2005 Nachschreib. 1

Aufgabe 1 (2+2+4 Punkte) (vgl. Aufgabe 7c)
n unterscheidbare Kugeln sollen zufällig auf drei durch die Zahlen 1, 2 und 3 gekennzeichnete Urnen verteilt werden. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

(a) Urne 1 ist als einzige Urne leer.

(b) Genau eine Urne ist leer.

(c) Keine Urne ist leer.

Aufgabe 2 (3+2+2 Punkte) (= Aufgabe 35)
Seien $X = (X_1, X_2, X_3)$ eine 3-dimensionale Zufallsvariable über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$, $A = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,1)\}$ und $P(X = x) = 1/4$ für alle $x \in A$.

(a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilungen P^{X_i} für $i = 1, 2, 3$.

(b) Untersuchen Sie, ob die Familie $(X_i)_{i \in I}$ für $I = \{1, 2, 3\}$ unabhängig ist.

(c) Untersuchen Sie, ob X_1 und X_2 unabhängig sind.

Aufgabe 3 (4 Punkte) (vgl. Aufgabe 48a)
Seien $c \in \mathbb{R}$, $A = [-1, +1]^2$ und $Z = (X, Y)$ eine 2-dimensionale Zufallsvariable über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ mit der durch

$$f_Z(x, y) = c \cdot (1 + x \cdot y) \cdot \mathbf{1}_A(x, y), \ (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

definierten λ^2-Dichte. Berechnen Sie c. $c = \frac{1}{4}$

Aufgabe 4 (3+3 Punkte)
Sei X eine reellwertige Zufallsvariable über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ mit $P(X = -2) = 1/5$, $P(X = -1) = 1/6$, $P(X = 0) = 1/5$, $P(X = 1) = 1/15$ und $P(X = 2) = 11/30$. Außerdem sei $Y = X^2$.

(a) Berechnen und skizzieren Sie die Verteilungsfunktion F_Y. (Aufgabe 31b)

(b) Berechnen Sie $\mathrm{E}(Y)$. diskret

Aufgabe 5 (5 Punkte)
Seien $\lambda > 0$ und X, Y reellwertige Zufallsvariablen über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ mit $X \sim \mathfrak{P}(\lambda)$ und $P(Y = y) = P(X = y | X \in \mathbb{N})$ für alle $y \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie $\mathrm{E}(Y)$. ↳ Poissonverteilung

Aufgabe 6 (4+4+2 Punkte)
Seien X, Y reellwertige Zufallsvariablen über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ mit $X \sim U(-1, 2)$ und $Y = |X|$.

(a) Berechnen und skizzieren Sie die Verteilungsfunktion F_Y.

(b) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeitsverteilung P^Y eine λ^1-Dichte besitzt. (wie 19d)

(c) Berechnen Sie $\mathrm{E}Y$. stetig

...sur 1

...fgabe 1

$\Omega = N^M$ mit $M = \{1, .., n\}$ $N = \{1,2,3\}$

Interpretation von $f \in \Omega$: Kugeln werden mit 1 bis n und Urnen mit 1 bis 3 durchnummeriert

1	1
⋮	2
n	3

Kugel mit der Nummer i wird in Urne f(i) gelegt

$A, B, C \in \Omega$

(a) $A = \{f \in \Omega : f(M) = \{2,3\}\} \Rightarrow |A| = 2^n - 2 \Rightarrow P(A) = \frac{2^n-2}{|\Omega|} = \frac{2^n-2}{N^M}$

(b) $B = \{f \in \Omega : |f(M)| = 2\} \Rightarrow |B| = 3\cdot(2^n-2) \Rightarrow P(B) = \frac{3\cdot(2^n-2)}{|\Omega|} = \frac{3\cdot(2^n-2)}{N^M}$

(c) $C = \{f \in \Omega : |f(M)| = 3\} \Rightarrow |C| = 3^n - 3\cdot(2^n-1) \Rightarrow P(C) = \frac{3^n-3\cdot(2^n-1)}{|\Omega|} = \frac{3^n-3\cdot(2^n-1)}{N^M}$

Aufgabe 3

$c \in \mathbb{R}$, $A = [-1,1]^2$ $Z = (X,Y)$ $f_Z(x,y) = c\cdot(1+x\cdot y)\cdot 1_A(x,y)$ $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

gesucht: c

$$1 \underset{\substack{4.42\\ \text{Satz}}}{=} \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f_Z(x,y)\,dx\right)dy = \int_{-1}^{1}\left(c\cdot\int_{-1}^{1}(1+xy)\,dx\right)dy = \int_{-1}^{1} c\cdot\left[x+\tfrac{1}{2}x^2y\right]_{-1}^{1} dy =$$

$$= \int_{-1}^{1} c\cdot\left(1+\tfrac{1}{2}y-\left(-1+\tfrac{1}{2}y\right)\right)dy = \int_{-1}^{1} c\cdot 2\,dy = \left[2cy\right]_{-1}^{1} = 2c-(-2c) = 4c$$

$\Rightarrow 1 = 4c \Rightarrow c = \frac{1}{4}$

Aufgabe 4

$P(X=-2) = \frac{1}{5}$ $P(X=-1) = \frac{1}{6}$ $P(X=0) = \frac{1}{5}$ $P(X=1) = \frac{1}{15}$ $P(X=2) = \frac{11}{30}$

$Y = X^2$

a) $\mathcal{Y} = \mathbb{R}$, $\mathcal{Y}_0 = \text{supp}(P^Y)$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(x) = x^2$

$\underset{4.7}{\Rightarrow} P^Y = P^{g\circ X} = (P^X)^g$

$= g(\mathcal{X}_0) = \{0,1,4\}$ mit Satz 4.7 $\ \cdot\!\!= sp_+(P^Y) = sp_+(P^X)^g \underset{4.4}{=} g(X(sp_+(P))) =$

$\underset{4.4}{=} g(sp_+(P^X)) = g(\mathcal{X}_0)$

$P(Y=0) \underset{Y=X^2}{=} P(X=0) = \underline{\tfrac{1}{5}}$

$P(Y=1) = P(X\in\{-1,1\}) = \overbrace{P(X=-1)}^{1/6} + \overbrace{P(X=1)}^{1/15} = \underline{\tfrac{7}{30}}$

$P(Y=4) = P(X\in\{-2,2\}) = \underbrace{P(X=-2)}_{1/5} + \underbrace{P(X=2)}_{11/30} = \underline{\tfrac{17}{30}}$

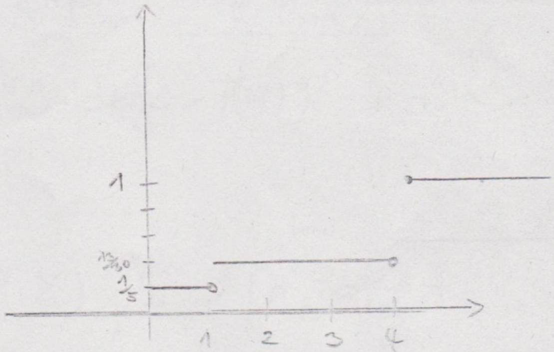
$\Rightarrow P^Y = \underline{\tfrac{1}{5}}\delta_0 + \underline{\tfrac{7}{30}}\delta_1 + \underline{\tfrac{17}{30}}\delta_4$

Für $y\in\mathbb{R}$ gilt: $F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{, falls } y<0 \\ \frac{1}{5} & \text{, falls } 0\le y<1 \\ \frac{13}{30} & \text{, falls } 1\le y<4 \quad \frac{1}{5}+\frac{7}{30} \qquad P(Y\le y) \\ 1 & \text{, falls } y\ge 4 \quad \frac{1}{5}+\frac{7}{30}+\frac{17}{30}=1 \end{cases}$

muss 1 sein!

$\Rightarrow F_Y(y) = \frac{1}{5}\,1_{[0,1)}(y) + \frac{13}{30}\,1_{[1,4)}(y) + 1_{[4,\infty)}(y)$

$F_Y(y) \underset{\substack{2.35\\ \text{Def.}}}{=} P(Y\le y)\ (= P^Y((-\infty,y]))$



(b) $E(Y) = EY \underset{4.32}{=} \sum_{y\in\mathbb{R}} y\cdot P(Y=y) = \sum_{k=0}^{4} k\cdot P(Y=k)$

$= 0\cdot P(Y=0) + 1\cdot P(Y=1) + 2\cdot P(Y=2) + 3\cdot P(Y=3) + 4\cdot P(Y=4)$

$= 0\cdot \frac{1}{5} + 1\cdot\frac{7}{30} + 0 + 0 + 4\cdot\frac{17}{30}$

$= \frac{7}{30} + 4\cdot\frac{17}{30} = \frac{5}{2} = \underline{\underline{2{,}5}}$

<u>Aufgabe 5</u>

$\lambda>0 \quad X\sim P(\lambda) \qquad P(Y=y) = P(X=y \mid X\in\mathbb{N}) \quad \forall y\in\mathbb{R}$

$EY = \sum_{y\in\mathbb{R}} y\cdot P(Y=y) \underset{\substack{\downarrow\\ \text{mit}\\ X\in\mathbb{N}}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} k\cdot P(X=k) = \sum_{k=1}^{\infty} k\cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{(k-1)!} =$

$= e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda\cdot e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda\cdot e^{-\lambda}\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}}_{e^\lambda} = \lambda\cdot e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda} = \underline{\lambda}$

ge 6

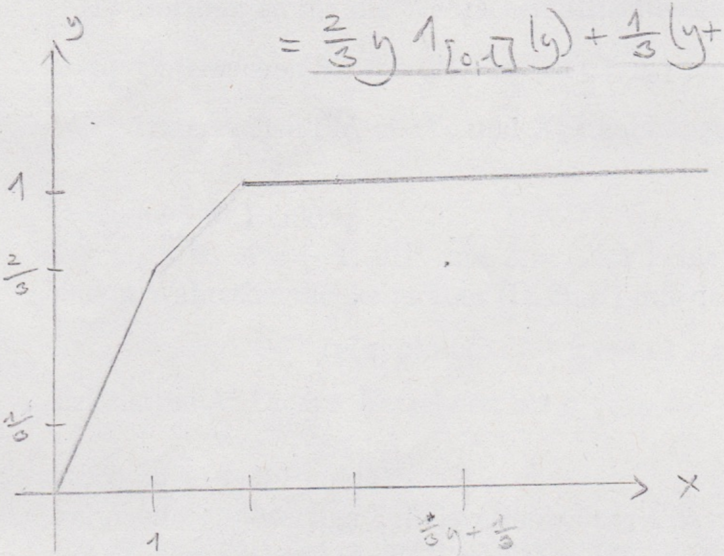
$X \sim U(-1,2) \quad Y = |X|$

$F_Y(y) \underset{\substack{2.33\\ \text{Satz}}}{=} P(Y \leq y) \underset{\text{Vor.}}{=} P(|X| \leq y) = P(-y \leq X \leq y) \underset{\substack{5.42\\ \text{Satz}}}{=} F_X(y) - F_X(-y)$

$\Rightarrow F_X(y) - F_X(-y) = \frac{1}{3} \cdot (y+1)\, 1_{[-1,2]}(y) + 1_{(2,\infty)}(y) \; - \frac{1}{3} \cdot (-y+1)\, 1_{[-1,2]}(y) + 1_{(2,\infty)}(y)$

$$= \begin{cases} \frac{1}{3}(y+1) - \frac{1}{3}(-y+1) = \frac{1}{3}y + \cancel{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}y - \cancel{\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}y & \text{für } 0 \leq y \leq 1 \\ \frac{1}{3}(y+1) & \text{für } 1 < y \leq 2 \\ 1 & 2 < y \end{cases}$$

$$= \frac{2}{3}y\, 1_{[0,1]}(y) + \frac{1}{3}(y+1)\, 1_{(1,2]}(y) + 1_{(2,\infty)}(y)$$



b) $F_Y(y) = \frac{2}{3}y\, 1_{[0,1]}(y) + \underbrace{\frac{1}{3}(y+1)}_{\frac{1}{3}y + \frac{1}{3}}\, 1_{(1,2]}(y) + 1_{(2,\infty)}(y)$

$F'_Y(y) = \frac{2}{3}\, 1_{[0,1]}(y) + \frac{1}{3}\, 1_{(1,2]}(y)$

Für $y \in (0,2]$ ist F auf $[0,y]$ stetig und auf $(0,y)$ diff'bar mit

$F'(t) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \quad \forall$ alle $t \in (0,y)$ und HDI liefert: $F(x) = F(x) - F(0) = \int_0^x f(t)\,dt =$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(y) = \frac{2}{3} 1_{[0,1]}(y) + \frac{1}{3} 1_{(1,2]}(y)$ Mit Satz 2.37 a) folgt: $P((a,b]) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx \; \forall a,b$

$= \int_{-\infty}^x f(t)\,dt \quad \forall x \in (0,2] \Rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)\,dt$ 2, ⇒ Leb. mit S. 4.3

c) $EY \underset{6.34}{=} \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f(y)\,dy = \int_0^1 \frac{2}{3}y\,dy + \int_1^2 \frac{1}{3}y\,dy = \left[\frac{1}{3}y^2\right]_0^1 + \left[\frac{1}{6}y^2\right]_1^2 = \frac{1}{3} + \frac{4}{6} - \frac{1}{6} =$

oder $EY = E|X| = \int_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot f(x)\,dx = \int_{-1}^{2} |x| \cdot \frac{1}{3}\,dx = \int_{-1}^{0} -\frac{1}{3}x\,dx + \int_0^2 \frac{1}{3}x\,dx =$

$= \left[-\frac{1}{6}x^2\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{1}{6}x^2\right]_0^2 = \frac{1}{6} + \frac{4}{6} = \frac{5}{6}$