titlesec[2016/03/21]

Mathematikwettbewerb 2025

Aaron Tsamaltoupis

January 18, 2025

Contents

1 Nr 1

2 Nr 2

Für jede ganze Zahl $n \geq 2$ betrachten wir in der Dezimaldarstellung von $n!$ die letzte von Null verschiedene Ziffer.
Bestimme alle Ziffern, die mindestens einmal in dieser Folge vorkommen, und zeige, dass jede dieser Ziffern sogar unendlich oft vorkommt.

Sei eine funktion $f : \mathbb{Z}^+ \rightarrow [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]$ definiert, sodass $f(n)$ die letzte von Null verschiedene Ziffer von n ist.

$$f(n) = \varepsilon \textit{ iff } \varepsilon \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \wedge \exists k, l(n = 10^k \cdot (10 \cdot l + \varepsilon))$$

Sei B die Menge aller Folgen b, die folgendermaßen definiert werden können:
$b_1^k = k + 1$ und für alle $n \in \mathbb{Z}_+$ gilt $b_n^k = (k+1) \cdot (k+2) ... (k+n-1) \cdot (k+n)$
$\implies b_n^k = \frac{(k+n)!}{k!}$

Alle Folgen $b \in B$ haben also folgende Elemente:

$$b_1 = k$$
$$\mathrm{b}_2 = k \cdot (k+1)$$
$$\mathrm{b}_3 = k \cdot (k+1) \cdot (k+2)$$
$$\mathrm{b}_4 = ...$$

Sei eine weitere Menge F, die Folgen beinhaltet, folgerndermaßen definiert:

$$F = \{Fb^k : \exists b^k \in B(Fb_n^k = f(b_n^k))\}$$

Das nte Element jeder Folge Fb_0 in F ist also die letzte von Null verschiedene Ziffer des nten Elementes einer Folge $b_0 \in B$

Sei die Folge aus der Aufgabenstellung, die mit (2,6,4,2,2,..) beginnt die Folge $Fa = (2, 6, 4, 2, 2, ...)$
Diese Folge kann folgendermaßen beschrieben werden:
$Fa_n = f(a_n)$, wobei a_n das nte Element einer weiteren Folge a ist, wobei a = (2!, 3!, 4!, ...)

Auch diese Folge a ist ein Element der Menge B:

$$a_1 = 2$$
$$\mathrm{a}_2 = 2 \cdot 3$$
$$\mathrm{a}_3 = 2 \cdot 3 \cdot 4$$
$$...$$

Da a also ein Element von B ist und $Fa_n = f(a_n)$ ist Fa auch ein Element von F.

Lemma 2.1. *Es soll bewiesen werden, dass für alle Folgen $b \in B$ gilt, dass sobald es ein Element b_{h_0} dieser Folge gibt, für das gilt*

$$\exists p_0, q_0, m_0 \in \mathbb{Z}+(2 \nmid m_0 \land 5 \nmid m_0 \land b_{h_0} = 10^{p_0} \cdot 2^{q_0} \cdot m_0)$$

,dann gilt für alle folgenden Elemente h dieser Folge b, dass es auch für sie ein p, q und $m \in \mathbb{Z}^+$ gibt, wobei $(2 \nmid m \land 5 \nmid m \land h = 10^p \cdot 2^q \cdot m)$

Sei

Proof. □

Lemma 2.2. *Es soll nun bewiesen werden, dass es für jede Folge $b \in B$ein solches Element b_{h_0} gibt.*

Proof. □

Lemma 2.3. *Es soll bewiesen werden, dass wenn ein $n \in \mathbb{Z}^+$ in der Form $n = 10^p \cdot 2^q \cdot m$ notiert werden kann, wobei m weder durch 2 noch durch 5 teilbar ist, $f(n)$ eine gerade Ziffer ist.*

Zu beweisen:

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+(\exists(p, q, m)(2 \nmid m \land 5 \nmid m \land n = 10^p \cdot 2^q \cdot m) \implies f(n) \in [2, 4, 6, 8])$$

Proof. □

Nach Lemma 2.1 gilt also, dass es ein Element a_{h_0} der Folge a gibt, wonach alle nachfolgenden Elemente a_h der Folge a in der Form $10^q \cdot 2^p \cdot m$ geschrieben werden können, wobei m weder durch 5 oder durch 2 teilbar sind.
Direkt das erste Element von a $a_1 = 2!$ kann in dieser Form geschrieben werden: $2 = 10^0 \cdot 2^1 \cdot 1$, demnach können alle Elemente von a in dieser Form geschreiben werden.

Nach Lemma 2.3 gilt dann, dass $f(a_k)$ für alle Elemente a_k von a eine gerade Ziffer ist.
Die Ausgangsfolge der Aufgabenstellung $Fa = (2, 6, 4, 2, 2, ...)$ besteht also nur aus geraden Ziffern.
Keine andere Zahl außer 2,4,6, oder 8 kommt also in der Ausgangsfolge Fa vor.

Lemma 2.4. *Es soll bewiesen werden, dass in jeder Folge $Fb \in F$ immer mindestens zwei verschiedene Elemente undendlich oft vorkommen.*

Proof. Es soll durch Widerspruch bewiesen werden. Sei also ein Element Fb_{x_0} von Fb, ab dem alle folgenden Elemente Fb_x nur noch den Wert ε_0 haben.
$Fb_{x_0} = f(b_{x_0})$, wobei $b_1 = k$
Es gibt ein b_{h+1} , sodass $h > x_0$ und $h + k$ kein Vielfaches von 5 ist.

$b_{h+1} = \frac{(k+h)!}{(k-1)!}$

$= \frac{(k+h-1)!}{(k-1)!} \cdot (k + h)$

$= b_h \cdot (k + h)$

b_h muss von der Form $b_h = 10^n \cdot (10l + \varepsilon_0)$ sein, da ansonsten $f(b_h) \neq \varepsilon_0$ und demnach $Fb_h \neq \varepsilon_0$

$\implies b_{h+1} = 10^{n_1} \cdot (10l_1 + \varepsilon_0) \cdot (k + h)$

$\implies$

□

Lemma 2.5. *Es soll bewiesen werden, dass für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$ gilt, wenn $f(x_1) = \varepsilon_1$ und $f(x_2) = \varepsilon_2$ dann gilt $f(x_1 \cdot x_2) = f(\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2)$*

Proof. $f(x_1) = \varepsilon_1 \implies x_1 = 10^{n_1} \cdot (10 \cdot l_1 + \varepsilon_1)$
$f(x_2) = \varepsilon_2 \implies x_2 = 10^{n_2} \cdot (10 \cdot l_2 + \varepsilon_2)$
$x_1 \cdot x_2 = 10^{n_1+n_2} \cdot ()$ □

Lemma 2.6. *Es soll bewiesen werden, dass jede Folge $b \in B$ mindestens ein Element b_n hat, sodass $f(b_n) = 6$. Es soll also bewiesen werden, dass in jeder Folge $Fb \in F$ mindestens einmal die Zahl 6 vorkommt.*

Proof. Sei b^k eine beliebige Folge aus B, sodass $b^k_n = k \cdot (k+1)...(k+n-1) \cdot (k+n)$. Sei Fb^k die Folge aus F, sodass $\forall n \in \mathbb{Z}_+(Fb^k_n = f(b^k_n))$ Die Folge Fb enthält entweder die Zahl 6, oder nicht.

Wenn sie die Zahl 6 enthält ist nichts mehr zu beweisen.
Sei die Folge Fb enthält die Zahl 6 nicht.

Nach Lemma 2.4 enthält die Folge Fb mindestens zwei unterschiedliche Elemente, die unendlich vorkommen. Nach Lemma 2.1, 2.2, und 2.3 gibt es ein Element b_{h_0}, ab für alle Folgenden Elemente gilt, dass $f(b_{h_0}) \in \{2, 4, 6, 8\}$. Die beiden Elemente, die definitiv unendlich oft vorkommen, müssen also beide gerade Ziffern sein. Unter diesen Voraussetzungen gibt es für dieses Paar an unterschiedlichen Elementen von Fb drei Möglichkeiten:
Fall 1: Fb enthält unendlich oft die Zahlen 4 und 8
Fall 2: Fb enthält unendlich oft die Zahlen 2 und 4
Fall 3: Fb enthält unendlich oft die Zahlen 2 und 8

Fall 1: Sei ein Element Fb_{n_0} von Fb, sodass $Fb_{n_0} = 4$
Sei ein folgendes Element $Fb_{n_0+n_1}$ der Folge Fb, sodass $Fb_{n_0+n_1} = 2$
$Fb_{n_0} = f(b_{n_0}), Fb_{n_0+n_1} = f(b_{n_0+n_1})$

$$b^k_{n_1} = b^k_{n_0} \cdot (k + n_0 + 1) \cdot (k + n_0 + 2) \cdot ... \cdot (k + n_0 + n_1)$$

$$b^k_{n_0+n_1} = b^k_{n_0} \cdot b^{k+n_0}_{n_0+n_1}$$

$$f(b^k_{n_0+n_1}) = f(b^k_{n_0} \cdot b^{k+n_0}_{n_0+n_1}) = 2$$

Es gibt Fall 2: Fb enthält unendlich oft die Zahlen 2 und 4
Fall 3: Fb enthält unendlich oft die Zahlen 4 und 8 □

Theorem 2.7. *Es soll bewiesen werden, dass es für jedes Element Fa_k von Fa ein nachfolgendes Element von Fa_{k+n} gibt, sodass $Fa_k = Fa_{k+n}$.*

Proof. Sei ein beliebiges Element Fa_k. □

Jedes Element, das einmal in Fa auftritt, tritt also garantiert unendlich oft auf, da es kein letztes Element Fa_k eines Wertes geben kann, da es immer ein Fa_{k+n} gibt, das den selben Wert hat.