E.T.S. INGENIEROS INDUSTRIALES. U.N.E.D
CÁLCULO INFINITESIMAL I cod: 521020
1^a PRUEBA PRESENCIAL. 2^asemana. Febrero de 2006.

1. (4 PUNTOS) Obténgase, con un error menor que 0.0001, el desarrollo de Taylor de $f(x) = \operatorname{senh} x$ en $x = 0$ para puntos del intervalo $[-1, 1]$. ¿De qué orden es el polinomio de Taylor?

Solución: Para ver el orden del Polinomio de Taylor tenemos que buscar $n \in \mathbb{N}$, tal que el resto de Lagrange

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{n+1}(\xi) x^n < 0.0001$$

$\forall x \in [-1, 1]$. Tenemos que calcular la derivada n-ésima de $f\,(x)$

$$\begin{array}{ll}
f(x) = \operatorname{senh} x & f(0) = 0 \\
f'(x) = \cosh x & f'(0) = 1 \\
f''(x) = \operatorname{senh} x & f''(0) = 0 \\
... & ... \\
f^{2n)}(x) = \operatorname{senh} x & f^{2n)}(x) = 0 \\
f^{2n+1)}(x) = \cosh x & f^{2n+1)}(x) = 1
\end{array}$$

Las derivadas de orden par son 0 en $x = 0$. Por tanto, los polinomios de orden $2n - 1$ y $2n$ van a coincidir. Por eso, vamos a buscar un polinomio de orden $2n$, ya que en él será menor el resto de Lagrange. Para este polinomio, el resto de Lagrange, que queremos que sea menor que 0.0001, es

$$\begin{aligned}
|R_{2n+1}(x)| &= \left| \frac{1}{(2n+1)!} f^{2n+1)}(\xi) x^{2n+1} \right| = \left| \frac{1}{(2n+1)!} (\cosh \xi) x^{2n+1} \right| \\
&\leq \frac{1}{(2n+1)!} \left(\frac{e^{\xi} + e^{-\xi}}{2} \right) \leq \frac{1}{2(2n+1)!} (e + e) = \frac{1}{(2n+1)!} e
\end{aligned}$$

porque $|\xi| \leq |x| \leq 1$. Probando con distinto valores de n, se tiene que

$$\begin{aligned}
R_3(x) &\leq \frac{1}{3!} e \approx 0.45305 \\
R_5(x) &\leq \frac{1}{5!} e \approx 0.022652 \\
R_7(x) &\leq \frac{1}{7!} e \approx 0.00053934 \\
R_9(x) &\leq \frac{1}{9!} e \approx 0.0000074909 < 0'0001
\end{aligned}$$

Entonces hay que determinar el polinomio de orden 8, que es

$$\begin{aligned}
P_8\,(x) &= f\,(0) + f'\,(0)\,(x-0) + \frac{f''\,(0)}{2!}\,(x-0)^2 + \ldots + \frac{f^{8)}\,(0)}{8!}\,(x-0)^8 \\
&= 0 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + 0 \cdot x^4 + \frac{1}{5!} x^5 + 0 \cdot x^6 + \frac{1}{7!} x^7 + 0 \cdot x^8 \\
&= x + \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 + \frac{1}{7!} x^7
\end{aligned}$$

2. Resuélvase la siguiente integral

$$I = \int \frac{e^x + e^{4x}}{3 + e^{2x}} dx$$

Solución: Se hace el cambio de variable $t = e^x$. Entonces

$$dt = e^x dx = t dx \Longrightarrow dx = \frac{1}{t} dt$$

y

$$I = \int \frac{t + t^4}{3 + t^2} \frac{1}{t} dt = \int \frac{t^3 + 1}{t^2 + 3} dt$$

que es una integral racional. Se resuelve dividiendo $t^3 + 1$ entre $t^2 + 3$:

$$t^3 + 1 = t \left(t^2 + 3\right) - 3t + 1$$

Así, la integral queda:

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{t^3 + 1}{t^2 + 3} dt = \int \left(t + \frac{-3t + 1}{t^2 + 3}\right) dt = \int t dt + \int \frac{-3t + 1}{t^2 + 3} dt \\
&= \frac{1}{2} t^2 - 3 \int \frac{t}{t^2 + 3} dt + \int \frac{1}{t^2 + 3} dt \\
&= \frac{1}{2} t^2 - 3 \int \frac{t}{t^2 + 3} dt + \int \frac{1}{t^2 + 3} dt \\
&= \frac{1}{2} t^2 - \frac{3}{2} \ln\left(t^2 + 3\right) + \frac{1}{3} \int \frac{1}{(t/\sqrt{3})^2 + 1} dt \\
&= \frac{1}{2} t^2 - \frac{3}{2} \ln\left(t^2 + 3\right) + \frac{1}{3} \sqrt{3} \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) + C
\end{aligned}$$

Ahora tenemos que deshacer el cambio de variable, resultando

$$I = \frac{1}{2} e^{2x} - \frac{3}{2} \ln\left(e^{2x} + 3\right) + \frac{1}{3} \sqrt{3} \operatorname{arctg}\left(\frac{e^x}{\sqrt{3}}\right) + C$$

3. Respóndase a las siguientes cuestiones cortas:

   (a) ¿Tiene asíntotas horizontales la función $f(x) = \dfrac{3x^2 + x}{x^2 - 1}$? Si las tiene ¿qué ecuación tienen?. Justifíquese la respuesta.

   (b) Determínese la derivada de la función

   $$f(x) = \left(x^2 + 1\right) e^{\operatorname{sen}^2 x}$$

Solución:

(a) Las asíntotas horizontales existen cuando $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)) = a$. En este caso

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 + x}{x^2 - 1} = 3 \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{3x^2 + x}{x^2 - 1} = 3$$

Por tanto, tiene una asíntota horizontal y su ecuación es $y = 3$.

(b) La derivada de $f(x)$ es

$$f'(x) = 2x e^{\operatorname{sen}^2 x} + \left(x^2 + 1\right) e^{\operatorname{sen}^2 x} 2 \operatorname{sen} x \cos x$$