ÁLGEBRA

ESCUELA DE INGENIERÍA INFORMÁTICA

Solución de ejercicios

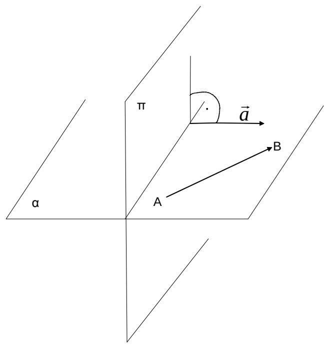
Ejercicios de n^{o}1 al n^{o}11 de Geometría

En el espacio geométrico E_3 con un sistema de referencia rectangular:

1.- Hallar la ecuación paramétrica y general del plano que pasa por los puntos $A(2,1,0)$ y $B(0,1,3)$ y es perpendicular al plano π que tiene por ecuación:

$$\pi \equiv 2x - y + z - 4 = 0$$

SOLUCIÓN



Como contiene a los dos puntos, también contiene al vector que los une, es decir, contiene al vector $\overline{AB} = (-2,0,3)$, por otra parte, tenemos que el vector director de π, por ser perpendicular a él, es paralelo o está contenido en el plano pedido, así:

$$\text{El plano pedido } \alpha \text{ contiene a } \begin{cases} A\,(2,1,0) \\ \overline{AB} = (-2,0,3) \\ \overline{a} = (2,-1,1) \perp \pi \end{cases} \quad \text{por tanto:}$$

$$\text{Ecuación paramétrica de } \alpha \equiv X = A + \lambda\overline{a} + \mu\overline{AB} \Longrightarrow \begin{cases} x = 2 + 2\lambda - 2\mu \\ y = 1 - \lambda \\ z = \lambda + 3\mu \end{cases}$$

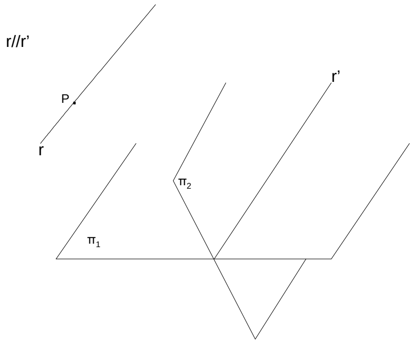
$$\text{Ecuación general} \equiv \begin{vmatrix} \overline{AX} \\ \overline{a} \\ \overline{AB} \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} (x-2) - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} (y-1) + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} z =$$

$$= -3\,(x-2) - 8\,(y-1) - 2z = -3x - 8y - 2z + 14 = 0 \Longrightarrow \alpha \equiv 3x + 8y + 2z - 14 = 0$$

2.- Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(1,0,2)$ y es paralela a los planos $\pi_1 \equiv x-2y+3z+1=0$ y $\pi_2 \equiv 2x-3y+z+6=0$.

SOLUCIÓN



La recta r, que es paralela a los dos planos, es paralela a la recta r' que definen estos, por tanto, $r//r'$ y $r' \equiv \begin{cases} \pi_1 \equiv x-2y+3z+1=0 \\ \pi_2 \equiv 2x-3y+z+6=0 \end{cases}$, por lo que un vector de dirección de r' es también un vector de dirección de r.

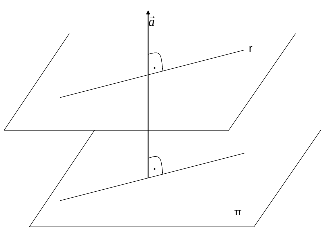
Si $\overline{a}=(1,-2,3)$ y $\overline{b}=(2,-3,1) \Longrightarrow \overline{r}'=\overline{a}\wedge\overline{b}=\begin{vmatrix} \overline{e}_1 & \overline{e}_2 & \overline{e}_3 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}=$

$$=\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}\overline{e}_1-\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\overline{e}_2+\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}\overline{e}_3=7\overline{e}_1+5\overline{e}_2+\overline{e}_3=(7,5,1)\text{ , así, la ecuación es:}$$

$$r\equiv X=P+\lambda\,(7,5,1)\Longrightarrow\begin{cases} x=1+7\lambda \\ y=5\lambda \\ z=2+\lambda \end{cases}\Longrightarrow\frac{x-1}{7}=\frac{y}{5}=\frac{z-2}{1}$$

3.- Comprobar que la recta $r\equiv\frac{x-3}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-7}{-3}$ es paralela al plano $\alpha\equiv 5x+4y+2z+5=0$ y hallar la distancia de la recta al plano.

SOLUCIÓN



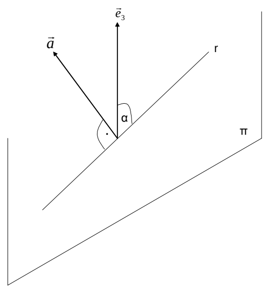
$r//\alpha \Longleftrightarrow \overline{a}\perp\overline{r}\Longleftrightarrow\overline{a}\cdot\overline{r}=0$, donde $\overline{r}$ es un vector de dirección de la recta y $\overline{a}$ es el vector director del plano, como quiera que $\overline{r}=(2,-1,-3)$ y $\overline{a}=(5,4,2)\Longrightarrow\overline{a}\cdot\overline{r}=(2,-1,-3)\cdot(5,4,2)=10-4-6=0\Longrightarrow r//\alpha$, con lo que queda comprobado que la recta y el plano son paralelos.

Como la recta y el plano son paralelos, la distancia de cualquier punto de la recta al plano es siempre la misma, con lo que basta coger un punto de la recta, por ejemplo $P(3,2,7)$ y calcular la distancia al plano α, así:

$$d(r,\alpha) = d(P,\alpha) = \frac{\mid 5\cdot 3 + 4\cdot 2 + 2\cdot 7 + 5 \mid}{\sqrt{25+16+4}} = \frac{42}{\sqrt{45}} = \frac{42}{3\sqrt{5}} = \frac{14\sqrt{5}}{5}$$

4.- Determinar las rectas que están contenidas en el plano $\pi \equiv 2x - 2y - z = 1$, pasan por el punto $P(2,2,-1)$ y forman un ángulo α con el eje OZ, tal que $\cos\alpha = \frac{2}{3}$.

SOLUCIÓN



Tenemos que hallar un vector de dirección de las rectas, que han de cumplir que:

1.- Es perpendicular al vector director del plano, es decir, $\overline{a} \perp \overline{r} \Longleftrightarrow \overline{a}\cdot\overline{r} = 0$, así, si $\overline{r} = (a,b,c)$ y como $\overline{a} = (2,-2,-1) \Longrightarrow \overline{a}\cdot\overline{r} = (a,b,c)\cdot(2,-2,-1) = 2a - 2b - c = 0$.

2.- Que forme un ángulo α con el eje OZ, como quiera que el eje tiene la dirección de $\overline{e}_3 = (0,0,1)$, entonces tenemos que:

$$\cos\alpha = \frac{2}{3} = \cos\left(\widehat{\overline{e}_3,\overline{r}}\right) = \frac{\mid \overline{e}_3\cdot\overline{r} \mid}{\|\overline{e}_3\|\,\|\overline{r}\|} = \frac{\mid (0,0,1)\cdot(a,b,c) \mid}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{\mid c \mid}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{2}{3} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{c^2}{a^2+b^2+c^2} = \frac{4}{9} \Longrightarrow 9c^2 = 4\left(a^2+b^2+c^2\right) \Longrightarrow 4a^2 + 4b^2 - 5c^2 = 0$$

En definitiva tenemos un sistema de 2 ecuaciones con 3 incógnitas, es decir, tenemos 1 grado de libertad:

$$\left\{\begin{array}{c} 2a - 2b - c = 0 \\ 4a^2 + 4b^2 - 5c^2 = 0 \end{array}\right. \text{ como tenemos 1 g.l. hacemos c=1} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} 2a - 2b - 1 = 0 \\ 4a^2 + 4b^2 - 5 = 0 \end{array}\right.$$

$$\text{de la } 1^a \text{ tenemos } a = \frac{2b+1}{2} \text{ y sustituyendo en la } 2^a\text{:}4\cdot\frac{(2b+1)^2}{4} + 4b^2 - 5 = 0 \Rightarrow$$

$$8b^2 + 4b - 4 = 0 \Rightarrow 2b^2 + b - 1 = 0 \Rightarrow b = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} = \left\langle \begin{array}{l} \frac{1}{2} \\ -1 \end{array}\right.$$

$$\text{Entonces: } \left\{\begin{array}{c} \text{Si } b = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{2b+1}{2} = 1 \Rightarrow \overline{r}_1 = (1,\frac{1}{2},1) \\ \text{Si } b = -1 \Rightarrow a = \frac{2b+1}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \overline{r}_2 = (-\frac{1}{2},-1,1) \end{array}\right.$$

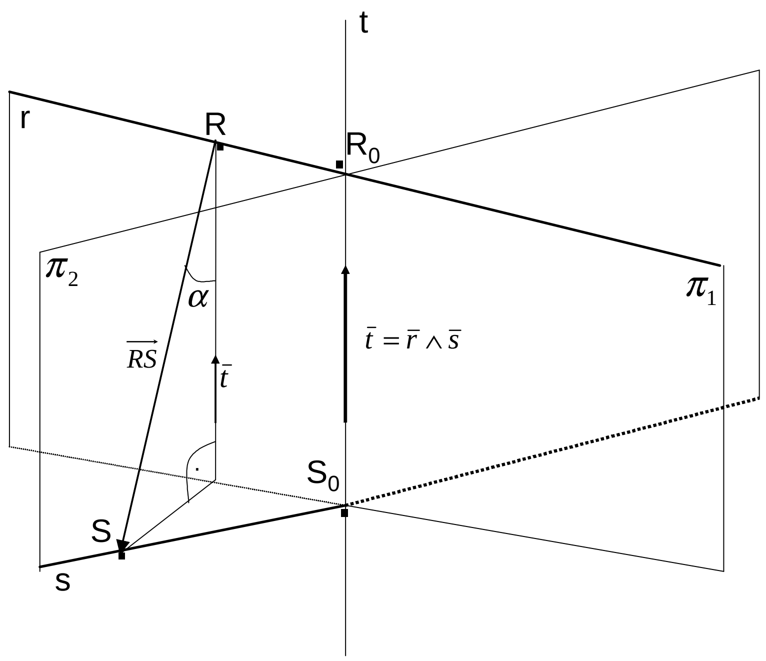
Es decir, hay dos rectas que cumplen las condiciones del problema:

$$r_1 \equiv X = P + \lambda \overline{r}_1 \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 2 + \frac{1}{2}\lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases} \Rightarrow \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{\frac{1}{2}} = \frac{z+1}{1}$$

$$r_2 \equiv X = P + \lambda \overline{r}_2 \equiv \begin{cases} x = 2 - \frac{1}{2}\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases} \Rightarrow \frac{x-2}{-\frac{1}{2}} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{1}$$

5.- Dadas las rectas r y s que tienen por ecuación:

$$r \equiv \frac{x+3}{3} = \frac{y-9}{-2} = \frac{z-8}{-2} \quad \text{y} \quad s \equiv \frac{x-3}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{2}.$$



a.- Comprobar que r y s se cruzan.

SOLUCIÓN:

De cada una de las rectas tenemos un punto y un vector de dirección, así:

$$r \equiv \begin{cases} R(-3, 9, 8) \\ \overline{r} = (3, -2, -2) \end{cases} \quad \text{y } s \equiv \begin{cases} S(3, 2, 1) \\ \overline{s} = (-2, 1, 2) \end{cases}$$

entoces r y s se cruzan si y sólo si el $rang\left(\overline{r}, \overline{s}, \overline{RS}\right) = 3$ y como $\overrightarrow{RS} = (6, -7, -7)$ veremos que el determinante $\begin{vmatrix} \overline{r} \\ \overline{s} \\ \overline{RS} \end{vmatrix} \neq 0$

$$\begin{vmatrix} 6 & -7 & -7 \\ 3 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -24 - 21 - 28 + 28 + 12 + 42 = 9 \neq 0$$

por tanto $rang\left(\overline{r}, \overline{s}, \overline{RS}\right) = 3$, que quiere decir que las rectas no estan en el mismo plano y no son paralelas, es decir, se cruzan.

b.- Hallar la recta perpendicular común a r y s.

SOLUCIÓN:

La recta perpendicular común $t = \pi_1 \cap \pi_2$, donde el palno π_1 es el contiene a la recta r y la dirección $\overline{t} = \overline{r} \wedge \overline{s}$ y el plano π_2 es el contiene a la recta s y la dirección $\overline{t} = \overline{r} \wedge \overline{s}$, así:

$$\overline{t} = \overline{r} \wedge \overline{s} = \begin{vmatrix} \overline{e}_1 & \overline{e}_2 & \overline{e}_3 \\ 3 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \overline{e}_1 \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \overline{e}_2 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + \overline{e}_3 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -2\overline{e}_1 - 2\overline{e}_2 - \overline{e}_3 \text{ o mejor } \overline{t} = (2, 2, 1)$$

$$\pi_1 \equiv \begin{vmatrix} x-3 & y-9 & z-8 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 =$$

$$(x+3) \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - (y-9) \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (z-8) \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(x+3) - 7(y-9) + 10(z-8) = 2x - 7y + 10z - 11 = 0$$

$$\pi_2 \equiv \begin{vmatrix} x-3 & y-2 & z-1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 =$$

$$(x-3) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - (y-2) \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (z-1) \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -3(x-3) + 6(y-2) - 6(z-1) = -3x + 6y - 6z + 3 = 0 \Longrightarrow$$

$$x - 2y + 2z - 1 = 0$$

por tanto $t \equiv \begin{cases} 2x - 7y + 10z - 11 = 0 \\ x - 2y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$

c.- Calcular la distancia entre r y s.

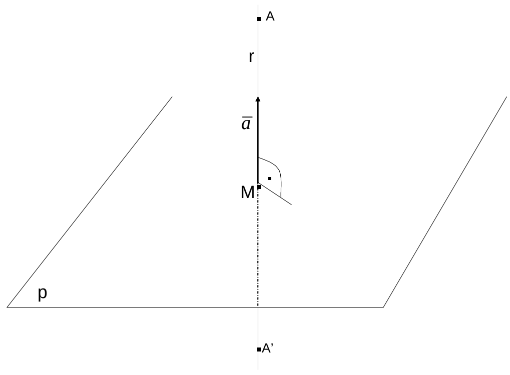
SOLUCIÓN:

Según vemos en triangulo rectángulo de la figura, tenemos que:

$$d(r,s) = \left\|\overline{RS}\right\| \cos\alpha \text{ y como} \cos\alpha = \left|\cos\left(\widehat{\overline{RS},\bar{t}}\right)\right| = \frac{\left|\overline{RS}.\bar{t}\right|}{\left\|\overline{RS}\right\| \cdot \left\|\bar{t}\right\|} \Longrightarrow$$

$$d(r,s) = \left\|\overline{RS}\right\| \cdot \frac{\left|\overline{RS}.\bar{t}\right|}{\left\|\overline{RS}\right\| \cdot \left\|\bar{t}\right\|} = \frac{\left|\overline{RS}.\bar{t}\right|}{\left\|\bar{t}\right\|} = \frac{\left|(6,-7,-7).(2,2,1)\right|}{\sqrt{2+2+1}} = \frac{|-9|}{3} = 3$$

6.- Hallar el simétrico del punto $A(-2,6,2)$ respecto del plano $\pi \equiv 3x - 5y + z = 1$.



Según vemos en la figura se verifica que $M = \frac{A+A'}{2}$ya que M es el punto medio de A y A' y por otro lado M es la intersección del plano con la recta r perpendicular a él y que pasa por el punto A. Así:

$$r \equiv \begin{cases} A(-2,6,2) \\ \bar{a} = (3,-5,1) \perp \pi \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -2 + 3\lambda \\ y = 6 - 5\lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$$

y la intersección se haya sustituyendo en la ecuación del plano π

$$3(-2+3\lambda) - 5(6-5\lambda) + (2+\lambda) = 1 \Rightarrow 35\lambda - 34 = 1 \Rightarrow \lambda = 1$$

por tanto $M(1,1,3)$

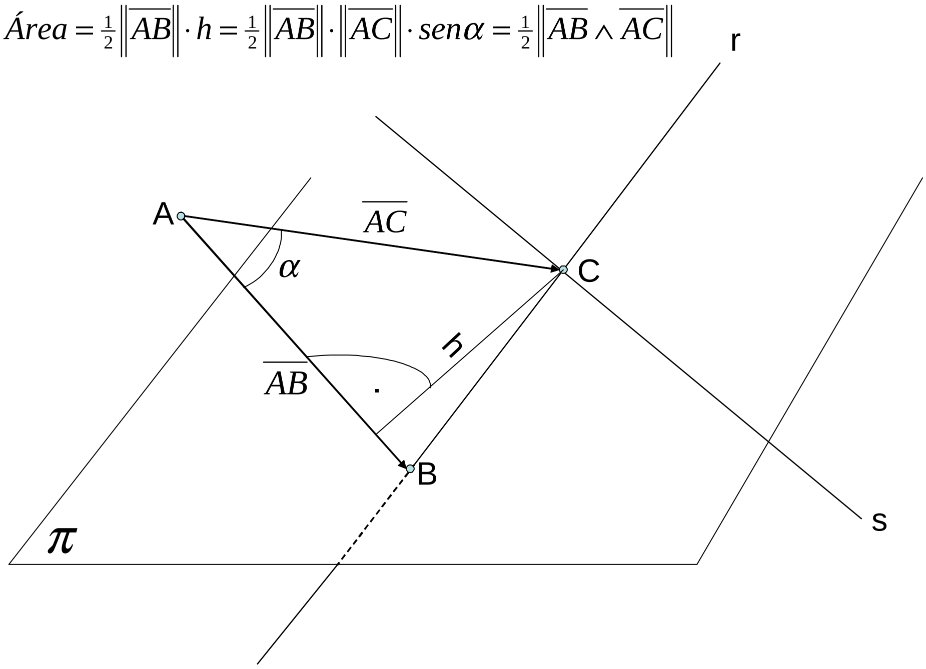
ahora despejando de la primera igualdad tenemos que:

$$A' = 2M - A = 2(1,1,3) - (-2,6,2) = (4,-4,4)$$

7.- Calcular el área del triangulo que tiene como vértices el punto $A(1,1,1)$ y los puntos de intersección de la recta $r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{3}$ con el plano $\pi \equiv x + y + z + 3 = 0$ y con la recta $s \equiv \begin{cases} 2x - y - z + 6 = 0 \\ x + y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$.

SOLUCIÓN:

$$Área = \frac{1}{2}\left\|\overline{AB}\right\| \cdot h = \frac{1}{2}\left\|\overline{AB}\right\| \cdot \left\|\overline{AC}\right\| \cdot sen\alpha = \frac{1}{2}\left\|\overline{AB} \wedge \overline{AC}\right\|$$



Si lamamos $B = r \cap \pi$ y $C = r \cap s$, entonces debemos calcular el área del triagulo de vértices A, B y C, que como sabemos es igual a $\frac{1}{2}\left\|\overline{AB} \wedge \overline{AC}\right\|$. Ahora calculamos primero el punto B. En primer lugar ponemos la recta r en paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases} \quad \text{y ahora sustituimos en la ecuación del plano}$$

$$\lambda + 2 + 2\lambda + 1 + 3\lambda + 3 = 0 \Rightarrow 6\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow B(-1, 0, -2)$$

Para calcular C sustituimos r en las ecuaciones de los dos planos que definen a la recta s y nos debe dar el mismo λ, así:

$$2\lambda - (2 + 2\lambda) - (1 + 3\lambda) + 6 = 0 \Rightarrow -3\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$$

$$\lambda + (2 + 2\lambda) - 2\,(1 + 3\lambda) + 3 = 0 \Rightarrow -3\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow C\,(1, 4, 4)$$

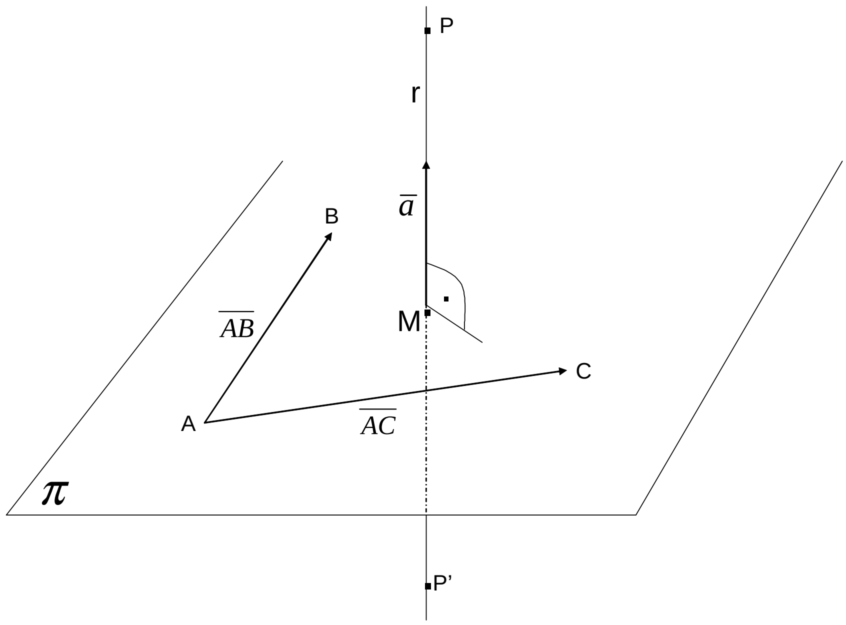
Ahora realizamos los cálculos para hallar el área:

$$\overline{AB} = B - A = (-2, -1, -3)\,, \overline{AC} = C - A = (0, 3, 3) \Rightarrow \overline{AB} \wedge \overline{AC} = \begin{vmatrix} \overline{e}_1 & \overline{e}_2 & \overline{e}_3 \\ -2 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \overline{e}_1 - \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \overline{e}_2 + \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \overline{e}_3 = 6\overline{e}_1 + 6\overline{e}_2 - 6\overline{e}_2 = (6, 6, -6)$$

$$\text{y así: Área} = \frac{1}{2}\left\|(6,6,-6)\right\| = \frac{1}{2}\left\|6\,(1,1,-1)\right\| = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot\sqrt{1+1+1} = 3\sqrt{3}$$

8.- Calcular el simétrico del punto $P(1,2,3)$ respecto del plano definido por los puntos $A(3,2,1)$, $B(0,5,1)$ y $C(1,0,-1)$.



Según vemos en la figura se verifica que $M = \frac{P+P'}{2}$ ya que M es el punto medio de P y P' y por otro lado M es la intersección del plano π, definido por los puntos A, B y C, con la recta r perpendicular a él y que pasa por el punto P.

Así, primero hemos de hayar la ecuacióm del plano π.

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} \overline{AX} \\ \overline{AB} \\ \overline{AC} \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} x-3 & y-2 & z-1 \\ -3 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= (x-3)\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} - (y-2)\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} + (z-1)\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= -6\,(x-3) - 6\,(y-2) + 12\,(z-1) = 0 \Rightarrow x + y - 2z - 3 = 0$$

Por otro lado la recta r pasa por el punto $P\,(1,2,3)$ y tiene la dirección de $\overline{a} = (1,1,-2)$ que es el vector director del plano π, así:

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{c} P\,(1,2,3) \\ \overline{a} = (1,1,-2) \perp \pi \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1+\lambda \\ y = 2+\lambda \\ z = 3-2\lambda \end{array} \right.$$

y la intersección se haya sustituyendo en la ecuación del plano π

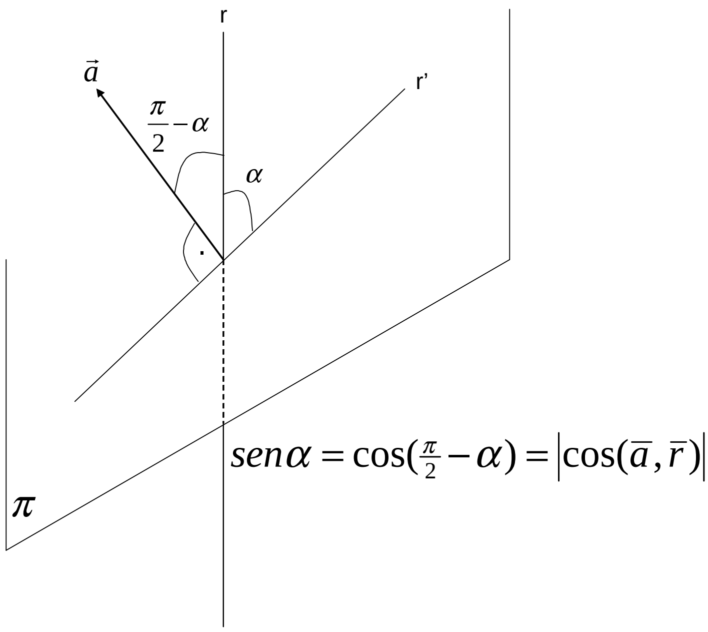
$$(1+\lambda) + (2+\lambda) - 2\,(3-2\lambda) - 3 = 0 \Rightarrow 6\lambda - 6 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$$

$$\text{por tanto } M\,(2,3,1)$$

ahora despejando de la primera igualdad tenemos que:

$$P' = 2M - P = 2\,(2,3,1) - (1,2,3) = (3,4,-1)$$

9.- Calcular el ángulo que forman el plano $\pi \equiv x - 3y + z + 5 = 0$ con la recta $r \equiv \left\{ \begin{array}{c} x - y - z + 2 = 0 \\ x - 4y + 2z + 5 = 0 \end{array} \right.$.



Como vemos en la figura, para calcular el ángulo α, ángulo que forma la recta con su proyección ortogonal en el plano, nos apoyamos en su complementario, $\frac{\pi}{2} - \alpha$, que es el que forman el vector de dirección de la recta con el vector director del plano, y en ese caso se verifica que $\operatorname{sen} \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$. Además sabemos que $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \left|\cos\left(\widehat{\overline{a}, \overline{r}}\right)\right|$ y por tanto lo primero que tenemos que hacer es buscar los vectores $\overline{a}$, director del plano, y $\overline{r}$, vector de dirección de la recta.

Como $\pi \equiv x - 3y + z + 5 = 0$ entonces $\overline{a} = (1, -3, 1)$. Como r está definida por la intersección de los planos $\pi_1 \equiv x - y - z + 2 = 0$ y $\pi_2 \equiv x - 4y + 2z + 5 = 0$ entonces $\overline{r} \parallel \overline{a}_1 \wedge \overline{a}_2$ donde $\overline{a}_1 = (1, -1, -1)$ es el vector director de π_1 y $\overline{a}_2 = (1, -4, 2)$ es el vector director de π_2, así tenemos que:

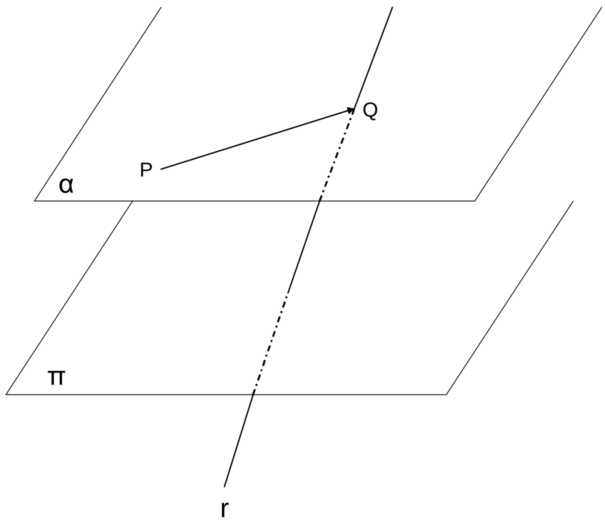
$$\overline{r} \parallel \overline{a}_1 \wedge \overline{a}_2 = \left| \begin{array}{ccc} \overline{e}_1 & \overline{e}_2 & \overline{e}_3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & 2 \end{array} \right| =$$

$$= \left| \begin{array}{cc} -1 & -1 \\ -4 & 2 \end{array} \right| \overline{e}_1 - \left| \begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{array} \right| \overline{e}_2 + \left| \begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 1 & -4 \end{array} \right| \overline{e}_3 = -6\overline{e}_1 - 3\overline{e}_2 - 3\overline{e}_2 = -3 \cdot (2,1,1)$$

por tanto podemos elegir como $\overline{r}$ a $(2,1,1)$ y como sabemos que $\cos\left(\widehat{\overline{a},\overline{r}}\right) = \frac{\overline{a}\cdot\overline{r}}{\|\overline{a}\|\|\overline{r}\|}$, y como $\overline{a}\cdot\overline{r} = (1,-3,1)\cdot(2,1,1) = 2-3+1 = 0$ entonces $\operatorname{sen}\alpha = 0$, lo que quiere decir que la recta y el plano son paralelos.

10.- Calcula la ecuación paramétrica de la recta r de que pasa por el punto $P(1,0,1)$, es paralela al plano $\pi : x+y+z-1=0$ y corta a la recta $t \equiv \begin{cases} x+y+2=0 \\ x+z+1=0 \end{cases}$

SOLUCIÓN:



Para calcular un recta necesitamos un punto y un vector de dirección, o bien, dos puntos. En este caso, tenemos el punto P, y el otro punto Q es la intersección de la recta t con el plano α paralelo π que pasa por P. Cálculo de α:

Haz de planos paralelos a $\pi \equiv x+y+z+k=0$, obligamos a que pase por $P \Rightarrow 1+0+1+k=0$, $k=-2$, entonces $\alpha \equiv x+y+z-2=0$. Cálculo de Q:

$$Q = \alpha \cap t \equiv \begin{cases} x+y+z-2=0 \\ x+y+2=0 \\ x+z+1=0 \end{cases} \Rightarrow y=-x-2, z=-x-1 \Rightarrow x-x-2-x-1-2=0 \Rightarrow x=-5$$

por lo que $y = 5-2 = 3, z = 5-1 = 4$, entonces $Q(-5,3,4)$. Así, la recta r es la que pasa por los puntos P y Q, o lo que es lo mismo, es la que pasa por P y tiene como vector de dirección $\overrightarrow{PQ}$, es decir:

$$r \equiv X = P + \lambda\overrightarrow{PQ}, \text{ como } \overrightarrow{PQ} = (-6,3,3) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1-6\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = 1+3\lambda \end{cases}$$

11.- Sea el punto $P(1,0,1)$ y las rectas r_1 que pasa por el origen $O(0,0,0)$ y es ortogonal al plano $\pi \equiv x+y+z=1$ y $r_2 \equiv \left\{ \begin{array}{l} x-y+1=0 \\ x+2y+z=0 \end{array} \right.$. Hallar la ecuación de la recta t que pasa por P y corta o se apoya en las rectas r_1 y r_2.

SOLUCIÓN:

La recta t será la intersección de los planos π_1 y π_2 tal que el plano π_1 es el que contienen a la recta r_1 y pasa por el punto P, y el plano π_2 es lo mimo pero utilizando la recta r_2.

Para obtener el plano π_2 hallo el haz de plano que contienen a r_2 y después obtengo aquel que pasa por P.

$$\text{haz de planos de } r_2 \equiv (x-y+1)+\lambda(x+2y+z)=0 \text{ y susituyo las coordenadas de } P$$

$$(1-0+1)+\lambda(1+0+1)=2+2\lambda=0 \Longrightarrow \lambda=-1 \Longrightarrow \pi_2=(x-y+1)-(x+2y+z)=0$$

$$\pi_2 \equiv 3y+z-1=0$$

Para el plano π_1 procedo de la misma manera, pero antes tengo que obtener la ecuación de la recta r_1. De dicha recta tengo un punto, $O(0,0,0)$ y el vector dirección que es el ortogonal al plano π, es decir el vector $(1,1,1)$, por tanto $r_1=(0,0,0)+\lambda(1,1,1)$, así:

$$r_1 \equiv \left\{ \begin{array}{l} x=\lambda \\ y=\lambda \\ z=\lambda \end{array} \right. \Longrightarrow r_1 \equiv \left\{ \begin{array}{l} x-z=0 \\ x-y=0 \end{array} \right. \Longrightarrow \text{haz de planos de } r_1 \equiv (x-z)+\lambda(x-y)=0$$

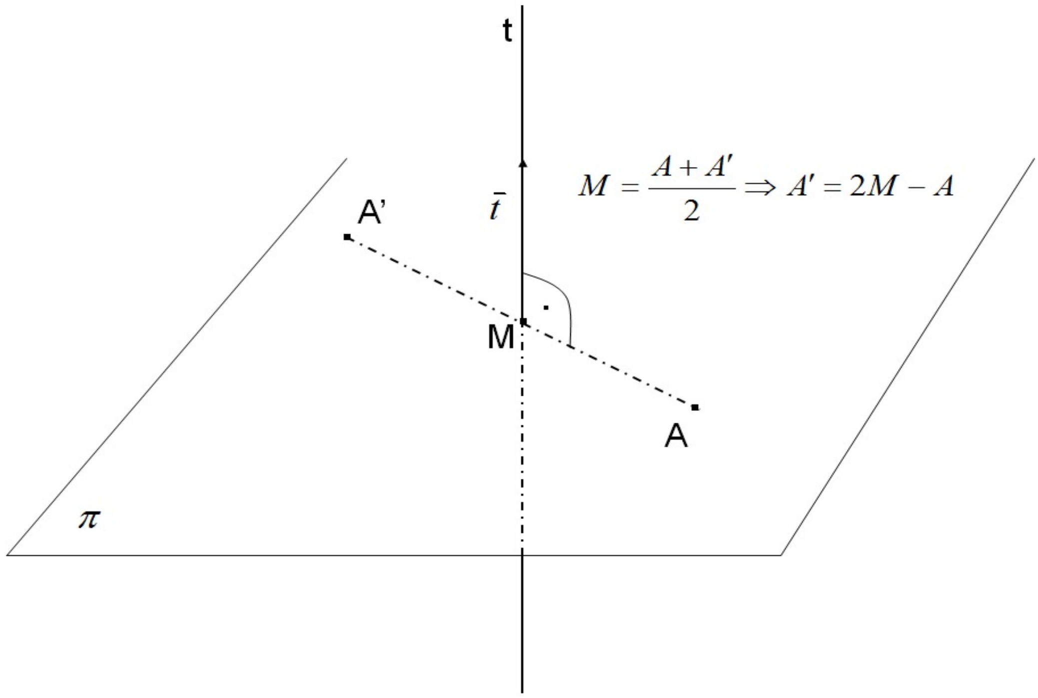
$$\text{si pasa por } P(1,0,1) \Longrightarrow (1-1)+\lambda(1-0)=0+\lambda=0 \Longrightarrow \pi_1 \equiv x-z=0$$

Y como dijimos al pricipio, la recta t es la intersección de los planos π_1 y π_2:

$$t=\pi_1 \cap \pi_2 \equiv \left\{ \begin{array}{l} x-z=0 \\ 3y+z-1=0 \end{array} \right.$$

13.- Determinar el punto A' , simétrico del punto $A(2,0,3)$ respecto de la recta t que tiene por ecuación:

$$t \equiv \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{2}$$



SOLUCIÖN:

Como A' es el simétrico de A, y si llamamos M al punto medio de A y A', entonces M es la proyección ortogonal de A sobre la recta r, que como sabemos es la intersección del plano π, ortogonal a la recta t que pasa por A, con la propia recta. Así tenemos que:

$$M = \pi \cap r \text{ y que } M = \frac{A+A'}{2} \Longrightarrow A' = 2M - A$$

Para calcular el plano π necesitamos el vector de la recta,

$$\text{el vector es } \bar{t} = (1,1,2) \Rightarrow t \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 2+\lambda \\ z = 1+2\lambda \end{cases}$$

Calculamos ahora el plano π ortogonal a la recta t que pasa por A:

$$\pi \equiv \overline{AX} \cdot \bar{t} = 0 = (x-2, y, z-3) \cdot (1,1,2) \Rightarrow x + y + 2z - 8 = 0$$

como $M = \pi \cap r$, sustituimos la coordenadas de la recta en el plano y claculamos λ:

$$(1+\lambda) + (2+\lambda) + 2(1+2\lambda) - 8 = 0 \Rightarrow 6\lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2} \Rightarrow M\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 2\right)$$

por último calaculamos A':

$$A' = 2M - A = 2\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 2\right) - (2,0,3) = (1,5,1)$$

ANEXOS

Ejercicio 3.- Otra forma de resolver la distancia de un punto al plano:

Tenemos el $R(3,2,7)$ y el plano $\alpha \equiv 5x+4y+2z+5=0$ entonces la $d(R,\alpha)=d(R,R_0)$ donde R_0 es la proyección ortogonal de R en α, o lo que es lo mismo la intersección de la recta t que pasa por R y es ortogonal al plano α. Así, el vector de dirección de t, tiene la misma dirección que el vector director del plano, es decir que $\bar{t}=(5,4,2)$, por lo que $t \equiv X = R+\lambda\bar{t}$, entonces.

$$t \equiv \begin{cases} x = 3+5\lambda \\ y = 2+4\lambda \\ z = 7+2\lambda \end{cases}$$

para hallar la intersección con el plano α sólo tenemos que sustituir en la ecuación del plano y hallar el valor de λ que lo verifica:

$$5(3+5\lambda)+4(2+4\lambda)+2(7+2\lambda)+5=0 \Rightarrow 42+45\lambda=0 \Rightarrow \lambda_0 = -\frac{42}{45} = -\frac{14}{15} \Rightarrow$$

$$R_0(3+5\lambda_0, 2+4\lambda_0, 7+2\lambda_0) \Rightarrow \overline{RR}_0 = (R_0-R) = (5\lambda_0, 4\lambda_0, 2\lambda_0) \Rightarrow$$

$$d(R,\alpha) = d(R,R_0) = \left\|\overline{RR}_0\right\| = \|(5\lambda_0, 4\lambda_0, 2\lambda_0)\| = |\lambda_0|\cdot\|(5,4,2)\| =$$

$$= \frac{14}{15}\cdot\sqrt{5^2+4^2+2^2} = \frac{14}{15}\cdot\sqrt{45} = \frac{14}{15}\cdot 3\sqrt{5} = \frac{14\sqrt{5}}{5}$$

Ejercicio 5.c.- Otra forma de resolver la distancia entre dos rectas que se cruzan:

Sabemos que la distancia $d(r,s) = d(R_0,S_0) = \left\|\overline{R_0S}_0\right\|$ donde R_0 y S_0 son los puntos de intersección de la recta t con las rectas r y s repectivamente. Así:

$$R_0 = r\cap t \text{ y } \begin{cases} r \equiv \begin{cases} x = -3+3\lambda \\ y = 9-2\lambda \\ z = 8-2\lambda \end{cases} \\ t \equiv \begin{cases} 2x-7y+10z-11=0 \\ x-2y+2z-1=0 \end{cases} \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} 2(-3+3\lambda)-7(9-2\lambda)+10(8-2\lambda)-11=0 \Rightarrow -6-63+80-11+\lambda(6+14-20)=0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 0+0\cdot\lambda=0 \text{ ya que } r \text{ está contenida en } \pi_1 \equiv 2x-7y+10z-11=0 \\ (-3+3\lambda)-2(9-2\lambda)+2(8-2\lambda)-1=0 \Rightarrow -3-18+16-1+\lambda(3+4-4)=0 \Rightarrow \\ \Rightarrow -6+3\lambda=0 \Rightarrow \lambda=2 \Rightarrow R_0(3,5,4) \end{cases}$$

$$S_0 = s\cap t \text{ y } \begin{cases} s \equiv \begin{cases} x = 3-2\lambda \\ y = 2+\lambda \\ z = 1+2\lambda \end{cases} \\ t \equiv \begin{cases} 2x-7y+10z-11=0 \\ x-2y+2z-1=0 \end{cases} \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} 2\,(3-2\lambda)-7\,(2+\lambda)+10\,(1+2\lambda)-11=0 \Rightarrow 6-14+10-11+\lambda\,(-4-7+20)=0 \Rightarrow \\ \Rightarrow -9+9{\cdot}\lambda=0 \Rightarrow \lambda=1 \Rightarrow S_0\,(1,3,3) \\ (3-2\lambda)-2\,(2+\lambda)+2\,(1+2\lambda)-1=0 \Rightarrow 3-4+2-1+\lambda\,(-2-2+4)=0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 0+0{\cdot}\lambda=0 \text{ ya que } s \text{ está contenida en } \pi_2 \equiv x-2y+2z-1=0 \end{cases}$$

Entonces: $\overline{R_0S_0} = S_0 - R_0 = (1,3,3)-(3,5,4) = (-2,-2,-1) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \left\|\overline{R_0S_0}\right\| = \sqrt{(-2)^2+(-2)^2+(-1)^2} = \sqrt{9} = 3$$