

Mechanische Schwingungen am Beispiel von Schaukeln

Auf den meisten Spielplätzen findet man Schaukeln. Schaukeln sind schwingungsfähige Systeme, deren Schwingungen im Folgenden näher betrachtet werden. Stark vereinfachend soll hierbei jede Schaukel als ein Fadenpendel angesehen werden. Die schaukelnde Person ist dabei der Pendelkörper mit der Masse m , der sich nicht selbst aktiv bewegt, sondern nur von außen bewegt wird. Die Massen des Schaukelbretts und der Seile werden vernachlässigt.

Aufgaben

- 1 Ein Kind schaukelt auf einer Schaukel, deren Seile die Länge $l = 2,0\text{ m}$ besitzen. Die maximale Auslenkung ist so gewählt, dass die Schwingung als harmonisch betrachtet werden kann. Die Reibung soll vernachlässigt werden, wenn dies in der Aufgabe nicht anders erwähnt wird.
 - 1.1 Berechnen Sie die Schwingungsdauer T sowie die Frequenz f der Schaukel.

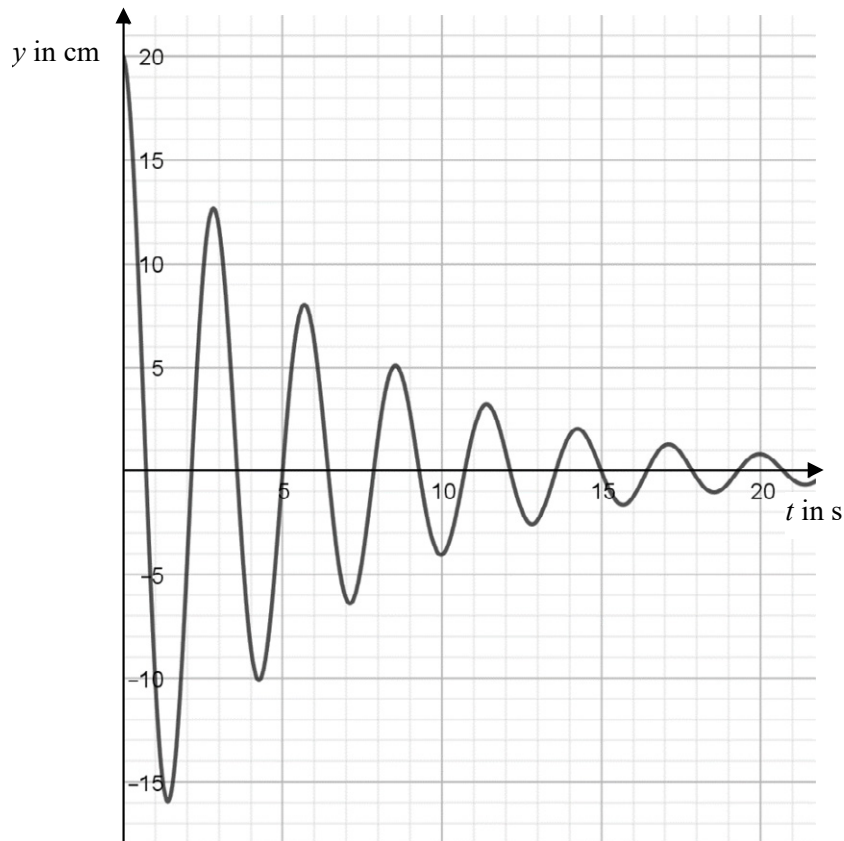
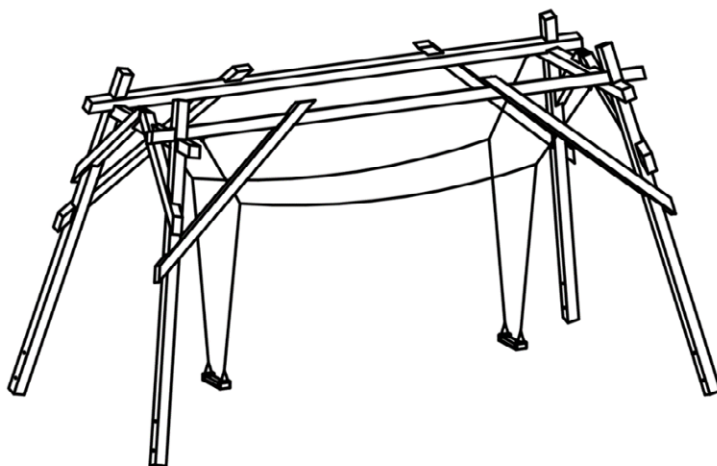
(3 BE)
 - 1.2 Untersuchen Sie allgemein, wie und um wieviel Prozent sich die Frequenz f einer Schaukel verändert, wenn die Länge l der Seile um 50 % vergrößert wird.

(3 BE)
 - 1.3 Das Kind wird nun von einem Elternteil regelmäßig angestoßen. Erläutern Sie, welche Zeitspanne innerhalb einer Schwingungsperiode für das Anstoßen besonders geeignet ist. Begründen Sie, dass das Anstoßen dazu führt, dass die Schwingung auch bei kleinen Amplituden nicht mehr als harmonisch zu betrachten ist.

(6 BE)
 - 1.4 Die Schaukel wird nicht mehr angestoßen und es wird der Einfluss der Reibung berücksichtigt, die zu einer gedämpften Schwingung führt. Material 1 zeigt den Verlauf dieser gedämpften Schwingung, deren Elongation $y(t)$ allgemein durch das Zeit-Weg-Gesetz $y(t) = y_{\max} \cdot e^{-k \cdot t} \cdot \cos(2\pi \cdot f \cdot t)$ beschrieben wird. Bestätigen Sie mithilfe von fünf geeigneten Werten aus Material 1, dass die Amplitude der hier dargestellten Schwingung exponentiell abnimmt. Ermitteln Sie mithilfe von Material 1 die Dämpfungskonstante k . Geben Sie das konkrete Zeit-Weg-Gesetz der in Material 1 dargestellten Schwingung an.

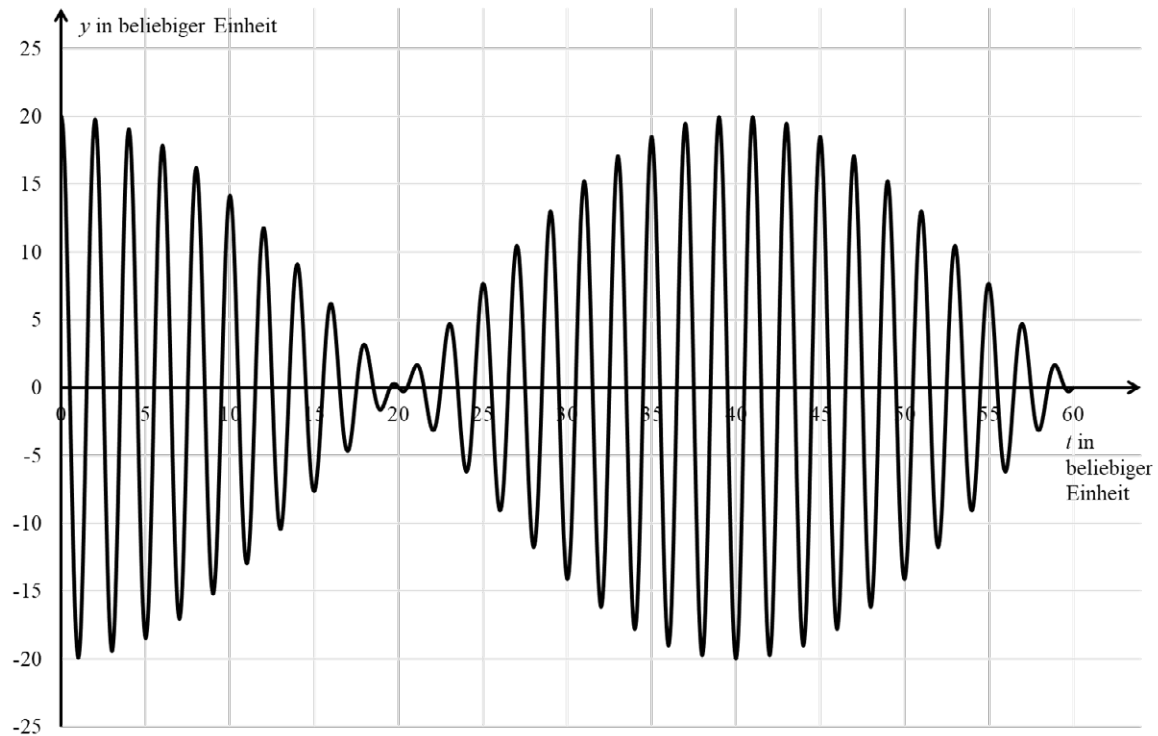
(11 BE)
 - 1.5 Eine Schwester und ihr jüngerer Bruder möchten auf zwei nebeneinander angeordneten und ansonsten völlig gleichen Schaukeln gleichzeitig und synchron schaukeln. Dies gelingt ihnen nicht, da die Frequenzen ihrer beiden Schwingungen unterschiedlich sind. Dies liegt daran, dass die Schwester im Stehen schaukelt, wodurch ihr Schwerpunkt höher liegt als beim sitzenden Bruder und damit die Pendellänge l der Schaukel verkürzt. Ein weiterer Grund ist, dass die Gewichtskraft der älteren Schwester größer ist als die ihres Bruders, was zu einer stärkeren Lagerreibung führt. Unter Berücksichtigung der jeweils auftretenden Reibung gilt für die Frequenz f einer solchen Schwingung näherungsweise die Formel $f = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{l} - k^2}$, wobei k die jeweilige Dämpfungskonstante bezeichnet.

- 1.5.1 Untersuchen Sie jeweils qualitativ mithilfe der angegebenen Formel, wie sich einerseits die unterschiedlichen Gewichtskräfte der schaukelnden Personen und andererseits die unterschiedlichen Positionen ihrer Schwerpunkte auf die Frequenzen der Schwingungen auswirken. (3 BE)
- 1.5.2 Für die Schwingung der Schwester wird eine Schwingungsdauer von $T_1 = 2,65 \text{ s}$ und für die Schwingung des Bruders eine Schwingungsdauer von $T_2 = 2,73 \text{ s}$ bestimmt. Entscheiden und begründen Sie anhand der beiden Schwingungsdauern, ob der Unterschied der Gewichtskräfte oder der Unterschied der Schwerpunktlagen einen stärkeren quantitativen Einfluss auf den Frequenzunterschied der beiden Schwingungen besitzt. (2 BE)
- 2 Bei einer sogenannten Partnerschaukel sind zwei identische Schaukeln durch Seile so miteinander verbunden, dass beim Schaukeln Energie zwischen den Schaukeln übertragen wird (Material 2). Die beiden Personen mit gleicher Masse m sitzen jeweils still auf ihrer Schaukel. Schaukel 1 wird um y_{\max} ausgelenkt und zum Zeitpunkt $t = 0 \text{ s}$ losgelassen. Schaukel 2 befindet sich zu diesem Zeitpunkt bewegungslos in ihrer Ruhelage. Die Diagramme in Material 3 zeigen qualitativ einen möglichen idealisierten Verlauf der Elongationen der beiden Schaukeln. Die Reibung soll vernachlässigt werden.
- 2.1 Beschreiben Sie den Verlauf der Elongationen beider Schaukeln in Material 3 und gehen Sie dabei auf Gemeinsamkeiten und Unterschiede ein. Erläutern Sie die Energieübertragung zwischen beiden Schaukeln. (6 BE)
- 2.2 Die Verläufe der Elongationen der beiden Schaukeln lassen sich idealisiert durch folgende Gleichungen beschreiben: Schaukel 1: $y_1(t) = y_{\max} \cdot \cos(\omega^* \cdot t) \cdot \cos(\omega \cdot t)$
Schaukel 2: $y_2(t) = y_{\max} \cdot \sin(\omega^* \cdot t) \cdot \sin(\omega \cdot t)$
Erklären Sie die beiden Gleichungen im Sachkontext unter besonderer Berücksichtigung der Bedeutungen von ω^* bzw. ω sowie des Wechsels von Kosinus zu Sinus. (5 BE)
- 3 In einem Modell werden n Fadenpendel durch Spiralfedern miteinander gekoppelt und das erste Fadenpendel wird durch einen Motor zu einer periodischen erzwungenen Schwingung angeregt. Es entsteht eine Welle, die sich mit der Geschwindigkeit c ausbreitet. Das letzte Fadenpendel ist als loses Ende zu betrachten. Durch die Reflexionen der Welle kommt es zu einer Überlagerung der hin- und rücklaufenden Wellen, sodass sich eine stehende Welle ausbilden kann.
- 3.1 Begründen Sie, dass das erste Fadenpendel ebenfalls als ein loses Ende betrachtet werden muss. Skizzieren Sie die drei stehenden Wellen mit den größten möglichen Wellenlängen, die sich auf der Gesamtlänge l des Modells ausbilden können. (6 BE)
- 3.2 Geben Sie eine Gleichung an, die allgemein den Zusammenhang zwischen der Wellenlänge λ der stehenden Wellen und der Gesamtlänge l des Modells beschreibt. Berechnen Sie die Ausbreitungsgeschwindigkeit c der Welle für den Fall, dass $f = 0,8 \text{ Hz}$ die kleinste Anregungsfrequenz ist, bei der sich eine stehende Welle ausbildet und $l = 3,0 \text{ m}$ beträgt. (5 BE)

Material 1**Zeitlicher Verlauf der gedämpften Schwingung der Schaukel****Material 2****Zeichnung einer Partnerschaukel**

Material 3**Verlauf der Elongationen der beiden gekoppelten Schaukeln (qualitativ)**

Schaukel 1:



Schaukel 2:

