E.T.S. INGENIEROS INDUSTRIALES. PLAN 2001. U.N.E.D
CÁLCULO INFINITESIMAL II. 1^{o}CURSO. CÓDIGO: 521088
CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE 2007.

1. (4 PUNTOS) Dada la función

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

(a) Estudiar su continuidad y la existencia de derivadas parciales.

(b) Estudiar la diferenciabilidad de la función.

Solución:

(a) $f(x,y)$ es continua $\forall (x,y)\neq(0,0)$ al ser cociente de funciones polinómicas y no anularse el denominador. Estudiemos en $(0,0)$

$$\begin{aligned} f(0,0) &= 0\\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to 0} f(\rho,\theta) = \lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^3\cos^3\theta+\rho^3\operatorname{sen}^3\theta}{\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\operatorname{sen}^2\theta}\\ \lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^3}{\rho^2} &= 0 = f(0,0)\end{aligned}$$

límite que hemos resuelto haciendo un cambio a coordenadas polares. Luego f también es continua en $(0,0)$.

Las derivadas parciales existen $\forall (x,y)\neq(0,0)$ y son

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{x^4+3x^2y^2-2xy^3}{(x^2+y^2)^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{y^4+3x^2y^2-2x^3y}{(x^2+y^2)^2}$$

Estudiemos qué pasa en $(0,0)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{(\Delta x)^3}{(\Delta x)^2}-0}{\Delta x}=1\\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{(\Delta y)^3}{(\Delta y)^2}-0}{\Delta y}=1\end{aligned}$$

Estos son los valores de las derivadas parciales en $(0,0)$, que existen.

(b) Para estudiar la diferenciabilidad en $(0,0)$, estudiamos si es 0 el siguiente límite

$$\begin{aligned} l &= \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,\Delta x-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\\ &= \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{\frac{(\Delta x)^3+(\Delta y)^3}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}-0-\Delta x-\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\end{aligned}$$

Pasando a coordenadas polares, tenemos

$$\begin{aligned} l &= \lim_{\rho\to 0}\frac{\frac{\rho^3\cos^3\theta+\rho^3\operatorname{sen}^3\theta}{\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\operatorname{sen}^2\theta}-\rho\cos\theta-\rho\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\operatorname{sen}^2\theta}}\\ &= \lim_{\rho\to 0}\frac{\frac{\rho^3}{\rho^2}-\rho\cos\theta-\rho\operatorname{sen}\theta}{\rho} = \lim_{\rho\to 0} 1-\cos\theta-\operatorname{sen}\theta\neq 0\end{aligned}$$

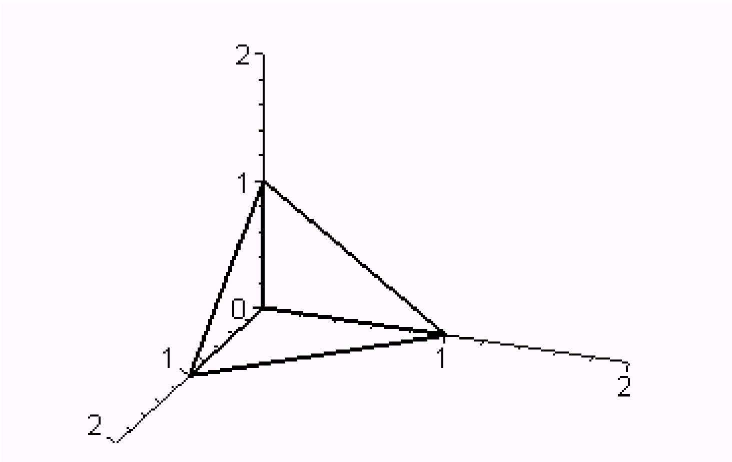
Sin embargo, en $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ f es diferenciable, porque las derivadas parciales existen y son continuas, al ser cociente de funciones continuas y no anularse el denominador.

2. (4 PUNTOS) Calcular

$$\int\int\int_M xyzdxdydz$$

en el recinto M limitado por el plano $x+y+z=1$ y el triedro positivo.

Solución: El plano corta a los ejes en $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$. Luego la integral es



$$\begin{aligned}
V &= \int\int\int_M xyzdxdydz = \int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y} xyzdzdydx = \int_0^1\int_0^{1-x} xy\frac{1}{2}(1-x-y)^2\,dydx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 x\int_0^{1-x}\left[y(1-x)^2+y^3-2(1-x)y^2dy\right]dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x\left[\frac{(1-x)^4}{2}+\frac{(1-x)^4}{4}-2\frac{(1-x)^4}{3}\right]dx \\
&= \frac{1}{24}\int_0^1 x(1-x)^4\,dx = \frac{1}{720}
\end{aligned}$$

3. (2 PUNTOS) Responder a las siguientes cuestiones cortas:

   (a) Calcular $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x\operatorname{sen} y}{y\operatorname{sen} x}$

   (b) Calcular la diferencial de $f(x,y) = \operatorname{tg} x \cdot e^y$

   Solución:

   (a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x\operatorname{sen} y}{y\operatorname{sen} x} = 1$

   (b) $Df(x,y) = \dfrac{1}{\cos^2 x}e^y dx + e^y \operatorname{tg} x dy$