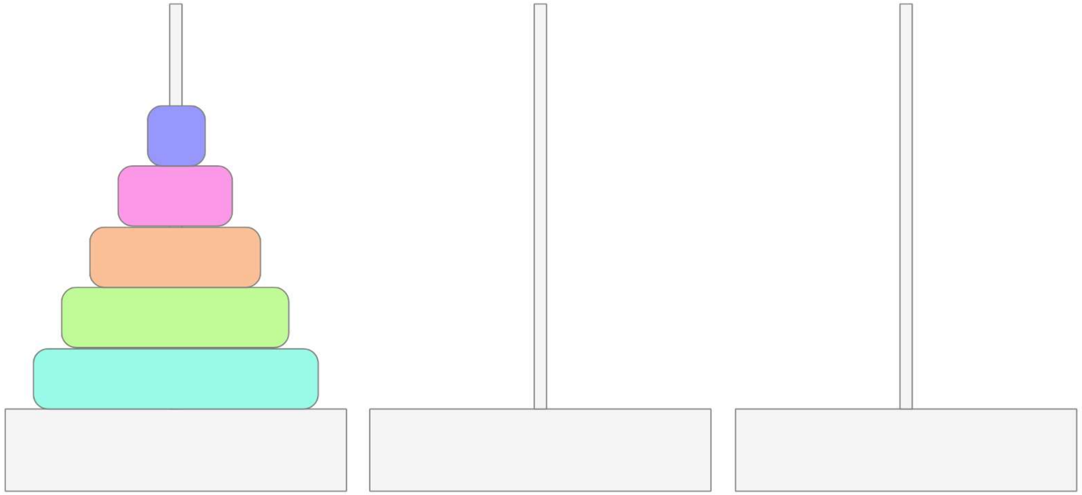
ANÁLISIS DE ALGORITMOS
(CONTINUACIÓN)

Programación 3
Javier Miranda

Escuela de Ingeniería Informática
Universidad de Las Palmas de Gran Canaria

¿ Cómo analizamos algoritmos recursivos ?

```
def TowerOfHanoi(n, src, dest):
    if n==1:
        MoveDisk (1, src, dest)
    else:
        TowerOfHanoi(n-1, src, 6-src-dest)
        MoveDisk (1, src, dest)
        TowerOfHanoi(n-1, 6-src-dest, dest)
```



http://towersofhanoi.info/Animate.aspx

Paso 1: Obtenemos la recurrencia

```
def TowerOfHanoi(n, src, dest):                              t_n
    if n==1:
        MoveDisk (1, src, dest)                              1
    else:
        TowerOfHanoi(n-1, src, 6-src-dest)                   t_n-1
        MoveDisk (1, src, dest)                              1
        TowerOfHanoi(n-1, 6-src-dest, dest)                  t_n-1
```

1. Establecemos el tamaño del ejemplar dependiendo de los parámetros del algoritmo
2. Añadimos el coste de las llamadas recursivas
3. Añadimos el coste de ejecución de la parte iterativa
4. Identificamos los casos base

¿ Recurrencia ?

$$\begin{aligned} t_n &= 2t_{n-1} + 1 \quad n > 1 \\ t_1 &= 1 \end{aligned}$$

Paso 2: Resolvemos la recurrencia

$$\begin{aligned} t_n &= 2t_{n-1} + 1 \quad n > 1 \\ t_1 &= 1 \end{aligned}$$

1. Método de sustitución (*forward / backward*)

2. Método maestro (*master method*)

   Sólo para recurrencias de divide y vencerás (o reduce y vencerás)

3. Utilizando una herramienta de resolución de recurrencias (*solver*)

2.1 Método de sustitución (forward)

$$t_n = 2t_{n-1} + 1 \quad n > 1$$
$$t_1 = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} t_1 = 1 \\ t_2 = 2*t_1 + 1 = 2*1 + 1 = 3 \\ t_3 = 2*t_2 + 1 = 2*3 + 1 = 7 \\ t_4 = 2*t_3 + 1 = 2*7 + 1 = 15 \\ \ldots \end{array}\right\} \quad t_n = 2^n - 1$$

$\in$ **O (2^n)**

2. Solución mediante el método maestro

$$T(n) \leq a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + O(n^d).$$

Número de llamadas recursivas

Número de divisiones

Coste de la fase de combinación

$$T(n) = \begin{cases} O(n^d \log n) & \textit{if } a = b^d \\ O(n^d) & \textit{if } a < b^d \\ O(n^{\log_b a}) & \textit{if } a > b^d \end{cases}$$

Caso 1

Caso 2

Caso 3

Sólo para recurrencias de problemas resueltos mediante divide y vencerás (o reduce y vencerás)

3. Solución mediante un solver

$$t_n = 2t_{n-1} + 1 \quad n > 1$$
$$t_1 = 1$$

WolframAlpha computational intelligence.

t(1)=1, t(n)=2*t(n-1) + 1

Browse Examples

Input:

$t(1) = 1 \quad | \quad t(n) = 2\,t(n-1) + 1$

Alternate form:

$\{t(1) = 1,\ t(n) = 5\,t(n-1) + 1\}$

Recurrence equation solution:

$\boxed{t(n) = 2^n - 1}$

https://www.wolframalpha.com/examples/mathematics/discrete-mathematics/recurrences/

3. Solución mediante un solver

PURRS: The Parma University's Recurrence Relation Solver

x(n) = 2*x(n-1) + 1

Initial conditions: x(1)=1

Solve or approximate! Clear Verify the solution

This is computed on an AMD processor running GNU/Linux.

Exact solution for x(n) = 1+2*x(-1+n) for the initial conditions x(1) = 1

x(n) = -1+2^n
for each n >= 1

http://www.cs.unipr.it/purrs/

Ejemplos

Algoritmos Iterativos

- Búsqueda binaria
- Mochila 0/1 (*Greedy*)

→ • Mochila 0/1 (*Programación Dinámica: Tabulation*)

- Algoritmos Recursivos
- Búsqueda binaria
- Merge Sort
- Quick Sort

1. Definir N
2. Casos de estudio
3. Reglas de análisis

Programación Dinámica: Tabulation Mochila 0/1

```
# Fase 1 del algoritmo: Rellenar la tabla

for w = 0 to W                  <------ O(w)
    V[0,w] = 0

for i = 1 to n                  <------ O(n)
    V[i,0] = 0

for i = 1 to n                  <------ O(n * w)
    for w = 0 to W
        if w_i <= w             <------------------ Operación crítica
            if b_i + V[i-1,w-w_i] > V[i-1,w]
                V[i,w] = b_i + V[i-1,w- w_i]
            else
                V[i,w] = V[i-1,w]
        else
            V[i,w] = V[i-1,w]
```

$$O\ (\boldsymbol{n}\ *\boldsymbol{w})$$

n\W	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	3	3	3	3
2	0	0	3	4	4	7
3	0	0	3	4	5	7
4	0	0	3	4	5	<u>7</u>

Programación Dinámica: Tabulation Mochila 0/1

1. Definir N
2. Casos de estudio
3. Reglas de análisis

```
# Fase 1 del algoritmo: Rellenar la tabla

for w = 0 to W
    V[0,w] = 0

for i = 1 to n
    V[i,0] = 0

for i = 1 to n
    for w = 0 to W
        if w_i <= w
            if b_i + V[i-1,w-w_i] > V[i-1,w]
                V[i,w] = b_i + V[i-1,w- w_i]
            else
                V[i,w] = V[i-1,w]
        else
            V[i,w] = V[i-1,w]
```

$O\ (n\ *w)$

```
# Fase 2 del algoritmo: Utilizando el contenido
# de la tabla identificar los items elegidos

i=n , k=W

while ...
    if V[i,k] ≠ V[i–1,k] then
            // El ith elemento está en la mochila
        i = i–1, k = k-w_i
    else
            //  El ith elemento no está en la mochila
        i = i–1
```

$O\ (n)$

n\W	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	3	3	3	3
2	0	0	3	4	4	7
3	0	0	3	4	5	7
4	0	0	3	4	5	<u>7</u>

$\boxed{O\ (n\ *w)}$

Ejemplos

<u>Algoritmos Iterativos</u>

→ • Búsqueda binaria

• Mochila 0/1 *(Greedy)*

• Mochila 0/1 *(Programación Dinámica: Tabulation)*

• <u>Algoritmos Recursivos</u>

→ • Búsqueda binaria

• Merge Sort

• Quick Sort

Búsqueda Binaria *(iterativa)*

```
def binary_search(arr, x):
    low  = 0
    high = len(arr) - 1
    mid  = 0

    while low <= high:
        mid = (high + low) // 2  # Integer Floor Division

        if arr[mid] < x:
            low = mid + 1

        elif arr[mid] > x:
            high = mid - 1

        else:
            return mid

    return -1
```

O(log n)

Operación crítica

$\in$ O (log n)

Búsqueda Binaria *(recursiva)*

```
binSearch (a, left, right, value) {
    if (right < left) return Not_Found
    mid = (left + right) / 2

   if a[mid] > value
      return binSearch (a, left, mid-1, value)
   elsif a[mid] < value
      return binSearch (a, mid+1, right, value)
   else
      return mid
```

a = número de llamadas recursivas (en cada division)

b = factor de reducción de la entrada (fase de división)

d = coste de la fase de combinación

a = 1; b = 2; d=0 → $a = b^d$

$$T(n) \leq a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + O(n^d).$$

$$T(n) = \begin{cases} O(n^d \log n) & \mathit{if}\ a = b^d \\ O(n^d) & \mathit{if}\ a < b^d \\ O(n^{\log_b a}) & \mathit{if}\ a > b^d \end{cases}$$

Caso 1 → $\boxed{O\ (\log n)}$

Merge Sort

```
MergeSort (a, left, right) {
    if (left < right) {
        mid = divide (a, left, right)
        MergeSort (a, left, mid-1)
        MergeSort (a, mid+1, right)
        merge(a, left, mid+1, right)
    }
}
```

Pseudocode for Merge:

C = output [length = n]
A = 1st sorted array [n/2]
B = 2nd sorted array [n/2]
i = 1
j = 1

```
for k = 1 to n
        if A(i) < B(j)
                C(k) = A(i)
                i++
        else [B(j) < A(i)]
                C(k) = B(j)
                j++
end
```

(ignores end cases)

O(n)

Merge Sort

```
MergeSort (a, left, right) {
    if (left < right) {
        mid = divide (a, left, right)
        MergeSort (a, left, mid-1)
        MergeSort (a, mid+1, right)
        merge(a, left, mid+1, right)
    }
}
```

$O(n)$

$$T(n) \le a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + O(n^d).$$

Merge Sort

```
MergeSort (a, left, right) {
    if (left < right) {
       mid = divide (a, left, right)
       MergeSort (a, left, mid-1)
       MergeSort (a, mid+1, right)
       merge(a, left, mid+1, right)  ← O(n)
    }
}
```

a = número de llamadas recursivas (en cada division)
b = factor de reducción de la entrada (fase de división)
d = coste de la fase de combinación

a = 2; b = 2 ; d=1 → $a = b^d$

$$T(n) \leq a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + O(n^d).$$

$$T(n) = \begin{cases} O(n^d \log n) & \textit{if } a = b^d \\ O(n^d) & \textit{if } a < b^d \\ O(n^{\log_b a}) & \textit{if } a > b^d \end{cases}$$

Caso 1 → $\boxed{O\ (n \log n)}$

QuickSort: Mejor caso

Analizamos dos casos: mejor caso y peor caso

`QuickSort` `(a, left, right)`	t_n
`if` `(left < right)`	1
`pivot = Partition (a, left, right)`	n
`Quicksort (a, left, pivot-1)`	$t_{n/2}$
`Quicksort (a, pivot+1, right)`	$t_{n/2}$

<u>Mejor Caso</u>

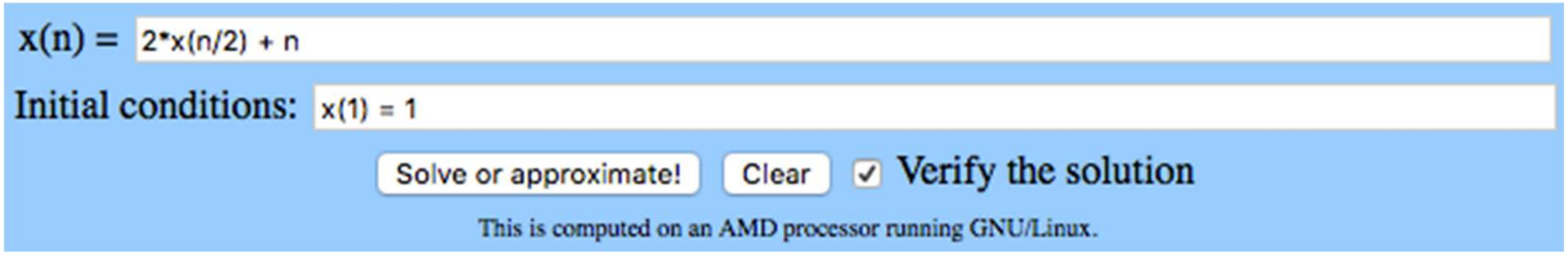
$$t_n = n + 2t_{n/2}$$

$$t_0 = t_1 = 1$$

QuickSort: Mejor caso

$$t_n = n + 2t_{n/2}$$
$$t_0 = t_1 = 1$$

Utilizando el solver de recurrencias: http://www.cs.unipr.it/purrs/



x(n) >= 2-3/2*n+n*log(n)*log(2)^(-1)
x(n) <= n+n*log(n)*log(2)^(-1)
for each n >= 1

$\in$ **O(n log n)**

QuickSort: Peor caso

```
QuickSort (a, left, right)
  if (left < right)
     pivot = Partition (a, left, right)
     Quicksort (a, left, pivot-1)
     Quicksort (a, pivot+1, right)
```

t_n

1

n

t_{n-1}

<u>Peor Caso</u>

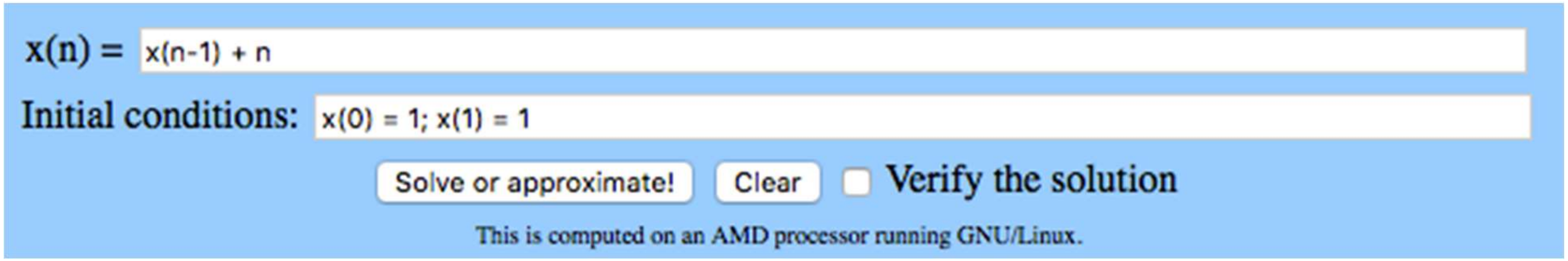
$$t_n = n + t_{n-1}$$

$$t_0 = t_1 = 1$$

QuickSort: Peor caso

$$t_n = n + t_{n-1}$$
$$t_0 = t_1 = 1$$

Utilizando el solver de recurrencias: http://www.cs.unipr.it/purrs/



x(n) = 1/2*n^2+1/2*n
for each n >= 1

$\in$ **O(n^2)**

Ejemplos

Algoritmos Iterativos

- Búsqueda binaria
- → Mochila 0/1 *(Greedy)*
- Mochila 0/1 *(Programación Dinámica: Tabulation)*

- Algoritmos Recursivos
- Búsqueda binaria
- Merge Sort
- Quick Sort

Knapsack 0/1 (Greedy)

<u>Algoritmo Base</u>

Paso 1: Ordenar los N elementos

Knapsack 0/1 (Greedy)

<u>Algoritmo Base</u>

Paso 1: Ordenar los N elementos — **O (?)**

Paso 2: Recorrer los elementos ordenados hasta llenar al máximo posible la mochila — **O (n)**

<u>Método de Ordenación</u>

- Burbuja ……… ???
- Selección …… ???
- Inserción ……. ???
- Merge Sort ………. O(n*log n)
- Quick Sort ………. O(n*log n),   O(n^2)

Ordenación por Burbuja

Análisis Asintótico del número de comparaciones

```
n = len(arr)

# Traverse through all array elements
for i in range(n):

    # Last i elements are already in place
    for j in range(0, n-i-1):

        # traverse the array from 0 to n-i-1
        # Swap if the element found is greater
        # than the next element
        if arr[j] > arr[j+1] :
            arr[j], arr[j+1] = arr[j+1], arr[j]
```

Operación crítica

https://www.geeksforgeeks.org/bubble-sort/

Comparaciones

Mejor Caso: $\in$ **O(n^2)**

Peor Caso: $\in$ **O(n^2)**

Ordenación por Burbuja (v2)

Análisis Asintótico del número de comparaciones

```
n = len(arr)

# Traverse through all array elements
for i in range(n):
    swapped = False

    # Last i elements are already
    #  in place
    for j in range(0, n-i-1):

        # traverse the array from 0 to
        # n-i-1. Swap if the element
        # found is greater than the
        # next element
        if arr[j] > arr[j+1] :
            arr[j], arr[j+1] = arr[j+1], arr[j]
            swapped = True

    # IF no two elements were swapped
    # by inner loop, then break
    if swapped == False:
        break
```

Versión optimizada

Operación crítica

Comparaciones

Mejor Caso: $\in$ **O(n)**

Peor Caso: $\in$ **O(n^2)**

Ordenación por Selección

Análisis Asintótico del número de comparaciones

```
# Traverse through all array elements
for i in range(len(A)):

    # Find the minimum element in remaining
    # unsorted array
    min_idx = i
    for j in range(i+1, len(A)):
        if A[min_idx] > A[j]:
            min_idx = j

    # Swap the found minimum element with
    # the first element
    A[i], A[min_idx] = A[min_idx], A[i]
```

Operación crítica

Comparaciones

Mejor Caso: $\in$ **O(n²)**

Peor Caso: $\in$ **O(n²)**

https://www.geeksforgeeks.org/selection-sort/

Knapsack 0/1 (Greedy)

<u>Algoritmo Base</u>

Paso 1: Ordenar los N elementos } **O (??)**

Paso 2: Recorrer los elementos ordenados hasta llenar al máximo posible la mochila } **O (n)**

<u>Método de Ordenación</u>

- Burbuja .... $O(n^2)$
- Selección .... $O(n^2)$
- Inserción .... $O(n^2)$
- Merge Sort .... $O(n*\log n)$
- Quick Sort .... $O(n*\log n)$, $O(n^2)$

Knapsack 0/1 (Greedy)

<u>Algoritmo Base</u>

Paso 1: Ordenar los N elementos } **O (n*log n)**

Paso 2: Recorrer los elementos ordenados hasta llenar al máximo posible la mochila } **O (n)**

O (n*log n)

<u>Método de Ordenación</u>

- Burbuja
- Selección
- Inserción
- Merge Sort
- Quick Sort

O(n*log n)