5

Test

„Wahrscheinlichkeitsrechnung I (WS 2013/2014)“

Wintersemester 2013/2014, Montag, 24.02.2014, HS 9, Dr. H.-D. Keller

Zeit: Die Bearbeitungszeit beginnt um 13:00 Uhr und endet um 14:00 Uhr.

Tragen Sie hier bitte noch Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer ein:

Name	Vorname	Matrikelnummer

1(a)	1 (b)	1 (c)	2 (a)	2 (b)	3

Aufgabe 1 (3+3+3 Punkte)
Eine Urne enthält 50 gleichartige mit den Zahlen von 1 bis 50 nummerierte Kugeln. 5 Kugeln sollen nacheinander rein zufällig ohne Zurücklegen der Urne entnommen werden.

✓ (a) Konstruieren Sie für dieses Experiment einen geeigneten diskreten Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P) als Modell.

✓ (b) Definieren Sie das Ereignis, dass die Nummern der gezogenen Kugeln im Verlauf des Experiments immer kleiner werden, als Teilmenge A des von Ihnen in (a) gewählten Ergebnisraums.

(✓) (c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des in (b) definierten Ereignisses.

✓ Aufgabe 2 (3+3 Punkte)
Seien (Ω, P) der durch $\Omega = \mathbb{R}$ sowie $P = G(p)$, $p \in (0,1)$, definierte diskrete Wahrscheinlichkeitsraum, $A = \{-1, 0, 1\}$ und $B = \{2 \cdot k + 1 : k \in \mathbb{Z}\}$. Berechnen Sie

(a) $P(A)$ und (b) $P(B)$.

Wechsel der Verteilung und 3k+1

Hinweis: Für $k \in sp_+(P) = \mathbb{N}_0$ gilt $P(\{k\}) = p\cdot(1-p)^k$. Es folgt also $P(\{x\}) = 0$, $x \in \mathbb{R} - \mathbb{N}_0$.

✓ Aufgabe 3 (3 Punkte)
Sei X eine reelle Zufallsvariable auf einem diskreten Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P) mit $X \sim G(p)$, $p \in (0,1)$. Berechnen Sie $P(|X-1| \geq 1)$.

von geom. Verteilung → Gleichverteilung

für alle Kugeln die gleiche Wahrscheinlichkeit

LÖSUNG 1. (a) Ein geeignetes Modell ist der Laplacesche Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P) mit $\Omega = Per_5^{50}(oW)$. weil Beachtung der Reihenfolge aber keine Zurücklage

(b) $A = \{(\omega_1, \ldots, \omega_5) \in \Omega : \omega_1 > \ldots > \omega_5\}$.

(c) Durch $f = (\pi_5, \ldots, \pi_1)$ (↑ Definition 4.8) und $g(\omega) = (51 - \omega_1, \ldots, 51 - \omega_5)$, $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_5) \in A$, sind bijektive Abbildungen $f, g : A \to Kom_5^{50}(oW)$ erklärt. Nach Satz 1.4 a) und Satz 1.28 gilt daher $|A| = |Kom_5^{50}(oW)| = \binom{50}{5}$. Satz 1.24 liefert $|\Omega| = 50^{\underline{5}} = 5! \cdot \binom{50}{5}$. Damit erhält man

↳ keine Beachtung der Reihenfolge, keine Zurücklage

$Per_k^n(oW) =$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{5!} = \frac{1}{120} \approx 0,008.$$

LÖSUNG 2 (↑ AUFGABE 23).

(a)

$$\underline{P(A)} \overset{\text{Bemerk. 2.22}}{=} \sum_{\omega \in A} \overbrace{P(\{\omega\})}^{f(\omega)} \overset{\text{Index-shift}}{=} \sum_{k \in A} P(\{k\}) \overset{\text{mit } A=\{-1,0,1\}}{=} \sum_{k=-1}^{1} P(\{k\})$$

$$\overset{\text{weil geometr. Verteilung } \Omega = \mathbb{N}_0}{=} \sum_{k=-1}^{1} P(\{k\} \cap \mathbb{N}_0) = \sum_{k=0}^{1} P(\{k\}) \underset{\text{in } G(p) \text{ einsetzen}}{=} p \cdot (1-p)^0 + p \cdot (1-p)^1$$

$$= p + p \cdot (1-p) = p \cdot (1 + (1-p)) = \underline{p \cdot (2-p)}.$$

(b)

$$P(B) = \sum_{\omega \in B} P(\{\omega\}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} P(\{2 \cdot k + 1\}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P(\{2 \cdot k + 1\})$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} P(\{2 \cdot k + 1\} \cap \mathbb{N}_0) = \sum_{k=0}^{\infty} P(\{2 \cdot k + 1\}) = \sum_{k=0}^{\infty} p \cdot (1-p)^{2 \cdot k + 1}$$

$$= p \cdot (1-p) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} ((1-p)^2)^k \underset{\text{geomet. Reihe}}{=} p \cdot (1-p) \cdot \frac{1}{1 - (1-p)^2}$$

$$= p \cdot (1-p) \cdot \frac{1}{2 \cdot p - p^2} = \frac{1-p}{2-p}.$$

$\sum_{k=0}^{\infty} p \cdot (1-p)^{2k+1} = p \cdot (1-p)^1 + p \cdot (1-p)^3 + p \cdot (1-p)^5$

$\cdot (1-p) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} ((1-p)^2)^k = p \cdot (1-p) \left(((1-p)^2)^0 + ((1-p)^2)^1 \right)$ für $k=0$

1 $(1-p)^2$

$p(1-p)^3$

geomet. Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$

LÖSUNG 3 (↑ AUFGABE 31). Seien $\mathfrak{X} = \mathbb{R}$ bzw. $Q = L(X) = P^X$ bzw. $\mathfrak{X}_0 = sp_+(Q) = \mathbb{N}_0$ mit $Q(\mathfrak{X}_0) = 1$ entsprechend Definition 4.1 bzw. Definition 4.5 bzw. Satz 2.30 (↑ Aufgabe 18). Nach Voraussetzung gilt $Q = G(p)$. Wegen

diskrete Verteilung von $\mathbb{N}_0$ ist gleich 1

$$\{|X-1| \geq 1\}^c = \{|X-1| < 1\} = \{-1 < X - 1 < 1\} = \{0 < X < 2\}$$

erhält man

$$\underline{P(|X-1| \geq 1)} = 1 - P(\{|X-1| \geq 1\}^c) = 1 - P(0 < X < 2)$$

$$= 1 - Q((0,2)) = 1 - Q((0,2) \cap \mathfrak{X}_0) = 1 - Q(\{1\})$$

$$\underset{\text{mit } Q = G(p)}{=} 1 - p \cdot (1-p)^1 = \underline{1 - p \cdot (1-p)}.$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \;;\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90} \;;\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}}$$