Ausgewählte Kapitel aus Algorithmen und Datenstrukturen

Klausur WS 2013/14

Bitte **Namen** und **Matrikelnummer** auf jedem Blatt angeben !

Aufgabe 1: **(8 Punkte)**
Beschreiben Sie jeweils eine Lösung für das Union-Find-Problem mit Laufzeiten
a) $O(\log n)$ (amortisiert) für UNION und $O(1)$ für FIND
b) $O(1)$ für UNION und $O(\log n)$ für FIND
wobei n die Anzahl der Elemente ist. Begründen Sie in beiden Fällen die entsprechenden Laufzeiten.

Aufgabe 2: **(8 Punkte)**
Das *Split-Find*-Problem ist wie folgt definiert: Verwalte eine Einteilung der Zahlen $\{1, \ldots, n\}$ in disjunkte Intervalle, die am Anfang nur aus dem Intervall $[1, n]$ besteht, unter folgenden Operationen:
$FIND(i)$: liefert das Intervall, das die Zahl i enthält.
$SPLIT(i)$: ersetze das Intervall $[a, b] = FIND(i)$ durch die beiden Intervalle $[a, i]$ und $[i + 1, b]$.
Entwickeln Sie eine Datenstruktur die jede FIND-Operation in Zeit $O(1)$ und jede Folge von SPLIT-Operation möglichst effizient unterstützt.

Aufgabe 3: **(6 Punkte)**
Entwickeln Sie eine Datenstruktur zur Speicherung von n Schlüsseln aus dem Universum $\{ 1, \ldots, N \}$ (wobei $n << N$), die eine Zugriffszeit von $O(1)$ garantiert. Sie dürfen dabei $O(n^2)$ Speicherplatz verwenden.

Aufgabe 4: **(6 Punkte)**
Beschreiben Sie die Technik der amortisierten Analyse einer Folge von Operationen auf einer Datenstruktur D. Demonstrieren Sie diese Technik am Beispiel einer Folge von Increment-Operationen auf einem binären Zähler.

Aufgabe 5: **(6 Punkte)**
Sei G ein planarer Graph mit n Knoten und m Kanten. Folgern Sie aus dem Satz von Euler, dass $m \leq 3n - 6$ und dass G einen Knoten vom Grad ≤ 5 besitzt. Zeigen Sie, dass für bipartite planare Graphen $m \leq 2n - 4$ gilt.

Aufgabe 6: **(6 Punkte)**
Geben Sie einen planaren Graphen an, der verschiedene planare Einbettungen besitzt. Geben Sie die entsprechenden Einbettungen an. Für welche Graphen ist die planare Einbettung eindeutig ?