E.T.S. INGENIEROS INDUSTRIALES. PLAN 2001. U.N.E.D
CÁLCULO INFINITESIMAL I. 1^{o}CURSO. FEBRERO DE 2007.
2^{o}SEMANA

1. (4 PUNTOS)

   (a) Estúdiese la continuidad y derivabilidad de la función siguiente, para los distintos valores de α

$$f(x) = \begin{cases} x^{\alpha} \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

   (b) Estúdiense la continuidad de $f'(x)$ para $\alpha = 2$.

   Solución:

   (a) $\forall x$, con $x > 0$, la función es continua y derivable al ser producto de funciones continuas y derivables. Si $x < 0$, la función es continua y derivable al ser la función constante, qeu es continua y derivable. Hay que estudiar el punto $x = 0$. Calculamos el límite, para $x > 0$, $x \to 0$. Comenzamos con $\alpha = 0$, para $x > 0$:

$$f(x) = x^0 \operatorname{sen} \frac{1}{x} = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$$

Su límite no existe, ya que es oscilante entre 1 y -1. La función no será continua en $x = 0$ si $\alpha = 0$. Si $\alpha \neq 0$, tenemos

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x^{\alpha} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$$

Como $\operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$ está acotado, para $\alpha > 0$, es

$$0 = \lim_{x \to 0^+} -x^{\alpha} \leq \lim_{x \to 0^+} f(x) \leq \lim_{x \to 0^+} x^{\alpha} = 0$$

y, consecuentemente, $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 = f(0) = \lim_{x \to 0^-} f(x)$, y así es continua en $x = 0$. Para $\alpha < 0$, tenemos

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x^{\alpha} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$$

que no existe, porque $x^{\alpha} \to \infty$ para $x \to 0^+$ y $\alpha < 0$. Así, podemos concluir que la función es continua en $x = 0$ si $\alpha > 0$.
La derivada de f es

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^{\alpha - 1} \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} - x^{\alpha - 2} \cos \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

La derivabilidad en $x = 0$ se estudia mediante el límite $\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$, que consideraremos por la derecha y por la izquierda

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} &= \lim_{h \to 0^-} \frac{0 - 0}{h} = 0 \\ \lim_{h \to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} &= \lim_{h \to 0^+} \frac{h^a \operatorname{sen} \dfrac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h \to 0^+} h^{a-1} \operatorname{sen} \frac{1}{h} \end{aligned}$$

Para que coincidan ambos límites, el segundo debe ser 0, para lo que debe ser $\alpha > 1$. Luego f es continua en $x = 0$ si $\alpha > 0$ y es derivable en $x = 0$ si $\alpha > 1$. En $\mathbb{R} - \{0\}$ siempre es continua y derivable.

(b) Para $\alpha = 2$, la derivada es

$$f(x) = \begin{cases} 2x\text{sen}\,\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

En $x = 0$, tenemos que hacer

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h^2\text{sen}\,\dfrac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h\to 0^+} h^1\text{sen}\,\frac{1}{h} = 0$$

por lo que $f'(2) = 0$. Sin embargo, no existe

$$\lim_{x\to 0^+} f'(2) = \lim_{x\to 0^+} \left(2x\text{sen}\,\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right)$$

y $f'(0)$ no es continua para $\alpha = 2$.

2. (4 PUNTOS) Calcúlese la integral

$$\int \frac{x^3 - x}{x^2 + 4x + 13} dx$$

Solución: Es una integral racional y el grado del denominador es mayor que el grado del denominador. Efectuamos la división y tenemos

$$\frac{x^3 - x}{x^2 + 4x + 13} = x - 4 + \frac{2x + 52}{x^2 + 4x + 13}$$

por lo que

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x^3 - x}{x^2 + 4x + 13} dx = \int \left(x - 4 + \frac{2x + 52}{x^2 + 4x + 13}\right) dx = \int (x - 4)\, dx + \int \frac{2x + 52}{x^2 + 4x + 13} dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 - 4x + \int \frac{2x + 4}{x^2 + 4x + 13} dx + 48 \int \frac{1}{x^2 + 4x + 13} dx = \frac{1}{2}x^2 - 4x + I_2 + I_3 \end{aligned}$$

La integral de I_2 es el siguiente logaritmo neperiano

$$\ln\left(x^2 + 4x + 13\right)$$

De hecho, lo hemos dejado preparado para que el numerador sea la derivada del denominador. Para calcular I_3 tenemos que transformar el denominador de la fracción en uina expresión del tipo $(bx + a)^2 + 1$, para que su integral sea una arcotangente:

$$\begin{aligned} I_3 &= 48 \int \frac{1}{x^2 + 4x + 13} dx = 48 \int \frac{1}{x^2 + 4x + 4 + 9} dx = 48 \int \frac{1}{(x + 2)^2 + 9} dx = \frac{48}{9} \int \frac{1}{\left(\frac{x+2}{3}\right)^2 + 1} dx \\ &= \frac{16}{3} 3 \arctan\left(\frac{x + 2}{3}\right) + C = 16 \arctan\left(\frac{x + 2}{3}\right) + C \end{aligned}$$

Finalmente, queda

$$I = \frac{1}{2}x^2 - 4x + \ln\left(x^2 + 4x + 13\right) + 16 \arctan\left(\frac{x + 2}{3}\right) + C$$

3. (2 PUNTOS) Entre las siguientes opciones, elíjanse las verdaderas de cada apartado:

(a) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{5n + 4^n}{\ln n + 5^n}$

i. Converge.

ii. Diverge.

iii. Es una serie geométrica.
iv. Es una serie armónica.

Nota: ln es el logaritmo neperiano.

(b) Si $f(x)$ es una función continua con $\int_a^b f(x)\,dx = 0$, entonces
   i. Debe ser siempre $f(x) = 0$.
   ii. Debe ser siempre $a = b$.
   iii. No puede ser $\int_a^b f(x)\,dx = 0$
   iv. Ninguna de las anteriores.

Solución:

(a) Tenemos que $\dfrac{5n+4^n}{\ln n + 5^n}$ es equivalente a $\dfrac{4^n}{5^n}$. La serie que quedaría es convergente, porque es $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{4}{5}\right)^n$ y es una serie geométrica convergente. Pero la serie original $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{5n+4^n}{\ln n + 5^n}$ no es ni geométrica ni armónica. Luego sólo es correcta la opción i).

(b) La integral de una función continua puede ser 0 sin que la función sea nula ni coincidan los extremos. Por ejemplo, $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} x dx = 0$, pero no estamos ni ninguna de las tres primeras opciones. Luego sólo es correcta la opción iv).