E.T.S. INGENIEROS INDUSTRIALES. U.N.E.D
CÁLCULO INFINITESIMAL I. Cod: 521020
1^a PRUEBA PRESENCIAL. 1^{a}Semana. Enero de 2006.

1. (4 PUNTOS) Calcular la integral

$$I = \int \frac{x\left(3-x^2\right)\operatorname{arctg} x}{\left(1-x^2\right)^{3/2}} dx$$

Solución: Comenzamos aplicando integración por partes:

$$\begin{aligned} u &= \operatorname{arctg} x \qquad du = \frac{1}{1+x^2}dx \\ dv &= \frac{x\left(3-x^2\right)}{\left(1-x^2\right)^{3/2}} \qquad v = \int \frac{x\left(3-x^2\right)}{\left(1-x^2\right)^{3/2}}dx = I_1 \end{aligned}$$

Resulta una nueva integral, I_1, que se hace con el cambio de variable $x^2 = t$, $2xdx = dt$,

$$I_1 = v = \frac{1}{2}\int \frac{3-t}{(1-t)^{3/2}}dt$$

Este última integral se resuelve aplicando un nuevo cambio $1-t = z^2$, $dt = -2zdz$

$$I_1 = v = \frac{1}{2}\int \frac{2+z^2}{z^3}(-2z)\,dz = -\int \frac{2+z^2}{z^2}dz = -\int \frac{2}{z^2}dz - \int dz = \frac{2}{z} - z = \frac{2-z^2}{z}$$

Deshaciendo los cambios, tenemos

$$I_1 = \frac{2-z^2}{z} = \frac{1+t}{\sqrt{1-t}} = \frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

Aplicando finalmente la integración por partes, resulta

$$I = \frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}\operatorname{arctg} x - \int \frac{1}{1+x^2}\frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}\operatorname{arctg} x - \arcsin x + C$$

Para resolver I_1 podíamos haber aplicado el cambio $x = \operatorname{sen} z$, $dx = \cos z dz$, $1-x^2 = \cos^2 z$ o haber resuelto por partes con

$$\begin{aligned} f &= 3-x^2 \qquad f' = -2xdx \\ g' &= \frac{x}{\left(1-x^2\right)^{3/2}}dx \qquad g = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

2. (4 PUNTOS) Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x^4 - 2x^2 & \text{con } x \le 0 \\ x - x^2 & \text{con } x > 0 \end{cases}$$

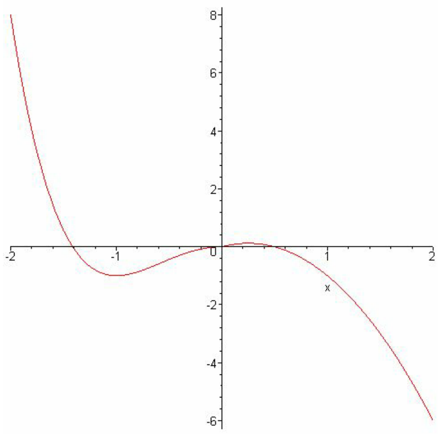
   (a) Estudiar su continuidad y derivabilidad.
   (b) Calcular sus extremos relativos y absolutos en el intervalo $[-2, 2]$.

Solución:

(a) Para $x < 0$ y $x > 0$ es continua, porque es una función polinómica. En $x = 0$, tenemos

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x^4 - 2x^2 = 0 \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x - x^2 = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$$

por lo que $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$. La representación gráfica de f es la siguiente



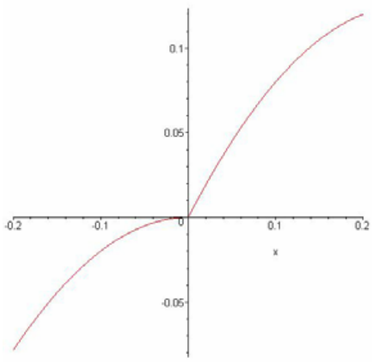
Para ver si es derivable, para $x \neq 0$ hacemos

$$\begin{array}{rcl} \forall x & < & 0 \qquad f'(x) = 4x^3 - 4x \\ \forall x & < & 0 \qquad f'(x) = 1 - 2x \end{array}$$

por lo que es derivable. En $x = 0$

$$\begin{aligned} f'\left(0^-\right) &= \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^4 - 2x^2 - 0}{x} = \lim_{x\to 0^-} x^3 - 2x = 0 \\ f'\left(0^+\right) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x - x^2 - 0}{x} = \lim_{x\to 0^+} 1 - x = 1 \end{aligned}$$

Como $f'(0^-) \neq f'(0^+)$, entonces no es derivable en $x = 0$. Gráficamente, esta circunstacia se representa en la siguiente figura



(b) Primero determinamos los puntos críticos mediante $f'(x) = 0$. Si $x < 0$, debe ser $f'(x) = 0$

$$4x^3 - 4x = 0 \Longrightarrow x = 0 \text{ ó } x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow \begin{array}{r} x = 0 \notin (-\infty, 0) \\ x = 1 \notin (-\infty, 0) \\ x = -1 \quad \text{punto crítico} \end{array}$$

Si $x > 0$, la derivada se anula cuando

$$1 - 2x = 0 \Longrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ que es un punto crítico}$$

Para estudiar si son extremos relativos, debemos ver el signo de la derivada segunda

$$f''(x) = \begin{array}{cc} 12x^2 - 4 & \forall x < 0 \\ -2 & \forall x > 0 \end{array} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} f''(-1) = 8 > 0 & \text{Mínimo relativo en } x = -1 \\ f''\left(\frac{1}{2}\right) = -2 < 0 & \text{Máximo relativo en } x = \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

En $x = 0$ no hay extremo, pues $f'(x)$ es positiva en un entorno de $x = 0$. Esto significa que en un entorno de este punto, es creciente.

En cuanto a los extremos absolutos, al ser $[-2,2]$ un conjunto cerrado y acotado (compacto) en $\mathbb{R}$, sabemos que se encuentran entre los extremos relativos y los extremos del intervalo. Estudiamos el valor de f en los extremos de $[-2,2]$.

$$f(-2) = 8 \qquad f(2) = -2$$

Como $f(-1) = -1$ es el mínimo relativo y $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$ es el máximo relativo, entonces en $x = 2$ tenemos el mínimo absoluto y en $x = -2$ el máximo absoluto.

3. (2 PUNTOS) Responder a las siguientes cuestiones cortas:

   (a) Obtener la derivada de $f(x) = \ln[\operatorname{sen}^3\left(2x^3+4\right)]$

   (b) Calcular el límite de la sucesión $a_n = \left(\dfrac{3n^2+2n}{n^3-3n+2}\right)^{3n^2+2}$

   Solución:

   (a) $f'(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\left(2x^3+4\right)} 18x^2 \cos\left(2x^3+4\right) = 18x^2 \cot\left(2x^3+4\right)$

   (b) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$