titlesec[2016/03/21]

Mathewettbewerb 2025

Aaron Tsamaltoupis

December 26, 2024

Contents

1 Nr. 2 **3**
1.1 Theorem 1 3

2 Lemmas **7**
2.1 Lemma1 7

1 Nr. 2

1.1 Theorem 1

Für alle ganzen Zahlen n größer gleich 2 gilt, dass die letzte von 0 verschiedene Ziffer von n! eine gerade Ziffer ist.

Sei ein beliebiges $a \in \mathbb{Z}^+$ und sei die letzte von 0 verschiedene Ziffer von $a!$ gerade.
Die Zahl a kann aufgeteilt werden in den Teil ab der letzten von 0 verschiedene Ziffer $2f$ und dem Rest l. Da diese letzte Ziffer gerade ist und nach ihr nur noch Nullen kommen können, muss $a!$ diese Form haben:
$a! = 2l \cdot 10^{k+1} + 2f$, wobei $l \in \mathbb{N} \wedge f \in \mathbb{Z}_+ \wedge f > 5$

zu beweisen ist also:

$$\forall n \in \mathbb{N}((n > 1) \implies \exists l \in \mathbb{N}, f \in \mathbb{Z}^+(n! = 2l \cdot 10^{k+1} + 2f \cdot 10^k, wobei \wedge f < 5))$$

Sei der Einfachkeit halber

$$P(n) \text{ iff } \exists l \in \mathbb{N}, f \in \mathbb{Z}^+(n! = 2l \cdot 10^{k+1} + 2f \cdot 10^k, wobei \ \wedge f < 5))$$

Beweis Theorem 1.1
Sei n eine beliebige ganze Zahl.
n ist entweder ein Vielfaches von 5 oder nicht.
Theorem 1.1 wird für diese beiden Fälle seperat bewiesen.

Theorem 1.1, Fall 1
n ist ein Vielfaches von 5.
$\exists m \in \mathbb{N}(n! = 5 \cdot m)$

Es soll bewiesen werden, dass jedes $n! = (5m)!$ in der Form $(5m)! = 2^l \cdot 5^k \cdot r$ aufgeschieben werden kann, wobei r weder durch 5 noch durch 2 teilbar ist und l größer als k ist.
$\forall m \in \mathbb{Z}^+(\exists l, k, r \in \mathbb{N}((5m)! = 2^l \cdot 5^k \cdot r \wedge 2 \nmid r \wedge 5 \nmid r \wedge l > k))$

Es soll mittels vollständiger Induktion bewiesen werden.
Induktionshypothese:
sei $\forall m < m_0(\exists l, k, r \in \mathbb{N}((5m)! = 2^l \cdot 5^k \cdot r \wedge 2 \nmid r \wedge 5 \nmid r \wedge l > k))$

Theorem1.1, Fall 2

n ist kein Vielfaches von 5.
$\neg\exists m \in \mathbb{N}(n! = 5 \cdot m)$
Es soll mittels Induktion bewiesen werden, dass für alle $n \in \mathbb{N} \land n > 1$ gilt, dass wenn n kein Vielfaches von 5 ist, $P(n))$ wahr ist.

Base case:
$\neg\exists m \in \mathbb{N}(2! = 5m)$
$\implies 2! \neq 5m$
$2! = 2 = 0 \cdot 10^1 + 2 \cdot 1 \cdot 10^0$
$\implies P(2)$

Induction step
sei $(\neg\exists m \in \mathbb{N}(n! = 5m) \implies P(n))$(Induktionshypothese)

P(n) kann hier trotzdem in für alle Fälle als gegeben hingenommen werden, da selbst wenn $n! = 5m$ aus dem vorherigen Beweis für Theorem1.1, Fall1 hervorgeht, dass P(n) wahr ist.

P(n) ist hier trotzdem wahr für jedes beliebige $n > 1$. Sollte n kein Vielfaches von 5 sein, garantiert dies die Induktionshypothese. Ist n kein Vielfaches von 5 garantiert das der Beweis in Fall 1
zu beweisen: $(n+1) \neq 5m \implies P(n+1)$

sei $\neg\exists m \in \mathbb{N}(5m = n+1)$

$n! = l \cdot 10^{k+1} + 2f \cdot 10^k, f < 5$ (aufgrund der Induktionshypothese, bzw Fall 1)

$(n+1)! = (l \cdot 10^{k+1} + 2f \cdot 10^k) \cdot (n+1)$
$= (n+1) \cdot l \cdot 10^{k+1} + 2f(n+1) \cdot 10^k$

$(n+1)$ und f sind beide keine Vielfache von 5, nach Lemma1 kann daher auch $2(n+1) \cdot f$ kein Vielfaches von 5 oder 10 sein.
$\exists m \in \mathbb{N}, f_0 \in \mathbb{Z}^+(f_0 < 5 \land (n+1) = 10m + 2f_0)$
$(n+1)! = l(n+1) \cdot 10^{k+1} + (10m + 2f_0) \cdot 10^k$
$(n+1)! = 10^{k+1}((n+1) \cdot l + m) + 10^k \cdot 2f_0$

$(n+1)! = 10^{k+1}l_0 + 10^k \cdot 2f_0$, wobei $f_0 < 5$
$\implies P(n+1)$

Es ist damit bewiesen, dass
$(\neg\exists m \in \mathbb{N}(n! = 5m) \implies P(n)) \implies (\neg\exists m \in \mathbb{N}((n+1) = 5m) \implies P(n+1))$

Dadurch ist für alle $n > 2$ bewiesen, dass $\neg\exists m \in \mathbb{N}(n! = 5m) \implies P(n)$

2 Lemmas

2.1 Lemma1