Loes Normalklausur 2

Aufgabe 1 (2+2+2 Punkte) (= Aufgabe 34)
Seien X_1, X_2 reellwertige i.i.d. Zufallsvariablen über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ mit $P(X_1 = -1) = P(X_1 = +1) = 1/2$. Außerdem sei $X_3 = X_1 \cdot X_2$.

(a) Bestimmen Sie die Verteilung der Zufallsvariable $Z = (X_1, X_3)$.

(b) Zeigen Sie, dass X_1 und X_3 stochastisch unabhängig sind.

(c) Untersuchen Sie, ob die Familie $(X_i)_{i\in I}$ für $I = \{1, 2, 3\}$ stochastisch unabhängig ist.

Aufgabe 2 (4+2 Punkte)
Sei X eine reellwertige Zufallsvariable über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ mit $X \sim U(0, 3)$.

(a) Berechnen und skizzieren Sie die zugehörige Verteilungsfunktion F_X.

(b) Berechnen Sie $P(|X - 2| \geq 1)$. ⚠ stetige Verteilung!

Aufgabe 3 (4+4+2 Punkte)
Seien $A = [-1, +1]^2$ und $Z = (X, Y)$ eine 2-dimensionale Zufallsvariable über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ mit der durch

$$f_Z(x, y) = 4^{-1}(1 + x \cdot y) \cdot \mathbf{1}_A(x, y), \ (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

definierten λ^2-Dichte. Außerdem sei $Z^* = (X^2, Y^2)$.

(a) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeitsverteilung P^X eine λ^1-Dichte besitzt. (Aufgabe 50)

(b) Berechnen Sie die zu Z^* gehörige Verteilungsfunktion F_{Z^*}.

(c) Untersuchen Sie, ob X^2 und Y^2 stochastisch unabhängig sind.

Hinweis zu (c): Satz 6.31.

Aufgabe 4 (4+2 Punkte)
Seien $k \in \mathbb{N}$ und X eine reellwertige Zufallsvariable über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ mit $P(X = -1) = P(X = +1) = (2 \cdot k^2)^{-1}$ und $P(X = 0) = 1 - k^{-2}$.

(a) Berechnen Sie $\mathrm{E}(X)$ und $\mathrm{Var}(X)$. diskret

(b) Berechnen Sie $P(|X - \mu| \geq k \cdot \sigma)$ mit $\mu = \mathrm{E}(X)$ sowie $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X)$ und schätzen Sie außerdem diese Wahrscheinlichkeit mit der Tschebyschev-Ungleichung ab.

Aufgabe 5 (6 Punkte)
Seien $n \in \mathbb{N}$ und $X_1, \ldots, X_n$ reellwertige stochastisch unabhängige Zufallsvariablen über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ mit $\mathrm{E}(X_i) = 0$ und $E(|X_i|^3) < \infty$, $i = 1, \ldots, n$. Berechnen Sie $\mathrm{E}((\sum_{i=1}^n X_i)^3)$.

Aufgabe 6 (4 Punkte)
Seien $n \in \mathbb{N}$ und X eine reellwertige Zufallsvariable über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ mit der durch $f(x) = n \cdot x^{n-1} \cdot \mathbf{1}_{(0,1)}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, definierten λ^1-Dichte. Berechnen Sie alle Anfangsmomente $m_k = \mathrm{E}(X^k)$, $k \in \mathbb{N}$. ⚠ stetig

...ir 2

Sei $x \in \mathbb{R}$ $F(x) = P((-\infty, x]) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ $\quad$ $f(x) = \frac{1}{3} 1_{[0,3]}$

Fall 1: $x < 0$

$\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = 0$

...gabe 2

Fall 2: $0 \le x \le 3$

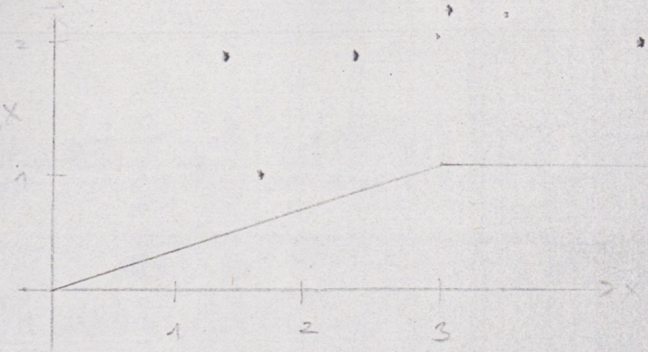
$F(x) = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{x} f(t)\,dt = \left[\frac{1}{3}t\right]_0^x = \frac{1}{3}x$

Fall 3: $x > 3$ $\quad 1 = F(3) \le F(x) \le 1$, also $F(3) = 1$

(a) $X \sim U(0,3)$

$F(x) = \frac{1}{b-a}(x-a) 1_{[a,b]}(x) + 1_{(b,\infty)}(x)$

$= \frac{1}{3} x \; 1_{[0,3]}(x) + 1_{(3,\infty)}(x)$



(b) $P(|X-2| \ge 1) = 1 - P(|X-2| < 1) = 1 - P(-1 < |X-2| < 1) =$

$= 1 - P(1 < X < 3) = 1 - P(1 \le X \le 3) = 1 - (F(3) - F(1)) =$

$= 1 - F(3) + F(1) = 1 - 1 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

Aufgabe 4

$P(X = -1) = \frac{1}{2k^2} \qquad P(X = 0) = 1 - \frac{1}{k^2} \qquad P(X = 1) = \frac{1}{2k^2}$

(a) $EX = \sum_{x \in \mathbb{R}} x \cdot P(X = x) = \sum_{k=-1}^{1} k \cdot P(X = k) = (-1) \cdot \frac{1}{2k^2} + 0 \cdot \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) + 1 \cdot \frac{1}{2k^2} = \underline{\underline{0}}$

$\operatorname{Var} X = EX^2 - E^2 X$

$EX^2 = \sum_{x \in \mathbb{R}} x^2 \cdot P(X = x) = \sum_{k=-1}^{1} k^2 \cdot P(X = k) = (-1)^2 \cdot \frac{1}{2k^2} + 1 \cdot \frac{1}{2k^2} = \underline{\underline{\frac{1}{k^2}}}$

$\underline{\operatorname{Var} X} = \frac{1}{k^2} - 0 = \frac{1}{k^2}$

<u>oder</u> $\operatorname{Var} X = (-1)^2 \cdot \frac{1}{k^2} + 0^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) + 1^2 \cdot \left(\frac{1}{2k^2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2k^2}\right) = \frac{1}{k^2} = k^{-2}$

(b) $P(X - \mu \ge k \cdot \sigma) = P(|X| \ge 1)$ $\qquad \mathcal{X} = \mathbb{R}$, $Q = P^X$ $\mathcal{X}_0 = \operatorname{spt}(Q) = \{-1, 0, 1\}$ $Q(\mathcal{X}_0) =$

$\mu = 0, \sigma^2 = \frac{1}{k^2}, \sigma = \frac{1}{k}$

$Q = \frac{1}{2k^2} \delta_{\{-1,1\}} + \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \delta_{\{0\}}$

$\{|X| \ge 1\}^c = \{|X| < 1\} = \{-1 < X < 1\}$

$P(|X| \ge 1) = 1 - P(|X| < 1) = 1 - P(-1 < X < 1) = 1 - Q((-1,1)) = 1 - Q((-1,1) \cap \mathcal{X}_0) =$

$= 1 - Q(\{0\}) = 1 - 1 + \frac{1}{k^2} = \underline{\underline{\frac{1}{k^2}}}$

mit Tschebyschow-Ungleichung $P(|X - \mu| \ge \varepsilon) \le \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$ $\forall \varepsilon > 0$ folgt: $P(|X| \ge \varepsilon) \le \frac{\frac{1}{k^2}}{\varepsilon^2} = \frac{\varepsilon^2}{k^2}$

mit $\varepsilon = k \cdot \sigma \Rightarrow P(|X| \ge 1) = \underline{\underline{\frac{1}{k^2}}}$

5

X_n reellwertige ZV stochastisch unabhängig $E(X)=0$ $E(|X|^3)<\infty$

Berechne: $E\left(\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^3\right)$

$$E\left(\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^3\right) = E\left(\left(\sum_{i=1}^{n} X\right)\left(\sum_{i=1}^{n} X\right)\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\right) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \cdot E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \underbrace{EX_i}_{=0} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{EX_i}_{=0} \cdot \sum_{i=1}^{n} \underbrace{EX_i}_{=0}$$

$*_1$ $E(X_i X_j) = E(X_i) \cdot E(X_j) = 0$

$*_2$ $E(X_i X_j X_k) = E(X_i) E(X_j) E(X_k) = 0$

↓ Henze S. 80

$E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} EX_j$

$\exists a_i, a_k \in \mathbb{R}$ mit $\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^3 = \sum_{i=1}^{n} X_i^3 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} a_i X_i X_j^2 + \sum_{i \neq j \neq k} a_k X_i X_j X_k$

$$\Rightarrow E\left(\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^3\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)^3 + \underbrace{\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}} a_i E(X_i^2 X_j)}_{=0 \, *_1} + \underbrace{\sum_{i \neq j \neq k} a_k E(X_i X_j X_k)}_{=0 \, *_2} = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)^3$$

Aufgabe 6

$f(x) = n \cdot x^{n-1} \mathbb{1}_{(0,1)}(x)$, $x \in \mathbb{R}$

$F(x) = x^n \mathbb{1}_{(0,1)}(x) + \mathbb{1}_{[1,\infty)}(x)$

$$m_k = EX^k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \cdot f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^k n x^{n-1} \mathbb{1}_{(0,1)}(x)\, dx = \int_0^1 x^k n x^{n-1}\, dx = n \cdot \int_0^1 x^{k+n-1}\, dx =$$

$$= n \left[\frac{1}{k+n} \cdot x^{k+n}\right]_0^1 = \frac{n}{k+n}(1-0) = \frac{n}{k+n}$$