Código asignatura	Nombre asignatura
68041016	**Cálculo** **(Ing. Eléctrica e Ing. en Tecnología Ind.)**
Fecha alta y origen	Convocatoria
05/11/2013 Equipo Docente	Febrero 2010 (1ª Semana)

E.T.S. INGENIEROS INDUSTRIALES. U.N.E.D
CÁLCULO. Ingeniería Eléctrica
PRUEBA PRESENCIAL 1ª SEMANA. FEBRERO 2010.

PREGUNTAS CORTAS

1. (1 PUNTO) Estudie la continuidad en $x = 0$ de:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} \pi x, & x \leq 1, \\ \dfrac{x-1}{x+1}, & x > 1. \end{cases}$$

Solución: Hay que comprobar que coinciden los límites laterales y el valor de f en $x = 0$. Existe un entorno de este punto (por ejemplo, el intervalo $(-0.5, 0.5)$) en el que f está definida como $f(x) = \operatorname{sen} \pi x$. Esta función es continua y por eso:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 0.$$

Como los límites coinciden, podemos concluir que f es continua en 0.

2. (1 PUNTO) Se da la función

$$f(x) = 1 - \frac{1}{x^2 + 2}.$$

Utilizando el método del punto fijo, encuentre un punto fijo de f. Realice 5 iteraciones y comience con $x_0 = 0$.

Solución. Como nos dice que tenemos que aplicar el método del punto fijo, buscamos x que cumpla:

$$x = 1 - \frac{1}{x^2 + 2}.$$

Calculamos los términos de la sucesión y escribimos los resultados

$$\begin{array}{ll} x_0 = 0, & x_1 = 1 - \dfrac{1}{0^2 + 2} = \dfrac{1}{2}, \\ x_2 = 1 - \dfrac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2} = \dfrac{5}{9} \approx 0.55556, & x_3 = 1 - \dfrac{1}{(0.5556)^2 + 2} \approx 0.566\,85, \\ x_4 = 1 - \dfrac{1}{(0.566\,85)^2 + 2} \approx 0.569\,21, & x_5 = 1 - \dfrac{1}{(0.569\,21)^2 + 2} \approx 0.569\,71. \end{array}$$

3. (1 PUNTO) Calcule el valor de la integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x}{(3x^2+1)^2} dx$.

Solución:

$$\int_0^1 \frac{3x}{(3x^2+1)^2} dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{-3 \cdot 2 \cdot x}{(3x^2+1)^2} dx = -\frac{1}{2} \frac{1}{3x^2+1} \Bigg|_0^1 = -\frac{1}{2} \frac{1}{3+1} - \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{1}{1} = \frac{3}{8}.$$

4. (1 PUNTO) ¿Son ortogonales los vectores $(0, 1, 2)$ y $(-3, -4, 2)$? Justifíquese la respuesta.

Solución: Dos vectores son ortogonales cuando su producto escalar es 0. El producto escalar de estos vectores es:

$$(0, 1, 2) \cdot (-3, -4, 2) = 0 \cdot (-3) + 1 \cdot (-4) + 2 \cdot 2 = 0 - 4 + 4 = 0,$$

luego los vectores son ortogonales.

EJERCICIOS

5. (3 PUNTOS) Calcule los extremos relativos y absolutos de

$$f(x) = \frac{1-x^2}{x+3}$$

en el intervalo $[-1, 1]$.

Solución: Los extremos relativos se alcanzan en los puntos donde se anula la derivada de f o donde no existe (puntos críticos). Además, como el intervalo es cerrado y acotado, sabemos que en él se van a alcanzar los extremos absolutos. Por eso, tenemos que estudiar en $[-1, 1]$ los siguientes puntos:

(a) Donde $f(x)$ no tiene derivada,
(b) Donde $f'(x) = 0$,
(c) La frontera de $[-1, 1]$, a saber $x_1 = -1$, $x_2 = 1$

Tenemos:

(a) El único punto posible donde no existe f' es $x = -3$, pero como no pertenece al intervalo $[-1, 1]$, lo descartamos.

(b) La derivada de f es:

$$f'(x) = \frac{(x+3)(-2x) - \left(1-x^2\right)}{(x+3)^2} = -\frac{x^2+6x+1}{(x+3)^2}.$$

La derivada se anula si y sólo si $x^2 + 6x + 1 = 0$. Las soluciones de esta ecuación $x = -3 \pm \sqrt{8}$. Como $-3 - \sqrt{8} \notin [-1, 1]$, lo descartamos. Estudiemos si $x_1 = -3 + \sqrt{8}$ es máximo o mínimo relativo a través del signo de la derivada segunda:

$$f''(x) = -\frac{(2x+6)(x+3)^2 - \left(x^2+6x+1\right)2(x+3)}{(x+3)^4} = -\frac{16}{(x+3)^3},$$

$$f''\left(-3+\sqrt{8}\right) = -\frac{2}{\sqrt{8}} < 0.$$

Como la derivada segunda es negativa, entonces $f(x)$ alcanza un máximo relativo en $x_1 = -3 + \sqrt{8}$ y

$$f\left(-3+\sqrt{8}\right) = 6 - 2\sqrt{8} \approx 0.343\,15.$$

(c) Estudiamos el valor de f en los extremos del intervalo. Como

$$f(-1) = f(1) = 0$$

y $f(x_1) = 6 - 2\sqrt{8} > 0$, resulta que $f(x)$ tiene un máximo absoluto en $x_1 = -3 + \sqrt{8}$ y mínimos absolutos en $x_1 = -1$ y $x_2 = 1$.

No tiene mínimos relativos en este intervalo.

6. (3 PUNTOS) Dada la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+2y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

(a) Calcule las derivadas parciales en $(0,0)$.

(b) Estudie la diferenciabilidad de f en $(0,0)$.

Solución:

Primero determinamos las derivadas parciales en $(0,0)$, a través de la definición:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^3}{h^2}-0}{h} = 1,$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)} = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{0}{2h^2}-0}{h} = 0.$$

Si f es diferenciable en $(0,0)$, entoces la diferencial está determinada por el gradiente $(1,0)$. Debe cumplirse:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(h,k)-f(0,0)-\binom{1}{0}\begin{pmatrix} h & k\end{pmatrix}}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

Pero

$$\begin{aligned} l &= \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(h,k)-f(0,0)-\binom{1}{0}\begin{pmatrix} h & k\end{pmatrix}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\frac{h^3}{h^2+2k^2}-0-h}{\sqrt{h^2+k^2}} \\ &= \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{-2hk^2}{(h^2+2k^2)\sqrt{h^2+k^2}} \end{aligned}$$

y este límite no existe (se comprueba haciendo un cambio a coordenadas polares). Entonces la función no es diferenciable en $(0,0)$.