Automaten und Formale Sprachen

SoSe 2017 in Trier

Henning Fernau
Universität Trier
fernau@uni-trier.de

23. April 2017

Automaten und Formale Sprachen Gesamtübersicht

- Organisatorisches
- Einführung
- Endliche Automaten und reguläre Sprachen
- Kontextfreie Grammatiken und kontextfreie Sprachen
- Chomsky-Hierarchie

Endliche Automaten und reguläre Sprachen

1. Deterministische endliche Automaten

2. Nichtdeterministische endliche Automaten

3. Reguläre Ausdrücke

4. Nichtreguläre Sprachen

5. Algorithmen mit / für endliche Automaten

Reguläre Sprachen

Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ heißt *regulär* gdw. es ein endliches Monoid $(M, \circ, e)$, einen Monoidmorphismus $h : (\Sigma^*, \cdot, \lambda) \to (M, \circ, e)$ sowie eine endliche Menge $F \subseteq M$ gibt mit

$$L = \{w \in \Sigma^* \mid h(w) \in F\}.$$

zu abstrakt ??

Def.: Ein **deterministischer endlicher Automat** oder DEA wird beschrieben durch ein Quintupel

$$A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

wobei gilt:

Q: endliche Menge von *Zuständen* (Zustandsalphabet)

Σ: endliche Menge von *Eingabezeichen* (Eingabealphabet)

$\delta : Q \times \Sigma \to Q$: (totale) *Überführungsfunktion*

$q_0 \in Q$: *Anfangszustand*

$F \subseteq Q$: *Endzustände*

Überführungstafel

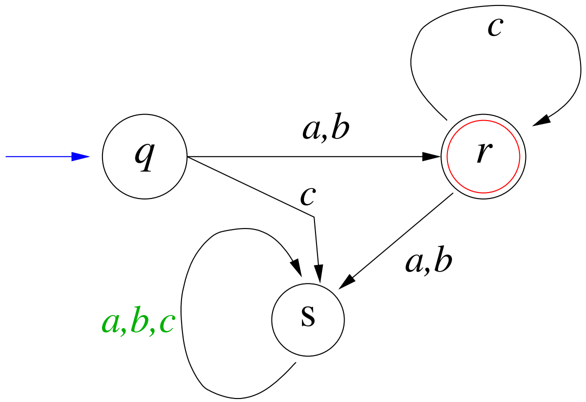
Ein endlicher Automat kann vollständig durch seine *Überführungstafel* beschrieben werden.

Beispiel: Betrachte:

δ	a	b	c
$\rightarrow q$	r	r	s
$r \rightarrow$	s	s	r
s	s	s	s

In der ersten Zeile ist das Eingabealphabet beschrieben, in der ersten Spalte das Zustandsalphabet. Der eingehende Pfeil kennzeichnet den Anfangszustand und ausgehende Pfeile beschreiben die Endzustände.

Ein **Automatengraph** – eine weitere Darstellung für endliche Automaten – ist ein gerichteter, Σ-kantenbeschrifteter Graph mit Knotenmenge Q, z.B.:



Der eingehende Pfeil kennzeichnet den Anfangszustand und doppelte Umkreisungen beschreiben die Endzustände.
DEA-Bedingung: Jeder Knoten besitzt $|\Sigma|$ viele Ausgangskanten, keine zwei Ausgangskanten sind gleich beschriftet.
Abkürzend können gerichtete Kanten mit Folgen von Zeichen beschriftet sein.

Wie arbeitet ein DEA ?

Es sei $w = a_1 \ldots a_n \in \Sigma^n$ das *Eingabewort* von A.
Die Arbeit von A auf w kann wie folgt (informell) beschrieben werden:

1. Setze $q \leftarrow q_0$.
2. Für $x \leftarrow a_1$ bis a_n tue:
   Setze $q \leftarrow \delta(q, x)$
3. Akzeptiere w gdw. $q \in F$ gilt.

$L(A)$ bezeichnet die von A akzeptierte Sprache.
Beschreiben wir diese im Folgenden in formalerer Art und Weise.

Binärrelationen (bekannt aus DS)

Erinnerung: $R \subseteq X \times X$ heißt *Binärrelation* (auf X).

Die *Diagonale* $\Delta_X = \{(x, x) \mid x \in X\}$ ist eine spezielle Relation.
$R \subseteq X \times X$ heißt *reflexiv* gdw. $\Delta_X \subseteq R$.

Das *Produkt* zweiter Relationen R_1, R_2 auf X ist definiert durch:

$$R_1 \circ R_2 = \{(x, z) \in X \times X \mid \exists y \in X : (x, y) \in R_1 \wedge (y, z) \in R_2\}.$$

Satz: $(2^{X \times X}, \circ, \Delta_X)$ ist ein Monoid.

Eine Relation R auf X heißt *transitiv* gdw. $R \circ R \subseteq R$.

Binärrelationen (Forts.) (bekannt aus DS)

Wir können auch *Relationenpotenz*en induktiv definieren:
$R^0 := \Delta_X$ und $R^n := R^{n-1} \circ R$ für $n > 1$.

Satz: Die *transitive Hülle* $R^+ := \bigcup_{n \geq 1} R^n$ ist die kleinste R umfassende transitive Relation auf X für gegebenes $R \subseteq X \times X$.

Satz: Die *reflexiv-transitive Hülle* $R^* := \bigcup_{n \geq 0} R^n$ ist die kleinste R umfassende reflexive und transitive Relation (auch bekannt als *Quasiordnung*) auf X für gegebenes $R \subseteq X \times X$.

Def.: Die **von einem DEA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ akzeptierte Sprache** kann man formal wie folgt beschreiben.

Def.: Ein Element aus $C = Q \times \Sigma^*$ heißt *Konfiguration* von A.
Definiere eine Binärrelation $\vdash_A$ auf C durch $(q, w) \vdash_A (q', w')$ gdw.
$\exists a \in \Sigma : w = aw'$ und $q' = \delta(q, a)$.
Die zweite Komponente einer Konfiguration ist die "übrige Eingabe".
$\vdash_A$ beschreibt den *Konfigurationsübergang in einem Schritt*.
Entsprechend beschreibt $\vdash_A^n$ "n Schritte von A".
Daher können wir definieren:

$$L(A) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists q \in F : (q_0, w) \vdash_A^* (q, \lambda)\}.$$

Exkurs: Zustandsraum allgemein

Zustandsraum / Konfigurationsraum $\equiv$ Landkarte

Konfigurationsübergänge $\equiv$ erlaubte “Einzelschritte”

Konfigurationsübergangsfolge $\equiv$ Weg auf der Karte $\equiv$
reflexiv-transitive Hülle der “Einzelschrittübergangsrelation”

Diese Bezüge sind essentiell für das Verständnis vieler Konzepte der Informatik!

Beispiel: Konfiguration im Hornlogik-Kalkül: Menge von Klauselmengen
Konfigurationsübergang: Resolutionsschritt

Ein bekanntes Beispiel (zum Exkurs) als Spiel mit Lösung

Drei Missionare und drei Kannibalen wollen einen Fluss queren.
Das verfügbare Boot befördert mindestens eine, höchstens zwei Personen.
Nebenbedingung: Die Kannibalen dürfen auf keinem Ufer in der Mehrheit gegenüber einer nicht-leeren Menge von Missionaren sein.

Zustandsraum: $\{(i, j) \mid 0 \leq i, j \leq 3\}$ i Missionare / j Kannibalen am linken Ufer
Dazu kämen noch Bootsposition und evtl. Bootsinhalt.

Selbst ohne diese Verfeinerung ist der Zustandsraum unübersichtlich.
Rechts sind "verbotenene Konfigurationen" durch X gekennzeichnet.

	3	2	1	0
3	Start			
2	X		X	X
1	X	X		X
0				Ziel

Alternative Sicht (für DEAs); meist Standarddefinition in Lehrbüchern

Es sei $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DEA.
Definiere induktiv:

$$\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to Q, (q, w) \mapsto \begin{cases} q, & w = \lambda \\ \hat{\delta}(\delta(q, a), w'), & w = aw', a \in \Sigma \end{cases}$$

Lemma: Es sei $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DEA. Seien $p, q \in Q$ und $w \in \Sigma^*$ beliebig.
Dann gilt:

$$(p, w) \vdash_A^* (q, \lambda) \iff \hat{\delta}(p, w) = q.$$

Noch eine induktive Definition

Es sei $(M, \circ, e)$ ein Monoid. Für $n \in \mathbb{N}$ und $a \in M$ definiere:

$$a^n = \begin{cases} e, & n = 0 \\ a^{n-1} \circ a, & n > 0 \end{cases}$$

Sprechweise: *n-te Potenz von a.*

Beispiel: Potenz einer Binärrelation (aus DS; s.o.).

Anwendung: Potenz eines Wortes.

Konkret: Ist $\Sigma = \{A, D, L, S\}$, so ist $\mathrm{LASSDAS} \in \Sigma^*$ und ebenso

$$(\mathrm{LASSDAS})^3 = \mathrm{LASSDASLASSDASLASSDAS}$$

. . . alternativ andersherum . . .

Es sei $(M, \circ, e)$ ein Monoid. Für $n \in \mathbb{N}$ und $a \in M$ definiere:

$$a^{\langle n \rangle} = \begin{cases} e, & n = 0 \\ a \circ a^{\langle n-1 \rangle}, & n > 0 \end{cases}$$

Diese Hilfsschreibweise ist unnötig:

Lemma: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $a^n = a^{\langle n \rangle}$.

<u>Beweis:</u> Für $n = 0$ gilt die Gleichheit nach Def.

Für $n = 1$: $a^1 = a^0 \circ a = e \circ a = a = a \circ e = a \circ a^{\langle 0 \rangle} = a^{\langle 1 \rangle}$, da e neutrales Element.

Angenommen, $a^j = a^{\langle j \rangle}$ gilt für alle $j < m$.

Betrachte den Fall $n = m > 1$.

$a^m = a^{m-1} \circ a = a^{\langle m-1 \rangle} \circ a = (a \circ a^{\langle m-2 \rangle}) \circ a = a \circ (a^{\langle m-2 \rangle} \circ a) = a \circ (a^{m-2} \circ a) = a \circ a^{m-1} =$
$a \circ a^{\langle m-1 \rangle} = a^{\langle m \rangle}$. Machen Sie sich die einzelnen Schritte klar! $\square$

Erinnerung: Komplexprodukt (DS)

Ist $(M, \circ, e)$ ein Monoid, so kann der Menge 2^M durch das *Komplexprodukt* zu einem Monoid gemacht werden. Dazu definieren wir:

$$A \circ B := \{a \circ b \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

Das zugehörige neutrale Element ist $\{e\}$.

Beispiel: $(\Sigma^*, \cdot, \lambda)$ ist ein Monoid, und so kann man auch $\cdot$ als Sprachoperation auffassen.
Also: Sind $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$, so ist $L_1 \cdot L_2 = \{x_1 \cdot x_2 \mid x_1 \in L_1 \wedge x_2 \in L_2\}$.
Entsprechend: Sprachpotenzen.
$L^n = \{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n \mid x_1, x_2, \ldots, x_n \in L\}$.

Ein hilfreiches Lemma

Schlingenlemma: Es sei $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DEA. Es sei $q \in Q$ und sei $X = \{a \in \Sigma : (q, a) \vdash_A (q, \lambda)\}$. Dann gilt: $X^* \subseteq \{w \in \Sigma^* \mid (q, w) \vdash_A^* (q, \lambda)\}$.

Beweis: Wir führen einen Induktionsbeweis, da $X^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X^n$.

Wir zeigen (stärker): $X^n \subseteq \{w \in \Sigma^* \mid (q, w) \vdash_A^n (q, \lambda)\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Für $n = 0$ gilt: $w \in X^0$ gdw. $w = \lambda$, und $(q, \lambda) \vdash_A^0 (q, \lambda)$ ✓

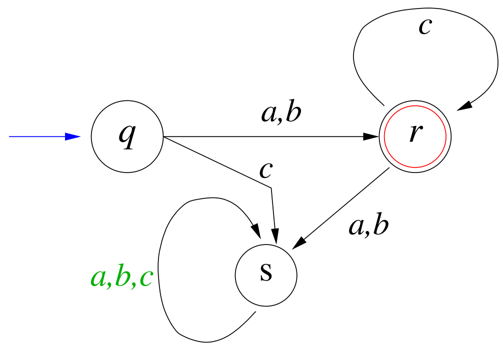
IH: Es sei die Behauptung für $n = m - 1$ bewiesen.

Betrachte $n = m$. Sei $w \in X^m = X^{m-1} \cdot X$, d.h. $w = va$ mit $v \in X^{m-1}$.

Da $\vdash_A^m = \vdash_A^{m-1} \circ \vdash_A$, liefert die IH:

$(q, w) \vdash_A^m (q, \lambda)$, da $(q, v) \vdash_A^{m-1} (q, \lambda)$, also $(q, w) \vdash_A^{m-1} (q, a)$ und $(q, a) \vdash_A (q, \lambda)$, falls $a \in X$. $\square$

Was tut also “unser” Automat ?



$$L(A) = \{w \in \Sigma^* \mid (q, w) \vdash_A^* (r, \lambda)\}.$$

$$\{w \in \Sigma^* \mid (q, w) \vdash_A^* (r, \lambda)\} = \{u \in \Sigma^* \mid (q, u) \vdash_A (r, \lambda)\} \cdot \{v \in \Sigma^* \mid (r, v) \vdash_A^* (r, \lambda)\}$$

Idee: Da es im Automatengraphen nur einen (gerichteten) Weg von q nach r gibt und da Wege von r nach r nur r als Zwischenknoten benutzen können, liefert das Schlingenlemma:

$$\{w \in \Sigma^* \mid (q, w) \vdash_A^* (r, \lambda)\} = \{a, b\} \cdot \{c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Dualzahlen: ein ausführliches Beispiel für einen DEA

Zur Spezifikation: Was soll der DEA leisten?

Wir wollen einen Automaten A diskutieren, der Dualzahlen der Form 1010010 bzw. *Dualbrüche* der Form $10010 * 01110$ erkennt.
(Der $*$ soll der Deutlichkeit dienen für das "Dualzeichen.")
Wir wollen zur Erleichterung auch "leere Zahlen" akzeptieren und Zahlen der Formen $xxxxx*$ und $xxxxx * 0$.
Das heißt, der Automat soll alle Wörter über dem Alphabet $\{0, 1, *\}$ akzeptieren, die kein oder genau ein Dualzeichen enthalten.

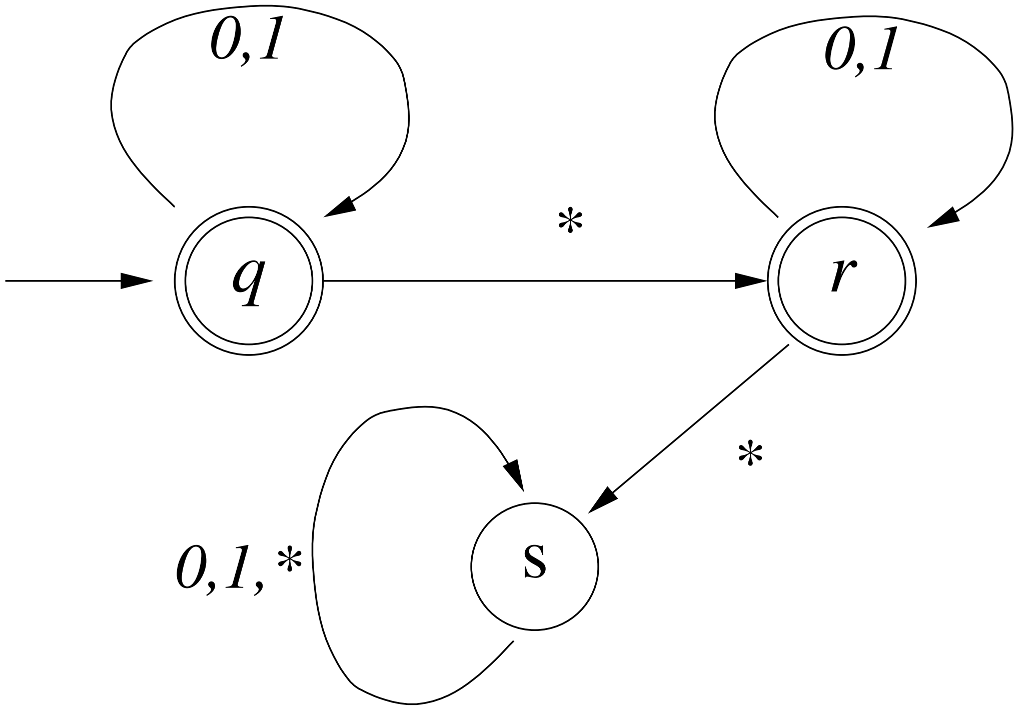
Zur Spezifikation des DEAs $A = (\{q, r, s\}, \{0, 1, *\}, \delta, q, \{q, r\})$:

$$\begin{array}{rclrcl}
\delta(q,0) & = & q, & \delta(q,1) & = & q \\
\delta(q,*) & = & r, & \delta(r,0) & = & r \\
\delta(r,1) & = & r, & \delta(r,*) & = & s \\
\delta(s,0) & = & s, & \delta(s,1) & = & s \\
\delta(s,*) & = & s & & &
\end{array}$$

Die Beschreibung mittels einer Überführungstafel hat das folgende Aussehen:

δ	0	1	$*$
$\rightarrow q \rightarrow$	q	q	r
$r \rightarrow$	r	r	s
s	s	s	s

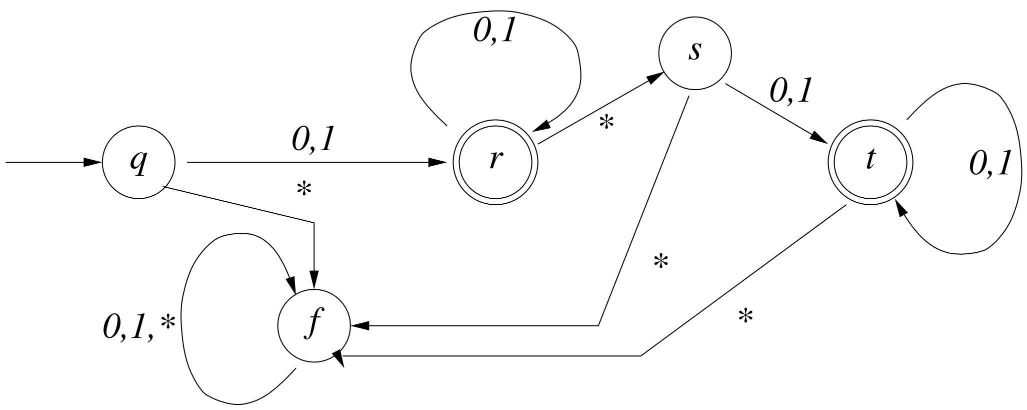
Beschreibung als gerichteter kantenbeschrifteter Graph



Eigenschaften

Man erkennt mit dem Schlingenlemma, dass der Automat nur dann in einen Endzustand übergeht, wenn er eine ganze oder eine ‘real’-Dualzahl liest.

Wollen wir dagegen leere Zahlen und Zahlen der Formen $xxxxx*$ und $*xxxx$ **nicht** akzeptieren, so müssen wir den Automaten folgendermaßen modifizieren:



Wollen wir auch zulassen, dass Zahlen der Form $*xxxx$ möglich sind, oder führende Nullen vor einer Eins vor dem Dualzeichen unterdrücken, müssen wir den Automaten weiter modifizieren. Dies sei zur Übung überlassen.

Was “tut” der folgende Automat ?

δ	a	b
$\rightarrow s$	s	q
$q \rightarrow$	r	q
r	r	r

Wie sieht der Automatengraph aus ?

Wie kann man $L(A)$ beschreiben

- in Worten oder
- in Mengennotation?

Lemma: $L(A) = L$ mit $L := \{a^n b^m \mid n \geq 0, m \geq 1\}$.

Der Beweis von $L(A) = L$ hat in der Regel zwei Richtungen:
(a) $L(A) \subseteq L$ und
(b) $L \subseteq L(A)$.

Beweistechnik: Induktion (an der Tafel).

- für (a) betrachtet das Induktionsargument i.d.R. n-Schritt-Konfigurationsübergänge $c \vdash^n c'$ für Konfigurationen c, c'
- für (b) erfolgt das Induktionsargument hingegen über die Wortlänge $n = \ell(w)$ mit $w \in L$ (oder aus Σ^*).

Endliche Automaten und Regularität

Satz: Wird $L \subseteq \Sigma^*$ von einem DEA erkannt, so ist L regulär.

Beweis: Sei $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ DEA mit $L(A) = L$.

δ definiert Abbildungen $f_a : Q \to Q$ mit $f_a(q) = \delta(q, a)$.

$h : (\Sigma^*, \cdot, \lambda) \to (Q^Q, \circ, \Delta_Q), a \mapsto f_a$ ist ein Monoidmorphismus.

Definiere als endliche Menge $E = \{f : Q \to Q \mid f(q_0) \in F\}$.

Dann gilt: $L = \{w \in \Sigma^* \mid h(w) \in E\}$. Denn:

Für $w = a_1 \cdots a_n \in \Sigma^n$ mit $a_i \in \Sigma$ für $i = 1, \ldots, n$ gilt:

$w \in L$ gdw.

$\exists q_1, \ldots, q_n$ mit $q_n \in F$, sodass $q_i = \delta(q_{i-1}, a_i)$ für $i = 1, \ldots, n$ gdw.

$\exists q_1, \ldots, q_n$ mit $q_n \in F$, sodass $f_{a_i}(q_{i-1}) = q_i$ für $i = 1, \ldots, n$ gdw.

$\exists q_n \in F$ mit $(f_{a_1} \circ f_{a_2} \circ \cdots \circ f_{a_n})(q_0) = q_n$ gdw.

$h(w) \in E$. $\square$

Formal schöner wäre ein Induktionsbeweis ...

Endliche Automaten und Regularität 2

Satz: Ist $L \subseteq \Sigma^*$ regulär, so wird L von einem DEA erkannt.

Beweis: Es sei L regulär. Also gibt es ein endliches Monoid $(M, \circ, e)$, eine Menge $F \subseteq M$ und einen Morphismus $h : \Sigma^* \to M$ mit $h(w) \in F$ gdw. $w \in L$.

Definiere nun DEA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ wie folgt:

$Q = M$, $q_0 = e$, $\delta(q, a) = q \circ h(a)$.

Unmittelbar aus dieser Definition folgt: $h(w) \in F$ gdw. $w \in L(A)$. $\square$

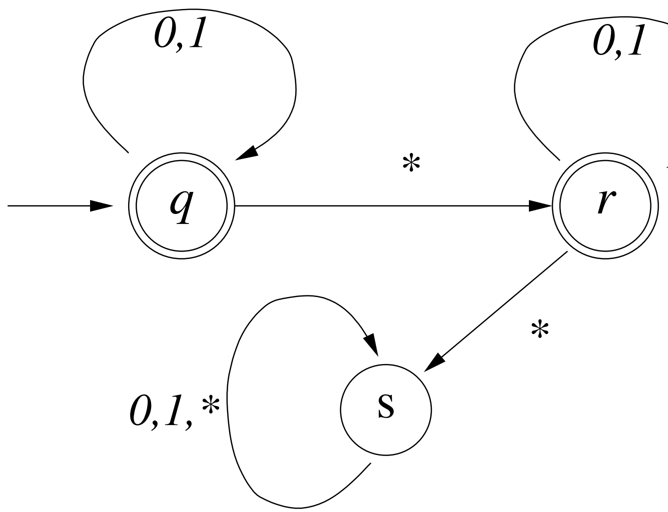
Ein großes Transformationsmonoid für einen kleinen DEA

Betrachte $\Sigma = \{a, b, c\}$, das Zustandsalphabet $Q = \{0, \ldots, n-1\}$ und die folgenden Abbildungen:

$$\begin{aligned}
f_a: &\quad 0 \mapsto 1, 1 \mapsto 0, k \mapsto k \text{ für } k \neq 0, 1 \\
f_b: &\quad 0 \mapsto 1, 1 \mapsto 2, \ldots, (n-2) \mapsto (n-1), (n-1) \mapsto 0 \\
f_c: &\quad (n-1) \mapsto 0, k \mapsto k \text{ für } k \neq n-1
\end{aligned}$$

Dies definiert zum einen die Überführungsfunktion eines DEA mit n Zuständen und Eingabealphabet Σ, zum anderen hat das zugehörige Transformationsmonoid n^n Elemente.
Genauer lassen sich mit f_a und f_b bereits alle $n!$ vielen Bijektionen $Q \to Q$ erzeugen (Idee wie bei Bubblesort durch wiederholtes Vertauschen von Nachbarelementen).

Ein Binärzahlen-Beispiel (mit lazy evaluation!)



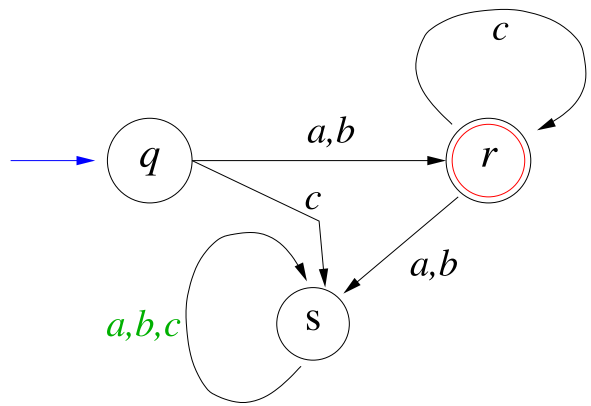
$f_\lambda = f_0 = f_1$	q	r	s
	q	r	s

f_*	q	r	s
	r	s	s

f_{**}	q	r	s
	s	s	s

$(M_A, \circ')$	f_λ	f_*	f_{**}
f_λ	f_λ	f_*	f_{**}
f_*	f_*	f_{**}	f_{**}
f_{**}	f_{**}	f_{**}	f_{**}

Noch ein Beispiel (Das Monoid ist nicht-kommutativ.)



f_λ	q	r	s
	q	r	s

$f_a = f_b$	q	r	s
	r	s	s

$f_c = f_{cc}$	q	r	s
	s	r	s

$f_x, x \in \{a,b\}^2$	q	r	s
	s	s	s

$f_{ac} = f_{bc} = f_a \qquad f_{ca} = f_{cb} = f_{aa}$

$(M_A, \circ')$	f_λ	f_a	f_c	f_{aa}
f_λ	f_λ	f_a	f_c	f_{aa}
f_a	f_a	f_{aa}	f_a	f_{aa}
f_c	f_c	f_{aa}	f_c	f_{aa}
f_{aa}	f_{aa}	f_{aa}	f_{aa}	f_{aa}

Zusammenfassung

Wir haben den Begriff eines deterministischen endlichen Automaten (kurz DEA) kennengelernt.

Dieser ist zentral in vielen Bereichen der Informatik, z.B. auch in der Technischen Informatik.

Abschließend haben wir gesehen, dass DEAs Regularität kennzeichnen.

Tatsächlich ist Regularität ein sehr robuster Begriff mit sehr vielen verschiedenen Charakterisierungen.

Wie man vielleicht "spürt", kann man auch den Begriff "erkennbarer Teilmengen von Monoiden" einführen und mit endlichen Automaten kennzeichnen.