \quad P_{NP} = P_{NL} [P_{I_j}(z)] = P_{NL} [1 + \nu(z - 1)]$$

- En el caso especial en que la distribución de  $N^L$  depende de un parámetro  $\theta$ , tenemos:

$$\bullet \quad P_{NL}(z) = P_{NL}(z; \theta) = B[\theta(z - 1)]$$

$$\bullet \quad P_{NP} = P_{NL} [P_{I_j}(z)] = P_{NL} [1 + \nu(z - 1)]$$

- En el caso especial en que la distribución de  $N^L$  depende de un parámetro  $\theta$ , tenemos:

$$\bullet \quad P_{NL}(z) = P_{NL}(z; \theta) = B[\theta(z - 1)]$$

- Con  $B(z)$  una funcional independiente de  $\theta$ . Entonces

$$\bullet \quad P_{NP} = P_{NL} [P_{I_j}(z)] = P_{NL} [1 + \nu(z - 1)]$$

- En el caso especial en que la distribución de  $N^L$  depende de un parámetro  $\theta$ , tenemos:

$$\bullet \quad P_{NL}(z) = P_{NL}(z; \theta) = B[\theta(z - 1)]$$

- Con  $B(z)$  una funcional independiente de  $\theta$ . Entonces

$$\begin{aligned}\bullet \quad P_{NP}(z) &= B[\theta([1 + \nu(z - 1)] - 1)] \\ &= B[\nu\theta(z - 1)] \\ &= P_{NL}(z; \nu\theta)\end{aligned}$$

$$\bullet \quad P_{NP} = P_{NL} [P_{I_j}(z)] = P_{NL} [1 + \nu(z - 1)]$$

- En el caso especial en que la distribución de  $N^L$  depende de un parámetro  $\theta$ , tenemos:

$$\bullet \quad P_{NL}(z) = P_{NL}(z; \theta) = B[\theta(z - 1)]$$

- Con  $B(z)$  una funcional independiente de  $\theta$ . Entonces

$$\begin{aligned}\bullet \quad P_{NP}(z) &= B[\theta([1 + \nu(z - 1)] - 1)] \\ &= B[\nu\theta(z - 1)] \\ &= P_{NL}(z; \nu\theta)\end{aligned}$$

- Este resultado implica que  $N^L$  y  $N^P$  pertenecen a la misma familia paramétrica y sólo el parámetro  $\theta$  debe cambiar

- **Ejemplo:** Supongamos que la distribución para la frecuencia de pérdidas es  $BN(\beta = 3, r = 2)$ , y para las pérdidas es  $Pareto(\alpha = 3, \theta = 1000)$ . Queremos ver el efecto que tiene sobre la distribución de frecuencias, un deducible de 250.

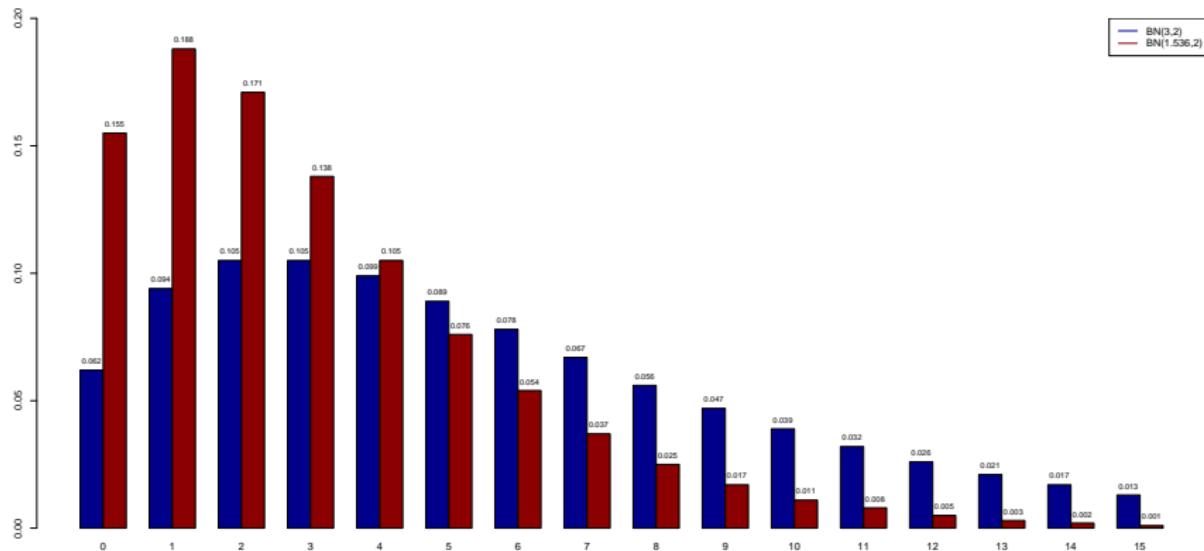
- **Ejemplo:** Supongamos que la distribución para la frecuencia de pérdidas es  $BN(\beta = 3, r = 2)$ , y para las pérdidas es  $Pareto(\alpha = 3, \theta = 1000)$ . Queremos ver el efecto que tiene sobre la distribución de frecuencias, un deducible de 250.
- La  $BN$  tiene *fgp* dada por  $P_N(z) = [1 - \beta(z - 1)]^{-r}$ . En este caso  $\beta$  toma el rol de  $\theta$  y  $B(z) = (z - 1)^{-r}$

- **Ejemplo:** Supongamos que la distribución para la frecuencia de pérdidas es  $BN(\beta = 3, r = 2)$ , y para las pérdidas es  $Pareto(\alpha = 3, \theta = 1000)$ . Queremos ver el efecto que tiene sobre la distribución de frecuencias, un deducible de 250.
- La  $BN$  tiene  $f_{gp}$  dada por  $P_N(z) = [1 - \beta(z - 1)]^{-r}$ . En este caso  $\beta$  toma el rol de  $\theta$  y  $B(z) = (z - 1)^{-r}$
- Entonces,  $N^P$  debe tener también una distribución  $BN$  con parámetros  $r^* = r$  y  $\beta^* = \nu\beta$ . Dados los valores particulares de este ejemplo

- **Ejemplo:** Supongamos que la distribución para la frecuencia de pérdidas es  $BN(\beta = 3, r = 2)$ , y para las pérdidas es  $Pareto(\alpha = 3, \theta = 1000)$ . Queremos ver el efecto que tiene sobre la distribución de frecuencias, un deducible de 250.
- La  $BN$  tiene *fgp* dada por  $P_N(z) = [1 - \beta(z - 1)]^{-r}$ . En este caso  $\beta$  toma el rol de  $\theta$  y  $B(z) = (z - 1)^{-r}$
- Entonces,  $N^P$  debe tener también una distribución  $BN$  con parámetros  $r^* = r$  y  $\beta^* = \nu\beta$ . Dados los valores particulares de este ejemplo

$$\bullet \quad \nu = 1 - F(250) = \left( \frac{1000}{1000 + 250} \right)^3 = 0.512,$$

$$r^* = 2 \quad y \quad \beta^* = 3(0.512) = 1.536 \Rightarrow P_{NL}(z; \nu\theta) = BN(2, 1.536)$$



- En general, los parámetros de las distribuciones de frecuencia se habrán modificado por  $\nu$  siempre que haya pago, de la siguiente manera:

- En general, los parámetros de las distribuciones de frecuencia se habrán modificado por  $v$  siempre que haya pago, de la siguiente manera:



Distribución	Parámetros modificados
<i>Poisson</i>	$\lambda^* = \lambda v$
Poisson Modificada en cero	$p_0^* = \frac{p_0^M - e^{-\lambda} + e^{-v\lambda} - p_0^M e^{-v\lambda}}{1 - e^{-\lambda}}; \lambda^* = \lambda v$
<i>Binomial</i>	$q^* = vq$
Binomial Modificada en cero	$p_0^* = \frac{p_0^M - (1 - q)^m + (1 - vq)^m - p_0^M (1 - vq)^m}{1 - (1 - q)^m}; q^* = vq$
<i>Binomial Negativa</i>	$\beta^* = v\beta$
BinNeg Modificada en cero	$p_0^* = \frac{p_0^M - (1 + \beta)^{-r} + (1 + v\beta)^{-r} - p_0^M (1 + v\beta)^{-r}}{1 - (1 + \beta)^{-r}}; \beta^* = v\beta$

- **Modelo de pérdidas agregadas**

- **Modelo de pérdidas agregadas**
- En el ejemplo anterior mencionamos que las variables involucradas tenían una distribución compuesta. Ahora introduciremos uno de los modelos más importantes en la teoría del riesgo, que requiere de una distribución compuesta de las variables que lo determinan

- **Modelo de pérdidas agregadas**
- En el ejemplo anterior mencionamos que las variables involucradas tenían una distribución compuesta. Ahora introduciremos uno de los modelos más importantes en la teoría del riesgo, que requiere de una distribución compuesta de las variables que lo determinan
- **Introducción**

- **Modelo de pérdidas agregadas**
- En el ejemplo anterior mencionamos que las variables involucradas tenían una distribución compuesta. Ahora introduciremos uno de los modelos más importantes en la teoría del riesgo, que requiere de una distribución compuesta de las variables que lo determinan
- **Introducción**
- Las pérdidas que tiene una compañía aseguradora pueden surgir de manera individual o colectiva, dependiendo del tipo de seguro que se contrate; por este motivo, hay que poner especial atención al rol que desempeñan las características de cada uno de ellos, en las pérdidas que contraiga la empresa

- Los modelos que determinan el monto total que devenga una Cía por la acumulación de los riesgos individuales de su portafolio de asegurados, son:

- Los modelos que determinan el monto total que devenga una Cía por la acumulación de los riesgos individuales de su portafolio de asegurados, son:
  - **Modelo de riesgo Individual**, y

- Los modelos que determinan el monto total que devenga una Cía por la acumulación de los riesgos individuales de su portafolio de asegurados, son:
  - **Modelo de riesgo Individual**, y
  - **Modelo de riesgo Colectivo**

## ● Modelo Individual

## ● **Modelo Individual**

- Supongamos que tenemos un portafolio de  $n$  pólizas individuales de seguros vigentes por, digamos, un año. Sea  $q_j$  la probabilidad de que el  $j$ -ésimo asegurado efectúe exactamente una reclamación en el periodo; lo que implica,  $p_j + q_j = 1$ , que significa que no puede haber más de una reclamación por cada asegurado

## ● **Modelo Individual**

- Supongamos que tenemos un portafolio de  $n$  pólizas individuales de seguros vigentes por, digamos, un año. Sea  $q_j$  la probabilidad de que el  $j$ -ésimo asegurado efectúe exactamente una reclamación en el periodo; lo que implica,  $p_j + q_j = 1$ , que significa que no puede haber más de una reclamación por cada asegurado
- Por ejemplo, contratos para grupos de vida, donde se cubre a un número de personas,  $n$ , con diferentes coberturas de acuerdo a las categorías que se establecen para su grupo

## ● **Modelo Individual**

- Supongamos que tenemos un portafolio de  $n$  pólizas individuales de seguros vigentes por, digamos, un año. Sea  $q_j$  la probabilidad de que el  $j$ -ésimo asegurado efectúe exactamente una reclamación en el periodo; lo que implica,  $p_j + q_j = 1$ , que significa que no puede haber más de una reclamación por cada asegurado
- Por ejemplo, contratos para grupos de vida, donde se cubre a un número de personas,  $n$ , con diferentes coberturas de acuerdo a las categorías que se establecen para su grupo
- En este caso, los individuos tienen distintas probabilidades de pérdidas, sujetas a sus características personales o a cualquier otra condición que exista y se determine en el contrato

- Supongamos un portafolio con  $n$  pólizas, una por individuo, con vigencia por un periodo de tiempo establecido

- Supongamos un portafolio con  $n$  pólizas, una por individuo, con vigencia por un periodo de tiempo establecido
- $q_j$  es la probabilidad de que el  $j$ -ésimo asegurado efectúe exactamente una reclamación durante este periodo, y  $(p_j = 1 - q_j)$  que no haga ninguna reclamación

- Supongamos un portafolio con  $n$  pólizas, una por individuo, con vigencia por un periodo de tiempo establecido
- $q_j$  es la probabilidad de que el  $j$ -ésimo asegurado efectúe exactamente una reclamación durante este periodo, y  $(p_j = 1 - q_j)$  que no haga ninguna reclamación
- Esta variable aleatoria es Bernoulli que asigna valores de 1 y 0 a estos eventos, respectivamente, denotémosla como  $R_j$

- Supongamos un portafolio con  $n$  pólizas, una por individuo, con vigencia por un periodo de tiempo establecido
- $q_j$  es la probabilidad de que el  $j$ -ésimo asegurado efectúe exactamente una reclamación durante este periodo, y  $(p_j = 1 - q_j)$  que no haga ninguna reclamación
- Esta variable aleatoria es Bernoulli que asigna valores de 1 y 0 a estos eventos, respectivamente, denotémosla como  $R_j$
- Una vez que la  $j$ -ésima póliza efectúe una reclamación, su impacto se verá reflejado en el monto que la compañía aseguradora deberá asumir

- Supongamos un portafolio con  $n$  pólizas, una por individuo, con vigencia por un periodo de tiempo establecido
- $q_j$  es la probabilidad de que el  $j$ -ésimo asegurado efectúe exactamente una reclamación durante este periodo, y  $(p_j = 1 - q_j)$  que no haga ninguna reclamación
- Esta variable aleatoria es Bernoulli que asigna valores de 1 y 0 a estos eventos, respectivamente, denotémosla como  $R_j$
- Una vez que la  $j$ -ésima póliza efectúe una reclamación, su impacto se verá reflejado en el monto que la compañía aseguradora deberá asumir
- Sea  $B_j > 0$ ,  $(R_j \perp B_j)$ , el monto de reclamación de la  $j$ -ésima póliza. Por lo tanto, el monto de la  $j$ -ésima póliza queda definido por:

•  $X_j = \begin{cases} B_j & \text{si } R_j = 1 \text{ y ocurre con probabilidad } q_j \\ 0 & \text{si } R_j = 0 \text{ y ocurre con probabilidad } 1 - q_j \end{cases}$

$$\bullet \quad X_j = \begin{cases} B_j & \text{si } R_j = 1 \text{ y ocurre con probabilidad } q_j \\ 0 & \text{si } R_j = 0 \text{ y ocurre con probabilidad } 1 - q_j \end{cases}$$

- Entonces, el monto total por reclamaciones o monto agragado que debe asumir la compañía aseguradora por el concepto de la reclamaciones de sus asegurados, en el modelo individual, está dado por la variable aleatoria

$$\bullet \quad X_j = \begin{cases} B_j & \text{si } R_j = 1 \text{ y ocurre con probabilidad } q_j \\ 0 & \text{si } R_j = 0 \text{ y ocurre con probabilidad } 1 - q_j \end{cases}$$

- Entonces, el monto total por reclamaciones o monto agragado que debe asumir la compañía aseguradora por el concepto de la reclamaciones de sus asegurados, en el modelo individual, está dado por la variable aleatoria

$$\begin{aligned} S &= \sum_{j=1}^n X_j \\ &= \sum_{j=1}^n B_j R_j \end{aligned}$$

$$\bullet \quad X_j = \begin{cases} B_j & \text{si } R_j = 1 \text{ y ocurre con probabilidad } q_j \\ 0 & \text{si } R_j = 0 \text{ y ocurre con probabilidad } 1 - q_j \end{cases}$$

- Entonces, el monto total por reclamaciones o monto agragado que debe asumir la compañía aseguradora por el concepto de la reclamaciones de sus asegurados, en el modelo individual, está dado por la variable aleatoria
- 

$$\begin{aligned} s &= \sum_{j=1}^n X_j \\ &= \sum_{j=1}^n B_j R_j \end{aligned}$$

- Este modelo se conoce también como *el modelo de pérdidas agregadas*

$$\bullet \quad X_j = \begin{cases} B_j & \text{si } R_j = 1 \text{ y ocurre con probabilidad } q_j \\ 0 & \text{si } R_j = 0 \text{ y ocurre con probabilidad } 1 - q_j \end{cases}$$

- Entonces, el monto total por reclamaciones o monto agragado que debe asumir la compañía aseguradora por el concepto de la reclamaciones de sus asegurados, en el modelo individual, está dado por la variable aleatoria

$$\begin{aligned} s &= \sum_{j=1}^n X_j \\ &= \sum_{j=1}^n B_j R_j \end{aligned}$$

- Este modelo se conoce también como *el modelo de pérdidas agregadas*
- El nombre de *modelo individual* se debe a que supone conocer las probabilidades y montos de reclamación de todos y cada uno de los asegurados de manera individual

- Una posible desventaja es que presupone que el número de asegurados en la cartera se mantiene constante (no es aleatorio) durante todo el tiempo de vigencia del seguro

- Una posible desventaja es que presupone que el número de asegurados en la cartera se mantiene constante (no es aleatorio) durante todo el tiempo de vigencia del seguro
- Entonces, nuestro objetivo es conocer las características estadísticas de esta variable **S**, tales como: función de densidad, distribución, media, varianza, función generadora de momentos, etc.

- Una posible desventaja es que presupone que el número de asegurados en la cartera se mantiene constante (no es aleatorio) durante todo el tiempo de vigencia del seguro
- Entonces, nuestro objetivo es conocer las características estadísticas de esta variable  $\mathbf{S}$ , tales como: función de densidad, distribución, media, varianza, función generadora de momentos, etc.
- Supongamos que cada variable aleatoria,  $X_j$ , tiene asociada una función de distribución  $F_{X_j}(x)$ , entonces la función de distribución de  $S$  queda en términos de convoluciones como:

- Una posible desventaja es que presupone que el número de asegurados en la cartera se mantiene constante (no es aleatorio) durante todo el tiempo de vigencia del seguro
- Entonces, nuestro objetivo es conocer las características estadísticas de esta variable **S**, tales como: función de densidad, distribución, media, varianza, función generadora de momentos, etc.
- Supongamos que cada variable aleatoria,  $X_j$ , tiene asociada una función de distribución  $F_{X_j}(x)$ , entonces la función de distribución de  $S$  queda en términos de convoluciones como:

$$F_S(x) = (F_{X_1} * \dots * F_{X_n})(x)$$

- El cálculo de convoluciones no es, en general, una tarea fácil, por lo que requerimos alternativas para estudiar esta variable aleatoria. Denotemos por  $G_{B_j}$  a la función de distribución de  $B_j$ . Entonces, algunas características de esta variable se enuncian en la siguiente proposición

- El cálculo de convoluciones no es, en general, una tarea fácil, por lo que requerimos alternativas para estudiar esta variable aleatoria. Denotemos por  $G_{B_j}$  a la función de distribución de  $B_j$ . Entonces, algunas características de esta variable se enuncian en la siguiente proposición
- **Proposición**

- El cálculo de convoluciones no es, en general, una tarea fácil, por lo que requerimos alternativas para estudiar esta variable aleatoria. Denotemos por  $G_{B_j}$  a la función de distribución de  $B_j$ . Entonces, algunas características de esta variable se enuncian en la siguiente proposición

- **Proposición**

$$\textcircled{1} \quad \mathbb{E}(\mathbf{S}) = \sum_{j=1}^n q_j \mathbb{E}(B_j)$$

- El cálculo de convoluciones no es, en general, una tarea fácil, por lo que requerimos alternativas para estudiar esta variable aleatoria. Denotemos por  $G_{B_j}$  a la función de distribución de  $B_j$ . Entonces, algunas características de esta variable se enuncian en la siguiente proposición

- **Proposición**

$$\textcircled{1} \quad \mathbb{E}(\mathbf{S}) = \sum_{j=1}^n q_j \mathbb{E}(B_j)$$

$$\textcircled{2} \quad \mathbb{V}(\mathbf{S}) = [q_j \mathbb{V}(B_j) + q_j p_j \mathbb{E}^2(B_j)]$$

- El cálculo de convoluciones no es, en general, una tarea fácil, por lo que requerimos alternativas para estudiar esta variable aleatoria. Denotemos por  $G_{B_j}$  a la función de distribución de  $B_j$ . Entonces, algunas características de esta variable se enuncian en la siguiente proposición

- **Proposición**

$$\textcircled{1} \quad \mathbb{E}(\mathbf{S}) = \sum_{j=1}^n q_j \mathbb{E}(B_j)$$

$$\textcircled{2} \quad \mathbb{V}(\mathbf{S}) = [q_j \mathbb{V}(B_j) + q_j p_j \mathbb{E}^2(B_j)]$$

$$\textcircled{3} \quad F_{X_j}(x) = \begin{cases} (1 - q_j) + q_j G_{B_j}(x), & x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$$

- El cálculo de convoluciones no es, en general, una tarea fácil, por lo que requerimos alternativas para estudiar esta variable aleatoria. Denotemos por  $G_{B_j}$  a la función de distribución de  $B_j$ . Entonces, algunas características de esta variable se enuncian en la siguiente proposición

- **Proposición**

$$\textcircled{1} \quad \mathbb{E}(\mathbf{S}) = \sum_{j=1}^n q_j \mathbb{E}(B_j)$$

$$\textcircled{2} \quad \mathbb{V}(\mathbf{S}) = [q_j \mathbb{V}(B_j) + q_j p_j \mathbb{E}^2(B_j)]$$

$$\textcircled{3} \quad F_{X_j}(x) = \begin{cases} (1 - q_j) + q_j G_{B_j}(x), & x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$$

$$\textcircled{4} \quad M_{X_j}(t) = (1 - q_j) + q_j M_{B_j}(t)$$

- El cálculo de convoluciones no es, en general, una tarea fácil, por lo que requerimos alternativas para estudiar esta variable aleatoria. Denotemos por  $G_{B_j}$  a la función de distribución de  $B_j$ . Entonces, algunas características de esta variable se enuncian en la siguiente proposición

- **Proposición**

$$\textcircled{1} \quad \mathbb{E}(\mathbf{S}) = \sum_{j=1}^n q_j \mathbb{E}(B_j)$$

$$\textcircled{2} \quad \mathbb{V}(\mathbf{S}) = [q_j \mathbb{V}(B_j) + q_j p_j \mathbb{E}^2(B_j)]$$

$$\textcircled{3} \quad F_{X_j}(x) = \begin{cases} (1 - q_j) + q_j G_{B_j}(x), & x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$$

$$\textcircled{4} \quad M_{X_j}(t) = (1 - q_j) + q_j M_{B_j}(t)$$

$$\textcircled{5} \quad M_{\mathbf{S}}(t) = \prod_{j=1}^n [(1 - q_j) + q_j M_{B_j}(t)]$$

- **Demostración**

## ● Demostración

$$\bullet \text{ 1.- } \mathbb{E}(\mathbf{s}) = \sum_{j=1}^n \mathbb{E}(X_j) = \sum_{j=1}^n \mathbb{E}(B_j R_j) \underset{\substack{= \\ \text{por independencia}}}{=} \sum_{j=1}^n \mathbb{E}(B_j) \mathbb{E}(R_j) = \sum_{j=1}^n q_j \mathbb{E}(B_j)$$

## ● Demostración

$$\bullet \text{ 1.- } \mathbb{E}(\mathbf{s}) = \sum_{j=1}^n \mathbb{E}(X_j) = \sum_{j=1}^n \mathbb{E}(B_j R_j) \underset{\substack{= \\ \text{por independencia}}}{=} \sum_{j=1}^n \mathbb{E}(B_j) \mathbb{E}(R_j) = \sum_{j=1}^n q_j \mathbb{E}(B_j)$$

- 2.- Observemos que

## ● Demostración

1.-  $\mathbb{E}(\mathbf{s}) = \sum_{j=1}^n \mathbb{E}(X_j) = \sum_{j=1}^n \mathbb{E}(B_j R_j) \underset{\text{por independencia}}{=} \sum_{j=1}^n \mathbb{E}(B_j) \mathbb{E}(R_j) = \sum_{j=1}^n q_j \mathbb{E}(B_j)$

2.- Observemos que



$$\begin{aligned}\mathbb{V}(B_j R_j) &= \mathbb{E}(B_j^2 R_j^2) - \mathbb{E}^2(B_j R_j) \\ &= q_j \mathbb{E}(B_j^2) - q_j^2 \mathbb{E}^2(B_j) \\ &= q_j [\mathbb{V}(B_j) + \mathbb{E}^2(B_j)] - q_j^2 \mathbb{E}^2(B_j) \\ &= q_j \mathbb{V}(B_j) + (q_j - q_j^2) \mathbb{E}^2(B_j) \\ &= q_j \mathbb{V}(B_j) + p_j q_j \mathbb{E}^2(B_j)\end{aligned}$$

## ● Demostración

● 1.-  $\mathbb{E}(\mathbf{s}) = \sum_{j=1}^n \mathbb{E}(X_j) = \sum_{j=1}^n \mathbb{E}(B_j R_j)$   $\underset{\text{por independencia}}{=}$   $\sum_{j=1}^n \mathbb{E}(B_j) \mathbb{E}(R_j) = \sum_{j=1}^n q_j \mathbb{E}(B_j)$

## ● 2.- Observemos que



$$\begin{aligned}\mathbb{V}(B_j R_j) &= \mathbb{E}(B_j^2 R_j^2) - \mathbb{E}^2(B_j R_j) \\ &= q_j \mathbb{E}(B_j^2) - q_j^2 \mathbb{E}^2(B_j) \\ &= q_j [\mathbb{V}(B_j) + \mathbb{E}^2(B_j)] - q_j^2 \mathbb{E}^2(B_j) \\ &= q_j \mathbb{V}(B_j) + (q_j - q_j^2) \mathbb{E}^2(B_j) \\ &= q_j \mathbb{V}(B_j) + p_j q_j \mathbb{E}^2(B_j)\end{aligned}$$

## ● Por lo que

## ● Demostración

● 1.-  $\mathbb{E}(S) = \sum_{j=1}^n \mathbb{E}(X_j) = \sum_{j=1}^n \mathbb{E}(B_j R_j) \underset{\text{por independencia}}{=} \sum_{j=1}^n \mathbb{E}(B_j) \mathbb{E}(R_j) = \sum_{j=1}^n q_j \mathbb{E}(B_j)$

## ● 2.- Observemos que



$$\begin{aligned}\mathbb{V}(B_j R_j) &= \mathbb{E}(B_j^2 R_j^2) - \mathbb{E}^2(B_j R_j) \\ &= q_j \mathbb{E}(B_j^2) - q_j^2 \mathbb{E}^2(B_j) \\ &= q_j [\mathbb{V}(B_j) + \mathbb{E}^2(B_j)] - q_j^2 \mathbb{E}^2(B_j) \\ &= q_j \mathbb{V}(B_j) + (q_j - q_j^2) \mathbb{E}^2(B_j) \\ &= q_j \mathbb{V}(B_j) + p_j q_j \mathbb{E}^2(B_j)\end{aligned}$$

## ● Por lo que

●  $\mathbb{V}(S) = \sum_{j=1}^n \mathbb{V}(B_j R_j) \underset{idependencia}{=} \sum_{j=1}^n [q_j \mathbb{V}(B_j) + p_j q_j \mathbb{E}^2(B_j)]$

- 3.-  $\forall x \geq 0,$

$$\begin{aligned} F_{X_j}(x) &= \mathbb{P}(X_j \leq x) = \mathbb{P}(B_j R_j \leq x) \\ &= \mathbb{P}(B_j R_j \leq x | R_j = 0) \mathbb{P}(R_j = 0) + \mathbb{P}(B_j R_j \leq x | R_j = 1) \mathbb{P}(R_j = 1) \\ &= \mathbb{P}(0 \leq x | R_j = 0) p_j + \mathbb{P}(B_j \leq x | R_j = 1) q_j \\ &= 1 * p_j + q_j G_{B_j}(x) \end{aligned}$$

- 3.-  $\forall x \geq 0,$

$$\begin{aligned}
 F_{X_j}(x) &= \mathbb{P}(X_j \leq x) = \mathbb{P}(B_j R_j \leq x) \\
 &= \mathbb{P}(B_j R_j \leq x | R_j = 0) \mathbb{P}(R_j = 0) + \mathbb{P}(B_j R_j \leq x | R_j = 1) \mathbb{P}(R_j = 1) \\
 &= \mathbb{P}(0 \leq x | R_j = 0) p_j + \mathbb{P}(B_j \leq x | R_j = 1) q_j \\
 &= 1 * p_j + q_j G_{B_j}(x)
 \end{aligned}$$

- 4.-

$$\begin{aligned}
 M_{X_j}(t) &= \mathbb{E}\left(e^{tX_j}\right) = \mathbb{E}\left(e^{tB_j R_j}\right) \\
 &= \mathbb{E}\left(e^{tB_j R_j} | R_j = 0\right) \mathbb{P}(R_j = 0) + \mathbb{E}\left(e^{tB_j R_j} | R_j = 1\right) \mathbb{P}(R_j = 1) \\
 &= p_j + q_j M_{B_j}(t)
 \end{aligned}$$

- 3.-  $\forall x \geq 0,$

$$\begin{aligned}
 F_{X_j}(x) &= \mathbb{P}(X_j \leq x) = \mathbb{P}(B_j R_j \leq x) \\
 &= \mathbb{P}(B_j R_j \leq x | R_j = 0) \mathbb{P}(R_j = 0) + \mathbb{P}(B_j R_j \leq x | R_j = 1) \mathbb{P}(R_j = 1) \\
 &= \mathbb{P}(0 \leq x | R_j = 0) p_j + \mathbb{P}(B_j \leq x | R_j = 1) q_j \\
 &= 1 * p_j + q_j G_{B_j}(x)
 \end{aligned}$$

- 4.-

$$\begin{aligned}
 M_{X_j}(t) &= \mathbb{E}\left(e^{tX_j}\right) = \mathbb{E}\left(e^{tB_j R_j}\right) \\
 &= \mathbb{E}\left(e^{tB_j R_j} | R_j = 0\right) \mathbb{P}(R_j = 0) + \mathbb{E}\left(e^{tB_j R_j} | R_j = 1\right) \mathbb{P}(R_j = 1) \\
 &= p_j + q_j M_{B_j}(t)
 \end{aligned}$$

- 5.-

$$M_S(t) = \mathbb{E}\left(e^{t \sum_{j=1}^n X_j}\right) = \mathbb{E}\left(e^{t \sum_{j=1}^n B_j R_j}\right) \underset{\text{independencia}}{\approx} \prod_{j=1}^n [p_j + q_j M_{B_j}(t)]$$

- 3.-  $\forall x \geq 0,$

$$\begin{aligned}
 F_{X_j}(x) &= \mathbb{P}(X_j \leq x) = \mathbb{P}(B_j R_j \leq x) \\
 &= \mathbb{P}(B_j R_j \leq x | R_j = 0) \mathbb{P}(R_j = 0) + \mathbb{P}(B_j R_j \leq x | R_j = 1) \mathbb{P}(R_j = 1) \\
 &= \mathbb{P}(0 \leq x | R_j = 0) p_j + \mathbb{P}(B_j \leq x | R_j = 1) q_j \\
 &= 1 * p_j + q_j G_{B_j}(x)
 \end{aligned}$$

- 4.-

$$\begin{aligned}
 M_{X_j}(t) &= \mathbb{E}\left(e^{tX_j}\right) = \mathbb{E}\left(e^{tB_j R_j}\right) \\
 &= \mathbb{E}\left(e^{tB_j R_j} | R_j = 0\right) \mathbb{P}(R_j = 0) + \mathbb{E}\left(e^{tB_j R_j} | R_j = 1\right) \mathbb{P}(R_j = 1) \\
 &= p_j + q_j M_{B_j}(t)
 \end{aligned}$$

- 5.-

$$M_{\mathbf{S}}(t) = \mathbb{E}\left(e^{t \sum_{j=1}^n X_j}\right) = \mathbb{E}\left(e^{t \sum_{j=1}^n B_j R_j}\right) \underset{\text{independencia}}{\underbrace{=}} \prod_{j=1}^n [p_j + q_j M_{B_j}(t)]$$

- Encontrar la distribución de  $\mathbf{S}$ , por lo general, es complicada, por tal motivo no se utilizan las convoluciones como una alternativa para obtenerla

- Para lidiar con esta situación, se han desarrollado métodos, esencialmente de aproximación numérica, que proporcionan esta distribución de las pérdidas agregadas en un modelo individual

- El modelo colectivo de riesgo

- **El modelo colectivo de riesgo**
- Este modelo presenta las pérdidas agregadas como una suma aleatoria de variables aleatorias, donde  $N$  es la variable aleatoria del número de reclamaciones realizadas y  $X_1, X_2, \dots, X_N$  son las variables aleatorias independientes e identicamente distribuidas, que representan los montos de cada reclamación. La especificación formal del modelo es la siguiente

- **El modelo colectivo de riesgo**

- Este modelo presenta las pérdidas agregadas como una suma aleatoria de variables aleatorias, donde  $N$  es la variable aleatoria del número de reclamaciones realizadas y  $X_1, X_2, \dots, X_N$  son las variables aleatorias independientes e identicamente distribuidas, que representan los montos de cada reclamación. La especificación formal del modelo es la siguiente
- Sea  $X_j$  la reclamación de pago realizada por el j-ésimo asegurado, y sea  $N$  el número aleatorio de reclamaciones. Al total o (agregado) de reclamaciones:

- **El modelo colectivo de riesgo**

- Este modelo presenta las pérdidas agregadas como una suma aleatoria de variables aleatorias, donde  $N$  es la variable aleatoria del número de reclamaciones realizadas y  $X_1, X_2, \dots, X_N$  son las variables aleatorias independientes e identicamente distribuidas, que representan los montos de cada reclamación. La especificación formal del modelo es la siguiente
- Sea  $X_j$  la reclamación de pago realizada por el  $j$ -ésimo asegurado, y sea  $N$  el número aleatorio de reclamaciones. Al total o (agregado) de reclamaciones:

- $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N = \sum_{j=1}^N X_j, \quad \text{con} \quad S = 0 \quad \text{cuando} \quad N = 0$

- Se le conoce como *modelo agregado de reclamaciones*. Otros nombres que recibe en la literatura actuarial son *modelo colectivo de riesgos* y *el modelo compuesto de frecuencias*. Los supuestos del modelo son:

- Se le conoce como *modelo agregado de reclamaciones*. Otros nombres que recibe en la literatura actuarial son *modelo colectivo de riesgos* y *el modelo compuesto de frecuencias*.

Los supuestos del modelo son:

- Condicional a  $N = n$ , las variables aleatorias  $X_1, X_2, \dots, X_N$  son *i.i.d.*

- Se le conoce como *modelo agregado de reclamaciones*. Otros nombres que recibe en la literatura actuarial son *modelo colectivo de riesgos* y *el modelo compuesto de frecuencias*.

Los supuestos del modelo son:

- Condicional a  $N = n$ , las variables aleatorias  $X_1, X_2, \dots, X_N$  son *i.i.d.*
- Condicional a  $N = n$ , la distribución común de  $X_1, X_2, \dots, X_N$  no depende de  $n$

- Se le conoce como *modelo agregado de reclamaciones*. Otros nombres que recibe en la literatura actuarial son *modelo colectivo de riesgos* y *el modelo compuesto de frecuencias*.

Los supuestos del modelo son:

- Condicional a  $N = n$ , las variables aleatorias  $X_1, X_2, \dots, X_N$  son *i.i.d.*
- Condicional a  $N = n$ , la distribución común de  $X_1, X_2, \dots, X_N$  no depende de  $n$
- La distribución de  $N$  no depende de ninguna manera de los valores de  $X_1, X_2, \dots, X_N$ .

- Se le conoce como *modelo agregado de reclamaciones*. Otros nombres que recibe en la literatura actuarial son *modelo colectivo de riesgos* y *el modelo compuesto de frecuencias*.

Los supuestos del modelo son:

- Condicional a  $N = n$ , las variables aleatorias  $X_1, X_2, \dots, X_N$  son *i.i.d.*
  - Condicional a  $N = n$ , la distribución común de  $X_1, X_2, \dots, X_N$  no depende de  $n$
  - La distribución de  $N$  no depende de ninguna manera de los valores de  $X_1, X_2, \dots, X_N$ .
- 
- Tenemos,  $N$ : frecuencia de reclamaciones y  $X$ : severidad de las reclamaciones, por lo tanto  $S$  tiene una distribución compuesta. Entonces, la cuestión central es encontrar la distribución de  $S$ .

- El objetivo es encontrar la distribución que mejor ajuste a  $S$ , lo haremos a partir de la distribución que ajustemos para  $N$  y de la distribución de las  $X'_j$ s

- El objetivo es encontrar la distribución que mejor ajuste a  $S$ , lo haremos a partir de la distribución que ajustemos para  $N$  y de la distribución de las  $X'_j$ s
- Por lo que frecuencia y severidad se modelarán por separado, pues representa muchas ventajas, entre las que están

- El objetivo es encontrar la distribución que mejor ajuste a  $S$ , lo haremos a partir de la distribución que ajustemos para  $N$  y de la distribución de las  $X'_j$ s
- Por lo que frecuencia y severidad se modelarán por separado, pues representa muchas ventajas, entre las que están
  - Debido a que el número esperado de reclamaciones se ve afectado por el número de pólizas que se vayan asegurando, y se irá actualizando basado en datos anteriores, el hecho de tener por separado la frecuencia es más práctico para ir modificando nuestros datos

- El objetivo es encontrar la distribución que mejor ajuste a  $S$ , lo haremos a partir de la distribución que ajustemos para  $N$  y de la distribución de las  $X'_j$ s
- Por lo que frecuencia y severidad se modelarán por separado, pues representa muchas ventajas, entre las que están
  - Debido a que el número esperado de reclamaciones se ve afectado por el número de pólizas que se vayan asegurando, y se irá actualizando basado en datos anteriores, el hecho de tener por separado la frecuencia es más práctico para ir modificando nuestros datos
  - El efecto de factores como la inflación se ven reflejados en las pérdidas de la compañía, por lo que identificarlos en los montos agregados puede ser complicado, y si analizamos la frecuencia y severidad por separado esto resulta más sencillo.

- Continúa ventajas...

- Continúa ventajas...

- El impacto de deducibles, coaseguros y límites de pólizas, se estudia de manera más sencilla, tanto en las distribuciones de severidad, como en las de frecuencia

- Continúa ventajas...

- El impacto de deducibles, coaseguros y límites de pólizas, se estudia de manera más sencilla, tanto en las distribuciones de severidad, como en las de frecuencia
- Debido a que la forma de la distribución de  $S$  depende de las distribuciones de  $X$  y  $N$ , el conocer cada una de ellas servirá para ajustar mejores distribuciones para  $S$ . Por ejemplo, si la cola de la distribución de  $X$  es más pesada en comparación con la de  $N$ , la forma de la cola que tendrán las pérdidas agregadas será determinada por la severidad y será más insensible a la frecuencia

- Continúa ventajas...
  - El impacto de deducibles, coaseguros y límites de pólizas, se estudia de manera más sencilla, tanto en las distribuciones de severidad, como en las de frecuencia
  - Debido a que la forma de la distribución de  $S$  depende de las distribuciones de  $X$  y  $N$ , el conocer cada una de ellas servirá para ajustar mejores distribuciones para  $S$ . Por ejemplo, si la cola de la distribución de  $X$  es más pesada en comparación con la de  $N$ , la forma de la cola que tendrán las pérdidas agregadas será determinada por la severidad y será más insensible a la frecuencia
- Entonces, los pasos a seguir para hallar la distribución más adecuada para el modelo propuesto de  $S$  son:

- Desarrollar un modelo de la distribución para la frecuencia  $N$  basada en datos

- Desarrollar un modelo de la distribución para la frecuencia  $N$  basada en datos
- Desarrollar un modelo para la distribución común de las pérdidas  $X_j'$ s basándonos en los datos

- Desarrollar un modelo de la distribución para la frecuencia  $N$  basada en datos
- Desarrollar un modelo para la distribución común de las pérdidas  $X_j'$ s basándonos en los datos
- Usando estos dos modelos, llevar a cabo los cálculos necesarios para encontrar la distribución de  $S$

- Funciones de distribución y densidad de S

- **Funciones de distribución y densidad de S**
- La función de distribución de  $S$  está dada por

- **Funciones de distribución y densidad de S**

- La función de distribución de  $S$  está dada por

- $F_S(x) = \mathbb{P}(S \leq x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \mathbb{P}(S \leq x | N = n) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n F_X^{*n}(x)$

## • Funciones de distribución y densidad de S

- La función de distribución de  $S$  está dada por

$$\bullet \quad F_S(x) = \mathbb{P}(S \leq x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \mathbb{P}(S \leq x | N = n) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n F_X^{*n}(x)$$

- Con  $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$  la función de distribución común de las  $X_j$ s y  $p_n = \mathbb{P}(N = n)$ .  $F_X^{*n}(x)$ , es la *convolución* de las  $n$  v.a.s, y se puede calcular de forma recursiva como

## • Funciones de distribución y densidad de S

- La función de distribución de  $S$  está dada por

$$\bullet \quad F_S(x) = \mathbb{P}(S \leq x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \mathbb{P}(S \leq x | N = n) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n F_X^{*n}(x)$$

- Con  $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$  la función de distribución común de las  $X_j$ s y  $p_n = \mathbb{P}(N = n)$ .  $F_X^{*n}(x)$ , es la *convolución* de las  $n$  v.a.s, y se puede calcular de forma recursiva como

$$\bullet \quad F_X^{*0}(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

## • Funciones de distribución y densidad de S

- La función de distribución de  $S$  está dada por

- $F_S(x) = \mathbb{P}(S \leq x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \mathbb{P}(S \leq x | N = n) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n F_X^{*n}(x)$

- Con  $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$  la función de distribución común de las  $X_j$ s y  $p_n = \mathbb{P}(N = n)$ .  $F_X^{*n}(x)$ , es la *convolución* de las  $n$  v.a.s, y se puede calcular de forma recursiva como

- $F_X^{*0}(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$

- y

$$F_X^{*k}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_X^{(k-1)}(x-y) dF_X(y) \quad \text{para } k = 1, 2, \dots$$

- Su función de densidad está dada por:

- Su función de densidad está dada por:

- $f_S(x) = \mathbb{P}(S = x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n f_X^{*n}(x), \quad x = 0, 1, \dots$

- Su función de densidad está dada por:

- $f_S(x) = \mathbb{P}(S = x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n f_X^{*n}(x), \quad x = 0, 1, \dots$

- Cuyo cálculo recursivo es

- Su función de densidad está dada por:

- $f_S(x) = \mathbb{P}(S = x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n f_X^{*n}(x), \quad x = 0, 1, \dots$

- Cuyo cálculo recursivo es

- $f_X^{*k}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X^{(k-1)}(x-y) f_X(y) dy \quad \text{para } k = 1, 2, \dots$

- Su función de densidad está dada por:

$$\bullet \quad f_S(x) = \mathbb{P}(S = x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n f_X^{*n}(x), \quad x = 0, 1, \dots$$

- Cuyo cálculo recursivo es

$$\bullet \quad f_X^{*k}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X^{(k-1)}(x-y) f_X(y) dy \quad \text{para } k = 1, 2, \dots$$

- Si  $X$  es discreta, con probabilidades en  $0, 1, 2, \dots$  las respectivas convoluciones se pueden calcular sustituyendo la integral por una suma sobre los valores que toma  $X$ .

- Su función de densidad está dada por:

$$\bullet \quad f_S(x) = \mathbb{P}(S = x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n f_X^{*n}(x), \quad x = 0, 1, \dots$$

- Cuyo cálculo recursivo es

$$\bullet \quad f_X^{*k}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X^{(k-1)}(x-y) f_X(y) dy \quad \text{para } k = 1, 2, \dots$$

- Si  $X$  es discreta, con probabilidades en  $0, 1, 2, \dots$  las respectivas convoluciones se pueden calcular sustituyendo la integral por una suma sobre los valores que toma  $X$ .
- La *fgp* de  $S$  es

- Su función de densidad está dada por:

- $f_S(x) = \mathbb{P}(S = x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n f_X^{*n}(x), \quad x = 0, 1, \dots$

- Cuyo cálculo recursivo es

- $f_X^{*k}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X^{(k-1)}(x-y) f_X(y) dy \quad \text{para } k = 1, 2, \dots$

- Si  $X$  es discreta, con probabilidades en  $0, 1, 2, \dots$  las respectivas convoluciones se pueden calcular sustituyendo la integral por una suma sobre los valores que toma  $X$ .
- La *fgp* de  $S$  es

- $$\begin{aligned} P_S(z) &= \mathbb{E}(z^S) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}(z^{X_1+X_2+\dots+X_N} | N = n) \mathbb{P}(N = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E} \left[ \prod_{j=1}^n z^{X_j} \right] \mathbb{P}(N = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [P_X(z)]^n \mathbb{P}(N = n) \\ &= \mathbb{E} [P_X(z)^N] = P_N [P_X(z)] \end{aligned}$$

- Siguiendo las mismas consideraciones, la f.g.m de  $S$  se obtiene, por

- Siguiendo las mismas consideraciones, la f.g.m de  $S$  se obtiene, por

$$\begin{aligned}
 M_S(t) &= \mathbb{E} \left( e^{tS} \right) = \mathbb{E} \left[ \mathbb{E} \left[ e^{tS} \mid N \right] \right] = \mathbb{E} \left[ \mathbb{E} \left[ e^{t(X_1 + \dots + X_N)} \mid N \right] \right] \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E} \left[ e^{t(X_1 + \dots + X_N)} \mid N = n \right] \mathbb{P}(N = n) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E} \left[ e^{t(X_1 + \dots + X_n)} \right] \mathbb{P}(N = n) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E} \left[ \prod_{j=1}^n e^{tX_j} \right] \mathbb{P}(N = n) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \prod_{j=1}^n \mathbb{E} \left[ e^{tX_j} \right] \right] \mathbb{P}(N = n) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \mathbb{E} \left[ e^{tX} \right] \right)^n \mathbb{P}(N = n) = \sum_{n=0}^{\infty} (M_X(t))^n \mathbb{P}(N = n) = \mathbb{E} \left[ (M_X(t))^N \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[ e^{\log((M_X(t))^N)} \right] = \mathbb{E} \left[ e^{N \log(M_X(t))} \right] = M_N(\log(M_X(t)))
 \end{aligned}$$

- Siguiendo las mismas consideraciones, la f.g.m de  $S$  se obtiene, por

$$\begin{aligned}
 M_S(t) &= \mathbb{E}(e^{tS}) = \mathbb{E}[\mathbb{E}[e^{tS} | N]] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[e^{t(X_1 + \dots + X_N)} | N]] \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[e^{t(X_1 + \dots + X_N)} | N = n] \mathbb{P}(N = n) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[e^{t(X_1 + \dots + X_n)}] \mathbb{P}(N = n) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[\prod_{j=1}^n e^{tX_j}\right] \mathbb{P}(N = n) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\prod_{j=1}^n \mathbb{E}[e^{tX_j}]\right] \mathbb{P}(N = n) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} (\mathbb{E}[e^{tX}])^n \mathbb{P}(N = n) = \sum_{n=0}^{\infty} (M_X(t))^n \mathbb{P}(N = n) = \mathbb{E}[(M_X(t))^N] \\
 &= \mathbb{E}\left[e^{\log((M_X(t))^N)}\right] = \mathbb{E}[e^{N \log(M_X(t))}] = M_N(\log(M_X(t)))
 \end{aligned}$$

- Por lo tanto, obtenemos

- Siguiendo las mismas consideraciones, la f.g.m de  $S$  se obtiene, por

$$\begin{aligned}
 M_S(t) &= \mathbb{E} \left( e^{tS} \right) = \mathbb{E} \left[ \mathbb{E} \left[ e^{tS} \mid N \right] \right] = \mathbb{E} \left[ \mathbb{E} \left[ e^{t(X_1 + \dots + X_N)} \mid N \right] \right] \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E} \left[ e^{t(X_1 + \dots + X_N)} \mid N = n \right] \mathbb{P}(N = n) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E} \left[ e^{t(X_1 + \dots + X_n)} \right] \mathbb{P}(N = n) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E} \left[ \prod_{j=1}^n e^{tX_j} \right] \mathbb{P}(N = n) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \prod_{j=1}^n \mathbb{E} \left[ e^{tX_j} \right] \right] \mathbb{P}(N = n) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \mathbb{E} \left[ e^{tX} \right] \right)^n \mathbb{P}(N = n) = \sum_{n=0}^{\infty} (M_X(t))^n \mathbb{P}(N = n) = \mathbb{E} \left[ (M_X(t))^N \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[ e^{\log((M_X(t))^N)} \right] = \mathbb{E} \left[ e^{N \log(M_X(t))} \right] = M_N(\log(M_X(t)))
 \end{aligned}$$

- Por lo tanto, obtenemos
- 

$$M_S(t) = M_N(\log(M_X(t)))$$

- Y dejándola en términos de la f.g.p.

- Y dejándola en términos de la f.g.p.
- 

$$M_S(t) = P_N(M_X(t))$$

## ● Momentos de S

## • Momentos de S

- Ahora desarrollaremos algunos momentos de esta variable aleatoria, que serán de utilidad posteriormente.

## • Momentos de S

- Ahora desarrollaremos algunos momentos de esta variable aleatoria, que serán de utilidad posteriormente.
- 

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S) &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[S | N]] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^N X_j | N\right]\right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[X_1 + X_2 + \dots + X_N | N = n] \mathbb{P}(N = n)\end{aligned}$$

## • Momentos de S

- Ahora desarrollaremos algunos momentos de esta variable aleatoria, que serán de utilidad posteriormente.
- 

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S) &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[S | N]] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^N X_j | N\right]\right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[X_1 + X_2 + \dots + X_N | N = n] \mathbb{P}(N = n)\end{aligned}$$

- ya que las  $X'_j$ s son v.a.i.i.d. su esperanza es la misma, digamos,  $\mathbb{E}[X]$ , entonces

## • Momentos de S

- Ahora desarrollaremos algunos momentos de esta variable aleatoria, que serán de utilidad posteriormente.
- 

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S) &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[S | N]] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^N X_j | N\right]\right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[X_1 + X_2 + \dots + X_N | N = n] \mathbb{P}(N = n)\end{aligned}$$

- ya que las  $X'_j$ s son v.a.i.i.d. su esperanza es la misma, digamos,  $\mathbb{E}[X]$ , entonces
- 

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[X_1 + X_2 + \dots + X_n | N = n] \mathbb{P}(N = n) &= \sum_{n=0}^{\infty} n \mathbb{E}[X] \mathbb{P}(N = n) \\ &= \mathbb{E}[X] \mathbb{E}[N]\end{aligned}$$

- La varianza de  $S$  se puede calcular por medio de la fórmula de varianza iterada donde

- La varianza de  $S$  se puede calcular por medio de la fórmula de varianza iterada donde

- $$\begin{aligned}\mathbb{V}(S) &= \mathbb{E}[\mathbb{V}(S | N)] + \mathbb{V}[\mathbb{E}(S | N)] = \mathbb{E}[N\mathbb{V}(X)] + \mathbb{V}[N\mathbb{E}(X)] \\ &= \mathbb{E}(N)\mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(N)\mathbb{E}^2(X)\end{aligned}$$

- La varianza de  $S$  se puede calcular por medio de la fórmula de varianza iterada donde
  - $\mathbb{V}(S) = \mathbb{E}[\mathbb{V}(S | N)] + \mathbb{V}[\mathbb{E}(S | N)] = \mathbb{E}[N\mathbb{V}(X)] + \mathbb{V}[N\mathbb{E}(X)] = \mathbb{E}(N)\mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(N)\mathbb{E}^2(X)$
- Y finalmente su tercer momento alrededor de la media, es:

- La varianza de  $S$  se puede calcular por medio de la fórmula de varianza iterada donde

$$\begin{aligned}\bullet \quad \mathbb{V}(S) &= \mathbb{E}[\mathbb{V}(S | N)] + \mathbb{V}[\mathbb{E}(S | N)] = \mathbb{E}[N\mathbb{V}(X)] + \mathbb{V}[N\mathbb{E}(X)] \\ &= \mathbb{E}(N)\mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(N)\mathbb{E}^2(X)\end{aligned}$$

- Y finalmente su tercer momento alrededor de la media, es:
- $\mathbb{E}[(S - \mathbb{E}(S))^3] = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^3] + 3\mathbb{V}(N)\mathbb{E}(X)\mathbb{V}(X) + \mathbb{E}[(N - \mathbb{E}(N))^3]\mathbb{E}(X)^3$

- La varianza de  $S$  se puede calcular por medio de la fórmula de varianza iterada donde
  - $$\begin{aligned}\mathbb{V}(S) &= \mathbb{E}[\mathbb{V}(S | N)] + \mathbb{V}[\mathbb{E}(S | N)] = \mathbb{E}[N\mathbb{V}(X)] + \mathbb{V}[N\mathbb{E}(X)] \\ &= \mathbb{E}(N)\mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(N)\mathbb{E}^2(X)\end{aligned}$$
- Y finalmente su tercer momento alrededor de la media, es:
  - $$\mathbb{E}[(S - \mathbb{E}(S))^3] = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^3] + 3\mathbb{V}(N)\mathbb{E}(X)\mathbb{V}(X) + \mathbb{E}[(N - \mathbb{E}(N))^3]\mathbb{E}(X)^3$$
- Hallar explícitamente la distribución de  $\mathbf{S}$  no es trivial, por lo que se utilizan diversas aproximaciones a su distribución o soluciones numéricas; no obstante, existen algunas elecciones de los modelos para  $N$  y  $X$  que permiten tener resultados analíticos para ciertas características de esta distribución

- Algunos modelos compuestos

- Algunos modelos compuestos
- Modelo Binomial Compuesto

- **Algunos modelos compuestos**
- **Modelo Binomial Compuesto**
- Si la variable de frecuencia de reclamaciones,  $N$  se distribuye *Binomial* ( $n, p$ ), y los montos de reclamación,  $X$ , tienen una distribución con soporte en los reales positivos, entonces,  $S$  tiene una distribución *binomial compuesta*. Sus características numéricas son:

- **Algunos modelos compuestos**
- **Modelo Binomial Compuesto**
- Si la variable de frecuencia de reclamaciones,  $N$  se distribuye *Binomial* ( $n, p$ ), y los montos de reclamación,  $X$ , tienen una distribución con soporte en los reales positivos, entonces,  $S$  tiene una distribución *binomial compuesta*. Sus características numéricas son:
  - $\mathbb{E}(S) = np\mathbb{E}(X)$

- **Algunos modelos compuestos**

- **Modelo Binomial Compuesto**

- Si la variable de frecuencia de reclamaciones,  $N$  se distribuye *Binomial* ( $n, p$ ), y los montos de reclamación,  $X$ , tienen una distribución con soporte en los reales positivos, entonces,  $S$  tiene una distribución *binomial compuesta*. Sus características numéricas son:

- $\mathbb{E}(S) = np\mathbb{E}(X)$
- $\mathbb{V}(S) = np \left( \mathbb{E}(X^2) - p\mathbb{E}(X)^2 \right)$

- **Algunos modelos compuestos**

- **Modelo Binomial Compuesto**

- Si la variable de frecuencia de reclamaciones,  $N$  se distribuye *Binomial* ( $n, p$ ), y los montos de reclamación,  $X$ , tienen una distribución con soporte en los reales positivos, entonces,  $S$  tiene una distribución *binomial compuesta*. Sus características numéricas son:

- $\mathbb{E}(S) = np\mathbb{E}(X)$
- $\mathbb{V}(S) = np \left( \mathbb{E}(X^2) - p\mathbb{E}(X)^2 \right)$
- $M_S(t) = (1 - p + pM_X(t))^n$

- **Modelo Binomial Negativo Compuesto**

- **Modelo Binomial Negativo Compuesto**
- Cuando el número de reclamaciones tiene una distribución *Binomial Negativa* entonces el riesgo  $S$  se distribuye *Binomial Negativa Compuesta* y se tiene:

- **Modelo Binomial Negativo Compuesto**

- Cuando el número de reclamaciones tiene una distribución *Binomial Negativa* entonces el riesgo  $S$  se distribuye *Binomial Negativa Compuesta* y se tiene:

- $\mathbb{E}(S) = r\beta\mathbb{E}(X)$

- **Modelo Binomial Negativo Compuesto**

- Cuando el número de reclamaciones tiene una distribución *Binomial Negativa* entonces el riesgo  $S$  se distribuye *Binomial Negativa Compuesta* y se tiene:

- $\mathbb{E}(S) = r\beta\mathbb{E}(X)$
- $\mathbb{V}(S) = r\beta \left( \mathbb{E}(X^2) + \beta\mathbb{E}(X)^2 \right)$

- **Modelo Binomial Negativo Compuesto**

- Cuando el número de reclamaciones tiene una distribución *Binomial Negativa* entonces el riesgo  $S$  se distribuye *Binomial Negativa Compuesta* y se tiene:

- $\mathbb{E}(S) = r\beta\mathbb{E}(X)$
- $\mathbb{V}(S) = r\beta \left( \mathbb{E}(X^2) + \beta\mathbb{E}(X)^2 \right)$
- $M_S(t) = \left[ \frac{1}{1 + \beta(1 - M_X(t))} \right]^r$

- **Modelo Poisson Compuesto**

- **Modelo Poisson Compuesto**

- Bajo los mismos supuestos que en los modelos anteriores, si  $N$  se distribuye  $Poisson(\lambda)$ , entonces  $S$  tiene una distribución *Poisson compuesta*. Con

## • **Modelo Poisson Compuesto**

- Bajo los mismos supuestos que en los modelos anteriores, si  $N$  se distribuye  $Poisson(\lambda)$ , entonces  $S$  tiene una distribución *Poisson compuesta*. Con

- $\mathbb{E}(S) = \lambda\mathbb{E}(X)$

## • Modelo Poisson Compuesto

- Bajo los mismos supuestos que en los modelos anteriores, si  $N$  se distribuye  $Poisson(\lambda)$ , entonces  $S$  tiene una distribución *Poisson compuesta*. Con

- $\mathbb{E}(S) = \lambda\mathbb{E}(X)$
- $\mathbb{V}(S) = \lambda\mathbb{E}(X^2)$

## • Modelo Poisson Compuesto

- Bajo los mismos supuestos que en los modelos anteriores, si  $N$  se distribuye  $Poisson(\lambda)$ , entonces  $S$  tiene una distribución *Poisson compuesta*. Con

- $\mathbb{E}(S) = \lambda\mathbb{E}(X)$
- $\mathbb{V}(S) = \lambda\mathbb{E}(X^2)$
- $M_S(t) = e^{\lambda(M_X(t)-1)}$

- Supongamos que  $N \sim Poisson(\lambda)$  y que  $X_j \sim Bernoulli(q)$ , aplicando lo anterior para la distribución de  $S$ , tenemos que

- Supongamos que  $N \sim Poisson(\lambda)$  y que  $X_j \sim Bernoulli(q)$ , aplicando lo anterior para la distribución de  $S$ , tenemos que
- $M_S(t) = e^{\lambda(M_X(t)-1)}$ ;

- Supongamos que  $N \sim Poisson(\lambda)$  y que  $X_j \sim Bernoulli(q)$ , aplicando lo anterior para la distribución de  $S$ , tenemos que
- $M_S(t) = e^{\lambda(M_X(t)-1)}$ ;
- Con  $M_N(t) = e^{\lambda(e^t-1)}$  y  $M_X(t) = (1-q) + qe^t$

- Supongamos que  $N \sim Poisson(\lambda)$  y que  $X_j \sim Bernoulli(q)$ , aplicando lo anterior para la distribución de  $S$ , tenemos que
- $M_S(t) = e^{\lambda(M_X(t)-1)}$ ;
- Con  $M_N(t) = e^{\lambda(e^t-1)}$  y  $M_X(t) = (1-q) + qe^t$
- Por lo que  $M_S(t) = e^{\lambda((1-q)+qe^t-1)} = e^{\lambda(qe^t-q)} = e^{\lambda q(e^t-1)}$

- Supongamos que  $N \sim Poisson(\lambda)$  y que  $X_j \sim Bernoulli(q)$ , aplicando lo anterior para la distribución de  $S$ , tenemos que
- $M_S(t) = e^{\lambda(M_X(t)-1)}$ ;
- Con  $M_N(t) = e^{\lambda(e^t-1)}$  y  $M_X(t) = (1-q) + qe^t$
- Por lo que  $M_S(t) = e^{\lambda((1-q)+qe^t-1)} = e^{\lambda(qe^t-q)} = e^{\lambda q(e^t-1)}$
- $\therefore S \sim Poisson(\lambda q)$

- Supongamos que  $N \sim Poisson(\lambda)$  y que  $X_j \sim Bernoulli(q)$ , aplicando lo anterior para la distribución de  $S$ , tenemos que
- $M_S(t) = e^{\lambda(M_X(t)-1)}$ ;
- Con  $M_N(t) = e^{\lambda(e^t-1)}$  y  $M_X(t) = (1-q) + qe^t$
- Por lo que  $M_S(t) = e^{\lambda((1-q)+qe^t-1)} = e^{\lambda(qe^t-q)} = e^{\lambda q(e^t-1)}$
- $\therefore S \sim Poisson(\lambda q)$
- **Observación importante:** Aunque estos modelos tienen una forma analítica en estas características numéricas, ninguna de ellas, salvo el último caso, corresponde a la densidad o distribución de  $S$ . Es decir, el problema de encontrar la distribución de las pérdidas agregadas, persiste.

- Distribución de la convolución de Poisson compuestas

- **Distribución de la convolución de Poisson compuestas**
- Una característica muy útil para nuestros fines es que la Poisson compuesta es cerrada bajo convolución.  
Específicamente

## • Distribución de la convolución de Poisson compuestas

- Una característica muy útil para nuestros fines es que la Poisson compuesta es cerrada bajo convolución.

Específicamente

- Supóngase que  $S_j$  tiene una distribución Poisson compuesta con parámetros  $\lambda_j$  y función de distribución para severidades  $F_j(x)$  para  $j = 1, 2, \dots, n$ . Además, que  $S_1, S_2, \dots, S_n$  son independientes. Entonces  $S = S_1 + S_2 + \dots + S_n$  tiene una distribución Poisson compuesta con parámetro  $\lambda = \sum_{j=1}^n \lambda_j$  y función de distribución de severidad  $F(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{\lambda} F_j(x)$

- **Demostración:** Sea  $M_j(t)$  la f.g.m. de  $F_j(x)$  para  $j = 1, 2, \dots, n$ . Entonces  $S_j$  tiene f.g.m. dada por:

- **Demostración:** Sea  $M_j(t)$  la f.g.m. de  $F_j(x)$  para  $j = 1, 2, \dots, n$ . Entonces  $S_j$  tiene f.g.m. dada por:
- $M_{S_j}(t) = \mathbb{E}(e^{tS_j}) = e^{\lambda_j(M_j(t)-1)}$  y por la independencia de las  $S'_j$ s,  $S$  tiene f.g.m.

- **Demostración:** Sea  $M_j(t)$  la f.g.m. de  $F_j(x)$  para  $j = 1, 2, \dots, n$ . Entonces  $S_j$  tiene f.g.m. dada por:
- $M_{S_j}(t) = \mathbb{E}(e^{tS_j}) = e^{\lambda_j(M_j(t)-1)}$  y por la independencia de las  $S'_j$ s,  $S$  tiene f.g.m.
- 

$$\begin{aligned}
 M_S(t) &= \prod_{j=1}^n M_{S_j}(t) = \prod_{j=1}^n \exp(\lambda_j [M_j(t) - 1]) \\
 &= \exp\left(\left[\sum_{j=1}^n \lambda_j M_j(t) - \sum_{j=1}^n \lambda_j\right]\right) \\
 &= \exp\left(\left[\sum_{j=1}^n \lambda_j M_j(t)\right] - \lambda\right) \\
 &= \exp\left(\lambda \left\{ \left[\sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{\lambda} M_j(t)\right] - 1 \right\}\right)
 \end{aligned}$$

- **Demostración:** Sea  $M_j(t)$  la f.g.m. de  $F_j(x)$  para  $j = 1, 2, \dots, n$ . Entonces  $S_j$  tiene f.g.m. dada por:
- $M_{S_j}(t) = \mathbb{E}(e^{tS_j}) = e^{\lambda_j(M_j(t)-1)}$  y por la independencia de las  $S'_j$ s,  $S$  tiene f.g.m.
- 

$$\begin{aligned}
 M_S(t) &= \prod_{j=1}^n M_{S_j}(t) = \prod_{j=1}^n \exp(\lambda_j [M_j(t) - 1]) \\
 &= \exp\left(\left[\sum_{j=1}^n \lambda_j M_j(t) - \sum_{j=1}^n \lambda_j\right]\right) \\
 &= \exp\left(\left[\sum_{j=1}^n \lambda_j M_j(t)\right] - \lambda\right) \\
 &= \exp\left(\lambda \left\{ \left[\sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{\lambda} M_j(t)\right] - 1 \right\}\right)
 \end{aligned}$$

- Ya que  $\sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{\lambda} M_j(t)$  es la f.g.m. de  $F(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{\lambda} F_j(x)$ , entonces  $M_S(t)$  tiene la forma de la f.g.m. de una distribución Poisson compuesta

- **Ejemplo:**  $S_1$  y  $S_2$  son distribuciones Poisson compuestas con parámetros  $\lambda_1 = 3$  y  $\lambda_2 = 2$ , y función de severidad individual

- **Ejemplo:**  $S_1$  y  $S_2$  son distribuciones Poisson compuestas con parámetros  $\lambda_1 = 3$  y  $\lambda_2 = 2$ , y función de severidad individual

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$
1	0.25	0.10
2	0.75	0.40
3	0.00	0.40
4	0.00	0.10

- **Ejemplo:**  $S_1$  y  $S_2$  son distribuciones Poisson compuestas con parámetros  $\lambda_1 = 3$  y  $\lambda_2 = 2$ , y función de severidad individual

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$
1	0.25	0.10
2	0.75	0.40
3	0.00	0.40
4	0.00	0.10

- Determine la media y varianza de  $S$ .

- **Ejemplo:**  $S_1$  y  $S_2$  son distribuciones Poisson compuestas con parámetros  $\lambda_1 = 3$  y  $\lambda_2 = 2$ , y función de severidad individual

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$
1	0.25	0.10
2	0.75	0.40
3	0.00	0.40
4	0.00	0.10

- Determine la media y varianza de  $S$ .
- $S = S_1 + S_2$  tiene una distribución Poisson compuesta con media  $\lambda = 3 + 2 = 5$ , y con función de severidad

- Ejemplo:  $S_1$  y  $S_2$  son distribuciones Poisson compuestas con parámetros  $\lambda_1 = 3$  y  $\lambda_2 = 2$ , y función de severidad individual

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$
1	0.25	0.10
2	0.75	0.40
3	0.00	0.40
4	0.00	0.10

- Determine la media y varianza de  $S$ .
- $S = S_1 + S_2$  tiene una distribución Poisson compuesta con media  $\lambda = 3 + 2 = 5$ , y con función de severidad

x	$\mathbb{P}(S = s)$
1	$(3/5)*(0.25)+(2/5)*(0.10)=0.19$
2	$(3/5)*(0.75)+(2/5)*(0.40)=0.61$
3	$0+(2/5)*(0.40)=0.16$
4	$0+(2/5)*(0.10)=0.04$

- **Ejemplo:**  $S_1$  y  $S_2$  son distribuciones Poisson compuestas con parámetros  $\lambda_1 = 3$  y  $\lambda_2 = 2$ , y función de severidad individual

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$
1	0.25	0.10
2	0.75	0.40
3	0.00	0.40
4	0.00	0.10

- Determine la media y varianza de  $S$ .
- $S = S_1 + S_2$  tiene una distribución Poisson compuesta con media  $\lambda = 3 + 2 = 5$ , y con función de severidad

x	$\mathbb{P}(S = s)$
1	$(3/5)*(0.25)+(2/5)*(0.10)=0.19$
2	$(3/5)*(0.75)+(2/5)*(0.40)=0.61$
3	$0+(2/5)*(0.40)=0.16$
4	$0+(2/5)*(0.10)=0.04$

- De donde obtenemos

- **Ejemplo:**  $S_1$  y  $S_2$  son distribuciones Poisson compuestas con parámetros  $\lambda_1 = 3$  y  $\lambda_2 = 2$ , y función de severidad individual

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$
1	0.25	0.10
2	0.75	0.40
3	0.00	0.40
4	0.00	0.10

- Determine la media y varianza de  $S$ .
- $S = S_1 + S_2$  tiene una distribución Poisson compuesta con media  $\lambda = 3 + 2 = 5$ , y con función de severidad

x	$\mathbb{P}(S = s)$
1	$(3/5)*(0.25)+(2/5)*(0.10)=0.19$
2	$(3/5)*(0.75)+(2/5)*(0.40)=0.61$
3	$0+(2/5)*(0.40)=0.16$
4	$0+(2/5)*(0.10)=0.04$

- De donde obtenemos

●  $\mathbb{E}(S) = 1 * 0.19 + 2 * 0.61 + 3 * 0.16 + 4 * 0.04 = 2.05$  y  $\mathbb{V}(S) = E \left[ (S - 2.05)^2 \right] = 0.5075$

- **Modificaciones en los modelos agregados**

- **Modificaciones en los modelos agregados**
- Definidos estos dos modelos para pérdidas agregadas, corresponde ahora incluir los cambios que experimentan con las modificaciones que sufren las pólizas que los componen

- **Modificaciones en los modelos agregados**
- Definidos estos dos modelos para pérdidas agregadas, corresponde ahora incluir los cambios que experimentan con las modificaciones que sufren las pólizas que los componen
- Es decir, debemos encontrar las variables por pérdida y por pago para  $S$ , similares a las que hemos definido para las variables individuales, ya que la distribución de  $S$  también se verá afectada una vez que apliquemos modificaciones en la cobertura de contratos

## ● **Modificaciones en los modelos agregados**

- Definidos estos dos modelos para pérdidas agregadas, corresponde ahora incluir los cambios que experimentan con las modificaciones que sufren las pólizas que los componen
- Es decir, debemos encontrar las variables por pérdida y por pago para  $S$ , similares a las que hemos definido para las variables individuales, ya que la distribución de  $S$  también se verá afectada una vez que apliquemos modificaciones en la cobertura de contratos
- Supongamos un panorama simple bajo el cual el portafolio de pérdidas se modifique debido a la aplicación de un deducible, *d.* Como la variable aleatoria  $S$  depende de  $N$  y de las  $X_j'$ s , entonces tendremos que considerar dos posibilidades

- Supongamos que  $N^L$  es la variable aleatoria por pérdida que modela la frecuencia de las *pérdidas agregadas*, mientras que las  $X'_j$ s determinan la severidad de las mismas. En este escenario a través de la variable por pérdida  $Y^L$  modificaremos las  $X'_j$ s que representan los montos, pues recordemos que:

- Supongamos que  $N^L$  es la variable aleatoria por pérdida que modela la frecuencia de las *pérdidas agregadas*, mientras que las  $X'_j$ s determinan la severidad de las mismas. En este escenario a través de la variable por pérdida  $Y^L$  modificaremos las  $X'_j$ s que representan los montos, pues recordemos que:



$$Y^L = (X - d)_+ = \begin{cases} 0 & X \leq d \\ X - d & X > d \end{cases}$$

- Supongamos que  $N^L$  es la variable aleatoria por pérdida que modela la frecuencia de las *pérdidas agregadas*, mientras que las  $X'_j$ s determinan la severidad de las mismas. En este escenario a través de la variable por pérdida  $Y^L$  modificaremos las  $X'_j$ s que representan los montos, pues recordemos que:

- 

$$Y^L = (X - d)_+ = \begin{cases} 0 & X \leq d \\ X - d & X > d \end{cases}$$

- Así que la severidad de las reclamaciones se verá afectada

- Supongamos que  $N^L$  es la variable aleatoria por pérdida que modela la frecuencia de las *pérdidas agregadas*, mientras que las  $X'_j$ s determinan la severidad de las mismas. En este escenario a través de la variable por pérdida  $Y^L$  modificaremos las  $X'_j$ s que representan los montos, pues recordemos que:

- 

$$Y^L = (X - d)_+ = \begin{cases} 0 & X \leq d \\ X - d & X > d \end{cases}$$

- Así que la severidad de las reclamaciones se verá afectada
- En este caso  $Y_j^L$  representa el pago por la j-ésima pérdida, mientras que la frecuencia seguirá distribuyendose de la misma forma puesto que, como su nombre lo indica, estamos considerando las pérdidas totales que sufre la compañía sin importar aquellas que realmente se pagan

- Entonces, el modelo colectivo queda

- Entonces, el modelo colectivo queda



$$S = Y_1^L + Y_2^L + \cdots + Y_{N^L}^L$$

- Entonces, el modelo colectivo queda

- 

$$S = Y_1^L + Y_2^L + \cdots + Y_{N^L}^L$$

- Con  $S = 0$  si  $N^L = 0$

- Entonces, el modelo colectivo queda

- 

$$S = Y_1^L + Y_2^L + \cdots + Y_{N^L}^L$$

- Con  $S = 0$  si  $N^L = 0$
- La segunda opción es considerar a  $Y^P$ , variable de *pago*, que reflejará los montos pagados una vez que han excedido el valor del deducible,  $d$ , pero, además de ello, en este caso, la variable de frecuencia de reclamaciones,  $N^P$ , también se modificará, y se verá reflejado en el número de pagos efectuados

- Entonces, el modelo colectivo queda

- 

$$S = Y_1^L + Y_2^L + \cdots + Y_{N^L}^L$$

- Con  $S = 0$  si  $N^L = 0$
- La segunda opción es considerar a  $Y^P$ , variable de *pago*, que reflejará los montos pagados una vez que han excedido el valor del deducible,  $d$ , pero, además de ello, en este caso, la variable de frecuencia de reclamaciones,  $N^P$ , también se modificará, y se verá reflejado en el número de pagos efectuados
- Entonces, los parámetros para  $N^P$  cambiarán conforme a lo visto en las modificaciones de cobertura para modelos de frecuencia, donde se considera a  $\nu$  como la probabilidad de pago. El modelo sería



$$S = Y_1^P + Y_2^P + \cdots + Y_{N^P}^P$$



$$S = Y_1^P + Y_2^P + \cdots + Y_{N^P}^P$$

- Con  $S = 0$  si  $N^P = 0$  y  $Y_j^P$  es la variable de pago que representa el monto de la j-ésima pérdida tal como se definió  $Y^P$  anteriormente



$$S = Y_1^P + Y_2^P + \cdots + Y_{N^P}^P$$

- Con  $S = 0$  si  $N^P = 0$  y  $Y_j^P$  es la variable de pago que representa el monto de la  $j$ -ésima pérdida tal como se definió  $Y^P$  anteriormente
- Es importante considerar las modificaciones de los contratos de seguros en los modelos colectivos, debido a que, bajo circunstancias apegadas a la realidad, generalmente esta información es la que se manejará



$$S = Y_1^P + Y_2^P + \cdots + Y_{N^P}^P$$

- Con  $S = 0$  si  $N^P = 0$  y  $Y_j^P$  es la variable de pago que representa el monto de la  $j$ -ésima pérdida tal como se definió  $Y^P$  anteriormente
- Es importante considerar las modificaciones de los contratos de seguros en los modelos colectivos, debido a que, bajo circunstancias apegadas a la realidad, generalmente esta información es la que se manejará
- Ya sabemos que existe una relación entre las variables de pérdida y de pago:  $Y^P = Y^L | Y^L > 0$ . Luego, retomando el concepto de  $\nu$  como la probabilidad de pago, las funciones de distribución de estas variables, guardan la siguiente relación



$$F_{Y^L} = (1 - \nu) + \nu F_{Y^P}(y); \quad y \geq 0$$



$$F_{Y^L} = (1 - \nu) + \nu F_{Y^P}(y); \quad y \geq 0$$

- porque  $1 - \nu = \mathbb{P}[Y^L = 0] = F_{Y^L}(0)$



$$F_{Y^L} = (1 - \nu) + \nu F_{Y^P}(y); \quad y \geq 0$$

- porque  $1 - \nu = \mathbb{P}[Y^L = 0] = F_{Y^L}(0)$
- Con una relación equivalente para sus f.g.m.



$$F_{Y^L} = (1 - \nu) + \nu F_{Y^P}(y); \quad y \geq 0$$

- porque  $1 - \nu = \mathbb{P}[Y^L = 0] = F_{Y^L}(0)$
- Con una relación equivalente para sus f.g.m.



$$M_{Y^L}(t) = (1 - \nu) + \nu M_{Y^P}(t)$$



$$F_{Y^L} = (1 - \nu) + \nu F_{Y^P}(y); \quad y \geq 0$$

- porque  $1 - \nu = \mathbb{P}[Y^L = 0] = F_{Y^L}(0)$
- Con una relación equivalente para sus f.g.m.



$$M_{Y^L}(t) = (1 - \nu) + \nu M_{Y^P}(t)$$

- Ya que



$$F_{Y^L} = (1 - \nu) + \nu F_{Y^P}(y); \quad y \geq 0$$

- porque  $1 - \nu = \mathbb{P}[Y^L = 0] = F_{Y^L}(0)$
- Con una relación equivalente para sus f.g.m.



$$M_{Y^L}(t) = (1 - \nu) + \nu M_{Y^P}(t)$$

- Ya que



$$\begin{aligned}\mathbb{E}[e^{tY^L}] &= \mathbb{E}[e^{tY^L} | Y^L = 0] \mathbb{P}[Y^L = 0] + \mathbb{E}[e^{tY^L} | Y^L > 0] \mathbb{P}[Y^L > 0] \\ &= \mathbb{E}[1 | Y^L = 0] (1 - \nu) + \mathbb{E}[e^{tY^L} | Y^L > 0] \nu \\ &= (1 - \nu) + \nu M_{Y^P}(t)\end{aligned}$$



$$F_{Y^L} = (1 - \nu) + \nu F_{Y^P}(y); \quad y \geq 0$$

- porque  $1 - \nu = \mathbb{P}[Y^L = 0] = F_{Y^L}(0)$
- Con una relación equivalente para sus f.g.m.



$$M_{Y^L}(t) = (1 - \nu) + \nu M_{Y^P}(t)$$

- Ya que



$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[e^{tY^L}\right] &= \mathbb{E}\left[e^{tY^L} | Y^L = 0\right]\mathbb{P}[Y^L = 0] + \mathbb{E}\left[e^{tY^L} | Y^L > 0\right]\mathbb{P}[Y^L > 0] \\ &= \mathbb{E}\left[1 | Y^L = 0\right](1 - \nu) + \mathbb{E}\left[e^{tY^L} | Y^L > 0\right]\nu \\ &= (1 - \nu) + \nu M_{Y^P}(t)\end{aligned}$$

- Además, para el número de pérdidas  $N^L$  y el número de pagos  $N^P$  se tiene esta relación con sus f.g.p.



$$P_{NP}(z) = P_{NL}(1 - v + vz)$$



$$P_{NP}(z) = P_{NL}(1 - v + vz)$$

- **Con**  $P_{NP}(z) = \mathbb{E}\left(z^{NP}\right)$  y  $P_{NL}(z) = \mathbb{E}\left(z^{NL}\right)$



$$P_{NP}(z) = P_{NL}(1 - v + vz)$$

- Con  $P_{NP}(z) = \mathbb{E}(z^{NP})$  y  $P_{NL}(z) = \mathbb{E}(z^{NL})$
- Finalmente con los resultados del Modelo Colectivo, las f.g.m. de  $S$  en términos de las variables por pérdida y por pago son:



$$P_{NP}(z) = P_{NL}(1 - v + vz)$$

- Con  $P_{NP}(z) = \mathbb{E}(z^{NP})$  y  $P_{NL}(z) = \mathbb{E}(z^{NL})$
- Finalmente con los resultados del Modelo Colectivo, las f.g.m. de  $S$  en términos de las variables por pérdida y por pago son:
  - $M_S(t) = \mathbb{E}(e^{tS}) = P_{NL}(M_{YL}(t))$



$$P_{NP}(z) = P_{NL}(1 - v + vz)$$

- Con  $P_{NP}(z) = \mathbb{E}(z^{NP})$  y  $P_{NL}(z) = \mathbb{E}(z^{NL})$
- Finalmente con los resultados del Modelo Colectivo, las f.g.m. de  $S$  en términos de las variables por pérdida y por pago son:



$$M_S(t) = \mathbb{E}(e^{tS}) = P_{NL}(M_{YL}(t))$$

• Y

$$M_S(t) = \mathbb{E}(e^{tS}) = P_{NP}(M_{YP}(t))$$



$$P_{NP}(z) = P_{NL}(1 - v + vz)$$

- Con  $P_{NP}(z) = \mathbb{E}(z^{NP})$  y  $P_{NL}(z) = \mathbb{E}(z^{NL})$
- Finalmente con los resultados del Modelo Colectivo, las f.g.m. de  $S$  en términos de las variables por pérdida y por pago son:



$$M_S(t) = \mathbb{E}(e^{tS}) = P_{NL}(M_{YL}(t))$$



$$M_S(t) = \mathbb{E}(e^{tS}) = P_{NP}(M_{YP}(t))$$

- Que guardan la siguiente relación



$$P_{NP}(z) = P_{NL}(1 - v + vz)$$

- Con  $P_{NP}(z) = \mathbb{E}(z^{NP})$  y  $P_{NL}(z) = \mathbb{E}(z^{NL})$
- Finalmente con los resultados del Modelo Colectivo, las f.g.m. de  $S$  en términos de las variables por pérdida y por pago son:



$$M_S(t) = \mathbb{E}(e^{tS}) = P_{NL}(M_{YL}(t))$$



$$M_S(t) = \mathbb{E}(e^{tS}) = P_{NP}(M_{YP}(t))$$

- Que guardan la siguiente relación

- $P_{NL}[M_{YL}(t)] = P_{NL}[1 - v + vM_{YP}(t)] = P_{NP}[M_{YP}(t)]$

## ● Ejemplo

## • Ejemplo

- En una cobertura de seguros, se sabe que el número de pérdidas en el *modelo de riesgo colectivo* se distribuyen  $BinNeg(\beta = 1.5, r = 12)$  y que los montos de las pérdidas ( $X_j'$ s) tienen distribución  $Pareto(\alpha = 3, \theta = 150)$ . Además de esta información, se determina que la inflación será del 3% y se aplicarán las siguientes modificaciones de cobertura:  
Deductible  $d = 40$ ; límite de póliza = 250; coaseguro = 85%

## • Ejemplo

- En una cobertura de seguros, se sabe que el número de pérdidas en el *modelo de riesgo colectivo* se distribuyen  $BinNeg(\beta = 1.5, r = 12)$  y que los montos de las pérdidas ( $X_j'$ s) tienen distribución  $Pareto(\alpha = 3, \theta = 150)$ . Además de esta información, se determina que la inflación será del 3% y se aplicarán las siguientes modificaciones de cobertura:  
Deductible  $d = 40$ ; límite de póliza = 250; coaseguro = 85%

- Determinar la esperanza y la varianza de las pérdidas agregadas, considerando que el monto de las pérdidas se ve modificado por la variable aleatoria de pérdida y por la variable aleatoria de pérdida en exceso (o variable de pago)

- Primero encontremos  $\mathbb{E}(S)$  y  $\mathbb{V}(S)$ , cuando las  $X_j'$ s se modifican por  $Y^L$ . Entonces, el orden en el que consideramos las modificaciones son: primero la inflación, posteriormente el deducible, el límite de póliza y finalmente el coaseguro

- Primero encontremos  $\mathbb{E}(S)$  y  $\mathbb{V}(S)$ , cuando las  $X_j'$ s se modifican por  $Y^L$ . Entonces, el orden en el que consideramos las modificaciones son: primero la inflación, posteriormente el deducible, el límite de póliza y finalmente el coaseguro
- Considerando estas modificaciones para cada  $X_j$ , la variable aleatoria de pérdida queda:

- Primero encontremos  $\mathbb{E}(S)$  y  $\mathbb{V}(S)$ , cuando las  $X_j's$  se modifican por  $Y^L$ . Entonces, el orden en el que consideramos las modificaciones son: primero la inflación, posteriormente el deducible, el límite de póliza y finalmente el coaseguro
- Considerando estas modificaciones para cada  $X_j$ , la variable aleatoria de pérdida queda:
- 

$$Y^L = \begin{cases} 0 & X < \frac{40}{1.03} \\ 0.85[(1.03)X - 40] & \frac{40}{1.03} \leq X < \frac{250}{1.03} \\ 0.85(250 - 40) & X \geq \frac{250}{1.03} \end{cases}$$

- Entonces

- Entonces

$$\begin{aligned}\bullet \quad \mathbb{E} [Y^L] &= \alpha (1 + r) \left[ \mathbb{E} \left( X \wedge \frac{u}{1+r} \right) - \mathbb{E} \left( X \wedge \frac{d}{1+r} \right) \right] \\ &= 0.85 (1.03) \left[ \mathbb{E} \left( X \wedge \frac{250}{1.03} \right) - \mathbb{E} \left( X \wedge \frac{40}{1.03} \right) \right]\end{aligned}$$

- Entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y^L] &= \alpha(1+r) \left[ \mathbb{E}\left(X \wedge \frac{u}{1+r}\right) - \mathbb{E}\left(X \wedge \frac{d}{1+r}\right) \right] \\ &= 0.85(1.03) \left[ \mathbb{E}\left(X \wedge \frac{250}{1.03}\right) - \mathbb{E}\left(X \wedge \frac{40}{1.03}\right) \right]\end{aligned}$$

- Para la  $Pareto(3, 150)$

- Entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y^L] &= \alpha(1+r) \left[ \mathbb{E}\left(X \wedge \frac{u}{1+r}\right) - \mathbb{E}\left(X \wedge \frac{d}{1+r}\right) \right] \\ &= 0.85(1.03) \left[ \mathbb{E}\left(X \wedge \frac{250}{1.03}\right) - \mathbb{E}\left(X \wedge \frac{40}{1.03}\right) \right]\end{aligned}$$

- Para la  $Pareto(3, 150)$

$$\mathbb{E}\left(X \wedge \frac{250}{1.03}\right) = \frac{150}{2} \left[ 1 - \left( \frac{150}{\frac{250}{1.03} + 150} \right)^2 \right] = 64.058$$

- Entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y^L] &= \alpha(1+r) \left[ \mathbb{E}\left(X \wedge \frac{u}{1+r}\right) - \mathbb{E}\left(X \wedge \frac{d}{1+r}\right) \right] \\ &= 0.85(1.03) \left[ \mathbb{E}\left(X \wedge \frac{250}{1.03}\right) - \mathbb{E}\left(X \wedge \frac{40}{1.03}\right) \right]\end{aligned}$$

- Para la *Pareto*(3, 150)

$$\mathbb{E}\left(X \wedge \frac{250}{1.03}\right) = \frac{150}{2} \left[ 1 - \left( \frac{150}{\frac{250}{1.03} + 150} \right)^2 \right] = 64.058$$

$$\mathbb{E}\left(X \wedge \frac{40}{1.03}\right) = \frac{150}{2} \left[ 1 - \left( \frac{150}{\frac{40}{1.03} + 150} \right)^2 \right] = 27.676$$

- Entonces

- $$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y^L] &= \alpha(1+r) \left[ \mathbb{E}\left(X \wedge \frac{u}{1+r}\right) - \mathbb{E}\left(X \wedge \frac{d}{1+r}\right) \right] \\ &= 0.85(1.03) \left[ \mathbb{E}\left(X \wedge \frac{250}{1.03}\right) - \mathbb{E}\left(X \wedge \frac{40}{1.03}\right) \right]\end{aligned}$$

- Para la  $Pareto(3, 150)$

- $$\mathbb{E}\left(X \wedge \frac{250}{1.03}\right) = \frac{150}{2} \left[ 1 - \left( \frac{150}{\frac{250}{1.03} + 150} \right)^2 \right] = 64.058$$

- $$\mathbb{E}\left(X \wedge \frac{40}{1.03}\right) = \frac{150}{2} \left[ 1 - \left( \frac{150}{\frac{40}{1.03} + 150} \right)^2 \right] = 27.676$$

- $\Rightarrow \mathbb{E}[Y^L] = 0.85(1.03) [64.058 - 27.676] = 31.852$

- Entonces

- $$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y^L] &= \alpha(1+r) \left[ \mathbb{E}\left(X \wedge \frac{u}{1+r}\right) - \mathbb{E}\left(X \wedge \frac{d}{1+r}\right) \right] \\ &= 0.85(1.03) \left[ \mathbb{E}\left(X \wedge \frac{250}{1.03}\right) - \mathbb{E}\left(X \wedge \frac{40}{1.03}\right) \right]\end{aligned}$$

- Para la  $Pareto(3, 150)$

- $$\mathbb{E}\left(X \wedge \frac{250}{1.03}\right) = \frac{150}{2} \left[ 1 - \left( \frac{150}{\frac{250}{1.03} + 150} \right)^2 \right] = 64.058$$

- $$\mathbb{E}\left(X \wedge \frac{40}{1.03}\right) = \frac{150}{2} \left[ 1 - \left( \frac{150}{\frac{40}{1.03} + 150} \right)^2 \right] = 27.676$$

- $$\Rightarrow \mathbb{E}[Y^L] = 0.85(1.03)[64.058 - 27.676] = 31.852$$

- Luego para  $N^L$  sabemos que se distribuye  $BinNeg(1.5, 12)$  pero esta variable, que representa el número de reclamaciones del modelo colectivo, no se modifica por ser variable de pédida y no de pago

●  $\implies \mathbb{E}(N^L) = r\beta = 12 * 1.5 = 18$

- $\implies \mathbb{E}(N^L) = r\beta = 12 * 1.5 = 18$
- Por los resultados anteriores

- $\implies \mathbb{E}(N^L) = r\beta = 12 * 1.5 = 18$
- Por los resultados anteriores
- $\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(Y^L)\mathbb{E}(N^L) = 31.85244 * 18 = 573.3439$

$$\bullet \implies \mathbb{E}(N^L) = r\beta = 12 * 1.5 = 18$$

- Por los resultados anteriores

$$\bullet \mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(Y^L)\mathbb{E}(N^L) = 31.85244 * 18 = 573.3439$$

- Aparte de esta situación, como el número de reclamaciones se distribuye Binomial Negativa, el modelo se reduce a un Modelo Binomial Negativo Compuesto, razón por la cual, como se mostró en la sección anterior, la varianza de  $S$  es

$$\bullet \implies \mathbb{E}(N^L) = r\beta = 12 * 1.5 = 18$$

- Por los resultados anteriores

$$\bullet \mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(Y^L)\mathbb{E}(N^L) = 31.85244 * 18 = 573.3439$$

- Aparte de esta situación, como el número de reclamaciones se distribuye Binomial Negativa, el modelo se reduce a un Modelo Binomial Negativo Compuesto, razón por la cual, como se mostró en la sección anterior, la varianza de  $S$  es

$$\bullet \text{v}(S) = r\beta \left[ \mathbb{E}((Y^L)^2) + \beta \mathbb{E}(Y^L)^2 \right]$$

$$\bullet \implies \mathbb{E}(N^L) = r\beta = 12 * 1.5 = 18$$

- Por los resultados anteriores

$$\bullet \mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(Y^L)\mathbb{E}(N^L) = 31.85244 * 18 = 573.3439$$

- Aparte de esta situación, como el número de reclamaciones se distribuye Binomial Negativa, el modelo se reduce a un Modelo Binomial Negativo Compuesto, razón por la cual, como se mostró en la sección anterior, la varianza de  $S$  es

$$\bullet \text{v}(S) = r\beta \left[ \mathbb{E}((Y^L)^2) + \beta \mathbb{E}(Y^L)^2 \right]$$

- Entonces, hay que obtener el segundo momento en términos de  $Y^L$ , i.e.,  $\mathbb{E}[(Y^L)^2]$ , que, de manera general, se calcula como

- $\implies \mathbb{E}(N^L) = r\beta = 12 * 1.5 = 18$

- Por los resultados anteriores

- $\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(Y^L)\mathbb{E}(N^L) = 31.85244 * 18 = 573.3439$

- Aparte de esta situación, como el número de reclamaciones se distribuye Binomial Negativa, el modelo se reduce a un Modelo Binomial Negativo Compuesto, razón por la cual, como se mostró en la sección anterior, la varianza de  $S$  es

- $\mathbb{V}(S) = r\beta \left[ \mathbb{E}((Y^L)^2) + \beta \mathbb{E}(Y^L)^2 \right]$

- Entonces, hay que obtener el segundo momento en términos de  $Y^L$ , i.e.,  $\mathbb{E}((Y^L)^2)$ , que, de manera general, se calcula como

- $\mathbb{E}((Y^L)^2) =$

$$\alpha^2(1+r)^2 \left\{ \mathbb{E}[(X \wedge u^*)^2] - \mathbb{E}[(X \wedge d^*)^2] - 2d^* \mathbb{E}(X \wedge u^*) + 2d^* \mathbb{E}(X \wedge d^*) \right\}$$

- Con  $u^* = \frac{u}{1+r}$  y  $d^* = \frac{d}{1+r}$

- Con  $u^* = \frac{u}{1+r}$  y  $d^* = \frac{d}{1+r}$
- Por lo que en nuestro caso este cálculo es

- Con  $u^* = \frac{u}{1+r}$  y  $d^* = \frac{d}{1+r}$
- Por lo que en nuestro caso este cálculo es
- $\mathbb{E}[(Y^L)^2] = (0.85)^2 (1.03)^2 *$   
 $\left\{ \mathbb{E}\left[\left(X \wedge \frac{250}{1.03}\right)^2\right] - \mathbb{E}\left[\left(X \wedge \frac{40}{1.03}\right)^2\right] - 2\left(\frac{40}{1.03}\right)\mathbb{E}\left(X \wedge \frac{250}{1.03}\right) + 2\left(\frac{40}{1.03}\right)\mathbb{E}\left(X \wedge \frac{40}{1.03}\right) \right\}$

- Con  $u^* = \frac{u}{1+r}$  y  $d^* = \frac{d}{1+r}$
- Por lo que en nuestro caso este cálculo es
- $\mathbb{E}[(Y^L)^2] = (0.85)^2 (1.03)^2 *$   
 $\left\{ \mathbb{E}\left[\left(X \wedge \frac{250}{1.03}\right)^2\right] - \mathbb{E}\left[\left(X \wedge \frac{40}{1.03}\right)^2\right] - 2\left(\frac{40}{1.03}\right)\mathbb{E}\left(X \wedge \frac{250}{1.03}\right) + 2\left(\frac{40}{1.03}\right)\mathbb{E}\left(X \wedge \frac{40}{1.03}\right) \right\}$
- Que observamos es bastante laborioso. Haciendo estos cálculos en **R**, tenemos que

- Con  $u^* = \frac{u}{1+r}$  y  $d^* = \frac{d}{1+r}$
- Por lo que en nuestro caso este cálculo es
- $$\mathbb{E}[(Y^L)^2] = (0.85)^2 (1.03)^2 * \left\{ \mathbb{E}\left[\left(X \wedge \frac{250}{1.03}\right)^2\right] - \mathbb{E}\left[\left(X \wedge \frac{40}{1.03}\right)^2\right] - 2\left(\frac{40}{1.03}\right)\mathbb{E}\left(X \wedge \frac{250}{1.03}\right) + 2\left(\frac{40}{1.03}\right)\mathbb{E}\left(X \wedge \frac{40}{1.03}\right) \right\}$$
- Que observamos es bastante laborioso. Haciendo estos cálculos en **R**, tenemos que

- $$\mathbb{E}[(Y^L)^2] = 4217.442$$

- Con  $u^* = \frac{u}{1+r}$  y  $d^* = \frac{d}{1+r}$
- Por lo que en nuestro caso este cálculo es
- $$\mathbb{E}[(Y^L)^2] = (0.85)^2 (1.03)^2 * \left\{ \mathbb{E}\left[\left(X \wedge \frac{250}{1.03}\right)^2\right] - \mathbb{E}\left[\left(X \wedge \frac{40}{1.03}\right)^2\right] - 2\left(\frac{40}{1.03}\right)\mathbb{E}\left(X \wedge \frac{250}{1.03}\right) + 2\left(\frac{40}{1.03}\right)\mathbb{E}\left(X \wedge \frac{40}{1.03}\right) \right\}$$
- Que observamos es bastante laborioso. Haciendo estos cálculos en **R**, tenemos que
  - $$\mathbb{E}[(Y^L)^2] = 4217.442$$
- Finalmente

- Con  $u^* = \frac{u}{1+r}$  y  $d^* = \frac{d}{1+r}$
- Por lo que en nuestro caso este cálculo es
- $\mathbb{E}[(Y^L)^2] = (0.85)^2 (1.03)^2 *$   
 $\left\{ \mathbb{E}\left[\left(X \wedge \frac{250}{1.03}\right)^2\right] - \mathbb{E}\left[\left(X \wedge \frac{40}{1.03}\right)^2\right] - 2\left(\frac{40}{1.03}\right)\mathbb{E}\left(X \wedge \frac{250}{1.03}\right) + 2\left(\frac{40}{1.03}\right)\mathbb{E}\left(X \wedge \frac{40}{1.03}\right) \right\}$
- Que observamos es bastante laborioso. Haciendo estos cálculos en **R**, tenemos que

- $\mathbb{E}[(Y^L)^2] = 4217.442$

- Finalmente
- 

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(S) &= r\beta \left[ \mathbb{E}((Y^L)^2) + \beta \mathbb{E}(Y^L)^2 \right] \\ &= 18 \left[ 4217.442 + 1.5 (31.85244)^2 \right] \\ &= 103307.6 \end{aligned}$$

- Como segundo punto también debemos calcular la  $\mathbb{E}(S)$  y  $\mathbb{V}(S)$  considerando a las  $Y_j^{P'}$ s y a  $N^P$  como la frecuencia

- Como segundo punto también debemos calcular la  $\mathbb{E}(S)$  y  $\mathbb{V}(S)$  considerando a las  $Y_j^{P'}$ s y a  $N^P$  como la frecuencia
- La función para  $Y^P$ , a diferencia de  $Y^L$ , es sólo tomar en cuenta que los valores para  $x < \frac{40}{1.03}$  no están definidos, así que para la  $\mathbb{E}[Y^P]$  basta dividir  $\mathbb{E}[Y^L]$  entre  $s_x\left(\frac{d}{1+r}\right)$

- Como segundo punto también debemos calcular la  $\mathbb{E}(S)$  y  $\mathbb{V}(S)$  considerando a las  $Y_j^{P'}$ s y a  $N^P$  como la frecuencia
- La función para  $Y^P$ , a diferencia de  $Y^L$ , es sólo tomar en cuenta que los valores para  $x < \frac{40}{1.03}$  no están definidos, así que para la  $\mathbb{E}[Y^P]$  basta dividir  $\mathbb{E}[Y^L]$  entre  $S_X\left(\frac{d}{1+r}\right)$
- $\Rightarrow S_X\left(\frac{40}{1.03}\right) = S_X(38.83495) = \left(\frac{150}{38.83495 + 150}\right)^3 = 0.501217$

- Como segundo punto también debemos calcular la  $\mathbb{E}(S)$  y  $\mathbb{V}(S)$  considerando a las  $Y_j^{P'}$ s y a  $N^P$  como la frecuencia
- La función para  $Y^P$ , a diferencia de  $Y^L$ , es sólo tomar en cuenta que los valores para  $x < \frac{40}{1.03}$  no están definidos, así que para la  $\mathbb{E}[Y^P]$  basta dividir  $\mathbb{E}[Y^L]$  entre  $S_X\left(\frac{d}{1+r}\right)$
- $\Rightarrow S_X\left(\frac{40}{1.03}\right) = S_X(38.83495) = \left(\frac{150}{38.83495 + 150}\right)^3 = 0.501217$
- De ahí  $\mathbb{E}[Y^P] = \frac{\mathbb{E}[Y^L]}{S_X\left(\frac{d}{1+r}\right)} = \frac{31.85244}{0.501218} = 63.55007$

- Como segundo punto también debemos calcular la  $\mathbb{E}(S)$  y  $\mathbb{V}(S)$  considerando a las  $Y_j^{P'}$ s y a  $N^P$  como la frecuencia
- La función para  $Y^P$ , a diferencia de  $Y^L$ , es sólo tomar en cuenta que los valores para  $x < \frac{40}{1.03}$  no están definidos, así que para la  $\mathbb{E}[Y^P]$  basta dividir  $\mathbb{E}[Y^L]$  entre  $S_X\left(\frac{d}{1+r}\right)$
- $\Rightarrow S_X\left(\frac{40}{1.03}\right) = S_X(38.83495) = \left(\frac{150}{38.83495 + 150}\right)^3 = 0.501217$
- De ahí  $\mathbb{E}[Y^P] = \frac{\mathbb{E}[Y^L]}{S_X\left(\frac{d}{1+r}\right)} = \frac{31.85244}{0.501218} = 63.55007$
- Para  $N^P$  debemos obtener  $\mathbb{E}[N^P]$ , entonces, como es la frecuencia correspondiente al pago que realiza la aseguradora, se modifica respecto al valor de  $\nu$ , donde:

- Como segundo punto también debemos calcular la  $\mathbb{E}(S)$  y  $\mathbb{V}(S)$  considerando a las  $Y_j^{P'}$ s y a  $N^P$  como la frecuencia
- La función para  $Y^P$ , a diferencia de  $Y^L$ , es sólo tomar en cuenta que los valores para  $x < \frac{40}{1.03}$  no están definidos, así que para la  $\mathbb{E}[Y^P]$  basta dividir  $\mathbb{E}[Y^L]$  entre  $S_X\left(\frac{d}{1+r}\right)$
- $\Rightarrow S_X\left(\frac{40}{1.03}\right) = S_X(38.83495) = \left(\frac{150}{38.83495 + 150}\right)^3 = 0.501217$
- De ahí  $\mathbb{E}[Y^P] = \frac{\mathbb{E}[Y^L]}{S_X\left(\frac{d}{1+r}\right)} = \frac{31.85244}{0.501218} = 63.55007$
- Para  $N^P$  debemos obtener  $\mathbb{E}[N^P]$ , entonces, como es la frecuencia correspondiente al pago que realiza la aseguradora, se modifica respecto al valor de  $\nu$ , donde:
- $\nu = \mathbb{P}\left(X > \frac{d}{1+r}\right) = 1 - F_X\left(\frac{40}{1.03}\right)$

- Esto porque recordemos que es la probabilidad de pago una vez que se ha aplicado inflación y deducible en el número de reclamaciones, entonces

- Esto porque recordemos que es la probabilidad de pago una vez que se ha aplicado inflación y deducible en el número de reclamaciones, entonces
- $\nu = S_X \left( \frac{40}{1.03} \right) = 0.501217971983$

- Esto porque recordemos que es la probabilidad de pago una vez que se ha aplicado inflación y deducible en el número de reclamaciones, entonces
- $\nu = S_X \left( \frac{40}{1.03} \right) = 0.501217971983$
- Por lo tanto, la distribución es una Binomial Negativa pero con parámetros modificados:  $r = r^* = 12$  y  $\beta^* = v\beta = 0.75182$

- Esto porque recordemos que es la probabilidad de pago una vez que se ha aplicado inflación y deducible en el número de reclamaciones, entonces
- $\nu = S_X \left( \frac{40}{1.03} \right) = 0.501217971983$
- Por lo tanto, la distribución es una Binomial Negativa pero con parámetros modificados:  $r = r^* = 12$  y  $\beta^* = v\beta = 0.75182$
- $\Rightarrow \mathbb{E}[N^P] = r\beta^* = 9.021923496$

- Esto porque recordemos que es la probabilidad de pago una vez que se ha aplicado inflación y deducible en el número de reclamaciones, entonces
- $\nu = S_X \left( \frac{40}{1.03} \right) = 0.501217971983$
- Por lo tanto, la distribución es una Binomial Negativa pero con parámetros modificados:  $r = r^* = 12$  y  $\beta^* = v\beta = 0.75182$
- $\implies \mathbb{E}[N^P] = r\beta^* = 9.021923496$
- De esta forma  $\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}[Y^P]\mathbb{E}[N^P] = 573.3459$

- Esto porque recordemos que es la probabilidad de pago una vez que se ha aplicado inflación y deducible en el número de reclamaciones, entonces
- $\nu = S_X \left( \frac{40}{1.03} \right) = 0.501217971983$
- Por lo tanto, la distribución es una Binomial Negativa pero con parámetros modificados:  $r = r^* = 12$  y  $\beta^* = v\beta = 0.75182$
- $\implies \mathbb{E}[N^P] = r\beta^* = 9.021923496$
- De esta forma  $\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}[Y^P]\mathbb{E}[N^P] = 573.3459$
- La  $\mathbb{V}(S) = r\beta^* \left[ \mathbb{E}[(Y^P)^2] + \beta^* \mathbb{E}(Y^P)^2 \right]$

- Esto porque recordemos que es la probabilidad de pago una vez que se ha aplicado inflación y deducible en el número de reclamaciones, entonces
- $\nu = S_X \left( \frac{40}{1.03} \right) = 0.501217971983$
- Por lo tanto, la distribución es una Binomial Negativa pero con parámetros modificados:  $r = r^* = 12$  y  $\beta^* = v\beta = 0.75182$
- $\implies \mathbb{E}[N^P] = r\beta^* = 9.021923496$
- De esta forma  $\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}[Y^P]\mathbb{E}[N^P] = 573.3459$
- La  $\mathbb{V}(S) = r\beta^* \left[ \mathbb{E}[(Y^P)^2] + \beta^* \mathbb{E}(Y^P)^2 \right]$
- $\implies \mathbb{E}[(Y^P)^2] = \frac{\mathbb{E}[(Y^L)^2]}{1 - F_X \left( \frac{40}{1.03} \right)} = \frac{4217.442}{0.501217} = 9903.321418$

- Esto porque recordemos que es la probabilidad de pago una vez que se ha aplicado inflación y deducible en el número de reclamaciones, entonces
- $\nu = S_X \left( \frac{40}{1.03} \right) = 0.501217971983$
- Por lo tanto, la distribución es una Binomial Negativa pero con parámetros modificados:  $r = r^* = 12$  y  $\beta^* = v\beta = 0.75182$
- $\Rightarrow \mathbb{E}[N^P] = r\beta^* = 9.021923496$
- De esta forma  $\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}[Y^P]\mathbb{E}[N^P] = 573.3459$
- La  $\mathbb{V}(S) = r\beta^* \left[ \mathbb{E}[(Y^P)^2] + \beta^* \mathbb{E}(Y^P)^2 \right]$
- $\Rightarrow \mathbb{E}[(Y^P)^2] = \frac{\mathbb{E}[(Y^L)^2]}{1 - F_X \left( \frac{40}{1.03} \right)} = \frac{4217.442}{0.501217} = 9903.321418$
- $\Rightarrow \mathbb{V}(S) = 9.021923 \left[ 8414.387 + 0.75182 (63.5503)^2 \right] = 103307.8$

- Bajo el análisis de las variables por pago y por pérdida en este modelo de riesgo colectivo, la  $\mathbb{E}(S)$  y  $\mathbb{V}(S)$  son iguales entre sí