Código asignatura	Nombre asignatura
68041016	**Cálculo** **(Ing. Eléctrica e Ing. en Tecnología Ind.)**
Fecha alta y origen	Convocatoria
05/11/2013 Equipo Docente	Febrero 2010 (2ª Semana)

E.T.S. INGENIEROS INDUSTRIALES. U.N.E.D
CÁLCULO. Ingeniería Eléctrica
PRUEBA PRESENCIAL 2^{a}SEMANA. FEBRERO 2010.

PREGUNTAS CORTAS

1. (1 PUNTO) Calcule

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{9n^2+2}}{3n-2+\sqrt{4n^2-3}}.$$

Solución: Se resuelve sacando factor común a la mayor de las potencias de cada sumando y simplificando:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{9n^2+2}}{3n-2+\sqrt{4n^2-3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-n\sqrt{9+\frac{2}{n^2}}}{3n-\frac{2}{n}n+n\sqrt{4-\frac{3}{n^2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-\sqrt{9+\frac{2}{n^2}}}{3-\frac{2}{n}+\sqrt{4-\frac{3}{n^2}}}$$
$$= \frac{1-3}{3+2} = -\frac{2}{5}.$$

2. (1 PUNTO) Señale los puntos en los que la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^3 - x^2 + 2$ es paralela al eje x.

Solución: La recta tangente a la gráfica de f en x_0 es una recta con pendiente $f'(x_0)$. Para que sea paralela al eje x debe ser $f'(x_0) = 0$. La derivada es:

$$f'(x) = 3x^2 - 2x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(3x-2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \text{ ó } x = \frac{2}{3}.$$

Ninguno de estos puntos son de inflexión, porque

$$f''(x) = 6x - 2, f''(0) = -2 < 0, f''\left(\frac{2}{3}\right) = 2 > 0.$$

Como $f(0) = 2$ y $f(2/3) = 50/27$, la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ es paralela al eje x en $(0,2)$ y en $\left(\frac{2}{3}, \frac{50}{27}\right)$.

3. (1 PUNTO) Razone por qué no existe el límite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^3}{x^2+y^2}$.

Solución: No coinciden los límites reiterados:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{x^2+y^3}{x^2+y^2}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0} 1 = 1,$$
$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{x^2+y^3}{x^2+y^2}\right) = \lim_{y\to 0}\left(\frac{y^3}{y^2}\right) = \lim_{y\to 0} y = 0.$$

4. (1 PUNTO) Determine los puntos críticos de

$$f(x,y) = x^3 + y^3 + xy.$$

Solución: Como f es una función continua y con derivadas parciales continuas, los puntos críticos son los puntos (x, y) que anulan las derivadas parciales:

$$\begin{aligned}
\left.\begin{array}{l}\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 3x^2 + y = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = 3y^2 + x = 0\end{array}\right\} &\Longrightarrow \quad y = -3x^2 \Longrightarrow 3\left(-3x^2\right)^2 + x = 0 \\
&\Longrightarrow \quad 27x^4 + x = 0 \Longrightarrow x\left(27x^3 + 1\right) = 0 \\
&\Longrightarrow \quad x = 0 \text{ ó } 27x^3 + 1 = 0.
\end{aligned}$$

La última igualdad significa:

$$27x^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^3 = -\frac{1}{27} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3},$$

Si $x = 0$, entonces $y = -3x^2 = 0$. Si $x = -\frac{1}{3}$, entonces $y = -3x^2 = -\frac{1}{3}$.
Resumiendo, los puntos críticos son:

$$(0,0), \quad \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right).$$

EJERCICIOS

5. (3 PUNTOS) Determine, por diferencias divididas, el polinomio de grado 3 que aproxima los siguientes datos:

k	0	1	2	3
x_k	-2	0	1	3
$f(x_k)$	0	2	3	5

Solución: Para resolver el ejercicio, tenemos que construir la tabla de diferencias, donde las columnas son diferencias divididas de orden creciente. Recordamos cómo se definen. Las diferencias divididas de orden 0 son $f[x_k] = f(x_k)$ para $k = 0, \ldots, 3$. Las diferencias divididas de orden 1 son

$$f[x_k, x_{k+1}] = \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k} = \frac{f[x_{k+1}] - f[x_k]}{x_{k+1} - x_k}.$$

Para orden m, se definen de forma recursiva

$$f[x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+m}] = \frac{f[x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_m] - f[x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+m-1}]}{x_{k+m} - x_k}.$$

Así, la tabla de diferencias es:

x_k	$f[x_k]$	$f[x_k, x_{k+1}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$
-2 0 1 3	0 2 3 5	$\frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0} = \frac{2-0}{0-(-2)} = 1$ $\frac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1} = \frac{3-2}{1-0} = 1$ $\frac{f[x_3]-f[x_2]}{x_3-x_2} = \frac{5-3}{3-1} = 1$	$\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0} = 0$ $\frac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1} = 0$	$\frac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0} =$ $= \frac{0-0}{5-(-2)} = 0$

El polinomio interpolador de grado 3 es:

$$\begin{aligned}
p_3(x) &= f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\
&\quad + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\
&= 0 + 1(x - (-2)) + 0(x - (-2))(x - 0) + 0(x - (-2))(x - 0)(x - 1) \\
&= x + 2.
\end{aligned}$$

6. (3 PUNTOS) Calcule la siguiente integral definida

$$I = \int_0^1 \mathrm{e}^{-2x} \ln\left(1+\mathrm{e}^{2x}\right) dx.$$

Sugerencia: Aplique el cambio de variable $\mathrm{e}^{2x} = t$ y después utilice integración por partes.

Solución: Se hace el cambio $\mathrm{e}^{2x} = t$. Entonces es $2\,\mathrm{e}^{2x}\, dx = dt$, o $dx = \frac{1}{2t}dt$ y t varía de 1 a e^2, quedando

$$I = \frac{1}{2}\int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{1}{t^2} \ln(1+t)\, dt.$$

Integramos por partes, tomando

$$\begin{array}{ll} u = \ln(1+t)\,, & u' = \frac{1}{1+t}, \\ v = -t^{-1}, & v' = t^{-2}, \end{array}$$

obteniéndose

$$I = \frac{1}{2}\left[-t^{-1}\ln(1+t)\,|_1^{\mathrm{e}^2} + \int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{1}{t(1+t)} dt \right].$$

Consideramos la segunda integral I_1, que puede ser reescrita como

$$I_1 = \int_1^{\mathrm{e}^2} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}\right) dt = \left[\ln t - \ln(1+t)\,|_1^{\mathrm{e}^2}\right] = \ln\left(\frac{t}{t+1}\right)\Bigg|_1^{\mathrm{e}^2}.$$

Luego, es

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\left[\ln 2 - \mathrm{e}^{-2}\ln\left(1+\mathrm{e}^2\right) + \ln\left(\frac{\mathrm{e}^2}{\mathrm{e}^2+1}\right) - \ln\frac{1}{2}\right] \\ &= \ln 2 - \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2}\ln\left(1+\mathrm{e}^2\right) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\mathrm{e}^2}{\mathrm{e}^2+1}\right). \end{aligned}$$

Este ejercicio también se puede resolver integrando, en primer lugar, por partes y efectuando el cambio de variable a continuación. Además, se puede obtener primero una primitiva de $\mathrm{e}^{-2x}\ln\left(1+\mathrm{e}^{2x}\right)$, deshacer luego todos los cambios de variable realizados, para calcular la integral definida en último lugar.