ESTRATEGIAS DE PROGRAMACIÓN (SEGUNDA PARTE) CONTINUACIÓN

Programación 3
Javier Miranda

Escuela de Ingeniería Informática
Universidad de Las Palmas de Gran Canaria

Estrategias básicas de programación

- Fuerza bruta
- Vuelta atrás (backtracking)
- Greedy

- Divide y vencerás
  - Reduce y vencerás
  - Programación Dinámica

Programación Dinámica

- Es una técnica inventada por el matemático norteamericano Richard Bellman en los años 50 para resolver problemas de optimización.

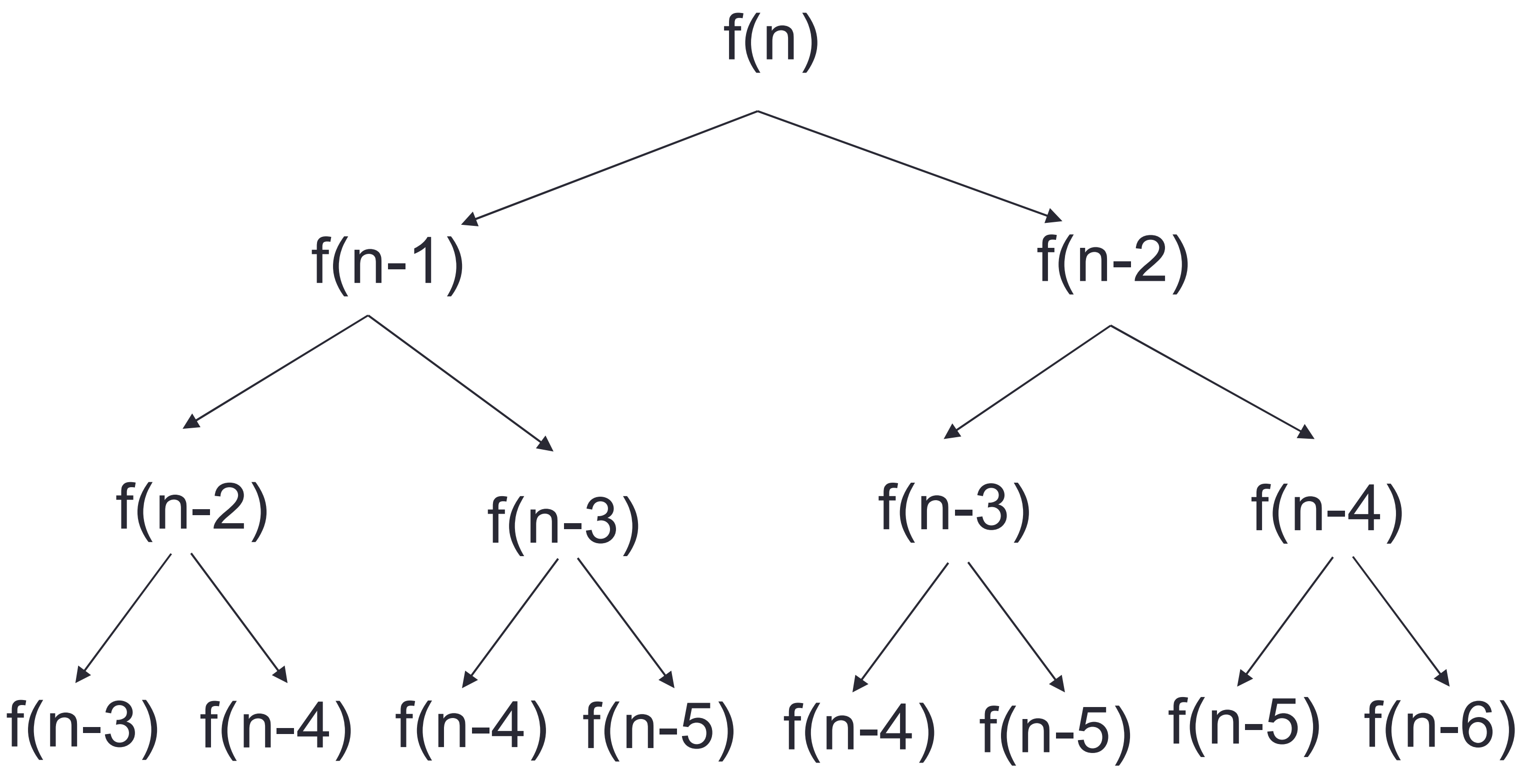
- ¿ Cuando debemos utilizarla ?

Cuando el problema tiene subproblemas que se solapan, ya que en este caso la estrategia **Divide y Vencerás** genera algoritmos **poco eficientes**.

https://en.wikipedia.org/wiki/Richard_E._Bellman
https://en.wikipedia.org/wiki/Dynamic_programming

Ejemplo 1: Fibonacci

$$f(0) = 0$$
$$f(1) = 1$$
$$f(n) = f(n-1) + f(n-2)$$



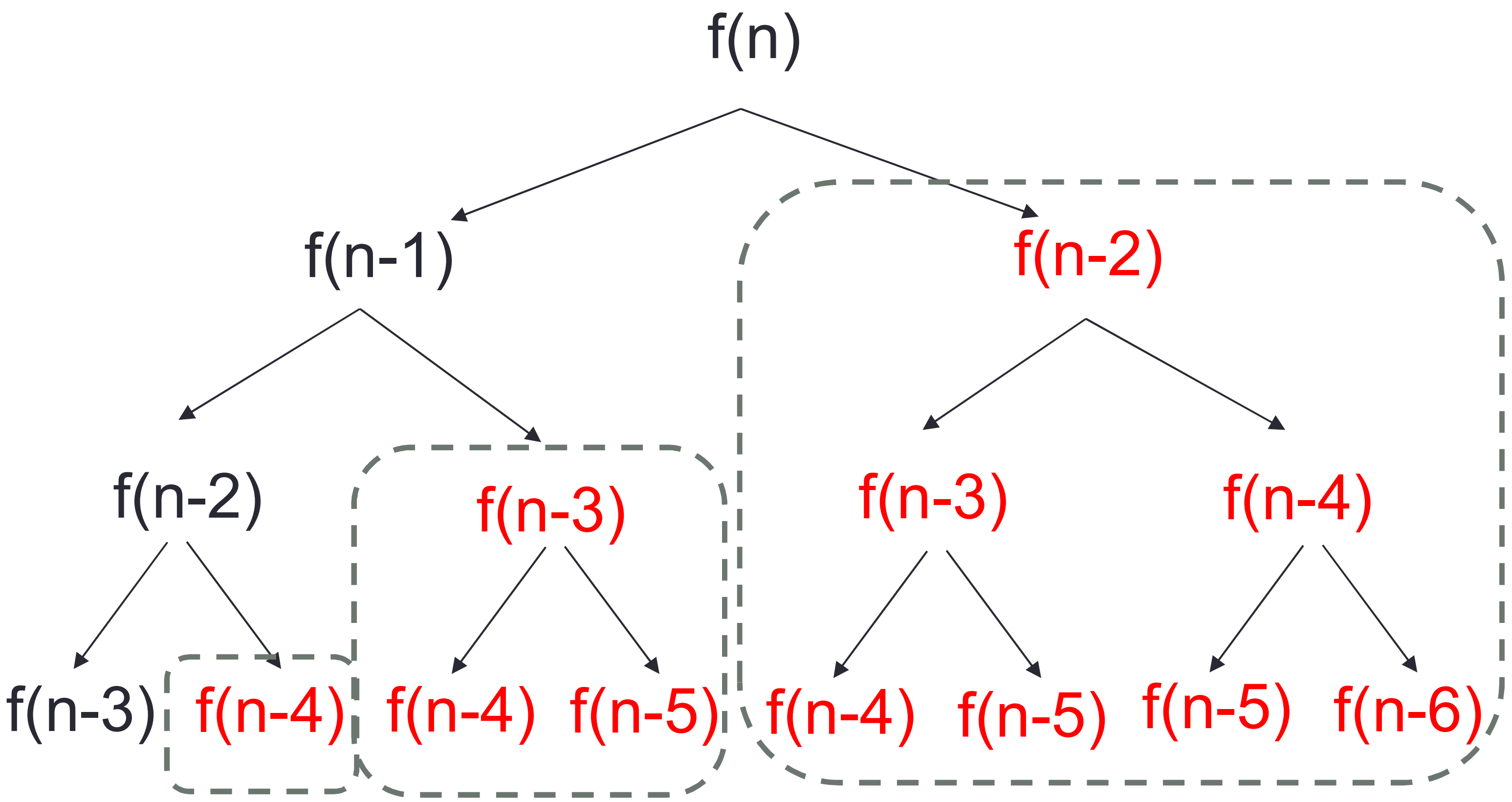
https://es.wikipedia.org/wiki/Sucesi%C3%B3n_de_Fibonacci

Ejemplo 1: Fibonacci

$f(0) = 0$

$f(1) = 1$

$f(n) = f(n\text{-}1) + f(n\text{-}2)$

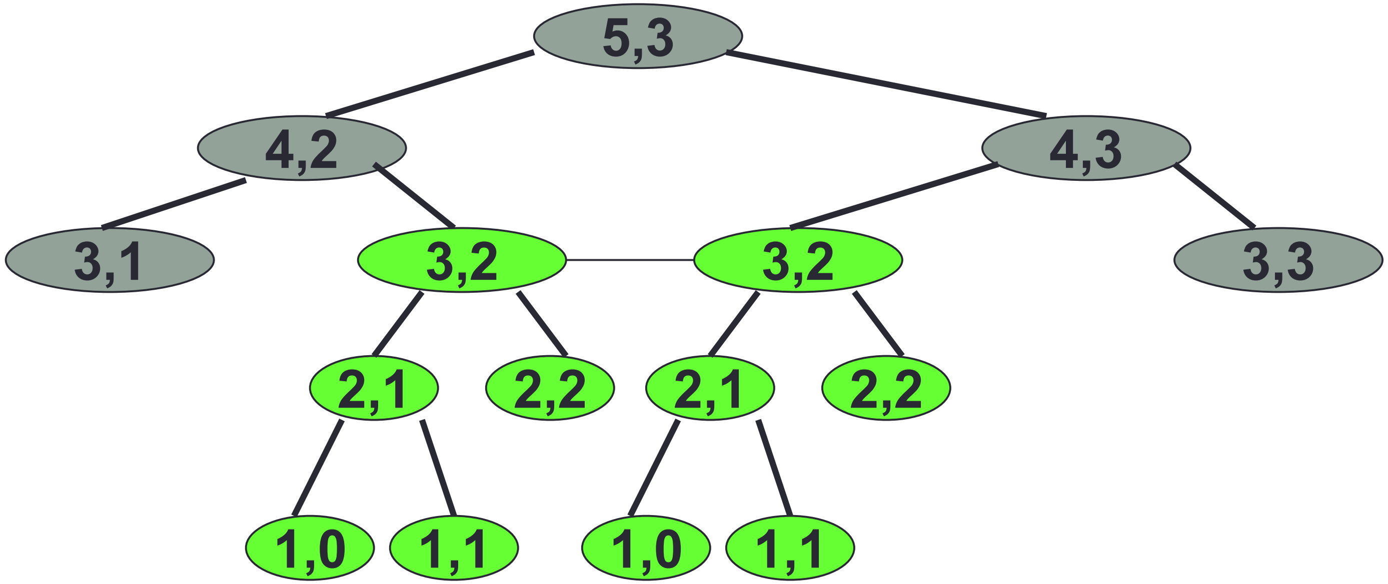


Calculando Fibonacci recursivamente repetimos muchos cálculos.
La programación dinámica evita repetirlos!.

Ejemplo 2: Coeficiente Binomial

$$comb(n,m) = \binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m}, \quad m \le n$$

with $comb(n,0) = comb(n,n) = 1$



https://en.wikipedia.org/wiki/Binomial_coefficient

Programación Dinámica

- **¿ Qué ?**
  - Técnica que combina soluciones de subproblemas para resolver problemas mayores de forma <u>eficiente</u>

- **¿ Cómo ?**
  - Guardando las soluciones de los subproblemas y reutilizándolas para evitar repetir cálculos al resolver problemas mayores

Podemos hacer el recorrido bottom-up o top-down

Implementación de Programación Dinámica

Memoization

- Se utiliza cuando el problema se resuelve recursivamente (***top-down***)

Tabulation

- Se utiliza cuando el problema se resuelve comenzando por los sub-problemas (***bottom-up***)

El objetivo de ambas técnicas es el mismo: almacenar y reutilizar las soluciones de los subproblemas

https://en.wikipedia.org/wiki/Memoization

Ejemplo Fibonacci

$$t_n = f(t_{n-1}, t_{n-2}) = t_{n-1} + t_{n-2} \qquad n \geq 2$$
$$t_0 = 0 \quad t_1 = 1$$

Ecuación de recurrencia de Fibonacci

```
def Fib(n) {
    if (n < 2)
        return n
    else
        return Fib(n-2) + Fib(n-1)
}
```

Versión Recursiva

Ejemplo Fibonacci

$$t_n = f(t_{n-1}, t_{n-2}) = t_{n-1} + t_{n-2} \qquad n \geq 2$$
$$t_0 = 0 \quad t_1 = 1$$

```
def Fib(n) {
    if (n < 2)
        return n
    else
        return Fib(n-2) + Fib(n-1)
}
```

```
def Fib(n):
    mem = {}          # Diccionario

    def memFib(n):
        key = n
        if key not in mem:
            if n<2:
                r = n
            else:
                r = memFib(n-1)+memFib(n-2)

            mem[key] = r
        return mem[key]

    return memFib(n)
```

Versión implementada en Python con memoization

Ejemplo Fibonacci

$$t_n = f(t_{n-1}, t_{n-2}) = t_{n-1} + t_{n-2} \qquad n \geq 2$$
$$t_0 = 0 \quad t_1 = 1$$

```
public int Fibonacci(int n) {
    HashMap<Integer, Integer> dict
        = new HashMap<>();
    return memFib(n, dict);
}
```

Versión implementada en Java con memoization

```
private int memFib
    (int n, HashMap<Integer, Integer> dict)
{
    if (dict.containsKey(n)) {
      return dict.get(n);
    }

    int result;

    if (n < 2)
      result = n;
    else
      result = memFib(n-1, dict) + memFib(n-2, dic);

    dict.put(n, result);
    return result;
}
```

Ejemplo Fibonacci

$$t_n = f(t_{n-1}, t_{n-2}) = t_{n-1} + t_{n-2} \qquad n \geq 2$$
$$t_0 = 0 \quad t_1 = 1$$

```
def Fib(n) {
    if (n < 2)
        return n
    else
        return Fib(n-2) + Fib(n-1)
}
```

Versión Recursiva

```
def Fib(n):
    if n < 2:
        return n
    else:
        table = [ ]                # Lista

        table.append(0)
        table.append(1)

        for j in range(2,n+1):
            table.append(table[j-2] + table[j-1])
        return table[n]
```

Versión implementada en Python con tabulation

¡Cuidado!

- Lo que identifica a una técnica como memoization o como tabulation es el tipo de recorrido (recursivo o **top-down**, frente a iterativo o **bottom-up**), no el tipo de memoria utilizada en la programación

```
def Fib(n):
    mem = {}            # Diccionario
    def memFib(n):
        key = n
        if key not in mem:
            if n<2:
                r = n
            else:
                r = memFib(n-1)+memFib(n-2)
                # … llamadas recursivas!
            mem[key] = r
        return mem[key]

    return memFib(n)
```

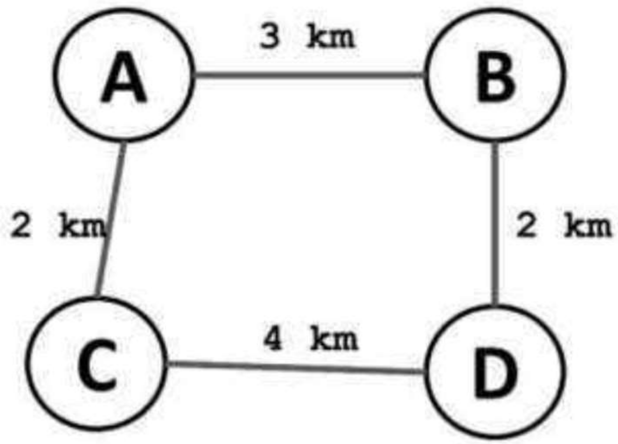
Memoization: Top-down (recursivo)

```
def Fib(n):
    if n < 2:
        return n
    else:
        table = []          # Lista

        table.append(0)
        table.append(1)

        for j in range(2,n+1):
            table.append(table[j-2] + table[j-1])
        return table[n]
```

Tabulation: Bottom-Up (iterativo)

Requisitos para Programación Dinámica

1. **Subestructura Optima**
   - La solución optima del problema se puede construir a partir de soluciones óptimas de los subproblemas
   - Ejemplo: Camino más corto



Sin embargo, el camino más largo no cumple la propiedad de subestructura óptima (no se resuelve con programación dinámica)

Requisitos para Programación Dinámica

1. **Subestructura Optima**
   - La solución optima del problema se puede construir a partir de soluciones óptimas de los subproblemas

2. **Subproblemas Solapados**
   - Las soluciones de los subproblemas se reutilizan varias veces para resolver problemas mayores

Rendimiento

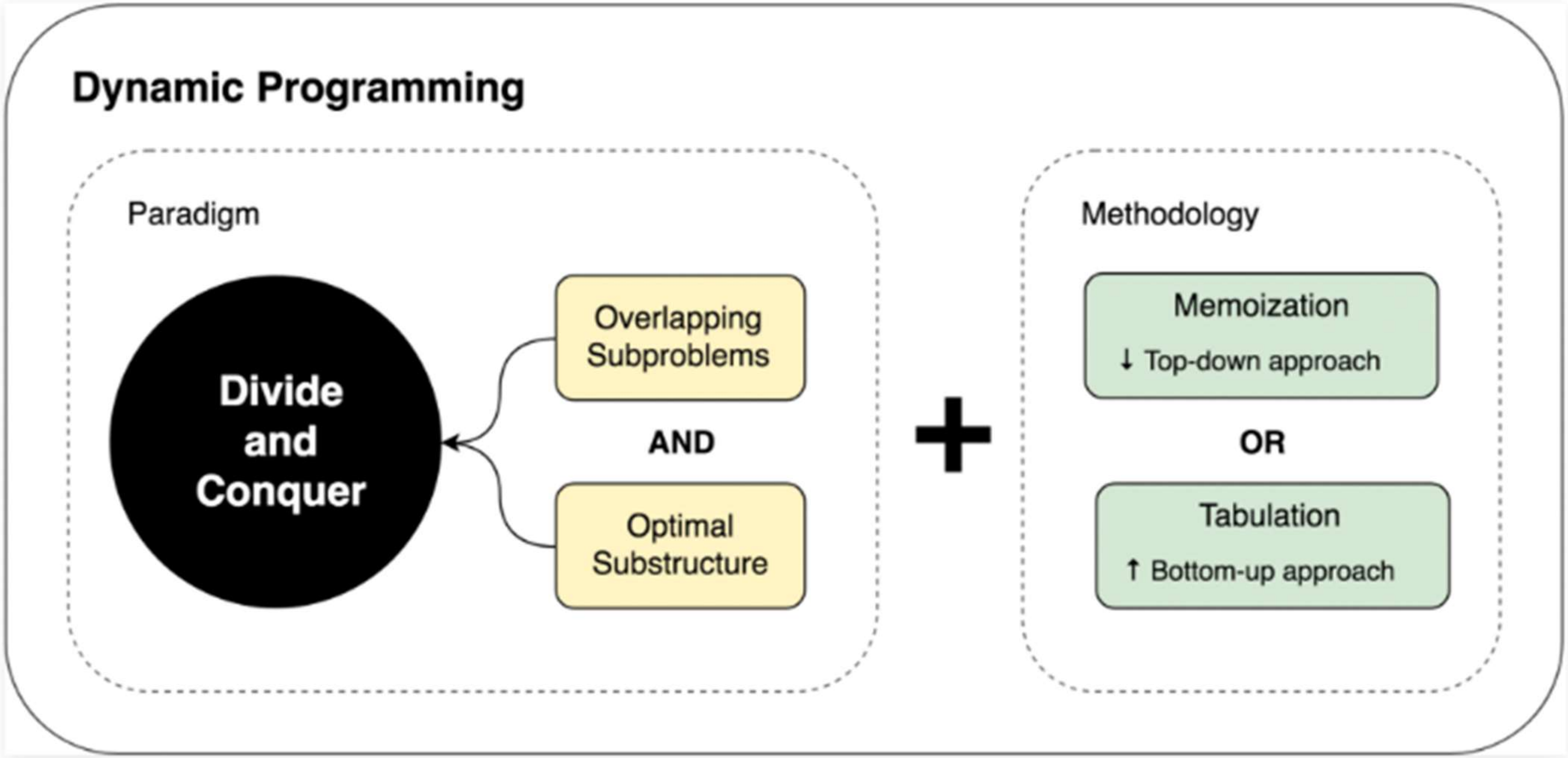
- **En general tabulation es más eficiente que memoization**
  - Porque no tiene llamadas recursivas

n =	2	3	4	5	10	20	40
Recursive	1	3	5	9	109	13529	204668309
Iterative	1	1	1	1	1	1	1
Memo	1	3	5	7	17	37	77

Número de llamadas a la función para calcular Fibonacci

- **Pero en problemas grandes puede ser mejor memoization**
  - Porque no necesita calcular TODOS los elementos

Resumen


Dynamic Programming
Paradigm
Divide and Conquer
Overlapping Subproblems
AND
Optimal Substructure
+
Methodology
Memoization
↓ Top-down approach
OR
Tabulation
↑ Bottom-up approach