Curso 0

Cálculo para ingenieros

Profesora: Isabel Hidalgo
Email: isahidalgo@palma.uned.es

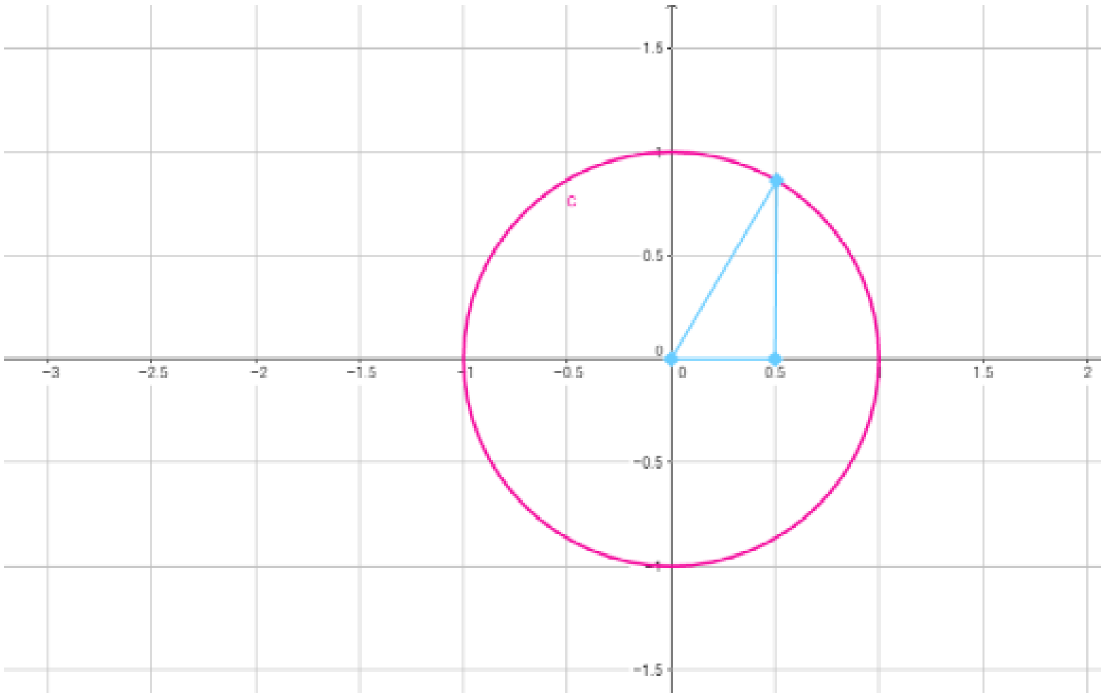
TEMA 3: FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS LOGARÍTMICAS Y EXPONENCIALES

1. Funciones trigonométricas: seno, coseno, tangente.
   a. Formulas de adición.
   b. Identidades y ecuaciones trigonométricas

2. Función exponencial y función logarítmica
   a. Ecuaciones exponenciales
   b. Propiedades de los logaritmos y ecuaciones exponenciales

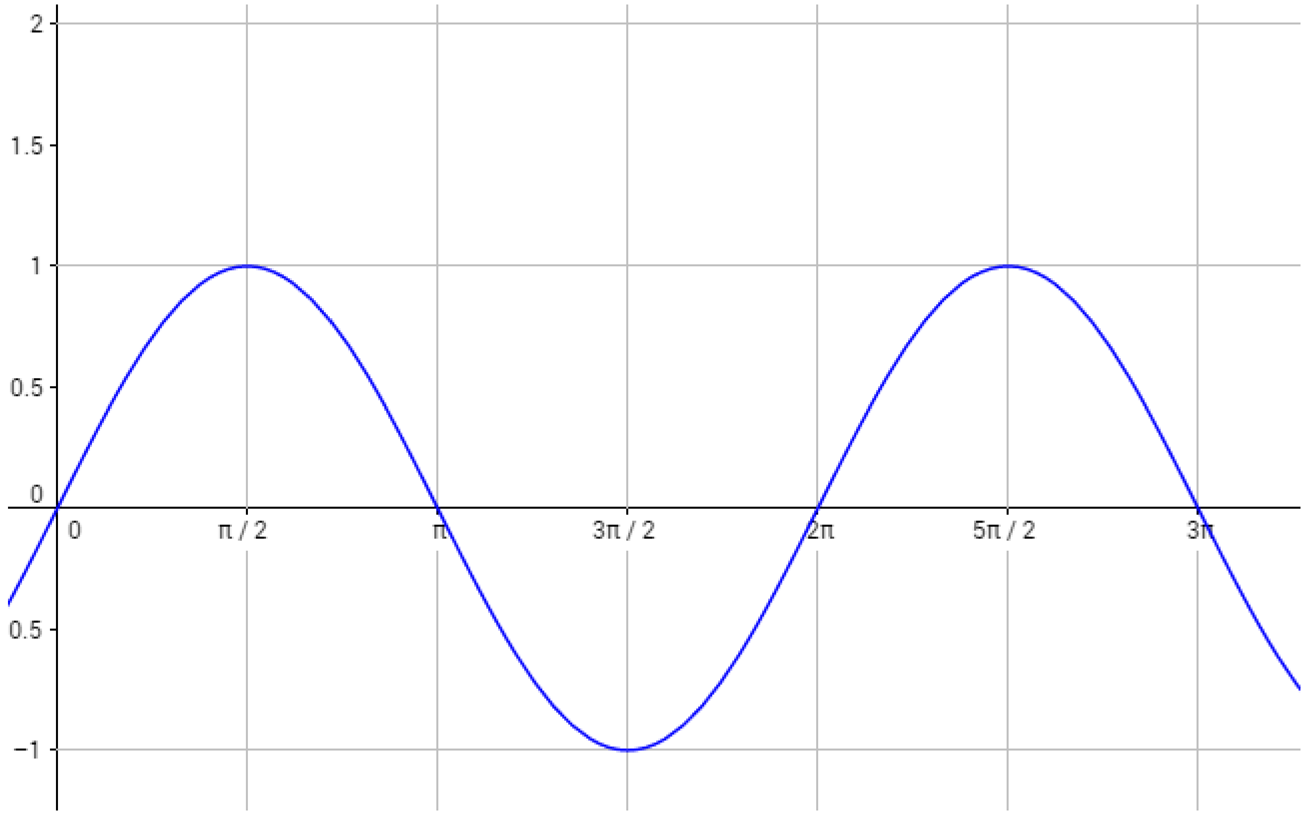
FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Circulo unitario: las funciones trigonométricas se basan en una función cuyo dominio es el conjunto de los números reales y el recorrido es el conjunto de puntos del circulo unitario. El circulo unitario, es un circulo de radio 1 con centro en el origen del sistema de coordenadas y su ecuación es $x^2 + y^2 = 1$



FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

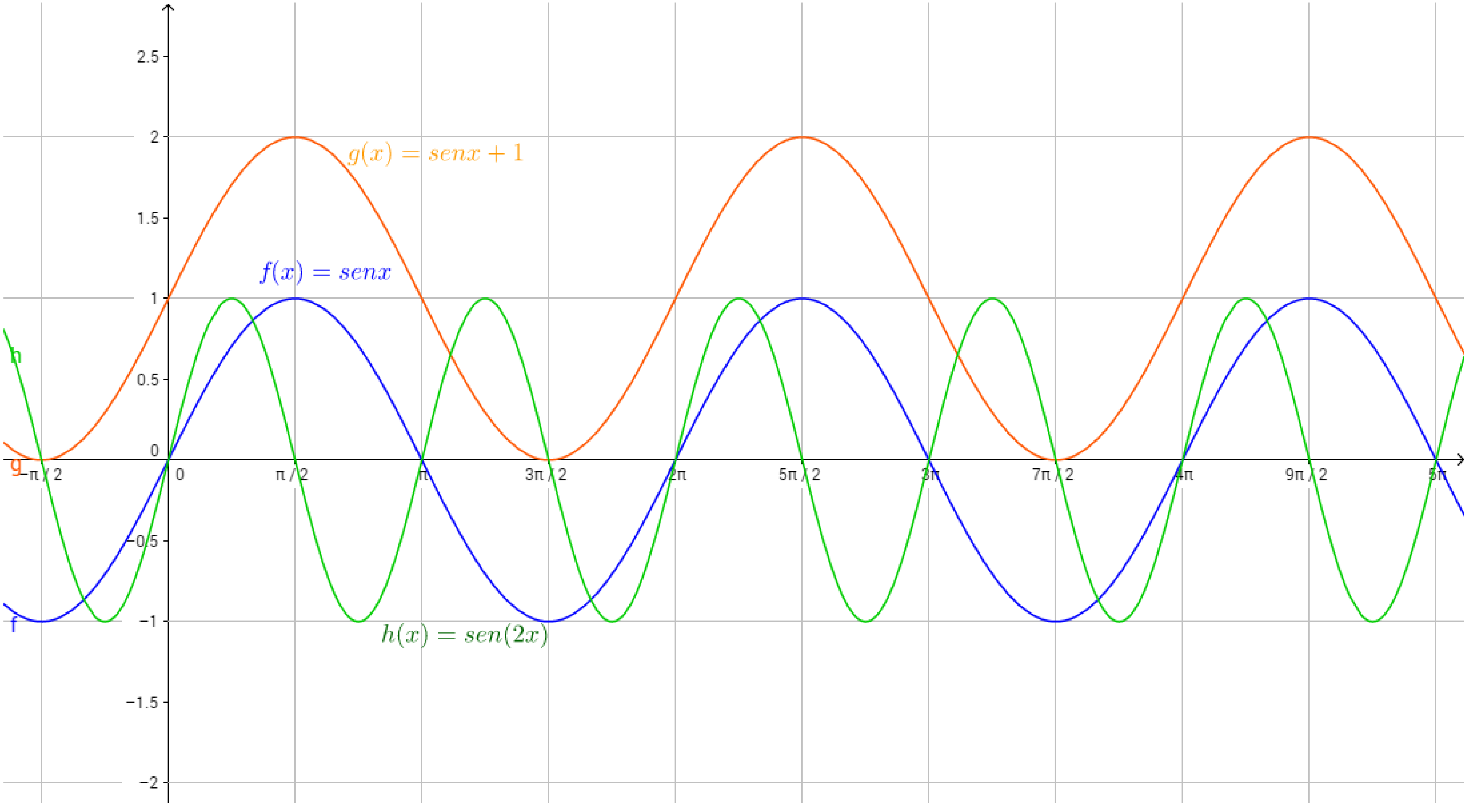
A cada punto de la función trigonométrica le corresponde un angulo y a este angulo su seno, su coseno o su tangente, así podemos conseguir la gráfica de la **función seno**



FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Transformaciones de la función seno

A esta función le podemos aplicar traslaciones verticales y horizontales que son del tipo $f(x) = \sin x + h$ $f(x) = \sin(x+h)$



FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

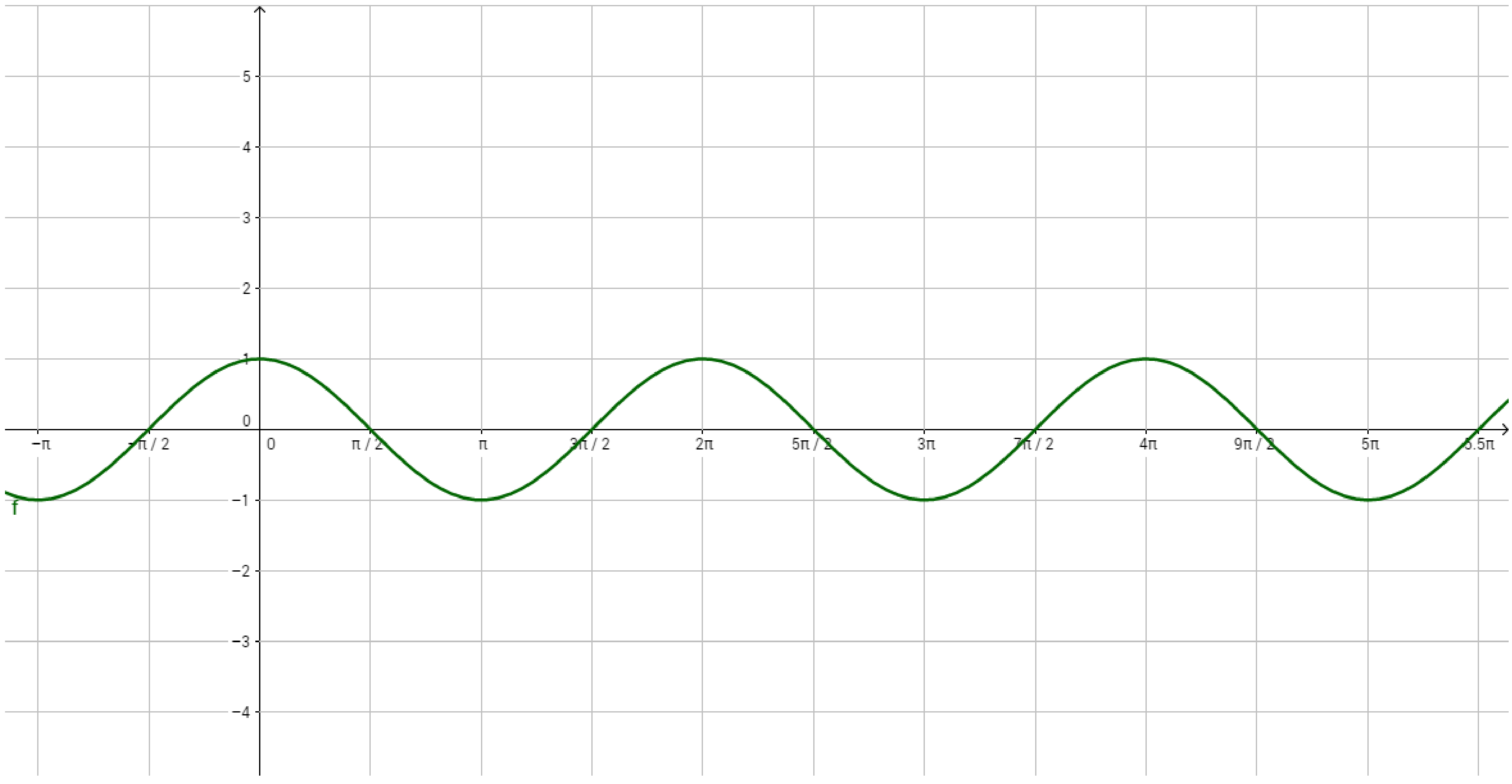
Podemos resumir todo lo que hemos visto hasta ahora en:

$$f(x) = sinx \begin{cases} Dominio\ \mathbb{R} \\ Funcion\ \ continua \\ Recorrido\,[-1,1] \\ Periodo \quad 2\pi \end{cases}$$

Periodo: sea b un numero real positivo el periodo de y =asen(bx) viene dado por $X = \dfrac{2\pi}{b}$

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Podemos repetir todo el proceso anterior para dibujar:
f(x) = cos x



FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

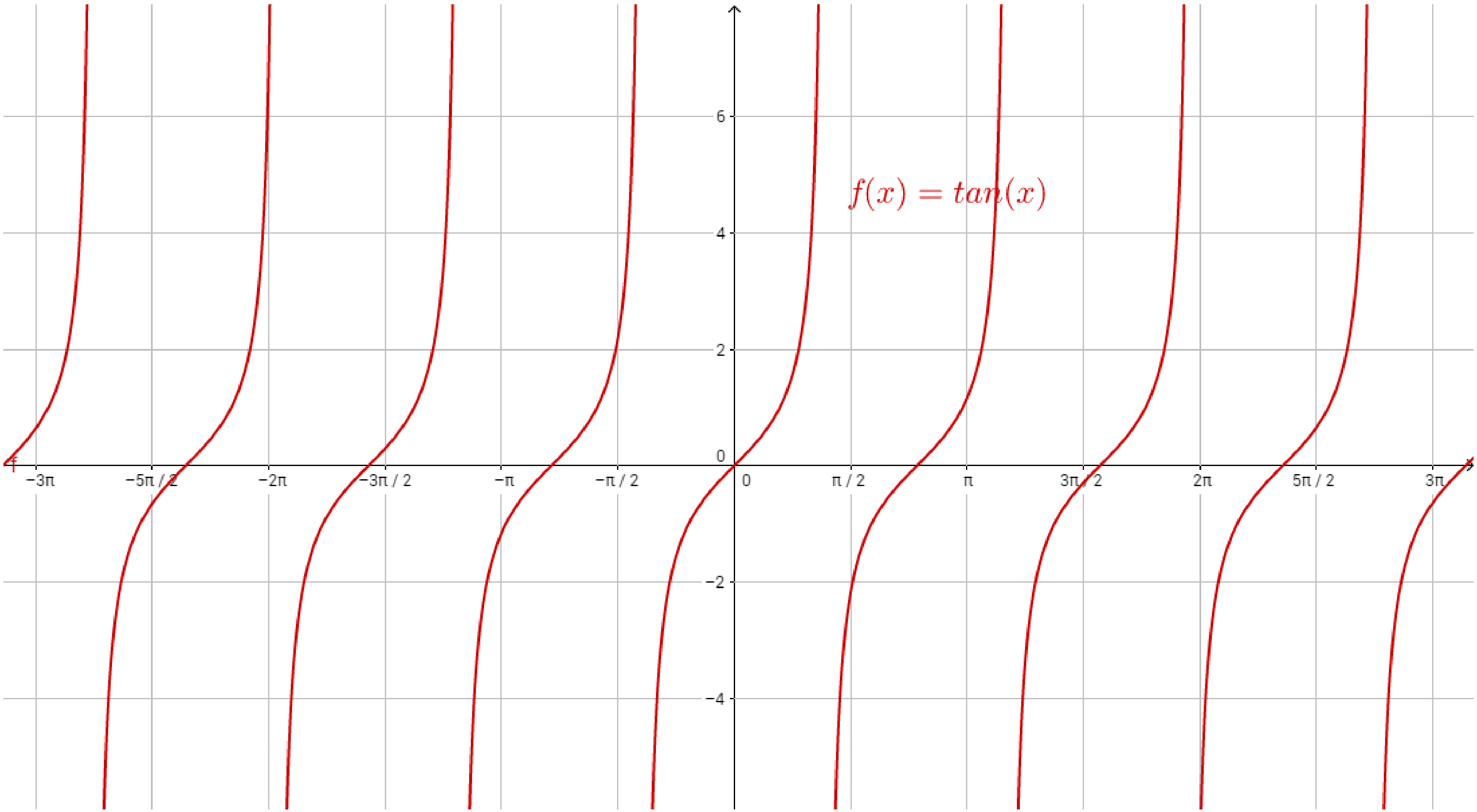
El resumen en este caso sería:

$$f(x) = \cos x \begin{cases} Dominio \ \mathbb{R} \\ Funcion \quad continua \\ Recorrido \, [-1, 1] \\ Periodo \qquad 2\pi \end{cases}$$

No ocurre lo mismo con la función $\tan(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

$$f(x) = \tan x \begin{cases} Dominio \ \mathbb{R} - \left\{ x = \frac{(2k+1)\pi}{2} / k \epsilon \mathbb{Z} \right\} \\ continua \ en \ todo \ su \ dominio \\ Recorrido \, [-\infty, \infty] \\ Periodo \qquad \pi \\ Discontinuidades \ asintoticas \ en \ x = \frac{(2k+1)\pi}{2} \end{cases}$$

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS



FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Identidades trigonométricas:
A partir de la definición de seno y coseno de un angulo cualquiera y el teorema de Pitágoras, es fácil deducir dos identidades trigonométricas:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Con ellas podemos resolver ejercicios como:

Dado un angulo agudo del cual se sabe que $\sin\theta = \frac{1}{2}$ calcular las demás razones trigonométricas.

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Y conocidos los ángulos a y b, también es relativamente sencillo llegar a:
Razones trigonométricas de la suma y diferencia de ángulos:

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

Estas razones nos permiten comprobar identidades como la siguiente:

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

O resolver ecuaciones trigonométricas:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 1$$

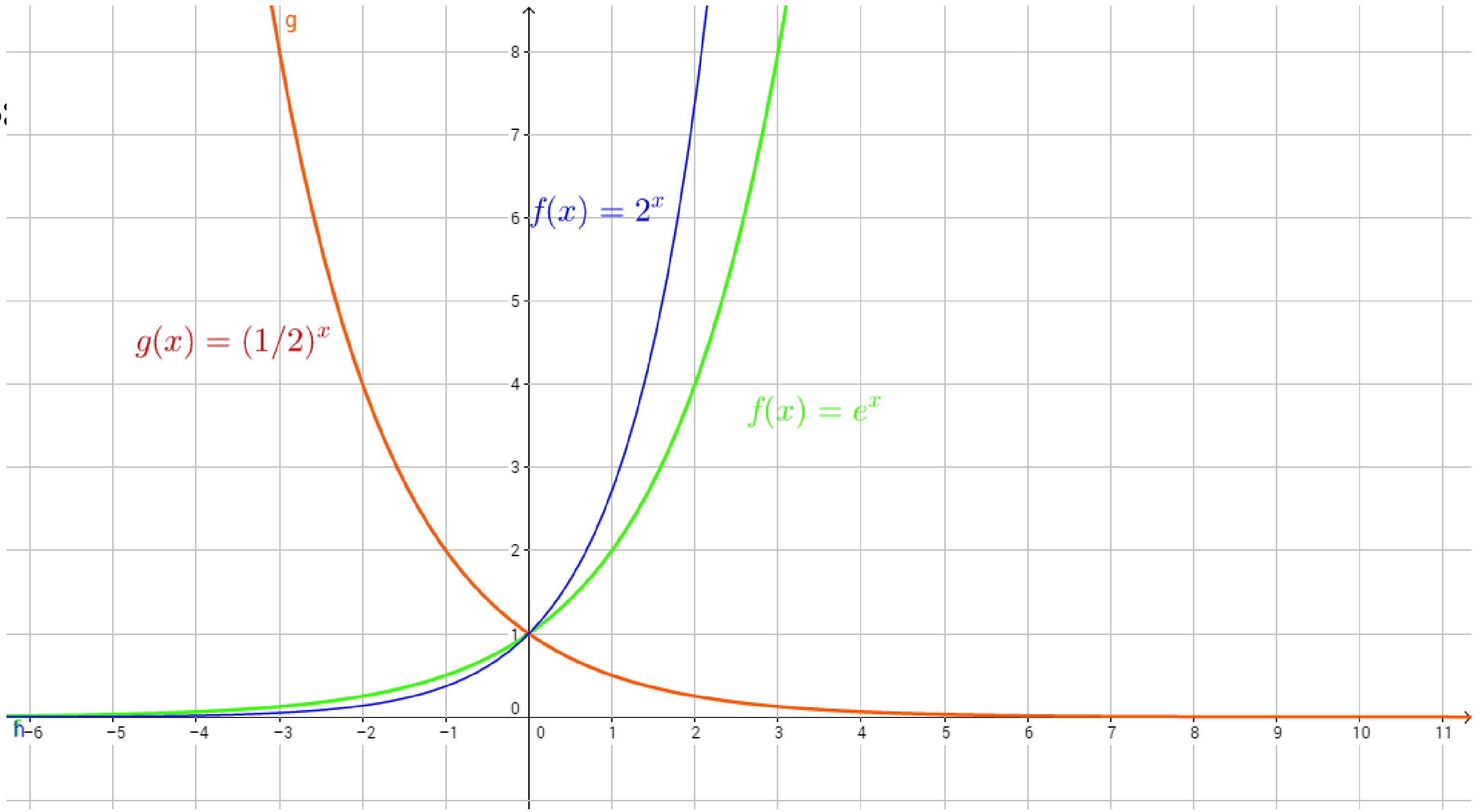
$$\sin x + \cos^2 x = \frac{5}{4}$$

FUNCIÓN EXPONENCIAL

Una función f es exponencial de base a si es de la forma

$f(x) = a^x$ a > 0, a distinto de 1 y x un número real

Propiedades:



FUNCIÓN EXPONENCIAL

Podemos resolver ecuaciones como:

$$27^{x+1} = \frac{1}{9}$$

$$\sqrt[2x-1]{3^{x-3}} = \sqrt{27}$$

FUNCIÓN LOGARÍTMICA

$\log_a x = y$ si y solo si $x = a^y$

La función dada por

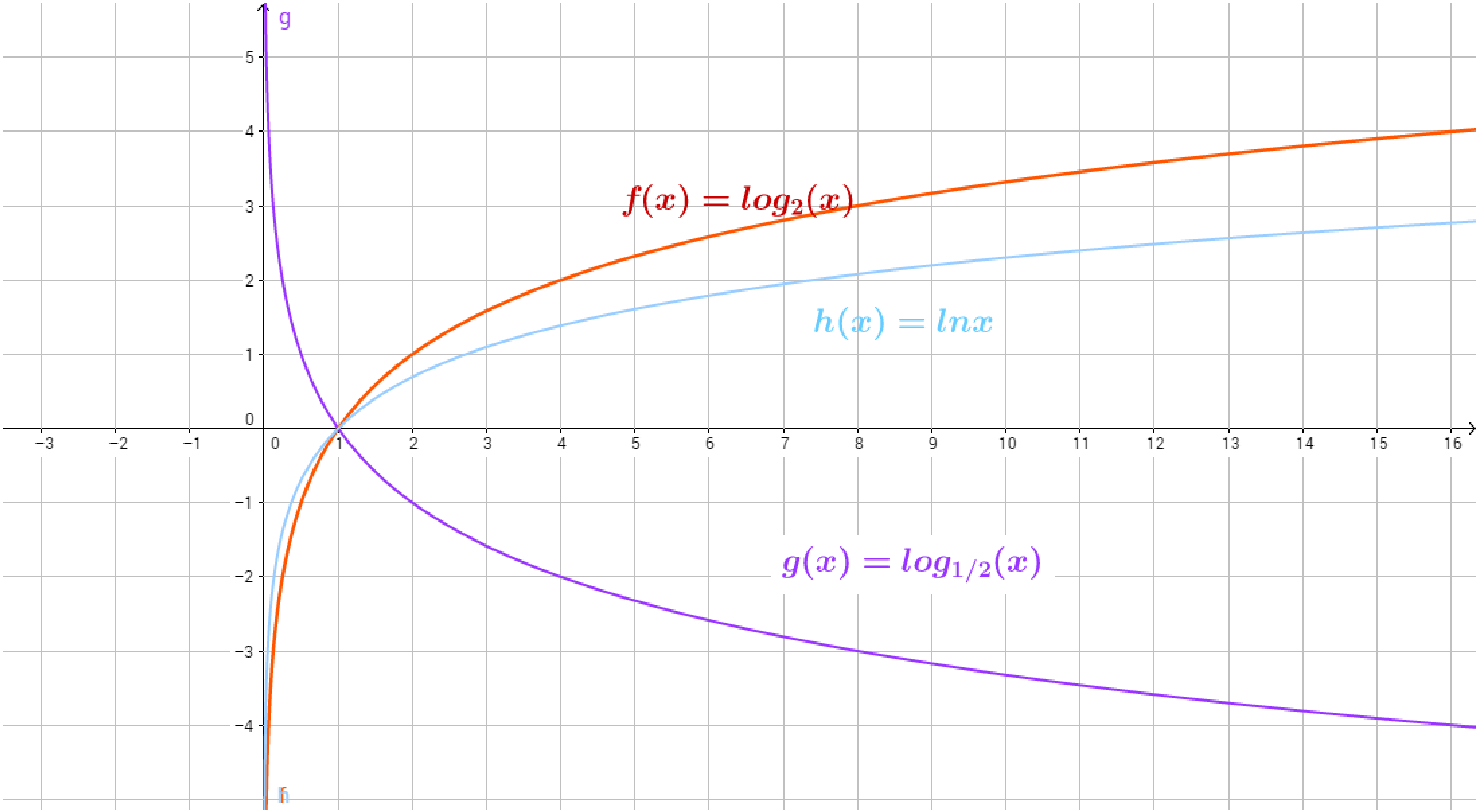
$$f(x) = \log_a x$$

se denomina función logarítmica de base a

$f(x) = \ln x$ su base es el numero e

Propiedades:

FUNCIÓN LOGARÍTMICA



FUNCIÓN LOGARÍTMICA

Resolvamos los siguientes ejercicios de logaritmos:

1. Escribe ln 6 en funcion de ln2 y ln3

2.Desarrolla la expresión logarítmica

$$\ln \frac{\sqrt{3x - 5}}{7}$$

FUNCIÓN LOGARÍTMICA

Ecuaciones logarítmicas y exponenciales