Berechenbare Analysis
SoSe 19

Benedikt Lüken-Winkels

May 6, 2019

Contents

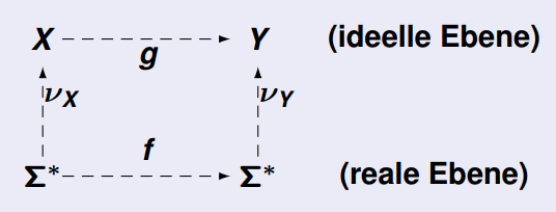
1 1. Vorlesung

2 2. Vorlesung

2.1 Berechenbarkeit

Es gibt einen Algorithmus, der die Zahl angeben kann (es gibt nur eine abzählbar unendliche Anzahl an Algorithmen, aber überabzählbar viele reelle Zahlen)

Figure 1: g ist (ν_x, ν_y)*berechenbar*, wenn g von einer berchenbaren Funktion f realisiert wird



2.2 Entscheidbarkeit

Diagonalisierung Wären die Reellen Zahlen abzählbar, wäre die Diagonalzahl darin enthalten (!Widerspruch).

Table 1: Diagonialisierungsbeispiel: x_∞ kann nicht in der Liste enthalten sein

x_0	0.500000
x_1	0.411110
x_2	0.312110
x_3	0.222220
x_4	0.233330
...	...
x_∞	0.067785....

Definition Menge A Entscheidbar, wenn eine Funktion $f_A(x)$,die entscheidet, ob $x \in A$ berechenbar ist.

2.3 Berechenbare Reelle Zahlen

Konstruktive Mathematik Formulierung algorithmischen Rechnens: zB $\exists$ neu definiert als "es existiert ein Algorithmus". Nicht mehr für "klassische Mathematiker" lesbar

Definition Für $x \in \mathbb{R}$ sind die Bedingungen äquivalent (wenn eine Bedingung erfüllt ist, sind alle Erfüllt):

1. Eine TM erzeugt eine unendlich lange binäre Representation von x auf dem Ausgabeband
2. **Fehlerabschätzung** Es gibt eine TM, die Approximationen liefert. Formal: $q : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ $(q_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ist Folge rationaler Zahlen, die gegen x konvergiert. Bedeutet, dass alle q_i innerhalb eines bestimmten beliebig kleinen Bereichs um x liegen. Größter möglicher Fehler $2^0 = 1$
3. **Intervalschachtelung** Es gibt eine berechenbare Intervallschachtelung: Angabe zweier Folgen rationaler Zahlen mit der Aussage, dass x dazwischen liegt. Ziel: Abstände von linker und rechter Schranke soll gegen null gehen.
4. **Dedekindscher Schnitt**Menge $\{q \in \mathbb{Q} | q < x\}$ ist entscheidbar. Beispiel $\sqrt{2}$ ist berechenbar. $\{q | q < \sqrt{2}\} = \{q | q^2 < 2\}$. $\Rightarrow$ Es gibt einen Test, ob die Zahl kleiner ist.
5. $z \in \mathbb{Z}$ $A \subseteq \mathbb{N}$, $x_A = \sum i \in A 2^- 1 - i$, $x = z + x_A$
6. Es exisitert eine Kettenbruchentwicklung

Folgerungen / Beispiele

- $\Rightarrow$ Für Berechenbarkeit muss nur eine der Bedingungen bewiesen werden. Menge der berechenbaren reelen Zahlen = $\mathbb{R}_c$
- Nicht berechenbare reele Zahlen durch Diagonalisierung konstruierbar
- e berechenbar, weil die Fehlerabschätzung (2) existiert
- π (Notiert als alternierede Reihe) berechenbar, weil Intervalschachtelung existiert
- $\sqrt{2}$ berechenbar, weil Dedekindscher Schnitt existiert.

Implementierung Ziel: zB Berechnung von Differentialgleichungen

3 3. Vorlesung

Implementierung in C++ Ziel: shared pointer für temporäre Variablen verstecken (durch wrapper)

- (binary sequence) bs: ein Bit nach dem anderen wird ausgegeben. binseq gibt zur natürlichen Zahl n und liefert das n-te Bit der reellen Zahl (Vorzeichen, 0 oder 1).
- (rational approximations) ra: Fehler beliebiger Größe (Gnaze Zahlen). approx rationale Approximation mit einem beliebig großem Fehler. (Abänderung der Definition, weil ganze Zahlen zulässig)

- ni: Untere und obere Schranke. lower/upperbound gibt n-te Schranke
- (Dedekind cut) dc: Ist eine Zahl kleiner. smaller entscheidet, ob die angegebene Rationale Zahl kleiner ist.
- ds: decide ist das n-te Bit gesetzt oder nicht
- cf: cont-fraction n-tes Folgenglied

3.1 Binary Sequence

- make-node erzeugt den shared pointer auf das node Objekt
- DAG (directed acyclic graph) als Stuktur für Operatoren

4 4. Vorlesung

Programmierung

5 5.Vorlesung

(2) ⇒ (1)

Umsetung von Approximation zur Binärfolge für die gesuchte Zahl x:

- Bereich zwischen 2 ganzen Zahlen aproximieren (ist x eine 2er-Potenz, schlägt dieser Schritt fehl)
- Binärsequenzen eignen sich nicht zum Rechnen

$\mathbb{R}_c$ ist ein Körper

- Sind 2 Zahlen berechenbar, so auch das Ergebnis aus + - * / ⇒ gilt für Intervallschachtelungen (Lemma 3.8)
  - + : untere/obere Grenze addieren
  - - : untere/obere Grenze subtrahieren
  - * , / : min und max des Kreuzproduktes
- Ein Polynom mit berechenbaren Koeffizienten hat berechenbare Nullstellen

6 6.Vorlesung