E.T.S. INGENIEROS INDUSTRIALES. PLAN 2001. U.N.E.D
CÁLCULO INFINITESIMAL I. 1^{o}CURSO. SEPTIEMBRE 2006.

1. (4 PUNTOS) Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{si } x > 2 \\ 3\cos \pi x & \text{si } x \leq 2 \end{cases}$$

(a) Indicar cuál es el dominio de la función.

(b) Estudiar la continuidad de f en su dominio de definición.

(c) Estudiar la derivabilidad de la función en su dominio de definición y determinar la derivada primera, en caso de que exista.

Solución:

(a) El dominio de f son los puntos de $\mathbb{R}$ donde f está definida. Según la definición de la función f, observamos que es suma, producto, cociente y composición de funciones continuas y el único punto donde podríamos tener problemas es en $x = 2$, que es donde se anula el denominador de $f(x)$ para $x > 2$. Pero como para $x = 2$ la función está definida como $3\cos \pi x$, también esta definida en este punto. Luego el dominio es $\mathbb{R}$.

(b) Para $x > 2$ la función es continua, está definida como

$$\frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$$

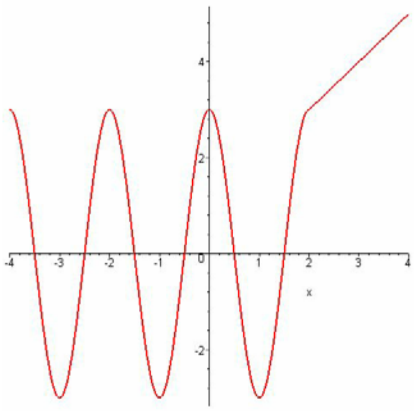
que es suma, producto y división de funciones continuas y no se anula el denominador. composición de funciones continuas. De hecho, si realizamos la división, tenemos

$$\frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = x + 1 \tag{1}$$

Esto va a simplificar los cálculos de los siguientes apartados. Para $x < 2$, como $3\cos \pi x$ es producto y composición de funciones continuas, f también es continua. El único problema lo podríamos tener en $x = 2$. f es en este punto continua si $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2) = 3$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 2^-} f(x) &= \lim_{x\to 2^-} 3\cos \pi x = 3\cos 2\pi = 3 \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) &= \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x\to 2^+} (x + 1) = 3 \end{aligned}$$

Es segundo límite se puede también calcular aplicando L'Hôpital, si no tenemos en cuenta (1). Consecuentemente, la función es continua. Su representación gráfica la tenemos en la siguiente figura



(c) En $x \neq 2$, f es derivable, al ser suma, producto, cociente y composición de funciones derivables. Si $x > 2$, $f'(x)$ es la derivada de $x+1$, teniendo en cuenta (1), que es

$$f'(x) = (x+1)' = 1$$

Si $x < 2$, la derivada es

$$-3\pi \text{sen}\, \pi x$$

Para estudiar su existe $f'(2)$, tenemos que ver que $\lim_{h\to 2^+} \frac{f(h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 2^-} \frac{f(h)-f(2)}{h}$

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^+} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{(2+h)+1-3}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1 \\
\lim_{h\to 0^-} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} &= \lim_{h\to 0^-} \frac{3\cos\pi(2+h)-3}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{3\cos\pi(2+h)-3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^-} \frac{-3\text{sen}\, \pi(2+h)}{1} = 0
\end{aligned}$$

Luego f no es derivable en $x = 2$, como se puede apreciar en su representación gráfica. Para calcular el último límite hemos aplicado la Regla de L'Hôpital, porque $\lim_{h\to 0^-} \frac{3\cos\pi(2+h)-3}{h} = \frac{0}{0}$. Estos cálculos también se pueden realizar sin la simplificación (1), obteniéndose el mismo resultado.

2. (4 PUNTOS) Calcular

$$I = \int x\cos(\ln x)\, dx$$

Solución: Integramos por partes, considerando $u = \cos(\ln x)$, $u' = -\frac{1}{x}\text{sen}\,(\ln x)\, dx$, $v = \frac{1}{2}x^2$, $v' = xdx$

$$I = \frac{1}{2}x^2\cos(\ln x) + \frac{1}{2}\int x\text{sen}\,(\ln x)\, dx$$

Esta segunda integral que resulta la resolvemos integrando de nuevo por partes, con $u = \text{sen}\,(\ln x)$, $u' = \frac{1}{x}\cos(\ln x)\, dx$, $v = \frac{1}{2}x^2$, $v' = xdx$

$$\int x\text{sen}\,(\ln x)\, dx = \frac{1}{2}x^2\text{sen}\,(\ln x) - \frac{1}{2}\int x\cos(\ln x)\, dx$$

Luego resulta

$$\begin{aligned}
\int x\cos(\ln x)\, dx &= \frac{1}{2}x^2\cos(\ln x) + \frac{1}{4}x^2\text{sen}\,(\ln x) - \frac{1}{4}\int x\cos(\ln x) \\
&\Rightarrow \int x\cos(\ln x)\, dx = \frac{2}{5}x^2\cos(\ln x) + \frac{1}{5}x^2\text{sen}\,(\ln x) + C
\end{aligned}$$

Esta integral también se puede resolver con el cambio de variable $t = \ln x$, integrando posteriormente por partes.

3. (2 PUNTOS) Respóndase a las siguientes cuestiones cortas:

(a) Calcular

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{n+\frac{3}{n}}+5}{2e^n}$$

(b) Estudiar si $f(x) = |\text{sen}\, x| e^x$ es una función continua en $x = 0$.

Solución:

(a)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{e^{n+\frac{3}{n}}+5}{2e^n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{e^n e^{3/n}+5}{2e^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{e^n e^{3/n}}{2e^n}+\frac{5}{2e^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{e^{3/n}}{2}+\frac{5}{2e^n}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{e^{3/n}}{2}+\lim_{n\to\infty}\frac{5}{2e^n}=\frac{1}{2}+0=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

(b) Hay que ver si $\lim_{x\to 0}|\operatorname{sen} x|\,e^x=|\operatorname{sen} 0|\,e^0=0$. Como

$$\lim_{x\to 0}|\operatorname{sen} x|\,e^x=0\cdot 1=0$$

la función sí es continua en $x=0$. También se podía haber demostrado teniendo en cuenta que valor absoluto, seno y la exponencial son funciones continuas, por lo que su producto y composición también lo es.