# Berechenbare Analysis
# SoSe 19

Benedikt Lüken-Winkels

April 12, 2019

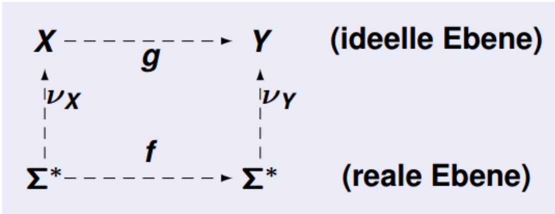
## Contents

# 1 1. Vorlesung

# 2 2. Vorlesung

## 2.1 Berechenbarkeit

Figure 1: g ist $(\nu_x, \nu_y) berechenbar$, wenn g von einer berchenbaren Funktion f realisiert wird




## 2.2 Entscheidbarkeit

**Diagonalisierung** Wären die Reellen Zahlen abzählbar, wäre die Diagonalzahl darin enthalten (!Widerspruch).

Table 1: Diagonialisierungsbeispiel: $x_\infty$ kann nicht in der Liste enthalten sein

| | |
|---|---|
| $x_0$ | 0.500000 |
| $x_1$ | 0.411110 |
| $x_2$ | 0.312110 |
| $x_3$ | 0.222220 |
| $x_4$ | 0.233330 |
| ... | ... |
| $x_\infty$ | 0.067785.... |

**Definition** Menge A Entscheidbar, wenn eine Funktion $f_A(x)$ ,die entscheidet, ob $x \in A$ berechenbar ist.

## 2.3 Berechenbare Reelle Zahlen

**Konstruktive Mathematik** Formulierung algorithmischen Rechnens: zB $\exists$ neu definiert als "es existiert ein Algorithmus". Nicht mehr für "klassische Mathematiker" lesbar

**Definition** Für $x \in \mathbb{R}$ sind die Bedingungen äquivalent (wenn eine Bedingung erfüllt ist, sind alle Erfüllt):

1. Eine TM erzeugt eine unendlich lange binäre Representation von $x$ auf dem Ausgabeband
2. **Fehlerabschätzung** Es gibt eine TM, die Approximationen liefert. Formal: $q : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ $(q_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ist Folge rationaler Zahlen, die gegen $x$ konvergiert. Bedeutet, dass alle $q_i$ innerhalb eines bestimmten beliebig kleinen Bereichs um $x$ liegen.
3. **Intervalschachtelung** Es gibt eine berechenbare Intervallschachtelung: Angabe zweier Folgen rationaler Zahlen mit der Aussage, dass $x$ dazwischen liegt. Ziel: Abstände von linker und rechter Schranke soll gegen null gehen.
4. **Dedekindscher Schnitt**Menge $\{q \in \mathbb{Q} | q < x\}$ ist entscheidbar. Beispiel $\sqrt{2}$ ist berechenbar. $\{q | q < \sqrt{2}\} = \{q | q^2 < 2\}$
5. $z \in \mathbb{Z}$ $A \subseteq \mathbb{N}$, $x_A = \sum i \in A2^-1 - i$, $x = z + x_A$
6. Es exisitert eine Kettenbruchentwicklung

**Folgerungen**

- $\Rightarrow$ Für Berechenbarkeit muss nur eine der Bedingungen bewiesen werden. Menge der berechenbaren reelen Zahlen $= \mathbb{R}_c$
- Nicht berechenbare reele Zahlen durch Diagonalisierung konstruierbar
- $e$ berechenbar, weil die Fehlerabschätzung (2) existiert
- $\pi$ (Notiert als alternierede Reihe) berechenbar, weil Intervalschachtelung existiert
- $\sqrt{2}$ berechenbar, weil Dedekindscher Schnitt existiert.

**Implementierung** Ziel: zB Berechnung von Differentialgleichungen