E.T.S. INGENIEROS INDUSTRIALES. PLAN 2001. U.N.E.D
CÁLCULO INFINITESIMAL II. 1^{o}CURSO. CÓDIGO: 521088
1^{a}SEMANA. CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE 2006.

1. (4 PUNTOS) Dada la función $f(x,y) = |y| \operatorname{sen}\left(x^2+y^2\right)$ estudiar en $\mathbb{R}^2$:

   (a) Continuidad.

   (b) Derivabilidad.

   (c) Diferenciabilidad.

Solución:

(a) Como f es producto y composición de funciones continuas en $\mathbb{R}^2$, es una función continua en este conjunto.

(b) Sin embargo, observamos que al aparecer $|y|$, para estudiar la derivabilidad y diferenciabilidad, tenemos que considerar los conjuntos $M_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y > 0\}$, $M_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y < 0\}$ y $M_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = 0\}$. f se puede redefinir como

$$f(x,y) = \begin{cases} y\operatorname{sen}\left(x^2+y^2\right) & \text{si } y \geq 0 \\ -y\operatorname{sen}\left(x^2+y^2\right) & \text{si } y < 0 \end{cases}$$

Así, sus derivadas parciales son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \begin{cases} 2xy\cos\left(x^2+y^2\right) & \text{si } y > 0 \\ 2xy\cos\left(x^2+y^2\right) & \text{si } y < 0 \end{cases} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= -2xy\cos\left(x^2+y^2\right) \end{aligned}$$

En $\mathbb{R}^2 - \{(x,0)\}$ las derivadas son continuas, por ser producto y composición de funciones continuas. Por tanto, f es diferenciable en este conjunto. Para ver si f es derivable en $(x,0)$, hay que calcular:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{|h|\operatorname{sen}\left(x^2+h^2\right)-0}{h} \end{aligned}$$

que no existe si $x^2 \neq k\pi$ para $k \in \mathbb{Z}$, porque en este caso, $\lim_{h\to 0}\operatorname{sen}\left(x^2+h^2\right) \neq 0$ y $\frac{|h|}{h}$ es ± 1 según sea el signo de h. Si $x = 0$, tenemos que hacer

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{|h|\operatorname{sen}\left(0+h^2\right)-0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{|h|\left(\operatorname{sen}0\cos h^2+\cos 0\operatorname{sen}h^2\right)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{|h|\operatorname{sen}h^2}{h} = 0 \end{aligned}$$

luego el límite existe. Si $x^2 = k\pi$ para $k \in \mathbb{Z}$ se procede de forma similar

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}\left(\sqrt{k\pi},0\right) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(\sqrt{k\pi},h)-f(\sqrt{k\pi},0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{|h|\operatorname{sen}\left(k\pi+h^2\right)-0}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{|h|\left(\operatorname{sen}k\pi\cos h^2+\cos k\pi\operatorname{sen}h^2\right)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{|h|\left(-1\right)^k\operatorname{sen}h^2}{h} = 0 \end{aligned}$$

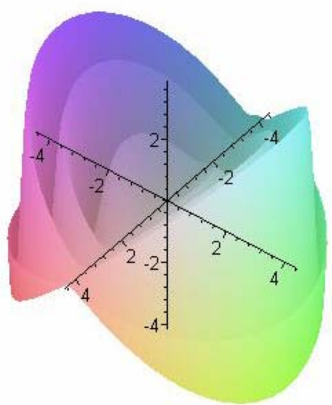
(c) En M_1 y M_2 la función va a ser diferenciable, porque es producto y composición de funciones diferenciables. Como no existe una derivada parcial, la función no va a ser diferenciable en $\{(x,0) \in \mathbb{R}^2$, para $x^2 \neq n\pi$ para $n \in \mathbb{Z}\}$. Para $\{(x,0) \in \mathbb{R}^2$, para $x^2 = n\pi$ para $n \in \mathbb{Z}\}$ tenemos que estudiarlo por separado. Comenzamos con $(0,0)$: tenemos que aplicar la definición de diferenciabilidad y estudiar si el siguiente límite es 0

$$\begin{aligned}
l &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(0+h,k) - f(0,0) - \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) & \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}}{\sqrt{h^2+k^2}} \\
&= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|h| \operatorname{sen}\left(0+h^2\right) - 0 - (0 \quad 0) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|h| \operatorname{sen} h^2}{\sqrt{h^2+k^2}} \\
&= \lim_{\rho\to 0} \frac{|\rho\cos\theta| \operatorname{sen}\left(\rho^2\cos^2\theta\right)}{\sqrt{\rho^2\cos^2\theta + \rho^2 \operatorname{sen}^2\theta}} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho\,|\cos\theta| \operatorname{sen}\left(\rho^2\cos^2\theta\right)}{\rho\sqrt{\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta}} = \lim_{\rho\to 0} |\cos\theta| \operatorname{sen}\left(\rho^2\cos^2\theta\right) = 0
\end{aligned}$$

Por tanto, en $(0,0)$, f es una función diferenciable. Lo mismo se hace para $x^2 = n\pi$ para $n \in \mathbb{Z}$ $n \neq 0$

$$\begin{aligned}
l &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(\sqrt{n\pi}+h,k) - f(\sqrt{n\pi},0) - \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(\sqrt{n\pi},0) & \frac{\partial f}{\partial y}(\sqrt{n\pi},0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}}{\sqrt{h^2+k^2}} \\
&= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|h| \operatorname{sen}\left(n\pi+h^2\right) - 0 - (0 \quad 0) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|h|\left(\operatorname{sen} n\pi \cos h^2 + \cos n\pi \operatorname{sen} h^2\right)}{\sqrt{h^2+k^2}} \\
&= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|h|\,(-1^n) \operatorname{sen} h^2}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{\rho\to 0} (-1^n) \frac{|\rho\cos\theta| \operatorname{sen}\left(\rho^2\cos^2\theta\right)}{\sqrt{\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\operatorname{sen}^2\theta}} \\
&= \lim_{\rho\to 0} (-1^n) \frac{\rho\,|\cos\theta| \operatorname{sen}\left(\rho^2\cos^2\theta\right)}{\rho\sqrt{\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta}} = \lim_{\rho\to 0} |\cos\theta| \operatorname{sen}\left(\rho^2\cos^2\theta\right) = 0
\end{aligned}$$

Luego también es diferenciable en los puntos $(\sqrt{n\pi},0)$ para $n \in \mathbb{Z}$. Resumiendo, f es diferenciable sólo en $\mathbb{R}^2 - \{(x,0) \in \mathbb{R}^2$, para $x^2 \neq n\pi$ para $n \in \mathbb{Z}\}$.
La función f se ha representado en la siguiente figura



2. (4 PUNTOS) Calcular la integral triple

$$\int\int\int_D xyz\,dx\,dy\,dz$$

siendo el dominio de integración D el tetraedro delimitado por los planos coordenados y el plano de ecuación

$$x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$$

Solución: Como el plano corta a los ejes en los puntos $(1,0,0)$, $(0,2,0)$ y $(0,0,3)$ la integral es

$$\begin{aligned}
I &= \int\int\int_D xyzdxdydz = \int_0^1 x\int_0^{2(1-x)} y\int_0^{3(1-x-y/2)} zdzdydx \\
&= \int_0^1 x\int_0^{2(1-x)} y\frac{1}{2}\left(3\left(1-x-\frac{y}{2}\right)\right)^2 dydx \\
&= \frac{9}{2}\int_0^1 xdx\int_0^{2(1-x)} y\left(1-x-\frac{y}{2}\right)^2 dy = \frac{9}{2}\int_0^1 xdx\int_0^{2(1-x)} y\left((1-x)^2+\frac{y^2}{4}-(1-x)\,y\right)dy \\
&= \frac{9}{2}\int_0^1\int_0^{2(1-x)}\left((1-x)^2 y+\frac{y^3}{4}-(1-x)\,y^2\right)xdydx \\
&= \frac{9}{2}\int_0^1 x\left(\frac{1}{2}(1-x)^2(2(1-x))^2+\frac{(2(1-x))^4}{16}-\frac{1}{3}(1-x)(2(1-x))^3\right)dx \\
&= \frac{9}{2}\int_0^1 x\left(2(1-x)^4+(1-x)^4-\frac{8}{3}(1-x)^4\right)dx = \frac{3}{2}\int_0^1 (1-x)^4\,xdx \\
&= \frac{3}{2}\int_0^1\left(1-4x+6x^2-4x^3+x^4\right)xdx = \frac{3}{2}\int_0^1\left(x-4x^2+6x^3-4x^4+x^5\right)dx \\
&= \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{4}{3}x^3+\frac{3}{2}x^4-\frac{4}{5}x^5+\frac{1}{6}x^6\Big|_0^1\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{4}{3}+\frac{3}{2}-\frac{4}{5}+\frac{1}{6}\right) \\
&= \frac{3}{2}\left(\frac{15-40+45-24+5}{30}\right) = \frac{3}{2\cdot 30} = \frac{1}{20}
\end{aligned}$$

3. (2 PUNTOS) Respóndase a las siguientes cuestiones cortas:

   (a) ¿Son ortogonales los vectores $(0,1,2)$ y $(-3,-4,2)$? Justifíquese la respuesta.

   (b) Enúnciese el Teorema de Schwarz de igualdad de las derivadas cruzadas.

   Solución:

   (a) Dos vectores son ortogonales cuando su producto escalar es 0. El producto escalar de estos vectores es:

   $$(0,1,2)\cdot(-3,-4,2) = 0\cdot(-3)+1\cdot(-4)+2\cdot 2 = 0-4+4 = 0$$

   luego los vectores son ortogonales.

   (b) Sea $f: A\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ una función continua y con derivadas parciales continuas, donde $A\subset\mathbb{R}^2$ es un abierto. Si existe $D_{12}f(x,y)$ para todo $(x,y)\in A$ y la función $(x,y)\mapsto D_{12}f(x,y)$ es continua en $(a,b)\in A$, entonces existe $D_{21}f(a,b)$ y se verifica $D_{21}f(a,b)=D_{12}f(a,b)$.