Approximationsalgorithmen
SoSe 2019

Benedikt Lüken-Winkels

April 16, 2019

Contents

1 1.Vorlesung

Foliensatz 1

1.1 Orga

- **Sprechstunde** Do, 13-14 Uhr
- **Vorlesung** Di, 12:15-13:45
- **Übung** Di, 8:15-9:45 Uhr (erster Termin 16.04.)
- **Prüfung** Mündl Prüfung

1.2 Einführung

1.2.1 Motivation

- wenn P $\neq$ NP, kan man keinen guten oder schnellen Algorithmus schreiben
- Zeigt man, dass ein Problem NP-schwer ist, kann kein schneller Algorithmus geschrieben werden

$\Rightarrow$ Heuristische Verfahren (keine mathematische Garantie). Warum funktionieren die Heuristiken so gut? Herangehensweisen

- Greedy Verfahren
- Randomisierte Verfahren: finden der Lösung mit hoher Wahrscheinlichkeit
- Parametrisierte Verfahren: exakte Lösungen und Versuch, den exponentiellen Teil gering zu halten
- Näherungsverfahren: Heuristiken mit Leistungsgarantie

Klasse von Problemen die zur Betrachtung stehen.
Quatrupel $(I_\rho, S_\rho, m_\rho, opt_\rho)$ zur Beschreibung eines Optimierungsproblems

- I_ρ: geeignete Instanz eines Problems, genauer: "geeignet binär-codierte formale Sprachen".
- S_ρ: Bildet auf Menge der möglichen Lösungen ab
- m_ρ: x Instanz und y eine Lösung. Abbildung auf Maßzahl
- opt_ρ: Möglichst kleines Ergebnis oder möglichst großes
- $S^*_\rho : I_\rho \rightarrow$ Menge der bestmöglichen Lösungen

- m_ρ^* Wert oder Grenzwert einer bestmöglichen Lösung
- * bedeutet idR bestmöglich

⇒ **Ziel**: Leistungsgröße (Folie 15) ist 1, wenn Lösung optimal ist

1.2.2 Beispiel: Knotenüberdeckung

Möglichst wenige Knoten, um alle Kanten abzudecken

- Zuordnung zu den Optimierungsparametern Folie 17
- Verschiedene Beobachtungen zur Optimierung
  - Zwei Knoten im Dreieck gehören dazu
  - Bei Knoten mit Grad 1 wird immer der Nachbar genommen
  -
- Auswählen eines Knotens bedeutet, dass diese Teile abgeschnitten werden
- ⇒ Vereinfachung des Graphen, zB neue Grad 1 Knoten

Greedyverfahren, GreedyVC (Folie 23)

- Änderung der Grade bei Durchführung
- Problem: Implementierung der Kantenlöschung (Kopieren des Graphen bei jeder Iteration nötig?)
- Folie 24: Lösung insofern (inklusions-) minimal, als dass das Entfernen eines Knotens keine andere Lösung zulässt

Suchbaumverfahren, Entscheidungsproblem (Folie 25) Liefert exakte Lösungen

- Zusätzlicher Parameter k ("Budget")
- Zwei Abbruchskriterien:
  - Alle Kanten abgedeckt
  - Nicht alle Kanten abgedeckt, aber $k = 0$
- Suchbaum im worst-case ein vollständiger Binärbaum, **aber** höchsten 2^k Schritte im Baum, da die Tiefe durch k begrenzt ist

Näherungsverfahren (Folie 30) Suchbaumverfahren ohne Fallunterscheidung. (Faktor 2-Approximations-Verfahren)

- Bei jeder Kante muss einer der Knoten in die Überdeckung
- Lokaler Fehler höchsten Faktor 2
- Zufall bei der Auswahl der Kanten kann zum Vorteil sein

Näherung gibt Schranke für die minimale Lösung dadurch, dass Heuristik eine Faktor 2 Lösung zeigt. $\Rightarrow$ (Folie 31) Lösung mit 22 Knoten zeigt eine optimale Lösung mit 11 Knoten

1.2.3 Beispiel: MAXSAT (Folie 32)

$m\rho =$ Anzahl der Klauseln, die die Formel erfüllen

Einfacher Ansatz

- Alles 0 und alles 1 setzen, dann das bessere Ergebnis zurückliefern
- $\Rightarrow$ liefert 2-Approximation

1.2.4 Beispiel: Unabhängige Knotenmengen (Folie 34)

Sehr schwer approximierbar

1.2.5 Beispiel: Unabhängige Kantenmengen (Folie 35)

Lösung in Polinomialzeit, um eine untere Schranke für die Knotenüberdeckung zu finden

2 2. Vorlesung

2.Foliensatz

2.1 Definition Gewichtsreduktionsfunktion

Eine Reduktion verringert die Gewichtsfunktion: $\forall x \in X : 0 \leq \delta(x) \leq w(x)$
Eine Reduktion ist **r-effektiv**, wenn $\delta(X) \leq r \cdot OPT(\delta)$

2.2 Allgemeines (gewichtetes) Überdeckungsproblem

- Grundmenge X
- Monotone Abbildung (Bewerung: 1 = Überdeckung oder 0) $f : 2^X \rightarrow \{0, 1\}$
- Gewichtsfunktion $w \rightarrow \mathbb{R}^+$ weist den Knoten ein Gewicht zu

- $\Rightarrow$ Überdeckung mit kleinstmöglichem Gewicht
- Gewichtsreduktionsfunktion δ
- $OPT(w) = w(C^*)$ C^* ist optimale Überdeckung

Einfachere Problemanalyse durch Zerlegung von Gewichtsfunktionen in Untergewichtsfunktionen

2.3 Reduktion Bar-Yehuda, Even Folie 13

2-Approximation, Reduktion für jede Kante $\delta_e(v)$ wird angewandt auf jeden anliegenden Knoten

- Wähle das Minimum der Knoten als Gewicht für die Kante
- Nehme eine Kante und ziehe das Gewicht der Kante von den Knoten ab $\Rightarrow$ einer der Knoten hat Grad 0 und damit Teil einer Überdeckung
- Nächster Schritt $w - \delta_e$, bedeutet, dass die Gewichtsfunktion verändert wird und eine neue Iteration beginnt

2.4 Reduktion Clarkson Folie 22

2-Approximation, Gewichtsreduktion über Knoten

- $\varepsilon(v) = \frac{w(v)}{d(v)}$
- Anliegende Knoten von v erhalten Gewicht $\varepsilon(v)$
- $\Rightarrow w - \delta_v$

2.5 Randomiesierte Verfahren

2-Approximation, Gewichtsreduktion über Knoten

- Zufallsalgorithmus gemäß r-effektiver Verteilung (nicht immer Faktor r, aber im Mittel erreicht)
- Implementierung der Intuition, dass großgradige Knoten interessant sind
- Bei ungewichteten Graphen:
  - $(w(v) = 1)$
  - Wahrscheinlichkeit einen Knoten zu wählen, $\frac{d(v)}{2|V|}$ $(2|V|$, weil alle Kanten Doppelt abgezählt werden)
  - Knoten mit großem Grad werden häufig, aber **nicht immer** in die Überdeckung aufgenommen

2.6 $\triangle$-Hitting-Set

Δ = maximaler Grad der Kanten (Wieviele Knoten hängen an einer Kante). $\Delta = 2$ quasi Knotenüberdeckungsproblem

Sonderfälle

- leere Kante (keine Knoten) $\Rightarrow$ keine Überdeckung möglich
- Kante mit nur einem Knoten $\Rightarrow$ automatisch hinzufügen

2.6.1 Beispiel "Smart Home"

System

- Systembestandteile C
- Systembeschreibung SD (wie das System sein sollte)
- beobachtetes Systemverhalten OBS

Ist ein Widerspruch in der Annahme, dass das System fehlerfrei funktioniert

2.6.2 Datenreduktion

- Kante f ist echte Teilmenge von Kante e $\Rightarrow$ entferne e
- Kante e ist gleich Knoten v $\Rightarrow$ Knoten ist in der Überdeckung
- Konten x hat ist nur in einer Kante mit Knoten y $\Rightarrow$ entferne x