E.T.S. INGENIEROS INDUSTRIALES. PLAN 2001. U.N.E.D
CÁLCULO INFINITESIMAL II. 1^{o}CURSO. CÓDIGO: 521088
1^{a}SEMANA. CONVOCATORIA DE JUNIO 2006.

1. Dados la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+2y}{x-2y} & \text{si } x \neq 2y \\ 1 & \text{si } x = 2y \end{cases}$$

y el conjunto $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ (x-4)^2 + y^2 \leq 1\}$

(a) Estúdiese la continuidad de f en $\mathbb{R}^2$.

(b) Estúdiese si M es compacto.

(c) Estúdiese si $f(M)$ es compacto.

Solución:

(a) $f(x,y)$ es una función continua para $x \neq 2y$ por ser cociente de funciones continuas y no anularse el denominador. Si $x = 2y$, comprobaremos que no lo es. En efecto, en estos puntos, que llamamos $(2a,a)$, podemos aproximarnos por $x = 2a + h$, $y = a$ para $h \to 0$:

$$\lim_{\substack{x=2a+h \\ h\to 0}} \frac{2a+h+2a}{2a+h-2a} = \lim_{h\to 0} \frac{4a+h}{h}$$

que no existe si $y \neq 0$. Por eso, f no es continua en la recta $x = 2y$, $y \neq 0$. Observamos que hemos demostrado que no existe este límite acercándonos al punto (x,y) de la recta mediante $x = 2y + h$. Si este límite hubiera existido, no hubiéramos demostrado la existencia de límite, sólo hubiéramos demostrado que por ese "camino" el límite existe. Hubiéramos tenido que encontrar otra forma de demostrar la continuidad o la no continuidad.

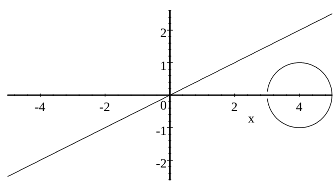
Si $(x,y) = (0,0)$ hacemos un cambio a coordenadas polares $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\operatorname{sen}\theta$ y consideramos los puntos que no están en $x = 2y$. Tenemos

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\rho\cos\theta + 2\rho\operatorname{sen}\theta}{\rho\cos\theta - 2\rho\operatorname{sen}\theta} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\cos\theta + 2\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta - 2\operatorname{sen}\theta}$$

que depende del ángulo θ. Por tanto, tampoco es continua en $(0,0)$. La no continuidad en $(0,0)$ también se puede demostrar calculando el límite acercándomos por $y = mx$, para $x \to 0$. Pero este cálculo sólo es válido en $(0,0)$, ya que cualquier otro punto de la recta no se puede poner como (x, mx) para $m \neq 2$.

(b) M sí es compacto, ya que es una bola cerrada de centro $(4,0)$ y radio 1.

(c) $f(M)$ es compacto, porque en M, la función no es discontinua, y el conjunto imagen una función continua cualquiera sobre un compacto es conjunto compacto. Este hecho se observa al representar gráficamente M y la recta $x = 2y$:



Para demostrarlo, buscamos los puntos (x, y) que verifican $x = 2y$ (es decir, que están en la recta $y = \frac{1}{2}x$) y $(x-4)^2 + y^2 \leq 1$. Sustituimos la primera ecuación en la desigualdad y queda

$$(2y-4)^2 + y^2 \leq 1 \Leftrightarrow 4y^2 + 16 - 16y + y^2 \leq 1 \Leftrightarrow 5y^2 + 16 - 16y \leq 1 \Leftrightarrow 5y^2 - 16y + 15 \leq 0$$

Pero

$$5y^2 - 16y + 15 = 0$$

no tiene raíces reales, ya que las raíces son $y = \frac{8}{5} + \frac{1}{5}i\sqrt{11}, y = \frac{8}{5} - \frac{1}{5}i\sqrt{11}$. Entonces, o la desigualdad se verifica para todos los puntos de la recta $y = \frac{1}{2}x$ o para ninguno. Como en $(4, 0) \in M$ se tiene

$$5 \cdot 0^2 - 16 \cdot 0 + 15 = 15 > 0$$

entonces, no se verifica en ningún punto de M. Por tanto, f es continua en M y M es compacto, y así $f(M)$ es compacto.

2. (4 PUNTOS) Calcúlese la distancia del origen $(0, 0)$ a $2x + y = 1$.

Solución: La distancia de $(0, 0)$ a un punto (x, y) es

$$d(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Se trata de determinar los mínimos de $d(x, y)$ sujetos a la condición $2x + y - 1 = 0$. Pero podemos trabajar con

$$F(x, y) = x^2 + y^2$$

porque los máximos y mínimos de ambas funciones conciden. Como F es una función de clase mayor que uno y $2x + y = 1$ define una variedad, podemos aplicar el Teorema de los Multiplicadores de Lagrange y buscar los puntos críticos (que serán los extremos relativos) de

$$\phi(x, y) = x^2 + y^2 + \lambda(2x + y - 1)$$

Determinamos las derivadas parciales y las igualamos a 0

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial x} &= 2x + 2\lambda = 2(x + \lambda) = 0 \Rightarrow x = -\lambda \\ \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial y} &= 2y + \lambda = 0 \Rightarrow y = -\frac{\lambda}{2} \\ \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial \lambda} &= 2x + y - 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= -\lambda \\ y &= -\frac{\lambda}{2} \\ 2x + y - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Es un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, y sus soluciones son $x = \frac{2}{5}$, $y = \frac{1}{5}$, $\lambda = -\frac{2}{5}$. Luego existe un único punto crítico, que es $P = \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)$. Para ver si es máximo o mínimo, estudiamos la función auxiliar ϕ para el valor de λ obtenido:

$$\phi(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{2}{3}(2x + y - 1)$$

La matriz Hessiana de esta matriz es la formada por sus derivadas segundas

$$\left.\begin{pmatrix} D_{11}\phi & D_{12}\phi \\ D_{21}\phi & D_{22}\phi \end{pmatrix}\right|_P = \left.\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right|_P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Entonces el determinante de esta matriz es mayor que 0 y, como $a_{11} > 0$, se trata de un mínimo de ϕ. Por la tercera condición suficiente, al ser mínimo relativo de ϕ, también lo va a ser de F. Por eso, la mínima distancia de $(0,0)$ a $2x + y = 1$ es la distancia a este punto, que es

$$d\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right) = \sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{25} + \frac{1}{25}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Este ejercicio se podía haber resueltpo de otras formas. Una de ellas es teniendo en cuenta que la distancia de $(0,0)$ a un punto de $2x + y = 1$, que llamamos (a, b) es $d(a,b) = \sqrt{a^2 + b^2}$. Como en $2x + y = 1$ se cumple $b = 1 - 2a$, sustituyendo esta relación en $d(a,b)$, se tiene

$$d = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + (1-2a)^2} = \sqrt{5a^2 - 4a + 1}$$

Buscar los mínimos de esta función es lo mismo que buscar los mínimos de $D(a) = 5a^2 - 4a + 1$, que es una función de una variable.

3. (2 PUNTOS) Respóndase a las siguientes cuestiones cortas:

   (a) Calcúlese el coseno del ángulo que forman los vectores $(1,2,1)$ y $(1,0,1)$.

   (b) Justifíquese si es cierto que una función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ diferenciable en $\mathbb{R}^3$ tiene derivadas parciales.

   Solución:

   (a) El coseno del ángulo α que forman dos vectores no nulos, u y v verifica

   $$\cos\alpha = \frac{u \cdot v}{\|u\| \, \|v\|}$$

   En este caso es

   $$\cos\alpha = \frac{(1,2,1)\cdot(1,0,1)}{\|(1,2,1)\| \, \|(1,0,1)\|} = \frac{1\cdot 1 + 2\cdot 0 + 1\cdot 1}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}\sqrt{1^2+0^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

   (b) Si una función es diferenciable y la diferencial es $Df(a)$, entonces para todo vector $v \neq 0$ existe $D_v f(a)$ y se verifica $D_v f(a) = Df(a)(v)$. En particular, esto sucede para los vectores $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(0,0,01)$, por lo que existen las derivadas parciales.

E.T.S. INGENIEROS INDUSTRIALES. PLAN 2001. U.N.E.D
CÁLCULO INFINITESIMAL II. 1^{o}CURSO. CÓDIGO: 521088
2^{a}SEMANA. CONVOCATORIA DE JUNIO 2006.

1. (4 PUNTOS) Sea la función

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{|x|y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

(a) Estúdiese su continuidad en $\mathbb{R}^2$.

(b) Estúdiese la existencia de derivadas parciales y determínense, en caso de que existan, en $\mathbb{R}^2$.

(c) Estúdiese su diferenciabilidad en $\mathbb{R}^2$.

Solución:

(a) Como $f(x,y)$ se puede escribir como

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\, x\geq 0 \\ -\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\, x<0 \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

entonces es continua en $\mathbb{R}^2$ excepto en los puntos de la forma $(0,a)$. Esto se debe a la expresión de la función valor absoluto de x. Pero como $|x|$ es una función continua, entonces en $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$, f es una función continua al ser suma, producto, cociente y composición de funciones continuas definidas en este conjunto, donde no se anula el denominador. El problema ahora puede estar en $(0,0)$. Para estudiar la continuidad en este punto, hacemos un cambio a coordenadas polares

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\rho\to 0}\frac{|\rho\cos\theta|\rho\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\operatorname{sen}^2\theta}} \\ &= \lim_{\rho\to 0}\frac{|\rho\cos\theta|\rho\operatorname{sen}\theta}{\rho} = \lim_{\rho\to 0}|\rho||\cos\theta|\operatorname{sen}\theta = 0\end{aligned}$$

ya que $\operatorname{sen}\theta$ y $|\cos\theta|$ están acotados entre -1 y 1. Luego f es una función continua en $\mathbb{R}^2$.

(b) En $\mathbb{R}^2-\{(0,a)\}$ existen las derivadas parciales (y son continuas), ya que la suma, producto, cociente y composición de funciones con derivadas parciales (sin que se anule el denominador) nos da una función con derivadas parciales. Pero, por la expresión de $f(x,y)$, entonces en $\mathbb{R}^2-\{(0,a)\}$ las derivadas parciales son

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y\sqrt{x^2+y^2}-\frac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-\dfrac{x^2y}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} = \dfrac{y^3}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} & \text{si } x>0 \\ \dfrac{-y\sqrt{x^2+y^2}+\frac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = -\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{x^2y}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} = -\dfrac{y^3}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} & \text{si } x<0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{|x|\,y^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$$

Si $x=0$, (es defir, en $(0,a)$) tenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0,a) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(h,a)-f(0,a)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{|h|\cdot a}{\sqrt{h^2+a^2}}-0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{|h|\cdot a}{h\sqrt{h^2+a^2}} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,a) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(0,a+h)-f(0,a)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0\end{aligned}$$

El primer límite no existe si $a \neq 0$, porque $\lim_{h\to 0} \dfrac{|h|}{h} = \pm 1$ según sea el signo de h.
Para determinar si en $(0,0)$ existen las derivadas parciales, aplicamos de nuevo la definición:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{|h|\cdot 0}{\sqrt{h^2+0^2}}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h^2} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{|0|\cdot h}{\sqrt{0^2+h^2}}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h^2} = 0 \end{aligned}$$

Luego existen derivadas parciales en $\mathbb{R}^2 - \{(0,a) \quad a \neq 0\}$.

(c) Como en $\mathbb{R}^2 - \{(0,a)\}$ existen las derivadas parciales y son continuas, la función es diferenciable en este conjunto. Si $x = 0$, $y \neq 0$, no existe la derivada según x, y como es una condición necesaria de diferenciabilidad, f no va a ser diferenciable en este conjunto.
Para estudiar la diferenciabilidad en $(0,0)$, estudiemos primero si las derivadas parciales son continuas

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{|x|\,y^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} \right) \\ &= \lim_{\pi\to 0} \left(\frac{|\rho\cos\theta|}{\sqrt{\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\operatorname{sen}^2\theta}} - \frac{|\rho\cos\theta|\rho^2\operatorname{sen}^2\theta}{\sqrt{(\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\operatorname{sen}^2\theta)^3}} \right) \\ &= \lim_{\pi\to 0} \left(\frac{|\rho\cos\theta|}{\rho} - \frac{|\rho\cos\theta|\rho^2\operatorname{sen}^2\theta}{\rho^3} \right) = \lim_{\pi\to 0} \left(\frac{|\rho\cos\theta|}{\rho} - \frac{|\rho\cos\theta|\operatorname{sen}^2\theta}{\rho} \right) \end{aligned}$$

Este límite depende de la dirección en que nos aproximemos, por lo que la derivada según y no es continua y, no podemos saber si la función es diferenciable. Tenemos que utilizar la definición y ver si el siguiente límite es 0:

$$\begin{aligned} l &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\left| f(h,k) - f(0,0) - \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\left| \dfrac{|h|k}{\sqrt{h^2+k^2}} \right|}{\sqrt{h^2+k^2}} \\ &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|h|k}{h^2+k^2} = \lim_{\rho\to 0} \frac{|\rho\cos\theta|\rho\operatorname{sen}\theta}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0} \frac{|\rho||\cos\theta|\operatorname{sen}\theta}{\rho} \end{aligned}$$

que no es 0. Luego f no es diferenciable en $(0,0)$.

2. (4 PUNTOS) Calcúlense las integrales

(a)

$$\int\int_D \frac{x}{x^2+y^2}\,dxdy$$

con $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; \dfrac{x^2}{2} \leq y \leq x^2, \quad 1 \leq x \leq 2\}$.

(b)

$$\int\int_D \frac{\operatorname{sen} y^2}{xy}\,dxdy$$

con $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; 0 \leq x \leq y^2, \quad 0 \leq y \leq \sqrt{\pi}\}$.

Solución:

(a)

$$\begin{aligned} I &= \int\int_D \frac{x}{x^2+y^2}dxdy = \int_1^2 \int_{x^2/2}^{x^2} \frac{x}{x^2+y^2}dydx = \int_1^2 \arctan\frac{y}{x}\Big|_{x^2/2}^{x^2} dx = \int_1^2 \left(\arctan\frac{x^2}{x} - \arctan\frac{x^2}{2x}\right) dx \\ &= \int_1^2 \left(\arctan x - \arctan\frac{x}{2}\right) dx \end{aligned}$$

Calculamos la integral de $\arctan x$ por partes, tomando $u = \arctan x \quad du = \frac{1}{1+x^2} \quad dv = 1 \quad v = x$

$$\int \arctan x dx = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$$

Entonces, queda

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 \left(\arctan x - \arctan\frac{x}{2}\right) dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) - x\arctan\frac{x}{2} + \ln\left(1+\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)\Bigg|_1^2 \\ &= 2\arctan 2 - \frac{1}{2}\ln\left(1+2^2\right) - 2\arctan\frac{2}{2} + \ln\left(1+\left(\frac{2}{2}\right)^2\right) - \\ &\quad \left(1\arctan 1 - \frac{1}{2}\ln\left(1+1^2\right) - 1\arctan\frac{1}{2} + \ln\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)\right) \\ &= 2\arctan 2 - \frac{1}{2}\ln(5) - 2\arctan 1 + \ln(2) - \arctan 1 + \frac{1}{2}\ln(2) + \arctan\frac{1}{2} - \ln\left(\frac{5}{4}\right) \\ &= 2\arctan 2 - \frac{1}{2}\ln(5) - 3\arctan 1 + \frac{3}{2}\ln(2) + \arctan\frac{1}{2} - \ln 5 + \ln 4 \\ &= 2\arctan 2 - \frac{1}{2}\ln(5) - \frac{3}{4}\pi + \frac{3}{2}\ln(2) + \arctan\frac{1}{2} - \ln 5 + 2\ln 2 \\ &= 2\arctan 2 - \frac{3}{2}\ln 5 + \frac{7}{2}\ln 2 - 3\frac{\pi}{4} + \arctan\frac{1}{2} = \arctan 2 - \frac{3}{2}\ln 5 - \frac{1}{4}\pi + \frac{7}{2}\ln 2 \end{aligned}$$

ya que $\arctan x + \operatorname{arccotan} x = \frac{\pi}{2}$.

(b)

$$\int\int_D \frac{\operatorname{sen} y^2}{xy}dxdy = \int_0^{\sqrt{\pi}} \int_0^{y^2} \frac{\operatorname{sen} y^2}{xy}dxdy = \int_0^{\sqrt{\pi}} \ln(x)\frac{\operatorname{sen} y^2}{y}\Bigg|_0^{y^2} dy$$

que no existe.

3. (2 PUNTOS) Respóndase a las siguientes cuestiones cortas:

(a) Sea $x \in \mathbb{R}^n$. ¿Qué debe cumplir x para ser un punto interior de $M \subset \mathbb{R}^n$?

(b) Determínese la matriz jacobiana de $f(x,y) = \left(ye^x, x - y^2, xy^2\right)$.

Solución:

(a) Un punto $x \in M$ es interior si existe una bola centrada en él, de radio r, $B(x,r)$, tal que un entorno $B(x,r) \subset M$.

(b) La matriz jacobiana es

$$\begin{pmatrix} D_1 f_1(x,y,z) & D_2 f_1(x,y,z) \\ D_1 f_2(x,y,z) & D_2 f_2(x,y,z) \\ D_1 f_3(x,y,z) & D_2 f_3(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ye^x & e^x \\ 1 & -2y \\ y^2 & 2xy \end{pmatrix}$$