Código asignatura	Nombre asignatura
68041016	**Cálculo** **(Ing. Eléctrica e Ing. en Tecnología Ind.)**
Fecha alta y origen	Convocatoria
05/11/2013 Equipo Docente	Septiembre 2010 (Original)

E.T.S. INGENIEROS INDUSTRIALES. U.N.E.D
GRADO EN INGENIERÍA ELÉCTRICA
CÁLCULO. 1^{o}CURSO. CÓDIGO: 63011021
CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE DE 2010.

PREGUNTAS CORTAS

1. (1 PUNTO) La función $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ está definida para $x \neq 0$. ¿Se puede definir en $x = 0$ de forma que sea continua? Justifique su respuesta.

   Solución: Sí, porque podemos calcular el límite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1,$$

   aplicando la regla de L'Hôpital. Entonces podemos redefinir

$$f(0) = 1.$$

   Así se cumpliría que

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 1$$

   y la función es continua en $x = 0$.

2. (1 PUNTO) Dada la función

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1},$$

   ¿tiene asíntotas verticales? Si es así, ¿cuál es su ecuación? Razone la respuesta.

   Solución: Sí tiene asíntotas verticales, las rectas $x = 1, x = -1$, porque

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to -1^+} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x \to -1^-} f(x) = -\infty.$$

3. (1 PUNTO) Calcúlese por aproximación la integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \cos x}\, dx$$

   aplicando la regla del trapecio con 3 nodos igualmente espaciados.

   Solución: Los nodos son $0, \pi, 2\pi$ y $f(0) = f(2\pi) = \frac{1}{3}, f(\pi) = 1$. Resultan 2 subintervalos. Según la regla del trapecio, dividiendo (a, b) en 2 intervalos, la integral aproximada es

$$I \approx \frac{b-a}{n} \left(\sum_{k=0}^{n} f(x_k) - \frac{f(a) + f(b)}{2} \right).$$

   En nuestro caso es

$$\begin{aligned} I &\approx \frac{2\pi - 0}{2} \left(f(0) + f(\pi) + f(2\pi) - \frac{f(2\pi) + f(0)}{2} \right) = \frac{2\pi - 0}{2} \left(\frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{3} - \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}}{2} \right) \\ &= \frac{4}{3}\pi. \end{aligned}$$

4. (1 PUNTO) Calcule el gradiente de la función $f(x,y) = y\operatorname{tg} e^x + \cos^2(x+y)$.

Solución:

$$\begin{aligned}\nabla f &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \\ &= \left(ye^x \frac{1}{\cos^2 e^x} - 2\cos(x+y)\operatorname{sen}(x+y), \operatorname{tg} e^x - 2\cos(x+y)\operatorname{sen}(x+y)\right)\end{aligned}$$

EJERCICIOS

5. (3 PUNTOS) Calcule

$$\lim_{x\to 0^+} x^{x^2}.$$

Solución: con derivación logarítmica, sale 0. Es un problema del libro de ejercicios (página 260). Para resolverlo, suponemos que tiene límite y es l. Entonces, tomamos logaritmos neperianos:

$$\ln l = \ln \lim_{x\to 0^+} x^{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \ln x^{x^2} = \lim_{x\to 0^+} x^2 \ln x.$$

Si hacemos directamente este límite, tenemos una indeterminación del tipo $0\cdot(-\infty)$, que podemos transformar en una indeterminación del tipo $\infty \cdot (-\infty)$ para aplicar la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0^+} x^2 \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-2/x^3} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{2}\frac{x^3}{x} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+} x^2 = 0.$$

No hay que olvidarse de que es el límite del logaritmo neperiano y que debemos encontrar el valor de l:

$$\ln l = 0 \quad \Longrightarrow \quad l = \lim_{x\to 0^+} x^{x^2} = 1.$$

6. (3 PUNTOS) Sabiendo que la función $f(x,y) = x - y$ alcanza en el conjunto $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 + y^2 = 1\}$ extremos absolutos, determine en qué puntos los alcanza.

Solución: Se aplica el método de los multiplicadores de Lagrange a

$$\phi_\lambda(x,y) = x - y + \lambda\left(x^2 + y^2 - 1\right).$$

Obtenemos los puntos críticos de la función auxiliar anterior

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{\partial \phi_\lambda}{\partial x}(x,y) = 1 + 2\lambda x = 0, \\ \dfrac{\partial \phi_\lambda}{\partial y}(x,y) = -1 + 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 - 1 = 0,\end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{r}2\lambda x = -1, \\ 2\lambda y = 1, \\ x^2 + y^2 - 1 = 0.\end{array}$$

Las soluciones son: $\left\{x = \frac{1}{2}\sqrt{2}, y = -\frac{1}{2}\sqrt{2}, \lambda = -\frac{1}{2}\sqrt{2}\right\}, \left\{x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}, y = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \lambda = \frac{1}{2}\sqrt{2}\right\}$. En estos puntos alcanza el máximo y el mínimo, porque es un conjunto cerrado y acotado. Como

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}, \quad f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2},$$

en $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ alcanza el máximo absoluto y en $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ el mínimo absoluto.