Código asignatura	Nombre asignatura
68031029	**Cálculo (I. Mecánica)**
Fecha alta y origen	Convocatoria
21/09/2015 Equipo Docente	Febrero 2015 (1ª Semana – Tipo A)

E.T.S. INGENIEROS INDUSTRIALES. U.N.E.D.
GRADO EN INGENIERÍA MECÁNICA.
CÁLCULO. CÓDIGO: 68031029. Febrero 2015. Modelo A

PREGUNTAS CORTAS

1. (1 PUNTO) Calcúlese el límite, cuando n tiende a ∞, de la sucesión de término general

$$a_n = \frac{\sqrt{16n^4 - 4}}{n\sqrt{4n^2 + 5}}.$$

Solución: Se resuelve sacando factor común a la mayor de las potencias de cada radicando y simplificando:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{16n^4 - 4}}{n\sqrt{4n^2 + 5}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\sqrt{16 - \frac{4}{n^4}}}{n^2\sqrt{4 + \frac{5}{n^2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{16 - \frac{4}{n^4}}}{\sqrt{4 + \frac{5}{n^2}}} = \frac{4}{2} = 2.$$

2. (1 PUNTO) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \ln\left((ex)^2 + 1\right)$. Demúestrese, sin encontrarlo, que existe un punto $x_0 \in (0, 1)$ tal que $f(x_0) = 1$.

Nota: Utilícese el teorema de los valores intermedios.

Solución: Se utiliza el teorema de los valores intermedios: f es continua (al ser composición y producto de funciones continuas) y además:

$$f(0) = \ln(0 + 1) = 0, \quad f(1) = \ln\left(e^2 + 1\right) \approx 2{,}126\,9.$$

Entonces, el teorema de los valores intermedios dice para cualquier número entre $f(0)$ y $f(1)$ que existe un punto x_0 tal que

$$1 = f(0) < f(x_0) < f(1) \approx 2{,}126\,9.$$

En particular, existe un número x_0 con $f(x_0) = 1$.

3. (1 PUNTO) Sabiendo que $\ln x$ es el logaritmo neperiano de x, calcúlese el siguiente límite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} \ln x.$$

Solución: Como

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} \ln x = \frac{\infty}{\infty}$$

y las funciones son derivables, aplicamos la regla de L'Hôpital. Hacemos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} \ln x = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x^2} = 0.$$

4. (1 PUNTO) Sea $f(x, y) = y \cos x^2$. Determínese su matriz Hessiana.

Solución: Tenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -2xy\text{sen}\, x^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \cos x^2,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -2y\text{sen}\, x^2 - 4x^2 y \cos x^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = -2x\text{sen}\, x^2.$$

Entonces la matriz Hessiana es

$$\begin{pmatrix} -2y\text{sen}\, x^2 - 4x^2 y \cos x^2 & -2x\text{sen}\, x^2 \\ -2x\text{sen}\, x^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

EJERCICIOS

5. (3 PUNTOS)

   a) Calcúlese por aproximación la integral

   $$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \cos x} dx$$

   aplicando la regla de Simpson con 3 nodos igualmente espaciados.

   b) Sabiendo que el valor exacto es $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$, compárese el resultado obtenido con este valor. Explíquese a qué se debe esta diferencia.

   c) Razónese cómo se podía haber mejorado el resultado utilizando también la regla de Simpson.

Nota: La puntuación de cada uno de los apartados es 1 punto.

Solución:

a) Tenemos que aplicar al fórmula de Simpson, que se basa en la interpolación en tres puntos igualmente espaciados a, x_1, b

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx (b - a) \frac{f(a) + 4f(x_1) + f(b)}{6}$$

En este caso, los nodos son $a = 0, x_1 = \pi, b = 2\pi$ y en estos puntos, se verifica

$$f(0) = \frac{1}{2 + \cos 0} = \frac{1}{2 + 1} = \frac{1}{3} \qquad f(\pi) = \frac{1}{2 + \cos \pi} = \frac{1}{2 - 1} = 1$$
$$f(\pi) = \frac{1}{2 + \cos 2\pi} = \frac{1}{2 + 1} = \frac{1}{3}$$

por lo que la integral aproximada es

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \cos x}\, dx \approx (2\pi - 0) \frac{f(0) + 4f(\pi) + f(2\pi)}{6}$$
$$= (2\pi - 0) \frac{\frac{1}{3} + 4 \cdot 1 + \frac{1}{3}}{6} = 2\pi \frac{\frac{14}{3}}{6} = \frac{14\pi}{9} \approx 4{,}8869$$

b) Como el valor exacto es $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi \approx 3{,}6276$, la aproximación que se ha obtenido no es buena. Se debe a que los subintervalos considerados son demasiado grandes. En el denominador aparece un coseno, que es una función que tiene tres extremos relativos en el intervalo que hemos considerado. De la misma forma, el función integrando va a tener tres extremos relativos. Pero, sin embargo, la estamos aproximando por una parábola, que sólo tiene uno.

c) El resultado se puede mejorar si aplicamos la regla de Simpson compuesta, es decir, considerando varios subintervalos. En este caso, deberíamos haber considerado, al menos 7 nodos.

6. (3 PUNTOS) Calcúlese en qué puntos se pueden alcanzar los extremos relativos de la función

$$f(x,y) = x^2 + y,$$

si los puntos (x,y) cumplen $2x - y = 0$.

Solución: Aplicamos el método de los multiplicadores de Lagrange, y construimos la función auxiliar

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y) = x^2 + y + \lambda(2x - y),$$

si escribimos la condición como $g(x,y) = 2x - y = 0$. Ahora tenemos que resolver el sistema que nos da $\nabla F(x,y,\lambda) = 0$, que es

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y,\lambda) &= 2x + 2\lambda = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,\lambda) &= 1 - \lambda = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) &= 2x - y = 0. \end{aligned}$$

De la segunda ecuación resulta que $\lambda = 1$, que sustituido en las otras dos ecuaciones implica:

$$\begin{aligned} 2x + 2 &= 0, \\ 2x - y &= 0. \end{aligned}$$

Esto sólo ocurre si $x = -1, y = -2$. Por tanto, el único extremo posible se alcanza en el punto $(-1,-2)$.