B. 你會隨機嗎?

Description

相信各位在資訊之芽的隨機課程中有學到如何產生隨機數字。因此本題非常的簡單,就是希望你能夠正確的產生隨機數字,並通過 judge 的檢測。

現在給你一個 N 個數字的序列 p_1, p_2, \cdots, p_N ,代表你必須實作出一個隨機數產生器,使得對於每個數字 i,他會有如以下的機率被產生:

$$\frac{p_i}{\sum_{j=1}^N p_j}$$

請使用該隨機數產生器產生 M 個數字並輸出之。若 judge 端認為你產生的數字足夠隨機,則你的程式會被視為通過。

Input

輸入首行有兩個正整數 N, M,代表序列的長度和你要輸出的數字個數。接下來一行,N 個正整數 p_1, p_2, \ldots, p_N ,代表每個數字出現的機率參數。

- $1 \le N \le 10$
- $1 \le M \le 10^6$
- $1 \le p_i \le 10$

Output

輸出 M 個由指定的隨機產生器產出、介於 [1,N] 的數字並以單一空格隔開。若你輸出的答案符合上述規定以及 judge 端的隨機性檢查,則**任何一種答案**皆會被視為 Accepted,否則會被視為 Wrong Answer。

不用擔心,只要老實的隨機產就好,這題非常簡單的喔 ><

Sample 1

ıtput
2 3 4 5

配分

在一個子任務的「測試資料範圍」的敘述中,如果存在沒有提到範圍的變數,則此變數的範圍為 Input 所描述的範圍。

子任務編號	子任務配分	測試資料範圍
1	0%	範例測資,你只要照著輸出格式,
		輸出 M 個介於 $[1,N]$ 的數字即會視為通過。
2	100%	$N = 10, M = 10^6 \circ$

檢查機制

註:為求公平,本小節將會詳細闡述 judge 端的檢查方法。若無特別需求(例如你好想要了解怎麼檢查),可以不用瀏覽接下來的內容。

Judge 端採用的核心概念是使用 Chi-Squared Test, 一個非常著名的數據分佈分析機率方法。

具體來說,假設數字 i 出現的機率是 $q_i = \frac{p_i}{\sum_{j=1}^N p_j}$,如果要檢測 M 個數字是否符合我們指定的機率分佈,那麼令 Y_i 是 i 在這 M 個數字中出現的次數,則計算:

$$Q_{N-1} = \sum_{i=1}^{N} \frac{(Y_i - Mq_i)^2}{Mq_i}$$

則當 M 足夠大時,只要這個序列的確是由我們指定的機率分佈生成的,那麼可以 證明:

$$Q_{N-1} \ge \chi^2_{\alpha,N-1}$$

發生的機率約只有 $\alpha\%$,因此我們有 $1-\alpha\%$ 的信心可以在上述條件成立時判斷你產生的數字並不是透過足夠隨機的產生器產生的。這裡為了讓標準寬鬆,我們取了一個比 $\chi^2_{0.005,9}$ 還要大一些的數字,40,來當作判斷基準,有興趣的同學也可以自己試試看 $Q_9 \geq 40$ 的機率是不是真的很低。

此外,為了防止有人直接計算出每個數字期望的個數並輸出之,由於輸出數字的過程應該要是獨立的,因此在有分數的子題中,我們除了使用 Chi-Squared Test 檢查全部 M 個數字外,judge 會用固定的 seed 隨意取樣 20 次數量 $\geq 10^5$ 的位置,使得這些位置統計出來的數據也必須都通過 Chi-Squared Test。