12.11.05 WR II

Aufgabe 1 (2+2+4 Punkte)
n unterscheidbare Kugeln sollen zufällig auf drei durch die Zahlen 1, 2 und 3 gekennzeichnete Urnen verteilt werden. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

(a) Urne 1 ist als einzige Urne leer. (2) $A_2 = \{f \in \Omega : f(M) = \{2,3\}\}$, $|A_2| = 2^n - 2$, $P(A_2) = \frac{2^n-2}{3^n}$

(b) Genau eine Urne ist leer. (3) $A_3 = \{f \in \Omega : |f(M)| = 2\}$, $|A_3| = 3 \cdot 2^n$, $P(A_2) = \frac{3 \cdot 2^n}{3^n} = 3\left(\frac{2}{3}\right)^n$

(c) Keine Urne ist leer. (6) $A_6 = \{f \in \Omega : |f(M)| = 3\}$, $|A_6| = 3^n - 3 \cdot 2^n - 3$, $P(A_6) = \frac{3^n - 3 \cdot 2^n - 3}{3^n}$

A7C

Aufgabe 2 (3+2+2 Punkte)
Seien $X = (X_1, X_2, X_3)$ eine 3-dimensionale Zufallsvariable über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$, $A = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,1)\}$ und $P(X = x) = 1/4$ für alle $x \in A$.

(a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilungen P^{X_i} für $i = 1, 2, 3$.

(b) Untersuchen Sie, ob die Familie $(X_i)_{i \in I}$ für $I = \{1, 2, 3\}$ unabhängig ist.

(c) Untersuchen Sie, ob X_1 und X_2 unabhängig sind.

ähnlich zu A35 bzw gleich

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Seien $c \in \mathbb{R}$, $A = [-1, +1]^2$ und $Z = (X, Y)$ eine 2-dimensionale Zufallsvariable über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ mit der durch

$$f_Z(x, y) = c \cdot (1 + x \cdot y) \cdot \mathbf{1}_A(x, y), \; (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

definierten λ^2-Dichte. Berechnen Sie c.

hatten wir nicht

Def. 4.25
$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot P(\{\omega\})$

Aufgabe 4 (3+3 Punkte)
Sei X eine reellwertige Zufallsvariable über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ mit $P(X = -2) = 1/5$, $P(X = -1) = 1/6$, $P(X = 0) = 1/5$, $P(X = 1) = 1/15$ und $P(X = 2) = 11/30$. Außerdem sei $Y = X^2$.

(a) Berechnen und skizzieren Sie die Verteilungsfunktion F_Y. → siehe A31(b)

(b) Berechnen Sie $E(Y)$. $= E(X^2)$ $= \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega) \cdot P(\{\omega\})$
Erwartungswert $= 2{,}5$

$F_Y = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ 1/5 & 0 \le y < 1 \\ 13/30 & 1 \le y < 4 \\ 1 & y \ge 4 \end{cases}$

$P^Y = \frac{1}{5} \cdot \delta_0 + \frac{7}{30} \delta_1 + \frac{17}{30} \cdot \delta_4$

was ist $Y(\omega)$ $\{0,1,4\}$ ω^2 $\omega \in \{-2, \dots, 2\}$

← mafo

Aufgabe 5 (5 Punkte)
Seien $\lambda > 0$ und X, Y reellwertige Zufallsvariablen über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ mit $X \sim \mathfrak{P}(\lambda)$ und $P(Y = y) = P(X = y | X \in \mathbb{N})$ für alle $y \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie $E(Y)$.
$P(\lambda)$

Aufgabe 6 (4+4+2 Punkte)
Seien X, Y reellwertige Zufallsvariablen über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ mit $X \sim U(-1, 2)$ und $Y = |X|$.
Laplaceverteilt

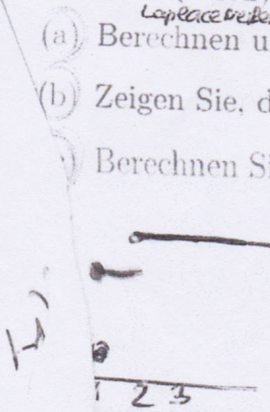
Ann. A35
$(-1, 2) = \Omega$
$\Omega = \{-1, 0, 1, 2\}$; $\frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{4}$

(a) Berechnen und skizzieren Sie die Verteilungsfunktion F_Y.

(b) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeitsverteilung P^Y eine λ^1-Dichte besitzt.

(c) Berechnen Sie EY. $= \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega) \cdot P(\{\omega\}) = \sum |\omega| \cdot P(\{\omega\})$
$= 1 \cdot 1/2 + 0 \cdot 1/4 + 2 \cdot 1/2 = 1{,}5$

$P(X = -1) = \frac{1}{4}$
$P(X = 0) = \frac{1}{4}$
$P(X = 1) = \frac{1}{4}$
$P(X = 2) = \frac{1}{4}$



$Y = |X|$ ≡
$P(\cancel{X} = 1)$
$= P(X = -1) + P(X = 1) = \frac{1}{2}$
$P(Y = 0) = P(X = 0) = 1/4$