ÁLGEBRA

ESCUELA DE INGENIERÍA INFORMÁTICA

Solución de ejercicios

Ejercicios n^{o}2 y n^{o}3 de la hoja de aplicaciones lineales

2.- Sea $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación entre espacios vectoriales tal que:

$$f(1,0,0,0) = (1,2,3) \wedge f(1,1,0,0) = (0,1,1) \wedge f(1,1,1,0) = (2,0,1) \wedge f(1,1,1,1) = (2,1,-1)$$

Todos los vectores tienen sus coordenadas respecto a las bases canónicas.

(a) Comprobar que define una aplicación lineal y encontrar la matriz asociada a en las bases canónicas.
SOLUCIÓN:
Llamamos $\overline{v}_1 = (1,0,0,0), \overline{v}_2 = (1,1,0,0), \overline{v}_3 = (1,1,1,0), \overline{v}_4 = (1,1,1,1)$, que son cuatro vectores de $\mathbb{R}^4$ de los que tenemos definida la imagen, por tanto nos faltaría comprobar que son linealmente independientes para comprobar que forman una base y así tener definida la imagen de una base de $\mathbb{R}^4$. Para comprobar que los vectores $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3, \overline{v}_4$ son l.i., tenemos que ver si su rango es 4:

$$rango \begin{pmatrix} \overline{v}_1 & \overline{v}_2 & \overline{v}_3 & \overline{v}_4 \end{pmatrix} = rango \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4$$

ya que es una matriz triángular y por tanto son l.i. y por tanto una base $B' = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3, \overline{v}_4\}$. Así la matriz asociada a f en las bases B' B será $M_{B'B} = (f(\overline{v}_1)\, f(\overline{v}_2)\, f(\overline{v}_3) f(\overline{v}_4)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Es decir, tenemos $Y = M_{B'B}X'$ tal que X' es un vector cuyas coordenadas estan respecto de B'. Como sabemos que $X = CX'$ donde $C = (\overline{v}_1\, \overline{v}_2\, \overline{v}_3 \overline{v}_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, entonces $X' = C^{-1}X \Longrightarrow Y = M_{B'B}C^{-1}X = AX \Longrightarrow A = M_{B'B}C^{-1}$.

Obtención de C^{-1} por el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)^{1^a-2^a} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)^{2^o \to 3^a} =$$

$$= \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)^{3^a-4^a} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\text{por tanto obtenemos } C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y así:}$$

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2&2\\2&1&0&1\\3&1&1&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&2&0\\2&-1&-1&1\\3&-2&0&-2\end{pmatrix}$$

(b) Dar la base, dimensión y ecuaciones del núcleo y la imagen.
SOLUCIÓN:
Como $\ker f\equiv AX=O\Rightarrow\begin{pmatrix}1&-1&2&0\\2&-1&-1&1\\3&-2&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

Primero estudiamos el rango del sistema para comprobar cuantas ecuaciones l.i. tenemos:

$$rang\begin{pmatrix}1&-1&2&0\\2&-1&-1&1\\3&-2&0&-2\end{pmatrix}=rang\begin{pmatrix}1&-1&2&0\\0&1&-5&1\\0&1&-6&-2\end{pmatrix}=$$

$$=rang\begin{pmatrix}1&-1&2&0\\0&1&-5&1\\0&0&-1&-3\end{pmatrix}=3$$

por tanto $\dim\ker f=\dim\mathbb{R}^4-n^o ec.l.i.=4-3=1$, por lo que tenemos un grado de libertad. Y su base estará formada por un vector que verifique las ecuaciones, utilizamos la última matriz que es un sistema equivalente y más sencillo que el primero:

$$\left\{\begin{array}{r}x_1-x_2+2x_3=0\\x_2-5x_3+x_4=0\\-x_3-3x_4=0\end{array}\right\}\quad\begin{array}{c}\text{Si g.l. es } x_4=1\Rightarrow\\-x_3=3x_4\Rightarrow x_3=-3\Rightarrow\\x_2=5x_3-x_4\Rightarrow x_2=-16\Rightarrow\\x_1=x_2-2x_3\Rightarrow x_1=-10\end{array}$$

así, $B_{\ker f}=\{(-10,-16,-3,1)\}$.
Por otra parte, sabemos que $\dim\mathbb{R}^4=\dim imgf+\dim\ker f$, entonces $\dim imgf=3$.
Entonces si $\left\{\begin{array}{l}imgf\subseteq\mathbb{R}^3\\\dim imgf=3\end{array}\right.\Rightarrow imgf\equiv\mathbb{R}^3$, por tanto no tiene ecuaciones y nos sirve cualquier base de $\mathbb{R}^3$, como $B_{imgf}=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

(c) Dar base, dimensión y ecuaciones de la imagen del subespacio $W\equiv\left\{\begin{array}{l}x_1-x_3=0\\x_2-x_4=0\end{array}\right.$

SOLUCIÓN:
Como $\dim W=\dim\mathbb{R}^4-n^o ec.l.i.=4-2=2$, su base estará formada por dos vectores l.i. que verifique sus ecuaciones, como quiera que tenemos dos grados de libertad, elegimos la parejas $x_1=1\curlywedge x_2=0$ y $x_1=0\curlywedge x_2=1$, lo que nos da los vectores $\overline{w}_1=(1,0,1,0)$ y $\overline{w}_2=(0,1,0,1)$, entonces cualquier vector de W es una combinación lineal de ellos, y por tanto un sistema generador de la imagen de W está formado por $\overline{u}_1=f(\overline{w}_1)$ y $\overline{u}_2=f(\overline{w}_2)$, por lo que:

$$\overline{u}_1=\begin{pmatrix}1&-1&2&0\\2&-1&-1&1\\3&-2&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix}\text{ y}$$

$$\overline{u}_2=\begin{pmatrix}1&-1&2&0\\2&-1&-1&1\\3&-2&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\-4\end{pmatrix}$$

como $rang\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -4 \end{pmatrix} = 2$ forman base de $f(W)$ y $dimf(w) = 2$ y su ecuación sera:

$$rang\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -4 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -4 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = 0 = -3y_2 - 4y_1 + 12y_2 + y_3 = -4y_1 + 9y_2 + y_3 = 0$$

así, la ecuación de $f(W) \equiv 4y_1 - 9y_2 - y_3 = 0$

(d) Dar base, dimensión y ecuaciones de la imagen inversa del subespacio:
$U \equiv \begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 = 0 \\ -y_2 + y_3 = 0 \end{cases}$

SOLUCIÓN:

Como $Y = AX \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$

entonces: $\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 + 2x_3 \\ y_2 = 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \\ y_3 = 3x_1 - 2x_2 - 2x_4 \end{cases}$ y como $U \equiv \begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 = 0 \\ -y_2 + y_3 = 0 \end{cases}$

$$y_1 + y_2 + y_3 = (x_1 - x_2 + 2x_3) + (2x_1 - x_2 - x_3 + x_4) + (3x_1 - 2x_2 - 2x_4) = \\ = 6x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 = 0$$

$$-y_2 + y_3 = -(2x_1 - x_2 - x_3 + x_4) + (3x_1 - 2x_2 - 2x_4) = x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 0$$

por lo tanto $\dim f^{-1}(U) = \dim \mathbb{R}^4 - n^o ec.l.i. = 4 - 2 = 2$, en consecuencia tenemos 2 grados de libertad, y elegimos x_1 y x_2, así:

$$\text{Si } x_1 = 1 \curlywedge x_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_3 - x_4 = -6 \\ x_3 - 3x_4 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_4 = -5 \Rightarrow x_4 = -\frac{5}{2} \\ x_3 = -6 + x_4 = -\frac{17}{2} \end{cases}$$

$$\text{Si } x_1 = 0 \curlywedge x_2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x_3 - x_4 = 4 \\ x_3 - 3x_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_4 = 3 \Rightarrow x_4 = \frac{3}{2} \\ x_3 = 4 + x_4 = \frac{11}{2} \end{cases}$$

así la base será $B_{f^{-1}(U)} = \left\{\bar{u}_1 = \left(1, 0, -\frac{17}{2}, -\frac{5}{2}\right), \bar{u}_2 = \left(0, 1, \frac{11}{2}, \frac{3}{2}\right)\right\}$

3.- Sea $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación entre espacios vectoriales tal que:

$$\begin{matrix} f(1,1,-1,-1) = (1,1,1) \\ f(1,-3,-1,-1) = (0,1,1) \\ f(0,0,1,-1) = (0,0,1) \end{matrix} \wedge \ker f \equiv \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Todos los vectores tienen sus coordenadas respecto a las bases canónicas.

(a) Comprobar que define una aplicación lineal y encontrar la matriz asociada a en las bases canónicas.

SOLUCIÓN:

Llamamos $\overline{v}_1 = (1, 1, -1, -1), \overline{v}_2 = (1, -3, -1, -1), \overline{v}_3 = (0, 0, 1, -1)$, que son tres vectores de $\mathbb{R}^4$ de los que tenemos definida la imagen, por tanto nos faltaría un vector para tener los cuatro posibles de una base, este lo obtendríamos del $\ker f$, así como tenemos tres ecuaciones l.i., tenemos ungrado de libertad, entonces si $x_3 = 1 \Rightarrow x_2 = 2 \wedge x_4 = 1 \wedge x_1 = 0$ y por tanto tenemos que $\overline{v}_4 = (0, 2, 1, 1)$ tal que $f(\overline{v}_4) = (0, 0, 0)$, ahora nos faltaría comprobar que son linealmente independientes para probar que forman una base y así tener definida la imagen de una base de $\mathbb{R}^4$. Para comprobar que los vectores $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3, \overline{v}_4$ son l.i., tenemos que ver si su rango es 4:

$$rango\begin{pmatrix} \overline{v}_1 & \overline{v}_2 & \overline{v}_3 & \overline{v}_4 \end{pmatrix} = rango\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{\substack{2^a-1^a\\3^a+1^a\\4^a+1^a}} =$$

$$rango\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{4^o+3^a} = rango\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 4$$

ya que es una matriz triángular y por tanto son l.i. y por tanto una base $B' = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3, \overline{v}_4\}$. Así la matriz asociada a f en las bases B' B será:

$$M_{B'B} = (f(\overline{v}_1)\, f(\overline{v}_2)\, f(\overline{v}_3) f(\overline{v}_4)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Es decir, tenemos $Y = M_{B'B}X'$ tal que X' es un vector cuyas coordenadas estan respecto de B'. Como sabemos que $X = CX'$ donde

$$C = (\overline{v}_1\, \overline{v}_2\, \overline{v}_3 \overline{v}_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

entonces $X' = C^{-1}X \Longrightarrow Y = M_{B'B}C^{-1}X = AX \Longrightarrow A = M_{B'B}C^{-1}$.
Obtención de C^{-1} por el método de Gauss: (operamos por filas)

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)^{\substack{2^a-1^a\\3^a+1^a\\4^a+1^a}} =$$

$$= \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)^{-\frac{1}{4}\times 2^a} =$$

$$= \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)^{1^a-2^a} =$$

$$= \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)^{4^a+3^a} =$$

$$= \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)^{\frac{1}{2}4^a} =$$

$$= \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)^{\substack{1^a-\frac{1}{2}4^a \\ 2^a+\frac{1}{2}4^a \\ 3^a-4^a}} =$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

por tanto obtenemos $C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ y así:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} =$$

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

(b) Dar la base, dimensión y ecuaciones del núcleo y la imagen.

SOLUCIÓN:

Como $\ker f \equiv \left\{ \begin{array}{r} x_1 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{array} \right.$ tenemos claramente 3 ecuaciones l.i., entonces

$$\dim \ker f = \dim \mathbb{R}^4 - n^o ec.l.i. = 4 - 3 = 1$$

por lo tanto la base del núcleo tiene un sólo vector, que puede ser el que habíamos visto antes: $B_{\ker f} = \{(0,2,1,1)\}$.

Por otra parte, sabemos que:

$$\dim \mathbb{R}^4 = \dim imgf + \dim \ker f \Longrightarrow \dim imgf = 3$$

Entonces si $\left\{ \begin{array}{c} imgf \subseteq \mathbb{R}^3 \\ \dim imgf = 3 \end{array} \right. \Rightarrow imgf \equiv \mathbb{R}^3$, por tanto no tiene ecuaciones y nos sirve cualquier base de $\mathbb{R}^3$, como $B_{imgf} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

(c) Dar la base, dimensión y ecuaciones de la imagen del subespacio:

$$W \equiv \left\{ \begin{array}{r} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{array} \right.$$

SOLUCIÓN:
Como $\dim W = \dim \mathbb{R}^4 - n^o ec.l.i. = 4 - 2 = 2$, su base estará formada por dos vectores l.i. que verifique sus ecuaciones, como quiera que tenemos dos grados de libertad, elegimos la parejas $x_1 = 1 \curlywedge x_3 = 0$ y $x_1 = 0 \curlywedge x_3 = 1$, lo que nos da los vectores $\overline{w}_1 = (1, -1, 0, 0)$ y $\overline{w}_2 = (0, -1, 1, 1)$, entonces cualquier vector de W es una combinación lineal de ellos, y por tanto un sistema generador de la imagen de W está formado por $\overline{u}_1 = f(\overline{w}_1)$ y $\overline{u}_2 = f(\overline{w}_2)$, por lo que:

$$\overline{u}_1 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ y}$$

$$\overline{u}_2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-3}{4} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{como } rang\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -\frac{3}{4} & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \text{ forman base de } f(W) \text{ y } dim f(w) = 2$$

$$\text{y su ecuación sera: } rang\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -\frac{3}{4} & 0 & 0 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -\frac{3}{4} & 0 & 0 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = 0 = \frac{3}{4}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \frac{3}{4}(y_3 - y_2) \Longrightarrow y_3 - y_2 = 0$$

$$\text{así, la ecuación de } f(W) \equiv y_2 - y_3 = 0$$

(d) Dar la base, dimensión y ecuaciones de la imagen inversa del subespacio:

$$U \equiv \left\{ \begin{array}{r} y_1 = 0 \\ y_2 - y_3 = 0 \end{array} \right.$$

SOLUCIÓN:

$$\text{Como } Y = AX \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$entonces: \left\{ \begin{array}{l} y_1 = \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_2 - \frac{1}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_4 \\ y_2 = x_1 \\ y_3 = x_1 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \end{array} \right. \qquad y como U \equiv \left\{ \begin{array}{r} y_1 = 0 \\ y_2 - y_3 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$$\left. \begin{array}{r} y_1 = \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_2 - \frac{1}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_4 = 0 \Longrightarrow x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ y_2 - y_3 = x_1 - \left(x_1 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4\right) = -\frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \Rightarrow x_3 - x_4 = 0 \end{array} \right\} \equiv f^{-1}(U)$$

por lo tanto $\dim f^{-1}(U) = \dim \mathbb{R}^4 - n^o ec.l.i. = 4 - 2 = 2$, en consecuencia tenemos 2 grados de libertad, y elegimos x_1 y x_3, así:

$$\text{Si } x_1 = 1 \curlywedge x_3 = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \Longrightarrow x_2 = -1 \end{array} \right. \Rightarrow \bar{u}_1 = (1, -1, 0, 0)$$

$$\text{Si } x_1 = 0 \curlywedge x_3 = 1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x_4 = 1 \\ x_2 - x_3 - x_4 = 0 \Longrightarrow x_2 = 2 \end{array} \right. \Rightarrow \bar{u}_2 = (0, 2, 1, 1)$$

así la base será $B_{f^{-1}(U)} = \{\bar{u}_1 = (1, -1, 0, 0), \bar{u}_2 = (0, 2, 1, 1)\}$