E.T.S. INGENIEROS INDUSTRIALES. PLAN 2001. U.N.E.D
CÁLCULO INFINITESIMAL I (521020)
FEBRERO DE 2007. 1^{o}SEMANA

1. (4 PUNTOS) Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

   (a) Estúdiese su continuidad en $\mathbb{R}$.

   (b) Estúdiese si f posee derivadas continuas hasta orden 2, incluido, en $\mathbb{R}$.

   Solución:

   (a) Para $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, f es una función continua por ser cociente de funciones continuas y no anularse el denominador. Para ver si es continua en $x = 0$ hay que ver si $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 1$. Como $\lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x-1} = \frac{0}{0}$, aplicando la regla de L'Hôpital, se tiene:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{e^x} = 1$$

   Luego f es continua en $\mathbb{R}$.

   (b) Calculemos las derivadas hasta orden 2 para $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$

$$f'(x) = \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x - 1)^2} \qquad f''(x) = e^x \frac{xe^x + x - 2e^x + 2}{(e^x - 1)^3}$$

   Estas derivadas son continuas en $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ ya que son el cociente de funciones continuas y no se anula el denominador. En $x = 0$, las derivadas primera y segunda se calculan con la definición de derivada y aplicando sucesivas veces la regla de L'Hôpital

$$\begin{aligned}
f'(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h}{e^h-1} - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h - e^h + 1}{h(e^h - 1)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1 - e^h}{e^h - 1 + he^h} = \lim_{h\to 0} \frac{-e^h}{e^h + he^h + e^h} = -\frac{1}{2} \\
f''(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f'(h) - f'(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{e^h-1-he^h}{(e^h-1)^2} + \frac{1}{2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2e^h - 2 - 2he^h + \left(e^h - 1\right)^2}{2h(e^h - 1)^2} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{e^{2h} - 1 - 2he^h}{2he^{2h} + 2h - 4he^h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{2h} - e^h - he^h}{e^{2h} + 2he^{2h} + 1 - 2he^h - 2e^h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-2e^h - he^h + 2e^{2h}}{4e^{2h} - 4e^h + 4he^{2h} - 2he^h} = \lim_{h\to 0} \frac{-3e^h - he^h + 4e^{2h}}{12e^{2h} - 6e^h + 8he^{2h} - 2he^h} = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

   Falta por ver que las derivas son continuas. Hay que calcular $\lim_{x\to 0} f'(x)$ y $\lim_{x\to 0} f''(x)$. Lo haremos aplicando de nuevo sucesivas veces la regla de L'Hôpital

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} f'(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x - 1)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-xe^x}{2(e^x - 1)e^x} = \lim_{x\to 0} \frac{-1}{2e^x} = -\frac{1}{2} \\
\lim_{x\to 0} f''(x) &= \lim_{x\to 0} e^x \frac{xe^x + x - 2e^x + 2}{(e^x - 1)^3} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x(xe^x + x - 2e^x + 2) + e^x(-e^x + xe^x + 1)}{3(e^x - 1)^2 e^x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2xe^x + x - 3e^x + 3}{3(e^x - 1)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-e^x + 2xe^x + 1}{6(e^x - 1)e^x} = \lim_{x\to 0} \frac{-e^x + 2e^x + 2xe^x}{6e^{2x} + 6(e^x - 1)e^x} = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

   Luego las derivadas primera y segunda existen y son continuas.

2. (4 PUNTOS) Dada la sucesión funcional

$$f_n(x) = nx(1 - x^2)^n$$

(a) Estúdiese la convergencia puntual en el intervalo $[0,1]$.
(b) Calcúlese $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$.
(c) Calcúlese $\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$.
(d) Coméntense los resultados de los apartados b) y c).

Solución:

(a) Sea f el límite puntual de la sucesión, definido por $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, para $x \in [0,1]$ fijo. Entonces:
para $x = 0 \Rightarrow f_n(0) = 0 \Rightarrow f(0) = 0$
para $x = 1 \Rightarrow f_n(1) = 0 \Rightarrow f(1) = 0$
para $0 < x < 1 \Rightarrow f_n(x) = nx(1-x^2)^n$, resulta que $f_n(0) = 0$ y para $0 < x < 1$ tenemos

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$

porque es un límite de la forma $\lim \frac{n^\alpha}{p^n}$ con α real y $p > 0$ que es cero. Luego la sucesión f_n tiende a la función nula en el intervalo $[0,1]$.

(b)

$$\begin{aligned}\int_0^1 f_n(x)dx &= \int_0^1 nx(1-x^2)^n dx \\ &= \frac{1}{2}\frac{n}{n+1}(1-x^2)^{n+1}\Big|_1^0 \\ &= \frac{n}{2n+2}\end{aligned}$$

por lo que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+2} = \frac{1}{2}$$

(c)

$$\int_0^1 [\lim_{n\to\infty} f_n(x)]dx = \int_0^1 0 \cdot dx = 0$$

(d) Tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx \neq \int_0^1 [\lim_{n\to\infty} f_n(x)]dx$$

y podemos concluir que la sucesión no converge uniformemente, porque no se verifica la igualdad anterior.

3. (2 PUNTOS) Responder a las siguientes cuestiones cortas:

(a) Dada la función $f(x) = |x-1|$, ¿tiene un extremo en $x = 1$? ¿Es máximo o mínimo?. Justifíquese la respuesta.
(b) Razonar si es verdadero o falso que toda sucesión incluida en $\mathbb{R}$ decreciente de números reales es convergente.

Solución:

(a) La función $f(x) = |x-1|$ tiene un extremo en $x = 1$, porque $f(1) = |1-1| = 0$ y el valor absoluto siempre es mayor o igual que 0. Además, sólo es cero cuando su argumento es 0, es decir,

$$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Por tanto, $f(x) > 0$ si $x \neq 1$ y $f(1) = 0$. Así, en $x = 1$ tiene un extremo, que es un mínimo.

(b) No es cierto. Por ejemplo, si tomamos la sucesión $x_n = -n$, es una sucesión decreciente en $\mathbb{R}$, pero no es convergente. Sí sería cierto si es una sucesión definida en un compacto.