

Simulation von Turing Maschinen

Unmöglichkeit einer universellen Turing Maschine mit nur einem Zustand

Benedikt Lüken-Winkels

12. Juni 2018

Universität Trier

Beschreibungsnummer

- auch Gödelnummer
- Kodierung einer Turing Maschine auf einer universellen Turing Maschine (UTM)

Beschreibungsnummer

- auch Gödelnummer
- Kodierung einer Turing Maschine auf einer universellen Turing Maschine (UTM)

Voraussetzungen

TM $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q, \square, F)$ mit

- $Q = \{q\}$,
- einem Band,
- endl. Beschreibungsnummer einer TM, die eine bel. berechenbare (irrationale) Zahl berechnen kann auf dem Band.

Voraussetzungen

TM $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q, \square, F)$ mit

- $Q = \{q\}$,
- einem Band,
- endl. Beschreibungsnummer einer TM, die eine bel. berechenbare (irrationale) Zahl berechnen kann auf dem Band.

Voraussetzungen

TM $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q, \square, F)$ mit

- $Q = \{q\}$,
- einem Band,
- endl. Beschreibungsnummer einer TM, die eine bel. berechenbare (irrationale) Zahl berechnen kann auf dem Band.

Idee

Berechnung der Ziffern von $\sqrt{2}$ durch M ist nicht möglich, wenn entweder

- *₁ eine endliche Anzahl von Zellen auf dem Band verarbeitet wurden und auf dem Rest des Bandes das gleiche Symbol steht , oder
- *₂ außer einer endlichen Anzahl von Zellen wird jede Zelle unendlich oft geändert.

Idee

Berechnung der Ziffern von $\sqrt{2}$ durch M ist nicht möglich, wenn entweder

*₁ eine endliche Anzahl von Zellen auf dem Band verarbeitet wurden und auf dem Rest des Bandes das gleiche Symbol steht , oder

*₂ außer einer endlichen Anzahl von Zellen wird jede Zelle unendlich oft geändert.

Idee

Berechnung der Ziffern von $\sqrt{2}$ durch M ist nicht möglich, wenn entweder

- *₁ eine endliche Anzahl von Zellen auf dem Band verarbeitet wurden und auf dem Rest des Bandes das gleiche Symbol steht , oder
- *₂ außer einer endlichen Anzahl von Zellen wird jede Zelle unendlich oft geändert.

Beweis (1)

$B :=$ Zellen des Bandes mit der Beschreibungsnummer der TM, die $\sqrt{2}$ berechnet

$A :=$ Unendliche Folge von Blanksymbolen, links von B

$C :=$ Unendliche Folge von Blanksymbolen, rechts von B

Beweis (2)

Bei $\delta(q, \square)$ muss M ^{Fall 1} stehen bleiben oder ^{Fall 2} nach links/rechts gehen.

Fall 1: alles außer einem endl. Teil des Bandes hat das Blanksymbol $\Rightarrow *_1$

Fall 2.1: (a) A wird nie erreicht oder (b) alle Zellen von A werden mit dem gleichen Zeichen kodiert.

(a) $\Rightarrow A$ kann ignoriert werden

(b) $\Rightarrow A$ wird konstant und C bleibt Blank

$\Rightarrow \sqrt{2}$ kann nicht dargestellt werden

Fall 2.2: *analog*.

\Rightarrow rechtsseitig unendliches Band ist ausreichend.

Beweis (2)

Bei $\delta(q, \square)$ muss M ^{Fall 1} stehen bleiben oder ^{Fall 2} nach links/rechts gehen.

Fall 1: alles außer einem endl. Teil des Bandes hat das Blanksymbol $\Rightarrow *_1$

Fall 2.1: (a) A wird nie erreicht oder (b) alle Zellen von A werden mit dem gleichen Zeichen kodiert.

(a) $\Rightarrow A$ kann ignoriert werden

(b) $\Rightarrow A$ wird konstant und C bleibt Blank

$\Rightarrow \sqrt{2}$ kann nicht dargestellt werden

Fall 2.2: *analog*.

\Rightarrow rechtsseitig unendliches Band ist ausreichend.

Beweis (2)

Bei $\delta(q, \square)$ muss M ^{Fall 1} stehen bleiben oder ^{Fall 2} nach links/rechts gehen.

Fall 1: alles außer einem endl. Teil des Bandes hat das Blanksymbol $\Rightarrow *_1$

Fall 2.1: (a) A wird nie erreicht oder (b) alle Zellen von A werden mit dem gleichen Zeichen kodiert.

(a) $\Rightarrow A$ kann ignoriert werden

(b) $\Rightarrow A$ wird konstant und C bleibt Blank

$\Rightarrow \sqrt{2}$ kann nicht dargestellt werden

Fall 2.2: *analog*.

\Rightarrow rechtsseitig unendliches Band ist ausreichend.

Beweis (2)

Bei $\delta(q, \square)$ muss M ^{Fall 1} stehen bleiben oder ^{Fall 2} nach links/rechts gehen.

Fall 1: alles außer einem endl. Teil des Bandes hat das Blanksymbol $\Rightarrow *_1$

Fall 2.1: (a) A wird nie erreicht oder (b) alle Zellen von A werden mit dem gleichen Zeichen kodiert.

(a) $\Rightarrow A$ kann ignoriert werden

(b) $\Rightarrow A$ wird konstant und C bleibt Blank

$\Rightarrow \sqrt{2}$ kann nicht dargestellt werden

Fall 2.2: *analog*.

\Rightarrow rechtsseitig unendliches Band ist ausreichend.

Beweis (2)

Bei $\delta(q, \square)$ muss M ^{Fall 1} stehen bleiben oder ^{Fall 2} nach links/rechts gehen.

Fall 1: alles außer einem endl. Teil des Bandes hat das Blanksymbol $\Rightarrow *_1$

Fall 2.1: (a) A wird nie erreicht oder (b) alle Zellen von A werden mit dem gleichen Zeichen kodiert.

(a) $\Rightarrow A$ kann ignoriert werden

(b) $\Rightarrow A$ wird konstant und C bleibt Blank

$\Rightarrow \sqrt{2}$ kann nicht dargestellt werden

Fall 2.2: *analog*.

\Rightarrow rechtsseitig unendliches Band ist ausreichend.

Beweis (2)

Bei $\delta(q, \square)$ muss M ^{Fall 1} stehen bleiben oder ^{Fall 2} nach links/rechts gehen.

Fall 1: alles außer einem endl. Teil des Bandes hat das Blanksymbol $\Rightarrow *_1$

Fall 2.1: (a) A wird nie erreicht oder (b) alle Zellen von A werden mit dem gleichen Zeichen kodiert.

(a) $\Rightarrow A$ kann ignoriert werden

(b) $\Rightarrow A$ wird konstant und C bleibt Blank

$\Rightarrow \sqrt{2}$ kann nicht dargestellt werden

Fall 2.2: *analog*.

\Rightarrow rechtsseitig unendliches Band ist ausreichend.

Beweis (2)

Bei $\delta(q, \square)$ muss M ^{Fall 1} stehen bleiben oder ^{Fall 2} nach links/rechts gehen.

Fall 1: alles außer einem endl. Teil des Bandes hat das Blanksymbol $\Rightarrow *_1$

Fall 2.1: (a) A wird nie erreicht oder (b) alle Zellen von A werden mit dem gleichen Zeichen kodiert.

(a) $\Rightarrow A$ kann ignoriert werden

(b) $\Rightarrow A$ wird konstant und C bleibt Blank

$\Rightarrow \sqrt{2}$ kann nicht dargestellt werden

Fall 2.2: *analog*.

\Rightarrow rechtsseitig unendliches Band ist ausreichend.

Beweis (2)

Bei $\delta(q, \square)$ muss M ^{Fall 1} stehen bleiben oder ^{Fall 2} nach links/rechts gehen.

Fall 1: alles außer einem endl. Teil des Bandes hat das Blanksymbol $\Rightarrow *_1$

Fall 2.1: (a) A wird nie erreicht oder (b) alle Zellen von A werden mit dem gleichen Zeichen kodiert.

(a) $\Rightarrow A$ kann ignoriert werden

(b) $\Rightarrow A$ wird konstant und C bleibt Blank

$\Rightarrow \sqrt{2}$ kann nicht dargestellt werden

Fall 2.2: *analog*.

\Rightarrow rechtsseitig unendliches Band ist ausreichend.

Reflection number der TM R

1. Setze Lesekopf auf die erste Zelle von C
 2. Sobald der Lesekopf auf B wandert, setze ihn auf die erste Stelle von C
- $R :=$ Anzahl der Wiederholungen der Schritte 1. und 2.
- $R \in \{1, 2, \dots, \infty\}$

Reflection number der TM R

1. Setze Lesekopf auf die erste Zelle von C
 2. Sobald der Lesekopf auf B wandert, setze ihn auf die erste Stelle von C
- $R :=$ Anzahl der Wiederholungen der Schritte 1. und 2.
- $R \in \{1, 2, \dots, \infty\}$

Reflection number der TM R

1. Setze Lesekopf auf die erste Zelle von C
2. Sobald der Lesekopf auf B wandert, setze ihn auf die erste Stelle von C

→ $R :=$ Anzahl der Wiederholungen der Schritte 1. und 2.

→ $R \in \{1, 2, \dots, \infty\}$

Reflection number der TM R

1. Setze Lesekopf auf die erste Zelle von C
2. Sobald der Lesekopf auf B wandert, setze ihn auf die erste Stelle von C

→ $R :=$ Anzahl der Wiederholungen der Schritte 1. und 2.

→ $R \in \{1, 2, \dots, \infty\}$

Reflection number der TM R

1. Setze Lesekopf auf die erste Zelle von C
 2. Sobald der Lesekopf auf B wandert, setze ihn auf die erste Stelle von C
- $R :=$ Anzahl der Wiederholungen der Schritte 1. und 2.
- $R \in \{1, 2, \dots, \infty\}$

Reflection number der $\sqrt{2}$ -Beschreibung S

1. Setze Lesekopf auf die erste Zelle von B
 2. Sobald der Lesekopf auf C wandert, setze ihn auf die letzte Stelle von B
- $S :=$ Anzahl der Wiederholungen der Schritte 1. und 2.
- $S \in \{1, 2, \dots, \infty\}$

Reflection number der $\sqrt{2}$ -Beschreibung S

1. Setze Lesekopf auf die erste Zelle von B
 2. Sobald der Lesekopf auf C wandert, setze ihn auf die letzte Stelle von B
- $S :=$ Anzahl der Wiederholungen der Schritte 1. und 2.
- $S \in \{1, 2, \dots, \infty\}$

Reflection number der $\sqrt{2}$ -Beschreibung S

1. Setze Lesekopf auf die erste Zelle von B
2. Sobald der Lesekopf auf C wandert, setze ihn auf die letzte Stelle von B

→ $S :=$ Anzahl der Wiederholungen der Schritte 1. und 2.

→ $S \in \{1, 2, \dots, \infty\}$

Reflection number der $\sqrt{2}$ -Beschreibung S

1. Setze Lesekopf auf die erste Zelle von B
2. Sobald der Lesekopf auf C wandert, setze ihn auf die letzte Stelle von B

→ $S :=$ Anzahl der Wiederholungen der Schritte 1. und 2.

→ $S \in \{1, 2, \dots, \infty\}$

Reflection number der $\sqrt{2}$ -Beschreibung S

1. Setze Lesekopf auf die erste Zelle von B
 2. Sobald der Lesekopf auf C wandert, setze ihn auf die letzte Stelle von B
- $S :=$ Anzahl der Wiederholungen der Schritte 1. und 2.
- $S \in \{1, 2, \dots, \infty\}$

1.Fall : S ist endlich und $R > S$

$\Rightarrow M$ loopt nach endlich vielen Schritten nur noch über C

\Rightarrow nur ein endlicher Teil von C wurde geändert

2.Fall : S und R sind beide unendlich

\Rightarrow Lesekopf wird unbegrenzt oft auf B aus C zurückkehren:

\Rightarrow (a) Exkursionen in C ist begrenzt (b) oder unbegrenzt.

(a) \Rightarrow nur ein endlicher Teil von C wurde geändert

(b) \Rightarrow alles bis auf einen endlichen Teil des Bandes ändert sich dauerhaft \square

1.Fall : S ist endlich und $R > S$

$\Rightarrow M$ loopt nach endlich vielen Schritten nur noch über C

\Rightarrow nur ein endlicher Teil von C wurde geändert

2.Fall : S und R sind beide unendlich

\Rightarrow Lesekopf wird unbegrenzt oft auf B aus C zurückkehren:

\Rightarrow (a) Exkursionen in C ist begrenzt (b) oder unbegrenzt.

(a) \Rightarrow nur ein endlicher Teil von C wurde geändert

(b) \Rightarrow alles bis auf einen endlichen Teil des Bandes ändert sich dauerhaft \square

1.Fall : S ist endlich und $R > S$

$\Rightarrow M$ loopt nach endlich vielen Schritten nur noch über C

\Rightarrow nur ein endlicher Teil von C wurde geändert

2.Fall : S und R sind beide unendlich

\Rightarrow Lesekopf wird unbegrenzt oft auf B aus C zurückkehren:

\Rightarrow (a) Exkursionen in C ist begrenzt (b) oder unbegrenzt.

(a) \Rightarrow nur ein endlicher Teil von C wurde geändert

(b) \Rightarrow alles bis auf einen endlichen Teil des Bandes ändert sich dauerhaft \square

1.Fall : S ist endlich und $R > S$

$\Rightarrow M$ loopt nach endlich vielen Schritten nur noch über C

\Rightarrow nur ein endlicher Teil von C wurde geändert

2.Fall : S und R sind beide unendlich

\Rightarrow Lesekopf wird unbegrenzt oft auf B aus C zurückkehren:

\Rightarrow (a) Exkursionen in C ist begrenzt (b) oder unbegrenzt.

(a) \Rightarrow nur ein endlicher Teil von C wurde geändert

(b) \Rightarrow alles bis auf einen endlichen Teil des Bandes ändert sich dauerhaft \square

1.Fall : S ist endlich und $R > S$

$\Rightarrow M$ loopt nach endlich vielen Schritten nur noch über C

\Rightarrow nur ein endlicher Teil von C wurde geändert

2.Fall : S und R sind beide unendlich

\Rightarrow Lesekopf wird unbegrenzt oft auf B aus C zurückkehren:

\Rightarrow (a) Exkursionen in C ist begrenzt (b) oder unbegrenzt.

(a) \Rightarrow nur ein endlicher Teil von C wurde geändert

(b) \Rightarrow alles bis auf einen endlichen Teil des Bandes ändert sich dauerhaft \square

1.Fall : S ist endlich und $R > S$

$\Rightarrow M$ loopt nach endlich vielen Schritten nur noch über C

\Rightarrow nur ein endlicher Teil von C wurde geändert

2.Fall : S und R sind beide unendlich

\Rightarrow Lesekopf wird unbegrenzt oft auf B aus C zurückkehren:

\Rightarrow (a) Exkursionen in C ist begrenzt (b) oder unbegrenzt.

(a) \Rightarrow nur ein endlicher Teil von C wurde geändert

(b) \Rightarrow alles bis auf einen endlichen Teil des Bandes ändert sich dauerhaft \square

1.Fall : S ist endlich und $R > S$

$\Rightarrow M$ loopt nach endlich vielen Schritten nur noch über C

\Rightarrow nur ein endlicher Teil von C wurde geändert

2.Fall : S und R sind beide unendlich

\Rightarrow Lesekopf wird unbegrenzt oft auf B aus C zurückkehren:

\Rightarrow (a) Exkursionen in C ist begrenzt (b) oder unbegrenzt.

(a) \Rightarrow nur ein endlicher Teil von C wurde geändert

(b) \Rightarrow alles bis auf einen endlichen Teil des Bandes ändert sich dauerhaft \square

1.Fall : S ist endlich und $R > S$

$\Rightarrow M$ loopt nach endlich vielen Schritten nur noch über C

\Rightarrow nur ein endlicher Teil von C wurde geändert

2.Fall : S und R sind beide unendlich

\Rightarrow Lesekopf wird unbegrenzt oft auf B aus C zurückkehren:

\Rightarrow (a) Exkursionen in C ist begrenzt (b) oder unbegrenzt.

(a) \Rightarrow nur ein endlicher Teil von C wurde geändert

(b) \Rightarrow alles bis auf einen endlichen Teil des Bandes ändert sich dauerhaft \square



SHANNON, C.

A universal turing machine with two internal states.

Automata Studies (1956), 157–165.