ECUACIONES DIFERENCIALES

2ª EDICIÓN

Ignacio Acero
Mariló López

TEORÍA Y PROBLEMAS

Tébar

ECUACIONES DIFERENCIALES

TEORÍA Y PROBLEMAS

Mariló López • Ignacio Acero

2ª edición revisada

Editorial Tébar, S.L.
Calle de las Aguas, 4 28005 Madrid Tel.: 91 550 02 60 Fax: 91 550 02 61
pedidos@editorialtebar.com www.editorialtebar.com

PRÓLOGO

El presente libro está dirigido, fundamentalmente, a los alumnos de los primeros cursos de las escuelas de ingeniería y facultades de ciencias. Pretendemos que el estudiante se familiarice con la teoría básica y la resolución de problemas relacionados con las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y los Sistemas de Ecuaciones Diferenciales. Para ello, en la obra se presenta un resumen exhaustivo de los principales aspectos teóricos y una amplia selección de problemas resueltos de muy variados tipos. Éstos han sido elegidos, en su mayoría, entre exámenes propuestos en centros de los tipos anteriormente mencionados.

El criterio que hemos seguido a la hora de redactar los distintos capítulos que componen el libro ha sido la claridad, sin menoscabo del rigor que lleva consigo la exposición matemática. Queremos destacar también que la selección de problemas resueltos se ha realizado de forma que garantice la comprensión total de la materia por parte de aquellos alumnos que se enfrenten por primera vez a estos temas.

Todos los capítulos siguen un esquema definido. Empiezan con una exposición teórica, en la que se describen de un modo claro, sencillo y exhaustivo los principales conceptos relacionados con el capítulo; para una mejor comprensión de la teoría, se incluyen numerosos ejemplos, notas y observaciones. Continúan con una selección de problemas resueltos, de diversos grados de dificultad, y que aplican los conceptos teóricos expuestos en la primera parte. Por último, cada capítulo concluye con una serie de problemas propuestos, de dificultad similar a los resueltos, con la intención de que el alumno pueda comprobar si ha asimilado adecuadamente los distintos conceptos expuestos en cada capítulo.

Por otra parte, creemos que la unión, como autores del libro, de un Ingeniero Industrial ICAI y una Doctora en Matemáticas supone una buena combinación para asegurar un óptimo equilibrio entre la teoría matemática de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y los Sistemas de Ecuaciones Diferenciales con la aplicación práctica de los mismos, apareciendo de esta manera en el libro un enfoque multidisciplinar que creemos hace más atractiva la presentación de estos conceptos matemáticos.

Queremos expresar nuestro agradecimiento a todos los compañeros que nos han brindado su apoyo y nos han hecho llegar sugerencias para que esta obra pudiera llegar a buen fin. Muy especialmente, queremos dar las gracias al profesor Javier Rodrigo Hitos por sus sugerencias y por su colaboración en la selección y resolución de problemas.

Los autores

ÍNDICE

Capítulo 1

CONCEPTOS BÁSICOS

Las ecuaciones diferenciales son una parcela muy importante de las matemáticas debido a que son los modelos apropiados para muchos experimentos de la vida y fenómenos de la naturaleza.

Como veremos a partir de diversos ejemplos que se mostrarán a lo largo del libro, las ecuaciones diferenciales poseen infinidad de aplicaciones. Como es conocido por todos, si tenemos una función "$y = f(x)$", su derivada representa la variación o ritmo de cambio de la variable dependiente "y" respecto de la independiente "x". De esta manera, puede intuirse que en muchos fenómenos de la naturaleza se ven relacionadas las diversas variables involucradas en el proceso con sus ritmos de variación, lo cual nos lleva a relacionar las funciones con sus derivadas.

Por tanto, el objetivo primordial de las ecuaciones diferenciales es permitir el estudio de los cambios en multitud de aspectos de la ciencia y de la técnica.

1. PRIMERAS DEFINICIONES

1.1. Definición. Ecuación diferencial

Llamamos *ecuación diferencial* a cualquier ecuación en la que aparecen relacionadas:

- Una o varias variables independientes.
- Una variable dependiente de ella o ellas.
- Las derivadas de esta última con respecto a una o más variables independientes.

Observación

Muchas leyes físicas de la naturaleza, así como problemas geométricos, mecánicos, etc; se rigen por ecuaciones diferenciales. Cojamos como ejemplo la segunda ley de Newton.

Consideremos la recta real $\mathbb{R}$ y tomemos la función $S(t)$ que representará la posición de un cuerpo en el instante t en ella.

La velocidad instantánea del cuerpo viene dada por la razón de cambio de la posición, es decir:

$$v(t) = \lim_{t \to t_0} \frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0} = \frac{dS}{dt}$$

Análogamente, la aceleración instantánea mide la variación en la velocidad del móvil:

$$a(t) = \frac{dv}{dt}$$

La ley de Newton establece, para este ejemplo, $F = ma$, con lo que expresándolo en función de la posición:

$$m \frac{d^2 S}{dt^2} = F$$

aparece una ecuación diferencial que resolviéndola nos permitirá conocer la posición del cuerpo en cada momento. Para poder determinar la función posición es preciso conocer dos datos, que pueden ser la posición y la velocidad inicial del móvil: $s(t_0) = s_0$ y $v(t_0) = s'(t_0) = v_0$, con lo que estamos resolviendo un problema de valor inicial (ver punto 1.8), o bien la posición en dos instantes de tiempo: $s(t_0) = s_0$, $s(t_1) = s_1$, con lo que estamos resolviendo un problema con condiciones de contorno (ver punto 1.8).

1.2. Definición. Tipos de ecuaciones

a) *Ecuación diferencial ordinaria:* aparece cuando la función incógnita sólo depende de una variable independiente. Puede representarse de dos maneras:

i) $F(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots y^{(n}(x)) = 0$. Ecuación en *forma implícita*: no aparece despejada la derivada de mayor orden $y^{(n}(x)$.

Ejemplos $x^2 y'' - 3xy = 0, \qquad y''' + 4x^2 y' + 5y \cos x = 0$

ii) $y^{(n} = f(x, y(x), y'(x), \ldots y^{(n-1}(x))$. Ecuación en *forma normal*: aparece despejada la derivada de mayor orden $y^{(n}(x)$.

Ejemplos $y'' = 4xy + \text{sen}\, x$, $\quad y''' = -6xy'' - \cos x$

b) Llamaremos ecuación diferencial ***en derivadas parciales*** a aquella donde la función incógnita depende de varias variables independientes. Por tanto, en una ecuación diferencial de este tipo aparecen las derivadas parciales de la función incógnita respecto de las variables independientes.

Ejemplos
Sea $z = f(x, y)$. Dos ecuaciones en derivadas parciales son:

$$1) \quad \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = 0, \qquad 2) \quad \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z$$

Notas
1) Estas ecuaciones también pueden aparecer en forma implícita y forma normal.
2) En todo lo que sigue se tratarán solamente las ecuaciones diferenciales ordinarias.

1.3. Definición. Orden

Se llama *orden* de una ecuación diferencial al orden de la mayor derivada que aparece en la ecuación.

1.4. Definición. Grado

Se llama *grado* de una ecuación diferencial al exponente, si es número natural, al que está elevada la derivada de mayor orden que aparece en ella. Si esta derivada está elevada a un exponente no natural no es posible definir el grado de la ecuación.

Ejemplos
1) $x^2y'' + 2xy' + 2x = 0 \quad \Rightarrow$ Ecuación diferencial ordinaria de segundo orden y primer grado en forma implícita.
2) $y''' = 3y'' - \text{sen}\,(x-1) \quad \Rightarrow$ Ecuación diferencial ordinaria de tercer orden y primer grado en forma normal.
3) $y''^2 = 4x\,(1 - y'^2)^6 \quad \Rightarrow$ Ecuación diferencial ordinaria de segundo orden y segundo grado.
4) $(y''')^3 = \cos x + y\, e^x \quad \Rightarrow$ Ecuación diferencial ordinaria de tercer orden y tercer grado.

1.5. Definición. Ecuación diferencial lineal

Una ecuación diferencial ordinaria ***lineal de orden n*** es una ecuación en la que la derivada n-esima de la variable y es una función lineal de las demás derivadas y de la propia función y, es decir, es de la forma:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)\,y = b(x)$$

Observación

En una ecuación lineal de orden n sólo puede aparecer la primera potencia de la variable y, y de sus diversas derivadas. No pueden aparecer productos de dicha variable con sus derivadas o de las derivadas entre sí, ni funciones trascendentes de y ni de sus derivadas. Si se diera alguna de estas situaciones se perdería la linealidad.

Ejemplos

1) La ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0$$

es lineal porque en la misma sólo aparece la primera potencia de la variable y y de sus dos primeras derivadas. No aparece ninguna de las situaciones que hacen que la ecuación pierda la linealidad.

2) La ecuación diferencial:

$$\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]^3 + 5y\frac{dy}{dx} + 6y^2 = 0$$

no es lineal; porque en la ecuación aparece la tercera potencia de la segunda derivada de la y, un producto de la y por su primera derivada, y la propia variable y elevada al cuadrado.

3) La ecuación diferencial:

$$x \operatorname{tg} y + y' = x + \cos x$$

no es lineal; porque en la ecuación la variable y aparece como argumento de la función tangente.

1.6. Definición. Solución

Llamamos ***solución*** de una ecuación diferencial ordinaria a toda función $y = f(x)$ que satisface dicha ecuación diferencial. El proceso de hallar las soluciones de una ecuación diferencial se denomina ***integrar*** la ecuación.

Ejemplos

1) Dada la ecuación $y'' + y = 0$, la función $y = \text{sen}\, x$ es solución de ella ya que:

$$y' = \cos x, \qquad y'' = -\,\text{sen}\, x$$

Y sustituyendo en la ecuación queda:

$$-\,\text{sen}\, x + \text{sen}\, x = 0$$

De la misma manera comprobamos que $y = \cos x$ también es solución. En general, $y = C_1\, \text{sen}\, x + C_2 \cos x$ son funciones solución para todo $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$; ya que

$$y' = C_1 \cos x - C_2\, \text{sen}\, x, \qquad y'' = -\,C_1\, \text{sen}\, x - C_2 \cos x$$

y sustituyendo en la ecuación:

$$-\,C_1\, \text{sen}\, x - C_2 \cos x + C_1\, \text{sen}\, x + C_2 \cos x = 0.$$

2) Dada la ecuación diferencial $y' - y = 0$, las funciones $y = Ce^x$ son soluciones de ella para todo $C \in \mathbb{R}$, como puede comprobarse fácilmente.

1.7. Definición. Solución general. Solución particular

Llamamos ***solución general*** de una ecuación diferencial al conjunto de todas las funciones que verifican dicha ecuación. En general, son familias n–paramétricas de curvas siendo n el orden de la ecuación. Cuando existe alguna solución que no pertenece a dicha familia, entonces esta función recibe el nombre de ***solución singular***.

Llamamos ***solución particular*** de la ecuación diferencial a cualquier función que la satisfaga. Puede obtenerse fijando el valor de las constantes en la familia de funciones solución de la ecuación.

Ejemplos

1) La solución general de la ecuación $y' - y = 0$ es el conjunto de funciones $y = Ce^x$, que es una familia de funciones dependiente de un solo parámetro.

Una solución particular de dicha ecuación es $y = e^x$.

2) Puede comprobarse que la familia $y = [2/3\,x + C]^{3/2}$ es solución de la ecuación $y' = y^{1/3}$.
La función $y = 0$ es también solución de ella y no pertenece a la familia dada, por lo que constituye una solución singular de la ecuación.

Nota
En la mayoría de los casos, determinar una solución particular de una ecuación diferencial consistirá en resolver un problema de valores iniciales o un problema de contorno; como veremos en el apartado siguiente.

1.8. Definición. Problemas de valor inicial. Problemas de contorno

Una de las aplicaciones prácticas más importantes de las ecuaciones diferenciales aparece en problemas con una ecuación y una o más condiciones (en función del orden de la ecuación) que ha de verificar la solución de la ecuación dada; es decir, queremos determinar una solución particular de dicha ecuación. Si todas las condiciones del problema se refieren a un mismo valor x, se denomina *problema con condiciones o valores iniciales o problema de Cauchy*.

Ejemplo

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

$$y\,(1) = 3, \qquad y'\,(1) = -4$$

Si las condiciones dadas se refieren a valores diferentes de la x, se denomina *problema con condiciones de contorno*.

Ejemplo

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

$$y\,(0) = 1, \qquad y\left[\frac{\pi}{2}\right] = 5$$

1.9. Definición. Curva integral

Como hemos visto en el apartado 1.7, las soluciones de una ecuación diferencial ordinaria son, en general, funciones de la variable independiente, es decir; curvas en el plano. La gráfica de una solución de la ecuación se denomina *curva integral* de ella.

Ejemplos

1) Consideremos la ecuación: $yy' + x = 0$.

   Las soluciones de esta ecuación son: $x^2 + y^2 = K$. Las curvas integrales se representan en la figura 1.

2) Consideremos ahora la ecuación $y' = -y/x$.

   Las soluciones de ella son: $xy = K$. Sus curvas integrales aparecen en la figura 2.

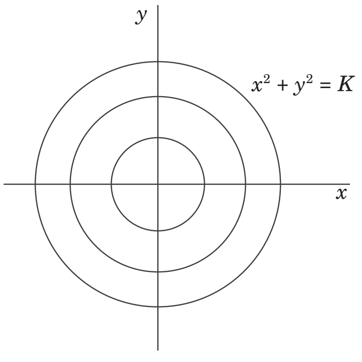


Figura 1

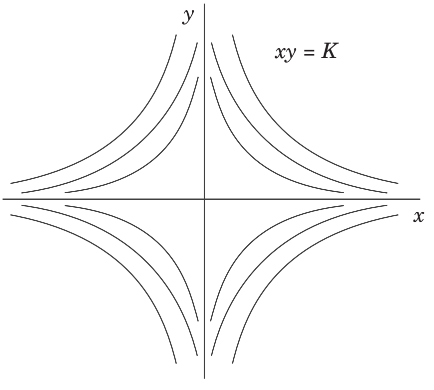


Figura 2

2. EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIONES

2.1. Introducción

Como hemos visto en los ejemplos anteriores, la solución general de una ecuación diferencial es una familia de funciones. Además, puede presentarse como un problema de valores iniciales o como un problema con condiciones de contorno. Vamos a centrarnos, por su sencillez, en los problemas con valores iniciales en ecuaciones diferenciales de primer orden y primer grado. Ante un problema de este tipo podemos plantearnos dos preguntas:

1. ¿Existe solución al problema?
2. ¿Existe una región del plano donde para cada (x_0, y_0) sea posible encontrar una y sólo una curva integral de la ecuación que pase por él?

Es decir, se plantea la posibilidad de resolver:

$$y' = f(x, y)$$
$$y(x_0) = y_0$$

Como ya sabemos, este tipo de planteamientos reciben el nombre de problemas de condición inicial o problemas de Cauchy. La respuesta a las preguntas planteadas la recoge el siguiente teorema.

2.2. Teorema de existencia y unicidad para ecuaciones de primer orden

Dada la ecuación $y' = f(x, y)$, si $f(x, y)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en un rectángulo D del plano, por cada (x_0, y_0) de él pasará una única curva integral de la ecuación.

Notas

1) Obsérvese que las condiciones dadas son suficientes; pero no necesarias, es decir, en el caso en que no se verifique alguna de las condiciones establecidas en el teorema, no podemos conocer si existe solución única o no al problema planteado. Puede ocurrir cualquier cosa.
2) El teorema hace referencia a una solución **local** de la ecuación en un punto determinado, no a una solución general.
3) Existe un enunciado general de este teorema (también llamado Teorema de Picard) válido para toda ecuación y sistema de ecuaciones diferenciales ordinarios.

Ejemplo

Aplicar el teorema de existencia y unicidad a la siguiente ecuación, encontrando los recintos del plano donde hay garantías de la existencia de una solución única que pase por cada punto.

$$y' = xy + e^{-y}$$

La función $f(x, y)$ es $xy + e^{-y}$. Se tiene que:

Es continua $\forall (x, y)$, y $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x - e^{-y}$ es también continua $\forall (x, y)$.

Así, sea cual sea el punto del plano, existe una y sólo una curva que pasando por él sea solución de esta ecuación.

3. ECUACIÓN DIFERENCIAL DE UNA FAMILIA DE CURVAS

Como se ha visto en alguno de los ejemplos anteriores, la solución general de una ecuación diferencial contiene constantes ya que, en general, es una familia de curvas.

Para el caso de ecuaciones de primer orden, tendremos familias uniparamétricas de forma que, fijando el valor del parámetro, nos van apareciendo las diversas curvas (soluciones particulares) que constituyen la familia de soluciones (solución general).

Podemos plantearnos el problema recíproco: dada una familia de curvas (dependientes de uno o varios parámetros), encontrar la ecuación diferencial que verifican todas las curvas de la familia. Entonces, el planteamiento es el siguiente:

Partimos de una familia de curvas, por ejemplo uniparamétrica:

$$f\,(x, y\,(x), C) = 0$$

Vamos a encontrar una propiedad geométrica común para todas las curvas de la familia, que nos sirva como ecuación diferencial de la familia de curvas:

1. Tomamos $f\,(x, y\,(x), C) = 0$. El objetivo es eliminar el parámetro que aparece en la ecuación de la familia. Para ello derivamos implícitamente la expresión de la familia respecto de la variable x, obteniendo la expresión:

$$g\,(x, y, y', C) = 0$$

2. Con las dos expresiones obtenidas (la de f y la de g) eliminamos el parámetro C, apareciendo una relación entre x, y, y' que establece la ecuación diferencial que deben cumplir todas las curvas de la familia.

Nota

En el caso de tener familias multiparamétricas $f\,(x, y\,(x), C_1, ..., C_r) = 0$ el planteamiento es análogo, simplemente tenemos que derivar tantas veces como parámetros tengamos, con el fin de disponer de suficientes ecuaciones para poder eliminar los parámetros y obtener la ecuación diferencial que verifican todas las curvas de la familia dada. Cabe señalar que este proceso es tanto más complicado cuanto mayor sea el número de parámetros.

Ejemplo

Calcular la ecuación diferencial asociada a la siguiente familia de curvas:

$$y = C_1\, x^2 + C_2\, x + 4$$

Al derivar implícitamente:

$$y' = 2C_1\, x + C_2$$

Como tenemos que eliminar dos parámetros necesitamos otra ecuación más. Para ello derivemos otra vez:

$$y'' = \; 2C_1$$

Con las tres ecuaciones eliminamos los parámetros.

$$\begin{array}{ll} y'' = 2C_1 & \Rightarrow\; C_1 = y''/2 \\ y' = 2C_1\, x + C_2 & \Rightarrow\; C_2 = y' - 2C_1 x = y' - y''\, x \\ y = C_1\, x^2 + C_2\, x + 4 & \Rightarrow\; y = x^2\, y''/2 + x\,(y' - y''\, x) + 4 \end{array}$$

De esta forma la ecuación diferencial que tiene como solución la familia biparamétrica dada será:

$$2\, y = x^2\, y'' + 2xy' - 2x^2\, y'' + 8 \;\;\Leftrightarrow\;\; x^2\, y'' - 2xy' + 2y = 8$$

que es una ecuación diferencial lineal de segundo orden.

Problemas resueltos

1 **Indicar el orden y el grado de las siguientes ecuaciones diferenciales:**

a) $$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 \operatorname{sen} x + 3xy\frac{dy}{dx} + y^2e^x = 0$$

b) $$\frac{d^2y}{dx^2} + 5x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 6y = 0$$

c) $$x^2\sqrt{y'' + 3x} - 2y' = 3\operatorname{sen} x$$

a) Aparece la segunda derivada elevada al cuadrado, luego la ecuación es de segundo orden y segundo grado.

b) Segundo orden, primer grado.

c) Segundo orden, el grado no está definido para esta ecuación.

---

2 **Seleccionar entre las siguientes ecuaciones las que son lineales:**

a) $y' + x^2 - 1 = y$

b) $3xy'' - 4\,yy' + y \operatorname{sen} x = 4x$

c) $y\,dx + (xy + x - 3y)\,dy = 0$

d) $y'' - 2y + 3 = e^x$

e) $4xy' + \cos y = 5\,x$

a) Es lineal.

b) No lo es, se pierde la linealidad en el término $4yy'$.

c) Dividiendo la ecuación por dx resulta: $y + (xy + x - 3y)\,y' = 0$. No es lineal, aparece un término en yy'.

d) Es lineal.

e) No es lineal, ya que aparece la función y dentro de una función trascendente: $\cos y$.

---

3 **Demostrar que cada una de las funciones dadas es solución de la correspondiente ecuación diferencial, para un cierto intervalo (a, b) del eje OX:**

a) $f(x) = x + e^{-x}$ **para la ecuación** $y' + y = x + 1$

b) $f(x) = 2e^{3x} - 5e^{4x}$ **para la ecuación** $y'' - 7y' + 12y = 0$

a) $y = x + e^{-x}$, $y' = 1 - e^{-x}$. Sustituyendo en la ecuación:

$$1 - e^{-x} + x + e^{-x} = 1 + x \qquad \text{(se verifica para todo valor de } x\text{)}$$

b) $y = 2e^{3x} - 5e^{4x}$, $y' = 6e^{3x} - 20e^{4x}$, $y'' = 18e^{3x} - 80e^{4x}$.

En la ecuación: $18e^{3x} - 80e^{4x} - 42e^{3x} + 140e^{4x} + 24e^{3x} - 60e^{4x} = 0$

---

4 **Verificar si las familias de funciones son solución de las ecuaciones dadas:**

a) $y = C_1 + C_2e^{-x}$ **para la ecuación diferencial** $y'' + y' = 0$

b) $y = C_1e^{-4x} + C_2e^{-2x}$ **para la ecuación diferencial** $y'' - 2y' - 8y = 0.$

a) $y = C_1 + C_2e^{-x}$, $y' = -C_2e^{-x}$, $y'' = C_2e^{-x}$. Sustituyendo en la ecuación:

$$y'' + y' = C_2e^{-x} - C_2e^{-x} = 0$$

luego se verifica para todo valor de x.

b) $y = C_1e^{-4x} + C_2e^{-2x}$, $y' = -4C_1e^{-4x} - 2C_2e^{-2x}$, $y'' = 16C_1e^{-4x} + 4C_2e^{-2x}$. Sustituyendo en la ecuación:

$$16C_1e^{-4x} + 4C_2e^{-2x} + 8C_1e^{-4x} + 4C_2e^{-2x} - 8C_1e^{-4x} - 8C_2e^{-2x} = 16C_1e^{-4x}$$

En general esta igualdad no se verifica. Por tanto, la familia de funciones dada no es solución de la ecuación.

---

5 **Determinar los valores de m para los que $f(x) = e^{mx}$ es solución de la ecuación:**

$$y''' - 3y'' + 4y' - 2y = 0$$

$$y = e^{mx}, \qquad y' = me^{mx}, \qquad y'' = m^2 e^{mx}, \qquad y''' = m^3 e^{mx}$$

Imponemos que esta función verifique la ecuación:

$$m^3e^{mx} - 3m^2e^{mx} + 4me^{mx} - 2e^{mx} = 0 \iff$$
$$e^{mx}\,[m^3 - 3m^2 + 4m - 2] = 0 \iff m^3 - 3m^2 + 4m - 2 = 0$$

Y las raíces de este polinomio son: $m = 1$, $m = 1 + i$, $m = 1 - i$, valores para los que $f(x) = e^{mx}$ es solución de la ecuación dada.

---

6 **Verificar si la función** $\begin{cases} \boldsymbol{x(t) = \cos t} \\ \boldsymbol{y(t) = \operatorname{sen} t} \end{cases}$ **es solución de la ecuación**

$$\boldsymbol{x + yy' = 0}$$

En este caso el problema consiste en verificar si una curva expresada en ecuaciones paramétricas es solución de una ecuación diferencial. Para ello se debe tener en cuenta que:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\,\frac{dx}{dt} \qquad \iff \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}$$

por lo que: $$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos t}{-\operatorname{sen} t}$$

y sustituyendo en la ecuación: $$\cos t + \operatorname{sen} t\,\frac{\cos t}{-\operatorname{sen} t} = 0$$

---

7 **Verificar que la relación** $\boldsymbol{x^2 + y^2 - 4 = 0}$ **es una solución implícita de la ecuación** $\boldsymbol{y' = -x/y}$**.**

Derivando implícitamente en la relación se tiene: $2x + 2yy' = 0 \iff y' = -x/y$, expresión que coincide con la ecuación diferencial dada.

---

8 **Verificar que la siguiente función definida a trozos es solución de la ecuación $xy' - 2y = 0$:**

$$y(x) = \begin{cases} -x^2 & x < 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}$$

Para $x < 0$: $y = -x^2,\quad y' = -2x$

Sustituyendo en la ecuación:

$$x(-2x) - 2(-x^2) = -2x^2 + 2x^2 = 0.$$

Para $x \geq 0$: $y = x^2,\quad y' = 2x$

Sustituyendo en la ecuación:

$$x(2x) - 2(x^2) = 2x^2 - 2x^2 = 0.$$

Por tanto, se verifica que la función definida a trozos es solución de

$$xy' - 2y = 0$$

---

9 **Dada la ecuación $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$, se pide:**

a) Demostrar que $y_1(x) = x^2$, $y_2(x) = x^3$ son soluciones de ella.

b) ¿Es solución $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$?

a) $y_1 = x^2$, $y_1' = 2x$, $y_1'' = 2$, en la ecuación $2x^2 - 8x^2 + 6x^2 = 0$, es decir, $y_1(x) = x^2$ es solución.
De forma análoga se procede con y_2.

b) Probaremos que, en general, la suma de dos soluciones de esta ecuación vuelve a ser solución de la ecuación.

Nota
Este resultado se estudiará más adelante como propiedad de las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas.

$$y = y_1 + y_2,\quad y' = y_1' + y_2',\quad y'' = y_1'' + y_2''$$

En la ecuación:

$$x^2\,(y_1'' + y_2'') - 4x\,(y_1' + y_2') + 6\,(y_1 + y_2) =$$
$$= x^2 y_1'' - 4xy_1' + 6y_1 + x^2\,y_2'' - 4xy_2' + 6y_2 = 0 + 0$$

por ser y_1 e y_2 soluciones de la ecuación.

---

10 **Aplicar el teorema de existencia y unicidad a la ecuación $y' = y^{1/3}$ encontrando los recintos del plano donde hay garantías de la existencia de una solución única que pase por cada punto.**

La función $f\,(x, y)$ es, en este caso, $y^{1/3}$. Es continua para todo valor de x e y.

$f_y\,(x, y) = 1/3\;y^{-2/3}$ no es continua en los puntos $(x, 0)$, ya que en ellos no existe la función derivada parcial.

De esta forma, se tiene que para todo punto (x, y) con $y \neq 0$ existe una única curva que, pasando por él, es solución de la ecuación dada. En los puntos $(x, 0)$ puede ocurrir cualquier cosa. Por ejemplo:

Por el punto (0, 0) pasan las curvas: a) $y = 0$
b) $y = [2/3\;x]^{3/2}$

Son ambas soluciones de la ecuación. Para este punto se ha perdido la unicidad.

---

11 **Verificar que $y = Cx + C^2$ es una familia uniparamétrica de soluciones de la ecuación diferencial $y = xy' + y'^2$. Determinar K para que $y = Kx^2$ sea una solución singular de dicha ecuación.**

$y = Cx + C^2$, $y' = C$. Sustituyendo en la ecuación diferencial se tiene: $Cx + C^2 = xC + C^2$, es decir; se convierte en la identidad y, efectivamente, es una familia uniparamétrica de soluciones de la ecuación dada.

$y = Kx^2$, $y' = 2Kx$. Al sustituir en la ecuación:

$$Kx^2 = 2Kx^2 + 4K^2x^2 \quad \Leftrightarrow \quad K + 4K^2 = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$K\,(1 + 4K) = 0 \quad \Rightarrow \quad K = 0 \quad \text{ó} \quad K = -1/4.$$

Se obtienen las curvas: $y = -1/4\,x^2$, $y = 0$ siendo esta última perteneciente a la familia dada para el valor $C = 0$. Luego la solución singular pedida se obtiene para $K = -1/4$ y es $y = -1/4\,x^2$.

---

12 **Dado el problema de valor inicial:**

$$\boldsymbol{y' - xy^{1/2} = 0}$$
$$\boldsymbol{y\,(0) = 0}$$

verificar que $y = 0$ e $y = x^4/16$ son soluciones de él. ¿Contradice este resultado el teorema de existencia y unicidad de soluciones?

Para verificar que son soluciones es suficiente con sustituir ambas funciones en la ecuación y comprobar que pasan por el punto (0, 0).

Este resultado no se contradice con el teorema, ya que tomando $f\,(x, y) = xy^{1/2}$ se comprueba que su derivada parcial $f_y = 1/2\,xy^{-1/2}$ no es continua en $y = 0$.

---

13 **Hallar la solución particular de la ecuación x^2y' sen $y = 2$ que cumple la siguiente condición:**

$y \to \dfrac{\pi}{2}$ cuando $x \to \infty$, sabiendo que la solución general de dicha ecuación es:

$$\boldsymbol{\cos y = \frac{1}{x^2} + C}$$

Aplicando a la solución general la condición establecida se tiene que

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = C \quad \Leftrightarrow \quad C = 0$$

con lo que la solución particular es $\cos y = 1/x^2$.

Se obtienen así infinitas posibilidades para la función solución:

$$y = \pm \arccos\,(1/x^2) + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

De todas ellas sólo existe una que cumple la condición $y \to \pi/2$ cuando $x \to \infty$, veamos cuál aplicando el resultado obtenido:

$$y = \pm \operatorname{arccos}(1/x^2) + 2k\pi; \qquad \pi/2 = \pm \operatorname{arccos}(0) + 2k\pi;$$

$$\pi/2 = \pm \pi/2 + 2k\pi; \qquad k = 0.$$

La solución pedida es $y = \operatorname{arccos}(1/x^2)$.

---

14 **Un barco ve frenado su movimiento por la acción de la resistencia del agua que es proporcional a la velocidad del mismo. Escribir la ecuación que exprese la velocidad del barco.**

Sea F_b la fuerza que impulsa el barco ejercida por el motor.
Sea $F_r = -kv(t)$ la fuerza contraria al movimiento del barco realizada por el agua.
Entonces, aplicando la segunda ley de Newton en una dimensión:

$$F = ma(t)$$

se tiene para este caso que:

$$F_b - F_r = ma \quad \Leftrightarrow \quad F_b - kv(t) = ma(t) \quad \Leftrightarrow \quad F_b - kv(t) = mv'(t)$$

Ecuación diferencial de primer orden que expresa la velocidad del barco en cada instante.

---

15 **Escribir la ecuación diferencial asociada a la familia de curvas tal que verifica que la pendiente de la recta tangente a ellas por todo punto es igual a la distancia del punto al origen de coordenadas.**

En todo punto (x, y) del plano, la distancia al origen viene dada por:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}$$

La pendiente de la recta tangente a la curva en un punto de ella (x, y) es $y'(x)$.
De esta forma la ecuación diferencial de la familia de curvas es:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = y'$$

16 **La rapidez con que una población crece, en un instante cualquiera, es proporcional a la población *p* existente en dicho instante. Establecer el modelo de crecimiento de población.**

Llamando $p\,(t)$ a la función población en cada instante la ley establece que $p'\,(t) = kp\,(t)$, que es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden.

---

17 **Determinar la ecuación diferencial asociada a las siguientes familias de curvas:**

a) Las rectas $y - 4x - C = 0$

b) Las curvas $y = C_1e^x + C_2e^{-x}$

a) Dadas las rectas $y - 4x - C = 0$, derivando la ecuación implícitamente respecto de x obtenemos: $y' - 4 = 0$
De esta manera, todas las curvas de la familia verifican esta condición, que la pendiente de la recta tangente a ellas vale 4. Por lo tanto, la ecuación, donde ya se ha eliminado el parámetro, es:

$$y' = 4 \qquad \text{Ecuación asociada a la familia de rectas}$$

Y la solución general de esta ecuación es, lógicamente, la familia de rectas $y - 4x - C = 0$.

b) Dadas las curvas $y = C_1\,e^x + C_2\,e^{-x}$

Derivamos la ecuación: $y' = C_1e^x - C_2e^{-x}$.

Una segunda vez: $y'' = C_1e^x + C_2e^{-x}$.

En este caso para eliminar los parámetros tenemos que:

$$y'' = y \quad \Leftrightarrow \quad y'' - y = 0.$$

Problemas propuestos

1 Indicar el orden y el grado de las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $y''' - 4\,xy' + x^3e^y - 4 = 0$

b) $\text{Ln}\,x - 3\,xy'' - 4\,xy = \text{sen}\,x$

c) $[x - y']^{1/3} - 4xy = 8\ \text{sen}\,x$

d) $3\,xy'' - 3y' + 4y - 4 = 0$

2 Indicar cuáles de las ecuaciones del ejercicio 1 son lineales.

3 Demostrar que cada una de las funciones dadas es solución de la correspondiente ecuación diferencial, para un cierto intervalo (a, b) del eje OX:

a) $v\,(t) = \text{sen}\,t + \cos\,t$ para la ecuación $v'\cos t + v\ \text{sen}\,t = 0$

b) $f\,(x) = e^x\,(2\,x + 1)$ para la ecuación $y'' = 2\,y' - y$

4 Verificar si las familias de funciones indicadas satisfacen las ecuaciones diferenciales correspondientes :

a) $y^2/2 = \text{Ln}\,(1 + e^x) + C$ para la ecuación $(1 + e^x)\,yy' = e^x$

b) $x\,(t) = te^t$ para la ecuación $(1 + xy)\,y' + y^2 = 0$
$y\,(t) = e^{-t}$

c) $y = C_1x + \dfrac{C_2}{x} + C_3$ para la ecuación: $y''' + 3\dfrac{y'}{x} = 0$

5 Determinar el valor de m para que $y = x^m$ sea solución de las ecuaciones:

a) $x^2y'' - y = 0$

b) $x^2y'' + 6xy' + 4y = 0$

6 Aplicar el teorema de existencia y unicidad a las siguientes ecuaciones diferenciales e indicar en qué recintos la ecuación admite solución única :

a) $y' = tg\ y$

b) $y' = x^2\ \text{sen}\,y$

c) $y' - \sqrt{y - x} = 0$

d) $y' = \dfrac{y - 1}{x^2 + x + 1}$

7 Verificar que la siguiente función definida a trozos es solución de la ecuación diferencial $y'^2 = 9xy$,

$$y(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^3 & x \geq 0 \end{cases}$$

8 Dado el problema de valor inicial:

$$y' = y$$
$$y(0) = 3$$

¿Garantiza el teorema de existencia y unicidad que $y = 3\,e^x$ es la única solución de él?

9 Hallar la solución de la ecuación $x^2 y' \cos y + 1 = 0$ que cumple que $y \to (16\pi)/3$ cuando $x \to \infty$.

10 Calcular la ecuación diferencial asociada a las siguientes familias de curvas:

a) Las elipses: $x^2 + Ay^2 = B$ (para $A, B > 0$)
b) Las curvas $y = e^x\,(Ax + B)$
c) Las rectas $2y + 3x - C = 0$

11 Encontrar la ecuación diferencial de la familia de circunferencias cuyo centro está situado en el eje OX y son tangentes al eje OY en el origen de coordenadas.

12 La rapidez de propagación de un virus es proporcional al número de personas que se han contagiado $x(t)$ y al número de ellas que no se han expuesto a él. Siendo n el número de personas de la población, establecer el modelo de propagación del virus en función del número de personas contagiadas.

13 Se colocan x_0 bacterias en una solución en un instante t_0. Llamamos $x(t)$ al número de bacterias en cada instante. Si el alimento y el espacio son limitados, lo cual implica que la población crece a un ritmo proporcional a la población existente en cada momento, modelizar el crecimiento de la población de bacterias en función del número de bacterias en cada instante.

Capítulo 2

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN

En este capítulo vamos a considerar algunos tipos básicos de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden que admiten una técnica determinada para calcular su solución y estudiaremos los diversos procedimientos que permiten obtener dicha solución. De esta forma, la intención de este capítulo es:

- *Clasificar las ecuaciones en su tipo correspondiente con el fin de emplear el método adecuado de resolución para cada una.*
- *Dar una colección de métodos de resolución.*
- *Comentar algunas aplicaciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias.*

Por último, en un apéndice al final del capítulo, se comentan algunos tipos de ecuaciones diferenciales de segundo orden sencillas de resolver.

1. DISTINTAS EXPRESIONES DE LAS ECUACIONES DE 1er ORDEN

Las ecuaciones diferenciales de primer orden, como ya se comentó en el capítulo anterior, son aquellas en las que aparecen relacionadas la variable independiente x, la dependiente o función incógnita $y(x)$ y su primera derivada $y'(x)$.

Una ecuación de este tipo puede expresarse de diversas formas:

- Forma normal: $y'(x) = f[x, y(x)]$
- Forma implícita: $F[x, y(x), y'(x)] = 0$
- Forma diferencial: $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$

Ejemplo

Sea la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{x - y}$$

Observamos que viene dada en forma normal, donde:

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x - y}$$

Para obtener la forma implícita sólo hay que pasar todos los elementos a un mismo miembro:

$$(x - y)\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2 \quad \Leftrightarrow \quad (x - y)\frac{dy}{dx} - (x^2 + y^2) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (x - y)\, y' - (x^2 + y^2) = 0$$

Y la forma diferencial asociada a esta ecuación es:

$$(x - y)\, dy - (x^2 + y^2)\, dx = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (x^2 + y^2)\, dx - (x - y)\, dy = 0$$

2. RESOLUCIÓN DE DIFERENTES TIPOS DE ECUACIONES

2.1. Ecuaciones del tipo $y' = f(x)$

El caso más sencillo de ecuaciones diferenciales que podemos encontrarnos es aquél en el que no aparece explícitamente la incógnita y, es decir, se corresponden con el tipo $y' = f(x)$. Para resolverlas, se procede de la siguiente forma:

$$y' = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad dy = f(x)\, dx$$

Integrando en cada miembro de la ecuación respecto de cada variable obtenemos la solución general:

$$\int dy = \int f(x)\, dx \quad \Leftrightarrow \quad y = \int f(x)\, dx + C$$

Ejemplos

Son ecuaciones diferenciales ordinarias de este tipo las siguientes:

$$y' = \cos 3x + 5, \qquad y' = e^{2x} - x$$

Nota

Como puede observarse, se trata de ecuaciones sencillas cuya resolución se lleva a cabo por integración directa. Este caso se extiende a ecuaciones de órdenes superiores de la forma $y^{(n} = f(x)$, que se resuelven de manera análoga integrando n veces, apareciendo por tanto en la solución general n constantes arbitrarias.

2.2. Ecuaciones de variables separadas

Llamamos así a las ecuaciones que pueden escribirse de la siguiente manera:

$$F(x)\, G(y)\, dx + H(x)\, P(y)\, dy = 0$$

Son ecuaciones en las que ambas variables, dependiente e independiente, pueden separarse. Para resolverlas, se procede a dicha separación y se integra respecto de cada variable. El proceso de resolución es el siguiente:

En primer lugar, dividimos la ecuación por $G(y)\, H(x)$:

$$\frac{F(x)G(y)}{H(x)G(y)}dx = -\frac{H(x)P(y)}{G(y)H(x)}dy$$

A continuación, simplificamos para separar las variables:

$$\frac{F(x)}{H(x)}dx = -\frac{P(y)}{G(y)}dy$$

La ecuación queda resuelta integrando en cada miembro respecto de su variable:

$$\int \frac{F(x)}{H(x)}dx = -\int \frac{P(y)}{G(y)}dy$$

Y la solución general es:

$$f(x) + g(y) = C$$

Ejemplos

Las ecuaciones $2y\, dx + 3x\, dy = 0$, $e^x\, dx - (1 + e^x)\, y\, dy = 0$ son de variables separadas.

Nota

Es importante señalar que durante las operaciones realizadas, al dividir entre $G(y)\,H(x)$, $G(y)$ y $H(x)$ no deben ser nulas. Se debe comprobar, para tener la seguridad de haber obtenido la solución general del problema, que $G(y) = 0$ y $H(x) = 0$ no llevan a una solución y, si lo hacen, añadirlas si no están incluidas en la expresión calculada al integrar.

2.3. Ecuaciones homogéneas

Este es un tipo de ecuaciones que, aunque no son de variables separadas, se pueden reducir a ellas mediante un cambio de variable adecuado.

2.3.1. Definición. Función homogénea

Una función $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ es homogénea de grado r si:

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n) = \lambda^r f(x_1, x_2, ... x_n) \qquad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$$

Ejemplos

Verificar si las siguientes funciones son homogéneas y, en caso afirmativo, decir de qué grado son:

1) $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy$

Evaluamos $f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^2 + (\lambda y)^2 - \lambda x\, \lambda y = \lambda^2\,(x^2 + y^2 - xy) =$ $= \lambda^2 f(x, y)$.

De esta manera se cumple la definición de función homogénea para $f(x, y)$, siendo su grado 2 (exponente de λ).

2) $f(x, y) = x^2 + y$

Evaluamos:

$$f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^2 + (\lambda y) = \lambda\,(\lambda x^2 + y) \neq \lambda^r f(x, y)$$

luego no es homogénea.

3) $f(x, y) = (x + y)^{1/2}$

$$f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x + \lambda y)^{1/2} = \lambda^{1/2}\,(x + y)^{1/2} = \lambda^{1/2} f(x, y)$$

Por tanto, esta función es homogénea de grado 1/2 para $\lambda > 0$.

2.3.2. Definición. Ecuación homogénea

Una ecuación diferencial de primer orden, expresada en forma diferencial, $M\ (x,\ y)\ dx + N\ (x,\ y)\ dy = 0$ es homogénea si $M\ (x,\ y)$ y $N\ (x,\ y)$ son funciones homogéneas de igual grado.

Ejemplo
Es inmediato comprobar que la ecuación diferencial:

$$(x^2 + y^2 - xy)\ dx + (y^2 - x^2)\ dy = 0$$

es homogénea.

2.3.3. Proposición

Dada una ecuación diferencial $y' = f\ (x,\ y)$, se dice que es una ecuación homogénea si la función $f\ (x,\ y)$ es homogénea de grado 0.

Observación
Supongamos la ecuación homogénea en forma diferencial

$$M\ (x,\ y)\ dx + N\ (x,\ y)\ dy = 0$$

Para pasar a su forma normal $(y' = f\ (x,\ y))$ despejamos y':

$$M\,(x,y) + N\,(x,y)\,\frac{dy}{dx} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad M\,(x,y) + N\,(x,y)\,y' = 0$$

$$y' = \frac{-M\,(x,y)}{N\,(x,y)} \quad \Rightarrow \quad f\,(x,y) = \frac{-M\,(x,y)}{N\,(x,y)}$$

De esta manera, evaluando $f\ (\lambda x,\ \lambda y)$:

$$f\,(\lambda x, \lambda y) = \frac{-M\,(\lambda x, \lambda y)}{N\,(\lambda x, \lambda y)}$$

y como M y N son funciones homogéneas de igual grado se tiene que:

$$f\,(\lambda x, \lambda y) = \frac{-\lambda^r M\,(x,y)}{\lambda^r N\,(x,y)} = \frac{-M\,(x,y)}{N\,(x,y)} = f\,(x,y)$$

Con esto queda demostrado que si $f\ (x, y)$ es función homogénea de grado cero, entonces la ecuación diferencial $y' = f\ (x, y)$ es una ecuación diferencial homogénea.

2.3.4. Resolución de una ecuación homogénea

Si $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ es una ecuación homogénea, el cambio de variable $y = ux$ la transforma en una ecuación de variables separadas en u y x.

Realizamos el cambio $y = ux$, diferenciando: $dy = u\,dx + x\,du$ y sustituimos en la ecuación:

$$0 = M(x, ux)\,dx + N(x, ux)\,(u\,dx + x\,du) =$$
$$= x^r M(1, u)\,dx + x^r N(1, u)\,(u\,dx + x\,du) =$$
$$= [M(1, u) + u\,N(1, u)]\,dx + x\,N(1, u)\,du.$$

Esta expresión tiene la forma general de una ecuación de variables separadas en x y u; por tanto, se procederá a la resolución de esta ecuación según el método expuesto en el apartado 2.2. Una vez obtenidas las soluciones en u y x se deshace el cambio.

2.4. Ecuaciones reducibles a homogéneas

En este apartado vamos a estudiar algunos tipos de ecuaciones que no son homogéneas; pero pueden reducirse a ellas. Son las ecuaciones diferenciales de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'}\right)$$

Ejemplos

Son ecuaciones de este tipo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6x - 7y + 1}{3x + y - 2}$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{\frac{4x+3y-2}{5x-y+1}}$$

No estamos frente a una ecuación homogénea porque la función f no es homogénea de grado 0, debido a la presencia de los términos independientes c y c'. Con la siguiente técnica vamos a convertir la función f en homogénea de grado 0, con lo que la ecuación será homogénea y se resolverá como hemos indicado en el apartado 2.3.4. Para ello, consideremos las rectas de ecuaciones:

$$ax + by + c = 0, \qquad a'x + b'y + c' = 0$$

Distinguimos dos casos:

A. **Las rectas se cortan en el punto** (x_0, y_0).

Si trasladamos el origen de coordenadas a ese punto, eliminamos los términos independientes en las ecuaciones de las rectas y obtenemos así una ecuación homogénea en unas nuevas variables X e Y. De esta manera, el cambio de variable que se debe realizar es:

$$x = X + x_0$$
$$y = Y + y_0$$

La ecuación resultante de este cambio es:

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{aX + bX}{a'X + b'Y}\right)$$

que es una ecuación diferencial homogénea. Esta ecuación se resuelve por el método expuesto en el apartado 2.3.4 y, al final, se deshacen los dos cambios de variable realizados.

B. Las rectas son paralelas.

Esto es:

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \lambda$$

En este caso la ecuación resulta ser de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'}\right) = f\left(\frac{ax + by + c}{a\lambda x + b\lambda y + c'}\right) = g\,(ax + by)$$

Ecuación diferencial que podemos transformar directamente en una ecuación en variables separadas realizando el cambio de variable

$$u = ax + by.$$

2.5. Ecuaciones exactas

2.5.1. Definición. Diferencial total

Dada $F(x, y)$, función de dos variables que posee derivadas parciales continuas en un dominio $D \subset \mathbb{R}^2$, se define su ***diferencial total,*** dF, como:

$$dF(x,y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}dy \qquad \forall (x,y) \in D$$

Ejemplo

Calcular la diferencial total de $F(x, y) = xy + 2x^3y^2$:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y + 6x^2y^2, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = x + 4x^3y$$

Así: $$dF = (y + 6\,x^2y^2)\,dx + (x + 4\,x^3y)\,dy$$

2.5.2. Definición. Ecuación exacta

Dada una ecuación diferencial $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ diremos que es exacta si existe una función $F(x, y)$ de forma que su diferencial total sea:

$$dF = M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy$$

Es decir: $$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y), \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y)$$

Ejemplo

La ecuación $y^2\,dx + 2xy\,dy = 0$ es exacta ya que tomando la función $F(x, y) = xy^2$ se verifica que:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y^2 = M(x,y), \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 2xy = N(x,y)$$

2.5.3. Definición. Solución de una ecuación diferencial exacta

Si la ecuación $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ es exacta entonces podemos encontrar $F(x, y)$ tal que:

$$dF = M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0,$$

es decir $$F(x, y) = K, \qquad K \in \mathbb{R}$$

De esta forma, encontrada $F(x, y)$ la **solución** de la ecuación es:

$$F(x, y) = K$$

Nota
Debe disponerse de un criterio que establezca las condiciones que garanticen la existencia de $F(x, y)$ para una ecuación diferencial. Esto queda reflejado en el siguiente teorema.

2.5.4. Teorema

La ecuación diferencial $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$, donde $M(x, y)$ y $N(x, y)$ admiten derivadas primeras continuas en un dominio D, es exacta si y solamente si:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \tag{1}$$

Nota
Vamos a desarrollar la demostración del teorema; porque con ello conseguimos una técnica para calcular $F(x, y)$.

- Supongamos que la ecuación es exacta: entonces existirá una función $F(x, y)$ tal que:

  $$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y), \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y)$$

  Derivando en estas igualdades respecto de x e y respectivamente, tendremos:

  $$\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y}, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

  Por tanto, aplicando el teorema de Schwartz obtenemos la igualdad de las derivadas cruzadas (ecuación (1)).

- Partimos de la igualdad de las derivadas cruzadas (ecuación (1)) y queremos establecer la existencia de una función $F(x, y)$ tal que $dF = M\,dx + N\,dy$.
  Si esta función existe, debe verificar que:

  $$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y), \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y)$$

  Integrando, por ejemplo, en la primera ecuación respecto de x:

  $$F(x,y) = \int M(x,y)\,dx + c(y)$$

donde $c\,(y)$ debe ser determinada. Para ello utilizaremos la segunda igualdad y derivando en la expresión obtenida para $F\,(x,\,y)$:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\int M\,(x,y)\,dx\right] + \frac{dc\,(y)}{dy} = N\,(x,y)$$

Esto nos permite despejar el valor de $c'\,(y)$ y con ello:

$$c\,(y) = \int\left[N\,(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left[\int M\,(x,y)\,dx\right]\right]dy$$

De esta forma, la función buscada es:

$$F\,(x,y) = \int M\,(x,y)\,dx + \int\left[N\,(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left[\int M\,(x,y)\,dx\right]\right]dy$$

Este es el método que se emplea para determinar $F\,(x,\,y)$ y es indiferente empezar el cálculo de esta manera o bien con:

$$\int N\,(x,y)\,dy + c\,(x)$$

siguiendo un procedimiento análogo al expuesto; pero intercambiando variables. En la práctica, lo más habitual es empezar por la función, M ó N, que sea más sencilla de integrar.

Observación

Para que los cálculos realizados sean correctos se debe tener la garantía de que la expresión:

$$\frac{dc\,(y)}{dy}$$

no depende de x ya que se integra respecto de y. Para ello derivamos respecto de x la expresión:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\int M\,(x,y)\,dx\right] = N\,(x,y) - \frac{dc\,(y)}{dy}$$

Derivando en los dos miembros:

$$\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\left[\int M\,(x,y)\,dx\right] = \frac{\partial N\,(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial^2 c\,(y)}{\partial y\,\partial x} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial^2 c\,(y)}{\partial y\,\partial x}$$

Si aplicamos la hipótesis de partida; garantizamos el resultado

$$\frac{\partial^2 c(y)}{\partial y\,\partial x} = 0$$

que garantiza la no dependencia respecto de x de:

$$\frac{\partial c(y)}{\partial y}$$

2.5.5. Resolución de las ecuaciones diferenciales exactas

Dada una ecuación exacta, para encontrar la solución se seguirán los pasos indicados en la demostración anterior, donde se ha establecido cómo encontrar la función $F(x, y)$.

La función así determinada verifica que su diferencial total es nula, por lo que la solución se expresa: $F(x, y) = K$.

2.6. Factores integrantes

En este apartado vamos a estudiar aquellas ecuaciones que no cumplen las condiciones necesarias para ser exactas; pero que se pueden convertir en ellas.

Supongamos una ecuación para la cual no se verifica la igualdad de las derivadas parciales cruzadas (normalmente se tratarán aquellas ecuaciones en las que las expresiones de estas derivadas sean parecidas). Es entonces interesante encontrar una expresión que multiplicándola por la ecuación la transforme en una ecuación diferencial exacta. Estas funciones reciben el nombre de ***factores integrantes***.

Nota
En general, los factores integrantes son funciones de x e y.

2.6.1. Cálculo de factores integrantes

¿Cómo calcular los factores integrantes? No es ésta una tarea fácil, ya que el caso general implica resolver una ecuación diferencial en derivadas parciales, por lo que se estudiarán los casos más sencillos.

A. **Factores integrantes para ecuaciones de variables separadas.**
Las ecuaciones de variables separadas

$$F(x)\,G(y)\,dx + H(x)\,P(y)\,dy = 0$$

pueden tratarse como ecuaciones de factor integrante:

$$\mu(x, y) = \frac{1}{G(y)\, H(x)}$$

(término por el que se divide para separar las variables). Comprobemos este resultado:
Si multiplicamos la ecuación por el factor dado se obtiene:

$$\frac{F(x)}{H(x)}\, dx + \frac{P(y)}{G(y)}\, dy = 0$$

con lo que comprobando las condiciones para una ecuación exacta tenemos que:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 0$$

y la ecuación responde a este tipo.

B. **Cálculo general del factor integrante.**
Se quiere encontrar una función $\mu(x, y)$ tal que

$$\mu(x, y)\, M(x, y)\, dx + \mu(x, y)\, N(x, y)\, dy = 0$$

y se verifique que:

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

esto es:

$$M \frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu \frac{\partial M}{\partial y} = N \frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu \frac{\partial N}{\partial x} \quad \Leftrightarrow$$

$$\mu \left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right] = N \frac{\partial \mu}{\partial x} - M \frac{\partial \mu}{\partial y} \quad \Leftrightarrow$$

$$N \frac{\partial \operatorname{Ln} \mu}{\partial x} - M \frac{\partial \operatorname{Ln} \mu}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$$

que es la ecuación diferencial general de cálculo del factor integrante.

Observación
Como puede verse, el cálculo en general del factor integrante nos lleva a resolver esta ecuación que resulta ser en derivadas parciales, lo cual escapa al ámbito de

este libro. Por tanto, se estudiarán tres casos para los cuales esta ecuación se simplifica.

B.1. Si el factor integrante $\mu = \mu\,(x,\ y)$ depende de una expresión conocida de x e y, $z\,(x,\ y)$, tal como $\mu = \mu\,(xy)$ o $\mu = \mu\,(x + y)$, donde $z\,(x,\ y) = xy$ o $z\,(x,\ y) = x + y$; entonces μ se determina de la siguiente manera:

Llamamos $z = z\,(x,\ y)$ a la expresión de x e y de la que depende el factor integrante:

$$\mu = \mu\,(z\,(x,\ y)) = \mu\,(z)$$

Llevamos este cambio a la ecuación general de cálculo del factor integrante. Para ello, aplicando la regla de la cadena, tenemos que:

$$\frac{\partial \operatorname{Ln} \mu}{\partial x} = \frac{d \operatorname{Ln} \mu}{dz} \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \operatorname{Ln} \mu}{\partial y} = \frac{d \operatorname{Ln} \mu}{dz} \frac{\partial z}{\partial y}$$

Y sustituyendo en la ecuación general:

$$N \frac{\partial \operatorname{Ln} \mu}{\partial x} - M \frac{\partial \operatorname{Ln} \mu}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$N \frac{d \operatorname{Ln} \mu}{dz} \frac{\partial z}{\partial x} - M \frac{d \operatorname{Ln} \mu}{dz} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\left[N \frac{\partial z}{\partial x} - M \frac{\partial z}{\partial y}\right] \frac{d \operatorname{Ln} \mu}{dz} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$$

En esta última ecuación diferencial, todos los términos son conocidos. Los agrupamos de forma que se pueda escribir:

$$N \frac{\partial z}{\partial x} - M \frac{\partial z}{\partial y} = h\,(z), \qquad \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = g\,(z)$$

Y finalmente obtenemos una ecuación diferencial en variables separadas que se resuelve como ya sabemos:

$$h\,(z) \frac{d \operatorname{Ln} \mu}{dz} = g\,(z)$$

B.2. Una ecuación diferencial posee un factor integrante de la forma $\mu = \mu\,(x)$ si la expresión:

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}$$

única y exclusivamente depende de la variable x. Veamos por qué:

Supongamos que μ depende únicamente de la variable x: $\mu\,(x)$. La ecuación de cálculo general del factor integrante queda para este caso:

$$N\,\frac{\partial\,\mathrm{Ln}\,\mu}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}; \qquad \frac{\partial\,\mathrm{Ln}\,\mu}{\partial x} = \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N} = g\,(x)$$

que es una ecuación en variables separadas.

B.3. Si el factor integrante sólo depende de y: $\mu\,(y)$, razonando análogamente, éste se calcula según la siguiente ecuación:

$$M\,\frac{\partial\,Ln\,\mu}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$$

Así, una ecuación diferencial ordinaria admite un factor integrante que depende sólo de y si la expresión

$$\frac{\dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y}}{M}$$

sólo depende de la variable y.

2.6.2. Resolución de ecuaciones mediante factores integrantes

De esta manera, para resolver una ecuación por medio de un factor integrante se seguirán los siguientes pasos:

- Encontrar el factor integrante.
- Multiplicar la ecuación por él.
- Verificar que la nueva ecuación es exacta.
- Resolver la ecuación según el método indicado para las ecuaciones diferenciales exactas.

2.7. Ecuaciones lineales

2.7.1. Definición. Ecuación lineal

Como se ha definido en el primer capítulo, una ecuación lineal de primer orden es aquella que responde a la forma:

$$y'(x) + p(x)\, y(x) = r(x)$$

o de forma más general:

$$s(x)\, y'(x) + h(x)\, y(x) = g(x) \qquad \text{con} \qquad s(x) \neq 0$$

Existen dos tipos de ecuaciones lineales:

a) Si $r(x) = 0$ la ecuación se denomina homogénea.
b) Si $r(x) \neq 0$ se denomina no homogénea o completa.

Ejemplos
La ecuación $y' + (\operatorname{sen} x + \cos x)\, y = 0$ es una ecuación diferencial ordinaria lineal homogénea de primer orden y la ecuación

$$y' + (\operatorname{sen} x + \cos x)\, y = x^2 + 1$$

es una ecuación lineal completa de primer orden.

2.7.2. Ecuaciones lineales homogéneas

La resolución de este tipo de ecuaciones no es nada nuevo en la teoría de ecuaciones diferenciales estudiadas hasta ahora, ya que es inmediato comprobar que una ecuación lineal homogénea, de la forma $y' + p(x)\, y = 0$ corresponde al tipo de ecuación de variables separadas:

Separamos las variables: $dy/y = -p(x)\, dx$ e integramos:

$$\int \frac{dy}{y} = -\int p(x)\, dx \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Ln} y = -\int p(x)\, dx + C \quad \Leftrightarrow \quad y(x) = Ke^{-\int p(x)\, dx}$$

Nota
Señalaremos que ha podido omitirse la función $y = 0$ que es solución de la ecuación lineal homogénea (se denomina solución trivial) pero puede observarse que no se ha perdido, ya que se obtiene para el valor $K = 0$.

2.7.3. Teorema de estructura del conjunto de soluciones de la ecuación lineal homogénea

El conjunto de soluciones de una ecuación lineal homogénea de primer orden tiene estructura de espacio vectorial de dimensión uno (orden de la ecuación), siendo la base de dicho espacio una solución no trivial de ella.

Nota
Este resultado se extenderá a ecuaciones de orden superior (ver capítulo 3).

Observación
Probaremos que la combinación lineal de dos soluciones de una ecuación de este tipo vuelve a ser solución de ella. Como consecuencia, bastará conocer una solución (distinta de la trivial) para generar cualquier solución de la ecuación:

Si $y_1(x) \neq 0$ es solución de la ecuación $y' + p(x)\, y = 0$, la solución general se escribe como: $y(x) = k y_1(x)$.

Supongamos entonces que $y_1(x)$, $y_2(x)$ son soluciones cualesquiera de $y' + p(x)\, y = 0$. Tomemos α, β números reales. Debemos demostrar que $\alpha y_1 + \beta y_2$ vuelve a verificar la ecuación. Para esto sustituimos en ella:

$$y = \alpha y_1 + \beta y_2$$

$$y' = \alpha y_1' + \beta y_2'$$

En la ecuación:

$$\alpha y_1' + \beta y_2' + p(x)\,[\alpha y_1 + \beta y_2] = \alpha\,[y_1' + p(x)\, y_1] + \beta\,[y_2 + p(x)\, y_2]$$

que por ser y_1 e y_2 soluciones de la ecuación homogénea resulta:

$$\alpha 0 + \beta 0 = 0$$

De esta manera se verifica la ecuación y queda probado el resultado.

2.7.4. Solución de una ecuación lineal completa

Para la resolución de este tipo de ecuaciones $y' + p(x)\, y = r(x)$ estableceremos el siguiente resultado:

> La solución general de una ecuación lineal completa puede escribirse como suma de la solución general de la ecuación homogénea asociada más una solución particular de la ecuación lineal completa.

Demostración
Consideramos la ecuación $y' + p(x)\, y = r(x)$ y una solución particular de ella $y_1(x)$.

Sea la ecuación lineal homogénea asociada a la ecuación anterior $y' + p(x)\, y = 0$. Sea su solución general $Ky_0(x)$. Tomemos

$$y(x) = y_1 + Ky_0$$

y verifiquemos que cumple la ecuación completa:

$$y' = y_1' + Ky_0'$$

en la ecuación:

$$y_1' + Ky_0' + p(x)\,[y_1 + Ky_0] = y_1' + p(x)\, y_1 + K\,[y_0' + p(x)\, y_0]$$

que por ser y_1 solución de la completa e y_0 de la homogénea resulta:

$$r(x) + K0 = r(x)$$

con lo que se demuestra que se verifica la ecuación completa.

2.7.5. Resolución de una ecuación lineal completa

Dada una ecuación lineal completa, empleando los resultados anteriores, los pasos a seguir para su resolución son:

- Resolver la ecuación lineal homogénea asociada y obtener su solución general.
- Encontrar una solución particular de la completa.
- Escribir la solución general de la completa como suma de ellas.

Nota
Puede apreciarse que es necesario un método que permita determinar una solución particular para una ecuación completa dada. Esto quedará resuelto por el método de variación de las constantes. Por otro lado, un segundo método de resolución de la ecuación lineal completa consiste en calcular un factor integrante de ella. Estos dos métodos de resolución, que se exponen a continuación, realizan los pasos anteriores directamente.

A. **Método de Lagrange o de variación de las constantes:**
Este método consiste en suponer que la solución general de la ecuación lineal completa es de la misma forma que la solución general de la lineal homogénea asociada; pero suponiendo que la constante es una función de la variable independiente. De este modo, dada $y' + p(x)\, y = r(x)$:

- La solución general de la ecuación lineal homogénea asociada es:

$$y(x) = Ke^{-\int p(x)\, dx}$$

– Suponemos que la solución general de la completa es de la forma:

$$y(x) = K(x)\, e^{-\int p(x)\,dx}$$

– Determinamos la expresión de $K(x)$ imponiendo que $y(x)$ sea, efectivamente, solución de la completa.

B. **Factor integrante para ecuaciones lineales completas de primer orden:**
Por otro lado, puede tratarse la ecuación diferencial lineal completa de primer orden $y' + p(x)\, y = r(x)$ como una ecuación que admite un factor integrante de la forma:

$$\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx}$$

Resultado que puede comprobar el lector fácilmente.

2.7.6. Ecuaciones reducibles a lineales

Se van a estudiar algunos tipos de ecuaciones diferenciales que no siendo lineales se reducen a ellas mediante una transformación adecuada.

A. **Ecuaciones del tipo Bernouilli:**
Llamamos ecuación de Bernouilli a la ecuación de la forma:

$$y' + p(x)\, y = r(x)\, y^{\alpha}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

– Si $\alpha = 0$ la ecuación es lineal completa.
– Si $\alpha = 1$ la ecuación es lineal homogénea.

Para resolver una ecuación de Bernouilli se emplea la siguiente técnica:
Dada la ecuación $y' + p(x)\, y = r(x)\, y^{\alpha}$ con $\alpha \neq 0,1$, el cambio de variable $u = y^{1-\alpha}$ convierte la ecuación de Bernouilli en lineal completa de primer orden en la variable u.
De esta forma, la resolución de este tipo de ecuaciones se hará según los siguientes pasos:

– Realizar el cambio de variable.
– Resolver la ecuación lineal en u.
– Deshacer el cambio.

Ejemplos
Las ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$y' + y = xy^3, \qquad y' + \frac{y}{x} = \sqrt{y}\,\mathrm{Ln}\,x$$

son de tipo Bernouilli.

B. **Ecuaciones de tipo Riccati:** Son ecuaciones diferenciales de la forma:

$$y' = p\ (x)\ y^2 + q\ (x)\ y + r\ (x)$$

– Si $p\ (x) = 0$ la ecuación es lineal completa de primer orden.
– Si $r\ (x) = 0$ la ecuación es de tipo Bernouilli.

Dada $y = g(x)$ solución particular de esta ecuación, la transformación:

$$y = g\,(x) + \frac{1}{u}$$

convierte la ecuación de Riccati en una ecuación lineal de primer orden en la variable u.
De esta forma, para resolver este tipo de ecuaciones se procederá según el siguiente método:

– Es necesario el conocimiento previo de una solución de la ecuación.
– Conocida ésta se realiza el cambio de variable mencionado anteriormente.
– Se resuelve la ecuación lineal en u.
– Deshacemos el cambio: $u = \dfrac{1}{y-g}$

Observación
Puede observarse claramente que se está excluyendo la posibilidad de que $y - g = 0$, que desemboca en $y = g$, la cual es solución del problema y habrá que incluirla en la solución general.

3. OTRAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

3.1. Ecuación de Lagrange

Esta ecuación es una ecuación diferencial ordinaria que se puede escribir de la siguiente forma:

$$y = xg\ (y') + f\ (y')$$

En este tipo de ecuaciones se emplea el cambio $y' = p$, para obtener la solución general de la ecuación de Lagrange en forma paramétrica. Por tanto la ecuación de Lagrange se escribe como:

$$y = xg\ (p) + f\ (p)$$

Para resolverla se deriva respecto de x obteniéndose:

$$y' = p = g(p) + xg'(p)\frac{dp}{dx} + f'(p)\frac{dp}{dx}$$

Por tanto: $$p - g(p) = \frac{dp}{dx}\left(xg'(p) + f'(p)\right)$$

Y despejando: $$\frac{dp}{dx} = \frac{p - g(p)}{xg'(p) + f'(p)}$$

Como $p = y'$ y $x = y'^{-1}(p)$ son funciones inversas, dividimos la ecuación anterior por dp/dx, con lo que tenemos:

$$\frac{dx}{dp} = \frac{xg'(p) + f'(p)}{p - g(p)}; \qquad \frac{dx}{dp} - \frac{g'(p)}{p - g(p)}x = \frac{f'(p)}{p - g(p)}$$

que es una ecuación diferencial lineal completa de primer orden en x (variable dependiente) y p (variable independiente).

Resolviendo dicha ecuación obtenemos $x = h(p, C)$. Si consideramos p como un parámetro, entonces obtenemos la siguiente expresión para y:

$$y = h(p, C)\, g(p) + f(p)$$

sustituyendo x por $x = h(p, C)$ en la ecuación dada.

Por tanto las ecuaciones paramétricas de la solución general de la ecuación de Lagrange son:

$$x = h(p, C)$$

$$y = h(p, C)\, g(p) + f(p)$$

siendo C la constante de la familia de curvas. Cada una de las curvas integrales se obtiene determinando el valor de C.

Como en la resolución de la ecuación de Lagrange se divide por dp/dx, entonces adicionalmente tenemos que considerar el caso en el que p' sea cero. Es decir, $p = K$. Los valores de p que sería necesario considerar serían entonces las raíces reales de $p - g(p) = 0$. Por tanto, también son solución de la ecuación de Lagrange las rectas:

$$y = xg(p_1) + f(p_1), \qquad \ldots, \qquad y = xg(p_n) + f(p_n)$$

donde $p_1, \ldots, p_n$ son las raíces anteriormente citadas.

Ejemplo

La ecuación $y = x(p^2 + 1) + p^3 - 1$ es de Lagrange.

3.2. Ecuación de Clairaut

Si en la ecuación de Lagrange tenemos $g(p) = p$, entonces la ecuación $y = xp + f(p)$ se llama ecuación de Clairaut. Al ser un caso particular de la ecuación de Lagrange se resuelve de modo similar a aquélla. Por tanto, se deriva respecto de x:

$$\frac{dy}{dx} = p = p + x\frac{dp}{dx} + f'(p)\frac{dp}{dx}$$

Por tanto: $$[x + f'(p)]\frac{dp}{dx} = 0$$

Entonces, o bien $dp/dx = 0$, o bien $x + f'(p) = 0$, es decir $x = -f'(p)$.

Si $dp/dx = 0$, por lo tanto $p = C$ y la solución general de la ecuación de Clairaut es la familia de rectas:

$$y = Cx + f(C)$$

En el caso de que $x = -f'(p)$, entonces tomando p como parámetro, la ecuación de Clairaut tiene una solución singular que es:

$$x = -f'(p); \qquad y = -pf'(p) + f(p)$$

Esta solución, gráficamente, es la curva envolvente de la familia de rectas $y = Cx + f(C)$.

Ejemplo

La ecuación $y = xp + p^2 - 7$ es una ecuación de Clairaut.

Nota

Las ecuaciones $x = x(p, C)$, $y = y(p, C)$ constituyen la solución general de las ecuaciones de Lagrange y Clairaut expresada en forma de ecuaciones paramétricas, siendo p el parámetro y C la constante de la familia.

Por ser la solución general verifican que:

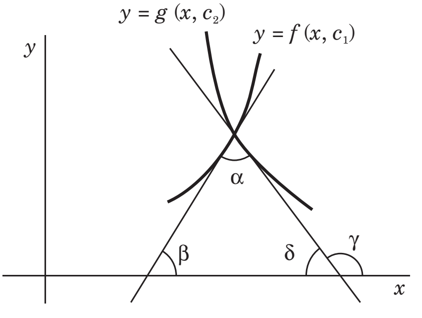
$$\begin{aligned} &M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = \\ &= M(x(p, C), y(p, C))\,x'(p, C)\,dp + \\ &+ N(x(p, C), y(p, C))\,y'(p, C)\,dp. \end{aligned}$$

4. ALGUNAS APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

4.1. Problemas de trayectorias

Sean $y = f(x, C_1)$, $y = g(x, C_2)$ las ecuaciones de dos familias de curvas, dependientes cada una de un parámetro. Si cada curva de la familia $y = f(x, C_1)$ corta bajo un ángulo constante a todas y cada una de las curvas de la familia $y = g(x, C_2)$ y viceversa, entonces cada curva de cada familia se llama trayectoria de la otra familia. En el caso de que las curvas se corten en ángulo recto se denominan familias de trayectorias ortogonales.

En el caso general de trayectorias oblicuas, partimos de la familia de curvas $y = f(x, C_1)$. Para determinar las trayectorias a α^o a esta familia de curvas y teniendo en cuenta los ángulos mostrados en la figura adjunta, se tiene:



$$\alpha + \beta + \delta = 180^o \; ; \qquad \gamma + \delta = 180^o \; ; \qquad \text{luego} \qquad \alpha + \beta = \gamma$$

Como $\operatorname{tg}\beta = f'$ y $\operatorname{tg}\gamma = g'$, entonces:

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(\gamma - \alpha) = \frac{\operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\gamma \operatorname{tg}\alpha}$$

es decir:
$$f' = \frac{g' - \operatorname{tg}\alpha}{1 + g' \operatorname{tg}\alpha} \qquad (*)$$

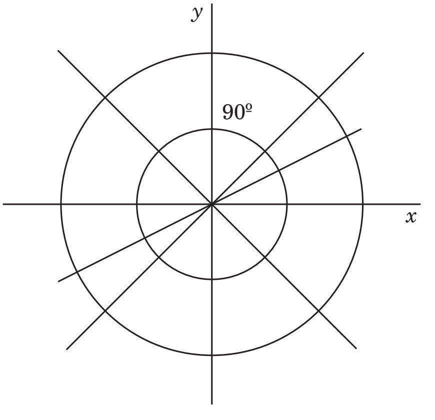
Por tanto, a partir de la ecuación de la familia $y = f(x, C_1)$, obtenemos su ecuación diferencial $h(x, y, y') = 0$. Y la ecuación diferencial de la familia de trayectorias a α^o a la familia $y = f(x, C_1)$ es:

$$h\left(x, \; y, \; \frac{y' - \operatorname{tg}\alpha}{1 + y' \operatorname{tg}\alpha}\right) = 0$$

sustituyendo en la expresión $h(x, y, y') = 0$, y' por la expresión (*). Se resuelve esta ecuación y se obtiene $y = g(x, C_2)$, familia de trayectorias a α^o a la familia $y = f(x, C_1)$. En el caso de que se quieran calcular las trayectorias ortogonales, entonces el cambio que se realiza en $h(x, y, y') = 0$ es y' por $-1/y'$.

Ejemplo

Sean las circunferencias concéntricas centradas en el origen de coordenadas. Se observa fácilmente que las rectas que pasan por el origen constituyen trayectorias ortogonales para la familia.



En este caso, encontrar las trayectorias ha sido geométricamente obvio. Para situaciones más complicadas se hace necesario el método analítico de cálculo expuesto anteriormente.

4.2. Problemas geométricos

Como ya se ha comentado anteriormente, la ecuación $f(x, y, C) = 0$ referida a un sistema de ejes rectangulares representa para cada valor de C una curva plana, es decir, es una familia de curvas dependiente del parámetro C.

Si eliminamos C en la ecuación de la familia obtenemos la ecuación diferencial de la misma $h(x, y, y') = 0$, o bien $y' = g(x, y)$. La pendiente de la recta tangente a la curva integral de la ecuación dada en el punto (x, y) viene dada por $g(x, y)$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Por tanto, aquellos problemas geométricos en los que intervenga el valor de la pendiente a una curva en cada punto, darán lugar a ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.

5. APÉNDICE: ALGUNAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN

5.1. Ecuaciones del tipo $y'' = f(x)$

Las ecuaciones diferenciales de segundo orden del tipo:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$$

es decir, aquéllas donde no aparecen explícitamente ni la variable dependiente y ni la primera derivada y', se resuelven según el método descrito en el punto 2.1.

De este modo, la solución general se obtiene integrando dos veces en la ecuación dada. Por tanto:

$$\frac{dy}{dx} = \int f(x)\,dx + K; \qquad y(x) = \int \left[\int f(x)\,dx + K \right] dx + C$$

Ejemplo

Se puede resolver según este método la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 4x^3$$

5.2. Otras ecuaciones diferenciales de segundo orden

En este apartado nos vamos a referir a las ecuaciones diferenciales de segundo orden de los siguientes tipos:

a) $$\frac{d^2y}{dx^2} = f(y)$$

b) $$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, \frac{dy}{dx}\right)$$

c) $$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(y, \frac{dy}{dx}\right)$$

Ejemplos

Un ejemplo para cada uno de los tipos anteriores es:

a) $$\frac{d^2y}{dx^2} = 4y + \operatorname{sen} y$$

b) $$x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 0$$

c) $$y\frac{d^2y}{dx^2} = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

Estos tres tipos de ecuaciones se resuelven reduciendo el orden de la ecuación por medio del cambio de variable:

$$z = \frac{dy}{dx}$$

Esta reducción de orden es directa en las ecuaciones del tipo b, donde la ecuación se transforma en:

$$\frac{dz}{dx} = f(x, z)$$

En cambio, en las ecuaciones de los tipos a y c, para resolver la ecuación hay que considerar la y como la nueva variable independiente, de modo que el cambio $z = dy/dx$ se completa con:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\,\frac{dy}{dx} = z\frac{dz}{dy}$$

Por tanto, al realizar el cambio de variable en las ecuaciones de los tipos a y c, quedan las siguientes ecuaciones de primer orden:

$$z\frac{dz}{dy} = f(y); \qquad z\frac{dz}{dy} = f(y, z)$$

Se resuelve la ecuación correspondiente de primer orden y luego se deshace el cambio de variable realizado.

Problemas resueltos

1 **Resolver la ecuación diferencial: $y' = \cos 3x + 5$.**

La ecuación se puede resolver integrando directamente de la siguiente forma:

$$\int dy = \int (\cos 3x + 5)\, dx = \int \cos 3x\, dx + \int 5\, dx$$

Con lo que la solución general de la ecuación dada es la familia de funciones:

$$y = \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + 5x + C$$

---

2 **Integrar la ecuación $y'' = e^x$.**

Observamos que se trata de una ecuación diferencial de segundo orden de la forma $y'' = f(x)$, por lo que se resuelve con el mismo método del problema 1 integrando dos veces consecutivamente.

Integrando una primera vez se obtiene: $y' = e^x + C_1$.

Volviendo a integrar obtenemos la solución general de la ecuación planteada:

$$y = e^x + C_1 x + C_2$$

---

3 **Resolver la ecuación: $(1 + e^x)\, yy' = e^x$**

Se trata de una ecuación en variables separadas, por lo que éstas se separan dividiendo entre $1 + e^x$:

$$yy' = \frac{e^x}{1+e^x} \quad \Leftrightarrow \quad y\frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{1+e^x} \quad \Leftrightarrow \quad y\, dy = \left(\frac{e^x}{1+e^x}\right) dx$$

Integrando en los dos miembros:

$$\int y\,dy = \int\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)dx$$

Se obtiene la siguiente solución general:

$$\frac{y^2}{2} = \text{Ln}\,(1+e^x)+C$$

Para tener la seguridad de que ésta es la solución general, debemos cerciorarnos de no haber excluido ninguna solución. Se nos pudo quedar en el camino la posibilidad $1 + e^x = 0$, lo cual no puede ocurrir ya que la función exponencial nunca toma valores negativos. Por tanto, no se ha excluido ninguna solución.

De este modo la solución general del problema es:

$$\frac{y^2}{2} = \text{Ln}\,(1+e^x)+C \quad \Leftrightarrow \quad y^2 = 2\,\text{Ln}\,(1+e^x)+K$$

---

4 Integrar la ecuación $(x-4)\,y^4\,dx - x^3\,(y^2-3)\,dy = 0$.

Observamos que responde a la forma general de las ecuaciones de variables separadas. Por tanto, separamos las variables dividiendo entre y^4x^3:

$$\frac{x-4}{x^3}\,dx - \frac{y^2-3}{y^4}\,dy = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x-4}{x^3}\,dx = \frac{y^2-3}{y^4}\,dy$$

Integrando en cada miembro se obtiene:

$$\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{4}{x^3}\right)dx = \int\left(\frac{1}{y^2}-\frac{3}{y^4}\right)dy$$

Cuya solución es: $$-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{y}-\frac{1}{y^3}=C$$

Hemos podido excluir los casos en que $y^4x^3 = 0 \;\Rightarrow\; y = 0,\;\; x = 0$.

Sustituyendo en la ecuación, observamos que $y = 0$ es solución y que no está entre las dadas anteriormente para ningún valor de la constante C, luego habrá que incluirla. De esta manera, la solución general de la ecuación es:

$$-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{y}-\frac{1}{y^3}=C; \qquad y=0$$

---

5 **Resolver el problema de condición inicial:**

$$(x-4)\,y^4\,dx - x^3\,(y^2-3)\,dy = 0\ ; \qquad y\,(1)=1$$

De todas las soluciones posibles al problema, queremos la que pasa por el punto de coordenadas (1, 1). Obtenida la solución general de la ecuación (ver ejercicio 4) debemos fijar el valor de la constante C con la condición señalada:

$$y\,(1)=1 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{1}+\frac{2}{1^2}+\frac{1}{1}-\frac{1}{1^3}=C$$

Con lo que el valor de C es 1. Como la otra solución $y = 0$ no pasa por el punto (1, 1), la única solución para este problema de Cauchy es:

$$-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{y}-\frac{1}{y^3}=1$$

---

6 **Resolver la ecuación diferencial $(x^2-3y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$.**

Veamos que responde al tipo de ecuación diferencial homogénea, en este caso:

$$M\,(x,\,y) = x^2-3y^2; \qquad N\,(x,\,y) = 2xy$$

Puede comprobarse que ambas son funciones homogéneas de grado dos, por lo que la ecuación es homogénea. Realizamos el cambio de variable indicado para este tipo de ecuaciones:

$$y = ux \quad \Rightarrow \quad dy = x\,du + u\,dx$$

Sustituyendo en la ecuación este cambio:

$$x^2\,(1-3u^2)\,dx + x^2\,2u\,(u\,dx + x\,du) = 0$$

Dividiendo entre x^2:

$$(1-3u^2+2u^2)\,dx + 2ux\,du = 0$$

Ecuación que responde al tipo de variables separadas.
Separamos las variables dividiendo entre $(1 - u^2)\,x$:

$$\frac{dx}{x} + \frac{2u}{1-u^2}\,du = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dx}{x} = -\frac{2u}{1-u^2}\,du$$

Integrando la ecuación:

$$\mathrm{Ln}\,|x| = \mathrm{Ln}\,|1 - u^2| + C \quad \Leftrightarrow \quad x = K\,(1 - u^2)$$

Se deshace el cambio $u = y/x$:

$$x = K\,[1 - (y/x)^2] \quad \Leftrightarrow \quad Kx^3 = x^2 - y^2$$

Para verificar si es ésta la solución general, debemos comprobar si se ha excluido alguna solución por las operaciones realizadas para llegar a la solución obtenida. Se dividió por la cantidad $(1 - u^2)\,x$, lo que no permite las posibilidades: $x = 0$, $1 - u^2 = 0$.

$$(1 - u^2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad y = \pm\, x$$

Si volvemos a la expresión de la solución encontrada $Kx^3 = x^2 - y^2$ verificamos que estas funciones se encuentran en ella para el valor de $K = 0$. Son, por lo tanto, soluciones; pero no las hemos excluido. De esta forma, la solución general de la ecuación es:

$$Kx^3 = x^2 - y^2$$

---

7 **Resolver la ecuación $(x + y - 2)\,dx + (x - y + 4)\,dy = 0$.**

Esta ecuación responde al tipo de reducible a homogénea. Tomemos las rectas:

$$x + y - 2 = 0, \qquad x - y + 4 = 0$$

Puede comprobarse (resolviendo el sistema) que se cortan en el punto $(-1, 3)$ con lo que el cambio adecuado será:

$$x = X - 1 \quad \Rightarrow \quad dx = dX$$

$$y = Y + 3 \quad \Rightarrow \quad dy = dY$$

Sustituyendo las expresiones en la ecuación obtenemos:

$$(X + Y)\,dX + (X - Y)\,dY = 0 \qquad \text{Ecuación homogénea en } X,\ Y$$

Para resolverla, seguimos el método explicado anteriormente para este tipo de ecuaciones, y realizamos el siguiente cambio:

$$Y = uX \quad \Rightarrow \quad dY = u\ dX + X\ du$$

Lo llevamos a la ecuación:

$$(1 + 2u - u^2)\ dX + X\ (1 - u)\ du = 0$$

Obtenemos una ecuación de variables separadas. Dividiendo por:

$$(1 + 2u - u^2)\ X$$

$$\frac{dX}{X} = \frac{-(1-u)}{1+2u-u^2}\,du$$

Resolvemos integrando la expresión obtenida:

$$\text{Ln}\ |X| + (1/2)\ \text{Ln}\ |1 + 2u - u^2| = K \quad \Leftrightarrow \quad X\ (1 + 2u - u^2)^{1/2} = C$$

Deshaciendo los cambios realizados:

$$u = Y/X; \qquad X = x + 1; \qquad Y = y - 3$$

obtenemos como solución la familia de funciones:

$$(x+1)^2\left[1 + 2\,\frac{y-3}{x+1} - \left(\frac{y-3}{x+1}\right)^2\right] = C$$

Para poder hablar de solución general al problema debemos verificar si se ha excluido alguna solución. Esto pudo suceder al dividir por $(1 + 2u - u^2)\ X$, donde no se permiten las posibilidades:

a) $(1 + 2u - u^2) = 0$ cuya solución en la variable u es: $u = 1 \pm \sqrt{2}$; y en la variable y: $y = \left[1 \pm \sqrt{2}\right]x + \left[4 \pm \sqrt{2}\right]$

b) $X = 0$ que implica que $x = -1$

Sustituyendo en la ecuación podemos comprobar que no son solución, con lo que la familia dada es la solución general.

8 **Integrar la ecuación** $(x + y - 1)\, dx + (2x + 2y - 1)\, dy = 0.$

Observamos que en este caso, la ecuación es reducible a homogénea donde las rectas: $x + y - 1 = 0$, $2x + 2y - 1 = 0$ son paralelas, con lo que el cambio adecuado es $u = x + y$ ó $u = 2x + 2y$.

Tomemos $u = x + y$, con lo que trabajamos con las variables:

$$x = x$$

$$y = u - x \quad \Rightarrow \quad dy = du - dx$$

La ecuación se convierte en:

$$(u - 1)\, dx + (2u - 1)\, (du - dx) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -u\, dx + (2u - 1)\, du = 0$$

Ecuación de variables separadas

Dividimos por u para separar las variables:

$$-dx + \frac{2u - 1}{u} du = 0 \quad \Leftrightarrow \quad dx = 2\, du - \frac{1}{u} du$$

Integrando: $x = 2u - \text{Ln}\, |u| + C$

Deshacemos el cambio realizado $u = x + y$:

$$x = 2\, (x + y) - \text{Ln}\, |x + y| + C$$

Se comprobará si se ha eliminado alguna solución al dividir entre u:

$$u = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = -x$$

Sustituyendo la función $y = -x$ en la ecuación de partida se observa que la verifica. Con ello la solución general del problema es:

$$x = 2\, (x + y) - \text{Ln}\, |x + y| + C$$

$$y = -x$$

---

9 **Encontrar la solución general de la ecuación:**

$$(3x^2 + 4xy)\, dx + (2x^2 + 2y)\, dy = 0$$

Verificamos que la ecuación es exacta:

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial (2x^2 + 2y)}{\partial x} = 4x; \qquad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial (3x^2 + 4xy)}{\partial y} = 4x$$

Por tanto, existe una función $F(x, y)$ tal que

$$dF = (3x^2 + 4xy)\,dx + (2x^2 + 2y)\,dy \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 + 4xy; \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 2x^2 + 2y$$

Elegimos cualquiera de las igualdades, por ejemplo la primera, e integramos:

$$F(x, y) = \int (3x^2 + 4xy)\,dx = \frac{3x^3}{3} + 4y\,\frac{x^2}{2} + \Phi(y) = x^3 + 2x^2y + \Phi(y)$$

Para encontrar $\Phi(y)$ igualamos la derivada respecto de y de esta función $F(x, y)$ determinada, con $N(x, y)$:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2x^2 + 2y = 2x^2 + \frac{d\Phi}{dy} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\Phi}{dy} = 2y$$

Integrando la expresión se obtiene el valor de $\Phi(y) = y^2 + C$. Con esto, la función buscada es:

$$F(x, y) = x^3 + 2x^2y + y^2 + C$$

Y la solución general de la ecuación diferencial es:

$$x^3 + 2x^2y + y^2 = K$$

---

10 Resolver la ecuación diferencial $y^2 + (xy + 1)\,y' = 0$, sabiendo que admite un factor integrante que es función de xy.

La ecuación es: $y^2\,dx + (xy + 1)\,dy = 0$

Donde $M(x, y) = y^2$

$N(x, y) = xy + 1$

Como el factor integrante sabemos que depende de xy, hacemos $z = xy$, por tanto $\mu = \mu(x \cdot y) = \mu(z)$. Aplicando la regla de la cadena:

$$\frac{\partial \operatorname{Ln} \mu}{\partial x} = \frac{d \operatorname{Ln} \mu}{dz} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{d \operatorname{Ln} \mu}{dz} y$$

$$\frac{\partial \operatorname{Ln} \mu}{\partial y} = \frac{d \operatorname{Ln} \mu}{dz} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{d \operatorname{Ln} \mu}{dz} x$$

Y sustituyendo en la ecuación general del factor integrante:

$$N \frac{\partial \operatorname{Ln} \mu}{\partial x} - M \frac{\partial \operatorname{Ln} \mu}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$(xy + 1)\, y \frac{d \operatorname{Ln} \mu}{dz} - y^2 x \frac{d \operatorname{Ln} \mu}{dz} = 2y - y = y$$

Simplificamos y agrupamos términos realizando el cambio $z = xy$:

$$\frac{d \operatorname{Ln} \mu}{dz} (xy + 1 - xy) = 1$$

$$\frac{d \operatorname{Ln} \mu}{dz} = 1; \qquad d \operatorname{Ln} \mu = dz$$

Integramos y deshacemos el cambio:

$$\operatorname{Ln} \mu = z \quad \Rightarrow \quad \mu = \mu\,(z) = e^z$$

$$\mu = \mu\,(x,\, y) = e^{xy}$$

Multiplicamos la ecuación por el factor integrante e^{xy}:

$$y^2 \mathrm{e}^{xy}\, dx + \mathrm{e}^{xy}\,(xy + 1)\, dy = 0$$

Comprobamos que ahora la ecuación sí es exacta:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = e^{xy}\,(2y + y^2 x) = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Resolvemos la ecuación con la técnica habitual y obtenemos la solución general:

$$ye^{xy} = C$$

Observación

La ecuación también admite un factor integrante que es sólo función de y

$$\mu = \mu\,(y)$$

11 **Resolver el problema de Cauchy**

$$\boldsymbol{(x^2 + 1)\, y' + 4xy = 0}$$
$$\boldsymbol{y\,(2) = 1}$$

Observamos que se trata de una ecuación lineal homogénea de primer orden. Buscamos primero la solución general separando las variables:

$$y\,(x) = Ke^{-\int \frac{4x}{x^2+1}\,dx} \quad \Leftrightarrow \quad y\,(x) = Ke^{-2\,\mathrm{Ln}\,(x^2+1)} \quad \Leftrightarrow \quad y\,(x) = \frac{K}{(x^2+1)^2}$$

La solución particular que buscamos es la curva que pasa por el punto (2,1). Para obtenerla, imponemos a las funciones encontradas que pasen por él.

$$y\,(2) = 1 = \frac{K}{(2^2+1)^2} \quad \Leftrightarrow \quad K = 25$$

La solución al problema de Cauchy es la función:

$$y\,(x) = \frac{25}{(x^2+1)^2}$$

---

12 **Encontrar la solución general de la ecuación** $\boldsymbol{y' + 2xy = 4x}$**.**

Se trata de una ecuación lineal completa de primer orden. Por tanto, tomemos la homogénea asociada $y' + 2xy = 0$.

La solución general de esta ecuación es:

$$y = Ke^{-\int p\,(x)\,dx} \quad \Leftrightarrow \quad y = Ke^{-x^2}$$

Aplicando el método de Lagrange, suponemos que la solución de la completa es:

$$y = K\,(x)\,e^{-x^2}$$

Por tanto, como es solución ha de verificar la ecuación. Calculamos:

$$y' = K'\,(x)\,e^{-x^2} - 2xK\,(x)\,e^{-x^2}$$

y sustituimos en la ecuación $y' + 2xy = 4x$:

$$y' = K'(\mathrm{x})\, e^{-x^2} - 2xK(x)\, e^{-x^2} + 2xK(x)\, e^{-x^2} = 4x \quad \Leftrightarrow$$
$$K'(\mathrm{x})\, e^{-x^2} = 4x \quad \Leftrightarrow \quad K'(x) = 4xe^{x^2} \quad \Leftrightarrow \quad K(x) = 2e^{x^2} + C$$

De esta forma, la solución se escribe como:

$$y(x) = K(x)\, e^{-x^2} \quad \Leftrightarrow \quad y = [2e^{x^2} + C]\, e^{-x^2} = 2 + Ce^{-x^2}$$

Observación
Puede comprobarse que:

- $y = 2$ es la solución particular de la ecuación completa, obtenida por el método de Lagrange.
- $y = Ce^{-x^2}$ es la solución general de la homogénea asociada, como ya habíamos calculado.

---

13 **Resolver el problema de Cauchy:**

$$\boldsymbol{(x^2 + 1)\, y' + 4xy = x}$$
$$\boldsymbol{y(2) = 1}$$

Observamos que se trata de una ecuación lineal completa. En este caso vamos a tratarla como una ecuación de factor integrante, por lo que vamos a multiplicar la ecuación por el factor integrante indicado en el apartado 2.7.5 (B).

Normalizamos la ecuación:

$$y' + \frac{4x}{x^2+1}\, y = \frac{x}{x^2+1}$$

El factor integrante es:

$$e^{\int p(x)\, dx} = e^{\int \frac{4x}{x^2+1} dx} = e^{2\,\mathrm{Ln}\,(x^2+1)} = (x^2+1)^2$$

Multiplicamos la ecuación por el factor integrante:

$$y'(x^2+1)^2 + 4xy(x^2+1) = x(x^2+1) \quad \Leftrightarrow$$
$$[4xy(x^2+1) - x(x^2+1)]\, dx + (x^2+1)^2\, dy = 0$$

Comprobamos las condiciones para que la ecuación sea exacta:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 4x(x^2+1); \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 4x(x^2+1)$$

Con ello, aplicando el método estudiado para este tipo de ecuaciones se obtiene la solución general:

$$(x^2+1)^2 y - \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} = K$$

Imponiendo la condición inicial del problema $y(2) = 1$ se fija $K = 19$:

$$(x^2+1)^2 y - \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} = 19$$

---

14 Resolver la ecuación $y' + y = xy^3$.

Es ésta una ecuación del tipo Bernouilli para $p = 3$. Seguiremos los pasos indicados para su resolución:

1º. Tomamos: $$u = y^{1-3} = y^{-2}$$

Con ello: $$u' = -2y^{-3}y' \quad \Leftrightarrow \quad y' = \frac{-u'y^3}{2}$$

2º. Realizando el cambio de variable en la ecuación tenemos:

$$\frac{-u'y^3}{2} + y = xy^3$$

Multiplicando por y^{-3}:

$$\frac{-u'}{2} + y^{-2} = x \quad \Leftrightarrow \quad u' - 2u = -2x$$

la cual es una ecuación lineal completa en $u(x)$, que al resolverla nos da la solución:

$$u(x) = x + \frac{1}{2} + Ce^{2x}$$

3º. Deshaciendo el cambio: $u = y^{-2}$, la solución al problema queda:

$$y^{-2} = x + \frac{1}{2} + Ce^{2x}, \qquad \frac{1}{y^2} = x + \frac{1}{2} + Ce^{2x}$$

Observación
Es importante señalar que por los cambios realizados hemos podido excluir la posibilidad $y = 0$, que es solución de este tipo de ecuaciones. Por tanto, habrá que incluirla.

La solución general de la ecuación dada es:

$$\frac{1}{y^2} = x + \frac{1}{2} + Ce^{2x}; \qquad y = 0$$

---

15 **Encontrar la solución general de la ecuación**

$$\boldsymbol{y' = y^2 - 2xy + 1 + x^2}$$

Puede verificarse que responde a una ecuación de tipo Riccati. Lo primero será encontrar una solución particular de ella. Pruébese que $y = x$ verifica la ecuación y, por lo tanto, es una solución particular. De este modo, siguiendo los pasos indicados en el apartado 2.7.6 (B):

1º. Realizamos el cambio $y = g(x) + 1/u$. En este caso $g(x) = x$:

$$y = x + \frac{1}{u} \quad \Leftrightarrow \quad y' = 1 - \frac{u'}{u^2}$$

2º. Sustituyendo en la ecuación:

$$1 - \frac{u'}{u^2} = \left(x + \frac{1}{u}\right)^2 - 2x\left(x + \frac{1}{u}\right) + 1 + x^2 \quad \Leftrightarrow \quad u' = -1$$

(expresión a la que se llega desarrollando las operaciones y multiplicando la igualdad por u^2).

3º. Esta es una ecuación lineal en u, más sencillamente una ecuación de variables separadas. Resolviéndola:

$$u = -x + C$$

4º. Deshaciendo el cambio: $u = 1/(y - x)$:

$$1 = (y - x)\ (C - x)$$

5º. Añadiendo la solución que perdemos con las transformaciones, la solución general de la ecuación dada será:

$$1 = (y - x)\ (C - x); \qquad y = x$$

---

16 **Obtener la solución general de la ecuación:**

$$\left(\frac{y}{3x} + y^4 \operatorname{Ln} x\right) dx - dy = 0$$

Expresamos la ecuación como $y' - \dfrac{y}{3x} = y^4 \operatorname{Ln} x$ observándose que se trata de una ecuación de Bernouilli con $p = 4$. Se realiza el cambio de variable: $u = y^{1-4} = y^{-3}$.

Llevando este cambio a la ecuación se obtiene: $u' + u/x = -3 \operatorname{Ln} x$ que es una ecuación lineal completa de primer orden.

– Resolución de la lineal homogénea asociada:
  Separando variables e integrando, la solución general es $ux = C$.
– Resolución de la completa:
  Aplicando el método de Lagrange, suponiendo que la solución de la ecuación completa es de la forma: $ux = C(x)$, sustituyendo esta función en la ecuación queda:

$$C'(x) = -3x \operatorname{Ln} x; \qquad C(x) = 3\left[\frac{x^2}{2}\operatorname{Ln} x - \frac{x^2}{4}\right] + K$$

Sustituyendo esta expresión en $ux = C(x)$ se obtiene la solución general de la ecuación como:

$$u(x) = \frac{3\left[\dfrac{x^2}{2}\operatorname{Ln} x - \dfrac{x^2}{4}\right] + K}{x}$$

Sólo resta deshacer el cambio:

$$y = \frac{1}{\sqrt[3]{\dfrac{3x}{2}\left[\operatorname{Ln} x - \dfrac{1}{2}\right] + \dfrac{K}{x}}}$$

17 **Obtener la expresión de la familia de trayectorias ortogonales a la familia de curvas $y = Cx^3$.**

1º. Cálculo de la ecuación diferencial asociada a la familia dada:

$$y = Cx^3; \qquad y' = 3Cx^2.$$

Entre estas dos ecuaciones se elimina la constante C, quedando:

$$y' = 3\,\frac{y}{x}$$

2º. Ecuación asociada a las trayectorias ortogonales:
Se busca la familia de curvas que verifique

$$y' = -\frac{x}{3y}$$

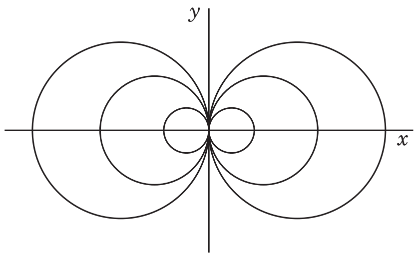
3º. Resolución de la ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales:
La ecuación planteada es de variables separadas: $3y\,dy = -x\,dx$, integrando se obtiene:

$$\frac{x^2}{2} + 3\,\frac{y^2}{2} = K \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 3y^2 = C$$

---

18 **Hallar las trayectorias ortogonales a la familia de circunferencias cuyo centro está situado en el eje *OX* y son tangentes al eje *OY* en el origen.**

La familia dada es: $(x - a)^2 + y^2 = a^2, \quad a \in \mathbb{R}$.



1º. Cálculo de la ecuación diferencial asociada a la familia de circunferencias:

$$(x - a)^2 + y^2 = a^2$$

Derivando implícitamente: $2\,(x - a) + 2yy' = 0$

Se elimina a entre las dos expresiones obteniéndose:

$$y^2 - x^2 = 2xyy' \quad \Leftrightarrow \quad y' = (y^2 - x^2)/2xy$$

2º. Cálculo de la ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales:
Las trayectorias buscadas deben verificar que:

$$y' = \frac{-2xy}{y^2 - x^2}$$

3º. Resolución de la ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales:
Esta ecuación puede tratarse como homogénea o como una ecuación de factor integrante. Siguiendo este último procedimiento se tiene:

$$2xy\; dx + (y^2 - x^2)\; dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x, \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = -2x$$

Busquemos un factor integrante que sólo dependa de y:

$$\frac{\partial \operatorname{Ln} \mu}{\partial y} = -\frac{1}{M}\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] = -\frac{1}{2xy}[2x + 2x] = -\frac{2}{y}$$

$$\mu = \mu\,(y) = \frac{1}{y^2}$$

Multiplicando la ecuación por este factor se transforma en una ecuación exacta, como comprobamos a continuación:

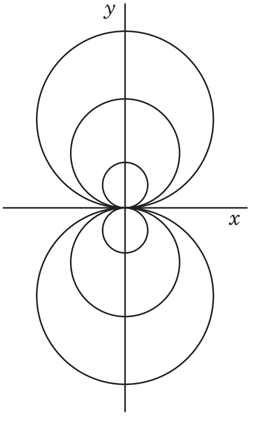
$$\frac{2xy}{y^2}\,dx + \frac{y^2 - x^2}{y^2}\,dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{-2x}{y^2} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

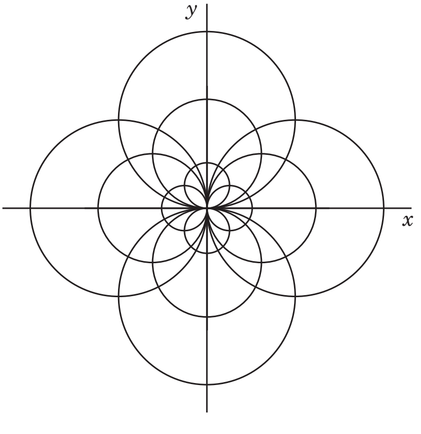
Resolviendo esta ecuación por el método indicado en el apartado 2.6 se obtiene que la familia de trayectorias ortogonales pedida es:

$$x^2 + y^2 = Ky \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + (y - K/2)^2 = (K/2)^2$$

Esta ecuación corresponde a la familia de circunferencias con centro en el eje OY y tangentes al eje OX en el origen, como puede verse en la siguiente figura:



A continuación se representan las dos familias de circunferencias en el mismo gráfico:



---

19 **Determinar k para que las siguientes familias de curvas sean ortogonales:**

$$x^k + y^k = c^k; \qquad y = x + a$$

1º. Se determinarán las ecuaciones diferenciales asociadas a cada una de las familias:

a) $x^k + y^k = c^k$. Derivando implícitamente: $kx^{k-1} + ky^{k-1}y' = 0$. Despejando el valor de y':

$$y' = \frac{-x^{k-1}}{y^{k-1}}$$

b) $y = x + a$. Derivando: $y' = 1$. Con lo que la ecuación diferencial de esta familia es: $y' = 1$.

2º. Imponemos que para que las familias sean ortogonales deben cumplir que: $y_1' = -1/y_2'$, es decir:

$$1 = \frac{y^{k-1}}{x^{k-1}}$$

Ecuación que se cumple si $k = 1$.

---

20 Encontrar las líneas de fuerza del campo eléctrico cuyas curvas equipotenciales son: $\cos y = ae^{-x}$.

Las curvas equipotenciales y las líneas de fuerza de un campo eléctrico constituyen familias de trayectorias ortogonales, por ello el problema se reduce a determinar las trayectorias ortogonales de $\cos y = ae^{-x}$.

Derivando la ecuación: $-y' \operatorname{sen} y = -ae^{-x}$. Eliminando a entre las dos ecuaciones se obtiene la ecuación diferencial asociada a la familia:

$$y' = \frac{\cos y}{\operatorname{sen} y}$$

La ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales será:

$$y' = \frac{-\operatorname{sen} y}{\cos y}$$

ecuación de variables separadas, integrando se obtiene la familia de las líneas de fuerza del campo eléctrico:

$$-\operatorname{Ln}(\operatorname{sen} y) = x + C \quad \Leftrightarrow \quad Ke^{x} \operatorname{sen} y = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{sen} y = Ke^{-x}$$

---

21 **Resolver la ecuación diferencial**

$$(y^3 - kxy^4 - 2x)\,dx + (3xy^2 + 20x^2y^3)\,dy = 0$$

eligiendo un valor de *k* para poder hacerlo.

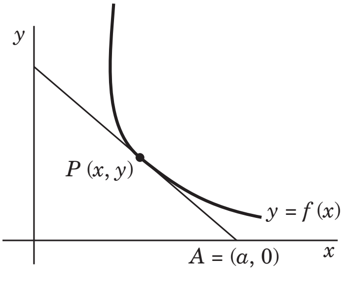
Veamos si la ecuación es exacta:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial (y^3 - kxy^4 - 2x)}{\partial y} = 3y^2 - 4kxy^3$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial (3xy^2 + 20x^2y^3)}{\partial x} = 3y^2 + 40xy^3$$

estas dos expresiones coinciden si $k = -10$. De esta forma, eligiendo este valor de k la ecuación puede resolverse como una exacta. Aplicando el método indicado en el apartado 2.5, la solución general es: $y^3x + 5x^2y^4 - x^2 = C$.

22 **Considérese la familia de curvas que verifican que los puntos medios de los segmentos de sus tangentes comprendidos entre el punto de contacto y el eje *OX* describen la parábola $y^2 = 2x$. Calcular de entre todas ellas la que pasa por el punto (1, 2).**



1º. La recta tangente por cualquier punto (x, y) de la curva será:

$$Y - y = y'(x)\,[X - x]$$

2º. Calculemos el punto de contacto de ella con el eje OX que será el punto $A = (a, 0)$:

$$0 - y = y'\,[a - x] \quad \Leftrightarrow \quad a = x - y/y'$$

3º. El punto medio entre el punto por donde se trazó la tangente (x, y) y el punto A tendrá por coordenadas:

$$x_m = \frac{2x - \dfrac{y}{y'}}{2}, \qquad y_m = \frac{y}{2}$$

Dicho punto describe la parábola $y^2 = 2x$, es decir:

$$\frac{y^2}{4} = 2x - \frac{y}{y'}$$

Operando resulta $(y^2 - 8x)\, y' + 4y = 0$. Ecuación diferencial que puede resolverse como reducible a exacta, con factor integrante $\mu = \mu\,(y)$.

La solución es: $$\frac{4x}{y^2} + \operatorname{Ln} y = K$$

De todas estas curvas interesa la que pasa por (1, 2), luego sustituyendo los valores:

$$K = 1 + \operatorname{Ln} 2.$$

La curva pedida es: $$\frac{4x}{y^2} + \operatorname{Ln} y = 1 + \operatorname{Ln} 2$$

---

23 Resolver la ecuación $y = x\,(y' + 1) + y'^2$.

Se trata de una ecuación de Lagrange. Realizamos el cambio $y' = p$, con lo que la ecuación queda:

$$y = x\,(p + 1) + p^2 \tag{1}$$

Se deriva en ella respecto de x:

$$\frac{dy}{dx} = p = p + 1 + x\frac{dp}{dx} + 2p\frac{dp}{dx}$$

es decir: $$\frac{dp}{dx}(x + 2p) = -1$$

Invirtiendo, tomaremos $x\,(p)$:

$$\frac{dx}{dp} = -x - 2p$$

que es una ecuación diferencial lineal en $x(p)$. Resolviendo por la técnica habitual se tiene:

$$x(p) = Ke^{-p} - 2(p-1)$$

y volviendo a la ecuación (1)

$$y = x(p+1) + p^2; \qquad y = [Ke^{-p} - 2(p-1)](p+1) + p^2$$

De esta forma la solución a la ecuación en paramétricas es:

$$x = Ke^{-p} - 2(p-1)$$
$$y = [Ke^{-p} - 2(p-1)](p+1) + p^2$$

---

24 Resolver la ecuación de Clairaut:

$$\boldsymbol{y = xy' + \frac{a}{2y'}}$$

Se trata de una ecuación donde es adecuado el cambio $y' = p$:

$$y = xp + \frac{a}{2p} \tag{1}$$

Derivando en esta ecuación respecto de x:

$$\frac{dy}{dx} = p = p + x\frac{dp}{dx} - \frac{a}{2p^2}\frac{dp}{dx} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dp}{dx}\left[x - \frac{a}{2p^2}\right] = 0$$

De esta ecuación se deduce:

a) $p' = 0$, es decir; la solución es $p = K$. Volviendo a (1):

$$y = xK + \frac{a}{2K}$$

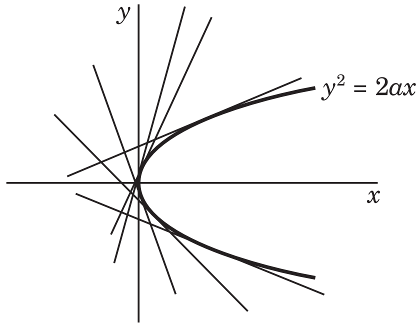
b) A esta familia se debe añadir la posibilidad $x - a/2p^2 = 0$, sustituyendo este valor de x en la ecuación (1):

$$y = p\frac{a}{2p^2} + \frac{a}{2p} = \frac{2a}{2p} = \frac{a}{p} \quad \Leftrightarrow \quad p = \frac{a}{y}$$

con ello: $$x = \frac{a}{2p^2} = \frac{y^2}{2a}, \qquad y^2 = 2ax$$

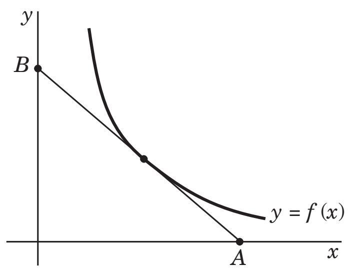
Nota

Esta solución es una parábola, envolvente del haz anterior, como se observa en la siguiente figura:



---

25 Hallar las curvas tales que el producto de los segmentos interceptados por cualquiera de sus tangentes sobre los ejes coordenados es una cantidad constante $K > 0$.



La ecuación de la recta tangente a la curva por cualquier punto (x, y) de ella es:

$$Y - y = y'(x)\,(X - x)$$

Los puntos de corte de esta recta con los ejes OX y OY serán respectivamente:

$$A = (x - y/y', 0); \qquad B = (0, y - xy').$$

Tomemos los segmentos sobre los ejes limitados por estos puntos. Sus longitudes serán respectivamente: $(x - y/y')$ y $(y - xy')$. Con ello la ecuación que expresa que el producto de estas longitudes es constante e igual a K es:

$$(x - y/y')\,(y - xy') = K \quad \Leftrightarrow \quad 2\,xyy' - y'^2x^2 - y^2 = Ky'$$

Llamando $p = y'$ la ecuación a resolver es:

$$y^2 - 2xpy + x^2p^2 + Kp = 0.$$

Tratando la ecuación como una de segundo grado en y se tiene:

$$y = \frac{2xp \pm \sqrt{-4Kp}}{2}; \qquad y = xp \pm \sqrt{-Kp}$$

Nota

Como $K > 0$ entonces la curva tendrá siempre pendiente negativa.

De esta forma, la ecuación a resolver es $y = xp \pm (-Kp)^{1/2}$ que es una ecuación de Clairaut.

a) Tomemos la posibilidad del signo más:

$$y = xp + \sqrt{-Kp}$$

Derivando respecto de x y operando:

$$\left(x - \frac{K}{2\sqrt{-Kp}} \right) \frac{dp}{dx} = 0$$

Por un lado $p = C < 0$; entonces $y = xC + \sqrt{-KC}$. Existe además una solución singular cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x = \dfrac{K}{2\sqrt{-Kp}} \\[2ex] y = \dfrac{Kp}{2\sqrt{-Kp}} + \sqrt{-Kp} \end{cases}$$

Y eliminando p obtenemos la solución singular

$$xy = \frac{K}{4}$$

b) De forma análoga, para la posibilidad del signo menos tenemos como solución general:

$$y = xC - \sqrt{-KC}, \qquad C < 0$$

y la misma solución singular

$$xy = \frac{K}{4}$$

De esta forma las curvas solución son la familia de rectas

$$y = xC + \sqrt{-KC}, \qquad C < 0;$$

y las curvas $\qquad xy = \frac{K}{4}$

---

26 **Dada la ecuación diferencial $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ demostrar que si $\mu_1(x, y), \mu_2(x, y)$ son dos factores integrantes, la solución general de la ecuación es:**

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} = C$$

Diferenciando la expresión dada:

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} = C$$

$$\left(\frac{\partial \mu_2}{\partial x}\mu_1 - \frac{\partial \mu_1}{\partial x}\mu_2\right)dx + \left(\frac{\partial \mu_2}{\partial y}\mu_1 - \frac{\partial \mu_1}{\partial y}\mu_2\right)dy = 0 \tag{1}$$

Como $\mu_1(x, y)$ y $\mu_2(x, y)$ son factores integrantes de la ecuación, al multiplicarla por ellos la ecuación se transforma en exacta y cumple que:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

que para las ecuaciones:

$$\mu_1(x, y)\,M(x, y)\,dx + \mu_1(x, y)\,N(x, y)\,dy = 0$$

$$\mu_2(x, y)\,M(x, y)\,dx + \mu_2(x, y)\,N(x, y)\,dy = 0$$

se obtiene:

$$\mu_1\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] = N\frac{\partial \mu_1}{\partial x} - M\frac{\partial \mu_1}{\partial y} \tag{2}$$

$$\mu_2 \left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right] = N \frac{\partial \mu_2}{\partial x} - M \frac{\partial \mu_2}{\partial y} \qquad (3)$$

Realizamos la operación: (2) μ_2 – (3) μ_1:

$$N \left[\mu_2 \frac{\partial \mu_1}{\partial x} - \mu_1 \frac{\partial \mu_2}{\partial x} \right] - M \left[\mu_2 \frac{\partial \mu_1}{\partial y} - \mu_1 \frac{\partial \mu_2}{\partial y} \right] = 0 \qquad (4)$$

Despejando dy/dx de la ecuación (1) y M/N de (4) se obtiene que:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M}{N}$$

que es la ecuación de partida.

---

27 **Calcular la solución general de:** $\boldsymbol{\dfrac{d^2y}{dx^2} = 4y}$

Se trata de una ecuación diferencial de segundo orden de la forma $y'' = f(y)$. Se realiza el cambio de variable indicado en el apartado 5.2, en las variables z, y. La ecuación dada se convierte en:

$$z \frac{dz}{dy} = 4y, \qquad z\,dz = 4y\,dy$$

Integramos esta ecuación diferencial en variables separadas:

$$\int z\,dz = \int 4y\,dy; \qquad \frac{z^2}{2} = 4\frac{y^2}{2} + K; \qquad z^2 = 4y^2 + K$$

y deshaciendo los cambios introducidos:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 4y^2 + K; \qquad \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{4y^2 + K}; \qquad \int \frac{dy}{\sqrt{4y^2 + K}} = \pm \int dx$$

$$\frac{1}{2} \operatorname{arg\,sh} \frac{2y}{\sqrt{K}} = \pm x + C; \qquad x = \pm \frac{1}{2} \operatorname{arg\,sh} \frac{2y}{\sqrt{K}} + C$$

---

28 Resolver la ecuación diferencial:

$$\boldsymbol{y\frac{d^2y}{dx^2} = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Aplicando el cambio indicado en el apartado 5.2 para las ecuaciones diferenciales de segundo orden de la forma $y'' = f\,(y, y')$ se obtiene:

$$yz\frac{dz}{dy} = 1 + z^2$$

Integrando esta ecuación diferencial de primer orden de variables separadas:

$$\int \frac{z}{1+z^2}\,dz = \int \frac{dy}{y}; \qquad \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\,(1+z^2) = \mathrm{Ln}\,y + \mathrm{Ln}\,K$$

$$\mathrm{Ln}\left(\frac{\sqrt{1+z^2}}{y}\right) = \mathrm{Ln}\,K \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1+z^2} = Ky$$

Despejamos la variable z y deshacemos el cambio:

$$z = \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{K^2y^2-1}; \qquad \int \frac{dy}{\sqrt{K^2y^2-1}} = \pm\int dx$$

$$\frac{1}{K}\mathrm{Ln}\left(y + \sqrt{y^2 - \frac{1}{K^2}}\right) = \pm x + C$$

---

29 Resolver la ecuación diferencial:

$$\boldsymbol{y\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \left(\frac{dy}{dx}\right)^3}$$

Se trata de una ecuación diferencial de segundo orden para la que es adecuado el cambio $z = y'$. Con ello:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dz}{dx} = z\frac{dz}{dy}$$

Sustituyendo en la ecuación dada:

$$y\,dz + (z - z^2)\,dy = 0$$

que es una ecuación en variables separadas, cuya integración resulta:

$$\text{Ln}\, z - \text{Ln}\,(1 - z) + \text{Ln}\, y = \text{Ln}\, K$$

Eliminando logaritmos se obtiene:

$$yz = K\,(1 - z) \quad \Leftrightarrow \quad z\,(y + K) = K$$

Deshaciendo el cambio $z = y'$ e integrando:

$$\frac{y^2}{2} + Ky = Kx + C$$

---

30 **Se tira una pelota verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 39,2 m/s. ¿Cuál será su posición al cabo de 2 segundos? ¿Cuál será la altura máxima que alcanza?**

Se aplica la Ley de Newton suponiendo que la única fuerza F que actúa sobre la pelota es la fuerza de la gravedad (se tomará $g = 10$): $F = -mg$. Se tomará el origen del sistema de referencia en la posición inicial de la pelota.

Llamando $s\,(t)$ a la altura en función del tiempo (espacio recorrido por la pelota); la aceleración es: $a\,(t) = s''\,(t)$

Así, la ecuación que rige el movimiento es $-mg = ms''\,(t)$.

El problema a resolver es:

$$-10 = s''\,(t)$$

$$s\,(0) = 0\,; \qquad s'\,(0) = 39{,}2$$

Se trata de una ecuación de segundo orden de la forma $s'' = f\,(t)$ que se resuelve integrando dos veces. La solución general es: $s\,(t) = -5t^2 + C_1 t + C_2$.

Imponiendo las condiciones iniciales:

$$s\,(0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C_2 = 0$$

$$s'\,(0) = 39{,}2 \quad \Leftrightarrow \quad C_1 = 39{,}2$$

De esta forma la solución particular al problema planteado es:

$$s\,(t) = -5t^2 + 39{,}2t.$$

a) La posición de la pelota a los dos segundos será:

$$s\ (2) = -5\ (2)^2 + 39{,}2 = 19{,}2$$

b) La altura máxima se alcanzará en un punto crítico de la función posición, es decir; donde $s'\ (t) = 0$:

$$s'\ (t) = -10t + 39{,}2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 3{,}92 \text{ s.}$$

---

31 **Resolver la ecuación diferencial $y\,dx + 2x\,dy = 0$ encontrando un factor integrante adecuado.**

Esta ecuación puede resolverse mediante la técnica de separación de variables. Veremos que también es posible encontrar para ella un factor integrante que la transforme en exacta.

Verifiquemos que no es una ecuación diferencial exacta:

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 2, \qquad \frac{\partial M}{\partial y} = 1$$

Siguiendo la expresión general del cálculo del factor integrante, veamos que cuenta con un factor integrante dependiente sólo de y (ver apartado 2.6.1).

La expresión: $$\frac{\dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y}}{M} = \frac{2-1}{y} = \frac{1}{y}$$

sólo depende de y, por lo que existe un factor integrante sólo dependiente de esta variable. Para calcularlo tomemos la ecuación:

$$M \frac{\partial \operatorname{Ln} \mu}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$$

que en este caso es:

$$\frac{d \operatorname{Ln} \mu}{dy} = \frac{1}{y} \quad \Leftrightarrow \quad d \operatorname{Ln} \mu = \frac{1}{y}\, dy$$

e integrando:

$$\int d \operatorname{Ln} \mu = \int \frac{1}{y}\, dy \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Ln} \mu = \operatorname{Ln} y \quad \Leftrightarrow \quad \mu = y$$

Al multiplicar la ecuación diferencial por este factor se obtiene

$$y^2\,dx + 2xy\,dy = 0$$

que como puede comprobar el lector fácilmente es una ecuación diferencial exacta que se resuelve según el método indicado en el apartado 2.5.

La solución general es: $y^2x = K$.

---

32 Un depósito contiene 50 litros de una solución compuesta por 90% de agua y 10% de alcohol. Se vierte en el depósito a razón de 4 litros/minuto una segunda solución que contiene 50% de agua y 50% de alcohol. Al mismo tiempo se vacía el depósito a razón de 5 litros/minuto. Suponiendo que la solución se agita constantemente, calcular la cantidad de alcohol que queda después de 10 minutos.

Llamaremos $y\,(t)$ a la función que nos da el número de litros de alcohol en cada instante. Se sabe que $y\,(0) = 5$.

El número de litros de solución en cada instante t será $50 - t$, y como el depósito pierde 5 litros de solución por minuto, la pérdida total de alcohol por minuto será:

$$\frac{5}{50-t}\,y$$

Por otro lado, en el depósito entran 2 litros de alcohol por minuto, con ello la variación de alcohol es:

$$\frac{dy}{dt} = 2 - \frac{5}{50-t}\,y \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dt} + \frac{5}{50-t}\,y = 2$$

Ecuación lineal completa de primer orden, que en este caso también es de variables separadas. Su solución general es:

$$y\,(t) = \frac{50-t}{2} + K\,(50-t)^5$$

Imponiendo que $y = 5$ cuando $t = 0$ se obtiene el valor de K con el que se encuentra la solución particular:

$$y\,(t) = \frac{50-t}{2} - 20\,\frac{(50-t)}{50}$$

Finalmente, tomando el valor $t = 10$, la cantidad de alcohol en el depósito es $y\,(t) = 13{,}4$ lo que representa un 33% de alcohol.

33 Demostrar que el cambio de variable $y(x) = g(x) + u(x)$ transforma la ecuación de Riccati $y' + a(x)\,y^2 + b(x)\,y = c(x)$ en una de Bernouilli en la variable u, siendo $g(x)$ una solución particular de la ecuación.

Se introducirá el cambio en la ecuación de Ricatti:

$$y = g(x) + u \; ; \qquad y' = g' + u'.$$

En la ecuación:

$$g' + u' + a(x)\,[g(x) + u]^2 + b(x)\,[g(x) + u] = c(x) \; ;$$

$$g' + g^2 a(x) + g b(x) + u' + a(x)\,[u^2 + 2gu] + b(x)\,u = c(x).$$

Aplicando que $g(x)$ es solución y por ello verifica la ecuación de Ricatti, es decir:

$$g' + g^2 a(x) + g b(x) = c(x)$$

la ecuación queda:

$$c(x) + u' + a(x)\,u^2 + 2\,a(x)\,g\,u + b(x)\,u = c(x) \; ;$$

$$u' + [2a(x)\,g + b(x)]\,u = -a(x)\,u^2$$

que responde al tipo de ecuación diferencial de Bernoulli en las variables x, $u(x)$.

Problemas propuestos

1 Encontrar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $\dfrac{dy}{dx} = \cos 8x$

b) $\dfrac{dy}{dx} = e^x$

c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x}$

d) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{x^2} + e^x \operatorname{sen} 3x$

e) $\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{Ln} x$

f) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x^2+9} + \cos x$

g) $\dfrac{dy}{dx} = e^{2x} - x$

2 Obtener la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $2y\,dx + 3x\,dy = 0$

b) $(1+e^x)\,y\,\dfrac{dy}{dx} = e^x$

c) $\dfrac{dy}{dx} = y^2$

d) $y\dfrac{dy}{dx} - 2x = 0$

e) $x(x-1)\,dy - y(y-1)\,dx = 0$

f) $(1+y^2) + xy\dfrac{dy}{dx} = 0$

3 Dada la ecuación diferencial:

$$e^{x^3-y^2} + \frac{y}{x^2}\,\frac{dy}{dx} = 0$$

Se pide:

a) Solución general.
b) Solución particular que pasa por $P\,(1, 1)$.
c) A partir de la solución general, hállese la ecuación diferencial.

4 La velocidad de enfriamiento de un cuerpo en el aire es proporcional a la diferencia entre la temperatura T del cuerpo y la del aire $T_0 = 20$ ºC. Si el cuerpo tarda en enfriarse 20 minutos desde 100 ºC a 60 ºC. ¿Cuánto tardará en enfriarse hasta 30 ºC?

5 Obtener la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $3e^{x}\operatorname{tg} y\, dx + (2 - e^{x})\sec^2 y\, dy = 0$

b) $(x-2)\,y^2\, dx - x\,(y^2 - 1)\, dy = 0$

c) $x \operatorname{sen} y\, dx + (x^2 + 1)\cos y\, dy = 0$

6 Encontrar la solución general o particular, según cada caso, de las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x^2 + 4x + 2}{2\,(y-1)}$

$y\,(0) = 1$

b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y \cos x}{1 + 2y^2}$

$y\,(0) = 1$

c) $\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0$

d) $x\sqrt{1+y^2} + y\,\dfrac{dy}{dx}\sqrt{1+x^2} = 0$

7 Sea $\dfrac{dy}{dx} = |x|$.

Sea $y = g\,(x)$ la solución particular que verifica que $g\,(-1) = 7/2$. Se pide:

$$\int_{-2}^{2} g\,(x)\, dx$$

8 Encontrar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy}{x^2 - 2xy}$

b) $(x^2 - 3y^2)\, dx + 2xy\, dy = 0$

c) $x\, dy - y\, dx = \sqrt{x^2 + y^2}\, dx$

d) $(x - y - 1)\, dx + (x - 4y + 2)\, dy = 0$

e) $(2x - y + 3)\, dx + (x + y - 1)\, dy = 0$

f) $(x + y - 1)\, dx + (2x + 2y - 1)\, dy = 0$

g) $(x + y - 2)\, dx + (x - y + 4)\, dy = 0$

h) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y}$

9 Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $(3x^2 + 4xy)\,dx + (2x^2 + 2y)\,dy = 0$

b) $(x + y + 1)\,e^x\,dx + (e^x + e^y)\,dy = 0$

c) $2x\,(ye^{x^2} - 1)\,dx + e^{x^2}\,dy = 0$

10 Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $(x^2 + y^2)\,dx - 2xy\,dy = 0$

b) $2xy \operatorname{Ln} y\,dx + (x^2 + y^2\sqrt{y^2 + 1})\,dy$

11 Resolver $(3x + 2y + y^2)\,dx + (x + 4xy + 5y^2)\,dy = 0$, sabiendo que admite un factor integrante que es función de $x + y^2$.

12 Resolver la ecuación: $x^4 \operatorname{Ln} x - 2xy^3 + 3x^2y^2y' = 0$.

13 Resolver el siguiente problema de Cauchy:

$$(x^3 + 1)\frac{dy}{dx} + 4xy = \cos x; \qquad y(0) = 1$$

14 Integrar:

a) $y' + 2xy = 4x$

b) $y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{x^3 + 1}{x}$

15 Resolver:

a) $\dfrac{dy}{dx} + y = \cos x$

b) $\dfrac{dy}{dx} + y = y^2\,(\cos x - \operatorname{sen} x)$

16 Resolver las siguientes ecuaciones de Bernouilli:

a) $\dfrac{dy}{dx} + y = xy^5$

b) $\dfrac{dy}{dx} - y = xy^5$

c) $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{2x} = \sqrt{y} \operatorname{Ln} x$

17 Hallar las trayectorias ortogonales a:

a) La familia de hipérbolas $xy = C$.

b) La familia de curvas $y = x^C$, para $x > 0$, $C > 0$.

18 a) Determinar el valor de a para que las familias de curvas $y^3 = C_1 x$ y $x^2 + ay^2 = C_2$ sean ortogonales.

b) Determinar n para que las siguientes familias de curvas sean ortogonales:

$$x^n + y^n = k; \qquad y = \frac{x}{1+Cx}$$

19 Determinar las curvas tales que la proyección de la ordenada de cada punto sobre la normal a la misma en dicho punto sea constante.

20 Hallar las curvas que verifican que el segmento de la recta normal a ellas por cualquiera de sus puntos comprendido entre el punto y el eje OX, es igual a la distancia del punto al origen de coordenadas.

21 Resolver la ecuación $yy'^2 + (x - y)\,y' - x = 0$

22 Integrar las siguientes ecuaciones:

a) $y = 2xy' + \operatorname{Ln} y'$

b) $y = 2y' + 3y'^2$

23 Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales de 2º orden:

a) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = xe^x$

b) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \operatorname{sen} x$

c) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{1}{y^3}$

d) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1 - \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$

e) $(1 + x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} = x$

f) $y\dfrac{d^2y}{dx^2} + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = y^2$

Capítulo 3

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE ORDEN *n*

En este capítulo se va a estudiar un tipo muy importante de ecuaciones diferenciales por el gran número de aplicaciones prácticas que poseen. Las ecuaciones diferenciales lineales son de vital importancia en Física, teniendo especial relevancia en mecánica y en teoría de circuitos eléctricos. Por tanto, estudiaremos las ecuaciones diferenciales lineales de orden superior a uno y generalizaremos los resultados y los métodos de resolución presentados para este tipo de ecuaciones de primer orden.

Como ya sabemos, la ecuación diferencial lineal de orden n *responde a la forma:*

$$a_n(x)\, y^{(n} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1} + \ldots + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = b(x)$$

En este capítulo las consideraciones sobre los métodos de resolución se restringirán, en su mayor parte, al caso en que los coeficientes $a_i(x)$ *, con* $i = 0, 1 \ldots n$, *sean constantes (no dependan de la variable independiente).*

1. PRIMEROS RESULTADOS Y DEFINICIONES

1.1. Definición. Ecuación diferencial lineal de orden *n*

Una ecuación diferencial ordinaria ***lineal de orden n*** es una ecuación en la que la derivada n-sima de la variable y es una función lineal de las demás derivadas y de la propia función y, es decir, es de la forma:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)\, y = b(x)$$

– Si $b(x) = 0$ se dice que es una ecuación lineal homogénea.
– Si $b(x) \neq 0$ se denomina ecuación lineal completa o no homogénea.

– Si las funciones $a_i(x)$ son constantes, es decir, $a_i(x) = a_i \in \mathbb{R}$ para $0 \le i \le n$, entonces se dice que la ecuación lineal completa

$$a_n y^{(n} + a_{n-1} y^{(n-1} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = b(x)$$

es de coeficientes constantes.

– Si se tiene que $a_n(x) = 1$, entonces se dice que la ecuación está normalizada o escrita en forma normal.

Ejemplos

1) $xy'' + 3y' - (x + \operatorname{sen} x)\, y = 0$ es una ecuación lineal homogénea.
2) $2y''' - x^2 y' = \operatorname{tg} x$ es una ecuación lineal completa o no homogénea.
3) $3y^{(iv} + 23y'' - 12y = \operatorname{sen} x$ es una ecuación lineal completa de coeficientes constantes.
4) $y''' - y' \operatorname{sen} x + xy = 35 - x^2$ es una ecuación lineal completa normalizada.

1.2. Definición. Solución general

Dada una ecuación diferencial lineal de orden n, llamamos ***solución general*** de ella a toda función $y = g(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ que la satisface.

1.3. Definición. Solución particular

Se llama ***solución particular*** de una ecuación diferencial lineal a cualquier función que la satisfaga. En general, las soluciones particulares se obtienen fijando las constantes $C_1, \ldots C_n$ en la solución general.

Observación

Para determinar los n valores de dichas constantes deben imponerse n condiciones, que como ya se estableció en el primer capítulo pueden ser:

– Condiciones iniciales: si se dan todas sobre el mismo punto:

$$y(x_0) = y_0, \qquad y'(x_0) = y'_0, \qquad \ldots, \qquad y^{(n-1}(x_0) = y_0^{(n-1}$$

– Condiciones de contorno: si se establecen sobre diversos puntos. Por ejemplo:

$$y(x_0) = y_0, \qquad y(x_1) = y_1, \qquad \ldots, \qquad y(x_{n-1}) = y_{n-1}$$

1.4. Teorema de existencia y unicidad de soluciones para ecuaciones lineales de orden *n*

Dada la ecuación diferencial lineal de orden n:

$$a_n (x)\, y^{(n} + a_{n-1} (x)\, y^{(n-1} + \ldots + a_1 (x)\, y' + a_0 (x)\, y = b (x)$$

siendo $b (x)$, $a_i (x)$, con $i = 1, 2, \ldots n$, funciones continuas en un intervalo (a, b). Si x_0 es cualquier punto del intervalo y si $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1}$ son constantes reales arbitrarias, la ecuación dada tiene una única solución $y (x)$ en el intervalo (a, b) de forma que:

$$y (x_0) = y_0\,, \qquad y' (x_0) = y'_0\,, \qquad \ldots, \qquad y^{(n-1} (x_0) = y_0^{(n-1}$$

Notas

1) Obsérvese que las condiciones dadas son suficientes; pero no necesarias, es decir, en el caso en que no se verifique alguna de las condiciones establecidas en el teorema, no podemos conocer si existe solución única o no al problema planteado. Puede ocurrir cualquier cosa.
2) El teorema hace referencia a una solución local de la ecuación en un punto determinado, no a una solución general.

Ejemplo

Verificar si la función $y (x) = (1/4)$ sen $4x$ es solución del siguiente problema de condición inicial y estudiar la unicidad para dicho problema:

$$y'' + 16y = 0$$
$$y (0) = 0, \qquad y' (0) = 1$$

i) Veamos que la función verifica la ecuación:

$$y = (1/4) \text{ sen } 4x, \qquad y' = \cos 4x, \qquad y'' = -4\text{sen } 4x$$

Sustituyendo en la ecuación:

$$-\,4 \text{ sen } 4x + 16\, [(1/4) \text{ sen } 4x] = -\,4 \text{ sen } 4x + 4 \text{ sen } 4x = 0$$

efectivamente la convierte en la identidad.

ii) Verifiquemos las condiciones iniciales:

$$y (0) = (1/4) \text{ sen } 0 = 0$$
$$y' (0) = \cos 0 = 1$$

iii) Los coeficientes de esta ecuación son constantes:

$$a_2(x) = 1, \qquad a_1(x) = 0, \qquad a_0(x) = 16, \qquad b(x) = 0$$

por lo tanto son funciones continuas en todo punto y en particular en el cero. Se cumplen así las condiciones del teorema de unicidad y la función dada es la única solución de la ecuación que cumple las condiciones pedidas.

2. ECUACIÓN LINEAL HOMOGÉNEA

En este punto se van a indicar algunos resultados importantes para este tipo de ecuaciones diferenciales:

2.1. Proposición

Dadas $f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)$ funciones solución de una ecuación lineal homogénea, toda combinación lineal de ellas:

$$C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + ... + C_n f_n(x)$$

es también solución de dicha ecuación.

Observación

La verificación de que toda combinación de soluciones de la ecuación vuelve a ser solución de ella es análoga a la que se hizo para el caso de ecuaciones lineales de primer orden.

Nota

Obsérvese que la función $y = 0$ es siempre solución de las ecuaciones lineales homogéneas. Recibe el nombre de *solución trivial*.

2.2. Definición. Dependencia e independencia lineal de funciones

Dadas n funciones $f_i(x)$, con $i = 1, 2, ..., n$, definidas en $[a, b]$, diremos que son ***linealmente dependientes*** en el intervalo $[a, b]$, si existen unas constantes $C_i \in \mathbb{R}$ de forma que $C_1 f_1 + C_2 f_2 + ... + C_n f_n = 0$ con algún $C_i \neq 0$, para todo $x \in [a, b]$.

Si para que se verifique la relación anterior han de ser todas las constantes C_i nulas, entonces se dice que las n funciones son ***linealmente independientes*** en el intervalo $[a, b]$.

Ejemplo
Las funciones $f_1(x) = x$ y $f_2(x) = x^2$ son linealmente independientes en $[1, 2]$, como puede comprobar el lector fácilmente, mientras que $f_1(x) = x$ y $f_2(x) = 2x$ son linealmente dependientes en $[1, 2]$.

2.3. Teorema de estructura del conjunto de soluciones de la ecuación lineal homogénea. Sistema fundamental

El conjunto de soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea tiene estructura de espacio vectorial de dimensión n (orden de la ecuación). De esta forma, una ecuación lineal homogénea tiene siempre n soluciones linealmente independientes, $f_i(x)$, con $i = 1, 2, ..., n$, que constituyen la base de dicho espacio vectorial. Por tanto, cada solución $f(x)$ de la ecuación dada se puede representar como combinación lineal de las funciones $f_i(x)$:

$$C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + ... + C_n f_n(x)$$

mediante una adecuada elección de las constantes C_i.

Al conjunto de las n soluciones linealmente independientes de una ecuación diferencial homogénea se le llama ***sistema fundamental*** de soluciones de dicha ecuación.

Nota
Verificar que unas funciones solución de una ecuación lineal homogénea son linealmente independientes a partir de la definición dada es algo que, en ciertas ocasiones, puede resultar complicado. Para simplificar estos casos se van a establecer los siguientes conceptos.

2.4. Definición. Wronskiano

Dadas las funciones $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$ se define su Wronskiano como el determinante:

$$W(f_1, f_2, ..., f_n) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_1^{(n-1} & f_2^{(n-1} & \cdots & f_n^{(n-1} \end{vmatrix}$$

Observación
El wronskiano de un conjunto de funciones de la variable independiente x es, una vez desarrollado, una función de la misma variable x.

2.5. Teorema

Un conjunto de funciones solución de una ecuación diferencial lineal homogénea son linealmente independientes en un determinado intervalo si y sólo si su Wronskiano es distinto de cero para todo x perteneciente a dicho intervalo.

Ejemplo
Dada la ecuación $y'' + y = 0$ para la cual $y_1 = \operatorname{sen} x$, $y_2 = \cos x$ son soluciones, verificar si y_1, y_2 constituyen un sistema fundamental de la ecuación. En caso afirmativo escribir la solución general de la misma.

a) Primero estudiaremos el Wronskiano de las soluciones dadas:

$$y_1 = \operatorname{sen} x, \qquad y_1' = \cos x$$
$$y_2 = \cos x, \qquad y_2' = -\operatorname{sen} x$$

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \operatorname{sen} x & \cos x \\ \cos x & -\operatorname{sen} x \end{vmatrix} =$$

$$= -\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x = -1 \neq 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

De esta manera y_1, y_2 constituyen dos soluciones linealmente independientes en todo $\mathbb{R}$.

b) Como se trata de una ecuación diferencial lineal de segundo orden, las funciones $y_1 = \operatorname{sen} x$, $y_2 = \cos x$ constituyen un sistema fundamental de ella. Toda solución de la ecuación se escribe como combinación lineal de las dos funciones:

$$y(x) = C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \cos x$$

2.6. Obtención de la ecuación diferencial lineal homogénea de orden *n* conocido un sistema fundamental de soluciones

Dado un conjunto de funciones $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$, linealmente independientes en $[a, b]$ y derivables hasta el orden n en (a, b), entonces la ecuación:

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) & y \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) & y' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_1^{(n}(x) & f_2^{(n}(x) & \cdots & f_n^{(n}(x) & y^{(n} \end{vmatrix} = 0$$

donde y es la función incógnita, es una ecuación diferencial lineal homogénea de orden n, para la cual las funciones $f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x)$ forman un sistema fundamental de soluciones. Además el coeficiente de $y^{(n}$ es el Wronskiano de este sistema fundamental.

Ejemplo

Sea el conjunto de funciones linealmente independientes $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = e^{-x}$. La ecuación diferencial lineal homogénea de la que estas funciones son solución es:

$$\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & y \\ e^x & -e^{-x} & y' \\ e^x & e^{-x} & y'' \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^x e^{-x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & y \\ 1 & -1 & y' \\ 1 & 1 & y'' \end{vmatrix} = 0$$

y resolviendo el determinante se obtiene

$$y'' - y = 0$$

que es la ecuación lineal homogénea de segundo orden para la que $f_1(x) = e^x$ y $f_2(x) = e^{-x}$ constituyen un sistema fundamental de soluciones.

3. ECUACIÓN LINEAL COMPLETA

Siguiendo la teoría expuesta para este tipo de ecuaciones de primer orden, se va a establecer un resultado análogo para órdenes superiores:

3.1. Teorema de estructura del conjunto de soluciones de la ecuación lineal completa

La solución general de la ecuación lineal completa resulta de añadir a la solución general de la homogénea asociada una solución particular de la completa. El conjunto de soluciones de la ecuación lineal completa tiene estructura de espacio afín asociado al espacio vectorial de las soluciones de la ecuación homogénea asociada.

Observaciones

1) La demostración de la primera afirmación es análoga a la desarrollada para el caso de ecuaciones de primer orden.

2) La solución general de toda ecuación lineal completa, y_{GC}, se escribe como la suma de una solución particular de ella, y_{PC}, más la solución general de la homogénea asociada, y_{GH}:

$$y_{GC} = y_{PC} + y_{GH}$$

3.2. Superposición de soluciones

Sea $f_1(x)$ una solución particular de la ecuación diferencial lineal completa:

$$a_n(x)\, y^{(n} + \ldots + a_0(x)\, y = b_1(x)$$

y $f_2(x)$ una solución particular de la ecuación:

$$a_n(x)\, y^{(n} + \ldots + a_0(x)\, y = b_2(x)$$

Entonces, $f_1(x) + f_2(x)$ es solución particular de la ecuación diferencial:

$$a_n(x)\, y^{(n} + \ldots + a_0(x)\, y = b_1(x) + b_2(x)$$

4. MÉTODOS DE RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE ORDEN *n*

4.1. Introducción

Por los resultados obtenidos en los apartados anteriores, resolver una ecuación diferencial lineal completa de orden n consiste en seguir los siguientes pasos:

1º. Calcular la solución general de la ecuación homogénea asociada.
2º. Obtener una solución particular de la ecuación completa.
3º. Sumar las dos expresiones anteriores.

De esta manera, nos ocuparemos de los diversos métodos que proporcionan la solución a cada uno de estos problemas.

4.2. Método de reducción de orden de la ecuación lineal homogénea de orden *n*

Dada la ecuación lineal homogénea de orden n:

$$a_n(x)\, y^{(n} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1} + \ldots + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = 0$$

y una solución no trivial de ella: $y = g(x)$, el cambio de variable $y = g(x)\, v$ transforma la ecuación dada en una ecuación lineal de orden $n-1$ en la variable $w = dv/dx$.

Nota

Veamos este resultado para el caso $n = 2$. Es éste el más interesante ya que convierte la ecuación lineal homogénea de segundo orden en una de primero que ya sabemos resolver.

Sea entonces: $a_2(x)\,y'' + a_1(x)\,y' + a_0(x)\,y = 0$ y una solución no nula de ella $y(x) = g(x)$.

Tenemos la variable v de forma que:

$$\begin{aligned} y = g(x)\,v \quad &\Rightarrow \quad y' = g'v + gv' \\ &\Rightarrow \quad y'' = gv'' + 2g'v' + g''v \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación:

$$\begin{gathered} a_2(x)\,[gv'' + 2g'v' + g''v] + a_1(x)\,[g'v + gv'] + a_0(x)\,[gv] = 0 \Leftrightarrow \\ [a_2(x)\,g'' + a_1(x)\,g' + a_0(x)\,g]\,v + \\ + a_2(x)\,gv'' + 2a_2(x)\,g'v' + a_1(x)\,gv' = 0 \end{gathered}$$

El primer corchete vale cero por ser $g(x)$ solución de la ecuación homogénea. Así:

$$a_2(x)\,gv'' + [2a_2(x)\,g' + a_1(x)\,g]\,v' = 0$$

Llamando $w = v'$ la ecuación queda:

$$a_2(x)\,gw' + [2a_2(x)\,g' + a_1(x)\,g]\,w = 0$$

que es una ecuación diferencial lineal homogénea de primer orden en la variable $w(x)$.

De esta forma, el método de resolución es:

- Conocer una solución no trivial de la ecuación homogénea dada $y = g(x)$ (algo no siempre posible).
- Realizar el cambio señalado: $y = g(x)\,v$.
- Establecer la ecuación en v y cambiar a la variable $w = v'$.
- Resolver la ecuación lineal en w.
- Deshacer todos los cambios realizados.

Nota

Este resultado se generaliza para la ecuación diferencial lineal completa conocida una solución particular de la homogénea asociada.

4.3. Resolución de ecuaciones lineales homogéneas de coeficientes constantes

Se va a enunciar un método general para la resolución de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de cualquier orden con la restricción de que tengan coeficientes constantes, es decir; que respondan a la forma:

$$y^{(n} + a_{n-1}\, y^{(n-1} + \ldots + a_1\, y' + a_0\, y = 0, \qquad \text{con} \qquad a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$$

El método consiste en generalizar el resultado obtenido para las ecuaciones lineales de primer orden, es decir, intuir que las soluciones son de la forma e^{mx}.

1º. Dada la ecuación $y' + ay = 0$ la solución de esta ecuación (resolviendo por medio de separación de variables) es: $y = Ce^{-ax}$.

2º. Para resolver la ecuación de orden n, es necesario determinar n soluciones linealmente independientes de ella.

3º. Se supondrá que para una ecuación de este tipo de mayor orden, las soluciones siguen siendo de la misma forma: $y = e^{mx}$. El problema se reduce a encontrar los valores del exponente m que hacen que las funciones $y = e^{mx}$ sean solución de la ecuación. Para ello se impone que estas funciones: $y = e^{mx}$ sean solución:

$$y = e^{mx} \quad \Rightarrow \quad y' = me^{mx} \quad \Rightarrow \quad y'' = m^2\, e^{mx} \ldots \quad y^{(n} = m^n\, e^{mx}$$

Sustituyendo en la ecuación:

$$m^n\, e^{mx} + a_{n-1}\, m^{n-1}\, e^{mx} + \ldots + a_1\, me^{mx} + a_0\, e^{mx} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$[m^n + a_{n-1}\, m^{n-1} + \ldots + a_1\, m + a_0]\, e^{mx} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$m^n + a_{n-1}\, m^{n-1} + \ldots + a_1\, m + a_0 = 0$$

De esta forma los exponentes m buscados son las raíces del polinomio:

$$p\,(m) = m^n + a_{n-1}\, m^{n-1} + \ldots + a_1\, m + a_0$$

llamado *polinomio o ecuación característica de la ecuación*.

Pueden distinguirse diversos casos:

a) El polinomio característico tiene n raíces reales simples y distintas: $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Por tanto, tenemos n soluciones de la ecuación que serán:

$$f_1\,(x) = e^{m_1 x}, \qquad f_2\,(x) = e^{m_2 x}, \qquad \ldots, \qquad f_n\,(x) = e^{m_n x}$$

Puede verificarse que el Wronskiano de ellas es no nulo para todo $x \in \mathbb{R}$, por lo que las funciones son linealmente independientes según el teorema indicado en el apartado 2.5. Forman así un sistema fundamental y la solución general de la ecuación es:

$$y(x) = C_1\, e^{m_1 x} + C_2\, e^{m_2 x} + \cdots + C_n\, e^{m_n x}$$

b) Las raíces del polinomio característico son reales; pero alguna o algunas tienen multiplicidad mayor que uno. Entonces:

1°. Si suponemos que m es raíz doble de $p(m)$, con este valor tenemos que generar dos soluciones linealmente independientes para la ecuación. Sabemos que $y = e^{mx}$ lo es y necesitamos otra.

Puede comprobarse fácilmente sustituyendo en la ecuación que la función $y = xe^{mx}$ también es solución y, por medio del Wronskiano, que es linealmente independiente con la anterior. De esta forma, la parte de la solución general de la ecuación debida a la raíz m será:

$$C_1 e^{mx} + C_2 x e^{mx} = e^{mx}\,[C_1 + C_2 x]$$

2°. Si la multiplicidad de la raíz es r el resultado se extiende de forma sencilla obteniéndose r soluciones linealmente independientes aportadas por la raíz m:

$$C_1\, e^{mx} + C_2\, xe^{mx} + C_3 x^2 e^{mx} + \ldots\, C_r\, x^{r-1}\, e^{mx} =$$
$$= e^{mx}\,[C_1 + C_2\, x + \ldots + C_r\, x^{r-1}]$$

c) El polinomio característico tiene un par de raíces complejas conjugadas:

$$m_1 = \alpha + i\beta$$
$$m_2 = \alpha - i\beta$$

De igual forma que en el caso a, las soluciones aportadas por estas raíces serán:

$$C_1\, e^{(\alpha + i\beta)\,x} + C_2\, e^{(\alpha - i\beta)\,x}$$

Puede tomarse la expresión de estas exponenciales según la fórmula de Euler:

$$e^{(\alpha + i\beta)\,x} = e^{\alpha x}\, e^{i\beta x} = e^{\alpha x}\,[\cos \beta x + i \operatorname{sen} \beta x]$$

De esta forma, las soluciones aportadas por estas raíces se escribirán como:

$$C_1\, e^{\alpha x}\,[\cos \beta x + i \operatorname{sen} \beta x] + C_2\, e^{\alpha x}\,[\cos(-\beta x) + i \operatorname{sen}(-\beta x)] =$$
$$= C_1\, e^{\alpha x}\,[\cos \beta x + i \operatorname{sen} \beta x] + C_2 e^{\alpha x}\,[\cos \beta x - i \operatorname{sen} \beta x] =$$

$$e^{\alpha x}\,[(C_1 + C_2)\cos\beta x + (\mathrm{i}\,C_1 - i\,C_2)\,\mathrm{sen}\,\beta x] =$$
$$= e^{\alpha x}\,[K_1\cos\beta x + K_2\,\mathrm{sen}\,\beta x]$$

donde se ha tomado $K_1 = C_1 + C_2$ y $K_2 = i\,(C_1 - C_2)$.

d) El polinomio característico tiene pares de raíces complejas con grado de multiplicidad mayor que uno:

1º. Si suponemos que m es raíz doble de $p\,(m)$, igual que en el caso de raíces reales con multiplicidad mayor que uno, tenemos que obtener dos soluciones linealmente independientes para la ecuación. Sabemos por el caso c que $y = C_1\,e^{(\alpha + i\beta)\,x} + C_2\,e^{(\alpha - i\beta)\,x}$ es una de ellas. Podemos comprobar que $y = x\,(C_3\,e^{(\alpha + i\beta)\,x} + C_4\,e^{(\alpha - i\beta)\,x})$ es la otra solución que buscábamos, linealmente independiente con la anterior. La solución general de la ecuación será:

$$y = C_1\,e^{(\alpha + i\beta)\,x} + C_2\,e^{(\alpha - i\beta)\,x} + x\,(C_3\,e^{(\alpha + i\beta)\,x} + C_4\,e^{(\alpha - i\beta)\,x}) =$$
$$= e^{(\alpha + i\beta)\,x}\,(C_1 + C_3\,x) + e^{(\alpha - i\beta)\,x}\,(C_2 + C_4\,x)$$

Considerando la fórmula de Euler antes mencionada, se obtiene la siguiente expresión:

$$y = e^{\alpha x}\,[K_1\cos\beta x + K_2\,\mathrm{sen}\,\beta x] + xe^{\alpha x}\,[K_3\cos\beta x + K_4\,\mathrm{sen}\,\beta x]$$

donde se ha tomado $K_1 = C_1 + C_2$, $K_2 = i\,(C_1 - C_2)$, $K_3 = C_3 + C_4$ y $K_4 = i\,(C_3 - C_4)$.

2º. Si la multiplicidad de la raíz compleja es r el resultado también se puede extender de forma sencilla, de forma que la solución general queda como sigue:

$$y = C_1\,e^{(\alpha + i\beta)\,x} + C_2\,e^{(\alpha - i\beta)\,x} + x\,(C_3\,e^{(\alpha + i\beta)\,x} + C_4\,e^{(\alpha - i\beta)\,x}) + \ldots +$$
$$+ x^{r-1}\,(C_{2r-1}\,e^{(\alpha + i\beta)\,x} + C_{2r}\,e^{(\alpha - i\beta)\,x})$$

Haciendo uso de la fórmula de Euler:

$$y = e^{\alpha x}\,[(K_1 + K_3 x + \ldots + K_{2r-1}\,x^{r-1})\cos\beta x +$$
$$+ (K_2 + K_4\,x + \ldots + K_{2r}\,x^{r-1})\,\mathrm{sen}\,\beta x]$$

siendo $K_{2r-1} = C_{2r-1} + C_{2r}$ y $K_{2r} = i\,(C_{2r-1} - C_{2r})$.

4.4. Cálculo de una solución particular de una ecuación completa

Siguiendo los pasos generales indicados para la resolución de una ecuación lineal de orden n completa, a la solución general de la homogénea asociada debemos sumarle una solución particular de la completa. Para encontrarla pueden seguirse diversos caminos.

4.4.1. Método de Lagrange o de variación de las constantes

Este método parte de la hipótesis de que las soluciones de una ecuación lineal completa son de la misma forma que las soluciones de la homogénea asociada; pero donde las constantes dependen de la variable independiente. De esta forma, dada la ecuación lineal completa de orden n normalizada:

$$y^{(n} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1} + \ldots + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = b(x)$$

calculada la solución general de la ecuación homogénea asociada:

$$y^{(n} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1} + \ldots + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = 0$$

que será de la forma:

$$y(x) = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + \ldots + C_n f_n(x)$$

Supondremos que la solución general de la ecuación completa:

$$y^{(n} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1} + \ldots + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = b(x)$$

es:
$$y(x) = C_1(x) f_1(x) + C_2(x) f_2(x) + \ldots + C_n(x) f_n(x)$$

De esta forma, deben ser determinados los valores de $C_i(x)$, con $i = 1, 2, \ldots, n$. Para ello han de establecerse n ecuaciones.

Como se ha supuesto que este tipo de funciones es solución de la ecuación dada se impondrá que lo sea, es decir; al sustituir $y(x)$ con sus n derivadas en la ecuación debe verificarla. Durante el cálculo de estas derivadas se van imponiendo ciertas condiciones, que se eligen convenientemente para simplificar el cálculo de las derivadas sucesivas y que serán:

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x)\, f_i(x) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x)\, f_i'(x) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x)\, f_i''(x) = 0$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x)\, f_i^{(n-1}(x) = b(x)$$

Con las condiciones establecidas se plantea un sistema de n ecuaciones con las n incógnitas C_i', con $i = 1, 2 \dots n$. Resolviéndolo e integrando quedan determinadas las $C_i(x)$ y con ello la solución de la ecuación completa.

Nota

Puede señalarse que el método expuesto es válido para todo tipo de ecuaciones lineales de orden n, es decir; no es necesario que tengan coeficientes constantes. No obstante, en estos casos el problema se presenta en el cálculo de la solución general de la ecuación homogénea asociada.

Ejemplo

Realicemos los cálculos establecidos para encontrar la solución particular de una ecuación lineal de orden 2.

$$a_2(x)\, y'' + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = b(x)$$

Supongamos la solución general de la homogénea asociada como:

$$y(x) = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x)$$

Suponemos que la solución general de la completa es:

$$y(x) = C_1(x) f_1(x) + C_2(x) f_2(x) \qquad (1)$$

Deben encontrarse los valores de $C_1(x)$ y $C_2(x)$. Para ello, imponemos que la función $y(x) = C_1(x) f_1(x) + C_2(x) f_2(x)$ sea solución de la ecuación:

$$y'(x) = C_1'(x) f_1(x) + C_1(x) f_1'(x) +$$
$$+ C_2'(x) f_2(x) + C_2(x) f_2'(x)$$

Imponemos: $C_1'(x) f_1(x) + C_2'(x) f_2(x) = 0$ (1ª ecuación)

Así: $$y'(x) = C_1(x) f_1'(x) + C_2(x) f_2'(x)$$

Derivando otra vez:

$$y''(x) = C_1(x) f_1''(x) + C_1'(x) f_1'(x) +$$
$$+ C_2(x) f_2''(x) + C_2'(x) f_2'(x)$$

Sustituimos en la ecuación completa que debe verificar:

$$a_2(x)\,[C_1(x) f_1''(x) + C_1'(x) f_1'(x) + C_2(x) f_2''(x) +$$
$$+ C_2'(x) f_2'(x)] + a_1(x)\,[C_1(x) f_1'(x) + C_2(x) f_2'(x)] +$$
$$+ a_0(x)\,[C_1(x) f_1(x) + C_2(x) f_2(x)] = b(x) \qquad (2^{\text{a}} \text{ ecuación})$$

Con las dos ecuaciones establecidas resulta el sistema:

$$C_1'(x) f_1' + C_2'(x) f_2' = \frac{b(x)}{a_2(x)}$$
$$C_1' f_1 + C_2' f_2 = 0$$

Resolviéndolo por Cramer:

$$C_1' = -\frac{b(x) f_2(x)}{a_2(x) W[f_1, f_2]}$$

$$C_2' = \frac{b(x) f_1(x)}{a_2(x) W[f_1, f_2]}$$

Donde $W(f_1, f_2)$ representa el Wronskiano de estas funciones.
Se integran estas expresiones, se obtienen $C_1(x)$ y $C_2(x)$ y se sustituye su valor en la ecuación (1).

4.4.2. Método de los coeficientes indeterminados para ecuaciones lineales completas de orden n con coeficientes constantes

Previamente al método, veamos dos definiciones:

a) Definición. Función de clase *CI*

Diremos que una función, en particular el término independiente de una ecuación completa, es de clase *CI* si es de alguna de las formas siguientes:

- $x^n, \quad n \in \mathbb{R}$
- $e^{ax}, \quad a \neq 0$
- sen $(bx + c)$, cos $(bx + c)$, $\quad b, c \in \mathbb{R}, \quad b \neq 0$
- Cualquier producto finito de los casos anteriores.

b) Definición. Conjunto *CI*

Dada una función *CI*, se define su conjunto *CI* asociado como el conjunto de funciones *CI* que generan dicha función y todas sus sucesivas derivadas.

Ejemplos

1) Calcular el conjunto *CI* asociado a la función $f(x) = e^{3x}$.

$$f(x) = e^{3x}, \qquad f'(x) = 3e^{3x}, \qquad f''(x) = 9e^{3x}, \qquad \ldots,$$
$$f^{(n}(x) = 3^n e^{3x}$$

De esta forma el conjunto *CI* asociado a e^{3x} es:

$$S = \{e^{3x}\}$$

Ya que la función dada y cualquiera de sus derivadas se escribe como combinación lineal de S.

2) Calcular el conjunto *CI* asociado a la función $f(x) = 3 \text{ sen } x$

$$f(x) = 3 \text{ sen } x, \qquad f'(x) = 3 \cos x,$$
$$f''(x) = -3 \text{ sen } x, \qquad f'''(x) = -3 \cos x, \ldots$$

El conjunto *CI* es:

$$S = \{\text{sen } x, \ \cos x\}$$

Dada la ecuación lineal completa de coeficientes constantes: $a_n y^{(n} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = b(x)$, cuando $b(x)$ sea combinación lineal de funciones de clase *CI*, se podrá aplicar el método de los coeficientes indeterminados para encontrar una solución particular de ella, para lo cual se realizan los siguientes pasos:

a) Calcular los conjuntos *CI* asociados a cada una de las r funciones *CI* que forman la combinación lineal de funciones *CI* que dan lugar a $b(x)$: $S_1, S_2 \ldots S_r$.
b) Si algún conjunto está repetido o contenido en otro se elimina.
c) Si en algún conjunto aparece alguna solución de la ecuación homogénea asociada, se multiplicará dicho conjunto por la mínima potencia de x que haga que ya no lo sea.

Se tomará la solución particular buscada como una combinación lineal de todas las funciones que quedan. Los coeficientes de dicha combinación se determinan imponiendo que esta función sea solución.

Nota
Debe destacarse que este método es menos general que el anterior ya que pone condiciones restrictivas al término independiente $b(x)$. Así, por ejemplo, no es aplicable a una ecuación como:

$$y'' - y = \operatorname{tg} x$$

Observación
Dada la ecuación lineal completa normalizada de coeficientes constantes:

$$y^{(n} + a_{n-1}\, y^{(n-1} + \ldots + a_1\, y' + a_0 = b\,(x)$$

de lo expuesto anteriormente se deduce que, para poder aplicar el método de los coeficientes indeterminados, la función $b(x)$ ha de ser una suma algebraica de funciones del tipo:

$$f_i\,(x) = e^{\alpha x}\,[P_n\,(x) \cos \beta x + Q_m\,(x) \operatorname{sen} \beta x]$$

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $P_n\,(x)$, $Q_m\,(x)$ son polinomios de grado n y m respectivamente. Por tanto, para cada una de las funciones $f_i\,(x)$ se busca una solución particular tal y como se indica en la siguiente tabla en función de la forma de $f_i\,(x)$:

	Forma de $f_i\,(x)$, *siendo* $b\,(x) = \Sigma f_i\,(x)$	*Raíces del polinomio característico*	*Forma de la solución particular donde* $k = \text{máx}\,\{m, n\}$
I	$P_n\,(x)$	1. *El número* 0 *no es raíz del polinomio característico*	$P^*_n\,(x)$
		2. *El número* 0 *es raíz del polinomio característico de multiplicidad* s	$x^s P^*_n\,(x)$
II	$P_n\,(x)\, e^{\alpha x}$ (α es real)	1. *El número* α *no es raíz del polinomio característico*	$e^{\alpha x} P^*_n\,(x)$
		2. *El número* α *es raíz del polinomio característico de multiplicidad* s	$x^s e^{\alpha x} P^*_n\,(x)$
III	$P_n\,(x) \cos \beta x + Q_m\,(x) \operatorname{sen} \beta x$	1. *Los números* $\pm i\beta$ *no son raíces del polinomio característico*	$P^*_n\,(x) \cos \beta x + Q^*_k\,(x) \operatorname{sen} \beta x$
		2. *Los números* $\pm i\beta$ *son raíces del polinomio característico de multiplicidad* s	$x^s\,(P^*_k\,(x) \cos \beta x + Q^*_k\,(x) \operatorname{sen} \beta x)$
IV	$e^{\alpha x}\,(P_n\,(x) \cos \beta x + Q_m\,(x) \operatorname{sen} \beta x)$	1. *Los números* $\alpha \pm i\beta$ *no son raíces del polinomio característico*	$e^{\alpha x}\,(P^*_k\,(x) \cos \beta x + Q^*_k\,(x) \operatorname{sen} \beta x)$
		2. *Los números* $\alpha \pm i\beta$ *son raíces del polinomio característico de multiplicidad* s	$x^s e^{\alpha x}\,(P^*_k\,(x) \cos \beta x + Q^*_k\,(x) \operatorname{sen} \beta x)$

Siendo:

- $P^*_k(x) = A_0 + A_1 x + ... + A_k x^k$, $Q^*_k(x) = B_0 + B_1 x + ... + B_k x^k$ polinomios de coeficientes indeterminados, cuyo grado es k, que es el máximo entre los valores m y n. Los coeficientes se determinan imponiendo que la solución particular verifique la ecuación.
- s es el orden de multiplicidad de la raíz $\alpha \pm i\beta$ del polinomio característico. Se toma $s = 0$ si $\alpha \pm i\beta$ no son raíces del polinomio característico.

4.5. Ecuación de Euler

Las ecuaciones de Euler son un caso particular de las ecuaciones lineales. Son de la forma:

$$a_n x^n y^{(n} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1} + ... + a_1 xy' + a_0 y = b(x) \qquad (*)$$

donde $a_0, ..., a_n$ son constantes reales. Realizando en la ecuación el cambio de variable $x = e^t$, la ecuación de Euler se transforma en una ecuación lineal de coeficientes constantes.

También se llaman ecuaciones de Euler a aquéllas de la forma:

$$a_n (cx + d)^n y^{(n} + a_{n-1} (cx + d)^{n-1} y^{(n-1} + ... + a_1 (cx + d) y' + a_0 y = b(x)$$

donde $a_0, ..., a_n, c, d,$ son constantes reales. En este caso, por medio del cambio de variable $cx + d = e^t$, la ecuación de Euler se transforma en una ecuación lineal de coeficientes constantes, del mismo modo que en el caso anterior.

Ejemplos

Son ecuaciones de Euler:

1) $2x^3 y''' - 3x^2 y'' + 8 x y' - 12y = 0$
2) $3(3x + 4)^2 y'' - (3x + 4) y' + 8y = x + 1$

Observación

Para la ecuación (*), se pueden buscar directamente soluciones particulares de la forma $y = x^k$ para la ecuación homogénea asociada, obteniéndose en la variable k el polinomio característico de la ecuación de Euler transformada por el cambio $y = e^t$.

5. Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales lineales

Ya en el primer capítulo se indicó la importancia de las ecuaciones diferenciales para la resolución de algunos problemas físicos. Muchos de ellos se rigen por ecuaciones lineales. Este es el caso de los circuitos eléctricos para el cálculo de la corriente y de la tensión en cada uno de los elementos del circuito; y de los sistemas mecánicos elásticos de los que se quieren estudiar sus vibraciones. También pueden aparecer ecuaciones lineales en algunos problemas de movimiento, como aquéllos en los que el móvil sigue una trayectoria rectilínea. En los problemas resueltos se desarrollarán ejercicios relacionados con estos problemas que se resolverán mediante la aplicación de la teoría expuesta en este capítulo.

Problemas resueltos

1 **Verificar si la función $y(x) = x^2$ es solución del siguiente problema de condición inicial y estudiar la unicidad de la solución para él:**

$$y'' - \frac{y'}{x} = 0$$

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0$$

i) Se deja al lector la comprobación de que la función dada es solución de la ecuación y que verifica las condiciones pedidas. Para ello es suficiente con sustituir la función dada en la ecuación y evaluarla en $x = 0$.

ii) Los coeficientes en este caso son:

$$a_2(x) = 1, \qquad a_1(x) = -\frac{1}{x}, \qquad a_0(x) = 0, \qquad b(x) = 0$$

Puede observarse que la continuidad de $a_1(x)$ se pierde en $x = 0$. De esta forma, como las condiciones del teorema son suficientes pero no necesarias, no tenemos garantías de que la función dada sea la única solución del problema de Cauchy establecido.

---

2 **Las funciones $f_1 = e^{mx}$, $f_2 = e^{nx}$ con $m \neq n$ son soluciones de una ecuacion diferencial lineal homogénea de segundo orden. ¿Forman un sistema fundamental de ella?**

Hay que verificar si las funciones son linealmente independientes. Para ello calculamos el Wronskiano:

$$W(f_1, f_2) = \begin{vmatrix} e^{mx} & e^{nx} \\ me^{mx} & ne^{nx} \end{vmatrix} = (n-m)\, e^{(m+n)\,x}$$

que es distinto de cero para todo $x \in \mathbb{R}$ por ser $m \neq n$. Por tanto, ambas funciones son linealmente independientes.

---

3 **Resolver, reduciendo previamente el orden, la ecuación:**

$$(x^2 + 1)\, y'' - 2xy' + 2y = 0$$

1º. Debemos encontrar una solución de dicha ecuación que nos permita establecer el cambio de variable para la reducción de orden. Pasaremos así a una ecuación lineal homogénea de primer orden (que es en variables separadas) que se sabe resolver.

Puede verificarse que $y = x$ es solución de la ecuación dada.

2º. Hagamos el cambio

$$y = xv \quad \Rightarrow \quad y' = v + xv'$$
$$\Rightarrow \quad y'' = v''x + 2v'$$

En la ecuación resulta:

$$x\,(x^2 + 1)\, v'' + 2\, v' = 0$$

Si llamamos $w = v'$:

$$x\,(x^2 + 1)\, w' + 2\, w = 0$$

Que es una ecuación lineal homogénea de primer orden, de variables separadas, en w. Resolviéndola se obtiene:

$$w = C\,\frac{x^2 + 1}{x^2} = C\left[1 + \frac{1}{x^2}\right]$$

3º. Deshacemos los cambios realizados:

$$w = v' \quad \Rightarrow \quad v = C\left[x - \frac{1}{x}\right] + K$$

$$y = xv \quad \Rightarrow \quad y = C\,[x^2 - 1] + Kx$$

Con ello la solución general de la ecuación dada será:

$$y = C\,[x^2 - 1] + Kx$$

Observación

La solución general depende de dos parámetros ya que es una ecuación lineal de 2º orden.

4 **Encontrar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de coeficientes constantes:**

a) $y'' - 9y = 0$
b) $y'' - 6y' + 9y = 0$
c) $y''' - 4y'' - 3y' + 18y = 0$
d) $y'' - 4y' + 13y = 0$
e) $y^{(v} - 2y^{(iv} + 2y''' - 4y'' + y' - 2y = 0$

a) $y'' - 9y = 0$

Tomemos el polinomio característico asociado a la ecuación dada:

$$p\,(m) = m^2 - 9$$

Sus raíces son $m = \pm 3$. Son reales y distintas por lo que la solución general de la ecuación es:

$$y\,(x) = C_1\, e^{3x} + C_2\, e^{-3x}$$

b) $y'' - 6\,y' + 9\,y = 0$

El polinomio característico es:

$$p\,(m) = m^2 - 6m + 9$$

cuya raíz es $m = 3$, raíz doble. La solución general de la ecuación es:

$$y\,(x) = e^{3x}\,[C_1 + C_2\, x]$$

c) $y''' - 4\,y'' - 3\,y' + 18\,y = 0$

Tomando el polinomio característico:

$$p\,(m) = m^3 - 4m^2 - 3m + 18$$

sus raíces son: $m_1 = -2$

$m_2 = 3$ raíz doble

Siguiendo el método indicado en el apartado 4.3, la solución general es:

$$y\,(x) = C_1\, e^{-2x} + e^{3x}\,[C_2 + C_3\, x]$$

d) $y'' - 4\,y' + 13y = 0$

El polinomio característico es:

$$p\,(m) = m^2 - 4m + 13$$

sus raíces son $m = 2 \pm 3i$, por lo que la solución general de la ecuación es:

$$y\ (x) = e^{2x}\ [C_1 \cos 3x + C_2 \operatorname{sen} 3x]$$

e) $y^{(v} - 2y^{(iv} + 2y''' - 4y'' + y' - 2y = 0$

El polinomio característico es:

$$p\ (m) = m^5 - 2m^4 + 2m^3 - 4m^2 + m - 2$$

Sus raíces son $m_1 = 2$, raíz simple y el par complejo $m_2 = \pm i$ raíz de multiplicidad dos. La solución general en este caso es:

$$y\ (x) = C_1\, e^{2x} + (C_2 + C_3\, x) \cos x + (C_4 + C_5 x) \operatorname{sen} x$$

---

5 **Hallar la ecuación diferencial homogénea de coeficientes constantes de menor orden posible para la que las siguientes funciones forman un sistema fundamental de soluciones:**

a) $\boldsymbol{f_1\ (x) = e^x, \quad f_2\ (x) = xe^x, \quad f_3\ (x) = e^{2x}}$

b) $\boldsymbol{f_1\ (x) = 1, \quad f_2\ (x) = e^{3x} \operatorname{sen} x, \quad f_3\ (x) = e^{3x} \cos x}$

a) Si e^x, xe^x son solución es porque $m_1 = 1$ es raíz doble del polinomio característico de la ecuación. De igual forma, $m_2 = 2$ también lo es. Con ello dicho polinomio será:

$$(m - 1)^2\ (m - 2) = (m^2 + 1 - 2\ m)\ (m - 2) =$$
$$= m^3 - 2m^2 + m - 2 - 2m^2 + 4m = m^3 - 4m^2 + 5m - 2$$

y, por tanto, la ecuación es: $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 0$.

b) En este caso las raíces del polinomio característico son:

$$m_1 = 0, \qquad m_2 = 3 + i, \qquad m_3 = 3 - i.$$

El polinomio característico se escribe entonces como:

$$m\ (m - 3 - i)\ (m - 3 + i) = m\ (m^2 - 6m - 10) = m^3 - 6m^2 - 10m$$

y la ecuación es $y''' - 6y'' - 10y' = 0$

---

6 **Sea** $\boldsymbol{y_1\ (x) = \operatorname{sen} x}$ **solución particular de la ecuación diferencial**

$$\boldsymbol{y'' + a_1 y' + a_0 y = b\ (x)}$$

y sean $\boldsymbol{y_2(x) = e^x}$, $\boldsymbol{y_3(x) = e^{3x}}$ soluciones de la homogénea asociada.

Se pide:

a) Solución general de la ecuación completa.

b) Determinar $\boldsymbol{a_1}$ y $\boldsymbol{a_0}$.

a) La solución general de la ecuación lineal completa se escribe como suma de la solución general de la ecuación homogénea asociada:

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0,$$

más una solución particular de la ecuación completa.

1º. $y_2(x) = e^x$, $y_3(x) = e^{3x}$ forman un sistema fundamental para la ecuación lineal homogénea ya que son dos soluciones y se tiene que:

$$W(y_2,\ y_3) = \begin{vmatrix} e^x & e^{3x} \\ e^x & 3e^{3x} \end{vmatrix} = 2e^{4x} \neq 0, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

luego son linealmente independientes.

2º. $y_1(x) = \operatorname{sen} x$ es una solución particular de la ecuación completa.

3º. Teniendo en cuenta los dos puntos anteriores se puede escribir la solución general de la ecuación dada como:

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{3x} + \operatorname{sen} x$$

b) Para determinar a_1 y a_0, coeficientes de la ecuación, se trabajará con la ecuación homogénea:

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

Se sabe que $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$ es la solución general de ella con lo que $m = 1$, $m = 3$ son las raíces del polinomio característico que será:

$$(m-1)(m-3) = m^2 - 4m + 3$$

La ecuación homogénea se escribe entonces como: $y'' - 4y' + 3y = 0$. De esta forma: $a_1 = -4$, $a_0 = 3$.

7 Resolver la ecuación: $y'' + y = \text{tg}\, x$.

Se trata de una ecuación lineal completa de 2º orden. Para resolverla seguimos los pasos indicados en la teoría:

1º. Solución general de la homogénea asociada: $y'' + y = 0$
Su solución general es: $y_{GH}(x) = C_1 \,\text{sen}\, x + C_2 \cos x$

2º. Para encontrar la solución particular de la completa se utilizará el método de Lagrange, es decir; suponemos que la solución general de la ecuación completa es de la forma:

$$y(x) = C_1(x)\,\text{sen}\, x + C_2(x) \cos x \qquad (1)$$

Con ello:

$$y'(x) = C_1'(x)\,\text{sen}\, x + C_1(x)\cos x + C_2'(x)\cos x - C_2(x)\,\text{sen}\, x$$

Imponemos como primera ecuación:

$$C_1'(x)\,\text{sen}\, x + C_2'(x)\cos x = 0$$

Derivando de nuevo:

$$y''(x) = C_1'(x)\cos x - C_1(x)\,\text{sen}\, x - C_2'(x)\,\text{sen}\, x - C_2(x)\cos x$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial se obtiene la segunda ecuación:

$$C_1'(x)\cos x - C_2'(x)\,\text{sen}\, x = \text{tg}\, x$$

Resolviendo el sistema:

$$C_1'(x) = \text{sen}\, x$$

$$C_2'(x) = -\frac{\text{sen}^2 x}{\cos x}$$

Integrando en cada expresión:

$$C_1(x) = -\cos x + K_1 \qquad C_2(x) = \text{sen}\, x - \text{Ln}\,|\sec x + \text{tg}\, x| + K_2$$

Como nos interesa una solución particular, pueden fijarse los valores de K_i por ejemplo $K_1 = 0$ y $K_2 = 0$. Con ello, la solución general de la ecuación dada es:

$$y_{GC}(x) = C_1 \,\text{sen}\, x + C_2 \cos x - \cos x \,\text{sen}\, x +$$

$$+ (\text{sen}\, x - \text{Ln}\,|\sec x + \text{tg}\, x|)\cos x \quad \Leftrightarrow$$

$$y_{GC}(x) = C_1 \,\text{sen}\, x + C_2 \cos x - \cos x \,\text{Ln}\,|\sec x + \text{tg}\, x|$$

Observación

Se verifica que $y_{GC} = y_{GH} + y_{PC}$ siendo

$$y_{PC} = -\cos x \text{ Ln } |\sec x + \text{tg } x|$$

que acabamos de determinar. Obsérvese que y_{GC} se puede obtener directamente sustituyendo los valores de $C_1(x)$ y $C_2(x)$, sin determinar previamente K_1 y K_2, en la ecuación (1) .

---

8 Resolver la siguiente ecuación diferencial lineal completa por medio del método de los coeficientes indeterminados

$$\boldsymbol{y^{(iv} + y'' = 3x^2 + 4 \text{ sen } x - 2 \cos x}$$

1º. Resolvemos la ecuación homogénea asociada: $y^{(iv} + y'' = 0$
Ecuación característica:

$$m^4 + m^2 = 0 \iff m = 0 \text{ doble}$$
$$\iff m = \pm i$$

La solución general de esta ecuación es:

$$y_{GH}(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \text{ sen } x + C_4 \cos x$$

2º. El término independiente de la ecuación completa es combinación lineal de funciones CI:

– x^2 Conjunto CI asociado: $S_1 = \{1, x, x^2\}$
– sen x Conjunto CI asociado: $S_2 = \{\text{sen } x, \cos x\}$
– $\cos x$ Conjunto CI asociado: $S_3 = \{\text{sen } x, \cos x\}$

Como $S_3 = S_2$, lo eliminamos y trabajaremos con S_1 y S_2. Puede comprobarse que en S_1 están incluidas las soluciones $\{1, x\}$ de la homogénea asociada, por tanto debemos multiplicar este conjunto por x^2. Lo mismo ocurre para S_2 al que debemos multiplicar por x. De esta forma, pasaremos a considerar:

$$\{x^4, x^3, x^2\}, \qquad \{x \text{ sen } x, x \cos x\}$$

Así la solución particular que buscamos es de la forma:

$$y_{PC}(x) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx \text{ sen } x + Ex \cos x$$

Determinamos A, B, C, D, E derivando la ecuación anterior cuatro veces e imponiendo que se verifique la ecuación dada:

$$y^{(iv} + y'' = 3x^2 + 4 \text{ sen } x - 2 \cos x$$

Para ello igualaremos los coeficientes a ambos lados de la igualdad. De modo que:

$$A = 1/4, \qquad B = 0, \qquad C = -3, \qquad D = 1, \qquad E = 2$$

Con ello, la solución particular de la ecuación completa es:

$$y_{PC}(x) = (1/4)\, x^4 - 3x^2 + x \text{ sen } x + 2x \cos x$$

3º. La solución general de la ecuación completa será la suma de los dos resultados anteriores:

$$y_{GC}(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \text{ sen } x + C_4 \cos x +$$
$$+ (1/4)\, x^4 - 3\, x^2 + x \text{ sen } x + 2x \cos x$$

---

9 Dada la ecuación $y'' + ay = 0$, determinar a para que el problema de contorno dado por:

$$\boldsymbol{y'' + ay = 0}$$
$$\boldsymbol{y(0) = y(1) = 0}$$

tenga solución distinta de la trivial ($y = 0$).

Se trata de una ecuación diferencial lineal homogénea, calculemos las raíces del polinomio característico:

$$m^2 + a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m = \pm\sqrt{-a}$$

Estudiemos los diversos casos:

i) Supongamos $a < 0$:

Existen dos raíces reales para el polinomio característico, con lo que la solución general de la ecuación diferencial es:

$$y(x) = C_1\, e^{\sqrt{-a}\, x} + C_2\, e^{-\sqrt{-a}\, x}$$

Imponiendo las condiciones de contorno dadas:

$$y(0) = 0 = C_1 + C_2$$

$$y(1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C_1\, e^{\sqrt{-a}} + C_2\, e^{-\sqrt{-a}} = 0$$

de donde se deduce que la única solución posible al problema planteado es $y = 0$, es decir; la solución trivial.

ii) Supongamos $a = 0$:

En este caso existe una raíz doble del polinomio característico. La solución general de la ecuación es:

$$y\ (x) = C_1 + C_2\, x$$

Aplicando las condiciones de contorno dadas:

$$y\ (0) = 0 = C_1$$
$$y\ (1) = 0 = C_1 + C_2 \quad \Leftrightarrow \quad C_2 = 0$$

de donde se deduce que la solución particular buscada es $y = 0$.

iii) Supongamos $a > 0$.

Existen dos raíces imaginarias para el polinomio característico, con lo que la solución general de la ecuación resulta:

$$y\,(x) = C_1 \cos(\sqrt{-a}\ x) + C_2 \operatorname{sen}(\sqrt{-a}\ x)$$

Imponiendo las condiciones del problema de contorno:

$$y\ (0) = 0 = C_1$$
$$y\ (1) = C_1 \cos\ (-a)^{1/2} + C_2 \operatorname{sen}\ (-a)^{1/2} \quad \Leftrightarrow \quad C_2 \operatorname{sen}\ (-a)^{1/2} = 0$$

Esta última condición se cumple si:

- $C_2 = 0$ lo que nos llevaría a la solución trivial $y = 0$ para el problema planteado.
- sen $(-a)^{1/2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (-a)^{1/2} = K\pi \qquad \forall\, K \in$ Z.

Los valores pedidos de a serán: $-a = (K\,\pi)^2$. Con ellos las soluciones al problema de contorno son:

$$y\ (x) = C_2 \operatorname{sen}\ (K\,\pi\, x)$$

---

10 Sea $y_1\,(x)$ una solución particular de la ecuación diferencial $y'' + a_1\,(x)\,y' + a_0\,(x)\,y = \operatorname{sen} 3x$ y sea $y_2\,(x)$ una solución particular

de $y'' + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = x^2 - 3\cos x$. Calcular una solución particular de la ecuación:

$$\boldsymbol{y'' + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = \text{sen } 3x + x^2 - 3\cos x}$$

Aplicando la propiedad de superposición de soluciones de las ecuaciones diferenciales lineales completas, se tiene que la suma de las dos funciones dadas es una solución de la ecuación cuyo término independiente es la suma de los términos de las ecuaciones para las cuales las funciones son solución. De esta forma, la solución pedida es:

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x)$$

---

11 **Resolver la ecuación diferencial:**

$$\boldsymbol{xy'' - y' - 4x^3 y = 16x^3 e^{x^2}}$$

sabiendo que una de las funciones que componen un sistema fundamental de la homogénea asociada es:

$$\boldsymbol{y(x) = e^{x^2}}$$

Se trata de una ecuación diferencial lineal completa de coeficientes variables.

1º. El primer paso será encontrar la solución general de la ecuación lineal homogénea asociada. Como sabemos que la función $y(x)$ dada es solución de ella y forma parte del sistema fundamental podemos reducir el orden de la ecuación mediante el cambio de variable:

$$y(x) = ve^{x^2} \quad \Leftrightarrow \quad y'(x) = v'e^{x^2} + 2xve^{x^2} \quad \Leftrightarrow$$
$$y''(x) = v''e^{x^2} + 4xv'e^{x^2} + 2ve^{x^2}(1 + 2x^2)$$

Sustituyendo en la ecuación, operando y simplificando queda:

$$xv'' + v'(4x^2 - 1) = 0$$

Tomando $w = v'$ queda una ecuación lineal homogénea de primer orden (de variables separadas) en w y x:

$$xw' + (4x^2 - 1)\, w = 0$$

Integrando, la solución general es:

$$w = Cxe^{-2x^2}$$

Deshacemos los cambios realizados:

$$v' = Cxe^{-2x^2} \quad \Leftrightarrow \quad v = \frac{-C}{4} e^{-2x^2} + K$$

con lo que la solución general de la ecuación homogénea resulta:

$$y(x) = ve^{x^2} \quad \Leftrightarrow \quad y_{GH}(x) = \frac{-C}{4} e^{-x^2} + Ke^{x^2} = C_1 e^{-x^2} + C_2 e^{x^2}$$

2º. Para resolver la ecuación diferencial completa se aplica el método de Lagrange. En primer lugar se normaliza la ecuación y se establece el sistema en C_1' y C_2':

$$C_1' e^{x^2} + C_2' e^{-x^2} = 0$$

$$2x C_1' e^{x^2} - 2x C_2' e^{-x^2} = 16x^2 e^{x^2}$$

cuya solución, fijando en cero las constantes de integración, es:

$$C_1 = 2x^2 ; \qquad C_2 = -e^{2x^2}$$

Con ello una solución particular de la ecuación completa resulta:

$$y_{PC}(x) = 2x^2 e^{x^2} - e^{2x^2} e^{-x^2} = (2x^2 - 1) e^{x^2}$$

3º. La solución general de la ecuación lineal completa es la suma de las soluciones encontradas en los puntos 1º y 2º:

$$y_{GC}(x) = C_1 e^{x^2} + C_2 e^{-x^2} + (2x^2 - 1) e^{x^2}$$

---

12 **Sabiendo que $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = \operatorname{sen} x$ constituyen un sistema fundamental de las soluciones de la ecuación**

$$a_2(x)\, y'' + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = 0$$

calcular los coeficientes $a_2(x)$, $a_1(x)$, $a_0(x)$ y resolver la ecuación diferencial:

$$y'' + \frac{a_1(x)}{a_2(x)} y' + \frac{a_0(x)}{a_2(x)} y = \frac{e^x (\cos x - \operatorname{sen} x)^2}{a_2(x)}$$

a) Para calcular las funciones pedidas se trabajará en la siguiente línea: La ecuación diferencial lineal homogénea para la cual e^x y $\operatorname{sen} x$ constituyen un sistema fundamental vendrá dada por:

$$\begin{vmatrix} e^x & \operatorname{sen} x & y \\ e^x & \cos x & y' \\ e^x & -\operatorname{sen} x & y'' \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando por adjuntos de la última columna esta ecuación queda:

$$(\cos x - \operatorname{sen} x)\, y'' + 2y' \operatorname{sen} x - (\operatorname{sen} x + \cos x)\, y = 0$$

De donde se deduce que:

$$a_0(x) = -(\operatorname{sen} x + \cos x); \qquad a_1(x) = 2 \operatorname{sen} x; \qquad a_2(x) = \cos x - \operatorname{sen} x.$$

b) Para resolver la ecuación:

$$y'' + \frac{a_1(x)}{a_2(x)} y' + \frac{a_0(x)}{a_2(x)} y = \frac{e^x (\cos x - \operatorname{sen} x)^2}{a_2(x)}$$

1º. Como ya sabemos, la solución de la ecuación homogénea asociada es

$$y_{GH}(x) = C_1 e^x + C_2 \operatorname{sen} x.$$

2º. Para encontrar una solución particular de la ecuación completa se aplica el método de Lagrange y se obtiene $y_{PC}(x) = e^x (\operatorname{sen} x + \cos x)$, resultado que puede comprobar el lector fácilmente.

3º. La solución general de la ecuación pedida es la suma de ambas:

$$y_{GC}(x) = C_1 e^x + C_2 \operatorname{sen} x + e^x (\operatorname{sen} x + \cos x)$$

---

13 Dada la ecuación diferencial lineal $y' + a_0(x)\, y = b(x)$ y tres soluciones de ella $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$, verificar la igualdad:

$$\frac{y_3(x) - y_1(x)}{y_2(x) - y_1(x)} = K, \qquad \forall\, x \in I$$

Se trata de una ecuación diferencial lineal completa de primer orden, para la cual se sabe que la suma de una solución particular de la ecuación completa con soluciones de la ecuación lineal homogénea asociada es solución de la completa. De esta forma:

$$y_2(x) = y_1(x) + y_0(x)$$

siendo $y_0(x)$ una solución de la homogénea asociada. Con ello la resta $y_2(x) - y_1(x)$ es una base del espacio vectorial de las soluciones de la ecuación lineal homogénea asociada, pudiéndose escribir la solución general de la ecuación completa como:

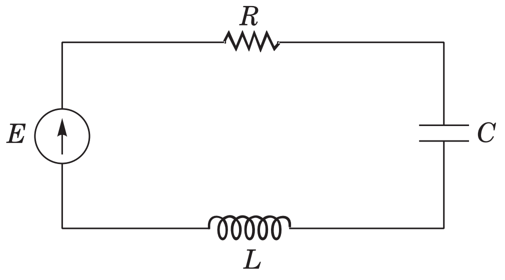
$$y(x) = y_1(x) + K\,[y_2(x) - y_1(x)]$$

En particular: $y_3(x) = y_1(x) + K\,[y_2(x) - y_1(x)]$ para un cierto valor de K, con lo que agrupando se obtiene el resultado expuesto en el enunciado:

$$\frac{y_3(x) - y_1(x)}{y_2(x) - y_1(x)} = K, \qquad \forall\, x \in I$$

---

14 Considérese el circuito eléctrico *RLC* de la figura, conectado a una fuerza electromotriz alterna. Calcular la ecuación diferencial que determina la expresión de la carga del condensador y de la corriente del circuito a lo largo del tiempo.



Recordemos que una fuerza electromotriz (por ejemplo, una batería o alternador) produce un flujo de corriente en un circuito cerrado. Esta corriente provoca una caída de tensión o voltaje en los elementos inducción, capacidad y resistencia al circular a través de ellos.

Las leyes básicas, válidas para estos casos y para dicha caída de tensión son:

– En el elemento de resistencia R:

La resistencia se opone al paso de corriente produciendo una caída en la fuerza electromotriz. La ley de Ohm establece:

$$E_R = Ri \qquad R = \text{constante, “resistencia”}$$
$$i = \text{intensidad de corriente}$$

– En la inducción L:

Un inductor de inductancia L que se opone a cualquier cambio en la corriente, produce una caída en la fuerza electromotriz de magnitud:

$$E_L = L\frac{di}{dt} \qquad \begin{array}{l} L = \text{constante, “inductancia”} \\ t = \text{tiempo} \end{array}$$

– En la capacidad C:

En un condensador de capacidad C que almacena una carga q, la carga acumulada se resiste a la entrada de nueva carga, lo que conlleva una caída en fuerza electromotriz que viene dada por:

$$E_C = \frac{q}{C} \qquad \begin{array}{l} C = \text{constante, “capacidad”} \\ q = \text{carga eléctrica} \end{array}$$

Como la corriente es el ritmo de flujo de carga, y por ello el ritmo al que la carga se acumula en el condensador, se tiene que:

$$i = \frac{dq}{dt}$$

y se puede escribir: $$E_C = \frac{1}{C}\int i\,dt$$

La ley fundamental en el estudio de circuitos eléctricos es la de **Kirchhoff**:

> La suma de las caídas de tensión a lo largo de un circuito cerrado en un sentido fijo es cero.

O lo que es lo mismo:

> La suma de las caídas de tensión en los elementos inducción, resistencia y capacidad es igual a la fuerza electromotriz total dentro del circuito cerrado.

Así, la ley establece: $$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = E$$

Como $i = \dfrac{dq}{dt}$ se tiene:

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=E$$

que es una ecuación diferencial lineal de segundo orden con la que determinamos $q\,(t)$.

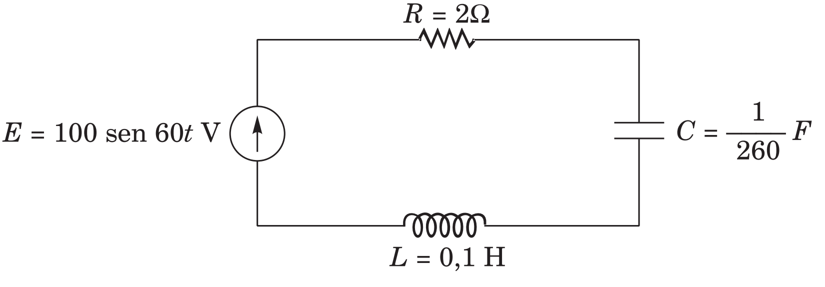
Diferenciando en la primera ecuación y sustituyendo $i=\dfrac{dq}{dt}$ tendremos:

$$L\frac{d^2i}{dt^2}+R\frac{di}{dt}+i\,\frac{1}{C}=\frac{dE}{dt}=g\,(t)$$

que es una ecuación diferencial lineal de segundo orden con la que podemos caltular $i\,(t)$.

---

15 **Se tiene un circuito en serie que consta de una fuerza electromotriz E = 100 sen 60t V, una resistencia de $R = 2\Omega$, un inductor de L = 0,1 H y un condensador de C = 1/260 F. Si la corriente y la carga inicial del condensador son cero, calcular la expresión de la carga del condensador para $t > 0$.**



La ley de Kirchhoff establece que:

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{C}q=E$$

Lo que en este caso se convierte en el siguiente problema de Cauchy, sustituyendo los valores de R, L y C:

$$0{,}1\frac{d^2q}{dt^2}+2\frac{dq}{dt}+260\,q=100\,\mathrm{sen}\,60t$$

Y normalizando aparece la ecuación siguiente:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 20\frac{dq}{dt} + 2600\,q = 1000\,\text{sen}\,60t$$

$$q\ (0) = 0, \qquad q'\ (0) = 0$$

Por tanto, resolver el circuito consiste en obtener la solución de una ecuación lineal completa de 2º orden.

1º. Solución de la homogénea asociada:

La ecuación característica es: $m^2 + 20m + 2600 = 0$, que tiene como raíces:

$$m = -10 \pm 50i$$

La solución general de la homogénea asociada es:

$$q\ (t) = e^{-10t}\ [C_1 \text{ sen } 50t + C_2 \cos 50t]$$

2º. Para la solución particular de la completa, el método de los coeficientes indeterminados (el término independiente es una función CI: sen $60t$) establece que dicha solución particular es de la forma:

$$q\ (t) = A \text{ sen } 60t + \text{B} \cos 60t$$

Se determinan los coeficientes que son: $A = -25/61$, $B = -30/61$.

3º. La solución general de la ecuación del circuito es:

$$q\,(t) = e^{-10t}\,[C_1\,\text{sen}\,50t + C_2\,\cos 50t] - \frac{25}{61}\,\text{sen}\,60t - \frac{30}{61}\cos 60t$$

4º. Fijaremos las constantes con las condiciones iniciales:

$$q\ (0) = 0; \qquad q'\ (0) = i\ (0) = 0$$

Resultando: $C_1 = 30/61$, $C_2 = 36/61$

5º. Por tanto, la expresión pedida de la carga del condensador, en Culombios, a lo largo del tiempo es:

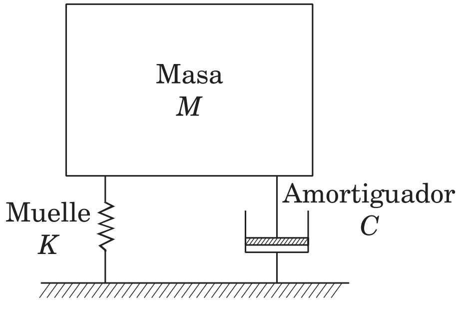
$$q\ (t) \simeq 0{,}77e^{-10t} \cos\ (50t - 0{,}88) - 6{,}64 \cos\ (60t - 0{,}69)$$

Nota

Es importante señalar que el primer término de $q(t)$ se va anulando a medida que transcurre el tiempo, es el régimen TRANSITORIO. El segundo término es periódico, permanece a lo largo del tiempo: es el régimen PERMANENTE.

---

16 Considérese el sistema mecánico de la figura, formado por una masa *M* sujeta al suelo mediante un muelle de constante elástica *K* y un amortiguador de constante *C*, que representa la viscosidad del medio. Estudiar las vibraciones que puede experimentar la masa *M*.



Las vibraciones aparecen siempre que se perturba un sistema físico en equilibrio estable, ya que queda sujeto a fuerzas que tienden a restaurar el equilibrio. Las vibraciones pueden ser:

- Libres: cuando actúan sólo fuerzas internas al sistema: la fuerza restauradora del muelle $F_m = -Kx$, siendo x el desplazamiento de la masa; y la fuerza de amortiguamiento $F_a = -C\dfrac{dx}{dt}$, siendo $\dfrac{dx}{dt}$ la velocidad de la masa. Estas fuerzas llevan un signo menos ya que se oponen al movimiento de la masa.
- Forzadas: cuando actúa sobre el sistema una fuerza externa $F_e = F_e(t)$, que, en general, depende del tiempo.

Aplicando la ley de Newton al sistema sobre el que actúa la fuerza exterior tendremos:

$$\sum \vec{F} = M\vec{a}$$

Desarrollando la ecuación y considerando que todas las fuerzas actúan en la misma dirección, podemos plantear la siguiente ecuación escalar:

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = F_e + F_m + F_a$$

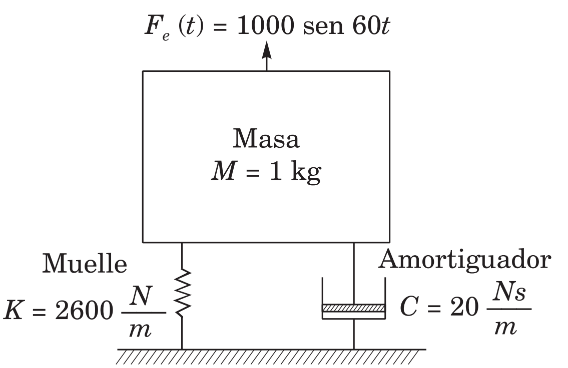
$$M\frac{d^2x}{dt^2} + Kx + C\frac{dx}{dt} = F_e\,(t)$$

que es una ecuación lineal en x. El desplazamiento de la masa que vibra se obtiene resolviendo esta ecuación; conocida la fuerza exterior $F_e = F_e\,(t)$ y M, K y C, constantes propias del sistema.

Observación
Es importante tener en cuenta que esta ecuación es totalmente similar a la del circuito eléctrico de corriente alterna con resistencia, condensador y autoinducción; sólo que las variables representan magnitudes distintas.

---

17 Supongamos la estructura representada por el siguiente modelo:



Sobre el modelo actúa la fuerza variable $F_e\,(t) = 1000$ sen $60t\ N$. Si el desplazamiento y la velocidad iniciales de la masa M son nulos, calcular el desplazamiento de la masa M en función del tiempo.

Aplicando la ecuación de la ley física que rige este tipo de situaciones (ver problema 16) obtenemos directamente:

$$1\frac{d^2x}{dt^2} + 2600x + 20\frac{dx}{dt} = 1000 \text{ sen } 60t$$

$$x\,(0) = 0, \qquad x'\,(0) = 0$$

Resolviendo la ecuación según la teoría general expuesta se obtiene:

$$x\ (t) \simeq 0{,}77\ e^{-10t} \cos\ (50t - 0{,}88) - 6{,}64 \cos\ (60t - 0{,}69)$$

De la misma forma que ocurría con la carga del condensador del ejercicio 15; el desplazamiento de la masa m a lo largo del tiempo consta de un régimen TRANSITORIO, que desaparece a lo largo del tiempo; y de un término periódico, que es la vibración que se mantiene a lo largo del tiempo, es el régimen PERMANENTE.

---

18 Determinar los valores de a para que x, e^{ax} sean soluciones de la misma ecuación diferencial lineal homogénea de coeficientes reales de segundo orden.

Si $y\ (x) = x$ es solución de la ecuación lineal homogénea es porque $m = 0$ es raíz doble del polinomio característico. De esta forma, como la ecuación diferencial es de segundo orden no pueden existir más raíces en el polinomio, con lo que el único valor posible para a es cero.

---

19 Resolver la ecuación $x^2\, y'' - 2\, xy' + 2\, y = x^3$

Se trata de una ecuación de Euler. Se realiza el cambio $x = e^t$, suponiendo que $x > 0$. Por tanto:

$$t = \text{Ln}\ x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\ \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\ \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x}\left[\frac{d^2y}{dt^2}\ \frac{dt}{dx}\right] - \frac{1}{x^2}\ \frac{dy}{dt} = \frac{1}{x^2}\left[\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right]$$

Con estos cambios la ecuación dada se convierte en:

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = e^{3t}$$

que es una ecuación diferencial lineal completa de segundo orden de coeficientes constantes.

1º. Solución general de la homogénea asociada: $y\ (t) = C_1\, e^t + C_2 e^{2t}$.
2º. Aplicando el método de los coeficientes indeterminados, se supone que la solución particular de la ecuación completa es de la forma: $y\ (t) = Ae^{3t}$. Imponiendo que esta función verifique la ecuación se tiene que $A = 1/2$.
3º. La solución general de la ecuación dada es:

$$y\ (t) = C_1\, e^t + C_2\, e^{2t} + e^{3t}/2$$

Sólo resta deshacer el cambio realizado; $e^t = x$:

$$y\ (x) = C_1 x + C_2\, x^2 + x^3/2$$

---

20 **Se pide:**

a) Determinar la ecuación diferencial lineal homogénea de coeficientes reales de menor orden posible para que $y_1\ (x) = x$, $y_2\ (x) = x$ sen $(3x)$ sean soluciones de ella.
b) Determinar la ecuación lineal completa cuya ecuación homogénea asociada es la calculada en el apartado a), de forma que $y\ (x) = 2x^3$ sea una solución particular de ella.

a) Estudiando las funciones y_1 e y_2 se tiene que $m = 0$ y $m = 3i$ deben ser raíces dobles del polinomio característico asociado a la ecuación lineal homogénea, lo que implica que $m = -3i$ también lo es. Con ello el polinomio será:

$$m^2\ (m - 3i)^{\ 2}\ (m + 3i)^{\ 2} = m^2\ [m^2 + 9]^2 = m^6 + 18m^4 + 81m^2$$

De esta forma la ecuación diferencial lineal homogénea buscada es:

$$y^{(vi} + 18y^{(iv} + 81y'' = 0$$

b) La ecuación lineal completa buscada es:

$$y^{(vi} + 18y^{(iv} + 81y'' = g\ (x)$$

Para determinar $g\ (x)$ se impone que la función dada $y = 2x^3$ verifica dicha ecuación, al ser solución:

$$y = 2\,x^3; \qquad y' = 6\,x^2; \qquad y'' = 12\,x; \qquad y''' = 12; \qquad y^{(iv} = y^{(v} = y^{(vi} = 0$$

Sustituyendo en la ecuación:

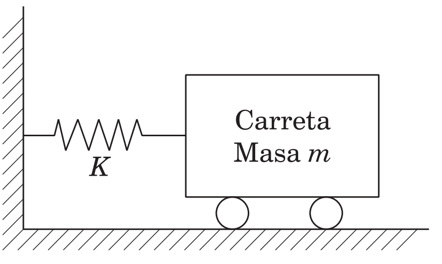
$$0 + 18 \cdot 0 + 81 \cdot 12x = g\ (x); \qquad g\ (x) = 972x.$$

Luego, la ecuación lineal completa es:

$$y^{(vi} + 18y^{(iv} + 81y'' = 972x.$$

---

21 **Se considera una carreta de masa *m* sujeta por un muelle a un muro. El muelle no ejerce resistencia en la posición de equilibrio $x = 0$; pero si la carreta se desplaza a una distancia *x*, ejerce una fuerza de resistencia proporcional al desplazamiento. Estudiar el movimiento de la carreta a lo largo del tiempo si la misma se desplaza una cierta distancia x_0 desde su posición de equilibrio.**



Si aplicamos la ley de Newton a este caso: $\vec{F} = m\vec{a}$, tendremos lo siguiente:

F_r = fuerza de resistencia del muelle

$$-F_r = ma\ (t); \qquad -Kx\ (t) = mx''\ (t)$$

Es decir; el movimiento queda representado por el problema de Cauchy:

$$mx''\ (t) + Kx\ (t) = 0$$
$$x\ (0) = x_0; \qquad x'\ (0) = 0$$

que corresponde a un problema ligado a una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden, cuya solución es:

$$x\,(t) = C_1 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\,t\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\,t\right)$$

Imponiendo las condiciones iniciales se encuentra la solución particular:

$$x(t) = x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\, t\right)$$

---

22 Demostrar que si una función $f(x)$ es solución de una ecuación diferencial lineal homogénea de coeficientes constantes, su derivada también lo es.

Dada la ecuación $y^{(n} + a_{n-1}\, y^{(n-1} + \ldots + a_1\, y' + a_0\, y = 0$

Si $f(x)$ es solución se tiene que:

$$f^{(n} + a_{n-1} f^{(n-1} + \ldots + a_1 f' + a_0 f = 0$$

Si derivamos esta expresión:

$$f^{(n+1} + a_{n-1} f^{(n} + \ldots + a_1 f'' + a_0 f' = 0$$

que corresponde a sustituir $f'(x)$ en la ecuación inicial y como puede observarse la verifica.

Nota
Este resultado sirve para deducir que si se conoce una solución de una ecuación diferencial lineal homogénea de coeficientes constantes, inmediatamente se conocen más que corresponden a las derivadas de la función dada.

---

23 Demostrar que si $y_1(x), \ldots, y_r(x)$ son solución de la ecuación diferencial lineal completa

$$y^{(n}(x) + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1}(x) + \ldots + a_1(x)\, y'(x) + a_0(x)\, y(x) = b(x),$$

la combinación convexa

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_r y_r(x) \qquad \text{con} \qquad \sum_{i=1}^{r} c_i = 1$$

vuelve a ser solución de ella.

Se debe demostrar que $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_r y_r(x)$ satisface la ecuación

$$y^{(n}(x) + \mathrm{a}_{n-1}(x)\, y^{(n-1}(x) + \ldots + a_1(x)\, y'(x) + a_0(x)\, y(x) = b(x),$$

partiendo de que cada una de las $y_i(x)$ lo hace y de que

$$\sum_{i=1}^{r} c_i = 1.$$

Para ello se calcula:

$$\begin{gathered}
y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_r y_r(x) \\
y'(x) = c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x) + \ldots + c_r y_r'(x) \\
\ldots \\
\ldots \\
y^{(n}(x) = c_1 y_1^{(n}(x) + c_2 y_2^{(n}(x) + \ldots + c_r y_r^{(n}(x)
\end{gathered}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$\begin{gathered}
[c_1 y_1^{(n}(x) + c_2 y_2^{(n}(x) + \ldots + c_r y_r^{(n}(x)] + \\
+ a_{n-1}(x)\, [c_1 y_1^{(n-1}(x) + c_2 y_2^{(n-1}(x) + \ldots + c_r y_r^{(n-1}(x)] + \ldots + \\
+ a_1(x)\, [c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x) + \ldots + c_r y_r'(x)] + \\
+ a_0(x)\, [c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_r y_r(x)] = \\
= c_1\, [y_1^{(n}(x) + a_{n-1}(x)\, y_1^{(n-1}(x) + \ldots + a_1(x)\, y_1'(x) + a_0(x)\, y_1(x)] + \\
+ c_2\, [y_2^{(n}(x) + a_{n-1}(x)\, y_2^{(n-1}(x) + \ldots + a_1(x)\, y_2'(x) + a_0(x)\, y_2(x)] + \ldots + \\
+ c_r\, [y_r^{(n}(x) + a_{n-1}(x)\, y_r^{(n-1}(x) + \ldots + a_1(x)\, y_r'(x) + a_0(x)\, y_r(x)] = \\
= c_1 b(x) + c_2 b(x) + \ldots + c_r b(x) = b(x) \sum_{i=1}^{r} c_i = b(x)
\end{gathered}$$

Problemas propuestos

1 Encontrar las regiones donde el teorema de existencia y unicidad garantiza la unicidad de soluciones del problema de Cauchy:

$$y'' + 3\,xy' + x^3\,y = e^x$$

$$y\,(0) = 0 \qquad y'\,(0) = 0$$

2 Aplicar el teorema de existencia y unicidad para estudiar la existencia y unicidad de soluciones del problema de Cauchy:

$$\begin{cases} 2y''' + \dfrac{1}{x}\,y'' + 3x^2 y' - 5y = \operatorname{sen} x \\ y\,(4) = 3, \qquad y'\,(4) = 5, \qquad y''\,(4) = -5 \end{cases}$$

3 Estudiar si son linealmente independientes las siguientes funciones en su campo de definición, suponiendo que son soluciones de alguna ecuación diferencial lineal homogénea:

a) $f_1\,(x) = x, \quad f_2\,(x) = \operatorname{Ln} x \quad$ en $\quad x \in (0, \infty)$

b) $f_1\,(x) = \operatorname{Ln} x, \quad f_2\,(x) = x \operatorname{Ln} x, \quad f_3\,(x) = x^2 \operatorname{Ln} x \quad$ en $\quad x \in (0, \infty)$

c) $f_1\,(x) = e^x \operatorname{sen} x, \quad f_2\,(x) = e^x \cos x \quad$ en $\quad x \in \mathbb{R}$

d) $f_1\,(x) = \operatorname{sen} x, \quad f_2\,(x) = 3 \operatorname{sen} x, \quad f_3\,(x) = -\operatorname{sen} x, \quad$ en $\quad x \in [-1, 2]$

e) $f_1\,(x) = e^x, \quad f_2\,(x) = xe^x, \quad f_3\,(x) = x^2\,e^x \quad$ en $\quad x \in \mathbb{R}$

4 Dada la ecuación diferencial $y''' - y' = 0$ probar que e^x, e^{-x}, $\operatorname{ch} x$ son solución de la ecuación. Comprobar si son o no linealmente independientes.

5 Sabiendo que $y = x^3$ es una solución de $x^2\,y'' - 6y = 0$ emplear la reducción de orden para encontrar una segunda solución en el intervalo $(0, \infty)$. Escribir la solución general.

6 Sabiendo que $y = e^{2x}$ es una solución de $(2x + 1)\,y'' - 4\,(x + 1)\,y' + 4y = 0$ encontrar la otra solución linealmente independiente reduciendo el orden de la ecuación. Escribir la solución general.

7 Sabiendo que $y = x$ es una solución de $x^2\,y'' - (x^2 + x)\,y' + (x + 1)\,y = 0$ encontrar la solución general de ella.

8 Demostrar que la ecuación $y'' - y' - 6y = 0$ tiene dos soluciones linealmente independientes de forma exponencial.

9 Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales homogéneas:

a) $y'' - y = 0$
b) $y'' - 3y' + 2y = 0$
c) $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$
d) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$
e) $y^{vi} + 2y^{v} + y^{iv} = 0$
f) $y^{(ix} = 0$
g) $y^{iv} + 18y'' + 81y = 0$
h) $y^{v} - 2y^{iv} + 5y''' - 10y'' - 36y' + 72y = 0$
i) $y'' - 4y' + 3y = 0$ con $y(0) = 6$, $y'(0) = 10$
j) $y'' - 2y' + 2y = 0$
k) $y'' - 2y' + 3y = 0$ con $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$
l) $y^{v} + 2y''' + y' = 0$
m) $y^{iv} + 4y''' + 10y'' + 12y' + 5y = 0$

10 Resolver las siguientes ecuaciones por el método de variación de constantes.

a) $y'' + y = \sec x$
b) $y'' - 2y' + y = e^{x} \operatorname{sen} x + e^{2x} \cos x$
c) $(1 + x^2)\, y'' + xy' - y + 1 = 0$ sabiendo que $y_1(x) = x$ es una solución particular.
d) $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{x-1}{x} e^{-x}$
e) $y'' + \dfrac{2}{x} y' + y = \dfrac{1}{x}$

sabiendo que $y_1(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ es una solución de la homogénea.

11 Resolver las siguientes ecuaciones por el método de coeficientes indeterminados:

a) $y'' - 5y' + 6y = (12x - 7)\, e^{-x}$
b) $y'' - 2y' + 2y = 4e^{x} \cos x$

c) $y'' - 2y' + 5y = 3 \operatorname{sen} x$

d) $y'' - 2y' + 5y = 3x^2 - x$

e) $y'' - 4y' + 4y = e^x + x^2$

f) $y'' + 4y' + 3y = e^{2x} (\operatorname{sen} 2x + \cos 2x)$

g) $y'' + y = \operatorname{sen} x - \cos x$

h) $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x} \cos 2x$

i) $y'' + k^2 y = k$ con $k = cte$

j) $y'' + k^2 y = k \operatorname{sen} (kx + \alpha)$ con k y α constantes

12 Hallar la ecuación diferencial homogénea de coeficientes constantes de menor orden posible para la que las siguientes funciones forman un sistema fundamental de soluciones de ella:

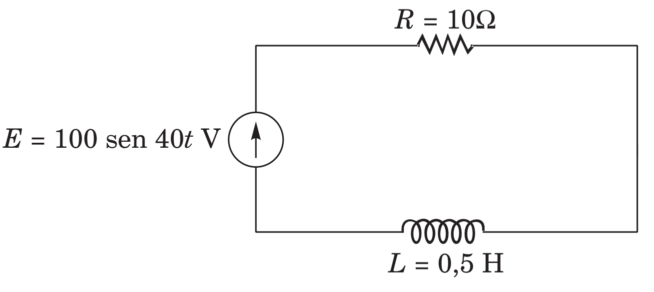
a) $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = x^2$

b) $f_1(x) = e^{2x}$, $f_2(x) = e^{-2x}$

13 Sabiendo que $y_1(x) = e^x$ e $y_2(x) = \cos x$ constituyen un sistema fundamental de soluciones de la ecuación: $a_2(x)\, y'' + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = 0$, calcular $a_2(x)$, $a_1(x)$, $a_0(x)$ y resolver la ecuación diferencial:

$$y'' + \frac{a_1(x)}{a_2(x)} y' + \frac{a_0(x)}{a_2(x)} y = \frac{x + e^x}{a_2(x)}$$

14 Un circuito consta de una fuerza electromotriz de $100 \operatorname{sen} 40t$ V, una resistencia de 10 Ω y un inductor de 0,5 H; todos ellos conectados en serie. Si la corriente inicial es 0, hallar la expresión de la corriente para $t > 0$.



15 Un circuito en serie consta de una fuerza electromotriz de $50 \operatorname{sen} 60t$ V, una resistencia de 12 Ω, un inductor de 0,2 H y un condensador de 1/400 F. Si la corriente y la carga iniciales del condensador son ambas nulas, hallar la carga del condensador para cualquier instante $t > 0$.

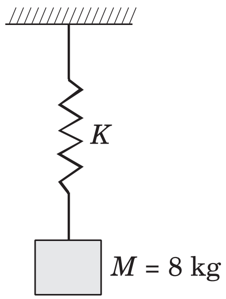
16 Un circuito conectado en serie consta de una fuerza electromotriz de 40 V, una resistencia de 10 **Ω** y un inductor de 0,2 H. Si la corriente inicial es 0, hallar la expresión de la intensidad de corriente para $t > 0$. Si la fuerza electromotriz viene dada por $E(t) = 150 \cos 200t$ V, ¿Cuál sería la expresión de la corriente en este caso?

17 Un circuito consta de una fuerza electromotriz dada por

$$E(t) = 100 \operatorname{sen} 200t \text{ V}$$

una resistencia de 40 **Ω**, un inductor de 0,25 H y un condensador de 40×10^{-5} F, conectados en serie. Si la corriente inicial es cero y la carga inicial en el condensador es 0,01 C, hallar la expresión de la corriente para $t > 0$.

18 En el extremo inferior de un muelle espiral sujeto al techo, se coloca un cuerpo de 8 kg. El cuerpo queda en reposo en su posición de equilibrio, en la que el muelle se ha alargado 0.1 m. A continuación, el cuerpo se desplaza 0.05 m por debajo de la posición de equilibrio y se deja libre en $t = 0$ con una velocidad inicial de 1 m/s, dirigida hacia abajo. Despreciando la resistencia del medio y suponiendo que no existen fuerzas exteriores, determinar la amplitud, periodo y frecuencia del movimiento resultante, así como la expresión del desplazamiento del cuerpo en función del tiempo. (En éste y en los siguientes problemas tomar $g = 10$ m/s^2).



19 En el extremo inferior de un muelle espiral sujeto al techo, se coloca un cuerpo de 32 kg. El cuerpo queda en reposo en su posición de equilibrio, en la que el muelle se ha alargado 2 m. A continuación, el cuerpo se desplaza 0.05 m por debajo de la posición de equilibrio y se deja libre en $t = 0$. No actúan fuerzas exteriores; pero la resistencia del medio en N es igual a $128\dfrac{dx}{dt}$; siendo $\dfrac{dx}{dt}$ la velocidad instantánea del cuerpo en m/s. Determinar el movimiento resultante del cuerpo.

20 En el extremo inferior de un muelle espiral suspendido del techo se coloca un peso de 16 N, siendo 10 N/m la constante elástica del muelle. El peso queda en reposo en su posición de equilibrio. Empezando en $t = 0$ se aplica al sistema una fuerza dada por $F(t) = 5 \cos 2t$. Determinar el movimiento resultante si la fuerza de amortiguamiento, en Newtons, es igual a $2\,dx/dt$, siendo dx/dt la velocidad instantánea del peso en m/s.

21 Resolver la ecuación $x^3y''' - 4\,x^2y'' + 8\,xy' - 8y = 4\ \mathrm{Ln}\ x$

22 Se pide:

a) Verificar que $y_1(x) = 1$, $y_2(x) = x^2$ son soluciones de la ecuación $xy'' - y' = 0$ y escribir su solución general.

b) Determinar a para que $y(x) = ax^3$ sea solución de la ecuación $xy'' - y' = 3\,x^2$ y usar el resultado para escribir su solución general.

Capítulo 4

SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

Hasta el momento, nos hemos ocupado de la resolución de ecuaciones diferenciales con una única variable dependiente. En este capítulo vamos a considerar, en general, sistemas de n ecuaciones diferenciales con n variables dependientes. En concreto, nos centraremos en los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.

Los sistemas de ecuaciones diferenciales están inherentes de forma natural en muchos problemas científicos y técnicos. Así, para describir el movimiento de dos osciladores armónicos acoplados, se emplea un sistema de dos ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden y para resolver un circuito eléctrico de corriente alterna en el que aparecen dos mallas, se emplea un sistema de dos ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.

1. ÁLGEBRA DE FUNCIONES

1.1. El espacio vectorial $V(I)$

Consideremos el conjunto de funciones vectoriales: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ de la forma:

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

donde $f_1(t)$, $f_2(t)$, ..., $f_n(t)$ son funciones definidas y continuas en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$. El lector puede comprobar que con la suma y la multiplicación por un escalar, este conjunto tiene estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$. Este espacio se designa por $V(I)$.

1.2. Independencia lineal en $V(I)$

Sea el espacio vectorial $V(I)$. Se dice que un conjunto de funciones vectoriales $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, ..., $\varphi_k(t)$ son linealmente independientes si, siendo C_1, C_2, ..., C_k constantes reales, la expresión:

$$C_1\,\varphi_1(t) + C_2\,\varphi_2(t) + ... + C_k\,\varphi_k(t) \equiv 0$$

implica que: $$C_1 = C_2 = ... = C_k = 0$$

En caso contrario, se dice que las funciones vectoriales $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, ..., $\varphi_k(t)$ son linealmente dependientes.

1.3. Teorema 1. Independencia lineal

Sean $\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_k(t)$ un conjunto de elementos de $V(I)$. Si existe un valor de $t = t_0 \in I$ para el que son linealmente independientes $\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0)$, ..., $\varphi_k(t_0)$, entonces $\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_k(t)$ son linealmente independientes como funciones de $V(I)$.

1.4. Teorema 2. Dependencia lineal

Sean $\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_k(t)$ un conjunto de elementos de $V(I)$. Si para todo $t = t_0 \in I$, $\varphi_1(t_0)$, $\varphi_2(t_0)$, ..., $\varphi_k(t_0)$ son linealmente dependientes, entonces $\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_k(t)$ pueden ser linealmente independientes o linealmente dependientes como funciones de $V(I)$.

Nota

Omitimos la demostración de estos dos teoremas por exceder el campo de estudio de este libro.

2. CONCEPTOS FUNDAMENTALES

2.1. Definición. Sistema lineal

Sea el intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Sean las funciones $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$. Sean las funciones $a_{ij}(t)$, $b_i(t)$ definidas en el intervalo $I \subset \mathbb{R}$ para todo $i, j = 1 ... n$. Entonces, se denomina ***sistema de ecuaciones diferenciales lineales*** o ***sistema lineal de primer orden y dimensión n en forma normal*** a:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)\,x_1 + a_{12}(t)\,x_2 + \ldots + a_{1n}(t)\,x_n + b_1(t) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}(t)\,x_1 + a_{22}(t)\,x_2 + \ldots + a_{2n}(t)\,x_n + b_2(t) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}(t)\,x_1 + a_{n2}(t)\,x_2 + \ldots + a_{nn}(t)\,x_n + b_n(t) \end{cases}$$

Es decir, un sistema de ecuaciones en las que aparecen relacionadas de forma lineal la variable independiente t, las variables dependientes $x_1, x_2, ..., x_n$, y sus primeras derivadas. El sistema está en *forma normal* si los coeficientes de las derivadas de las variables dependientes son la unidad. El sistema también puede escribirse de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dx_1}{dt} \\ \dfrac{dx_2}{dt} \\ \cdots \\ \cdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \ldots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \ldots & a_{2n}(t) \\ & \ldots\ldots\ldots & & \\ & \ldots\ldots\ldots & & \\ & \ldots\ldots\ldots & & \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \ldots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$$

O más resumidamente, en forma matricial: $X' = A\,(t)\,X + B\,(t)$.

Ejemplo

El sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + 2y + z + t \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - 4y + 5z - t^2 \\ \dfrac{dz}{dt} = 4x + y - 3z + 2t + 1 \end{cases}$$

puede escribirse como:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \\ \dfrac{dz}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 5 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ -t^2 \\ 2t+1 \end{pmatrix}$$

2.2. Definición. Solución

Dado un sistema de ecuaciones diferenciales lineales, llamamos ***solución*** a toda función vectorial $X(t)$ que satisface el sistema, es decir a todas y cada una de las ecuaciones del mismo.

Ejemplo

Sea el sistema:

$$\begin{aligned} x' &= y+1 \\ y' &= x+1 \end{aligned}$$

En la forma $X' = AX + B$, las matrices A y B son, en este caso:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Una solución de este sistema es:

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^t - 1 \\ e^t - 1 \end{pmatrix}$$

ya que

$$X'(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}$$

y sustituyendo en el sistema:

$$\begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t - 1 \\ e^t - 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t - 1 \\ e^t - 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}$$

2.3. Tipos de sistemas

Dado un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden $X'(t) = A(t)\,X(t) + B(t)$, se dice que:

a) El sistema es ***homogéneo*** si la matriz columna $B(t)$ es la matriz columna cero; es decir, queda $X'(t) = A(t)\,X(t)$.
b) El sistema es ***completo*** si la matriz columna $B(t)$ no es la matriz columna cero, es decir, tenemos $X'(t) = A(t)\,X(t) + B(t)$.
c) El sistema es de ***coeficientes constantes*** si la matriz $A(t)$ es de números reales, es decir, no depende de la variable independiente t.

Ejemplo
El siguiente sistema de ecuaciones diferenciales es completo y de coeficientes constantes:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ e^t \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.4. Teorema de existencia y unicidad de soluciones para sistemas lineales de ecuaciones

Sea el sistema lineal completo $X'(t) = A(t)\,X(t) + B(t)$ y X_0 el valor conocido de $X(t)$ en t_0:

$$X_0 = X(t_0) = \begin{pmatrix} x_1^0 = x_1(t_0) \\ x_2^0 = x_2(t_0) \\ \cdots \\ x_n^0 = x_n(t_0) \end{pmatrix}$$

Si en t_0 las funciones $a_{ij}(t)$ y $b_i(t)$ son continuas, entonces existe una única solución particular $X(t)$ del sistema que verifica que $X_0 = X(t_0)$.

2.5. Relación entre los sistemas lineales y la ecuación lineal de orden *n*

Es interesante resaltar la relación entre los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales y las ecuaciones diferenciales lineales estudiadas anteriormente. Para ello, consideremos una ecuación diferencial lineal normalizada de orden n:

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1(t)\frac{dx}{dt} + a_0(t)\,x = b(t)$$

siendo $x(t)$ la función incógnita y t la variable independiente. El objetivo es transformar esta ecuación diferencial lineal de orden n en un sistema lineal de ecuaciones diferenciales de dimensión n. Para ello, realizaremos el siguiente cambio de notación:

$$x_1 = x; \qquad x_2 = \frac{dx}{dt}; \qquad \cdots; \qquad x_{n-1} = \frac{d^{n-2}x}{dt^{n-2}}; \qquad x_n = \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}$$

Derivamos respecto de t ambos miembros de cada una de las igualdades anteriores:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx_1}{dt}; \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx_2}{dt}; \qquad \cdots; \qquad \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} = \frac{dx_{n-1}}{dt}; \qquad \frac{d^n x}{dt^n} = \frac{dx_n}{dt}$$

Por tanto, empleando los dos últimos conjuntos de expresiones, la ecuación diferencial lineal de orden n se convierte en el siguiente sistema lineal completo de ecuaciones diferenciales:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dx_{n-1}}{dt} = x_n \\ \dfrac{dx_n}{dt} = -a_0(t)\,x_1 - a_1(t)\,x_2 - \cdots - a_{n-1}(t)\,x_n + b(t) \end{array}\right.$$

Ejemplo

Transformar en un sistema lineal la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + y = e^t$$

Hacemos el cambio:

$$y_1 = y; \qquad y_2 = \frac{dy}{dt}$$

Y derivamos ambas igualdades:

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{dy}{dt}; \qquad \frac{dy_2}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}$$

Por lo tanto, el sistema correspondiente es:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dt} = -2y_2 - y_1 + e^t \end{cases}$$

También podemos realizar el proceso contrario, es decir, transformar el sistema en una ecuación diferencial lineal de orden n, para poder resolverlo de forma más simple. Esto es particularmente útil para sistemas lineales de coeficientes constantes (ver apartado 5). Como ejemplo, vamos a suponer que tenemos un sistema lineal completo de dos ecuaciones con dos funciones incógnitas:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by + f(t) \\ \dfrac{dy}{dt} = cx + dy + g(t) \end{cases}$$

donde $f(t)$ y $g(t)$ son dos funciones conocidas y $x(t)$ e $y(t)$ son las dos funciones incógnitas. Para transformar el sistema anterior en una ecuación empezamos despejando $y(t)$ en la primera ecuación:

$$y = \frac{1}{b}\left(\frac{dx}{dt} - ax - f(t)\right)$$

Derivamos la expresión obtenida respecto de t:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{b}\left(\frac{d^2x}{dt^2} - a\frac{dx}{dt} - f'(t)\right)$$

Y sustituimos estas dos expresiones en la otra ecuación del sistema para obtener una ecuación diferencial de segundo orden en $x(t)$:

$$\frac{1}{b}\left(\frac{d^2x}{dt^2} - a\frac{dx}{dt} - f'(t)\right) = cx + \frac{d}{b}\left(\frac{dx}{dt} - ax - f(t)\right) + g(t)$$

Por fin operando y agrupando constantes obtenemos:

$$A\frac{d^2x}{dt^2}+B\frac{dx}{dt}+Cx+P(t)=0; \qquad \text{con} \qquad A,\ B,\ C,\ \in\ \mathbb{R}$$

Ejemplo
Transformar en una ecuación lineal el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=y+1 \\ \dfrac{dy}{dt}=x+1 \end{cases}$$

Despejamos y en la primera ecuación, derivamos la expresión obtenida respecto de t y sustituimos ambas en la segunda ecuación, con lo que obtenemos la siguiente ecuación diferencial lineal en x de segundo orden:

$$\frac{d^2x}{dt^2}-x=1$$

3. SISTEMAS LINEALES HOMOGÉNEOS

Vamos a estudiar en este apartado las propiedades generales de los sistemas lineales homogéneos, considerando que los coeficientes de las variables dependientes son funciones continuas de la variable real t y que toman valores en el cuerpo real.

Por tanto, sea el sistema lineal homogéneo $X'(t)=A(t)\,X(t)$; siendo la matriz $A(t)$ cuadrada de orden n.

Notas
1) En un sistema lineal homogéneo siempre existe la solución trivial $X(t)=0$.
2) En este apartado nos vamos a limitar a estudiar los sistemas lineales homogéneos de primer orden.

3.1. Teorema de estructura del conjunto de soluciones

El conjunto de soluciones $S(A)$ de un sistema lineal homogéneo de primer orden y dimensión n tiene estructura de espacio vectorial de dimensión n.

Demostración
a) Sean $\mathbf{\Phi}(t)$ y $\mathbf{\Psi}(t)$ dos soluciones particulares cualesquiera de $X'=A(t)\,X$. Veamos que $\mathbf{\Phi}(t)+\mathbf{\Psi}(t)$ es también solución. Para ello, empleamos la forma matricial del sistema.

En efecto:

$$[\boldsymbol{\Phi}(t) + \boldsymbol{\Psi}(t)]' - A(t)\,[\boldsymbol{\Phi}(t) + \boldsymbol{\Psi}(t)] =$$

$$= [\boldsymbol{\Phi}'(t) - A(t)\,\boldsymbol{\Phi}(\mathrm{t})] + [\boldsymbol{\Psi}'(t) - A(t)\,\boldsymbol{\Psi}(t)] = 0 + 0 = 0$$

Sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Veamos que $\lambda\,\boldsymbol{\Phi}(t)$ también es solución:

$$[\lambda\,\boldsymbol{\Phi}(t)]' - A(t)\,[\lambda\,\boldsymbol{\Phi}(t)] = \lambda\,[\boldsymbol{\Phi}'(t) - A(\mathrm{t})\,\boldsymbol{\Phi}(t)] = \lambda 0 = 0$$

Por tanto $(S(A), +, .\lambda)$ tiene estructura de espacio vectorial.

b) En segundo lugar, tenemos que probar que la dimensión de este espacio vectorial es n. Para ello, consideremos los siguientes vectores de $\mathbb{R}^n$:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \cdots \qquad u_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix}$$

que son, evidentemente, linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$ y forman una base canónica de $\mathbb{R}^n$.

Por el teorema de existencia y unicidad de soluciones, existen y son únicas $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, ..., $\varphi_n(t)$, soluciones particulares del sistema que verifican $\varphi_\mathrm{i}(\mathrm{t}_0) = u_i$. Ahora bien, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, ..., $\varphi_n(t)$ son linealmente independientes como funciones de $V(I)$, ya que para $t = t_0$, $\varphi_i(t_0) = u_i$ son linealmente independientes como vectores de $\mathbb{R}^n$ y es lo que nos dice el teorema 1 del apartado 1.4.

Por tanto, al haber n soluciones linealmente independientes, la dimensión del espacio vectorial es, al menos, n.

Sea ahora $\boldsymbol{\Psi}(t)$ una solución cualquiera; que particularizada en t_0 nos da los valores:

$$\boldsymbol{\Psi}(t_0) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{pmatrix}$$

Tomemos $\chi(t) = a_1\,\varphi_1(t) + a_2\,\varphi_2(t) + \ldots + a_n\,\varphi_n(t)$; que es solución del sistema lineal homogéneo por ser una combinación lineal de soluciones. Por otro lado:

$$\chi(t_0) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{pmatrix} \qquad \Psi(t_0) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{pmatrix}$$

Por el teorema de existencia y unicidad de soluciones, las funciones vectoriales $\chi(t)$, $\Psi(t)$ han de ser la misma, al ser $\chi(t_0) = \Psi(t_0)$. Entonces tenemos que $\Psi(t) = a_1\,\varphi_1(t) + a_2\,\varphi_2(t) + \ldots + a_n\,\varphi_n(t)$.

Por tanto, hemos obtenido que una solución cualquiera $\Psi(t)$ puede expresarse como combinación lineal de n funciones vectoriales solución (que eran linealmente independientes). Luego esas n funciones vectoriales $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$ constituyen una base del espacio vectorial de soluciones; y, por tanto, la dimensión del espacio vectorial es n.

3.2. Definición. Matriz solución

Sea el sistema lineal homogéneo $X'(t) = A(t)\,X(t)$ de dimensión n. Se dice que la matriz $\Phi(t)$ es una ***matriz solución*** de dicho sistema si se verifica:

$$\Phi'(t) = A(t)\,\Phi(t)$$

Observación

Esto es equivalente a decir que cada columna de la matriz $\Phi(t)$ es solución del sistema $X'(t) = A(t)\,X(t)$.

3.3. Definición. Matriz fundamental

Sea el sistema lineal homogéneo $X'(t) = A(t)\,X(t)$ de dimensión n. Se dice que la matriz cuadrada $\Phi(t)$ de orden n es ***matriz fundamental*** del sistema si, además de ser matriz solución, sus columnas forman un conjunto de soluciones linealmente independientes.

Notas

1) Sean $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_k(t)$ un conjunto de soluciones de $X'(t) = A(t)\,X(t)$. Si estas funciones son linealmente independientes como funciones de $V(I)$, entonces también lo son como vectores de $\mathbb{R}^n$ para todo $t = t_0 \in I$.

2) Sea $\mathbf{\Phi}(t)$ una matriz solución del sistema $X'(t) = A(t)\,X(t)$. La condición necesaria y suficiente para que $\mathbf{\Phi}(t)$ sea matriz fundamental es que el determinante de $\mathbf{\Phi}(t)$ sea distinto de cero.

3.4. Definición. Sistema fundamental

Se dice que $X_1(t), X_2(t), ..., X_n(t)$ es ***sistema fundamental*** de $X'(t) = A(t)\,X(t)$ si es un conjunto de n soluciones linealmente independientes. De esta manera, podemos decir:

a) Dado un sistema fundamental, cualquier solución del sistema $X'(t) = A(t)\,X(t)$ es combinación lineal de él, es decir, la solución general del sistema será:

$$X(t) = C_1\,X_1(t) + ... + C_n\,X_n(t).$$

b) Una matriz fundamental viene expresada como:

$$\mathbf{\Phi}(t) = (X_1(t), X_2(t), ..., X_n(t)).$$

3.5. Solución general de un sistema lineal homogéneo. Solución particular

Consideremos $\mathbf{\Phi}(t)$, una matriz fundamental del sistema lineal homogéneo. Entonces, la ***solución general*** del sistema lineal homogéneo es $X(t) = \mathbf{\Phi}(t)\,K$; donde K es una matriz columna de constantes reales arbitrarias.

Dado $t = t_0$, la solución particular que para $t = t_0$ verifica que

$$X = X^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n^0 \end{pmatrix}$$

es $X = \mathbf{\Phi}(t)\,\mathbf{\Phi}^{-1}(t_0)\,X^0$. Como la solución general es $X = \mathbf{\Phi}(t)\,K$; si sustituimos t_0 tenemos $X^0 = \mathbf{\Phi}(t_0)\,K$. Es decir, $K = \mathbf{\Phi}^{-1}(t_0)\,X^0$. Por tanto, la solución particular que para $t = t_0$ verifica $X = X^0$ es:

$$X = \mathbf{\Phi}(t)\,\mathbf{\Phi}^{-1}(t_0)\,X^0$$

3.6. Obtención del sistema lineal homogéneo a partir de una matriz fundamental

Sea el sistema lineal homogéneo $X'(t) = A(t)\, X(t)$, del que conocemos una matriz fundamental $\mathbf{\Phi}(t)$. Por ser $\mathbf{\Phi}(t)$ matriz solución (al ser matriz fundamental), se verifica:

$$\mathbf{\Phi}'(t) = A(t)\, \mathbf{\Phi}(t)$$

y, como por definición de matriz fundamental, el determinante de $\mathbf{\Phi}(t)$ es distinto de 0, entonces:

$$A(t) = \mathbf{\Phi}'(t)\, \mathbf{\Phi}^{-1}(t)$$

Por tanto, la expresión del sistema lineal homogéneo, conocida una matriz fundamental del mismo es:

$$X'(t) = \mathbf{\Phi}'(t)\, \mathbf{\Phi}^{-1}(t)\, X(t)$$

4. SISTEMAS LINEALES COMPLETOS

En este apartado vamos a estudiar las propiedades de los sistemas lineales completos o no homogéneos. Consideramos que los coeficientes de las variables dependientes, la matriz $A(t)$ y el vector columna $B(t)$ son funciones continuas de la variable real t y que toman valores en el cuerpo real.

Por tanto, sea el sistema lineal completo $X'(t) = A(t)\, X(t) + B(t)$, con $A(t)$, $B(t) \in \mathbb{R}(I)$, siendo $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$.

4.1. Teorema de estructura del conjunto de soluciones

Dado el sistema lineal de primer orden y dimensión n en forma completa $X'(t) = A(t)\, X(t) + B(t)$; el conjunto de soluciones de dicho sistema tiene estructura de espacio afín asociado al espacio vectorial constituido por el conjunto de soluciones de dicho sistema homogeneizado, en el que hemos considerado $B(t)$ como un vector columna de ceros.

Nota

Vamos a comprobar que se verifican los dos axiomas que definen un espacio afín. Sean $\varphi_1(t)$ y $\varphi_2(t)$ dos soluciones particulares del sistema completo $X'(t) = A(t)\, X(t) + \mathrm{B}(t)$ y φ_0 una solución particular de dicho sistema homogeneizado $X'(t) = A(t)\, X(t)$.

a) Comprobamos que $\varphi_1(t) - \varphi_2(t)$ es solución del sistema homogéneo:

$$[\varphi_1' - \varphi_2'] - A(t)\, [\varphi_1 - \varphi_2] =$$

$$= [\varphi_1' - A(t)\, \varphi_1] - [\varphi_2' - A(t)\, \varphi_2] = B(t) - B(t) = 0$$

b) Comprobamos que $\varphi_1(t) + \varphi_0(t)$ es solución del sistema completo:

$$[\varphi_1 + \varphi_0]' - A(t)\,[\varphi_1 + \varphi_0] =$$

$$= [\varphi_1' - A(t)\,\varphi_1] + [\varphi_0' - A(t)\,\varphi_0] = B(t) - 0 = B(t)$$

4.2. Solución general del sistema completo

A partir del teorema anterior, se deduce que si $\varphi(t)$ es una solución particular del sistema completo y $\Phi(t)$ una matriz fundamental del sistema homogéneo; entonces la ***solución general*** del sistema completo será:

$$X = \varphi(t) + \Phi(t)\,K$$

donde K es una matriz columna de constantes reales arbitrarias.

4.3. Determinación de una solución particular del sistema completo

Sea el sistema lineal completo $X'(t) = A(t)\,X(t) + B(t)$. Sea $\Phi(t)$ una matriz fundamental de dicho sistema homogeneizado. Para calcular una solución particular del sistema completo empleamos la conjetura de Lagrange; que consiste en suponer que una solución particular del sistema lineal completo es de la forma $\Phi(t)\,K(t)$; donde $K(t)$ es una matriz columna de funciones de la variable independiente t. Vamos a tratar de determinar la matriz columna $K(t)$.

Como $X(t) = \Phi(t)\,K(t)$, sustituyendo en el sistema:

$$\Phi'(t)\,K(t) + \Phi(t)\,K'(t) = A(t)\,\Phi(t)\,K(t) + B(t)$$

Como $\Phi(t)$ es matriz fundamental del sistema homogéneo, entonces se verifica $\Phi'(t) = A(t)\,\Phi(t)$; que sustituido en la expresión anterior nos proporciona:

$$A(t)\,\Phi(t)\,K(t) + \Phi(t)\,K'(t) = A(t)\,\Phi(t)\,K(t) + B(t)$$

Es decir: $$\Phi(t)\,K'(t) = B(t)$$

Por tanto, despejando en esa expresión:

$$K'(t) = \Phi^{-1}(t)\,B(t)$$

Integramos y obtenemos la expresión de $K(t)$:

$$K(t) = \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)\,B(s)\,ds$$

Por tanto, la solución particular es:

$$\Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)\, B(s)\, ds$$

En definitiva, sea el sistema lineal en forma completa

$$X'(t) = A(t)\, X(t) + B(t)$$

Si $\Phi(t)$ es una matriz fundamental del sistema homogéneo asociado; entonces la solución particular de dicho sistema completo que verifica que $X(t_0) = X^0$ es:

$$\Pi(t) = \Phi(t)\, \Phi^{-1}(t_0)\, X^0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)\, B(s)\, ds$$

5. SISTEMAS LINEALES DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE COEFICIENTES CONSTANTES

Como ya sabemos, los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes son de la forma $X'(t) = AX(t) + B(t)$; donde A es una matriz de orden n y cuyos elementos son números reales. Vamos a estudiar los métodos de resolución de este tipo de sistemas.

5.1. Reducción de un sistema lineal a una ecuación diferencial lineal

Como ya se comentó en el apartado 2.5, podemos reducir el sistema lineal a una ecuación lineal de orden n; resolvemos ésta y, deshaciendo los cambios realizados, obtenemos la solución del sistema pedido. Éste es un método sencillo de aplicar cuando tenemos pocas variables dependientes, pero el cálculo se complica en exceso al aumentar el número de éstas.

5.2. Sistemas lineales homogéneos de coeficientes constantes

5.2.1. Método de resolución de Euler

Consideremos el sistema lineal homogéneo $X' = AX$ de dimensión n con coeficientes constantes. El objetivo es encontrar un sistema fundamental $(X_1(t), X_2(t), .., X_n(t))$, solución del sistema dado. Por analogía con la resolución de la ecuación lineal homogénea de orden n vamos a intentar encontrar una solución al sistema que sea de la forma:

$$X(t) = V\,e^{\lambda t} = \begin{pmatrix} x_1(t) = v_1\,e^{\lambda t} \\ x_2(t) = v_2\,e^{\lambda t} \\ \cdots \\ x_n(t) = v_n\,e^{\lambda t} \end{pmatrix}$$

siendo $X(t)$ una función vectorial con $v_1, v_2, ..., v_n$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Como hemos supuesto que $X(t)$ es solución, deberá verificar el sistema, es decir:

$$\lambda V e^{\lambda t} = A V e^{\lambda t} \iff \lambda V = AV \iff (A - \lambda I)V = 0$$

siendo A la matriz de coeficientes del sistema, I la matriz identidad de dimensión n; V el vector columna de constantes y $\lambda \in \mathbb{R}$. Evidentemente, siendo V el vector nulo obtenemos la solución trivial, como ya sabíamos. Por tanto, las soluciones no triviales se obtienen resolviendo el sistema homogéneo $|A - \lambda I| = 0$, (aplicación del teorema de Rouché):

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Esta expresión es el ***polinomio o ecuación característica*** de la matriz A y en definitiva, se trata de calcular los autovalores y autovectores asociados de la matriz A.

Una solución del sistema será la función vectorial $X(t) = V\mathrm{e}^{\lambda t}$; siendo λ un autovalor de la matriz A y V el autovector asociado al autovalor λ. Podemos distinguir varios casos:

a) Caso de n autovalores reales y distintos

Los n autovalores $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ de la matriz A son reales y distintos $(\lambda_i \neq \lambda_j,\ i \neq j)$. Sean $V_1, V_2, ..., V_n$ el conjunto de vectores propios asociados a los n autovalores de la matriz A. En este caso, un sistema fundamental de soluciones es el siguiente conjunto de funciones vectoriales:

$$\begin{cases} X_1 = V_1\,e^{\lambda_1 t} \\ X_2 = V_2\,e^{\lambda_2 t} \\ \quad\cdots \\ X_n = V_n\,e^{\lambda_n t} \end{cases}$$

La solución general del sistema es la combinación lineal del conjunto de funciones vectoriales:

$$X(t) = C_1 V_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 V_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + C_n V e^{\lambda_n t}$$

siendo $C_1, C_2, ..., C_n \in \mathbb{R}$ constantes arbitrarias.

Demostración

Hay que demostrar que las funciones anteriores son soluciones linealmente independientes. Por tanto, vamos a ver si cada solución satisface al sistema $X' = AX$:

$$X_i' = AX_i \qquad X_i' = (V_i e^{\lambda_i t})' = \lambda_i V_i e^{\lambda_i t} \qquad AX_i = AV_i e^{\lambda_i t}$$

luego: $X_i' = AX_i \Leftrightarrow \lambda_i V_i e^{\lambda_i t} = AV_i e^{\lambda_i t}$

lo cual se cumple, ya que por ser λ_i autovalor de la matriz A, entonces $\lambda_i V_i = AV_i$.

Para estudiar si son soluciones linealmente independientes planteamos el determinante formado por dichas soluciones.

$$W(X_1, \ X_2, \ \cdots, \ X_n)(t) = \begin{vmatrix} V_{11}e^{\lambda_1 t} & V_{21}e^{\lambda_2 t} & \cdots & V_{n1}e^{\lambda_n t} \\ V_{12}e^{\lambda_1 t} & V_{22}e^{\lambda_2 t} & \cdots & V_{n2}e^{\lambda_n t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ V_{1n}e^{\lambda_1 t} & V_{2n}e^{\lambda_2 t} & \cdots & V_{nn}e^{\lambda_n t} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)t} \begin{vmatrix} V_{11} & V_{21} & \cdots & V_{n1} \\ V_{12} & V_{22} & \cdots & V_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ V_{1n} & V_{2n} & \cdots & V_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

El determinante es distinto de cero, ya que la función exponencial es siempre positiva y el determinante no se anula al estar formado por los autovectores de la matriz A asociados a autovalores distintos que, por definición de autovector, son linealmente independientes.

b) Caso de autovalores reales con multiplicidad mayor que 1

En el caso que la matriz A de orden n tenga autovalores repetidos con una cierta multiplicidad pueden darse dos situaciones; que concretamos a continuación:

i) Supongamos, para fijar ideas, que A tiene un autovalor real λ_1 con multiplicidad m, $1 < m \leq n$; y que el resto de los autovalores $\lambda_{m+1}, \lambda_{m+2}, ..., \lambda_n$ (si existen) son reales y distintos. Y, en este caso, ocurre que λ_1 tiene m vectores propios linealmente independientes: $V_1, V_2, ..., V_m$. Por tanto, un sistema fundamental de soluciones se obtiene de la misma manera que en el caso a:

$$\begin{cases} X_1 = V_1 e^{\lambda_1 t} \\ X_2 = V_2 e^{\lambda_1 t} \\ \cdots \\ X_m = V_m e^{\lambda_1 t} \\ X_{m+1} = V_{m+1} e^{\lambda_{m+1} t} \\ \cdots \\ \cdots \\ X_n = V_n e^{\lambda_n t} \end{cases}$$

Y la solución general del sistema viene dada por:

$$X = C_1 V_1 e^{\lambda_1 t} + \cdots + C_m V_m e^{\lambda_1 t} + C_{m+1} V_{m+1} e^{\lambda_{m+1} t} + \cdots + C_n V_n e^{\lambda_n t}$$

siendo $C_1, C_2, ..., C_n \in \mathbb{R}$ constantes arbitrarias.

ii) Supongamos ahora que algún autovalor de A tiene multiplicidad m, y que no podemos asociarle m vectores propios linealmente independientes. El análisis de este caso se realiza en el apartado 5.2.2, donde se trata el método general de cálculo de una matriz fundamental.

c) Caso de autovalores complejos

Este caso puede tratarse de manera análoga al caso real trabajando con autovalores y autovectores complejos.

5.2.2. Método general de resolución

Recordemos que una ecuación diferencial lineal homogénea de primer orden $y' + ay = 0$, donde a es una constante real, tiene como solución $y = Ce^{-ax}$. Generalizando este resultado para el caso de sistemas lineales homogéneos $X' = AX$, donde A es una matriz de dimensión n formada por constantes, la solución vendrá dada por $X = e^{tA}C$. Es necesario definir el concepto de la matriz exponencial e^{tA}. Y, por tanto, una matriz fundamental asociada al sistema será $\Phi(t) = e^{tA}$.

La matriz exponencial se define mediante la serie de potencias:

$$e^{tA} = I + \frac{tA}{1!} + \frac{t^2A^2}{2!} + \cdots + \frac{t^nA^n}{n!} + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^iA^i}{i!}$$

Y la serie derivada respecto de t queda como:

$$AI + A\frac{tA}{1!} + A\frac{t^2A^2}{2!} + \cdots + A\frac{t^{n-1}A^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots = Ae^{tA}$$

por lo que:

$$\frac{d\,(e^{tA})}{dt} = Ae^{tA}$$

es decir:
$$\Phi'(t) = A\,\Phi(t)$$

Hay que hacer notar que realizar estos cálculos para una matriz genérica A puede resultar complicado; por lo que en la práctica es conveniente trabajar con la expresión más sencilla de A, su forma canónica de Jordan: $J = P^{-1}A\,P$. Con ello:

$$A = P\,J\,P^{-1}$$
$$e^{tA} = P\,e^{tJ}\,P^{-1}$$

El problema se reduce a calcular la exponencial de una matriz de Jordan.

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_n \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad e^J = \begin{pmatrix} e^{J_1} & & & \\ & e^{J_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{J_n} \end{pmatrix}$$

Distinguiremos dos casos para cada subcaja J_i:

a) J_i es estrictamente diagonal:

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r \end{pmatrix} \qquad \text{con } \lambda_i \neq \lambda_j \qquad e^{J_i} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_r} \end{pmatrix}$$

b) J_i tiene unos en la subdiagonal:

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix} = J_1 + J_2$$

Se empleará el resultado:

$$e^{J_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & & & \\ \frac{1}{1!} & 1 & \cdot & & & & \\ \frac{1}{2!} & \frac{1}{1!} & 1 & \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 0 \\ \frac{1}{(r-1)!} & \frac{1}{(r-2)!} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \ \frac{1}{1!} & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{\begin{pmatrix} \lambda & & & \\ 1 & \cdot & & \\ & \cdot & \cdot & \\ & & 1 & \lambda \end{pmatrix}} = e^{\begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & \cdot & & \\ & \cdot & \cdot & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}} = e^{\lambda} \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & & & \\ \frac{1}{1!} & 1 & \cdot & & & & \\ \frac{1}{2!} & \frac{1}{1!} & 1 & \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & 0 \\ \frac{1}{(r-1)!} & \frac{1}{(r-2)!} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \ \frac{1}{1!} & 1 \end{pmatrix}$$

Nota

Es interesante señalar que la matriz fundamental así calculada verifica la propiedad que para $t = 0$, $\mathbf{\Phi}(0) = I$; propiedad importante para condiciones de Cauchy en el origen:

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t) \\ X(0) = X^0 \end{cases}$$

La solución general viene dada por:

$$X(t) = \mathbf{\Phi}(t)\ C$$

La solución particular será:

$$X(0) = X^0 = \mathbf{\Phi}(0)\ C = IC \quad \Leftrightarrow \quad C = X^0$$

$$X(t) = \mathbf{\Phi}(t)\ X^0$$

A continuación, veremos algunos casos particulares:

1. La matriz A es estrictamente diagonalizable a D:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} = P^{-1}AP$$

Con ello $$e^{tA} = P\, e^{tD}\, P^{-1}$$

y según la exponencial de una matriz, tenemos que:

$$\Phi = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} P^{-1}$$

donde P es la matriz cambio de base a la base de vectores propios. Es decir, P tiene por columnas los vectores propios $V_i \in \operatorname{Ker}(A - \lambda_i I)$, siendo $\operatorname{Ker}(A - \lambda_i I)$ el núcleo de $A - \lambda_i I$.

2. La matriz A no es estrictamente diagonalizable:

   En esta situación se trabajará con la matriz de Jordan correspondiente aplicando el cálculo de la exponencial visto en el caso b anterior.

5.3. Sistemas lineales completos de coeficientes constantes

En el apartado 4 se estableció que los sistemas de la forma:

$$X'(t) = A\,X(t) + B(t)$$

tienen como solución general:

$$\Phi(t)\,C + \Phi(t) \int \Phi^{-1}(s)\,B(s)\,ds$$

De esta manera, el problema queda reducido al cálculo de una matriz fundamental, problema que se ha resuelto en los apartados 5.2.1 y 5.2.2.

Problemas resueltos

1 Dado el sistema:

$$\boldsymbol{x'(t) = 2x(t) - 3y(t)}$$

$$\boldsymbol{y'(t) = x(t) - 2y(t)}$$

a) Verificar que:

$$\boldsymbol{x_1(t) = 3e^t; \qquad y_1(t) = e^t}$$

$$\boldsymbol{x_2(t) = e^{-t}; \qquad y_2(t) = e^{-t}}$$

$$\boldsymbol{x_3(t) = e^t + \cosh t; \qquad y_3(t) = \cosh t}$$

son tres soluciones de él.

b) ¿Pueden ser linealmente independientes?

a) Para demostrar que los pares de funciones dados son solución, es suficiente con sustituir en las dos ecuaciones que constituyen el sistema. Lo haremos con el primero dejando al lector los otros dos casos.

$$x_1(t) = 3e^t; \qquad y_1(t) = e^t \quad \Rightarrow \quad x'_1(t) = 3e^t; \qquad y'_1(t) = e^t$$

Sustituyendo en las ecuaciones:

$$x'(t) = 2x(t) - 3y(t) \quad \Rightarrow \quad 3e^t = 6e^t - 3e^t$$

$$y'(t) = x(t) - 2y(t) \quad \Rightarrow \quad e^t = 3e^t - 2e^t$$

b) Tres soluciones de un sistema homogéneo de dos ecuaciones con dos incógnitas nunca pueden ser linealmente independientes, ya que el conjunto de soluciones de éste tiene estructura de espacio vectorial de dimensión dos. Así, sólo puede haber conjuntos de dos soluciones linealmente independientes.

En este caso puede observarse que:

$$(x_3, y_3) = \frac{1}{2}(x_1, y_1) + \frac{1}{2}(x_2, y_2)$$

---

2 Dado el sistema completo $\boldsymbol{X' = A(t)X(t) + B(t)}$, se conocen tres soluciones de él:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1(t)} \\ \boldsymbol{y_1(t)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-3}{2}t - \dfrac{5}{2} \\ \\ \dfrac{-3}{2}t + 1 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} \boldsymbol{x_2(t)} \\ \boldsymbol{y_2(t)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} - \dfrac{3}{2}t - \dfrac{5}{2} \\ \\ -e^{2t} - \dfrac{3}{2}t + 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x_3(t)} \\ \boldsymbol{y_3(t)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-3}{2}t - \dfrac{3}{2} \\ \\ \dfrac{-3}{2}t + 2 \end{pmatrix}$$

Calcular una matriz fundamental del sistema.

Por el teorema de estructura del conjunto de soluciones de un sistema completo se sabe que toda solución del completo puede escribirse como suma de una solución del homogéneo asociado más una solución particular de él. De esta forma, la resta de dos soluciones del sistema completo es una solución del homogéneo asociado.

$$\begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ -e^{2t} \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} x_3(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si verificamos que estas dos soluciones del sistema homogéneo asociado son linealmente independientes tendremos un sistema fundamental y con ello la matriz fundamental pedida.

$$\begin{vmatrix} e^{2t} & 1 \\ -e^{2t} & 1 \end{vmatrix} = 2e^{2t} \neq 0, \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

La matriz fundamental pedida es:

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & 1 \\ -e^{2t} & 1 \end{pmatrix}$$

3 **Resolver el siguiente sistema reduciéndolo a una ecuación diferencial lineal del orden adecuado:**

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + 1 \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = x + 1 \end{cases}$$

En el apartado 2.5 se redujo este sistema a la ecuación:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - x = 1$$

Resolvemos esta ecuación diferencial:

El polinomio característico de la homogénea asociada es: $m^2 - 1 = 0$; luego $m = \pm 1$ y la solución general de la ecuación homogénea es:

$$x_H = C_1 e^t + C_2 e^{-t}$$

Como puede comprobar el lector fácilmente, $x_p = -1$ es una solución particular de la ecuación lineal completa; por lo que la solución general de la ecuación completa es:

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - 1$$

y como $y(t) = dx/dt - 1$; entonces

$$y(t) = C_1 e^t - C_2 e^{-t} - 1$$

Con lo que hemos obtenido la solución del sistema dado.

---

4 **Encontrar los recintos en los que se tiene garantía de la existencia de una solución única para el sistema:**

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dx_1}{dt} \\[2ex] \dfrac{dx_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{t} & e^t \\[2ex] t^2 & t - 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

Aplicando el teorema de existencia y unicidad, el recinto será aquel donde las funciones coeficientes y término independiente sean continuas. Todas ellas, a excepción de $1/t$, son continuas para todo valor de t. Así se tiene garantía de la existencia y unicidad de soluciones para cualquier condición inicial $x_1(t_0) = x_0^1$, $x_2(t_0) = x_0^2$ si $t_0 \neq 0$.

---

5 Dado el sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + 3y \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = 4x + y \end{cases}$$

Se pide:

a) Comprobar que las siguientes funciones son soluciones del sistema:

$$\begin{aligned} x &= 3e^{7t} \qquad \text{y} \qquad & x &= e^{-t} \\ y &= 2e^{7t} & y &= -2e^{-t} \end{aligned}$$

b) Demostrar que son soluciones linealmente independientes en todo intervalo.

c) Calcular la solución general.

d) Hallar la solución $x = x(t)$, $y = y(t)$ del sistema que verifique $x(0) = 0$, $y(0) = 8$.

a) La comprobación de que estos pares de funciones verifican cada una de las ecuaciones del sistema dado se deja para el lector.

b) Para ver que son soluciones linealmente independientes es suficiente estudiar el determinante:

$$\begin{vmatrix} 3e^{7t} & e^{-t} \\ 2e^{7t} & -2e^{-t} \end{vmatrix} = -8e^{6t} \neq 0, \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

c) Las soluciones dadas constituyen un sistema fundamental con lo que la solución general es:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3e^{7t} & e^{-t} \\ 2e^{7t} & -2e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

d) Para encontrar la solución particular asociada al problema dado se imponen las condiciones para fijar el valor de las constantes:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3e^0 & e^0 \\ 2e^0 & -2e^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \quad C_1 = 1, \quad C_2 = -3$$

con lo que la solución particular pedida es:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3e^{7t} & e^{-t} \\ 2e^{7t} & -2e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3e^{7t} - 3e^{-t} \\ 2e^{7t} + 6e^{-t} \end{pmatrix}$$

---

6 **Considérese el sistema lineal completo:**

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \\ \dfrac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sabiendo que: $\varphi_{01} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ **y** $\varphi_{02} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$

son soluciones particulares del sistema lineal homogéneo asociado; se pide:

a) Calcular la solución general del sistema lineal completo.

b) Calcular explícitamente la matriz $A(t)$.

a) Una matriz fundamental del sistema homogéneo es:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ya que φ_{01} y φ_{02} son soluciones linealmente independientes del sistema lineal homogéneo asociado. Por tanto, la solución general del sistema homogéneo será:

$$\Phi(t)\,C = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

La solución particular del sistema completo se obtendrá a partir de:

$$\Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)\,B(s)\,ds=\begin{pmatrix}1&t\\0&1\end{pmatrix}\int_0^t\begin{pmatrix}1&-s\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s\\0\end{pmatrix}ds=$$

$$=\begin{pmatrix}1&t\\0&1\end{pmatrix}\int_0^t\begin{pmatrix}s\\0\end{pmatrix}ds=\begin{pmatrix}1&t\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{t^2}{2}\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{t^2}{2}\\0\end{pmatrix}$$

y la solución general del sistema completo será la suma de las dos expresiones anteriores:

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{t^2}{2}\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&t\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\C_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{t^2}{2}\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}C_1+tC_2\\C_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_1+tC_2+\dfrac{t^2}{2}\\C_2\end{pmatrix}$$

b) Una matriz fundamental es:

$$\Phi(t)=\begin{pmatrix}1&t\\0&1\end{pmatrix}$$

Por tanto verifica que $\Phi'(t)=A(t)\,\Phi(t)$; es decir, $A(t)=\Phi'(t)\,\Phi^{-1}(t)$:

$$\Phi'(t)=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix};\qquad A(t)=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-t\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

Como la matriz A no depende de la variable t, vemos que el sistema propuesto es un sistema lineal completo de coeficientes constantes.

---

7 Resolver por el método de Euler el sistema de ecuaciones diferenciales expresado en forma matricial:

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{x'}\\\boldsymbol{y'}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{1}\\\mathbf{4}&\mathbf{1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\\boldsymbol{y}\end{pmatrix}$$

Aplicando el método de Euler, calculamos los autovalores a partir del polinomio característico asociado a la matriz de los coeficientes A:

$$|A-\lambda I|=0$$

$$\begin{vmatrix}1-\lambda&1\\4&1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^2-4=\lambda^2-2\lambda-3=0\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}\lambda_1=3\\\lambda_2=-1\end{cases}$$

Los dos autovalores son distintos.
Calculamos los autovectores asociados a $\lambda_1 = 3$:

$$(A - \lambda_1 I)\, V_1 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1-3\cdot 1 & 1 \\ 4 & 1-3\cdot 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} -2V_{11} + V_{12} &= 0 \\ 4V_{11} - 2V_{12} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad V_{12} = 2V_{11} \quad \Rightarrow \quad V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda_2 = -1$: $(A - \lambda_2 I)\, V_2 = 0$

$$\begin{pmatrix} 1+1\cdot 1 & 1 \\ 4 & 1+1\cdot 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{21} \\ V_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{21} \\ V_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} 2V_{21} + V_{22} &= 0 \\ 4V_{21} + 2V_{22} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad V_{22} = -2V_{21} \quad \Rightarrow \quad V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Por tanto, las soluciones son:

$$X_1 = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \qquad X_2 = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

y la solución general del sistema es:

$$X = C_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

---

8 **Resolver el sistema anterior encontrando una matriz fundamental que verifique: $\Phi(0) = I$.**

Se busca la matriz $\Phi = e^{At}$, en este caso la matriz A de los coeficientes es estrictamente diagonalizable a la matriz J:

Con ello $$e^{At} = P\, e^{Jt} P^{-1}$$

y según la exponencial de una matriz, tenemos que:

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = P^{-1}AP; \qquad e^{At} = \mathbf{\Phi} = Pe^{Jt}P^{-1} = P \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} P^{-1}$$

donde P es la matriz cambio de base a la base de los vectores propios. Es decir, P tiene por columnas los vectores propios $V_i \in \text{Ker}\,(A - \lambda_i I)$, siendo $\text{Ker}\,(A - \lambda_i I)$ el núcleo de $A - \lambda_i I$:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

De esta forma la matriz fundamental pedida es:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}^{-1}$$

---

9 **Dado el sistema:**

$$\boldsymbol{X'} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \boldsymbol{X}$$

a) Calcular la solución general.

b) Calcular la solución particular que pase por el punto

$$\boldsymbol{(t_0, (x_0, y_0, z_0)) = (0, (0, 0, 6))}$$

a) Al querer resolver un problema de valor inicial en $t = 0$, encontraremos la solución general del sistema a partir de una matriz fundamental $\Phi(t)$ que verifique que $\Phi(0) = I$, lo que simplificará el cálculo de la solución particular. Así: $X = e^{At}C$.

Las soluciones del polinomio característico $|A - \lambda I| = \lambda\,(3 - \lambda)\,(3 + \lambda) = 0$ son:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0 \\ \lambda_2 &= 3 \\ \lambda_3 &= -3 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}; \qquad e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1}$$

siendo P:

$$\begin{aligned} v_1 &\in \ker(A - 0I) = (1, -1, 0) \\ v_2 &\in \ker(A - 3I) = (1, 2, 3) \\ v_3 &\in \ker(A + 3I) = (1, 2, -3) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{0t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{3t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= -\frac{1}{18} \begin{pmatrix} -12 - 3e^{3t} - 3e^{-3t} & 6 - 3^{3t} - 3e^{-3t} & -3e^{3t} + 3e^{-3t} \\ 12 - 6e^{3t} - 6e^{-3t} & -6 - 6e^{3t} - 6e^{-3t} & -6e^{3t} + 6e^{-3t} \\ -9e^{3t} + 9e^{-3t} & -9e^{3t} + 9e^{-3t} & -9e^{3t} - 9e^{-3t} \end{pmatrix}$$

La solución general es: $X(t) = \Phi(t)\, C$. Se puede comprobar que cumple que $\Phi(0) = I$.

b) Como ya se ha visto:

$$\left(t_0 = 0,\ X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \right); \qquad X_0 = \Phi(0) C \ \Rightarrow\ C = \Phi^{-1}(0)\, X_0 \ \Rightarrow\ C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

con lo que la solución particular pedida es:

$$X_p = -\frac{6}{18} \begin{pmatrix} -3e^{3t} + 3e^{-3t} \\ -6e^{3t} + 6e^{-3t} \\ -9e^{3t} - 9e^{-3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} - e^{-3t} \\ 2e^{3t} - 2e^{-3t} \\ 3e^{3t} + 3e^{-3t} \end{pmatrix}$$

---

10 Resolver el siguiente sistema lineal de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

Se calcula el polinomio característico asociado a la matriz A de los coeficientes y con ello los autovalores y autovectores asociados:

Autovalores: $\quad |A - \lambda I| = 0; \qquad \begin{cases} \lambda_1 = -1 & \text{doble} \\ \lambda_2 = 2 & \text{simple} \end{cases}$

Autovectores:

Para $\lambda_1 = -1$; dim [Ker $(A + I)$] $= 2 \Rightarrow A$ es estrictamente diagonalizable. Los vectores son:

$$V_1 = (1, 0, -1) \ ; \qquad V_2 = (0, 1, -1)$$

Para $\lambda_2 = 2$; Ker $(A - 2\,I) = L\,\{(1, 1, 1)\} \Rightarrow V_3 = (1, 1, 1)$

De esta forma tendremos:

1º) Siguiendo el método de Euler:

$$x(t) = C_1\, e^{-t} + C_3\, e^{2t}$$

$$y(t) = C_2\, e^{-t} + C_3\, e^{2t}$$

$$z(t) = -\,(C_1 + C_2)\, e^{-t} + C_3\, e^{2t}$$

2º) Resolviendo a partir de la exponencial de una matriz:

$$D = P^{-1}\, A\, P$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$$

---

11 Resolver el siguiente problema de condición inicial:

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \qquad \textbf{para} \quad \left[x(0),\ y(0)\right] = (1,\ 2)$$

En este caso la matriz de los coeficientes no es estrictamente diagonalizable como se ve a continuación:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}; \qquad \left| A-\lambda I \right| = (\lambda-2)^2 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 2 \quad \text{autovalor doble}$$

$$\operatorname{Ker}(A-2I) \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \qquad \dim \operatorname{Ker} = 1$$

$$\operatorname{Ker}(A-2I)^2 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \qquad \dim \operatorname{Ker} = 2$$

$$V_1 \in \operatorname{Ker}(A-2I)^2 - \operatorname{Ker}(A-2I) \quad \Rightarrow \quad V_1 = (1, 0)$$
$$V_2 = (A-2I)\ (1, 0) \quad \Rightarrow \quad V_2 = (-1, 1)$$

$$J = P^{-1}AP \quad \text{siendo} \quad \begin{cases} J = \begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix} \\[2ex] P = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\end{cases}$$

Por tanto, podemos calcular el valor de e^{Jt} como:

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix}e^{2t} & 0\\ t & e^{2t}\end{pmatrix}$$

La solución general del sistema es $\Phi(t) = e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1}$, es decir:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{2t} & 0\\ t & e^{2t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}e^{2t}-t & -t\\ t & t+e^{2t}\end{pmatrix}$$

La solución general es:

$$\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e^{2t}-t & -t\\ t & t+e^{2t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\ C_2\end{pmatrix}$$

Vamos a determinar ahora la solución particular para $(x(0), y(0)) = (1, 2)$

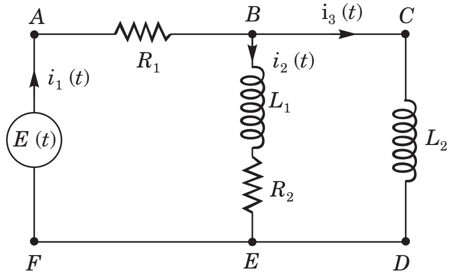
$$\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix} = I\begin{pmatrix}C_1\\ C_2\end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases}C_1 = 1\\ C_2 = 2\end{cases}$$

Luego la solución particular del sistema es:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} - t & -t \\ t & t + e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

---

12 Considérese el circuito eléctrico de la figura formado por dos mallas. Calcular el sistema de ecuaciones diferenciales que determina la expresión de las corrientes del circuito a lo largo del tiempo.



Una red eléctrica con más de una malla queda descrita por un sistema de ecuaciones diferenciales lineales. Aplicando las leyes de Kirchhoff a cada malla se tiene:

a) En *ABEFA*:

$$E(t) = R_1 i_1(t) + L_1 \frac{di_2(t)}{dt} + R_2 i_2(t)$$

b) En *ABCDEFA*:

$$E(t) = R_1 i_1(t) + L_2 \frac{di_3(t)}{dt}$$

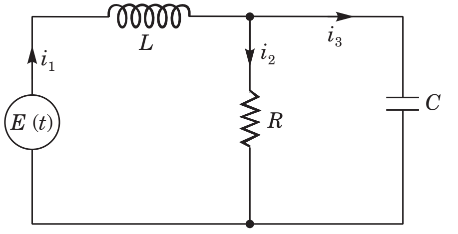
Además se tiene que $i_1(t) = i_2(t) + i_3(t)$. Con esta última relación, el sistema resultante es:

$$\begin{cases} L_1 \dfrac{di_2}{dt} + (R_1 + R_2)\, i_2 + R_1 i_3 = E(t) \\[2ex] L_2 \dfrac{di_3}{dt} + R_1 i_2 + R_1 i_3 = E(t) \end{cases}$$

Con las condiciones iniciales:

$$i_2(0) = i_3(0) = 0$$

13 Resolver el circuito de la figura siguiente para el caso en que: $E(t) = 60$ V, $L = 1$ H, $R = 50\ \Omega$, $C = 10^{-4}$ F, y siendo $i_1(0) = i_2(0) = 0$.



El problema de condición inicial, una vez planteadas las ecuaciones del circuito, viene dado por:

$$\begin{cases} \dfrac{di_1}{dt} + 50i_2 = 60 \\[2ex] 50 \cdot 10^{-4}\dfrac{di_2}{dt} + i_2 - i_1 = 0 \\[2ex] i_1(0) = i_2(0) = 0 \end{cases}$$

Se trata de un sistema de ecuaciones diferenciales completo de coeficientes constantes.

1. Se resuelve el homogéneo asociado, por ejemplo por el método de cálculo de autovalores y autovectores. Una matriz fundamental es:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{-6}{5}e^{-100t} & -60te^{-100t} \\[3ex] \dfrac{-6}{5}e^{-100t} & -120te^{-100t} \end{pmatrix}$$

Nota

Otra posibilidad hubiera sido reducir el sistema a una ecuación diferencial lineal de segundo orden.

2. Por el método de los coeficientes indeterminados, aplicando la fórmula deducida para encontrar una solución particular del sistema completo:

$$\Phi(t)\int \Phi^{-1}(s)\,B(s)\,ds$$

se obtiene:
$$\begin{pmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{6}{5} \end{pmatrix}$$

3. Por último, sumando la solución general del sistema homogéneo calculada a partir de la matriz fundamental, con la solución particular del completo dada en el punto dos se obtiene la solución general:

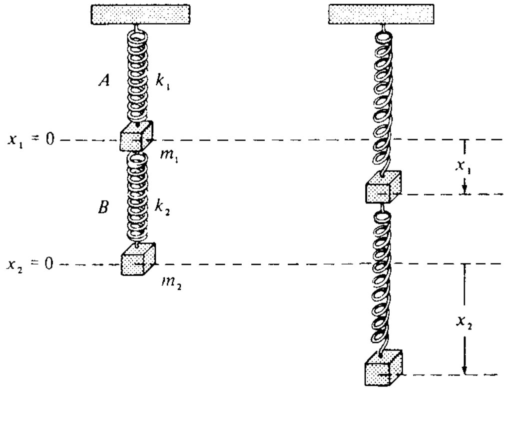
$$\begin{pmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-6}{5} e^{-100t} & -60te^{-100t} \\ \frac{-6}{5} e^{-100t} & -120te^{-100t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{6}{5} \end{pmatrix}$$

4. Aplicando las condiciones iniciales se obtienen los valores de $C_1 = C_2 = 1$.

$$\begin{pmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-6}{5} e^{-100t} & -60te^{-100t} + \frac{6}{5} \\ \frac{-6}{5} e^{-100t} & -120te^{-100t} + \frac{6}{5} \end{pmatrix}$$

---

14 **Sean dos masas M_1 y M_2 sujetas a dos resortes A y B de constantes K_1 y K_2 respectivamente. Los resortes están conectados y el sistema resultante se mueve. Llamemos $x_1(t)$ y $x_2(t)$ a los desplazamientos de las dos masas respecto a sus posiciones de equilibrio en función del tiempo. Calcular el sistema de ecuaciones diferenciales que define el movimiento de las dos masas.**



Vamos a plantear la ley de Newton en cada masa, teniendo en cuenta la fuerza que ejerce cada muelle sobre cada una de ellas al moverse ambas. Suponiendo que el sentido positivo del desplazamiento de las masas es hacia abajo (ver figura) y que la fuerza que ejerce el muelle sobre la masa es de sentido opuesto al alargamiento del mismo, para cada masa se tiene:

- M_1: $K_2\,(x_2 - x_1) - K_1\,x_1 = M_1\,x_1''$
- M_2: $-K_2\,(x_2 - x_1) = M_2\,x_2''$

Siendo $K_2\,(x_2 - x_1)$, en valor absoluto, la fuerza que ejerce el muelle B sobre M_1 y M_2 y $K_1 x_1$ la que ejerce el muelle A sobre M_1.

Por tanto, el movimiento de las dos masas unidas por los dos muelles queda descrito por un sistema de dos ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden. Para determinar dicho movimiento, son necesarias cuatro condiciones, que suelen ser la posición y la velocidad de las masas en el instante inicial.

El sistema de ecuaciones que describe el movimiento de las masas es, entonces:

$$\left.\begin{aligned} -(K_1 + K_2)\,x_1 + K_2 x_2 &= M_1 x_1'' \\ K_2 x_1 - K_2 x_2 &= M_2 x_2'' \end{aligned}\right\}$$

---

15 **Un depósito contiene 50 litros de agua en los que se disuelven 25 kilos de sal. Existe un segundo depósito con otros 50 litros de agua. Se bombea líquido hacia dentro y hacia fuera de los tanques de la forma siguiente:**

- **Entran 3 litros por minuto en el primer depósito.**
- **Salen 4 litros por minuto del primer depósito hacia el segundo.**
- **Sale un litro por minuto del segundo depósito al primero.**
- **Salen tres litros por minuto del segundo depósito al exterior.**

Deducir las ecuaciones diferenciales que determinan el número de kilogramos de sal en cada instante en cualquiera de los depósitos: $\boldsymbol{x_1(t)}$, $\boldsymbol{x_2(t)}$.

Llamamos $x_1(t)$ y $x_2(t)$ al número de kilos de sal de cada depósito en cada instante con lo que $x_1'(t)$, $x_2'(t)$ representarán la variación de los kilos de sal en cada depósito con el tiempo.

Estableciendo las ecuaciones para cada uno de los depósitos se tiene:

$$x_1'(t) = \frac{dx_1}{dt} = 1x_2(t) - 4x_1(t)$$

$$x_2'(t) = \frac{dx_2}{dt} = 4x_1(t) - 3x_2(t) - 1x_2(t)$$

Además contamos con las condiciones iniciales siguientes:

– En el primer depósito la cantidad inicial de sal era de 25: $x_1(0) = 25$.
– En el segundo depósito la cantidad inicial de sal era nula: $x_2(0) = 0$.

---

16 Dado un sistema $X'(t) = AX(t)$ de coeficientes constantes y $\Phi(t)$ matriz fundamental de él, ¿sigue siendo $\Phi'(t)$ matriz fundamental del sistema?

Veamos que la matriz fundamental derivada sigue siendo matriz solución pero no tiene porque ser matriz fundamental.

Por ser $\Phi(t)$ matriz fundamental se tiene que: $\Phi'(t) = A\Phi(t)$. Derivando esta expresión se tiene: $\Phi''(t) = A\Phi'(t)$ con lo que $\Phi'(t)$ verifica el sistema y por lo tanto es matriz solución.

Veamos un ejemplo donde al derivar la matriz se pierde la independencia lineal de las soluciones con lo que la matriz derivada no será fundamental.

Sea la matriz fundamental:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & 1 \\ e^{2t} & 0 \end{pmatrix}$$

si la derivamos:

$$\Phi'(t) = \begin{pmatrix} 2e^{2t} & 0 \\ 2e^{2t} & 0 \end{pmatrix}$$

que resulta una matriz singular (de determinante nulo) y no podrá ser nunca una matriz fundamental del sistema.

---

17 Resolver por el método de Euler el sistema:

$$x' = x - y$$

$$y' = 5x - 3y$$

Calculando las raíces del polinomio característico $|A - \lambda I|$ se obtienen como valores propios o autovalores, $\lambda = -1 + i$, $\lambda = -1 - i$.

Determinamos el autovector asociado a $\lambda = -1 + i$:

$$\text{Ker}\,[A - (-1 + i)\,I] = L\{(1, 2 - i)\}$$

con lo que un vector asociado a este λ puede ser $v = (1, 2 - i)$.

Con ello una solución al sistema dado es: $(x(t), y(t)) = (1, 2 - i)\, e^{(-1 + i)\, t}$.

Para trabajar en el campo real se utilizará la fórmula de Euler:

$$e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t$$

Así:

$$(1, 2 - i)\, e^{(-1 + i)\, t} = (1, 2 - i)\, e^{-t} e^{it} = (1, 2 - i)\, e^{-t} (\cos t + i \operatorname{sen} t)$$

Agrupando la parte real e imaginaria de esta expresión se tiene:

$$(1, 2 - i)\, e^{(-1 + i)\, t} = (e^{-t} \cos t,\, 2e^{-t} \cos t + e^{-t} \operatorname{sen} t) +$$
$$+\, i\, (e^{-t} \operatorname{sen} t, - e^{-t} \cos t + 2e^{-t} \operatorname{sen} t).$$

Se verifica que la parte real e imaginaria de esta expresión son las dos soluciones linealmente independientes que buscamos para dar la solución general del sistema. Con ello:

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \cos t & e^{-t} \operatorname{sen} t \\ 2e^{-t} \cos t + e^{-t} \operatorname{sen} t & e^{-t} \cos t + 2e^{-t} \operatorname{sen} t \end{pmatrix}$$

y la solución general es:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} \cos t & e^{-t} \operatorname{sen} t \\ 2e^{-t} \cos t + e^{-t} \operatorname{sen} t & e^{-t} \cos t + 2e^{-t} \operatorname{sen} t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

---

18 Demostrar que si $\phi(t)$ es matriz fundamental del sistema de ecuaciones diferenciales lineal homogéneo $X'(t) = A(t)\, X(t)$, entonces $\phi(t)\, K$ también lo es para toda matriz K constante y regular.

Al ser $\phi(t)$ matriz fundamental del sistema, verifica que $\phi'(t) = A(t)\, \phi(t)$ y que $|\phi(t)| \neq 0$.

Para que $\phi(t)\, K$ sea matriz fundamental hay que pedirle:

1. Que sea regular, es decir que su determinante no sea nulo: $|\phi(t)\, K| = |\phi(t)|\, |K| \neq 0$, por ser K regular.

2. Que verifique el sistema $X'(t) = A(t)\,X(t)$. Se calcula $(\phi(t)\,K)'$: $(\phi(t)\,K)' = \phi'(t)\,K + \phi(t)\,K'$ y como $\phi(t)$ es matriz fundamental $(\phi'(t) = A(t)\,\phi(t))$ y K es una matriz de constantes y su derivada es 0 se tiene que $(\phi(t)\,K)' = \phi'(t)\,K$ y con ello: $\phi'(t)\,K = A(t)\,\phi(t)\,K$ por lo que $\phi(t)\,K$ verifica el sistema.

Nota

Este resultado puede simplificar el cálculo de una matriz fundamental según la fórmula establecida en el apartado 5.2.2: $\phi(t) = Pe^{Dt}P^{-1}$. Ya que, como P es una matriz regular (matriz cambio de base) $\phi(t)\,P$ también será matriz fundamental y con ello podemos trabajar con la matriz $Pe^{Dt}P^{-1}P = Pe^{Dt}$, lo que ahorra el cálculo de la inversa.

---

19 Resolver el sistema

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

La solución general del problema es $X(t) = \phi(t)\,C$, siendo $\phi(t)$ una matriz fundamental y C un vector de constantes. Así el problema se reduce a encontrar una matriz fundamental.

Las raíces del polinomio característico asociado a la matriz de los coeficientes A se calculan mediante $|A - \lambda I| = 0$ y son $\lambda = 1$ simple y $\lambda = 2$ doble. Siendo los subespacios vectoriales asociados: $V = L\,[(0, 0, 1)]$, $W = L\,[(-1, 1, 0)]$ respectivamente. En este caso una matriz de Jordan asociada a la matriz de los coeficientes es

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

que no resulta diagonal y la matriz de cambio de base es

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Según lo estudiado en el punto 5.2.2: $\phi(t) = Pe^{Jt}P^{-1}$ y con lo deducido del ejercicio anterior $\phi(t) = Pe^{Jt}$, es decir:

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & te^{2t} & e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e^{2t}(1-t) & -e^{2t} \\ 0 & te^{2t} & e^{2t} \\ e^{t} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La solución general del sistema es:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e^{2t}(1-t) & -e^{2t} \\ 0 & te^{2t} & e^{2t} \\ e^{t} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

Problemas propuestos

1 Dado el sistema:

$$x' = 5x + 2y + 5t$$
$$y' = 3x + 4y + 17t$$

a) Comprobar que las siguientes parejas de funciones son soluciones linealmente independientes del sistema homogéneo asociado.

$$x = 2e^{2t} \qquad \text{y} \qquad x = e^{7t}$$
$$y = -3e^{2t} \qquad\qquad y = e^{7t}$$

b) Comprobar que $x = t + 1;\ \ y = -5t - 2$ es solución particular del sistema dado.

c) Escribir la solución general del sistema.

2 Determinar si la matriz siguiente es una matriz fundamental del sistema adjunto:

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} e^t & 2e^{3t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \\ e^t & e^{3t} & 0 \end{pmatrix}; \qquad \frac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} X$$

3 Encontrar el sistema lineal de ecuaciones correspondiente a las siguientes ecuaciones lineales:

a) $y'' + 2y + y = e^t$.

b) $y''' - y'' = 12t^2 + 6t$.

c) $y^{(v} - 2y^{(iv} + 5y''' - 10y'' - 36y' + 72y = t + \cos t$.

4 Indicar de los siguientes conjuntos de soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales homogéneo de coeficientes constantes: $X'(t) = AX(t)$, cuales forman un sistema fundamental de él en $t \in (-\infty, \infty)$.

a) $x(t) = (e^{-2t}, e^{-2t}), \qquad y(t) = (e^{-6t}, -e^{-6t})$

b) $x(t) = (1 + t,\ -2 + 2t,\ 4 + 2t),$

$y(t) = (1, -2, 4),$

$z(t) = (3 + 2t,\ -6 + 4t,\ 12 + 4t)$

c) $x(t) = (0, e^t), \qquad y(t) = (e^{-t}, e^{-t}), \qquad z(t) = (2e^{-t},\ e^t + 2e^{-t})$

5 Calcular una matriz fundamental $\Phi(t)$ de forma que $\Phi(0) = I$ para los sistemas siguientes:

a) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + 5y - 3z = 0 \\ \dfrac{dz}{dt} + 15y + 7z = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + 2y + z = \operatorname{sen} t \\ \dfrac{dz}{dt} - 4y - 2z = \cos t \end{cases}$

6 Integrar los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales reduciéndolos previamente a una ecuación lineal del orden correspondiente:

a) $x' = 3x - y - 1$
$y' = x + y + 4e^t$

b) $x' = x + 2y$
$y' = -x + y$

c) $x' = 3x - y + 1$
$y' = x + 4y - t$

7 Dada una matriz fundamental de un sistema lineal homogéneo, calcular la solución particular que pase por un punto dado.

8 Calcular la solución general de los siguientes sistemas lineales:

a) $x' + x + 2y = \cos t + \operatorname{sen} t + e^{-t}$
$y' - 2x + y = \operatorname{sen} t - \cos t$

b) $x' = 2x - y + e^t$
$y' = 3x - 2y + t$

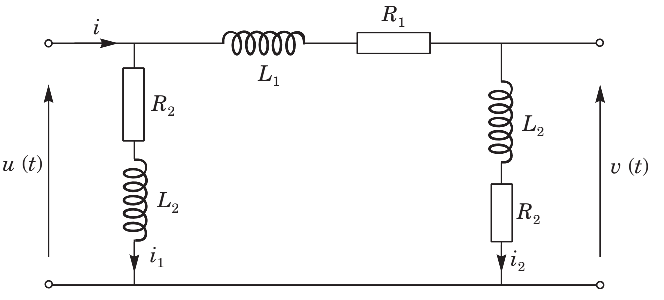
9 Se tiene el sistema siguiente:

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2-t \\ -t \end{pmatrix}$$

a) Calcular la solución general del sistema a través de una matriz fundamental $\Phi(t)$ que verifique $\Phi(0) = I$.

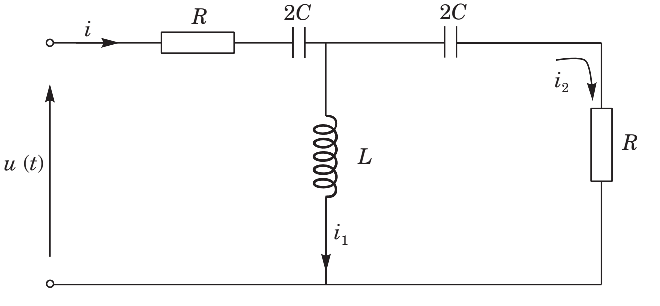
b) Resolver el problema de condiciones iniciales dado por $x(0) = 1$, $y(0) = 2$.

10 Determinar i_1, i_2 y v en función del tiempo en el siguiente circuito:



Se tomará: $\theta_1 = \dfrac{L_1}{R_1}$; $\theta_2 = \dfrac{L_2}{R_2}$; $\theta = \dfrac{L_1 + L_2}{R_1 + R_2}$

11 Para el circuito siguiente:



a) Establecer las ecuaciones diferenciales para las intensidades que circulan por las mallas de este circuito.
b) Deducir la expresión de i_1 sabiendo que $u(t) = -E_{\text{máx}} \cos(\omega t + \rho)$ y que los condensadores no tienen carga alguna en el instante inicial.
Dato: $R^2C = 4L$.

Capítulo 5

TRANSFORMADA DE LAPLACE

Como ya se ha comentado en capítulos anteriores, la mayoría de los problemas consisten en resolver una ecuación diferencial, obtener su solución general y luego una solución particular mediante la aplicación de condiciones de contorno o condiciones iniciales (problemas de Cauchy) a la solución general obtenida.

En este capítulo se va a estudiar un nuevo método de resolución de gran utilidad en el tratamiento de problemas de valor inicial en el origen para el caso de ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales lineales: la transformada de Laplace.

1. FUNDAMENTOS

1.1. Definición. Transformada de Laplace

Dada $y(x)$, función continua en $x \geq 0$ y cuyo producto con e^{-sx} es integrable en $(0, \infty)$ para algún valor de s, se define su transformada de Laplace como:

$$L\left[y(x)\right] = F(s) = \int_0^\infty y(x)\, e^{-sx}\, dx$$

Se denota: $F(s) = L\,[y\,(x)]$

La transformada inversa se representa por: $y(x) = L^{-1}\,[F\,(s)]$.

Nota

La expresión de la transformada de Laplace existe si la integral impropia es convergente.

1.2. Transformada de Laplace de algunas funciones

Vamos a aplicar la definición anterior para calcular la transformada de Laplace de algunas funciones:

A) Transformada de $y(x) = ke^{ax}$ $\quad k \in \mathbb{R}$

$$L\left[ke^{ax}\right] = \int_0^\infty ke^{ax}e^{-sx}dx = k\int_0^\infty e^{(a-s)x}dx =$$

$$= \frac{k}{a-s}e^{(a-s)x}\Big]_0^\infty = \frac{k}{s-a} \qquad si \quad a-s<0 \quad \Leftrightarrow \quad s>a$$

B) $y(x) = \operatorname{sen}(bx)$ $\quad b \in \mathbb{R}$

$$L\left[\operatorname{sen}(bx)\right] = \int_0^\infty \operatorname{sen}(bx)\, e^{-sx}dx =$$

Integrando por partes: $u = \operatorname{sen}(bx)$, $dv = e^{-sx}\, dx$:

$$-\frac{1}{s}e^{-sx}\operatorname{sen}(bx)\Big]_0^\infty + \frac{b}{s}\int_0^\infty \cos(bx)\, e^{-sx}dx =$$

Volviendo a integrar por partes y fijando $s>0$:

$$= \frac{b}{s}\left[-\frac{1}{s}e^{-sx}\cos(bx)\right]_0^\infty - \frac{b^2}{s^2}\int_0^\infty \operatorname{sen}(bx)\, e^{-sx}dx$$

Así, llamando I a la integral buscada tenemos:

$$I = \frac{b}{s}\left[\frac{1}{s} - \frac{b}{s}I\right] \quad \Leftrightarrow \quad I = \frac{b}{s^2+b^2} \qquad \text{para} \quad s>0$$

1.3. Propiedades de la transformada de Laplace

A) Los operadores transformada y transformada inversa de Laplace son operadores lineales. Es decir:

$$L\left[af(x) + bg(x)\right] = aL\left[f(x)\right] + bL\left[g(x)\right] =$$

$$= aF(s) + bG(s) \qquad \forall \; a, b \in \mathbb{R}$$

$$L^{-1}\left[aF(s) + bG(s)\right] = aL^{-1}\left[F(s)\right] + bL^{-1}\left[G(s)\right] = af(x) + bg(x)$$

Siendo $\qquad F(s) = L\left[f(x)\right], \quad G(s) = L\left[g(x)\right]$

Demostración

Para el primero de los resultados, por medio de la propia definición de transformada se tiene:

$$L\left[af(x)+bg(x)\right]=\int_0^\infty e^{-sx}\left(af(x)+bg(x)\right)dx=$$

$$=a\int_0^\infty e^{-sx}f(x)\,dx+b\int_0^\infty e^{-sx}\,g(x)\,dx=$$

$$=aL\left[f(x)\right]+bL\left[g(x)\right]$$

B) Transformada de una derivada:

Dada $y=y(x)$ derivable, se considera $y'(x)$. Entonces si existe la transformada de $y'(x)$ se enuncia el siguiente resultado:

$$L\,[y'(x)]=sL\,[y(x)]-y(0)$$

Demostración

$$L\left[y'(x)\right]=\int_0^\infty e^{-sx}y'(x)\,dx$$

Integrando por partes: $u=e^{-sx}$ $\quad du=-se^{-sx}\,dx$

$dv=y'(x)\,dx$ $\quad v=y(x)$

se tiene que:

$$\left[y(x)\,e^{-sx}\right]_0^\infty+s\int_0^\infty e^{-sx}y(x)\,dx=y(0)+s\int_0^\infty e^{-sx}y(x)\,dx$$

Si $y(x)$ admite derivadas continuas hasta orden n, se generaliza este resultado de la siguiente manera. La transformada de la derivada segunda es:

$$L\,[y''(x)]=sL\,[y'(x)]-y'(0)=s^2L\,[y(x)]-sy(0)-y'(0)$$

Y en general, para la derivada n-sima de $y(x)$:

$$L\,[y^{(n}(x)]=s^nL\,[y(x)]-s^{n-1}\,y(0)-s^{n-2}\,y'(0)-\ldots-y^{(n-1}(0)$$

Lo cual puede comprobarse fácilmente por inducción sobre el orden de derivación.

C) Transformada de una integral. Sea:

$$g(x)=\int_0^x f(t)\,dt$$

Vamos a calcular $L\,[g\,(x)]$:

$$g'\,(x) = f\,(x) \Leftrightarrow L\,[f\,(x)] = L\,[g'\,(x)] = sL\,[g\,(x)] - g\,(0) = sL\,[g\,(x)] =$$

$$= sL\left[\int_0^x f\,(t)\,dt\right]$$

Donde se ha empleado que $g\,(0) = 0$. De esta forma:

$$L\left[\int_0^x f\,(t)\,dt\right] = \frac{1}{s} L\left[f\,(x)\right]$$

D) Fórmula del desplazamiento:
Se verifica que:

$$L\,[e^{ax} f\,(x)] = F\,(s-a)$$

siendo $F\,(s-a)$ la transformada de Laplace de $f\,(x)$ en la variable $s-a$.

Demostración

$$L\left[f\,(x)\,e^{ax}\right] = \int_0^\infty e^{-sx} e^{ax} f\,(x)\,dx = \int_0^\infty e^{(a-s)\,x} f\,(x)\,dx =$$

$$= \int_0^\infty e^{-(s-a)\,x}\, f\,(x)\,dx = F\,(s-a)$$

Nota
Esta fórmula es útil para calcular transformadas de funciones producto en la forma $e^{ax} f\,(x)$, conocida $L\,[f\,(x)] = F\,(s)$. Por ejemplo:

$$g\,(x) = e^{ax}\,\text{sen}\,bx$$

Teniendo en cuenta que la transformada de $\text{sen}\,bx$ es:

$$L\left[\text{sen}\,bx\right] = \frac{b}{s^2 + b^2}$$

se tiene que:

$$L\left[g\,(x)\right] = \frac{b}{(s-a)^2 + b^2}$$

E) Transformada de productos del tipo $x^n \cdot f\,(x)$

Si: $$L\left[f\,(x)\right] = F\,(s) = \int_0^\infty f\,(x)\,e^{-sx}\,dx$$

Derivando la expresión respecto de s:

$$F'(s) = \int_0^{\infty} f(x)\, e^{-sx}(-x)\, dx = L\left[-x\, f(x)\right]$$

Así: $$L\,[x\, f(x)] = -F'(s)$$

Si volvemos a derivar la expresión obtenida:

$$F''(s) = \int_0^{\infty} f(x)\, e^{-sx} x^2 dx = L\left[x^2\, f(x)\right]$$

Procediendo de manera análoga sucesivas veces se obtiene la fórmula general:

$$L\left[x^n\, f(x)\right] = (-1)^n\, F^{(n}(s) = (-1)^n \frac{d^n F}{ds^n}$$

Ejemplo

Calcular $L\,[x \text{ sen } bx]$

Sabemos que:

$$L\left[\text{sen}\, bx\right] = \frac{b}{s^2 + b^2} = F(s)$$

Derivando respecto de s la expresión se tiene que:

$$\frac{dF}{ds} = \frac{-2sb}{(s^2 + b^2)^2}$$

Con lo que:

$$L\left[x\, \text{sen}\, bx\right] = \frac{2sb}{(s^2 + b^2)^2}$$

Observación

Es importante señalar que, como se ha visto, la transformada del producto de funciones no es el producto de las transformadas.

En la siguiente tabla se indican las transformadas de las funciones más comúnmente empleadas:

$f(x)$	$L[f(x)] = F(s)$
K	$\dfrac{K}{s}$, $s > 0$
e^{ax}	$\dfrac{1}{s-a}$, $s > a$
$\operatorname{sen} bx$	$\dfrac{b}{s^2+b^2}$, $s > 0$
$\cos bx$	$\dfrac{s}{s^2+b^2}$, $s > 0$
x^n , $n \in \mathrm{N}$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$, $s > 0$
$x^n e^{ax}$	$\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$, $s > a$
$e^{ax} \operatorname{sen} bx$	$\dfrac{b}{(s-a)^2+b^2}$
$e^{ax} \cos bx$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$
$x \operatorname{sen} bx$	$\dfrac{2sb}{(s^2+b^2)^2}$
$x \cos bx$	$\dfrac{s^2-b^2}{(s^2+b^2)^2}$

Nota

Una vez conocidas las transformadas de diversas funciones, podemos preguntarnos qué condiciones debe verificar una función para que exista su transformada de Laplace. Para ello se estudiarán los siguientes conceptos.

1.4. Definición. Función continua a trozos

Una función $f(x)$ se dice ***continua a trozos*** en un intervalo $I = [a, b]$ si $f(x)$ es continua en él salvo en un número finito de puntos, y existen en dichos puntos los límites de la función por la derecha y por la izquierda y son finitos.

1.5. Definición. Función de orden exponencial α

Una función $f(x)$ es de ***orden exponencial*** α si existen α, β constantes y x_0 de forma que $\forall\, x \geq x_0$ se verifica: $|f(x)| \leq \beta e^{x\,\alpha}$.

1.6. Teorema

Dada una función $f(x)$ continua a trozos en $[0, b]$ y de orden exponencial α, entonces existe la transformada de Laplace de esta función.

Demostración

Si $f(x)$ es continua a trozos en $[0, b]$ entonces existe:

$$\int_0^b f(x)\, e^{-sx} dx$$

Si es de orden exponencial α, existen α, β constantes y x_0 de forma que $\forall\, x \geq x_0$ se tiene: $|f(x)| \leq \beta e^{x\alpha}$.

De esta forma, si $|f(x)\; e^{-sx}| \leq \beta e^{x\alpha}\; e^{-sx}$, integrando:

$$\int_0^\infty f(x)\, e^{-sx} dx \leq \int_0^\infty e^{(\alpha - s)\,x} dx$$

Sabemos que la última integral converge si $\alpha < s$ y con ello se tiene que:

$$L\left[f(x)\right] = \int_0^\infty f(x)\, e^{-sx} dx < \infty$$

con lo que se demuestra la existencia de transformada de Laplace para $f(x)$.

2. TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE

2.1. Introducción

Se define el operador transformada inversa de Laplace como L^{-1}, de forma que si:

$$L\,[f(x)] = F(s), \qquad \text{entonces} \qquad L^{-1}\,[F(s)] = f(x)$$

Así, por ejemplo, utilizando algunas de las transformadas conocidas se tiene que:

$$L^{-1}\left[\frac{k}{s}\right] = k \qquad \forall\, s > 0$$

$$L^{-1}\left[\frac{k}{s-a}\right] = ke^{ax} \qquad \forall\, s > a$$

$$L^{-1}\left[\frac{b}{(s^2+b^2)}\right] = \operatorname{sen} bx \qquad \forall\, s > 0$$

De la misma manera para el resto de los ejemplos vistos.

2.2. Método de las fracciones simples

A continuación se expone un método que permite calcular transformadas inversas de Laplace de funciones $F(s)$ racionales de la forma:

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

donde $P(s)$ y $Q(s)$ son polinomios en la variable s.

El método sigue los siguientes pasos:

1º. Descomponer la fracción $F(s)$ en fracciones simples. Para ello:

a) Encontrar las raíces del denominador $Q(s)$. Denotaremos α a una de sus raíces reales de multiplicidad r, y $a \pm ib$ a una de sus raíces complejas y su conjugada. De esta forma:

$$Q(s) = (s-\alpha)^r \ldots [(s-a)^2 + b^2] \ldots$$

b) Escribir $F(s)$ como:

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{A_1}{s-\alpha} + \cdots + \frac{A_r}{(s-\alpha)^r} + \cdots + \frac{Bs+C}{(s-a)^2+b^2} + \cdots$$

c) Determinar los coeficientes $A_i, \ldots, B, C$.

2º. Calcular $L^{-1}[F(s)]$ se reduce a obtener:

$$L^{-1}\left[\frac{A_1}{s-\alpha} + \cdots + \frac{A_r}{(s-\alpha)^r} + \cdots + \frac{Bs+C}{(s-a)^2+b^2} + \cdots\right]$$

3º. Aplicando la linealidad del operador el problema consiste en encontrar:

– La transformada inversa de Laplace para las fracciones del tipo:

$$\frac{A_r}{(s-\alpha)^r}$$

– Y la de fracciones del tipo:

$$\frac{Bs+C}{(s-a)^2+b^2}$$

Para ello:

A. En el primer caso:

$$L^{-1}\left[\frac{A_r}{(s-\alpha)^r}\right] = A_r L^{-1}\left[\frac{1}{(s-\alpha)^r}\right] =$$

$$= \frac{A_r}{(r-1)!} L^{-1}\left[\frac{(r-1)!}{(s-\alpha)^r}\right] = \frac{A_r}{(r-1)!} e^{\alpha x} \cdot x^{r-1}$$

B. En el segundo caso:

$$L^{-1}\left[\frac{Bs+C}{(s-a)^2+b^2}\right] = BL^{-1}\left[\frac{s-a+a}{(s-a)^2+b^2}\right] + CL^{-1}\left[\frac{1}{(s-a)^2+b^2}\right] =$$

$$= BL^{-1}\left[\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}\right] + BL^{-1}\left[\frac{a}{(s-a)^2+b^2}\right] + CL^{-1}\left[\frac{1}{(s-a)^2+b^2}\right] =$$

$$= Be^{ax}\cos bx + \frac{Ba}{b} L^{-1}\left[\frac{b}{(s-a)^2+b^2}\right] + \frac{C}{b} L^{-1}\left[\frac{b}{(s-a)^2+b^2}\right] =$$

$$= Be^{ax}\cos bx + \left[\frac{Ba+C}{b}\right] e^{ax}\,\mathrm{sen}\, bx$$

Observación
No todas las funciones $F(s)$ tienen transformada inversa de Laplace.

3. APLICACIONES DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

3.1. Introducción

Vamos a aplicar la transformada de Laplace para resolver ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes con valores iniciales en el cero. Veremos que, sólo basándonos en las propiedades estudiadas anteriormente, estas ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales se convierten en ecuaciones o sistemas de ecuaciones lineales. Una de las ventajas importantes del tratamiento de estos problemas por este método es que se aborda directamente el problema de condición inicial en el origen, resolviéndolo sin necesidad de calcular la solución general de la ecuación o del sistema.

3.2. Resolución de ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes de orden *n*

Sea el problema de Cauchy dado por:

$$a_n y^{(n} + a_{n-1} y^{(n-1} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = b(x)$$
$$y(0) = A_0$$
$$y'(0) = A_1$$
$$\ldots$$
$$y^{(n-1}(0) = A_{n-1}$$

El método para la resolución de este problema mediante la transformada de Laplace es:

1º. Suponiendo que las funciones cumplen las hipótesis de existencia de transformada, aplicaremos el operador a la ecuación dada:

$$L[a_n y^{(n} + a_{n-1} y^{(n-1} + \ldots + a_1 y' + a_0 y] = L[b(x)]$$

Aplicando la linealidad del operador transformada:

$$a_n L[y^{(n}] + a_{n-1} L[y^{(n-1}] + \ldots + a_1 L[y'] + a_0 L[y] = L[b(x)]$$

2º. Se relaciona la transformada de las derivadas de una función con la transformada de ella. Así:

– $L[y'] = s\,L[y] - y(0) = s\,L[y] - A_0$
– $L[y''] = s^2 L[y] - s\,y(0) - y'(0) = s^2 L[y] - s\,A_0 - A_1$
– ....
– $L[y^{(n}] = s^n L[y] - s^{n-1} y(0) \ldots - y^{(n-1}(0) = s^n L[y] - s^{n-1} A_0 - \ldots - A_{n-1}$

Y sustituyendo en la ecuación dada cada expresión por su valor:

$$a_n [s^n L[y] - s^{n-1} A_0 - \ldots - A_{n-1}] + \ldots + a_1 [s\,L[y] - A_0] +$$
$$+ a_0 L[y] = L[b(x)]$$

Observamos que es una ecuación algebraica con una única incógnita: $L[y]$. Despejándola:

$$L\,[y]\,[a_n\,s^n + a_{n-1}\,s^{n-1} + \ldots + a_1\,s + a_0] -$$

$$- A_0\,[a_n\,s^{n-1} + a_{n-1}\,s^{n-2} + \ldots + a_1] - \ldots - A_{n-1}\,[a_n] = L\,[b\,(x)]$$

3º. Obtenida la expresión de $L\,[y]$, se determina la función incógnita mediante la aplicación del operador inverso de Laplace:

$$y\,(x) = L^{-1}\left[\frac{L\big[b\,(x)\big] + A_0\big[a_n s^{n-1} + a_{n-1}s^{n-2} + \cdots + a_1\big] + \cdots + A_{n-1}\big[a_n\big]}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}\right]$$

3.3. Resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes

Consideremos ahora el sistema lineal de ecuaciones diferenciales dado por:

$$\begin{array}{l} x_1'\,(t) = a_{11}\,x_1\,(t) + a_{12}\,x_2\,(t) + \ldots + a_{1n}\,x_n\,(t) + b_1\,(t) \\ x_2'\,(t) = a_{21}\,x_1\,(t) + a_{22}\,x_2\,(t) + \ldots + a_{2n}\,x_n\,(t) + b_2\,(t) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n'\,(t) = a_{n1}\,x_1\,(t) + a_{n2}\,x_2\,(t) + \ldots + a_{nn}\,x_n\,(t) + b_n\,(t) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} x_1\,(0) = A_1 \\ x_2\,(0) = A_2 \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_n\,(0) = A_n \end{array}$$

El método de resolución es similar:

1º. Se aplica la transformada de Laplace a cada una de las ecuaciones.

2º. Se relaciona la transformada de la derivada de las funciones con la de ellas mediante las fórmulas ya conocidas.

3º. Se crea así un sistema lineal de n ecuaciones con n incógnitas que son las transformadas de Laplace de las funciones $x_i\,(t)$ del sistema diferencial dado.

4º. Se resuelve dicho sistema por cualquier método, por ejemplo Cramer. Obtenidas las expresiones de las transformadas de las incógnitas, se calculan éstas por la aplicación del operador transformada inversa.

Nota

Puede señalarse que este método es aplicable a sistemas que, siendo del mismo tipo, contengan derivadas de mayor orden, siempre y cuando sean conocidas las condiciones iniciales adecuadas.

Observación

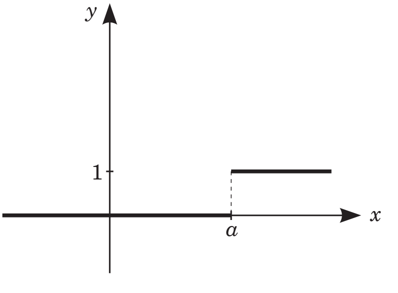
Como se ha comprobado, el método de la transformada de Laplace resulta útil y sencillo de aplicar para la resolución de ciertos tipos de ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales. Su limitación es que necesita de condiciones dadas en el origen. Veremos también que es muy bueno para tratar ecuaciones con funciones continuas a trozos como puede ser el caso del estudio del funcionamiento de un sistema mecánico o eléctrico. Cualquier sistema físico que responde a un estímulo puede imaginarse como un dispositivo que transforma una función de entrada (estímulo) en una de salida (respuesta). Se rige entonces por una función impulso que es continua a trozos.

4. FUNCIÓN ESCALÓN. RESOLUCIÓN DE ECUACIONES CON FUNCIONES CONTINUAS A TROZOS

4.1. Definición. Función escalón

Se define la función escalón como:

$$U_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < a \\ 1 & \text{si} \quad x \geq a \end{cases}$$



4.2. Transformada de la función escalón

Aplicaremos el operador transformada a esta función:

$$L[u_a(x)] = \int_0^\infty u_a(x)\, e^{-sx}\, dx = \int_a^\infty e^{-sx}\, dx = \frac{e^{-as}}{s}$$

Integral que existe si $s > 0$.

Nota

Este resultado puede generalizarse para funciones de salto definidas como:

$$U_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < a \\ \lambda & \text{si} \quad x \geq a \end{cases} \qquad \text{con} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Observación

Para aplicar la transformada de Laplace a ecuaciones con funciones continuas a trozos (con saltos finitos), relacionaremos éstas con la función escalón correspondiente de la cual conocemos su transformada y aplicaremos las siguientes propiedades:

4.3. Propiedades

Considérese la función $y(x)$ y su transformada $L[y(x)]$:

$$L[y(x)] = F(s) = \int_0^{\infty} y(x)\, e^{-sx}\, dx$$

Multipliquemos la transformada por e^{-as}:

$$e^{-as} L[y(x)] = \int_0^{\infty} y(x)\, e^{-s(a+x)}\, dx$$

Se realizará un cambio de variable en la integral de forma que:

$$x + a = t \quad \Leftrightarrow \quad x = t - a$$

$$e^{-as} L[y(x)] = \int_a^{\infty} y(t-a)\, e^{-st}\, dt = \int_0^{a} 0y(t-a)\, e^{-st}\, dt + \int_a^{\infty} 1y(t-a)\, e^{-st}\, dt =$$

$$= \int_a^{\infty} u_a(t)\, y(t-a)\, e^{-st}\, dt = L\big[u_a(t)\, y(t-a)\big]$$

De esta forma podemos establecer dos importantes conclusiones:

A) $L[u_a(t)\, y(t-a)] = e^{-as} L[y(t)]$

B) $L^{-1}[e^{-as} L[y(t)]] = u_a(t)\, y(t-a)$

Ejemplo

Calcular la transformada de Laplace de la función:

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 3 \\ t^2 & \text{si} \quad t \geq 3 \end{cases}$$

Relacionamos $g(t)$ con la función escalón $u_3(t)$ de forma que:

$$g(t) = u_3(t)\, f(t-3)$$

La función adecuada será $f(t) = (t+3)^2$ ya que

$$f(t-3) = (t-3+3)^2 = t^2.$$

De esta forma:

$$L[g(t)] = L[u_3(t)\, f(t-3)] = e^{-3s} L[f(t)] =$$

$$= e^{-3s} L[(t+3)^2] = L[t^2 + 9 + 6\,t] =$$

$$e^{-3s}\left[\frac{2}{s^3} + \frac{6}{s^2} + \frac{9}{s}\right]$$

Problemas resueltos

1 **Utilizando la definición de transformada de Laplace, calcular la transformada de la función: $y(x) = x^n$.**

$$y(x) = x^n$$

$$L[x^n] = \int_0^{\infty} x^n e^{-sx}\, dx$$

Integrando por partes: $u = x^n \qquad du = nx^{n-1}\, dx$

$$dv = e^{-sx}\, dx\ ; \qquad v = -e^{-sx}/s$$

y considerando $s > 0$:

$$L[x^n] = \frac{n}{s}\int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-sx}\, dx$$

Procediendo sucesivamente de igual forma, integrando por partes, se obtiene:

$$L[x^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

---

2 **Calcular la transformada de Laplace de $g(x) = e^{ax}\cos bx$.**

Conocida la transformada de la función coseno:

$$L\left[\cos(bx)\right] = \frac{s}{s^2 + b^2}$$

se aplicará la propiedad enunciada en el apartado 1.3, con lo que se tiene:

$$L\left[g(x)\right] = \frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}$$

---

3 **Determinar la transformada de Laplace de** $g(x) = e^{ax}\, x^n$**.**

Basta con aplicar la propiedad dada en el apartado 1.3 a la transformada calculada en el ejercicio 1.

$$L\left[g(x)\right] = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$$

---

4 **Aplicando las propiedades de la transformada, calcular:**

a) $L\,[7x^2 + 2 \text{ sen } 3x]$
b) $L\,[e^{-x} \text{ sen } 7x]$

a) Aplicaremos la propiedad de la linealidad del operador transformada:

$$L\,[7x^2 + 2 \text{ sen } 3x] = 7\,L\,[x^2] + 2\,L\,[\text{sen } 3x] =$$

$$= 7\frac{2!}{s^3} + 2\frac{3}{s^2+3^2} = \frac{14}{s^3} + \frac{6}{s^2+9}$$

b) Se aplicará la fómula del desplazamiento vista en el apartado 1.3. Sabiendo que:

$$L[\text{sen } 7x] = \frac{7}{s^2+49} = F(s)$$

se tiene que:

$$L\,[e^{-x} \text{ sen } 7\,x] = F(s-a) = F(s+1) \Rightarrow$$

$$L[e^{-x} \text{ sen } 7x] = \frac{7}{(s+1)^2+49}$$

---

5 **Calcular:** $$L^{-1}\left[\frac{1}{s^3+s}\right]$$

$s^3 + s = s\,(s^2+1)$ con lo que:

$$\frac{1}{s^3+s} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+1}$$

Con esto: $(s^2 + 1)\, A + s\,(Bs + C) = 1$. Resolviendo el sistema obtenemos:

$$A = 1, \qquad B = -1, \qquad C = 0$$

Aplicando la linealidad del operador transformada inverso se tiene:

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s^3+s}\right] = L^{-1}\left[\frac{A}{s}\right] + L^{-1}\left[\frac{Bs+C}{s^2+1}\right]$$

Es decir:

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s^3+s}\right] = L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right] = 1 - \cos x$$

---

6 **Calcular la transformada de Laplace de:**

$$\boldsymbol{g(x) = \int_0^x \left(e^{5t} + 6t^3 - \operatorname{sen} 4t\right) dt}$$

Se aplicará la propiedad vista en el apartado 1.3 que relacionaba la transformada de la integral de una función con la transformada de la propia función:

$$L\left[\int_0^x f(t)\, dt\right] = \frac{1}{s} L\left[f(x)\right]$$

Así:

$$L\left[\int_0^x \left(e^{5t} + 6t^3 - \operatorname{sen} 4t\right) dt\right] = \frac{L\left[e^{5x} + 6x^3 - \operatorname{sen} 4x\right]}{s} =$$

$$= \frac{1}{s}\left[\frac{1}{s-5} + 6\frac{3!}{s^4} - \frac{4}{s^2+16}\right] = \frac{1}{s}\left[\frac{1}{s-5} + \frac{36}{s^4} - \frac{4}{s^2+16}\right]$$

---

7 **Calcular las transformadas de Laplace de las derivadas de las funciones siguientes:**

a) $\boldsymbol{f(x) = 7x^2 + 2 \operatorname{sen} 3x}$

b) $\boldsymbol{g(x) = |x - 1|}$

a) La función $f(x)$ es derivable en todo punto y tiene como derivada $f'(x) = 14x + 6 \cos 3x$. Se aplicará la propiedad vista en el apartado 1.3:

$$L\,[f'(x)] = sL\,[f(x)] - f(0)$$

Del ejercicio 4 (a) se sabe que:

$$L\left[7x^2 + \operatorname{sen} 3x\right] = \frac{14}{s^3} + \frac{6}{s^2+9}$$

además, $f(0) = 0$ con ello, la transformada pedida es:

$$L\,[f'(x)] = s\left[\frac{14}{s^3} + \frac{6}{s^2+9}\right] = \frac{14}{s^2} + \frac{6s}{s^2+9}$$

b) $g(x) = |x - 1|$
En este caso se trata de una función no derivable en $x = 1$. De esta forma no puede aplicarse la propiedad del caso anterior y debe calcularse la transformada con la propia definición.

$$g'(x) = \begin{cases} 1 & x > 1 \\ -1 & x < 1 \end{cases}$$

Así:

$$L\left[g'(x)\right] = \int_0^\infty g'(x)\, e^{-sx} dx = \int_0^1 -e^{-sx} dx + \int_1^\infty e^{-sx} dx = \frac{1}{s} + \frac{2e^{-s}}{s}$$

Tomando $s > 0$.

---

8 **a) Sabiendo que $L\,[1] = 1/s$, calcular $L\,[x]$.**
b) Si $L\,[\cos x] = s/(s^2 + 1)$, calcular $L\,[\operatorname{sen} x]$.

a) Eligiendo $f(x) = x$ se obtiene $f'(x) = 1$ y $f(0) = 0$. Aplicando la propiedad vista en el apartado 1.3 para la derivada de primer orden se tiene que:
$L\,[1] = s\,L\,[x] - f(0)$, con lo que despejando se obtiene:

$$L[x] = \frac{1}{s} L[1] = \frac{1}{s^2}$$

b) Tomamos $f(x) = \cos x$, $f'(x) = \operatorname{sen} x$, $f(0) = 1$. Razonando de forma análoga al caso a) se tiene que:

$$L\,[\text{sen}\, x] = -\,(sL\,[\cos x] - \cos 0)$$

es decir:

$$L[\text{sen}\, x] = \frac{-s^2}{s^2+1} + 1 = \frac{1}{s^2+1}$$

---

9 Demostrar que si $f(x)$ es una función continua a trozos para $x \geq 0$ y de orden exponencial α, si $f(x)$ es periódica de periodo T, entonces:

$$\boldsymbol{L\left[f(x)\right] = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T f(x)\, e^{-sx} dx}$$

La transformada de $f(x)$ viene dada por:

$$L\left[f(x)\right] = \int_0^\infty f(x)\, e^{-sx} dx = \int_0^T f(x)\, e^{-sx} dx + \int_T^\infty f(x)\, e^{-sx} dx$$

Se realiza el cambio $x = u + T$, con lo que la última integral resulta:

$$\int_T^\infty f(x)\, e^{-sx} dx =$$

$$= \int_0^\infty f(u+T)\, e^{-s(u+T)}\, du = e^{-sT} \int_0^\infty f(u)\, e^{-su} du = e^{-sT} L\left[f(x)\right]$$

Con ello, sustituyendo en la primera expresión de $L\,[f(x)]$ se tiene:

$$L\left[f(x)\right] = \int_0^\infty f(x) e^{-sx} dx = \int_0^T f(x) e^{-sx} dx + e^{-sT} L\left[f(x)\right]$$

y despejando el valor de $L\,[f(x)]$ se obtiene el resultado enunciado:

$$L\left[f(x)\right] = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T f(x)\, e^{-sx} dx$$

---

10 Dada la función:

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{si } 1 \leq x < 2 \end{cases}}$$

considérese de periodo $T = 2$, es decir; $f(x) = f(x + 2)$. Calcular su transformada de Laplace.

Se aplicará la fórmula demostrada en el ejercicio anterior identificando $T = 2$.

$$L\left[f(x)\right] = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T f(x)\, e^{-sx} dx =$$

$$= \frac{1}{1 - e^{-2s}} \int_0^2 f(x)\, e^{-sx} dx = \frac{1}{1 - e^{-2s}} \left[\int_0^1 x e^{-sx} dx + \int_1^2 0\, e^{-sx} dx \right] =$$

$$= \frac{1}{1 - e^{-2s}} \left[\frac{e^{-s}}{s} + \frac{1 - e^{-s}}{s^2} \right]$$

---

11 Resolver, aplicando la transformada de Laplace, la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dt} - 2y = e^{5t}$$

$$y(0) = 3$$

Aplicamos el operador transformada y sus propiedades a la ecuación:

$$L\left[\frac{dy}{dt}\right] - 2\, L[y] = L\left[e^{5t}\right]$$

$$sL[y] - y(0) - 2L[y] = \frac{1}{s - 5}$$

$$sL[y] - 3 - 2L[y] = \frac{1}{s - 5}$$

y despejamos $L[y]$:

$$L[y] = \frac{3(s - 5) + 1}{(s - 5)(s - 2)} = \frac{3s - 14}{(s - 5)(s - 2)}$$

La solución de la ecuación diferencial dada es:

$$y(t) = L^{-1}\left[L[y]\right] = L^{-1}\left[\frac{3s-14}{(s-5)(s-2)}\right]$$

Como el lector puede comprobar fácilmente:

$$L^{-1}\left[\frac{3s-14}{(s-5)(s-2)}\right] = \frac{8}{3}L^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right] + \frac{1}{3}L^{-1}\left[\frac{1}{s-5}\right] = \frac{8}{3}e^{2t} + \frac{1}{3}e^{5t}$$

---

12 Calcular, mediante la transformada de Laplace, la solución del siguiente problema de Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} - 6x + 3y = 8e^t \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} - 2x - y = 4e^t \\[2ex] x(0) = -1, \quad y(0) = 0 \end{cases}$$

Aplicamos la transformada de Laplace y sus propiedades al sistema de ecuaciones dado:

$$\begin{cases} L\left[\dfrac{dx}{dt}\right] - 6L[x] + 3L[y] = L[8e^t] \\[2ex] L\left[\dfrac{dy}{dt}\right] - 2L[x] - L[y] = L[4e^t] \end{cases}$$

$$\begin{cases} sL[x] + 1 - 6L[x] + 3L[y] = \dfrac{8}{s-1} \\[2ex] sL[y] - 2L[x] - L[y] = \dfrac{4}{s-1} \end{cases}$$

Hemos obtenido el siguiente sistema algebraico:

$$\begin{cases} (s-6)\,L[x] + 3L[y] = \dfrac{-s+9}{s-1} \\[2ex] -2L[x] + (s-1)\,L[y] = \dfrac{4}{s-1} \end{cases}$$

Resolvemos el sistema y obtenemos:

$$L[x] = \frac{-s+7}{(s-1)(s-4)}; \qquad L[y] = \frac{2}{(s-1)(s-4)}$$

Finalmente, aplicamos la transformada inversa de Laplace, habiendo descompuesto previamente $L[x]$ y $L[y]$ en fracciones simples, y obtenemos la solución del problema de valor inicial propuesto:

$$\begin{cases} x(t) = -2e^{t} + e^{4t} \\ y(t) = -\dfrac{2}{3}e^{t} + \dfrac{2}{3}e^{4t} \end{cases}$$

---

13 **Un determinado dispositivo está regido por la ecuación:**

$$\boldsymbol{x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = F(t)}$$

$$\boldsymbol{x(0) = 1, \quad x'(0) = -3}$$

donde el término de excitación $F(t)$ recoge con un cierto tiempo de respuesta las variaciones de temperatura. Suponiendo que:

$$\boldsymbol{F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \le t < 2 \\ t-2 & \text{si } t \ge 2 \end{cases}}$$

calcular la expresión de $x(t)$.

Relacionaremos la función $F(t)$ con la función escalón $u_2(t)$ a través de una función $f(t)$ de forma que $F(t) = u_2(t)f(t-2)$.

Tomemos $f(t) = t$, ya que $f(t-2) = t-2$ y con ello tenemos la igualdad buscada.

Apliquemos la transformada de Laplace a la ecuación:

$$L[x''(t)] - 3L[x'(t)] + 2L[x(t)] = L[u_2(t)f(t-2)] \iff$$

$$s^2L[x(t)] - sx(0) - x'(0) - 3[sL[x(t)] - x(0)] + 2L[x(t)] =$$

$$= e^{-2s}L\left[f(t)\right] \iff L\left[x(t)\right]\left[s^2 - 3s + 2\right] = e^{-2s}\frac{1}{s^2} + s - 6$$

Así:

$$L\left[x(t)\right] = \frac{e^{-2s}}{s^2(s^2-3s+2)} + \frac{s^3-6s^2}{s^2(s^2-3s+2)}$$

Aplicando el operador inverso:

$$x(t) = L^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{s^2(s^2-3s+2)}\right] + L^{-1}\left[\frac{s^3-6s^2}{s^2(s^2-3s+2)}\right]$$

A) En el primer caso, aplicando las propiedades expuestas en la teoría:

$$L^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{s^2(s^2-3s+2)}\right] = U_2(t)\, L^{-1}\left[\frac{1}{s^2(s^2-3s+2)}\right]_{t-2}$$

Trabajando con el método de las fracciones simples se obtiene:

$$U_2(t)\left[\frac{1}{2}e^{t-2} + \frac{1}{2}e^{2(t-2)}\right]$$

B) En el segundo caso, aplicando de nuevo el método de las fracciones simples:

$$L^{-1}\left[\frac{s^3-6s^2}{s^2(s^2-3s+2)}\right] = 5e^{t} - 8e^{2t}$$

Con ello, la solución al problema resulta:

$$x(t) = U_2(t)\left[\frac{1}{2}e^{t-2} + \frac{1}{2}e^{2(t-2)}\right] + 5e^{t} - 8e^{2t}$$

$$x(t) = \begin{cases} 5e^{t-8e^{2t}} & \text{si} \quad 0 \le t < 2 \\ \frac{1}{2}\left[e^{t-2} + e^{2(t-2)}\right] + 5e^{t} - 8e^{2t} & \text{si} \quad t \ge 2 \end{cases}$$

---

14 Resolver el siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x'(t) + 3x(t) + y'(t) - y(t) = 1} \\ \boldsymbol{x'(t) - x(t) + y'(t) - y(t) = e^{t}} \\ \boldsymbol{x(0) = 0 = y(0)} \end{cases}$$

Se aplicará el método de la transformada de Laplace:

$$L\,[x'(t) + 3x(t) + y'(t) - y(t)] = L\,[1] \quad \Rightarrow$$

$$(s + 3)\, L\,[x] + (s - 1)\, L\,[y] = 1/s$$

$$L\,[x'(t) - x(t) + y'(t) - y(t)] = L\,[e^t] \Rightarrow$$

$$(s - 1)\, L\,[x] + (s - 1)\, L\,[y] = 1/\,(s - 1)$$

Restando la segunda ecuación de la primera:

$$(s + 3 - s + 1)\, L[x] = \frac{1}{s} - \frac{1}{s-1} \quad \Leftrightarrow \quad L[x] = \frac{1}{4s} - \frac{1}{4(s-1)}$$

Aplicando el operador de la transformada inversa se obtiene:

$$x(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{4s}\right] - L^{-1}\left[\frac{1}{4(s-1)}\right] \quad \Leftrightarrow \quad x(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^t = \frac{1}{4}(1 - e^t)$$

Para determinar la función $y(t)$ se sustituye en cualquiera de las ecuaciones el valor obtenido para $L\,[x]$:

$$L[y] = \frac{5s - 1}{4(s-1)(s-1)\,s} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{s-1} + \frac{4}{(s-1)^2} - \frac{1}{s}\right]$$

Aplicando L^{-1}:

$$y(t) = \frac{1}{4} L^{-1}\left[\frac{1}{s-1} + \frac{4}{(s-1)^2} - \frac{1}{s}\right] = \left(t + \frac{1}{4}\right)e^t - \frac{1}{4}$$

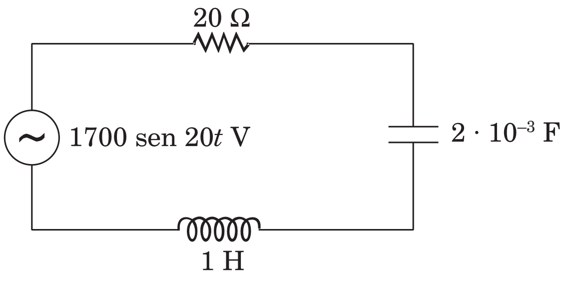
Observación

El mismo resultado se hubiese obtenido más sencillamente restando la segunda ecuación a la primera.

---

15 Un circuito *RLC* está formado por una resistencia de 20 Ω, un inductor de 1 H y un condensador de 0,002 F. Estos elementos están conectados en serie. Se pide calcular, por medio de la transformada de Laplace, la expresión de la intensidad que circula por el circuito a lo largo del tiempo si se conecta a una fuente de alimentación alterna cuya fuer-

za electromotriz viene dada por 1700 sen 20 *t* V. En el instante inicial la carga del condensador son –4C y la intensidad del circuito es nula.



La ecuación que modeliza la situación expuesta es:

$$Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = E(t)$$

Imponiendo que la intensidad $i(t)$ es la derivada de la carga $q(t)$, y sustituyendo los datos del problema se tiene:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 20\frac{dq}{dt} + 500q = 1700\,\mathrm{sen}\,20t = E(t)$$

Se trata de una ecuación de segundo orden, lineal y de coeficientes constantes, con valores iniciales en el origen. Se aplica la transformada de Laplace:

$$s^2L[q] - sq(0) - q'(0) + 20sL[q] - 20q(0) + 500L[q] = 1700L[\,\mathrm{sen}\,20t];$$

$$(s^2 + 20s + 500)\,L[q] + 4\,s + 80 = 34000/(s^2 + 400);$$

$$L[q] = \frac{34000 - 4s^2 - 1600s - 80s^2 - 32000}{(s^2 + 400)(s^2 + 20s + 500)}$$

Empleando el método de las fracciones simples se tiene:

$$L[q] = \frac{-4s + 20}{s^2 + 400} + \frac{-20}{(s+10)^2 + 400}$$

Aplicando el operador inversa de la transformada:

$$q(t) = -4L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+400}\right] + L^{-1}\left[\frac{20}{s^2+400}\right] + L^{-1}\left[\frac{-20}{(s+10)^2+400}\right] =$$

$$= q(t) = -4\cos 20t + \operatorname{sen} 20t - e^{-10t}\operatorname{sen} 20t$$

Con esto, la intensidad que circula por el circuito a lo largo del tiempo es:

$$i(t) = q'(t) = 80 \operatorname{sen} 20t + 20 \cos 20t +$$
$$+ 10e^{-10t} \operatorname{sen} 20t - 20e^{-10t} \cos 20t.$$

Nota

Puede observarse que la intensidad que circula por el circuito consta de dos términos:

- Régimen transitorio: $10e^{-10t} \operatorname{sen} 20t - 20e^{-10t} \cos 20t$. Este término prácticamente desaparece a medida que el tiempo avanza (exponenciales decrecientes).
- Régimen permanente:

$$80 \operatorname{sen} 20t + 20 \cos 20t = 20\,(17)^{1/2} \operatorname{sen}(20t + 0{,}24)$$

Función senoidal que representa la intensidad que circula por el circuito a lo largo del tiempo.

---

16 **Resolver** $\boldsymbol{y'' - 6y' + 9y = t^2e^{3t}}$, **con** $\boldsymbol{y(0) = 2}$, $\boldsymbol{y'(0) = 6}$.

Aplicamos la transformada de Laplace:

$$L[y''] - 6L[y'] + 9L[y] = L[t^2e^{3t}] \Leftrightarrow$$
$$s^2L[y] - sy(0) - y'(0) - 6[sL[y] - y(0)] + 9L[y] = L[t^2e^{3t}]$$

sustituyendo las condiciones iniciales y calculando la transformada de t^2e^{3t}, se tiene:

$$(s-3)^2 L[y] = 2(s-3) + \frac{2}{(s-3)^3} \quad \Leftrightarrow \quad L[y] = \frac{2}{s-3} + \frac{2}{(s-3)^5}$$

Sólo resta aplicar el operador inversa de la transformada:

$$y\,(x) = L^{-1}\left[\frac{2}{s-3} + \frac{2}{(s-3)^5}\right] = 2L^{-1}\left[\frac{1}{s-3}\right] + \frac{2}{4!}\,L^{-1}\left[\frac{4!}{(s-3)^5}\right] =$$

$$= 2e^{3t} + \frac{1}{12}\,t^4 e^{3t}$$

Con ello, la solución del problema de valor inicial dado es:

$$y\,(x) = 2e^{3t} + \frac{1}{12}\,t^4 e^{3t}$$

---

17 **Resolver la ecuación integral:**

$$\boldsymbol{y\,(x) = e^x + \int_0^x 3y\,(t)\,dt}$$

Aplicamos la transformada de Laplace a la ecuación:

$$L\,[y\,(x)] = L\left[e^x + \int_0^x 3y\,(t)\,dt\right] = L\,[e^x] + 3L\left[\int_0^x y\,(t)\,dt\right] =$$

$$= \frac{1}{s-1} + 3L\left[\int_0^x y\,(t)\,dt\right] = \frac{1}{s-1} + \frac{3}{s}\,L\,[y\,(x)]$$

Despejando $L\,[y\,(x)]$ se tiene:

$$\left(1 - \frac{3}{s}\right)L\,[y\,(x)] = \frac{1}{s-1}$$

La función buscada es:

$$y\,(x) = L^{-1}\left[\frac{s}{(s-1)\,(s-3)}\right]$$

Se aplica el método de las fracciones simples para la resolución:

$$y\,(x) = \frac{-1}{2}\,L^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)}\right] + \frac{3}{2}\,L^{-1}\left[\frac{1}{(s-3)}\right] \quad \Leftrightarrow \quad y\,(x) = \frac{-1}{2}\,e^x + \frac{3}{2}\,e^{3x}$$

---

18 **Resolver el problema de valor inicial dado por:**

$$\boldsymbol{y'' - 5y' + 4y = 4 \; ; \qquad y(0) = 0 \; ; \qquad y'(0) = 2}$$

Aplicaremos la transformada de Laplace a la ecuación:

$$L\,[y''] - 5L\,[y'] + 4L\,[y] = L\,[4] \quad \Leftrightarrow \quad (s^2 - 5s + 4)\,L\,[y] = 2 + 4/s$$

con lo que, despejando $L\,[y]$ se tiene:

$$L[y] = \frac{2s + 4}{s\,(s^2 - 5s + 4)}$$

y aplicando el método de fracciones simples:

$$L[y] = \frac{1}{s} - \frac{2}{s-1} + \frac{1}{s-4} \quad \Leftrightarrow \quad y\,(x) = 1 - 2e^{x} + e^{4x}$$

---

19 **Hallar la solución del sistema:**

$$\boldsymbol{x'(t) = -7x(t) + y(t) + 5}$$
$$\boldsymbol{y'(t) = -2x(t) - 5y(t) - 37t}$$

que cumple la condición inicial $\boldsymbol{x(0) = 0}$; $\boldsymbol{y(0) = 0}$.

Se aplica la transformada de Laplace a las dos ecuaciones:

$$L\,[x'(t)] = -7L\,[x(t)] + L\,[y(t)] + L\,[5]$$
$$L\,[y'(t)] = -2L\,[x(t)] - 5L\,[y(t)] - 37L\,[t]$$

es decir:

$$L[x(t)] = \frac{5s^2 + 25s - 37}{s^2\,(s^2 + 12s + 37)}; \qquad L[y(t)] = \frac{-47s - 259}{s^2\,(s^2 + 12s + 37)}$$

Descomponiendo en fracciones simples:

$$L[x(t)] = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} - \frac{s+6}{s^2 + 12s + 37}; \qquad L[y(t)] = \frac{1}{s} - \frac{7}{s^2} - \frac{s-5}{s^2 + 12s + 37}$$

y aplicando el operador transformada inversa:

$$x(t) = 1 - t - e^{-6t} \cos t$$

$$y(t) = 1 - 7t - e^{-6t} \cos t + e^{-6t} \operatorname{sen} t$$

---

20 Demostrar que la transformada inversa de una función $F(s)$ no es única.

Consideremos dos funciones $G(s)$ y $H(s)$ que difieran sólo en una función $N(s)$ tal que:

$$\int_0^x N(t)\, dt = 0 \qquad \forall\, x > 0$$

puede comprobarse, utilizando la definición de la transformada de Laplace que ambas funciones tienen la misma transformada.

Problemas propuestos

1 Aplicando las propiedades de la transformada, calcular:

a) $L\,[x^2\, e^{2x} - e^{-5x}]$ b) $L\,[e^{5x} + 6x^3 - \text{sen}\, 4x]$

c) $L\,[e^x \cos 2x]$ d) $L\,[x^2\, \text{sen}\, 2x]$

2 Utilizando las propiedades de la transformada, calcular las siguientes transformadas inversas.

a) $L^{-1}\left[\dfrac{s-1}{s^2-s-6}\right]$ d) $L^{-1}\left[\dfrac{3s^3-2s^2+13s-6}{(s+2)(s^2-4)}\right]$

b) $L^{-1}\left[\dfrac{s-3}{(s^2+4)^2}\right]$ e) $L^{-1}\left[\dfrac{5s^2+15s+11}{(s-1)(s-2)^3}\right]$

c) $L^{-1}\left[\dfrac{s-5}{s^4+3s^3+2s^2}\right]$ f) $L^{-1}\left[\dfrac{s-3}{(s-2)(s+3)(s^2+1)}\right]$

3 Comprobar que: $L^{-1}\left[\dfrac{1}{(s+3)^3}\right] = \dfrac{1}{2}x^2 e^{-3x}$

4 Comprobar que:

$$L^{-1}\left[\frac{1}{1+s^4}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\text{ch}\frac{x}{\sqrt{2}}\,\text{sen}\frac{x}{\sqrt{2}} - \text{sh}\frac{2}{\sqrt{2}}\cos\frac{x}{\sqrt{2}}\right]$$

5 Resolver, utilizando la transformada de Laplace, las siguientes ecuaciones diferenciales.

a) $\dfrac{d^2x}{dt^2} - 3\dfrac{dx}{dt} + 2x = e^{5t}$ $x(0) = 1,\quad x'(0) = 2$

b) $\dfrac{d^3x}{dt^3} + x = \dfrac{1}{2}t^2e^t$ $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$

c) $\dfrac{d^2x}{dt^2} + x = e^{-2t}\,\text{sen}\, t$ $x(0) = x'(0) = 0$

d) $\dfrac{d^2x}{dt^2} + x = t \qquad x(0) = 1, \quad x'(0) = 2$

6 Resolver los siguientes sistemas utilizando las propiedades de la transformada.

a) $\left.\begin{array}{l} x' - 4x - y + 36t = 0 \\ y' + 2x - y + 2e^t = 0 \end{array}\right\} \qquad x(0) = 0, \quad y(0) = 1$

b) $\left.\begin{array}{l} x' = -x + y + z \\ y' = x - y + z \\ z' = x + y + z \end{array}\right\} \qquad x(0) = 1, \quad y(0) = z(0) = 0$

c) $\left.\begin{array}{r} x' + y' - \int_0^t y(x)\,dt = e^{-1} + 1 \\ x + y'' = y - 1 \end{array}\right\} \qquad x(0) = y(0) = y'(0) = 0$

d) $\left.\begin{array}{l} x' = 2x - 2y + z + \operatorname{sen} t \\ y' = 4x - 2y + z + \cos t \\ z' = z + e^{-t} \operatorname{sen} t \end{array}\right\} \qquad x(0) = 1, \quad y(0) = -1, \quad z(0) = 3$

7 Utilizando la definición de transformada de Laplace calcular:

a) $L[f(x)] \qquad f(x) = \begin{cases} 3 & 0 < x < 2 \\ -1 & x > 2 \end{cases}$

b) $L[f(x)] \qquad f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 < x < 1 \\ 0 & 1 < x < 21 \\ -x & x > 21 \end{cases}$

c) $L[f(x)] \qquad f(x) = \begin{cases} x + 1 & x < 2 \\ x - 1 & x > 2 \end{cases}$

8 Cierto dispositivo se rige mediante la ecuación diferencial:

$$x'' + 3x' + 4x = F(t), \qquad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1$$

Sabiendo que $F(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ 4(t-1) & t > 1 \end{cases}$; calcular $x(t)$.

9 Calcular la transformada de la función $f(x) = \operatorname{sen}(ax)\cos(ax)$, siendo a una constante real.

Capítulo 6

SERIES DE FOURIER

La representación de funciones mediante series de Fourier es una teoría muy utilizada en la Matemática, especialmente en la resolución de ecuaciones en derivadas parciales. Esta representación de una función mediante suma de armónicos (funciones sinusoidales) tiene interés en ingeniería. Una aplicación destacable se centra en la resolución de ecuaciones diferenciales de segundo orden: $ay''(x)+by'(x)+cy(x)=f(x)$, *siendo* $f(x)$ *una función periódica. Ecuaciones que modelizan diversos sistemas eléctricos y mecánicos cuando* $f(x)$ *designa una perturbación de tipo periódico en dichos sistemas.*

En general, en el estudio de un gran número de fenómenos físicos aparecen ecuaciones diferenciales que para su resolución necesitan de series trigonométricas de la forma:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(nx)+b_n\operatorname{sen}(nx)\right]$$

Una expresión que nos da una idea de la periodicidad del fenómeno estudiado. Esto ocurre, entre otros ejemplos, en:

– La teoría del sonido.
– El estudio de las ondas electromagnéticas.
– La transmisión de calor.

Hoy en día, este tipo de series tiene interés en el estudio de vibraciones de sistemas físicos sometidos a perturbaciones de carácter periódico.

De esta manera, vamos a ver cómo pueden representarse funciones a través de series. Por ejemplo, en los circuitos eléctricos aparecen a menudo funciones periódicas (combinaciones lineales o no de senos y cosenos). En este capítulo se establecerá cómo toda función periódica puede expresarse en términos de una serie trigonométrica.

1. FUNDAMENTOS

1.1. Definición. Función periódica. Periodo

Dada una función $f(x)$ se dice que es periódica si existe $p > 0$ de forma que:

$$f(x + p) = f(x)$$

Al menor valor de p que verifica esta relación se le denomina periodo de la función.

Observación
Si p verifica la condición de ser periodo para una función, np también lo hace para todo $n \in N$. De esta forma, como se ha expuesto anteriormente, se toma el periodo como el "menor" de todos los valores que cumplen la propiedad.

1.2. Definición. Serie de Fourier para funciones 2π-periódicas

El científico francés Fourier estableció a principios del siglo XIX la idea de expresar una función de periodo $p = 2\pi$ como combinación lineal de senos y cosenos mediante una serie que lleva su nombre. Así, llamaremos serie de Fourier trigonométrica de la función $f(x)$ a:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx) \right]$$

Para asociar una serie de este tipo a una función deberán determinarse los coeficientes a_n y b_n llamados coeficientes de Fourier.

1.3. Proposición. Ortogonalidad de las funciones trigonométricas

Las funciones $\operatorname{sen}(mt)$ y $\cos(mt)$ son ortogonales en $[-\pi, \pi]$, en el sentido siguiente:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mt) \cos(nt)\, dt = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \pi & \text{si } m = n \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(mt) \operatorname{sen}(nt)\, dt = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \pi & \text{si } m = n \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(mt) \cos(nt)\, dt = 0, \qquad \forall\, m, n$$

Nota
Puede verificarse el resultado mediante la integración por partes de las integrales propuestas, así como utilizando las propiedades de la integración de funciones pares e impares a lo largo de intervalos simétricos $[-a, a]$.

1.4. Cálculo de los coeficientes de Fourier

Dada una función $f(x)$ de periodo 2π se desea encontrar los coeficientes que permitan establecer:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)\right] \tag{1}$$

Comenzaremos suponiendo que la serie es uniformemente convergente para que pueda ser integrada término a término en $[-\pi, \pi]$:

i) Cálculo de a_0

Integremos directamente la igualdad (1) entre $-\pi$ y π:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos(nx)\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} b_n \operatorname{sen}(nx)\,dx\right]$$

Basándonos en las propiedades de las integrales y en los resultados establecidos en la proposición 1.3. tenemos que:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

ii) Cálculo de a_n

Multipliquemos la ecuación (1) por $\cos(mx)$:

$$f(x)\cos(mx) = \frac{a_0}{2}\cos(mx) +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos(nx)\cos(mx) + b_n \operatorname{sen}(nx)\cos(mx)\right]$$

Integrando de forma análoga al caso i) obtenemos:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)\,dx +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\cos(mx)\,dx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen}(nx)\cos(mx)\,dx\right]$$

Por los resultados de la proposición 1.3. la igualdad queda como:

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)\,dx=a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(nx)\,dx$$

Con lo que los coeficientes a_n se calculan mediante la expresión:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)\,dx$$

iii) Cálculo de b_n

Procediendo de modo análogo al caso ii) pero multiplicando la ecuación por el término $\operatorname{sen}(mx)$ se determina:

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\operatorname{sen}(nx)\,dx$$

Observación
Es importante señalar que la serie así definida puede no converger en todo punto a la función. Más adelante se enunciará el teorema de convergencia para las series de Fourier. Por tanto, lo correcto entonces será establecer:

$$f(x)\approx\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(nx)+b_n\operatorname{sen}(nx)\right]$$

1.5. Generalización a las funciones de periodo *p*

Hasta el momento, se ha desarrollado la serie de Fourier para una función que debe ser periódica de periodo 2π. Trataremos ahora funciones continuas a trozos con periodos p. Se generalizará para ellas el cálculo de los coeficientes de Fourier.

Sea entonces $f(x)$ función de cualquier periodo p. Tomemos el semiperiodo L de forma que: $2L=p$. Se trabajará con la función:

$$g(u)=f\left(\frac{Lu}{\pi}\right)$$

Se verifica que ésta es una función de periodo 2π, para la cual podremos calcular su desarrollo en serie de Fourier según la teoría expuesta anteriormente.

Veamos este resultado:

$$g(u+2\pi)=f\left[\frac{L(u+2\pi)}{\pi}\right]=f\left[\frac{Lu}{\pi}+\frac{2L\pi}{\pi}\right]=f\left[\frac{Lu}{\pi}+p\right]=f\left(\frac{Lu}{\pi}\right)=g(u)$$

Si desarrollamos en serie $g(u)$:

$$g(u)\approx\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(nu)+b_n\,\mathrm{sen}(nu)\right]$$

donde los coeficientes serán:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(u)\cos(nu)\,dx$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(u)\,\mathrm{sen}(nu)\,dx$$

Si realizamos el cambio de variable

$$x=\frac{Lu}{\pi}\quad\Leftrightarrow\quad u=\frac{\pi x}{L}\quad\Rightarrow\quad f(x)=g(u)$$

tendremos:

$$f(x)\approx\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(n\frac{\pi x}{L}\right)+b_n\,\mathrm{sen}\left(n\frac{\pi x}{L}\right)\right]$$

donde los coeficientes quedan:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(u)\cos(nu)\,dx=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(u)\,\mathrm{sen}(nu)\,dx=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

De esta manera ha quedado establecido el desarrollo de Fourier para cualquier función periódica sea cual sea su periodo.

Observación
De forma más general, se pueden extender estas fórmulas a cualquier intervalo de longitud un periodo, de forma que:

$$a_n=\frac{1}{L}\int_{a}^{a+2L}f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_a^{a+2L} f(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

1.6. Teorema de convergencia

Como se ha comentado en el apartado 1.4, el que existan los coeficientes de la serie de Fourier no implica la convergencia de la serie a la función. Para tener garantías de cuándo o dónde se produce la convergencia se cuenta con el siguiente teorema:

Dada una función $f(x)$ periódica y suave por tramos (de derivada continua a trozos) entonces la serie de Fourier de $f(x)$ converge :

a) al valor de la función en todos aquellos puntos donde f es continua
b) al valor promedio $1/2\,[f(x^+) + f(x^-)]$ en los puntos de discontinuidad de f, siendo $f(x^+)$ y $f(x^-)$ los límites laterales de f en x.

El teorema puede enunciarse diciendo que la serie de Fourier de una función periódica y suave por tramos converge en todo punto al valor promedio de ella.

Ejemplo
En las gráficas que aparecen en la página siguiente se puede apreciar la idea de aproximación de una función por el desarrollo en serie de Fourier para el caso de la función periódica de periodo 2

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -1 \le x \le 0 \\ 1 & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

La primera corresponde a tomar los tres primeros términos del desarrollo, la segunda a tomar los siete primeros y la tercera los quince.
Veamos cómo sería el desarrollo analítico:
Aplicando para esta función las fórmulas de los coeficientes de Fourier anteriormente presentadas, se tiene:

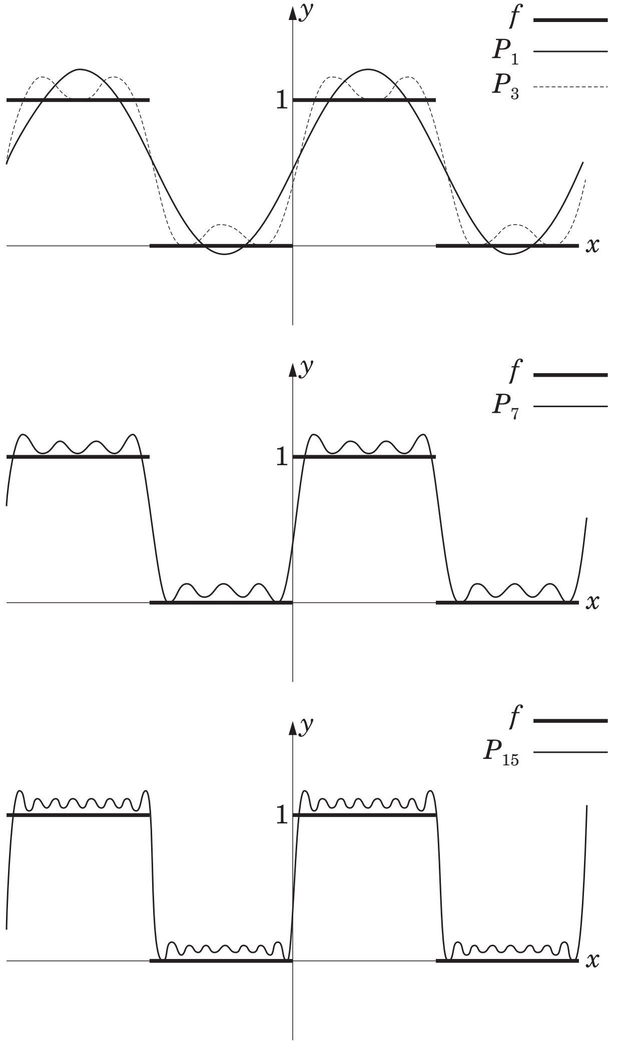
$$a_0 = 1, \qquad a_n = 0, \qquad b_n = \frac{-1}{n\pi}\left((-1)^n - 1\right)$$

con ello el desarrollo es:

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n\pi}\left((-1)^n - 1\right)\mathrm{sen}(n\pi x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n\ \text{impar}} \frac{1}{n}\,\mathrm{sen}(n\pi x)$$

Los primeros términos quedan:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\,\mathrm{sen}(\pi x), \qquad \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\mathrm{sen}(\pi x) + \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}(3\pi x)\right), \qquad \ldots$$



2. FUNCIONES PARES E IMPARES

En principio, se ha generalizado la teoría del desarrollo en serie de Fourier para funciones periódicas definidas en cualquier intervalo de longitud un periodo. Sin embargo, trabajar con un intervalo simétrico $(-a, a)$ ofrece grandes ventajas para el estudio de funciones con propiedades de simetría.

2.1. Definición. Función par, función impar

Una función $f(x)$ es par si $f(-x) = f(x)$. La función $f(x)$ es impar si $f(-x) = -f(x)$.

Observación
La gráfica de una función par es simétrica respecto del eje OY; y la de una función impar es simétrica respecto al origen de coordenadas.

Ejemplos:
1) Funciones pares son, por ejemplo:

$$x^2, \quad \cos(x), \quad \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

2) Funciones impares son:

$$x, \quad \operatorname{sen}(x), \quad \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

2.2. Propiedades

1) Puede comprobarse fácilmente, observando los dibujos de este tipo de funciones y puesto que las integrales representan las áreas bajo las curvas, que se cumplen las siguientes igualdades:

a) Si $f(x)$ es impar:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

(cancelación de áreas)

b) Si $f(x)$ es par:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

2) Bajo productos, las funciones pares e impares se comportan de la siguiente manera:
– El producto de cualquier número de funciones pares es una función par.
– El producto de un número impar de funciones impares es una función impar.
– El producto de un número par de funciones impares es una función par.
– El producto de una función impar y una par es una función impar.

Ejemplos:
1) Si $f(x)$ es una función par tendremos que:

$$f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad \text{será par}$$

$$f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad \text{será impar}$$

2) Si $f(x)$ es impar:

$$f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad \text{será impar}$$

$$f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad \text{será par}$$

Observación
Basado en las propiedades enunciadas anteriormente, se establece el siguiente teorema.

2.3. Teorema

Sea $f(x)$ función integrable definida en un intervalo $(-L, L)$. En general, su serie de Fourier será:

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(n\frac{\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(n\frac{\pi x}{L}\right)\right]$$

siendo los coeficientes:

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

a) Si $f(x)$ es una función par admite un desarrollo de Fourier de cosenos, ya que por las propiedades enunciadas $b_n = 0$.
b) Si $f(x)$ es una función impar admite un desarrollo de Fourier de senos, ya que por las propiedades enunciadas $a_n = 0$.

Ejemplo
En el problema resuelto número 1 se desarrolla la función $f(x) = x$, $-\pi \le x \le \pi$. Como puede comprobarse fácilmente se trata de una función impar y, por este motivo, su desarrollo queda en términos de senos:

$$x \approx 2\left[\operatorname{sen}(x) - \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2} + \frac{\operatorname{sen}(3x)}{3} - \ldots\right]$$

Observación
Estas propiedades permiten realizar el desarrollo de una determinada función definida en un intervalo de longitud L prolongándola de forma par o impar según convenga. Para ello será suficiente con tomarla de periodo $p = 2L$ y hacer su desarrollo de Fourier en senos o cosenos. Véanse los problemas resueltos 3 y 6.

3. CONSIDERACIONES SOBRE LAS SERIES DE FOURIER

Todas las funciones que aparecen en una serie de Fourier son periódicas con periodo $p = 2L$. Así, dada una función $f(x)\; L \leq x \leq L$, a desarrollar en serie de Fourier, si no es periódica se extenderá periódicamente. Para ello se toma la función en el intervalo $[-L, L]$ y se repetirá ese patrón con periodo $p = 2L$. Es esa extensión la que pretende representar la serie de Fourier.

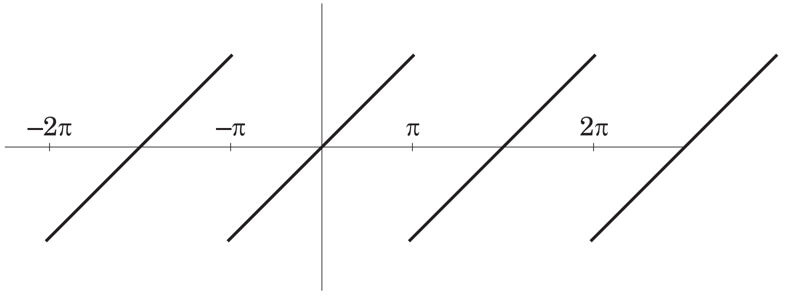
El desarrollo en serie de Fourier es muy útil ya que permite expresar funciones como combinación y superposición de armónicos simples. Una importante ventaja es que son capaces de representar funciones muy generales, con muchas discontinuidades, del tipo de las funciones de “impulso” de ingeniería electrónica. Esto es debido a que, como se ha expuesto en los apartados anteriores, la continuidad de la función a desarrollar no es condición suficiente para la convergencia de la serie, pero tampoco necesaria.

Otra de sus ventajas reside en el hecho de desarrollar una función definida en un cierto intervalo en términos de serie de Fourier de senos o de cosenos. Hacer cada uno de estos desarrollos permite extender esta función de forma par o impar para su posible utilización en problemas diferentes.

En cuanto a su aplicación a la resolución de ecuaciones diferenciales puede verse en el ejercicio resuelto número 5.

Problemas resueltos

1 **Calcular la serie de Fourier para la función $f(x) = x$, $-\pi \leq x < \pi$.**



Consideramos la función con un periodo $p = 2\pi$.

– Cálculo de a_0:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

– Cálculo de a_n:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x\,\mathrm{sen}(nx)}{n} + \frac{\cos(nx)}{n^2}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

Integral que se ha realizado por partes $u = x$, $dv = \cos(nx)$.

– Cálculo de b_n:
Se integrará la expresión por partes: $u = x$, $dv = \mathrm{sen}(nx)$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}(nx)\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,\mathrm{sen}(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x\cos(nx)}{n} + \frac{\mathrm{sen}(nx)}{n^2}\right]_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\pi\cos(n\pi)}{n} - \frac{\pi\cos(-n\pi)}{n}\right] = -\frac{2}{n}\cos(n\pi) = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$$

De esta manera, la serie obtenida para la función es:

$$x \approx 2\left[\operatorname{sen}(x) - \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2} + \frac{\operatorname{sen}(3x)}{3} - \ldots\right]$$

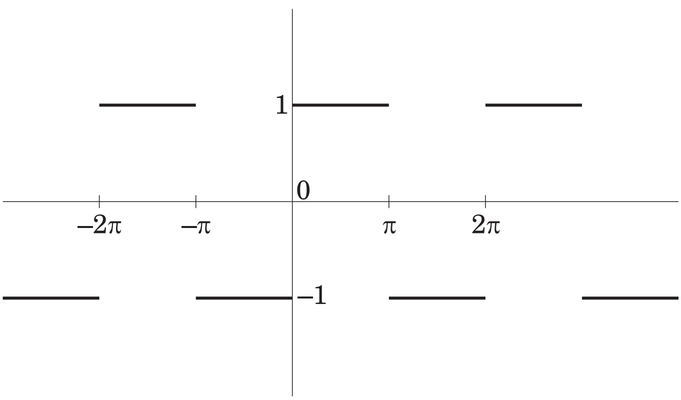
Observación

Como puede apreciarse en el dibujo, la función a desarrollar es impar con lo que los coeficientes a_n han resultado nulos y el desarrollo sólo en términos de senos.

---

2 Calcular la serie de Fourier, estudiando su convergencia, asociada a la función:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi \le x \le 0 \\ 1 & 0 < x < \pi \end{cases}$$



Determinaremos los coeficientes de Fourier. Se toma la función periódica de periodo $p = 2\pi$. Con ello:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -1\,dx + \int_{0}^{\pi} 1\,dx\right] = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -1\cos(nx)\,dx + \int_{0}^{\pi} 1\cos(nx)\,dx\right] = 0$$

Este resultado ya era conocido si se observa que la función es impar.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)\,dx =$$

$$= \frac{1}{n}\left[\int_{-\pi}^{0} -1\operatorname{sen}(nx)\,dx + \int_{0}^{\pi} 1\operatorname{sen}(nx)\,dx\right] =$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left[1-\cos(n\pi)\right] = \frac{2}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right] = \begin{cases} \dfrac{4}{n\pi} & \text{si } n \text{ es impar} \\ 0 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

De esta forma el desarrollo de $f(x)$ queda:

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(nx) + b_n\operatorname{sen}(nx)\right]$$

$$f(x) \approx \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}\operatorname{sen}(nx)$$

Para el estudio de la convergencia se debe observar que la función es continua a trozos, por ello pueden aparecer problemas en los puntos de discontinuidad : $-\pi$, π.

El teorema de convergencia afirma que en estos puntos la serie converge al valor:

$$\frac{1}{2}\left[f(x^+) + f(x^-)\right]$$

Esto se traduce en este caso:

a) La serie en $-\pi$ converge a:

$$\frac{f(-\pi^+) + f(-\pi^-)}{2} = \frac{-1+1}{2} = 0$$

b) En π:

$$\frac{f(\pi^+) + f(\pi^-)}{2} = \frac{(-1)+1}{2} = 0$$

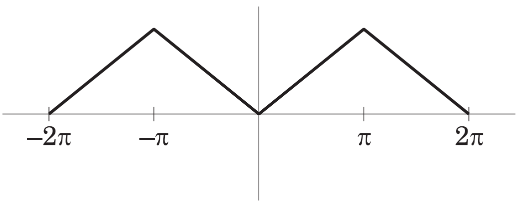
Los valores hacia los que converge la serie no coinciden con la definición de la función en estos puntos. De esta forma, existe convergencia de la serie a la función en todo punto excepto en los puntos de discontinuidad. En este caso lo correcto es expresar el desarrollo como una aproximación y no como una igualdad.

$$f(x) \approx \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n} \operatorname{sen}(nx)$$

---

3 Desarrollar la función $f(x) = x$, $0 \leq x \leq \pi$ en términos de cosenos.

Lo primero que se debe hacer es extender esta función de manera par (simétrica respecto del eje OY). Para ello la consideraremos periódica de $p = 2\pi$ y la redefiniremos a lo largo de un periodo de forma par:



Sabemos entonces que la función $f(x)$ así definida se desarrolla en términos de cosenos:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$$

ya que son nulos los b_n. Calculamos los coeficientes no nulos como:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x\, dx = \pi$$

por ser $f(x)$ par en $[-\pi, \pi]$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(nx)\, dx =$$

$$= \frac{2}{\pi n^2} \left[\cos(n\pi) - 1\right] = \frac{2}{\pi n^2} \left[(-1)^n - 1\right]$$

(donde se ha integrado por partes)

De esta forma el desarrollo de Fourier de cosenos para esta función es:

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\cos(x) + \frac{\cos(3x)}{3^2} + \frac{\cos(5x)}{5^2} + \ldots\right]$$

Señalar que, al ser la función continua en todo punto, existe convergencia de la serie a la función para todo valor de x.

---

4 Desarrollar en serie de Fourier, estudiando la convergencia de la misma, la función:

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -2 < x < 0 \\ 1 & \text{si } \quad 0 < x < 2 \end{cases}}$$

Trabajamos con una función que consideraremos de periodo $p = 4$ $(L = 2)$. Su desarrollo en serie será de la forma:

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(n\frac{\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(n\frac{\pi x}{L}\right)\right]$$

siendo:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{2} 1\,dx\right] = 1$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} 0\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2} 1\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} 0\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2} 1\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left[1 - (-1)^n\right] = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ \dfrac{2}{n\pi} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

de esta manera el desarrollo de Fourier es:

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n\ \text{impar}}\frac{1}{n}\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

Observación
Es interesante destacar que en este caso el desarrollo de Fourier ha quedado en términos de senos y sin embargo la función a desarrollar no es impar. El teorema establecido en el tratamiento de funciones pares e impares se aplica en el sentido enunciado, en el otro caso no se puede asegurar nada, es decir existen funciones de desarrollos en términos sólo de senos o cosenos sin ser impares o pares.

En cuanto a la convergencia, sabemos que en los puntos de discontinuidad $(x = 0, \pm 2, \pm 4, ...)$ la serie converge al valor promedio de la función:

$$\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}=\frac{1+0}{2}=\frac{1}{2}$$

Como en estos puntos $f(x)$ no está definida, redefiniendo la función en la forma:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } -2<x<0 \\ 1 & \text{si } \ 0<x<2 \\ 1/2 & \text{si } \ x=-2,\,0,\,2 \end{cases}$$

tendremos convergencia en todo punto, Así:

$$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n\ \text{impar}}\frac{1}{n}\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

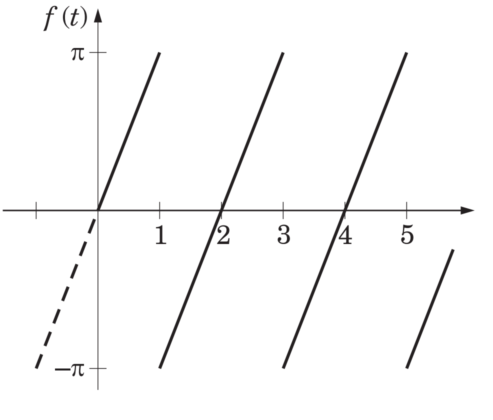
---

5 **La siguiente ecuación diferencial modeliza un sistema mecánico no amortiguado con un resorte:**

$$\frac{1}{16}x''(t)+4x(t)=f(t)$$

donde $f(t)$ representa la fuerza externa de periodo 2 que impulsa la masa. La gráfica de $f(t)$ viene dada en la figura habiéndose prolongado de forma impar hacia la parte negativa del tiempo t.

Encontrar la solución particular de este problema.



El primer paso es encontrar el desarrollo en serie de Fourier de la función $f(t)$. Teniendo en cuenta que se trata de un desarrollo en términos de senos, como puede comprobarse siguiendo los pasos del cálculo de los coeficientes de Fourier, éste resulta:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen}(n\pi t)$$

La ecuación diferencial a resolver es:

$$\frac{1}{16} x''(t) + 4x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen}(n\pi t)$$

Se desarrolla la función incógnita en términos de Fourier del mismo tipo que la $f(t)$, es decir:

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(n\pi t)$$

lo que sustituyendo en la ecuación:

$$\frac{1}{16} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(-\operatorname{sen}(n\pi t)\right) n^2\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(n\pi t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen}(n\pi t)$$

Para llegar a la solución pedida, igualamos los coeficientes de $\operatorname{sen}(n\pi t)$ que permiten conocer los b_n y con ello la función $x(t)$:

$$\left(-\frac{1}{16} n^2\pi^2 + 4\right) b_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}, \qquad \text{es decir :} \qquad b_n = \frac{32(-1)^{n+1}}{n(64 - n^2\pi^2)}$$

Con ello, la solución es:

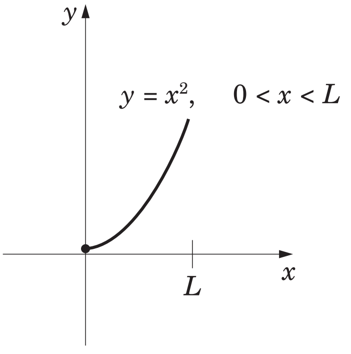
$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{32(-1)^{n+1}}{n(64 - n^2\pi^2)} \operatorname{sen}(n\pi t)$$

---

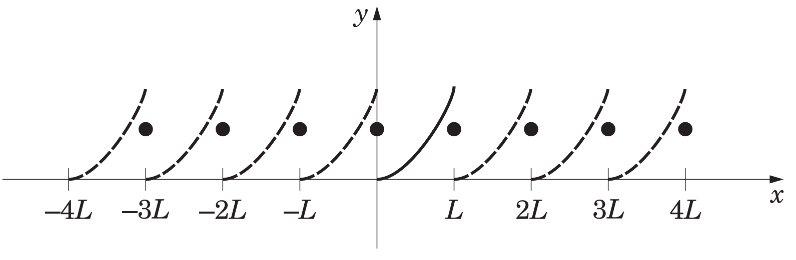
6 Desarrollar $f(x) = x^2$, $0 < x < L$.

a) Tal y como se ha definido, con periodo L.
b) En una serie de cosenos prolongándola adecuadamente.
c) En una serie de senos prolongándola adecuadamente.

En la figura se ve la gráfica de la función:



a) En este caso se quiere hacer el desarrollo de la función representada en la gráfica siguiente:



Calculamos los coeficientes de Fourier:

$$a_0 = \frac{1}{L/2}\int_0^L x^2\,dx = \frac{2}{3}L^2$$

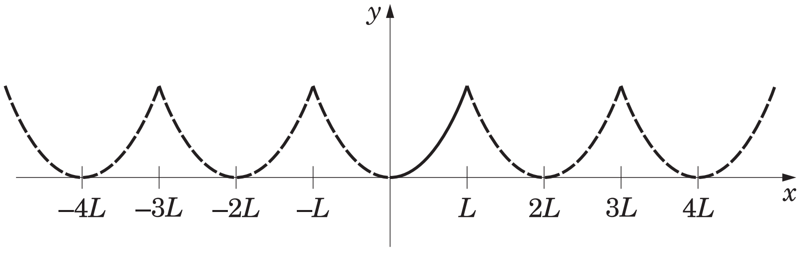
$$a_n = \frac{1}{L/2}\int_0^L x^2\cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)dx = \frac{L^2}{n^2\pi^2}$$

$$b_n = \frac{1}{L/2}\int_0^L x^2\,\mathrm{sen}\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)dx = \frac{L^2}{n\pi}$$

La serie de Fourier queda:

$$f(x) = \frac{L^2}{3} + \frac{L^2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n^2\pi}\cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) + \frac{1}{n}\,\mathrm{sen}\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)\right]$$

b) Para este apartado se necesita una prolongación par de la función:
Se trabaja con la función de la figura:



Calculamos los coeficientes de Fourier:

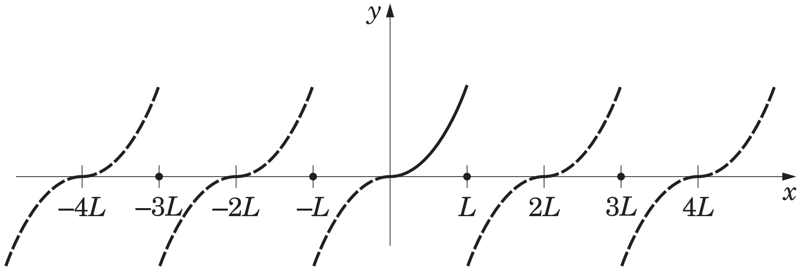
$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L x^2\,dx = \frac{2}{3}L^2$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L x^2 \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{4L^2(-1)^n}{n^2\pi^2}$$

Integración que se realiza por partes.
Los b_n son nulos en este caso, como ya sabíamos, al ser una función par.
Con ello el desarrollo de Fourier resulta:

$$f(x) = \frac{L^2}{3} + \frac{4L^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

c) Para este apartado se necesita una prolongación impar de la función:
Se trabaja con la función de la figura:



Calculamos los coeficientes de Fourier:
Para este apartado resultan nulos los coeficientes a_0 y a_n.

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{2L^2(-1)^{n+1}}{n\pi} + \frac{4L^2\left[(-1)^n - 1\right]}{n^2\pi^3}$$

Integración que se realiza por partes.

Por consiguiente:

$$f(x) = \frac{2L^2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{2\left[(-1)^n - 1\right]}{n^2 \pi^2} \right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L} \right)$$

Problemas propuestos

1 Obtener el desarrollo de Fourier de la función periódica $f(x)$ definida a lo largo del periodo $[-\pi, \pi]$ como:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ \operatorname{sen} x & 0 < x < \pi \end{cases}$$

Representar la gráfica de la función a desarrollar.

2 Obtener el desarrollo de Fourier de la intensidad de un circuito de doble onda siendo:

$$I(x) = |\operatorname{sen} x|$$

3 Determinar la serie de Fourier de la función de periodo 2π definida como:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ x & 0 < x < \pi \\ \dfrac{\pi}{2} & x = \pi, -\pi \end{cases}$$

4 Sea la función $f(x) = 2x$, $0 \leq x \leq \pi$. Se pide:

a) Calcular su desarrollo en serie de Fourier de senos extendiéndola adecuadamente.
b) Calcular su desarrollo en serie de Fourier de cosenos extendiéndola adecuadamente.
c) Calcular su desarrollo en serie de Fourier considerándola periódica de periodo π.

Dibujar en cada caso la función desarrollada.

5 La carga de un condensador presenta un crecimiento exponencial:

$$q(x) = e^x, \qquad 0 \leq x \leq 2$$

Obtener el desarrollo en serie de Fourier de senos de la función $q(x)$.

6 En la construcción en serie de pequeñas ruedas dentadas para relojes de cuerda, se ha observado en las pruebas efectuadas por la oficina técnica que las ruedas se salen de tolerancia, por lo que tienen que ser desechadas. Estudiando el problema se dieron cuenta de que la causa de estas ruedas defectuosas son las vibraciones provocadas por el paso del metro por debajo del taller. Se quiere obtener el desarrollo de Fourier de la vibración $f(x)$, para diseñar unas ventosas especiales y colocarlas en las patas de las máquinas y así evitar dicha vibración y sus armónicos.

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{para } 0 < x \leq 1 \\ 2 - x & \text{para } 1 < x < 2 \end{cases}$$

¿Converge la serie a la función?

7 Obtener desarrollos de Fourier para la función $y = x^3 + 1$ definida en el intervalo $0 < x < 2$, en términos de:

a) Senos
b) Cosenos

Prolongando adecuadamente la función. Indicar hacia que valores convergen los desarrollos en los puntos $x = -2$, $x = 0$, $x = 2$, $x = 3$.

8 Usando el desarrollo en serie de Fourier, encontrar la solución particular de:

a) $y''(x) + 4y'(x) + y = f(x)$ donde $f(x)$ es una función periódica con periodo 2π y con representación de Fourier:

$$f(x) = 3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2} \operatorname{sen}(nx)$$

b)

$$y''(x) + y = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \cos(nx)$$

BIBLIOGRAFÍA

AYRES, F.: *Ecuaciones Diferenciales*. Editorial McGraw Hill. España. 1991.

EDWARDS, CH.; PNNEY, D. E.: *Ecuaciones Diferenciales elementales*. Editorial Prentice Hall. España. 1993.

FERNÁNDEZ, C.; VÁZQUEZ, F. J.; VEGAS, J. M.: *Ecuaciones Diferenciales y n Diferencias. Sistemas Dinámicos*. Editorial Thomson. España. 2003.

FRAILE, V.: *Ecuaciones diferenciales*. Editorial Tébar Flores. 1991.

KISELIOV, A.; KRASNOV, M.; MAKARENKO, G.: *Problemas de ecuaciones diferenciales*. Editorial Mir. 1988.

LAMBE, C.: *Ecuaciones diferenciales para ingenieros y científicos*. Editorial Uteha. 1964.

MARCELLÁN, F.; CASASÚS, L.; ZARZO, A.: *Ecuaciones diferenciales. Problemas lineales y aplicaciones*. Editorial Mc Graw Hill. 1991.

MARTÍNEZ, E.: *Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Integral*. Servicio editorial de la Universidad del País Vasco. 1996.

NAGLE, R. K.; SAFF, E. B.: *Fundamentos de Ecuaciones Diferenciales*. Editorial Addison-Wesley. Iberoamericana. España. 1992.

NAGLE, R. K.: SAFF, E. B.; SNIDER, A.: *Ecuaciones Diferenciales y problemas con valores en la frontera*. Editorial Pearson Educación. España. 2001.

NOVO, S.; OBAYA, R.; ROJO, J.: *Ecuaciones y sistemas diferenciales*. Editorial Mc Graw Hill. 1996.

RODRIGO, F.; RODROGO, F.: *Problemas de Matemáticas para Científicos y Técnicos*. Editorial Tébar. España 1998.

ROSS, S. L.: *Ecuaciones Diferenciales*. Editorial Reverté. 1992.

SIMMONS, G. F.: *Ecuaciones diferenciales con apliaciones y notas históricas*. Editorial Mc Graw Hill. 1993.

STEPHEN, L.; HABERMAN, R.: *Introducción a las ecuaciones diferenciales con problemas de valor de frontera*. Editorial Mc Graw Hill. 1998.

ZILL, DENIS G.: *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones. Primer curso.* Editorial Wadsworth Internacional / Iberoamérica. 1982.

Las ecuaciones diferenciales son muy utilizadas en todos los ramos de la ingeniería, y son básicas para estudiar muchos fenómenos físicos.

Una ecuación diferencial es una ecuación en la que intervienen derivadas de una o más funciones, siendo las ecuaciones diferenciales ordinarias las que contienen derivadas respecto a una sola variable independiente.

La resolución de ecuaciones diferenciales se puede llevar a cabo bien utilizando un método específico para la ecuación diferencial analizada o bien mediante una transformada, como podría ser la transformada de *Laplace*.

Este libro ofrece a docentes y estudiantes de escuelas técnicas un curso básico de ecuaciones diferenciales ordinarias con problemas resueltos de nivel universitario.

ISBN 978-84-7360-269-3

Tébar