ÁLGEBRA

ESCUELA DE INGENIERÍA INFORMÁTICA

Solución de ejercicios

Formas Cuadráticas

Diagonalización

Clasificación

Sea la forma cuadrática $w(x,y,z) = x^2 + 3xy + 2xz + 4y^2 + \frac{5}{2}z^2$, comprobar que define un producto escalar y hallar el ángulo que forman los vectores $\overline{v} = (1,0,-1)$ y $\overline{w} = (0,1,1)$:

Para comprobar que define un producto escalar hemos de diagonalizarla y ver que es definida positiva, lo haremos por los tres métodos, primero por la busqueda de cuadrados perfectos:

$$w(x,y,z) = \left(x^2 + 3xy + 2xz\right) + 4y^2 + \frac{5}{2}z^2 =$$

$$= \left[\left(x + \frac{3}{2}y + z\right)^2 - \left(\frac{3}{2}y + z\right)^2\right] + 4y^2 + \frac{5}{2}z^2 =$$

$$= \left(x + \frac{3}{2}y + z\right)^2 - \left(\frac{9}{4}y^2 + 3yz + z^2\right) + 4y^2 + \frac{5}{2}z^2 = \left(x + y + \frac{3}{4}z\right)^2 + \frac{7}{4}y^2 - 3yz + \frac{3}{2}z^2 =$$

$$= \left(x + \frac{3}{2}y + z\right)^2 + \left(\frac{3}{2}z^2 - 3yz\right) + \frac{7}{4}y^2 = \left(x + \frac{3}{2}y + z\right)^2 + \frac{3}{2}\left(z^2 - 2yz\right)^2 + \frac{7}{4}y^2 =$$

$$= \left(x + \frac{3}{2}y + z\right)^2 + \frac{3}{2}\left[(z-y)^2 - y^2\right] + \frac{7}{4}y^2 = \left(x + \frac{3}{2}y + z\right)^2 + \frac{3}{2}(z-y)^2 - \frac{3}{2}y^2 + \frac{7}{4}y^2 =$$

$$= \left(x + \frac{3}{2}y + z\right)^2 + \frac{3}{2}(z-y)^2 + \frac{1}{4}y^2$$

Si hacemos, $x' = x + \frac{3}{2}y + z$, $y' = -y + z$, y por último $z' = y$, tenemos que :$w(x',y',z') = x'^2 + \frac{3}{2}y'^2 + \frac{1}{4}z'^2$ y por lo tanto es una forma cuadrática definida positiva y define un producto escalar.

Segundo, lo haremos por operaciones elementales, como sabemos en la matriz asociada a la forma cuadrática hacemos las mismas operaciones por filas y columnas y en la matriz identidad, sólo las hacemos por columnas para obtener el cambio de base:

Como quierea que la matriz asociada es: $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & 4 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$, entonces:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & 4 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}^{\substack{2^aF - \frac{3}{2}\times 1^aF \\ 3^aF - 1^aF}} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{\substack{2^aC - \frac{3}{2}\times 1^aC \\ 3^aC - 1^aC}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & \frac{7}{4} & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}^{\substack{2^aC-\frac{3}{2}\times 1^aC \\ 3^aC-1^aC}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{4} & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}^{3^aF+\frac{6}{7}\times 2^aF} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{3^aC+\frac{6}{7}\times 2^aC}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{4} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{14} \end{pmatrix}^{3^aC+\frac{6}{7}\times 2^aC} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{14} \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{16}{7} \\ 0 & 1 & \frac{6}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

como la matriz diagonal tiene los tres elementos positivos, efectivamente define un producto escalar. También, podíamos simplificar la operaciones cabiando el elemento pivote en el segundo paso, es decir:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & \frac{7}{4} & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}^{\substack{2^aC-\frac{3}{2}\times 1^aC \\ 3^aC-1^aC}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{4} & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}^{\substack{2^aF=3^aF \\ 3^aF=2^aF}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{\substack{2^aC=3^aC \\ 3^aC=2^aC}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{7}{4} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}^{\substack{2^aC=3^aC \\ 3^aC=2^aC}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{7}{4} \end{pmatrix}^{3^aF+2^aF} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{3^aC+2^aC}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}^{3^aC+2^aC} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y llegamos, otra vez, a que es un producto escalar.

Por último, vamos a diagonalizar, buscando una base de vectores conjugados:

Hemos de encontrar una base $B' = \{\overline{v}_i\}$ tal que $\forall i, j : f(\overline{v}_i, \overline{v}_j) = 0$, donde f es la forma polar asociadad a w. Tenemos que:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & 4 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

elegimos como $\overline{v}_1 = (1, 0, 0)$ ya que:$w(\overline{v}_1) = 1 \neq 0$, ahora hemos de encontrar un $\overline{v}_2$ tal que:

$$f(\overline{v}_1, \overline{v}_2) = 0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & 4 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$$

$$= x + \frac{3}{2}y + 1z = 0$$

Tenemos un ecuación con 2 grados de libertad, elegimos $x = 1$ y $y = 0$ y por tanto $z = -1 \Longrightarrow \overline{v}_2 = (1, 0, -1)$. A continuación debemos encontrar un $\overline{v}_3$ tal que $f(\overline{v}_1, \overline{v}_3) = 0$, es decir, que $x + \frac{3}{2}y + 1z = 0$ y que:

$$f(\overline{v}_2, \overline{v}_3) = 0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & 4 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{3}{2}y - \frac{3}{2}z = 0$$

Es decir $\overline{v}_3 \in \left\{ \begin{array}{c} x + \frac{3}{2}y + 1z = 0 \\ \frac{3}{2}y - \frac{3}{2}z = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow 1g.l. \Rightarrow$ si $y = 1 \Longrightarrow z = 1$, y $x = -\dfrac{5}{2}$, así $\overline{v}_3 = (-\dfrac{5}{2}, 1, 1)$

Una vez obtenidad la base de vectores conjugados, sólo nos resta calcular los elementos de la diagonal, que se correponden con $w(\overline{v}_1), w(\overline{v}_2), w(\overline{v}_3)$. Como habíamos visto $w_a(\overline{v}_1) = 1$, veamos los otros dos:

$$w(\overline{v}_2) = f(\overline{v}_2, \overline{v}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & 4 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}$$

$$w_a(\overline{v}_3) = f(\overline{v}_3, \overline{v}_3) = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & 4 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}$$

y por tanto defenida positiva, por lo que define un producto escalar.

Para calcular el ángulo que forman los vectores $\overline{v}_1 = (1, 0, -1)$ y $\overline{v}_2 = (0, 1, 1)$, sabemos que $\cos\left(\widehat{\overline{v}_1, \overline{v}_2}\right) = \frac{\overline{v}_1 \cdot \overline{v}_2}{\|\overline{v}_1\| \cdot \|\overline{v}_2\|}$, , y además:

$$\overline{v}_1 \cdot \overline{v}_2 = f(\overline{v}_1, \overline{v}_2) = {}^tV_1 A V_2 \quad \text{y} \quad \|\overline{v}_1\| = +\sqrt{\overline{v}_1 \cdot \overline{v}_1}$$

Como $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & 4 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$, entonces $\overline{v}_1 \cdot \overline{v}_2 = f(\overline{v}_1, \overline{v}_2) =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & 4 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0$$

como quiera el producto escalar es nulo, quiere decir que los vectores son ortogonales (perpendiculares) y por tanto no hace falta seguir con los cálculos.