Wahrscheinlichkeitsrechnung I & II Keller 4

21.7.2011 2011

Aufgabe 1: (3 P + 5 BonusP.)

Seien Ω eine Menge mit $|\Omega| = n$, $n \in \mathbb{N}$, und $A \subset \Omega$ mit $|A| = k$, $k \in \mathbb{N}$. Untersuchen Sie, ob die Menge $M = \{B \subseteq \Omega : A \subset B\}$ endlich ist. Geben Sie eine genaue Begründung.

Hinweis: Sie erhalten 5 Bonuspunkte, wenn Sie $|M|$ bestimmen.

Aufgabe 2: (3+1+1)

Seien (Ω, P) der durch $\Omega = \mathbb{N}_0$ und $P = P_0(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, definierte diskrete Wahrscheinlichkeitsraum, $A = \{1\}$ und $B = \mathbb{N}$.

a) Berechnen Sie $P(A \cap B)$ und $P(B)$

b) Berechnen Sie $P(A|B)$

c) " " $P(A^c|B)$.

Hinweis: Für $k \in \mathbb{N}_0$ gilt $P(\{k\}) = e^{-\lambda} \cdot (\lambda^k / k!)$

Aufgabe 3: (2+5)

Seien $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ ein W-keitsraum und $A, B, C \in \mathfrak{S}$ unabhängige Ereignisse mit $P(A) = 1/3$, $P(B) = 3/4$ und $P(C) = 1/3$

a) Berechnen Sie $P(A \cup C)$ Lösung: $\cancel{5/6}$ $\frac{5}{9}$

b) " " $P(A \cup B \mid A \cup C)$ " : $\frac{9}{10}$

Aufgabe 4: (2+3+1+2)

Sei X eine reelle Zufallsvariable auf einem W-raum $(\Omega, \mathcal{G}, P)$ mit der durch $f(x) = 5 \cdot x^4 \cdot \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, definierten $\mathbb{R}$-Dichte.

a) Begründen Sie, dass durch f eine $\mathbb{R}$-Dichte definiert ist.

b) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion von X

c) " " $P(1/4 < X < 1/2)$

d) Berechnen Sie EX^k, $k \in \mathbb{N}$

Aufgabe 5: (6)

Seien X_1, X_2, X_3 reelle i.i.d Zufallsvariablen auf einem W-raum $(\Omega, \mathcal{G}, P)$ mit $P(X_1 = -1) = P(X_1 = 1) = 1/2$.

Außerdem seien $Y_1 = X_1 + X_2$ und $Y_2 = X_2 + X_3$.

Berechnen Sie $Var(Y_1 + Y_2)$

Aufgabe 6: (6)

Seien $\Omega = \mathbb{N}_0^2$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+^*$. Untersuchen Sie, ob es auf Ω ein diskretes Wahrscheinlichkeitsmaß P mit folgender Eigenschaft gibt:

$$P(\{(i,j)\}) = e^{-(\lambda+\mu)} \cdot \frac{\lambda^i}{i!} \cdot \frac{\mu^j}{j!} \quad \forall\, i,j \in \mathbb{N}_0.$$

Aufgabe 1

$$M = \{B \subset \Omega : A \subset B\} = \{(C \cup A) \subset \Omega : C \subset A^c\}$$

$$\Rightarrow |M| = |\{(C \cup A) \subset \Omega : C \subset A^c\}| = |\{C \subset \Omega : C \subset A^c\}| = |\{C \subset (\Omega \setminus A)\}| =$$

$$\underset{\text{Def. } 1.5}{=} |\mathcal{P}(\Omega \setminus A)| \underset{\text{Satz } 1.19}{=} 2^{|\Omega \setminus A|} = 2^{n-k}$$

Aufgabe 2

$\Omega = \mathbb{N}_0 \quad P = P_o(\lambda) \quad \lambda \in \mathbb{R}_+^+ \quad A = \{1\} \quad B = \mathbb{N}_0 \quad P(\{k\}) = e^{-\lambda} \cdot \left(\frac{\lambda^k}{k!}\right)$

(a) $P(A \cap B) = P(\{1\} \cap \mathbb{N}_0) = P(\{1\}) = e^{-\lambda} \cdot \lambda$

$P(B) = P(\mathbb{N}_0) \underset{\text{Vor.}}{=} P(\Omega) = 1$

b) $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{e^{-\lambda} \cdot \lambda}{1} = e^{-\lambda} \cdot \lambda$

c) $P(A^c|B) = \dfrac{P(A^c \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(\mathbb{N}_0 \setminus \{1\})}{1} = \dfrac{P(\mathbb{N}_0) - P(\{1\})}{1} = 1 - e^{-\lambda} \cdot \lambda$

Aufgabe 3

A, B, C unabhängige Ereignisse $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{3}{4}$, $P(C) = \frac{1}{3}$

a) $P(A \cup C) \underset{\substack{2.14\\(9)}}{=} P(A) + P(C) - P(A \cap C) \underset{\substack{A \text{ und } C\\ \text{unabhängig}}}{=} \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - P(A) \cdot P(C) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{9}$

b) $P(A \cup B | A \cup C) = \dfrac{P((A \cup B) \cap (A \cup C))}{P(A \cup C)} \underset{\text{Distributivgesetz}}{=} \dfrac{P(A \cup (B \cap C))}{P(A \cup C)} = \dfrac{P(A \cup D)}{P(A \cup C)} = \dfrac{P(A) + P(D) - P(A \cap D)}{P(A) + P(C) - P(A \cap C)}$ $\quad B \cap C = D$

$\underset{D = B \cap C}{=} \dfrac{P(A) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)}{P(A) + P(C) - P(A \cap C)} = \dfrac{P(A) + P(B) \cdot P(C) - P(A) \cdot P(\overset{B}{\cancel{A}}) \cdot P(C)}{P(A) + P(C) - P(A) \cdot P(C)} = \dfrac{\frac{1}{3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{9}} = \frac{9}{10}$

$f(x) = 5x^4 \mathbb{1}_{[0,1]}(x), \quad x \in \mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) = \int_0^1 5x^4 \, dx = \left[x^5 \right]_0^1 = \underline{1}$$ Beh. folgt mit 5.42 Satz

(b) Sei $x \in \mathbb{R}$ $\quad F(x) = P^X((-\infty, x]) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

Fall 1: $x < 0$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = 0$$

Fall 2: $0 \leq x \leq 1$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + \int_0^x f(t)\,dt = \left[x^5 \right]_0^x = x^5$$

Fall 3: $1 < x$

$1 = F(1) \leq F(x) \leq 1$, also $F(x) = 1$

$\quad \llcorner 1^5 = 1$

$$\Rightarrow F(x) = x^5 \mathbb{1}_{[0,1]} + \mathbb{1}_{(1,\infty)}$$

(c) $P\left(\frac{1}{4} < X < \frac{1}{2}\right) = F\left(\frac{1}{2}\right) - F\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{32} - \frac{1}{1024} = \frac{31}{1024}$

(d) $$EX^k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \cdot f(x)\,dx = x^k \cdot \int_0^1 5x^4 \, dx = \int_0^1 5x^{k+4}\,dx = \left[\frac{5}{k+5} x^{k+5}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{5}{k+5} 1^{k+5} = \frac{5}{k+5} \quad , k \in \mathbb{N}$$

Aufgabe 5

X_1, X_2, X_3 unabhängig

$P(X_1 = -1) = P(X_2 = 1) = \frac{1}{2} \qquad Y_1 = X_1 + X_2 \qquad Y_2 = X_2 + X_3$

$$Var(Y_1 + Y_2) = Var(Y_1) + Var(Y_2) + Cov(Y_1, Y_2) = Var(Y_1) + Var(Y_2) + E(Y_1 \cdot Y_2) - E(Y_1) \cdot E(Y_2)$$

$$EX_1 = \sum_{x \in \mathbb{R}} x \cdot P(X = x) = \sum_{k=-1}^{1} k \cdot P(X = k) = (-1) \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = 0 = EX_2 = EX_3$$

$$Var X_1 = (-1)^2 \cdot \frac{1}{2} + 1^2 \cdot \frac{1}{2} = \underline{1} = Var X_2 = Var X_3$$

$Var(Y_1) = Var(X_1) + Var(X_2) = 2$

$Var(Y_2) = Var(X_2) + Var(X_3) = 2$

$\Rightarrow Var(Y_1 + Y_2) = 4$

Aufgabe 6

Kolmogorov-Axiome

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} e^{-(\lambda+\mu)} \cdot \frac{\lambda^i}{i!} \cdot \frac{\mu^j}{j!} \Leftrightarrow e^{(\lambda+\mu)} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\mu^j}{j!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} e^{\mu} = e^{\lambda} e^{\mu}$$