titlesec[2016/03/21]

colorlinks=true, linkcolor=blue, filecolor=magenta, urlcolor=cyan, pdftitle=Overleaf Example, pdfpagemode=FullScreen,

Mathematikwettbewerb 2025

Aaron Tsamaltoupis

January 16, 2025

Contents

1 Nr 1 **3**

2 Nr 2 **4**

1 Nr 1

2 Nr 2

Für jede ganze Zahl $n \geq 2$ betrachten wir in der Dezimaldarstellung von $n!$ die letzte von Null verschiedene Ziffer.
Bestimme alle Ziffern, die mindestens einmal in dieser Folge vorkommen, und zeige, dass jede dieser Ziffern sogar unendlich oft vorkommt.

Sei eine funktion $f : \mathbb{Z}^+ \to [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]$ definiert, sodass $f(n)$ die letzte von Null verschiedene Ziffer von n ist.

$$f(n) = \varepsilon \textit{ iff } \varepsilon \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \wedge \exists k, l(n = 10^k \cdot (10 \cdot l + \varepsilon))$$

Sei B die Menge aller Folgen b, die folgendermaßen definiert werden können:

$$b_1 = k \text{ und für alle } n \in \mathbb{Z}_+ \text{ gilt } b_n = \frac{(k+n-1)!}{(k-1)!}$$

Alle Folgen $b \in B$ haben also folgende Elemente:

$$b_1 = k$$
$$\mathrm{b}_2 = k \cdot (k + 1)$$
$$\mathrm{b}_3 = k \cdot (k + 1) \cdot (k + 2$$
$$\mathrm{b}_4 = ...$$

Sei eine weitere Menge F, die Folgen beinhaltet, folgerndermaßen definiert:

$$F = \{Fb : \exists b \in B(Fb_n = f(b_n))\}$$

Das nte Element jeder Folge Fb_0 in F ist also die letzte von Null verschiedene Ziffer des nten Elementes einer Folge $b_0 \in B$

Sei die Folge aus der Aufgabenstellung, die mit (2,6,4,2,2,..) beginnt die Folge $Fa = (2, 6, 4, 2, 2, ...)$
Diese Folge kann folgendermaßen beschrieben werden:
$Fa_n = f(a_n)$, wobei a_n das nte Element einer weiteren Folge a ist, wobei a = (2!, 3!, 4!, ...)

Auch diese Folge a ist ein Element der Menge B:

$$a_1 = 2$$
$$\mathrm{a}_2 = 2 \cdot 3$$
$$\mathrm{a}_3 = 2 \cdot 3 \cdot 4$$
$$...$$

Da a also ein Element von B ist und $Fa_n = f(a_n)$ ist Fa auch ein Element von F.

Lemma 2.1. *Es soll bewiesen werden, dass für alle Folgen $b \in B$ gilt, dass sobald es ein Element b_{h_0} dieser Folge gibt, für das gilt*

$$\exists p_0, q_0, m_0 \in \mathbb{Z}+(2 \nmid m_0 \wedge 5 \nmid m_0 \wedge b_{h_0} = 10^{p_0} \cdot 2^{q_0} \cdot m_0)$$

,dann gilt für alle folgenden Elemente h dieser Folge b, dass es auch für sie ein p, q und $m \in \mathbb{Z}^+$ gibt, wobei $(2 \nmid m \wedge 5 \nmid m \wedge h = 10^p \cdot 2^q \cdot m)$

Sei

Proof. □

Lemma 2.2. *Es soll nun bewiesen werden, dass es für jede Folge $b \in B$ein solches Element b_{h_0} gibt.*

Proof. □

Lemma 2.3. *Es soll bewiesen werden, dass wenn ein $n \in \mathbb{Z}^+$ in der Form $n = 10^p \cdot 2^q \cdot m$ notiert werden kann, wobei m weder durch 2 noch durch 5 teilbar ist, $f(n)$ eine gerade Ziffer ist.*

Zu beweisen:

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+(\exists(p, q, m)(2 \nmid m \wedge 5 \nmid m \wedge n = 10^p \cdot 2^q \cdot m) \implies f(n) \in [2, 4, 6, 8])$$

Proof. □

Nach Lemma 2.1 gilt also, dass es ein Element a_{h_0} der Folge a gibt, wonach alle nachfolgenden Elemente a_h der Folge a in der Form $10^q \cdot 2^p \cdot m$ geschrieben werden können, wobei m weder durch 5 oder durch 2 teilbar sind.
Direkt das erste Element von a $a_1 = 2!$ kann in dieser Form geschrieben werden: $2 = 10^0 \cdot 2^1 \cdot 1$, demnach können alle Elemente von a in dieser Form geschreiben werden.

Nach Lemma 2.3 gilt dann, dass $f(a_k)$ für alle Elemente a_k von a eine gerade Ziffer ist.
Die Ausgangsfolge der Aufgabenstellung $Fa = (2, 6, 4, 2, 2, ...)$ besteht also nur aus geraden Ziffern.
Keine andere Zahl außer 2,4,6, oder 8 kommt also in der Ausgangsfolge Fa vor.

Lemma 2.4. *Es soll bewiesen werden, dass in jeder Folge $Fb \in F$ immer mindestens zwei verschiedene Elemente undendlich oft vorkommen.*

Proof. Es soll durch Widerspruch bewiesen werden. Sei also ein Element Fb_{x_0} von Fb, ab dem alle folgenden Elemente Fb_x nur noch den Wert ε_0 haben.
$Fb_{x_0} = f(b_{x_0})$, wobei $b_1 = k$
Es gibt ein b_{h+1} , sodass $h > x_0$ und $h + k$ kein Vielfaches von 5 ist.

$b_{h+1} = \frac{(k+h)!}{(k-1)!}$

$= \frac{(k+h-1)!}{(k-1)!} \cdot (k + h)$

$= b_h \cdot (k + h)$

b_h muss von der Form $b_h = 10^n \cdot (10l + \varepsilon_0)$ sein, da ansonsten $f(b_h) \neq \varepsilon_0$ und demnach $Fb_h \neq \varepsilon_0$

$\implies b_{h+1} = 10^{n_1} \cdot (10l_1 + \varepsilon_0) \cdot (k + h)$

$\implies$

□

Lemma 2.5. $\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}(f(n_1) = \varepsilon_1 \wedge f(n_2) = \varepsilon_2 \implies f(n_1 \cdot n_2) = f(\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2))$

Proof. □

Lemma 2.6. *Es soll bewiesen werden, dass jede Folge $b \in B$ mindestens ein Element b_n hat, sodass $f(b_n) = 6$. Es soll also bewiesen werden, dass in jeder Folge $Fb \in F$ mindestens einmal die Zahl 6 vorkommt.*

Proof. Es soll per Widerspruch bewiesen werden.
Sei es gibt eine folge b^k, sodass $\neg\exists n \in \mathbb{N}(f(b^k_n) = 6)$.
Sei ein element $b^k_{k_1}$ der Folge b.
$f(b^k_{k_1}) \in \{2, 4, 8\}$
Die folge $Fb^{k_1+1} = (f(k_1+1), f((k_1+1)\cdot(k_1+2)), f((k_1+1)\cdot(k_1+2)\cdot(k_1+3), ...)$ enthält nach Lemma 2.4 mindestens zwei Elemente der Menge $\{2, 4, 6, 8\}$ unendlich oft, daher enthält sie mindestens eine 2er Potenz (2,4,8) unendlich oft.

□