

Knoten $\leq 2^n$

Ausgewählte Kapitel aus Algorithmen und Datenstrukturen

Nachklausur WS 2009/10

Bitte **Namen** und **Matrikelnummer** auf jedem Blatt angeben !

Aufgabe 1:

(8 Punkte)

Beschreiben Sie jeweils eine Lösung für das Union-Find-Problem mit Laufzeit

a) $O(\log n)$ (amortisiert) für UNION und $O(1)$ für FIND

b) $O(1)$ für UNION und $O(\log n)$ für FIND

wobei n die Anzahl der Elemente ist. Begründen Sie in beiden Fällen die entsprechenden Laufzeiten.

Wozel $\{c\} \leftarrow c_{1,2}$

Aufgabe 2:

(5 Punkte)

Das *Split-Find*-Problem ist wie folgt definiert: Verwalte eine Einteilung der Zahlen $\{1, \dots, n\}$ in disjunkte Intervalle, die am Anfang nur aus dem Intervall $[1, n]$ besteht, unter folgenden Operationen:

FIND(i): liefert das Intervall, das die Zahl i enthält.

SPLIT(i): ersetze das Intervall $[a, b] = \text{FIND}(i)$ durch die beiden Intervalle $[a, i]$ und $[i + 1, b]$.

Entwickeln Sie eine Datenstruktur die jede FIND-Operation in Zeit $O(1)$ und jede Folge von SPLIT-Operation möglichst effizient unterstützt.

Aufgabe 3:

(5 Punkte)

Entwickeln Sie eine Datenstruktur zur Speicherung von n Schlüsseln aus dem Universum $\{1, \dots, N\}$ (wobei $n \ll N$), die eine Zugriffszeit von $O(1)$ garantiert. Sie dürfen dabei $O(n^2)$ Speicherplatz verwenden

Aufgabe 4: (Perfektes Hashing)

(5 Punkte)

Verbessern Sie die Datenstruktur aus Aufgabe 3, so dass nur noch Speicherplatz $O(n)$ benutzt wird.

Aufgabe 5:

(6 Punkte)

Beschreiben Sie die Technik der amortisierten Analyse einer Folge von Operationen auf einer Datenstruktur D . Demonstrieren Sie diese Technik am Beispiel einer Folge von Increment-Operationen auf einem binären Zähler.

Aufgabe 6:

(6 Punkte)

Geben Sie den Algorithmus von Dijkstra im Pseudo-Code an und analysieren Sie die Laufzeit.

Aufgabe 7:

(5 Punkte)

Sei G ein planarer Graph mit n Knoten und m Kanten. Folgern Sie aus dem Satz von Euler, dass $m \leq 3n - 6$ und dass G einen Knoten vom Grad ≤ 5 besitzt.