1. (4 PUNTOS) Dada la sucesión de funciones de variable real $\{f_n(x)\}$

$$f_n(x) = \frac{1}{1+x^n} \qquad \forall x \neq -1; \qquad f_n(-1) = 1$$

Se pide

(a) Hallar el límite puntual $f(x)$ de la sucesión.

(b) Razonar y calcular para qué valores de a y b, la convergencia es uniforme en el intervalo $[a,b]$.

(c) Calcular el límite de la sucesión $\{f_n'(1)\}$.

Solución:

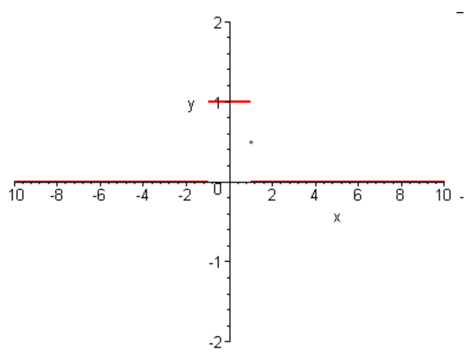
(a) Para determinar el límite puntual de la sucesión de funciones, observamos que la dificultad puede estar en $\lim_{n\to\infty} x^n$. Por tanto, primero hacemos

$$\begin{array}{lll} \text{si } |x| < 1 & \Longrightarrow x^n \to_{n\to\infty} 0 & \Longrightarrow f_n(x) \to 1 \\ \text{si } |x| > 1 & \Longrightarrow x^n \to_{n\to\infty} \infty & \Longrightarrow f_n(x) \to 0 \\ \text{si } x = 1 & \Longrightarrow f_n(1) = \frac{1}{2} & \Longrightarrow f_n(1) \to \frac{1}{2} \\ \text{si } x = -1 & \Longrightarrow f_n(-1) = 1 & \Longrightarrow f_n(-1) \to 1 \end{array}$$

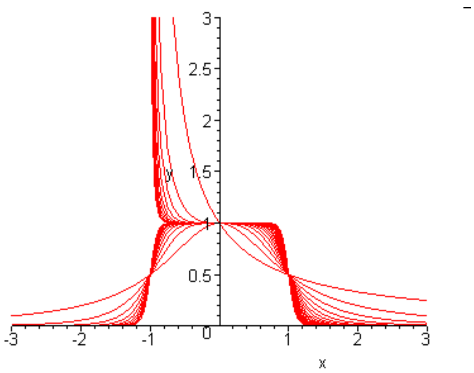
Consecuentemente, la función f límite puntual es

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| > 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 1 \\ 1 & \text{si } x = -1 \end{cases}$$

que representada gráficamente es



(b) La convergencia no puede ser uniforme en $\mathbb{R}$. Al ser f una función discontinua en 1, pero ser todas las f_n continuas en este punto, 1 no pueden estar en un intervalo donde la convergencia sea uniforme. También observamos que si -1 está en $[a,b]$ la convergencia no va a ser uniforme, porque $f_{2n}(x) \to_{x\to -1^-} = \frac{1}{2}$ y $\lim_{n\to\infty} \left(\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - f_n(x)| \right) \geq \frac{1}{2}$. Si se representan las funciones f_n



intuitivamente observamos que la convergencia va a ser uniforme si $[a,b] \subset (-1,1)$ ó $[a,b] \cap [-1,1] = \emptyset$. Para demostrar que la convergencia es uniforme en intervalos con estas características tenemos que ver si $\lim_{n\to\infty} \left(\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - f_n(x)| \right) = 0$. Sea $A = [a,b]$ con $1, -1 \notin A$. Entonces hacemos un estudio por casos. Si $A \subset (-1,1)$ es

$$\begin{aligned}
|f(x) - f_n(x)| &= \left| \frac{1}{1+x^n} - 1 \right| = \left| \frac{x^n}{1+x^n} \right|; \text{ sea } g(x) = \frac{x^n}{1+x^n} \\
g'(x) &= \frac{nx^{n-1}}{(1+x^n)^2} = 0 \Leftrightarrow x^{n-1} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\
0 &\leq \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - f_n(x)| = \sup\{g(0), g(a), g(b)\} = \sup\left\{0, \frac{a^n}{1+a^n}, \frac{b^n}{1+b^n}\right\} \\
&\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \left(\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - f_n(x)| \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\sup\left\{0, \frac{a^n}{1+a^n}, \frac{b^n}{1+b^n}\right\} \right) = 0
\end{aligned}$$

porque $|a| < 1$ y $1b1 < 1$. Si $A \subset (-\infty, -1)$ ó $A \subset (1, \infty)$, tenemos

$$\begin{aligned}
|f(x) - f_n(x)| &= \left| \frac{1}{1+x^n} \right| = \frac{1}{|1+x^n|}; \quad \text{sea } h(x) = \frac{1}{1+x^n} \\
h'(x) &= -\frac{nx^{n-1}}{(1+x^n)^2} = 0 \Leftrightarrow x^{n-1} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \notin A \\
0 &\leq \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - f_n(x)| \leq \sup\{h(a), h(b)\} = \sup\left\{\frac{1}{|1+a^n|}, \frac{1}{|1+b^n|}\right\} \\
&\Longrightarrow 0 \leq \lim_{n\to\infty} \left(\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - f_n(x)| \right) \leq \lim_{n\to\infty} \left(\sup\left\{\frac{1}{1+a^n}, \frac{1}{1+b^n}\right\} \right) = 0
\end{aligned}$$

porque $|a| > 1$ y $|b| > 1$. Por tanto, si se cumple que $[a,b] \subset (-1,1)$ ó $[a,b] \cap [-1,1] = \emptyset$, la convergencia es uniforme en estos intervalos.

(c) Derivando obtenemos

$$f_n'(x) = \frac{-nx^{n-1}}{(1+x^n)^2} \Longrightarrow f_n'(1) = -\frac{n}{4} \to_{n\to\infty} -\infty$$

2. (4 PUNTOS) Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} |x^2 + x| & \text{si } x < 0 \\ xe^{1/x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

(a) Estudiar su continuidad.

(b) Estudiar su derivabilidad.

Solución:

(a) Es continua (por ser composición, suma o resta de funciones continuas) en todo punto distinto de $x = 0$ y $x = -1$, porque esta función se puede reescribir como

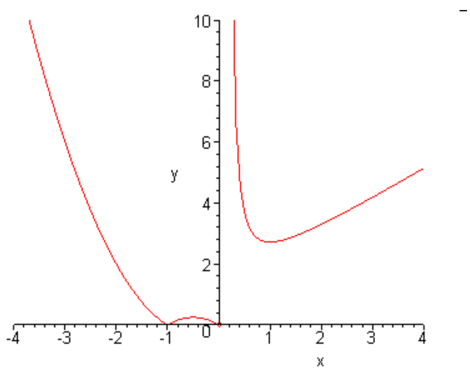
$$f(x) = \begin{cases} x(x+1) & \text{si } x \leq -1 \\ -x(x+1) & \text{si } -1 < x < 0 \\ xe^{1/x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

En $x = 0$ la función no está definida porque no existe $\lim_{x\to 0} xe^{1/x}$ (se puede demostrar aplicando L'Hôpital). Luego en este punto es discontinua.

En $x = -1$ la función será continua si $f(-1) = \lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x)$

$$\begin{aligned}
f(-1) &= 0 \\
\lim_{x\to -1^-} f(x) &= \lim_{x\to 1^-} x(x+1) = 0 \\
\lim_{x\to -1^+} f(x) &= \lim_{x\to 1^+} (-x(x+1)) = 0
\end{aligned}$$

luego es continua en este punto. La representación gráfica de esta función es



(b) Es derivable (por ser composición, suma o resta de funciones derivables) en todo punto distinto de $x = 0$ y $x = -1$ y es

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x < -1 \\ -2x - 1 & \text{si } -1 < x < 0 \\ \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{1/x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

En $x = 0$, al no ser cotninua no es derivable. En $x = -1$ se estudia la derivabilidad (por la derecha y por la izquierda) con la definición

$$\begin{aligned} f'\left(-1^-\right) &= \lim_{x \to -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \to -1^-} \frac{x^2 + x}{x + 1} = -1 \\ f'\left(-1^+\right) &= \lim_{x \to -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \to -1^+} \frac{-\left(x^2 + x\right)}{x + 1} = 1 \end{aligned}$$

Como estos límites no coinciden. la función no es derivable en $x = -1$.

3. (2 PUNTOS) Responder a las siguientes cuestiones cortas:

(a) Dada la función $f(x) = x^{2/3}$, indique si tiene extremo en $x = 0$ y su naturaleza.

(b) Determinar el valor de

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1 + \sqrt[3]{x}\right)}$$

Solución:

(a) Es $x = 0$ tiene un mínimo relativo y absoluto

(b) $6\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$