2006 (3)

(2)

Aufgabe 1 (3 Punkte)

In einer Urne befinden sich $N \in \mathbb{N}$ Kugeln, die mit den Zahlen $1, \dots, N$ nummeriert sind. Es wird n-mal unabhängig und rein zufällig eine Kugel mit Zurücklegen entnommen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass dabei die Kugel mit der Zahl 1 mindestens einmal erscheint.

Aufgabe 2 (6 Punkte) (vgl. Aufg. 21 b)

In einer Urne befinden sich $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, Kugeln, die mit den Zahlen $1, \dots, n$ nummeriert sind. Es wird n-mal rein zufällig eine Kugel ohne Zurücklegen entnommen. Für $i = 1, \dots, n$ bezeichne A_i das Ereignis, dass die Kugel mit der Nummer i bei der i-ten Ziehung erscheint. Berechnen Sie $P(A_1 \Delta A_2)$.

$A_1 \Delta A_2 = A_1 \cup A_2 - A_1 \cap A_2$

$A_1 \Delta A_2 = (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_1)$

Aufgabe 3 (4 Punkte) (vgl. Aufgabe 17b)

Seien $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A_i \in \mathfrak{S}$, $i = 1, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - (n-1).$$

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Seien $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ der durch $(\Omega, \mathfrak{S}) = (\mathbb{R}, \mathfrak{B}^1_*)$ sowie $P = (1/2) \cdot (P_1 + P_2)$ mit $P_1 = U(-2, +1)$ und $P_2 = U(0, 2)$ definierte Wahrscheinlichkeitsraum. Berechnen Sie zu $A = [-1, +1]$ die Wahrscheinlichkeit $P(A)$.

Aufgabe 5 (2+4 Punkte)

Ein Fabrikant verspricht die Lieferung einer Ware zu einem festen Zeitpunkt. Die Lieferzeit unterliegt aber wegen unvorhersehbarer Einflüsse Schwankungen, sodass ein Zufallsexperiment vorliegt, bei dem die Abweichung vom versprochenen Liefertermin beobachtet wird. Als Modell soll daher ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ mit $(\Omega, \mathfrak{S}) = (\mathbb{R}, \mathfrak{B}^1_*)$ betrachtet werden. Dabei seien $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die für $x \in \mathbb{R}$ durch

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \leq -1, \\ 3/4 \cdot x - 1/4 \cdot x^3 + 1/2, & \text{falls } -1 < x \leq 1, \\ 1, & \text{falls } x > 1, \end{cases}$$

also $F(x) = (\frac{3}{4} \cdot x - \frac{1}{4} \cdot x^3 + \frac{1}{2}) \cdot \mathbf{1}_{(-1,+1]}(x) + \mathbf{1}_{(+1,+\infty)}$ definierte Verteilungsfunktion und P die zu F korrespondierende Wahrscheinlichkeitsverteilung.

(a) Berechnen Sie $P([0, 1])$ und $P([-1, +1])$. (vgl. Aufg. 49a)

(b) Berechnen Sie zu F eine Riemannsche Wahrscheinlichkeitsdichte. (Aufg 49d)

Aufgabe 6 (3 Punkte)

Seien $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum sowie $B, C \in \mathfrak{S}$ zwei unabhängige Ereignisse mit $P(B) > 0$ und $0 < P(C) < 1$. Zeigen Sie: Für alle $A \in \mathfrak{S}$ gilt

$$P(A|B) = P(A|B \cap C) \cdot P(C) + P(A|B \cap C^c) \cdot P(C^c).$$

Aufgabe 1

$\binom{1 \dots}{N}$, $|\mathrm{Per}_n^N(mW)| = N^n = |\Omega|$, $N = \{1, \dots, N\}$

$n = \{1, \dots, n\}$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = \underline{1 - \left(\frac{N-1}{N}\right)^n} = \left(\frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{(N-1)^n}{N^n}\right)$$

X = Anzahl der 1en

Gegenereignis: Wurf mit der Zahl 1 erscheint kein Mal

Aufgabe 2

ω_1: 1. Wurf
ω_2: 2. Wurf

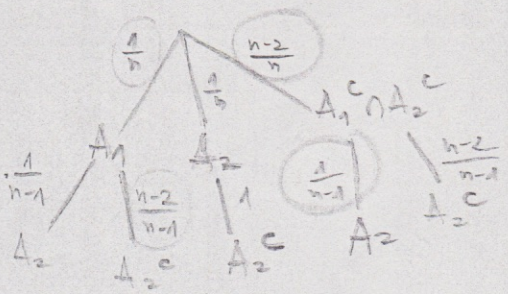
$\Omega = ((\omega_1, \dots, \omega_n) \in \mathrm{Per}_n^n(cW))$

$$P(\underbrace{\{\omega_1 = 1, \omega_2 \neq 2\}}_{A_1 \setminus A_2} \cup \underbrace{\{\omega_1 \neq 1, \omega_2 = 2\}}_{A_2 \setminus A_1}) = P(\{\omega_1 = 1, \omega_2 \neq 2\}) + P(\{\omega_1 \neq 1 \neq 2, \omega_2 = 2\})$$

$$P(A_1 \setminus A_2) = \frac{1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1}$$

$$P(A_2 \setminus A_1) = \frac{n-2}{n} \cdot \frac{1}{n-1}$$

$$P(A_1 \Delta A_2) = \frac{n-2}{n \cdot (n-1)} + \frac{n-2}{n \cdot (n-1)} = \frac{2n-4}{n \cdot (n-1)}$$



Aufgabe 3

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) \overset{2.14\,(4)}{\underset{\text{mit}}{=}} 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i^c\right) \overset{2.14\,(17)}{\geq} 1 - \sum_{i=1}^n (1 - P(A_i)) = 1 - (1 - P(A_1) + 1 - P(A_2) + \dots + 1 - P(A_n))$$

Aufg 17 b)

$$= 1 - \left(\sum_{i=1}^n 1 - \sum_{i=1}^n P(A_i)\right) = 1 - \left(n - \sum_{i=1}^n P(A_i)\right) = 1 - n + \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

$$\Rightarrow P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) \geq \sum_{i=1}^n P(A_i) - n + 1$$

Aufgabe 4

$P = \frac{1}{2} \cdot (P_1 + P_2)$ $\quad P_1 = U(-2, 1)$ $\quad P_2 = U(0, 2)$ $\quad A = [-1, 1]$

$P_1 = U(-2, 1) \Rightarrow F_{X_1} = \frac{1}{3}(x+2)\, 1_{[-2,1]} + 1_{(1,\infty)}$

$P_2 = U(0, 2) \Rightarrow F_{X_2} = \frac{1}{2} x\, 1_{[0,2]} + 1_{(2,\infty)}$

$P_1(A) = P_1([-1, 1]) = F(1) - F(-1) = 1 - \frac{1}{3} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$

$P_2(A) = P_2([-1, 1]) = F(1) - F(-1) = \frac{1}{2} - 0 = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$

$P = \frac{1}{2} \cdot (P_1 + P_2) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right) = \underline{\underline{\frac{7}{12}}}$

(a) $P([0,1]) \underset{2.37\,(b)}{=} F(1) - F(0^-) \underset{F \text{ stetig}}{=} F(1) - F(0) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$

$P([-1,1]) \underset{2.37\,(b)}{=} F(1) - F(-1^-) \underset{F \text{ stetig}}{=} F(1) - F(-1) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 0 = \underline{\underline{1}}$

<u>Aufgabe 6</u> $P(B) > 0 \quad 0 < P(C) < 1$

<u>zu zeigen:</u> $P(A|B) = P(A|B \cap C) \cdot P(C) + P(A|B \cap C^c) \cdot P(C^c)$

<u>Beweis:</u> $P(A|B \cap C) \cdot P(C) + P(A|B \cap C^c) \cdot P(C^c)$

$$= \frac{P(A \cap (B \cap C))}{P(B \cap C)} \cdot P(C) + \frac{P(A \cap (B \cap C^c))}{P(B \cap C^c)} \cdot P(C^c)$$

$$\underset{B,C \text{ unabhängig}}{=} \frac{P(A \cap (B \cap C))}{P(B) \cdot \cancel{P(C)}} \cdot \cancel{P(C)} + \frac{P(A \cap (B \cap C^c))}{P(B) \cdot \cancel{P(C^c)}} \cdot \cancel{P(C^c)}$$

$$= \frac{P(A \cap (B \cap C))}{P(B)} + \frac{P(A \cap (B \cap C^c))}{P(B)}$$

$$= \frac{P(A \cap B) \cdot P(C) + P(A \cap B) \cdot P(C^c)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(A \cap B) \cdot (\overbrace{P(C) + P(C^c)}^{=1})}{P(B)}$$

$$= \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$= \underline{P(A|B)}$$