

Berechenbare Analysis

SoSe 19

Benedikt Lüken-Winkels

April 12, 2019

Contents

1	1. Vorlesung	2
2	2. Vorlesung	2
2.1	Berechenbarkeit	2
2.2	Entscheidbarkeit	2
2.3	Berechenbare Reelle Zahlen	2

Table 1: Diagonalisierungsbeispiel

a	b
c	d

1 1. Vorlesung

2 2. Vorlesung

2.1 Berechenbarkeit

!NACHHÖREN!

2.2 Entscheidbarkeit

Diagonalisierung Wären die Reellen Zahlen abzählbar, wäre die Diagonalzahl darin enthalten (!Widerspruch).

Definition Menge A Entscheidbar, wenn eine Funktion $f_A(x)$, die entscheidet, ob $x \in A$ berechenbar ist.

2.3 Berechenbare Reelle Zahlen

Konstruktive Mathematik Formulierung algorithmischen Rechnens: zB \exists neu definiert als "es existiert ein Algorithmus". Nicht mehr für "klassische Mathematiker" lesbar

Definition Für $x \in \mathbb{R}$ sind die Bedingungen äquivalent (wenn eine Bedingung erfüllt ist, sind alle Erfüllt):

1. Eine TM erzeugt eine unendlich lange binäre Representation von x auf dem Ausgabeband
2. Es gibt eine TM, die Approximationen liefert. Formal: $q : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ $(q_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ist Folge rationaler Zahlen, die gegen x konvergiert. Bedeutet, dass alle q_i innerhalb eines bestimmten beliebig kleinen Bereichs um x liegen.
3. Es gibt eine berechenbare Intervallschachtelung: Angabe zweier Folgen rationaler Zahlen mit der Aussage, dass x dazwischen liegt. Ziel: Abstände von linker und rechter Schranke soll gegen null gehen.
4. Menge $\{q \in \mathbb{Q} | q < x\}$ ist entscheidbar. Beispiel $\sqrt{2}$ ist berechenbar. $\{q | q < \sqrt{2}\} = \{q | q^2 < 2\}$
5. $z \in \mathbb{Z} \quad A \subseteq \mathbb{N}, x_A = \sum i \in A 2^{-1-i}, x = z + x_A$
6. Es existiert eine Kettenbruchentwicklung

\Rightarrow Für Berechenbarkeit muss nur eine der Bedingungen bewiesen werden. Menge der berechenbaren reellen Zahlen $= \mathbb{R}_c$