Kraft-McMillan-Ungleichung

Verlustfreie Kompression

Benedikt Lüken-Winkels

12. Juni 2018

Universität Trier

Bedeutung

Bedeutung

Bedingung für die Dekodierbarkeit eines Codes

$\rightarrow$ Code nur eindeutig dekodierbar, wenn die Schlüssellängen die Kraft-McMillan-Ungleichung erfüllen.

$\rightarrow$ Erfüllen die Schlüssellängen die Kraft-McMillan-Ungleichung, existiert eine eindeutige Codierung.

$\Rightarrow$ Für jede Schlüssellänge gibt es einen eindeutig dekodierbaren Präfix-Code.

Bedeutung

Bedingung für die Dekodierbarkeit eines Codes

$\rightarrow$ Code nur eindeutig dekodierbar, wenn die Schlüssellängen die Kraft-McMillan-Ungleichung erfüllen.

$\rightarrow$ Erfüllen die Schlüssellängen die Kraft-McMillan-Ungleichung, existiert eine eindeutige Codierung.

$\Rightarrow$ Für jede Schlüssellänge gibt es einen eindeutig dekodierbaren Präfix-Code.

Bedeutung

Bedingung für die Dekodierbarkeit eines Codes

- $\rightarrow$ Code nur eindeutig dekodierbar, wenn die Schlüssellängen die Kraft-McMillan-Ungleichung erfüllen.
- $\rightarrow$ Erfüllen die Schlüssellängen die Kraft-McMillan-Ungleichung, existiert eine eindeutige Codierung.
- $\Rightarrow$ Für jede Schlüssellänge gibt es einen eindeutig dekodierbaren Präfix-Code.

Bedeutung

Bedingung für die Dekodierbarkeit eines Codes

$\rightarrow$ Code nur eindeutig dekodierbar, wenn die Schlüssellängen die Kraft-McMillan-Ungleichung erfüllen.

$\rightarrow$ Erfüllen die Schlüssellängen die Kraft-McMillan-Ungleichung, existiert eine eindeutige Codierung.

$\Rightarrow$ Für jede Schlüssellänge gibt es einen eindeutig dekodierbaren Präfix-Code.

Definition

Definition

Erinnerung: Code

Abbildung von Worten aus X auf *Codeworte* aus Σ^*

Code $C : X \to \Sigma^*$

Definition

Erinnerung: Code

Abbildung von Worten aus X auf *Codeworte* aus Σ^*

$$\text{Code } C : X \to \Sigma^*$$

Definition

Erinnerung: Präfixcode

Eindeutig dekodierbarer Code bei dem kein Codewort ein Präfix eines anderen Codewortes ist.

$Beispiel\ 1 : \{0, 01, 11\}$ **Kein Präfixcode**

$Beispiel\ 2 : \{10, 01, 11\}$ **Präfixcode**

Definition

Erinnerung: Präfixcode

Eindeutig dekodierbarer Code bei dem kein Codewort ein Präfix eines anderen Codewortes ist.

Beispiel $1 : \{0, 01, 11\}$ **Kein Präfixcode**

Beispiel $2 : \{10, 01, 11\}$ **Präfixcode**

Definition

Erinnerung: Präfixcode

Eindeutig dekodierbarer Code bei dem kein Codewort ein Präfix eines anderen Codewortes ist.

Beispiel $1 : \{0, 01, 11\}$ **Kein Präfixcode**

Beispiel $2 : \{10, 01, 11\}$ **Präfixcode**

Definition

Erinnerung: Präfixcode

Eindeutig dekodierbarer Code bei dem kein Codewort ein Präfix eines anderen Codewortes ist.

Beispiel $1 : \{0, 01, 11\}$ **Kein Präfixcode**

Beispiel $2 : \{10, 01, 11\}$ **Präfixcode**

Definition

Erinnerung: Präfixcode

Eindeutig dekodierbarer Code bei dem kein Codewort ein Präfix eines anderen Codewortes ist.

$$\textit{Beispiel } 1 : \{0, 01, 11\} \textbf{ Kein Präfixcode}$$

$$\textit{Beispiel } 2 : \{10, 01, 11\} \textbf{ Präfixcode}$$

Definition

Kraft-McMillan-Ungleichung

Sei Code $C : X \to \Sigma^*$ über einem Alphabet Σ mit $|\Sigma| = q$, Länge der Codewörter $l_1, ..., l_n$ und n Wörtern ein eindeutig dekodierbarer Präfix(freier)-Code, dann gilt:

$$KM(C) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{q^{l_i}} \leq 1$$

Definition

Kraft-McMillan-Ungleichung

Sei Code $C : X \to \Sigma^*$ über einem Alphabet Σ mit $|\Sigma| = q$, Länge der Codewörter $l_1, ..., l_n$ und n Wörtern ein eindeutig dekodierbarer Präfix(freier)-Code, dann gilt:

$$KM(C) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{q^{l_i}} \leq 1$$

Anwendung

Anwendung

Beispiel

Alphabet Σ, Größe des Alphabets der Codierung q, abzubildende Wörter X

$$\Sigma = \{0, 1\}$$
$$\Rightarrow q = 2$$
$$X = \{a, b, c, d\}$$

Anwendung

Beispiel

Alphabet Σ, Größe des Alphabets der Codierung q, abzubildende Wörter X

$$
\begin{aligned}
\Sigma &= \{0, 1\} \\
&\Rightarrow q = 2 \\
X &= \{a, b, c, d\}
\end{aligned}
$$

Anwendung

Tabelle 1: Beispiel für eindeutige Codierung

X	$C(x)$	$l_{C(x)}$
a	110	3
b	111	3
c	0	1
d	10	2

$$
\begin{aligned}
KM(C) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{l_i}} \\
&= \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Anwendung

Tabelle 1: Beispiel für eindeutige Codierung

X	$C(x)$	$l_{C(x)}$
a	110	3
b	111	3
c	0	1
d	10	2

$$KM(C) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{l_i}}$$

$$= \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2}$$

$$= 1$$

Anwendung

Tabelle 1: Beispiel für eindeutige Codierung

X	$C(x)$	$l_{C(x)}$
a	110	3
b	111	3
c	0	1
d	10	2

$$\begin{aligned} KM(C) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{l_i}} \\ &= \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Anwendung

Tabelle 1: Beispiel für eindeutige Codierung

X	$C(x)$	$l_{C(x)}$
a	110	3
b	111	3
c	0	1
d	10	2

$$\begin{aligned} KM(C) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{l_i}} \\ &= \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Anwendung

Tabelle 2: Beispiel für nicht-eindeutige Codierung

X	$C(x)$	$l_{C(x)}$
a	11	2
b	111	3
c	0	1
d	10	2

$$KM(C) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{l_i}} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} > 1$$

Anwendung

Tabelle 2: Beispiel für nicht-eindeutige Codierung

X	$C(x)$	$l_{C(x)}$
a	11	2
b	111	3
c	0	1
d	10	2

$$KM(C) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{l_i}}$$
$$= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2}$$
$$> 1$$

Anwendung

Tabelle 2: Beispiel für nicht-eindeutige Codierung

X	$C(x)$	$l_{C(x)}$
a	11	2
b	111	3
c	0	1
d	10	2

$$\begin{aligned} KM(C) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{l_i}} \\ &= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} \\ &> 1 \end{aligned}$$

Anwendung

Tabelle 2: Beispiel für nicht-eindeutige Codierung

X	$C(x)$	$l_{C(x)}$
a	11	2
b	111	3
c	0	1
d	10	2

$$
\begin{aligned}
KM(C) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{l_i}} \\
&= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} \\
&> 1
\end{aligned}
$$

Zusammenfassung

Zusammenfassung

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p^{l_i}} \leq 1$$

- Obere Schranke der Summe als 'Budget'
  - $\rightarrow$ je länger die Codeworte, desto kleiner die Summe
  - $\rightarrow$ nicht viele kurze Codeworte verfügbar.
- Beispiel: Morsecode

Zusammenfassung

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p^{l_i}} \leq 1$$

- Obere Schranke der Summe als 'Budget'
  - $\rightarrow$ je länger die Codeworte, desto kleiner die Summe
  - $\rightarrow$ nicht viele kurze Codeworte verfügbar.
- Beispiel: Morsecode

Zusammenfassung

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p^{l_i}} \leq 1$$

- Obere Schranke der Summe als 'Budget'
  - $\rightarrow$ je länger die Codeworte, desto kleiner die Summe
  - $\rightarrow$ nicht viele kurze Codeworte verfügbar.
- Beispiel: Morsecode

Zusammenfassung

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p^{l_i}} \leq 1$$

- Obere Schranke der Summe als 'Budget'
  - $\rightarrow$ je länger die Codeworte, desto kleiner die Summe
  - $\rightarrow$ nicht viele kurze Codeworte verfügbar.
- Beispiel: Morsecode

Zusammenfassung

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p^{l_i}} \leq 1$$

- Obere Schranke der Summe als 'Budget'
  - $\rightarrow$ je länger die Codeworte, desto kleiner die Summe
  - $\rightarrow$ nicht viele kurze Codeworte verfügbar.
- Beispiel: Morsecode

Quellen I

- Kraft-ungleichung, 11.06.2018.
- Präfixcode, 11.06.2018.
- *Introduction to data compression / Khalid Sayood*, 4. ed. ed. **Elsevier, Amsterdam [u.a.], 2012.**