(1)

Ruth 1

Vor dem Hintergrund des Klausurtrainings zur Vorlesung WRI im WS 2012/2013 wurde am 09.03.2013 in allen Studiengängen die nachstehende Klausuraufgabe gestellt.

Aufgabe 3 (5 Punkte)
Seien (Ω, P) der durch $\Omega = \mathbb{N}_0$ sowie $P = G(p)$, $p \in (0,1)$, definierte diskrete Wahrscheinlichkeitsraum, $A = \{1, \ldots, 10\}$ und $B = \{11, \ldots, 20\}$. Finden Sie heraus, welches der Ereignisse A und B wahrscheinlicher ist.
Hinweis: Machen Sie sich zunächst klar, dass sowohl $P(A)$ als auch $P(B)$ eine Summe von 10 Zahlen aus $(0,1)$ ist. Sie werden feststellen, dass jede der Zahlen in der Summe für $P(A)$ oberhalb jeder anderen Zahl in der Summe für $P(B)$ liegt. Mit dieser Beobachtung lässt sich sehr kurz Lösung 1 sauber formulieren.
Lösung 2 ergibt sich durch Anwendung der geometrischen Summe bei der Berechnung beider Wahrscheinlichkeiten.
A ist wahrscheinlicher als B bedeutet übrigens laut Vorlesung, dass $P(A) > P(B)$ gilt.

Aufgabe 23 (Gedächtnislosigkeit der geometrischen Verteilung)
Seien (Ω, P) der durch $\Omega = \mathbb{N}_0$ und $P = G(p)$, $p \in (0,1)$, definierte diskrete Wahrscheinlichkeitsraum. Zeigen Sie: Für $m, n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$P(\{m+n\} | \{k \in \Omega : k \geq m\}) = P(\{n\}).$$

Ruth 2

Aufgabe
Seien (Ω, P) der durch $\Omega = \mathbb{N}_0$ sowie $P = G(p)$, $p \in (0,1)$, definierte diskrete Wahrscheinlichkeitsraum, $n \in \mathbb{N}_0$ und $A_n = \{k : k \in \mathbb{N}_0,\ k \leq n\}$. Berechnen Sie: $P(A_n)$.
Hinweise: Geometrische Summe, Partialsumme der geometrischen Reihe.

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_0 q^k = a_0 + a_0 q + a_0 q^2 + \ldots + a_0 q^n = a_0 (1 + q + q^2 + \ldots + q^n)$$

(n-te Partialsumme)

$$s_n = a_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_0 q^k = \frac{a_0}{1-q}$$

(geom. Reihe)

...mit 49 gleichartigen Kugeln

$= \{1, \ldots, 49\}$ (Laplace-Verteilung auf $\{1, \ldots, 49\}$

Ereignis, dass die Nummer der gezogenen Kugel kleiner als 8 ist

$$A = \{\omega \in \Omega : \omega < 8\}$$
$$= \{\omega \in \Omega : \omega \leq 7\}$$
$$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} = \{1, \ldots, 7\}$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{7}{49} = \frac{1}{7}$$

Ruth 1

$P(A) > P(B) \Leftrightarrow P(A) - P(B) > 0$

$$P(A) - P(B) = \sum_{k=1}^{10} p \cdot (1-p)^k - \sum_{k=11}^{20} p \cdot (1-p)^k \underset{k \to k+10}{=} \sum_{k=1}^{10} p \cdot (1-p)^k - \sum_{k=1}^{10} p \cdot (1-p)^{k+10} = \sum_{k=1}^{10} p \cdot (1-p)^k - p \cdot (1-p)^{k+10} =$$

$$= p \cdot \sum_{k=1}^{10} (1-p)^k - (1-p)^{k+10} \underset{p \in (0,1)}{=} p \cdot \sum_{k=1}^{10} \underbrace{(1-p)^k}_{>0} \underbrace{(1 - \underbrace{(1-p)^{10}}_{>0})}_{>0} > 0 \Rightarrow P(A) \text{ ist wahrscheinlicher!}$$

Ruth 2

$\Omega = \mathbb{N}_0 \quad P = G(p) \quad p \in (0,1) \quad A_n = \{k : k \in \mathbb{N}_0, k \leq n\}$ $\qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

$$P(A_n) = \sum_{\omega \in A_n} P(\{\omega\}) = \sum_{k=0}^{n} p \cdot (1-p)^k = p \cdot \sum_{k=0}^{n} (1-p)^k = p \cdot \frac{1-(1-p)^{n+1}}{1-(1-p)} = \frac{p \cdot (1-(1-p)^{n+1})}{p} = 1-(1-p)^{n+1}$$