द्विपद प्रमेय

Binomial Theorem

${}^nC_r$ = द्विपद गुणांक

* $${}^nC_r = \frac{|\underline{n}}{|\underline{r}\;|\underline{n-r}}$$

* $${}^nC_n = \frac{|\underline{n}}{|\underline{n}\;|\underline{n-n}} = \frac{|\underline{n}}{|\underline{n}\;|\underline{0}} = \frac{|\underline{n}}{|\underline{n}} = 1$$

घात	गुणांक								
0	${}^0C_0$ = 1								
1	${}^1C_0$ = 1	${}^1C_1$ = 1							
2	${}^2C_0$ = 1	${}^2C_1$ = 2	${}^2C_2$ = 1						
3	${}^3C_0$ = 1	${}^3C_1$ = 3	${}^3C_2$ = 3	${}^3C_3$ = 1					
4	${}^4C_0$ = 1	${}^4C_1$ = 4	${}^4C_2$ = 6	${}^4C_3$ = 4	${}^4C_4$ = 1				
5	${}^5C_0$ = 1	${}^5C_1$ = 5	${}^5C_2$ = 10	${}^5C_3$ = 10	${}^5C_4$ = 5	${}^5C_5$ = 1			
6	${}^6C_0$ = 1	${}^6C_1$ = 6	${}^6C_2$ = 15	${}^6C_3$ = 20	${}^6C_4$ = 15	${}^6C_5$ = 6	${}^6C_6$ = 1		
7	${}^7C_0$ = 1	${}^7C_1$ = 7	${}^7C_2$ = 21	${}^7C_3$ = 35	${}^7C_4$ = 35	${}^7C_5$ = 21	${}^7C_6$ = 7	${}^7C_7$ = 1	
8	${}^8C_0$ = 1	${}^8C_1$ = 8	${}^8C_2$ = 28	${}^8C_3$ = 56	${}^8C_4$ = 70	${}^8C_5$ = 56	${}^8C_6$ = 28	${}^8C_7$ = 8	${}^8C_8$ = 1

Date / /

9 $\quad {}^9C_0 \quad {}^9C_1 \quad {}^9C_2 \quad {}^9C_3 \quad {}^9C_4 \quad {}^9C_5 \quad {}^9C_6 \quad {}^9C_7 \quad {}^9C_8 \quad {}^9C_9$

$= 1 \quad = 9 \quad = 36 \quad = 84 = 126 = 126 \quad = 84 = 36 = 9 = 1$

10 $\quad {}^{10}C_0 \quad {}^{10}C_1 \quad {}^{10}C_2 \quad {}^{10}C_3 \quad {}^{10}C_4 \quad {}^{10}C_5 \quad {}^{10}C_6 \quad {}^{10}C_7 \quad {}^{10}C_8$

$= 1 \quad = 10 \quad = 45 \quad = 120 \quad = 210 \quad = 252 \quad = 210 \quad = 120 \quad = 45$

${}^{10}C_9 \quad {}^{10}C_{10}$

$= 10 \quad = 1$

Ex → 7.1

~~निम्न व्यंजकों का प्रसार कीजिए~~ :-

(i) $(1-2x)^5$

हल $= [1+(-2x)]^5$

$\Rightarrow {}^5C_0(1)^{5-0}(-2x)^0 + {}^5C_1(1)^{5-1}(-2x)^1 + {}^5C_2(1)^{5-2}(-2x)^2 + {}^5C_3(1)^{5-3}(-2x)^3 + {}^5C_4(1)^{5-4}(-2x)^4 + {}^5C_5(1)^{5-5}(-2x)^5$

$\Rightarrow {}^5C_0(1)^5 + {}^5C_1(-2x)^1 + {}^5C_2(-2x)^2 + {}^5C_3(-2x)^3 + {}^5C_4(-2x)^4 + {}^5C_5(-2x)^5$

$= 1 + 5(-2x) + 10(4x^2) + 10(-8x^2) + 5(16x^4) + 1 \times (-32x^5)$

$= 1 - 10x + 40x^2 - 80x^3 + 80x^4 - 32x^5$

(ii) $\left[\frac{2}{x} - \frac{x}{2}\right]^5$

$\Rightarrow \left[\frac{2}{x} + \left(\frac{-x}{2}\right)\right]^5$

Date

formula :-

$(a+b)^n = {}^nC_0 a^n + {}^nC_1 a^{n-1} b + {}^nC_2 a^{n-2} b^2 + \dots +$
${}^nC_{n-1} a . b^{n-1} + {}^nC_n a^n$

$\Rightarrow {}^5C_0 \left(\frac{2}{x}\right)^{5-0} \left(\frac{-x}{2}\right)^0 + {}^5C_1 \left(\frac{2}{x}\right)^{5-1} \left(\frac{-x}{2}\right)^1 + {}^5C_2 \left(\frac{2}{x}\right)^{5-2} \left(\frac{-x}{2}\right)$
$+ {}^5C_3 \left(\frac{2}{x}\right)^{5-3} \left(\frac{-x}{2}\right)^3 + {}^5C_4 \left(\frac{-x}{2}\right)^4 \left(\frac{2}{x}\right)^{5-4} + {}^5C_5 \left(\frac{2}{x}\right)$
$\left(\frac{-x}{2}\right)^5$

$\Rightarrow \frac{32}{x^5} + 5 \times \frac{16}{x^4} \times \left(\frac{-x}{2}\right) + 10 \times \frac{8}{x^3} \times \left(\frac{x^2}{4}\right) + 10 \times \left(\frac{4}{x^2}\right)$
$\times \left(\frac{-x^3}{3}\right) + 5 \times \left(\frac{2}{x}\right)\left(\frac{x^4}{16}\right) + 1 \times \times \left(\frac{-x^5}{32}\right)$

$\Rightarrow \frac{32}{x^5} - \frac{40}{x^3} + \frac{20}{x} - 5x + \frac{5}{8} x^3 - \frac{x^5}{32}$

(iii) $(2x-3)^6$
$= [2x + (-3)]^6$

हल ${}^6C_0 (2x)^{6-0} (-3)^0 + {}^6C_1 (2x)^{6-1} (-3)^1 + {}^6C_2 (2x)^{6-2} (-3)^2 +$
${}^6C_3 (2x)^{6-3} (-3)^3 + {}^6C_4 (2x)^{6-4} (-3)^4 + {}^6C_5 (2x)^{6-5} (-3)^5$
$+ {}^6C_6 (2x)^{6-6} (-3)^6$

$= 1 \times (2x)^6 \times 1 + 6 \times (2x)^5 (-3) + 15 (2x)^4 \times (9) + 20$
$(2x)^3 (-27) + 15 (2x)^2 (81) + 6 (2x) (-243) + 1 \times 1 \times 729$

Date / /

$= 64x^6 + 6 \times 32x^5 \times (-3) + 15 \times 16x^4 \times 9 + 20 \times 8x^3 \times (-27) + (15) \times 4x^2 \times 81 + 6 \times 2x \times (-24) + 729$

$= 64x^6 - 576x^5 + 2160x^4 - 4320x^3 + 4860x^2 - 2916x + 729$

(iv) $\left[x + \frac{1}{x}\right]^6$

हल $\;{}^6C_0 (x)^{6-0} \left(\frac{1}{x}\right)^0 + {}^6C_1 (x)^{6-1} \left(\frac{1}{x}\right)^1 + {}^6C_2 (x)^{6-2} \left(\frac{1}{x}\right)^2$
$+ {}^6C_3 (x)^{6-3} \left(\frac{1}{x}\right)^3 + {}^6C_4 (x)^{6-4} \left(\frac{1}{x}\right)^4 + {}^6C_5 (x)^{6-5} \left(\frac{1}{x}\right)^5$
$+ {}^6C_6 (x)^{6-6} \left(\frac{1}{x}\right)^6$

$\Rightarrow {}^6C_0 x^6 + {}^6C_1 x^4 + {}^6C_2 \frac{x^4}{x^2} + {}^6C_3 x^3 \times \frac{1}{x^3} + {}^6C_2 x^2$
$\times \frac{1}{x^4} + {}^6C_1 x \times \frac{1}{x^5} + {}^6C_0 \frac{1}{x^6}$

$\Rightarrow x^6 + 6x^4 + 15x^2 + 20 + \frac{15}{x^2} + \frac{6}{x^4} + \frac{1}{x^6}$

Q 6 $(96)^3$
$\Rightarrow (100 - 4)^3$
$[100 + (-4)]^3$

हल $\Rightarrow {}^3C_0 (100)^{3-0} (-4)^0 + {}^3C_1 (100)^{3-1} (-4)^1 + {}^3C_2 (100)^{3-2}$
$(-4)^2 + {}^3C_3 (100)^{3-3} (-4)^3$

$\Rightarrow 1 \times (100)^3 \times 1 + 3 \times (100)^2 (-4) + 3 \times (100)^1 (-4)^2$

$+ 1 \times 1 \times (-4)^3$

$\rightarrow 1000000 - 120000 + 4800 - 64$

$\rightarrow 1004800 - 120064$

$\rightarrow 884736$

Q_7 $(102)^5$

$= (100+2)^5$

हल ${}^5C_0(100)^{5-0}(2)^0 + {}^5C_1(100)^{5-1}(2)^1 + {}^5C_2(100)^{5-2}(2)^2 + {}^5C_3(100)^{5-3}(2)^3 + {}^5C_4(100)^{5-4}(2)^4 + {}^5C_5(100)^{5-5}(2)^5$

$\rightarrow 1 \times (100)^5 \times 1 + 5(100)^4 \times 2 + 10 \times (100)^3 \times 4 + 10(100)^2 \times 8 + 5(100)^1 \times 16 + 1 \times (100)^0 \times 32$

$\rightarrow 10000000000 + 1000000000 + 40000000 + 800000 + 8000 + 32$

$\rightarrow 11040808032$

Q_8 द्विपद प्रमेय का प्रयोग करते हुए बताइए कौन सी संख्या बड़ी है $(1.1)^{10000}$ या 1000

हल $(1.1)^{10000}$

$= (1+0.1)^{10000}$

$= {}^{10000}C_0(1)^{10000-0}(0.1)^0 + {}^{10000}C_1(1)^{10000-1}(0.1)^1 + \ldots$

$= 1 \times 1 \times 1 + 10000 \times 1 \times 0.1 + \ldots$

$1 + 1000 + \ldots$

Date / /

$1001 + - - - -$

$(1.1)^{10000} > 1000$

Q.9 ~~सिद्ध कीजिए कि~~ $\sum_{r=0}^{n} 3r\ {}^nC_r = 4^n$

~~हल~~ $\sum_{r=0}^{n} 3r\ {}^nC_r$

$\Rightarrow (1+x)^n = {}^nC_0 x^0 + {}^nC_1 x + {}^nC_2 x^2 + {}^nC_3 x^3 + {}^nC_4 x^4 + - - - - - + {}^nC_r x^r$

$x = 3$ ~~रखने पर~~,

$(1+3)^n = {}^nC_0 3^0 + {}^nC_1 (3) + {}^nC_2 (3)^2 + {}^nC_3 (3)^3 + {}^nC_4 (3)^4 + - - - - + {}^nC_r (3)^r$

$(4)^n = \sum_{r=0}^{n} 3r\ {}^nC_r$

$\sum_{r=0}^{n} 3r\ {}^nC_r = 4^n$ ~~इति सिद्धम~~

Q.9 $(0.99)^5$ - - - - - - - - - - - - - - कीजिए

हल $\Rightarrow$ $0.99 = 1 - 0.01$

$(0.99)^5 = (1 - 0.01)^5$

${}^5C_0 (1)^5 - {}^5C_1 (1)^4 (0.01) + {}^5C_2 (1)^3 (0.01)^2 - - -$

$= 1 - 5 \times 0.01 + 10 \times 0.0001$

$\Rightarrow 1.001 - 0.05$

$= 0.951$ Ans

7 -) विविध - प्रश्नावली

Q-1 $(a^2+\sqrt{a^2-1})^4 + (a^2-\sqrt{a^2-1})^4$ का मान ज्ञात करो

हल $(a+b)^4 = {}^4C_0 a^4 + {}^4C_1 a^3 b + {}^4C_2 a^2 b^2 + {}^4C_3 ab^3 + {}^4C_4 b^4$

$(a-b)^4 = {}^4C_0 a^4 - {}^4C_1 a^3 b + {}^4C_2 a^2 b^2 - {}^4C_3 ab^3 + {}^4C_4 b^4$

$(a+b)^4 + (a-b)^4$

$= [({}^4C_0 a^4 + \cancel{{}^4C_1 a^3 b} + {}^4C_2 a^2 b^2 + \cancel{{}^4C_3 ab^3} + {}^4C_4 b^4) + ({}^4C_0 a^4 - \cancel{{}^4C_1 a^3 b} + {}^4C_2 a^2 b^2 - \cancel{{}^4C_3 ab^3} + {}^4C_4 b^4)]$

$\Rightarrow 2({}^4C_0 a^4 + {}^4C_2 a^2 b^2 + {}^4C_4 b^4)$

$= 2(a^4 + 6a^2b^2 + b^4)$ [using nC_r]

$2a^4 + 12a^2b^2 + 2b^4$

अब $a = a^2$, $b = \sqrt{a^2-1}$

$(a^2+\sqrt{a^2-1})^4 + (a^2-\sqrt{a^2-1})^4$

$2(a^2)^4 + 12(a^2)^2(\sqrt{a^2-1})^2 + 2(\sqrt{a^2-1})^4$

$= 2a^8 + 12a^4(a^2-1) + 2(a^2-1)^2$

$= 2a^8 + 12a^6 - 12a^4 + 2(a^4 - 2a^2 + 1)$

$= 2a^8 + 12a^6 - 12a^4 + 2a^4 - 4a^2 + 2$

$\Rightarrow 2a^8 + 12a^6 - 10a^4 - 4a^2 + 2$ R

Q-2 यदि और _ _ _ _ _ _ _ _ पूर्णांक है

[संकेत $a^n \cdot (a-b+b)^n$ लिखकर प्रसार कीजिए ।

* त्वरण → जब कोई वस्तु गतिमान अवस्था मे होती है तब वस्तु के वेग परिवर्तन की दर को त्वरण कहते है इसको (a) से लिखते है। यह एक सदिश राशि है। इसका सूत्र

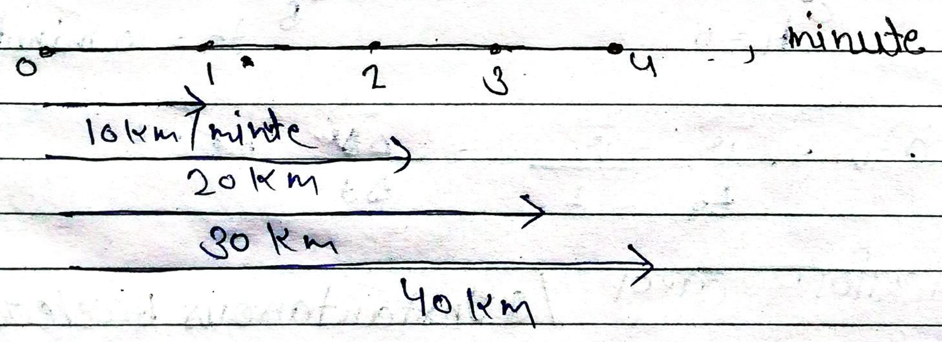
$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$, $m\,sec^{-2}$, $[LT^{-2}]$

* त्वरण के प्रकार

→ त्वरण चार प्रकार का होता है।

1. एक समान त्वरण / Uniform Accleleration

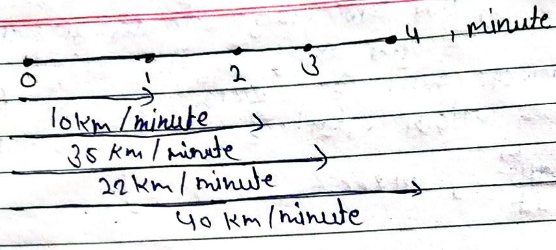
→ जब कोई वस्तु जैसे कार समान समय अंतरालो मे समान वेग मे परिवर्तन करती हो तब वस्तु मे उत्पन्न ऐसे त्वरण को एक समान त्वरण कहते है जैसे फिगर मे दिखाया गया है।



2. असमान त्वरण / Non-Uniform Accleration

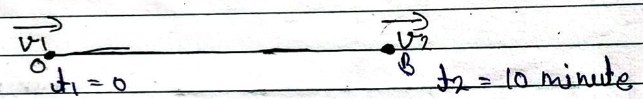
→ जब कोई वस्तु गतिमान अवस्था मे होती है तब समान समय अन्तरालो मे वस्तु के वेग मे परिवर्तन भिन्न-भिन्न हो तब ऐसे त्वरण को असमान त्वरण कहते है। इसको परिवर्ति त्वरण भी कहते है जैसे फिगर मे दिखाया गया है।

DATE / /
PAGE NO.



3. औसत त्वरण / Average Acceleration ($\vec{a}_{av}$ या $\vec{a}$)

-) जब वस्तु जैसे कार गतिमान अवस्था मे हो तब वस्तु के वेग मे हुये कुल परिवर्तन का कुल समय के साथ अनुपात को उस वस्तु का औसत त्वरण कहते है, जैसे निम्न फिगर मे दिखाया गया है।



$\vec{a}_{av} = \frac{\vec{v_2} - \vec{v_1}}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ m sec^{-2}

Imp 4. तात्क्षणिक त्वरण / Instantanous Acceleration ($\vec{a}$)

-) जब कोई वस्तु जैसे कार गतिमान अवस्था मे होती है तब वस्तु का औसत त्वरण ही ~~सुक्ष्म~~ सुक्ष्म ~~समय~~ अन्तराल ($\Delta t \to 0$) तब वस्तु का औसत त्वरण ही उसका तात्क्षणिक त्वरण कहलाता है।

अथवा

सुक्ष्म समय अन्तराल ($\Delta t \to 0$) मे वेग

DATE / /
PAGE NO.

परिवर्तन की दर को उसका तात्क्षणिक त्वरण कहलाता है। अर्थात, औसत त्वरण की परिभाषा के अनुसार, $\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ या $\frac{\vec{v_2} - \vec{v_1}}{t_2 - t_1}$

$\Delta t \to 0$, taking limit on both side

$\lim_{\Delta t \to 0} \vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ $\Delta \to d$

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}} \text{ m sec}^{-2}$$

वेक्टर, पाठ -) सदिश विश्लेषण एवं प्रक्षेप्य गति

-) सामान्तः भौतिक राशियाँ तीन प्रकार की होती है।
1. अदिश राशियाँ, 2. सदिश राशिया 3. टेंसर राशियाँ

1 अदिश राशियाँ -) अदिश राशियाँ वे राशियाँ होती है जिनमे केवल परिमाण होता है दिशा नही होती है तब ऐसी राशियो को अदिश राशियाँ कहते है। जैसे -) दूरी, समय, द्रव्यमान, घनत्व आदि।

अदिश राशि सामान्य राशि होती है इसे हम साधारण रूप से लिखते है जैसे (A)

2. सदिश राशि या वेक्टर राशि / Vector Quantity

→ सदिश राशियाँ वे राशियाँ होती है जिनमे परिमाण के साथ-साथ दिशा भी होती है तब ऐसी राशियो को सदिश राशियाँ कहते है, जैसे - विस्थापन, वेग, त्वरण, बल आदि।

किसी भी राशि जैसे (A) को सदिश रूप मे लिखने के लिए राशि के शिर्ष पर तीर लगाते है जिससे राशि सदिश राशि बन जाती है।

$\vec{A}$ = सदिश राशि

तीर का अर्थ : → = परिमान + दिशा

परिमान = आंकिक मान या संख्यात्मक मान + मात्रक

* परिमाण / Magnitude : किसी राशि का परिमान वह होता है जिसमे उस राशि का आंकिक मान तथा उसका मात्रक का गुणनफल परिमाण कहलाता है। जैसे → 30 Km दूरी चलना।

3. टेंसर राशि / Tansor Quantity

टेंसर राशियाँ वे राशियाँ होती है, जो न तो सदिश होती है और न ही अदिश होती है तब ऐसी राशियो को टेंसर राशि कहते है। जैसे → जड़त्व आघूर्ण / Moment of Inertia

इसको I से लिखते है और इसका सूत्र $I = mr^2$

जहाँ
m = द्रव्यमान / Mass
r = दूरी / distance

* वेक्टर संबंधित कुछ परिभाषाएँ

1. समान वेक्टर / Equal vector

→ ऐसे वेक्टर जिनकी परिमाण व दिशा समान हो तथा एक-दूसरे के समांतर हो तब ऐसे वेक्टर समान वेक्टर कहलाते है, जैसे कि फिगर मे दिखाया गया है।

$\vec{A}$ = 10 Km, East →

$\theta = 0°$, समान्तर

→ $\vec{B}$ = 10 Km, East

2. विपरीत वेक्टर / Opposite Vector

→ विपरीत वेक्टर वे वेक्टर होते है जिनके परिमाण तो समान होते है लेकिन दिशा विपरीत होती है तथा ये दोनो समांतर होते है तब ऐसे वेक्टर को विपरीत वेक्टर कहते है जैसे फिगर मे दिखाया गया है।

$\vec{A}$ = 10 Km, East →

$\theta = 180°$, समांतर

← $\vec{B}$ = 10 Km, West

3. एकांक वेक्टर / Unit Vector

→ एकांक वेक्टर वे वेक्टर होते हैं जिनका परिमाण सदैव एक (1) हो तब ऐसे वेक्टर को एकांक वेक्टर कहते हैं।

एकांक वेक्टर को किसी राशि के शीर्ष पर cap (^) लगाने से बनता है अर्थात $\hat{A}, \hat{i}, \hat{j}$

→ अथवा

→ किसी एकांक वेक्टर को वेक्टर के रूप में भी परिभाषित कर सकते हैं अर्थात् किसी राशि का वेक्टर मान तथा उस राशि का परिमाण का अनुपात भी एकांक वेक्टर कहलाता है।

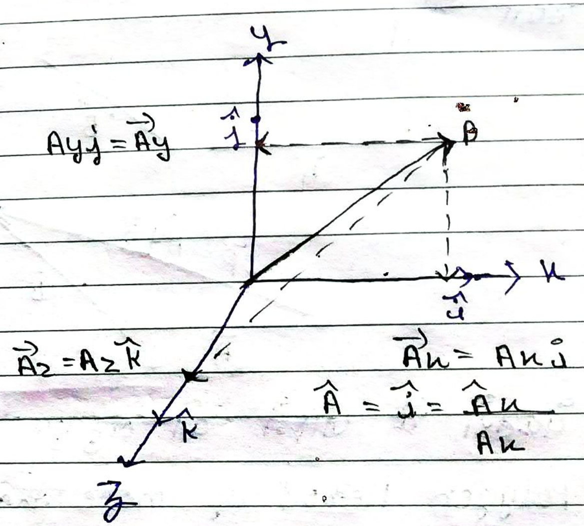
अर्थात $\boxed{\hat{A} = \frac{\vec{A}}{A} = 1}$ या $\boxed{\vec{A} = A\hat{A}}$

~~× 4. लम्बकोणिये वेक्टर ×~~

4. लम्बकोणीय एकांक वेक्टर / Orthogonal Unit Vector.

→ लम्बकोणीय एकांक वेक्टर को तीन अक्ष क्रमशः x अक्ष y अक्ष तथा z अक्ष के रूप में किसी बिन्दु O पर जुड़े हुए तल पर 90° के कोण में लिये जाते हैं। जैसा की फिगर में दिखाया है लेकिन x अक्ष के अनुदिश ($\hat{i}$) एकांक वेक्टर, y अक्ष के अनुदिश ($\hat{j}$) एकांक वेक्टर तथा z अक्ष के अनुदिश ($\hat{k}$) एकांक वेक्टर लिये जाते हैं इस स्थिति में सभी लम्बकोणीय एकांक वेक्टरों का परिमाण सदैव (1) एक होता है।

अर्थात $\boxed{|\hat{i}| = |\hat{j}| = |\hat{k}| = 1}$



$\vec{A} = \vec{A_x} + \vec{A_y} + \vec{A_z}$

$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$

magnitude form मापांक

$|\vec{A}| = |A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}|$

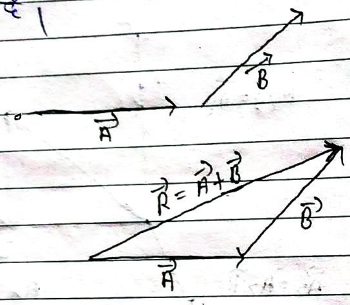
$A = \sqrt{A^2} = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$

$$\boxed{A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}$$

5* दो वेक्टरों को जोड़ना

→ जब किन्हीं दो या अधिक वेक्टरों को जोड़ते हैं ~~यह~~ तभी संभव ~~संभव~~ है जब वे समान प्रकृति के हो तब इस दशा में पहले वेक्टर का शीर्ष

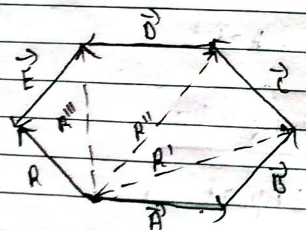
तथा दूसरे वेक्टर की (Tail) पूंछ मिलाते हैं। तब इससे वेक्टरो का योग या जोड़ होता है जो वेक्टरो के परिणाम या (R) के रूप मे प्राप्त होता है जैसा कि निम्न फिगर मे दिखाया गया है।



6* वेक्टरो के जोड़ने की बहुभुज विधि :

Polygon Method of more than two vectors

→ Consider ~~the~~ we have six vectors i.e. different direction



परिणाम →

$\vec{R'} = \vec{A} + \vec{B}$

$\vec{R''} = \vec{R'} + \vec{C}$

$\vec{R'''} = \vec{R''} + \vec{D}$

$\vec{R} = \vec{R'''} + \vec{E}$

Resultant, $\vec{R} = \vec{R'''} + \vec{E}$

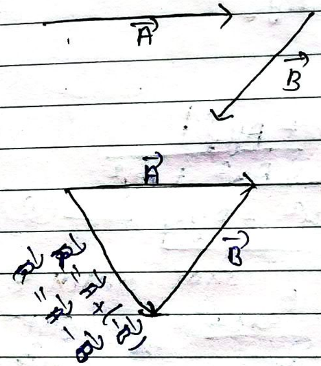
$\vec{R} = \vec{R''} + \vec{D} + \vec{E}$

$\vec{R} = \vec{R'} + \vec{C} + \vec{D} + \vec{E}$

$\boxed{\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D} + \vec{E}}$

वेक्टरो का घटाना / Subtraction of vectors

7* → वेक्टरो का घटाना एक प्रकार से वेक्टरो का जोड़ना ही होता है लेकिन इसमे किसी एक वेक्टर की दिशा ऋणात्मक होती है तब ऐसे वेक्टरो के योग को वेक्टरो का घटाना कहते हैं जैसे की फिगर मे दिखाया गया है।

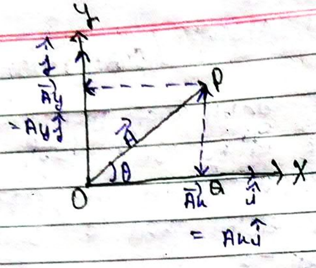


8 Imp * वेक्टरो का वियोजन

→ वेक्टरो के जोड़ने की विपरित क्रिया को वेक्टरो का वियोजन कहते हैं इसमे वेक्टरो का वियोजन इस प्रकार होता है कि इस वियोजित वेक्टर के गुण धर्म न बदले तब इस वेक्टरो का वियोजन कहते हैं।

माना $\vec{A}$, x तथा y अक्ष (axis) के बीच कटान बिन्दु या मूल बिन्दु पर रखा है तब x और y के अनुदिश $\hat{i}$ तथा $\hat{j}$ एकांक वेक्टर होते हैं, फिगर के अनुसार

Date / /
Page No.



Then, $\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y$
$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j}$

परिमाण लेने पर

$|\vec{A}| = |A_x\hat{i} + A_y\hat{j}|$
$A = \sqrt{A^2} = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$
$$\boxed{A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}} \quad \text{—— (1)}$$

∵ $\vec{A}$, x अक्ष से θ कोण बनाता है इसलिए $\vec{A}$ के दो घटक x, अक्ष अनुदिश $\cos\theta$ घटक तथा y अक्ष के अनुदिश $\sin\theta$ घटक प्राप्त होते है।

दूसरी तरह से, $\angle POQ$ मे

$\cos\theta = \frac{\text{आ}}{\text{क}} = \frac{OQ}{OP} = \frac{A_x}{A}$

$A_x = A\cos\theta$ —— (2)

$\sin\theta = \frac{\text{ल}}{\text{क}} = \frac{A_y}{A}$

$A_y = A\sin\theta$ —— (3)

Squaring and Adding (2) and (3)

Date / /
Page No.

$A_x^2 + A_y^2 = A^2\cos^2 + A^2\sin^2\theta$
$A_x^2 + A_y^2 = A^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$
$A_x^2 + A_y^2 = A^2$

$$\boxed{A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}}$$

Divide, (3) / (2)

$\tan\theta = \frac{A_y}{A_x}$

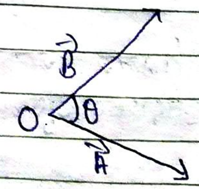
$$\boxed{\theta = \tan^{-1}\left(\frac{A_y}{A_x}\right)}$$

Imp * अदिश गुणन / Scalar Product / Dot Product of two vectors

→ दो वेक्टरो का अदिश गुणन ऐसा गुणन होता है जिसमे उन वेक्टरो के परिमाणो का गुणनफल तथा उनके बीच बनने वाले कोण θ के गुणनफल के बराबर होता है। इस गुणन को Dot (.) से प्रदर्शित करते है। तब ऐसे गुणन को दो वेक्टरो को अदिश गुणन कहते है।

माना दो वेक्टर $\vec{A}$ तथा $\vec{B}$ है इनके बीच का कोण θ है। तब परिभाषा के अनुसार

$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta}$$

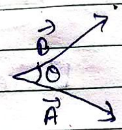


अदिश गुणन के गुणधर्म

* इसके गुण निम्न प्रकार होते हैं।

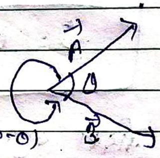
1. दो वेक्टरो का अदिश गुणन क्रम विनिमय होता है।

-> Scalar Product की परिभाषा से -



$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta$ — (1)

यदि दोनो वेक्टरो के क्रम बदल दे। तब परिभाषा से



$\vec{B}\cdot\vec{A} = BA\cos(360-\theta)$

$\vec{B}\cdot\vec{A} = BA\cos\theta$ — (2)

समी० (1) व (2) की तुलना करने पर

$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}}$ — (3)

2.* दो वेक्टरो का अदिश गुणन वितरीत होता है -

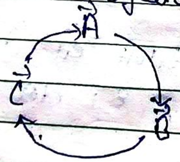
-> माना तीन वेक्टर $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$

$\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\vec{C}$

$\vec{B}\cdot(\vec{C}+\vec{A}) = \vec{B}\cdot\vec{C} + \vec{B}\cdot\vec{A}$

$\vec{C}\cdot(\vec{A}+\vec{B}) = \vec{C}\cdot\vec{A} + \vec{C}\cdot\vec{B}$

Cyclic order



3. जब दो वेक्टर एक दूसरे के लम्बवत हो तब इनका अदिश गुणन शून्य होता है।

-> $\vec{A} \perp \vec{B}$, $\theta = 90°$

परिभाषा से -

$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta$, $\theta = 90°$

$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos 90$

$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = 0}$ — (4)

4* जब दो वेक्टर एक-दूसरे के समानान्तर हो तब उनका अदिश गुणन उनके परिमाणो के गुणनफल के बराबर होता है अर्थात

-> माना दो वेक्टर,

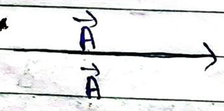
परिभाषा से $\vec{A} \parallel \vec{B}$; $\theta = 0°$

$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta$, $\theta = 0°$

$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos 0$

$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = AB}$ — (5)

5* किसी वेक्टर का उसी वेक्टर से स्केलर गुणनफल उस वेक्टर के परिमाण के वर्ग के बराबर होता है।



, $\theta = 0°$

परिभाषा के अनुसार

$\vec{A}\cdot\vec{A} = AA\cos\theta$, $\theta = 0°$

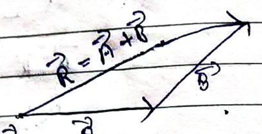
$= AA\cos 0$

$= AA$

$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{A} = A^2}$

दो वेक्टर के योग का स्वतः गुणन (Self Product)

⇒ $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$



taking self Product

$\vec{R}\cdot\vec{R} = (\vec{A}+\vec{B})\cdot(\vec{A}+\vec{B})$

$R^2 = \vec{A}\cdot\vec{A} + \vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{B}\cdot\vec{A} + \vec{B}\cdot\vec{B}$, $\quad \because \vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$

$R^2 = A^2 + 2\vec{A}\cdot\vec{B} + B^2$

$R^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta$

$$\boxed{R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta}}$$

6. एकांक ~~लम्ब~~ ध्रुवीय वेक्टरों $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ का स्केलर गुणनफल

$\hat{i}\cdot\hat{i} = |\hat{i}||\hat{i}|\cos 0 = 1.1.1 = 1$

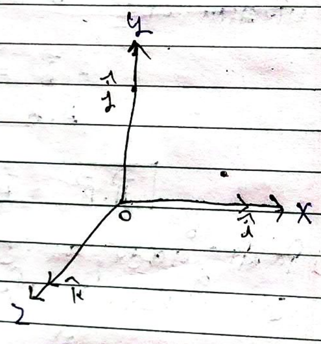
$\hat{j}\cdot\hat{j} = |\hat{j}||\hat{j}|\cos 0 = 1.1.1 = 1$

$\hat{k}\cdot\hat{k} = |\hat{k}||\hat{k}|\cos 0 = 1.1.1 = 1$

$\hat{i}\cdot\hat{j} = |\hat{i}||\hat{j}|\cos 90 = 1.1.0 = 0$

$\hat{j}\cdot\hat{k} = 0$

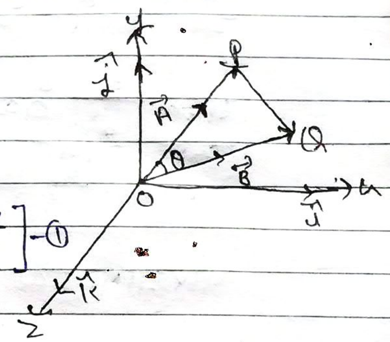
$\hat{k}\cdot\hat{i} = 0$



7. दो वेक्टरों का स्केलर गुणनफल उनके संगत x, y, z घटकों के गुणनफलों के योग के बराबर होता है।

⇒ माना तीन अक्ष x, y, z अक्ष एक-दूसरे के बिन्दु O पर लम्बवत् रखे हैं, बिन्दु O पर दो वेक्टर कोण बनाते हुए चित्र के अनुसार रखे हैं तब दोनों वेक्टरों के Projection तीनों अक्षों पर गिरते हैं।

जिनका संबंध $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ का संबंध निम्न प्रकार होता है।



⇒ from figure -

$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k} = \vec{A}_x + \vec{A}_y + \vec{A}_z$ —(1)

$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k} = \vec{B}_x + \vec{B}_y + \vec{B}_z$

S.P की परिभाषा से -

$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta$ —(2)

$\cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{AB}$

$$\boxed{\theta = \cos^{-1}\left[\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}\,\sqrt{B_x^2+B_y^2+B_z^2}}\right]} \quad —(3)$$

$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$

$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$ ⇒ $\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$

$$\boxed{\theta = \cos^{-1}\left[\frac{A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}{\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}\,\sqrt{B_x^2+B_y^2+B_z^2}}\right]} \quad —(4)$$

* दो वेक्टरों का सदिश गुणन

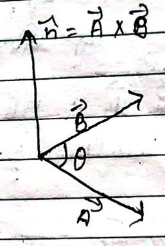
⇒ दो वेक्टरों का वेक्टर गुणन एक सदिश राशि है जिसका परिमाण उन दोनों वेक्टरों के परिमाणों तथा उनके बीच बनने वाले कोण की (sin) ज्या के गुणनफल के बराबर होता है, तथा इसकी दिशा दोनों वेक्टरों के तल के लम्बवत् होती है। इसे ही दो वेक्टरों का सदिश गुणन कहते हैं। इसको क्रॉस या 'x' से

प्रदर्शित करते हैं इसलिए इसे क्रॉस गुणन भी कहते हैं।

माना दो वेक्टर $\vec{A}$ तथा $\vec{B}$ है इनके बीच का कोण θ है जैसे कि फिगर में दिखाया है।

परिभाषा के अनुसार

$$\boxed{\vec{A}\times\vec{B} = AB\sin\theta.\hat{n}} \text{ — (1)}$$

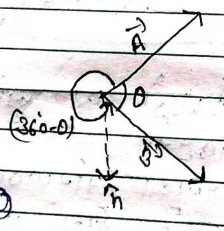


* सदिश गुणन के गुण-धर्म

→ दो वेक्टरों का सदिश गुणन निम्न गुणों के आधार पर परिभाषित होता है।

1. दो वेक्टरों का सदिश गुणन क्रम-विनिमेय नहीं होता

परिभाषा से -



$$\vec{B}\times\vec{A} = BA\sin(360-\theta).\hat{n}$$

$$\boxed{\vec{B}\times\vec{A} = -BA\sin\theta.\hat{n}} \text{ — (2)}$$

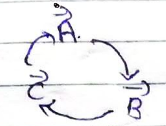
$$\vec{B}\times\vec{A} = -\vec{A}\times\vec{B}$$

समी० (1) व समी० (2) की तुलना करने पर

$$\boxed{\vec{A}\times\vec{B} \neq -\vec{B}\times\vec{A}}$$

DATE / /
PAGE No.

2. सदिश गुणन वितरित होता है - cycling order.



Consider three vector $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$

$$\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\times\vec{B} + \vec{A}\times\vec{C}$$
$$\vec{B}\times(\vec{C}+\vec{A}) = \vec{B}\times\vec{C} + \vec{B}\times\vec{A}$$
$$\vec{C}\times(\vec{A}+\vec{B}) = \vec{C}\times\vec{A} + \vec{C}\times\vec{B}$$

3. जब दो वेक्टर एक-दूसरे के लम्बवत् हो

$\vec{A} \perp \vec{B}$, $\theta = 90°$

परिभाषा के अनुसार

$$\vec{A}\times\vec{B} = AB\sin\theta\,\hat{n}$$
$$= AB\sin 90\,\hat{n}$$
$$= A.B.1.1$$
$$\boxed{\vec{A}\times\vec{B} = AB}$$

4. जब वेक्टर एक-दूसरे के समान्तर हो तब

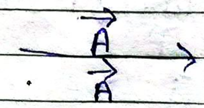
$\vec{A} \parallel \vec{B}$, $\theta = 0°$

परिभाषा के अनुसार या Accn to the Def

$$\vec{A}\times\vec{B} = AB\sin\theta\,\hat{n}$$
$$= AB\sin\theta\,\hat{n}$$
$$= AB.0.1$$
$$\boxed{\vec{A}\times\vec{B} = 0}$$

5. किसी एक वेक्टर का उसी वेक्टर के साथ सदिश गुणन या स्वेत सदिश गुणन

$\vec{A} \parallel \vec{A}$, $\theta = 0°$



परिभाषा के अनुसार

$\vec{A}\times\vec{A} = AA\sin\theta\,\hat{n}$

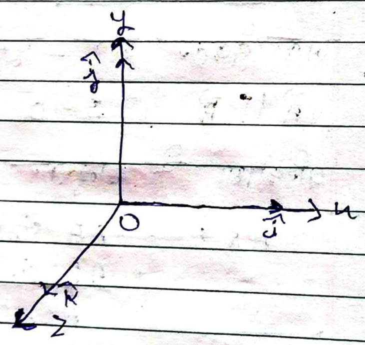
$= AA\sin 0\,\hat{n}$

$= AA.0.1$

$\boxed{\vec{A}\times\vec{A} = 0 = \vec{0}}$

6. लम्ब वोतिय एकांक वेक्टरो के बीच सम्बंध

माना तीन अक्ष x, y, z अक्षो के अनुदिश एकांक वेक्टर है यह तीनो $\hat{i}, \hat{k}, \hat{j}$ मूल बिन्दु पर एक दूसरे के लम्बवत स्थिर है तब परिभाषा के अनुसार तीनो एकांक वेक्टर निम्न प्रकार परिभाषित होते है । अर्थात



$\hat{i}\times\hat{i} = |\hat{i}||\hat{i}|\sin 0.\hat{n} = 1.1.0.1 = 0$

$\hat{j}\times\hat{j} = 0$

$\hat{k}\times\hat{k} = 0$

$\hat{i}\times\hat{j} = |\hat{i}||\hat{j}|\sin 90^\circ\,\hat{n} = 1.1.1.\hat{n} = 1.1.1.\hat{k} = \hat{k}$

$\hat{j}\times\hat{k} = \hat{i}$

$\hat{k}\times\hat{j} = \hat{j}$

$\hat{j}\times\hat{i} = |\hat{j}||\hat{i}|\sin(360^\circ-90^\circ)\,\hat{n} = 1.1-\sin\theta.\hat{n} = 1.1.-1.\hat{n} = 1.1.-1.\hat{k} = -\hat{k}$

$\hat{k}\times\hat{j} = -\hat{i}$

$\hat{i}\times\hat{k} = -\hat{j}$

$\hat{i}\times\hat{i} = |\hat{i}||\hat{i}|\sin 0.\hat{n} = 1.1.0.1 = 0$

$\hat{j}\times\hat{j} = 0$

$\hat{k}\times\hat{k} = 0$

$\hat{i}\times\hat{j} = |\hat{i}||\hat{j}|\sin 90^\circ\,\hat{n} = 1.1.1.\hat{n} = 1.1.1.\hat{k} = \hat{k}$

$\hat{j}\times\hat{k} = \hat{i}$

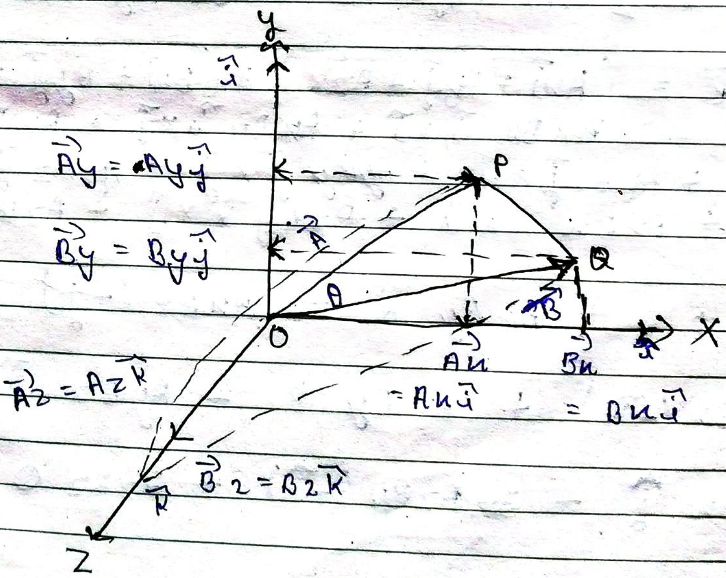
$\hat{k}\times\hat{j} = \hat{j}$

$\hat{j}\times\hat{i} = |\hat{j}||\hat{i}|\sin(360^\circ-90^\circ)\,\hat{n} = 1.1-\sin\theta.\hat{n} = 1.1.-1.\hat{n} = 1.1.-1.\hat{k} = -\hat{k}$

$\hat{k}\times\hat{j} = -\hat{i}$

$\hat{i}\times\hat{k} = -\hat{j}$

7. दो वेक्टरो का वेक्टर गुणन उनके संगत x-, y- तथा z- घटको के रूप मे उपयोग या सारणिक रूप



DATE / /
PAGE No.

माना दो वेक्टर $\vec{A}$ & $\vec{B}$

$\vec{A} = \vec{A_x} + \vec{A_y} + \vec{A_z}$

$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$

$\vec{B} = \vec{B_x} + \vec{B_y} + \vec{B_z}$

$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$

सदिश गुणन की परिभाषा के अनुसार

$\vec{A} \times \vec{B} = AB\sin\theta.\hat{n}$ —— (1)

$$\boxed{\sin\theta = \frac{\vec{A} \times \vec{B}}{AB.\hat{n}}}$$ —— (2)

$$\theta = \sin^{-1}\left[\frac{\vec{A} \times \vec{B}}{AB.\hat{n}}\right]$$

$$\theta = \sin^{-1}\left[\frac{\vec{A} \times \vec{B}}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}\,.\,\sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}}\right]$$ —— (3)

$\vec{A} \times \vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}) \times (B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k})$

$\vec{A} \times \vec{B} = A_xB_x\, \hat{i}\times\hat{i} + A_xB_y\, \hat{i}\times\hat{j} + A_xB_z\, \hat{i}\times\hat{k}$
$+ A_yB_x\, \hat{j}\times\hat{i} + A_yB_y\, \hat{j}\times\hat{j} + A_yB_z\, \hat{j}\times\hat{k}$
$+ A_zB_x\, \hat{k}\times\hat{i} + A_zB_y\, \hat{k}\times\hat{j} + A_zB_z\, \hat{k}\times\hat{k}$

$A_xB_x\, 0 + A_xB_y\, \hat{k} + A_xB_z(-\hat{j})$
$+ A_yB_x(-\hat{k}) + A_yB_y\, 0 + A_yB_z\, \hat{i}$
$+ A_zB_x\, \hat{j} + \cancel{B_z} A_zB_y(-\hat{i}) + A_zB_z\, 0$

DATE / /
PAGE No.

write as co-factors —

$$= \hat{i}\begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$ → Row / पंक्ति

3 x 3 की सारणिक
3 by 3

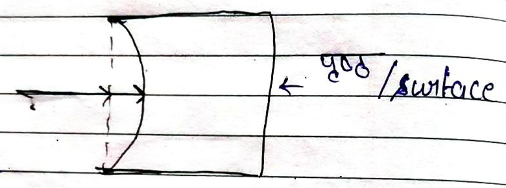
पाठ → प्रत्यास्थता / Elasticity

* विरूपक बल / Deforming force : जब किसी वस्तु पर बाह्य बल लगाते है तो वस्तु की आकृति या आकार बदल जाता है। तब ऐसे बाह्य बल को विरूपक बल कहते है।

अतः विरूपक बल एक ऐसा बल है जो किसी वस्तु कि आकृति मे परिवर्तन कर दे

प्रतिबल,

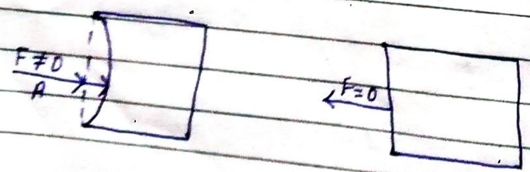
$$P = \frac{F}{A}$$



जहाँ पर,

F = बाह्य बल
A = क्षेत्रफल
P = दाब

* प्रत्यास्थता → किसी वस्तु का वह गुण है, जो किसी वस्तु पर लगे बाह्य या विरूपक बल के कारण वस्तु का आकार या आकृति बदल जाती है लेकिन जैसे ही वस्तु से विरूपक बल हटाते है, तो वस्तु अपनी पूर्व अवस्था को प्राप्त कर लेती है। तब वस्तु के इस गुण को प्रत्यास्थता कहते है।



प्रत्यास्थता के प्रकार : यह दो प्रकार के होते है,

* ① पूर्ण प्रत्यास्थ / Perfectly Elastic
② अप्रत्यास्थ / NON-Elastic

① पूर्ण प्रत्यास्थ : पूर्ण प्रत्यास्थ वे पदार्थ होती है जो विरूपक बल के हटने पर अपनी पूर्व अवस्था को पूर्ण रूप से प्राप्त कर लेते है। तब ऐसे पदार्थ पूर्ण प्रत्यास्थ कहलाते है।
जैसे → रबड़, इलास्टिक, शुद्ध प्लास्टिक

② अप्रत्यास्थ : अप्रत्यास्थ वे पदार्थ होते है, जिनसे विरूपक बल हटने के बाद अपनी पूर्व अवस्था को पूर्ण रूप से प्राप्त नहीं कर पाते तब ऐसे पदार्थ अप्रत्यास्थ कहलाते है। जैसे → टीन, कागज, पुरानी प्लास्टिक।

* प्रत्यास्था को मुख्य रूप से प्रतिबल तथा विकृती से परिभाषित करते है अर्थात जब किसी वस्तु पर विरूपक बल लगाते है तो यह बल किसी एक पृष्ठ पर आरोपित होता है। जिससे उस पृष्ठ की लम्बाई या चौडाई या ऊचाई मे परिवर्तन हो जाता है। तब यहाँ पर प्रतिबल तथा विकृती परिभाषित होती है।

• प्रतिबल / Stress (P) किसी वस्तु या पदार्थ के एकांक पृष्ठ पर लगने वाला बल को प्रतिबल कहते है। इसको P से लिखते है। इसका सूत्र

निम्न वत्

सूत्र : $\boxed{\text{प्रतिबल}, \; P = \frac{F}{A} = \frac{newton}{m^2}}$

विमा , $P = \frac{[MLT^{-2}]}{[L^2]} = [ML^{-1}T^{-2}]$

• विकृति / Strain : किसी वस्तु की लम्बाई या ऊँचाई या चौड़ाई में होने वाले भिन्नात्मक परिवर्तन को विकृति कहते हैं।

जैसे : लम्बाई में विकृति $= \frac{\Delta l}{l}$

चौड़ाई में विकृति $= \frac{\Delta b}{b}$

ऊँचाई में विकृति $= \frac{\Delta h}{h}$

क्षेत्रफल में विकृति $= \frac{\Delta A}{A}$

आयतन में विकृति $= \frac{\Delta V}{V}$

विकृति विमाहीन होती है। $(M^0L^0T^0)$

* प्रतिबल के प्रकार
→ प्रतिबल तीन प्रकार के होते हैं।

1. अनुदैर्घ्य प्रतिबल → जब किसी तार की लम्बाई में बल लगाया जाता है तब तार के एकांक क्षेत्रफल पर कार्य करने वाले आंतरिक प्रतिक्रिया बल को अनुदैर्घ्य प्रतिबल कहते हैं।

2. अभिलम्ब प्रतिबल → जब किसी वस्तु पर अभिलम्बवत आंतरिक प्रतिक्रिया बल लगे तब ऐसे बल को अभिलम्ब प्रतिबल कहते हैं।

3. स्पर्श रेखीय प्रतिबल → जब किसी वस्तु की स्पर्श रेखा पर या किनारे पर आंतरिक प्रतिक्रिया बल आरोपित हो तब ऐसे बल को स्पर्श रेखीय प्रतिबल कहते हैं।

* विकृति के प्रकार
→ विकृति तीन प्रकार कि होती है।

1. अनुदैर्घ्य विकृति → जब किसी वस्तु (जैसे तार) की लम्बाई में लगने वाले बल के कारण लम्बाई में भिन्नात्मक परिवर्तन हो तब इसे अनुदैर्घ्य विकृति कहते हैं।

2. आयतन विकृति → जब किसी वस्तु के आयतन में होने वाले भिन्नात्मक परिवर्तन को आयतन विकृति कहते हैं।

3. अपरूपण विकृति → जब किसी वस्तु पर विरूपक

बल लगाने से उसके कोण मे भिन्नात्मक परिवर्तन हो तब वस्तु मे होने वाली इस विकृति को अपरूपण विकृति कहते है।

* हुक का नियम

→ वैज्ञानिक हुक के अनुसार, लघु विकृतियों की सीमा के भीतर, पदार्थ पर कार्यरत प्रतिबल उसमे उत्पन्न विकृति के अनुक्रमानुपाति होता है।

अर्थात् प्रतिबल $\propto$ विकृति

प्रतिबल = E विकृति

$$\boxed{E = \frac{\text{प्रतिबल}}{\text{विकृति}}}$$

जहाँ पर, E = प्रत्यास्थता गुणांक / Elasticity Coefficient

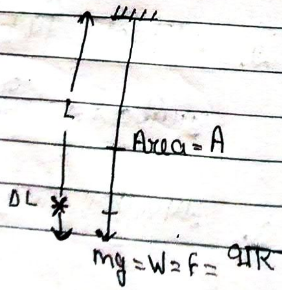
* प्रत्यास्थता गुणांक :-

→ प्रत्यास्थता गुणांक तीन प्रकार के होते है,

v.imp 1. यंग प्रत्यास्थता गुणांक
2. आयतनात्मक प्रत्यास्थता गुणांक
3. दृढ़ता गुणांक

1. यंग प्रत्यास्थता गुणांक :-

→ वैज्ञानिक यंग के अनुसार लघु विकृतियों के लिए



अनुदैर्ध्य प्रतिबल तथा अनुदैर्ध्य विकृति के अनुपात को यंग प्रत्यास्थता गुणांक कहते है इसको (Y) से लिखते है।

माना एक तार जिसकी लम्बाई (L) को लटकाया गया है जब इसको नीचे की ओर पकड़कर खींचते है या इसके अपने भार के कारण इसकी लम्बाई की वृद्धि ΔL हो जाती है। तब फिगर के अनुसार परिभाषा से :-
तब फिगर के अनुसार, परिभाषा से :-
परिभाषा से

$$Y = \frac{\text{अनुदैर्ध्य प्रतिबल}}{\text{अनुदैर्ध्य विकृति}}$$

$$Y = \frac{F/A}{\frac{\Delta L}{L}} = \frac{F\,L}{A\,\Delta L} = \frac{Mg\,L}{\pi r^2 \Delta L}$$

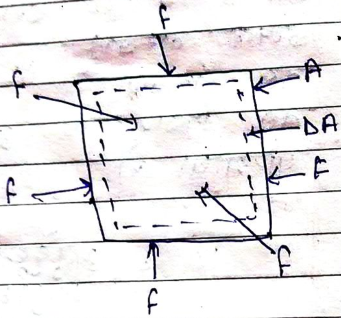
$$\boxed{Y = \frac{Mg\,L}{\pi r^2 \Delta L}} \quad \frac{N}{m^2}, \quad [ML^{-1}T^{-2}]$$

(2) आयतनात्मक प्रत्यास्थता गुणांक / Bulk Modulus Coefficient

→ हुक के नियम के अनुसार प्रत्यास्थता की सीमा के भीतर, अभिलम्ब प्रतिबल तथा आयतन विकृति के अनुपात को आयतनात्मक प्रत्यास्थता गुणांक कहते है। इसको (B) से लिखते है। इसका सूत्र :-

$$B = \frac{\text{अभिलम्ब प्रतिबल}}{\text{आयतन विकृति}}$$

माना एक पृष्ठ जिसका क्षेत्रफल (A) तथा आयतन (V) है। जब इस पृष्ठ के बाहर से अंदर की ओर बल लगाते हैं तो इसके क्षेत्रफल या आयतन में परिवर्तन होता है अर्थात् कमी होती है। तब फिगर के अनुसार



परिभाषा से :-

$$B = \frac{\text{अभिलम्ब प्रतिबल}}{\text{आयतन विकृति}}$$

$$B = \frac{P}{\frac{\Delta V}{V}} = \frac{-PV}{\Delta V}$$

$$\boxed{B = \frac{-PV}{V}} \quad N/m^2, \quad [ML^{-1}T^{-2}]$$

(3) दृढ़ता गुणांक / Modulus of Rigidity (η)

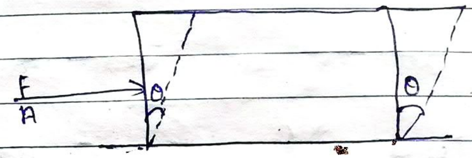
-> प्रत्यास्थता की सीमा के अन्तर्गत, वस्तु पर आरोपित अपरूपक प्रतिबल तथा अपरूपक विकृति के अनुपात को वस्तु के पदार्थ के पदार्थ का दृढ़ता गुणांक कहते हैं। इसको इटा (η) से लिखते हैं। इसका

सूत्र = $\eta = \frac{\text{अपरूपक प्रतिबल}}{\text{अपरूपक विकृति}}$

Figer के अनुसार, माना एक वस्तु जिस पर प्रतिबल आरोपित करते हैं जिससे वस्तु के मुक्त पृष्ठ में कोण में परिवर्तित हो जाता है तब फिगर के अनुसार

परिभाषा से :-

$$\eta = \frac{F/A}{\theta}$$



$$\boxed{\eta = \frac{F}{A\theta}} \quad \frac{N}{m^2}, \quad [ML^{-1}T^{-2}]$$

* असंपीड्यता या शून्य संपीड्यता

Non-Compressibility or zero compressibility

-> किसी द्रव को दबाने पर उसके आयतन या घनत्व में कोई परिवर्तन न हो तब ऐसे द्रव को असंपीड्य द्रव कहते हैं।

* अश्यान या शून्य श्यान / Non-viscous or zero viscous

-> जब द्रव की किन्हीं दो परतों के बीच लगने वाला श्यान बल आरोपित न हो तब ऐसे बल को अश्यान बल कहते हैं। अर्थात् द्रव की सापेक्ष गति का विरोध करने वाला द्रव शून्य हो तब ऐसे द्रव की श्यानता शून्य होती है।

* आदर्श द्रव (Ideal liquid)

-> आदर्श द्रव ऐसा द्रव होता है जिसकी ~~सम~~ संपीड्यता शून्य हो तथा श्यानता भी शून्य हो तब ऐसा द्रव आदर्श द्रव कहलाता है।

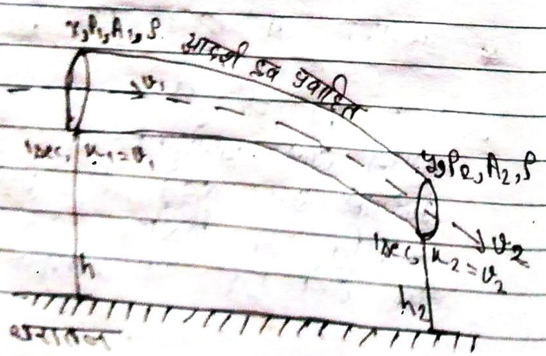
* द्रव का धारा रेखी प्रवाह (Stream lined flow)

-> जब कोई द्रव इस प्रकार प्रवाहित हो रहा होता है कि किसी एक ही बिन्दु मे से होकर गुजरने वाले द्रव के सभी कण एक ही पथ पर चलते है तो द्रव के इस प्रवाह को धारा रेखी प्रवाह कहते है, जैसे चित्र मे दिखाया गया है।

* द्रव का प्रक्षुब्ध प्रवाह /Turbulant flow

-> जब किसी द्रव के प्रवाह की गति अनियमित हो तब द्रव के ऐसे प्रवाह को प्रक्षुब्ध प्रवाह कहते है।

* बरनौली प्रमेय



15/10/25

गुरुत्वाकर्षण बल

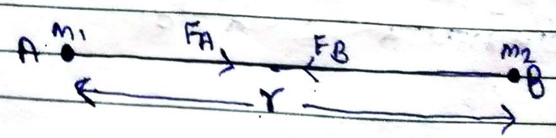
* गुरुत्वाकर्षण या गुरुत्वाकर्षण बल

Gravitational or Gravitational force

-> सन् 1686 ई॰ मे वैज्ञानिक न्यूटन ने गुरुत्वाकर्षण के संबंध मे यह बताया कि पदार्थ का प्रत्येक कण, प्रत्येक दूसरे कण को अपनी ओर आकर्षित करता है तब इसे आकर्षण बल को गुरुत्वाकर्षण बल कहते है।

गुरुत्वाकर्षण के संबंध मे न्यूटन ने सार्वत्रिक गुरुत्वाकर्षण का नियम दिया है, या प्रतिपादित किया है, तब इनके अनुसार दो पदार्थिक कणो के बीच लगने वाला आकर्षण बल, उन दोनो कणो के द्रव्यमानो के गुणनफल के अनुक्रमानुपाती तथा उनकी बीच की दूरी के वर्ग के ~~व्युत्क्रम~~ व्युत्क्रमानुपाती होता है, तथा बल की दिशा एक दूसरे कण के अनुदिश होती है, इसे ही न्यूटन का गुरुत्वाकर्षण बल का नियम कहते है।

माना दो कण जिनके द्रव्यमान क्रम से m_1 व m_2 है, जो बिन्दु A व B पर रखे है तथा इनके बीच की दूरी r है, तब फिगर के अनुसार



Date / /
Page No.

α अनुक्रमानुपाती चिन्ह

परिभाषा से —

$F \propto m_1 m_2$ —— (i)

$F \propto \frac{1}{r^2}$ —— (ii)

$F \propto \frac{m_1 m_2}{r^2}$

$\boxed{F = \frac{G m_1 m_2}{r^2}}$ —— (3)

G = गुरुत्वाकर्षण नियतांक

$G = 6.67 \times 10^{-11}$ $\frac{Newton\ m^2}{Kg^2}$

* G की विमा :

$G = \frac{F r^2}{m_1 m_2} = \frac{[MLT^{-2}][L^2]}{[M][M]} = [M^{-1}L^3T^{-2}]$

मात्रक =) $Kg^{-1} m^3 sec^{-2}$

* गुरुत्वीय बलो की वैद्युत बलो से तुलना :
-) गुरुत्वीय बलो की वैद्युत बलो से तुलना दो कणो के आधार पर परिभाषित करते है तब इस स्थिति मे हम यहाँ पर इलेक्ट्रॉन तथा इलेक्ट्रॉन कणो के बीच तुलना निम्न प्रकार परिभाषित करते है

Date 31.8.1
Page No.

इलेक्ट्रॉन का द्रव्यमान, $(m_e) = 9.1 \times 10^{-31} kg$

• इलेक्ट्रॉन - इलेक्ट्रॉन कणो (e-e) के लिए न्यूटन के नियम से —

$A \xrightarrow{\quad r \quad} B$ (m_e, e at A; m_e, e at B)

गुरुत्वीय बल, $F_G = \frac{G m_e m_e}{r^2}$

$F_G = \frac{6.67 \times 10^{-11} \times 9.1 \times 10^{-31} \times 9.1 \times 10^{-31}}{r^2}$

$F_G = \frac{6.67 \times 10^{-11} \times 82.81 \times 10^{-62}}{r^2} = \frac{552.3427 \times 10^{-73}}{r^2}$ —— (1)

इलेक्ट्रॉन का आवेश $(q_e) = 1.6 \times 10^{-19}$ coulamb (कूलॉम)
कूलॉम नियतांक $(K) = 9 \times 10^9$ $N\text{-}m^2/coul^2$ (कूलॉम²)

• वैद्युत बल, कूलॉम के नियम से —

$A \xrightarrow{\quad r \quad} B$ (q_e at A; q_e at B)

$F_E = F_e = \frac{K q_e q_e}{r^2}$

$= \frac{9 \times 10^9 \times 1.6 \times 10^{-19} \times 1.6 \times 10^{-19}}{r^2}$

$F_e = \frac{23.04 \times 10^{-29}}{r^2}$ —— (2)

समी॰ ① से समी॰ ② को भाग देने पर / Divide ① / ②

$$\frac{F_G}{F_e} = \frac{\frac{552.3427 \times 10^{-73}}{\cancel{r^2}}}{\frac{23.04 \times 10^{-29}}{\cancel{r^2}}} = \frac{552.3427 \times 10^{-73}}{23.04 \times 10^{-29}}$$

$$= 23.973207465 3 \times 10^{-44} \times \frac{10}{10}$$

10 से गुणा व भाग करने पर

$$= 2.39732074653 \times 10^{-43}$$

$$\frac{F_G}{F_e} = 2.40 \times 10^{-43}$$

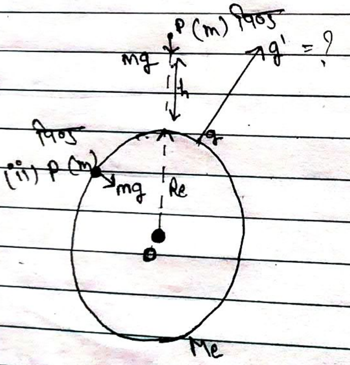
$$\boxed{\frac{F_G}{F_e} \approx \frac{10^{-43}}{1}}$$ [≈ = लगभग चिन्ह]

* गुरुत्वीय क्षेत्र की तीव्रता / Intensity of Gravitational Field

गुरुत्वीय त्वरण (g) के मान में परिवर्तन दो प्रकार से हो सकता है
1. पृथ्वी तल से ऊपर जाने पर (g) के मान में परिवर्तन
2. पृथ्वी तल से नीचे जाने पर (g) के मान में परिवर्तन

1. पृथ्वी तल से ऊपर जाने पर (g) के मान में परिवर्तन :
→ जब पृथ्वी तल से ऊपर जाते हैं तो पृथ्वी के गुरुत्वीय त्वरण (g) के मान में कमी होती है इसको निम्न प्रकार से परिभाषित करते हैं। माना पृथ्वी का केन्द्र O, त्रिज्या Re तथा द्रव्यमान Me है, यदि कोई पिण्ड जिसका द्रव्यमान (m) है, पृथ्वी से कुछ ऊँचाई ऊपर बिन्दु (P) पर रखे तब फिगर के अनुसार

h = 200, 400, 800, 1600



Condition - I, पिण्ड h ऊँचाई पर,
पिण्ड (m) तथा पृथ्वी (Me) के बीच गुरुत्वाकर्षण बल –

न्यूटन के अनुसार —

$$F = \frac{G Me\, m}{(Re + h)^2} \quad \text{—— (1)}$$

पिण्ड का भार, $F = mg'$ —— (2)

सन्तुलन की अवस्था में —

$$\cancel{m} g' = \frac{G Me\, \cancel{m}}{(Re + h)^2}$$

$$g' = \frac{G Me}{(Re + h)^2} \quad \text{—— (3)}$$

Condition - II
पिण्ड पृथ्वी तल पर
पिण्ड तथा पृथ्वी के बीच गुरुत्वाकर्षण बल —

$$F = \frac{G Me\, m}{Re^2} \quad \text{—— (4)}$$

पिण्ड का भार $F = mg$ —— (5)

सन्तुलन की अवस्था में —

$$\cancel{m} g = \frac{G Me\, \cancel{m}}{Re^2}$$

Date / /
Page No.

$$g = \frac{GMe}{Re^2} \quad \text{——— (6)}$$

समीकरण (9) को (6) से भाग देने पर

Khnd द्विपद प्रमेय : $(1+x)^n = \frac{1+nx}{\lfloor 1} + \frac{n(n-1)x^2}{\lfloor 2} + \frac{n(n-1)(n-2)x^2}{\lfloor 3}$

Divided 9/6

$$\frac{g'}{g} = \frac{\frac{GMe}{(Re+h)^2}}{\frac{GMe}{Re}} = \frac{Re^2}{(Re+h)^2}$$

$$\frac{g'}{g} = \frac{\cancel{Re^2}}{\cancel{Re^2}\left[1+\frac{h}{Re}\right]^2}$$

$$\boxed{g' = \frac{g}{\left[1+\frac{h}{Re}\right]^2}} \quad \text{——— (7)}$$

$$\boxed{g' = g\left[1+\frac{2h}{Re}\right]} \quad \text{——— (8)}$$

higher power will be neglected

$$g' = g\left[1-\frac{2h}{Re}\right]$$

Date / /
Page No.

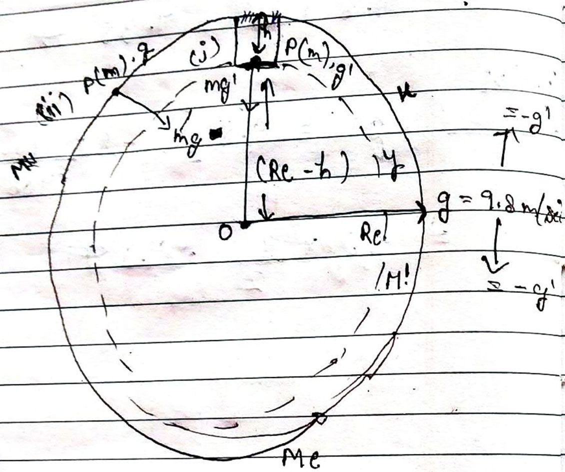
$$g' = 9.8\left[1 - \frac{2\times 8\cancel{0}0}{64\cancel{0}0}\right] = 9.8\left[1-\frac{1}{4}\right] =$$

$$9.8 \times \frac{3}{4} = 7.35 \text{ Ans}$$

$$g' = 9.8\left[1 - \frac{2\times 1600}{6400}\right] = 9.8\left[1-\frac{1}{2}\right]$$

$$\Rightarrow 9.8 \times \frac{1}{2} = 4.9 \text{ Ans}$$

8. पृथ्वी तल से नीचे जाने पर गुरुत्वीय त्वरण (g) के मान में परिवर्तन :



माना पृथ्वी का द्रव्यमान Me, त्रिज्या Re, तथा केन्द्र O है। पृथ्वी के भीतर h गहराई पर m द्रव्यमान का पिण्ड रखा है, जिस तल पर यह पिण्ड रखा है, वहाँ एक काल्पनिक गोले y का द्रव्यमान Me से बदलकर M' हो जाता है। तब यहाँ पर g' सम्भावनाएँ प्राप्त होती है। तब आंतरिक काल्पनिक गोले y का द्रव्यमान M' निम्न प्रकार होता है।

गोले y का द्रव्यमान, M'' = आयतन × घनत्व

$$M'' = \frac{4}{3}\pi(Re-h)^3 \times \rho \quad \text{---} (1)$$

Condition - I : h गहराई पर पिण्ड m तथा

आन्तरिक गोले के द्रव्यमान M' के बीच गुरुत्वाकर्षण बल,

$$F = \frac{G M' m}{(Re-h)^2}$$

$$F = \frac{G \times \frac{4}{3}\pi (Re-h)^{\cancel{3}} \rho \times m}{\cancel{(Re-h)^2}} \quad \text{from eq}^n\ (1)$$

$$F = G \times \frac{4}{3}\pi (Re-h)\rho \times m \quad \text{---} (2)$$

h गहराई पर पिण्ड, P(m) का भार, $F = mg'$ — (3)

संतुलन की अवस्था में —

from eqn. (2) & (3), both are equal

$$\cancel{m}g' = G \times \frac{4}{3}\pi(Re-h)\rho\,\cancel{m}$$

$$g' = G \times \frac{4}{3}\pi(Re-h)\rho \quad \text{---} (4)$$

Condition - II : पृथ्वी तल पर पिण्ड का भार,

$$F = mg \quad \text{---} (5)$$

पृथ्वी या बाहरी गोले (X) तथा पिण्ड P(m) के बीच गुरुत्वाकर्षण बल,

$$F = \frac{G \times M'' \times m}{Re^2}$$

Date / /
Page No.

गोली (X) का द्रव्यमान, M'' = आयतन × घनत्व

$M'' = \frac{4}{3}\pi Re^3 \times \rho$ — (6)

M'' का मान रखने पर —

$\therefore F = \frac{G \times \frac{4}{3}\pi Re^{\cancel{3}} \rho \times m}{\cancel{Re^2}}$

$F = G \times \frac{4}{3}\pi Re \rho m$ — (7)

Comparing eq.^{n} (5) & (7)

$\cancel{m}g = G \times \frac{4}{3}\pi Re \rho \cancel{m}$

$g = G \times \frac{4}{3}\pi Re \rho$ — 8

Divide (4) / (8),

$\frac{g'}{g} = \frac{\cancel{G} \times \cancel{\frac{4}{3}\pi} (Re - h)\cancel{\rho}}{\cancel{G} \times \cancel{\frac{4}{3}\pi} Re \cancel{\rho}}$

$\frac{g'}{g} = \frac{(Re - h)}{Re} = \frac{\cancel{Re}\left[1 - \frac{h}{Re}\right]}{\cancel{Re}}$

Date / /
Page No.

$\frac{g'}{g} = \left(1 - \frac{h}{Re}\right)$

$$\boxed{g' = g\left(1 - \frac{h}{Re}\right)} \text{ — (9)}$$

Let h = 800km, 1600km, 3200 km

$g' = 9.8\left(1 - \frac{\cancel{800}}{_8\cancel{6400}}\right)$

$g' = 9.8\left(1 - \frac{1}{8}\right)$

$= 9.8\left(\frac{7}{8}\right) = \underline{8.575}$ Ans

* ग्रहो की गति / Motion of planets.

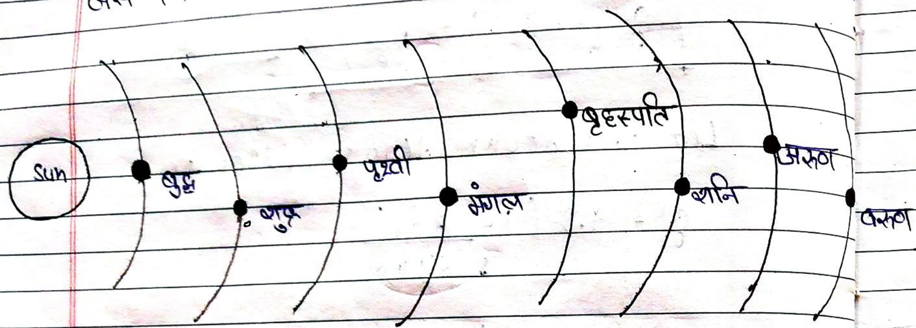
1. ग्रह / Planet :- आकाश मे सूर्य के चारो ओर कुछ पिण्ड अपनी - अपनी कक्षाओ मे परिक्रमण करते रहते है, तब इन पिण्डो को ग्रह कहते है।

* ग्रह के प्रकार :- ग्रह आठ प्रकार के होते है ये सभी सूर्य से दूरी के बढ़ते क्रम मे स्थिति दर्शाई गयी है, जैसे

(1) बुध / Mercury
(2) शुक्र / Venus
(3) पृथ्वी / Earth
(4) मंगल / Mars
(5) बृहस्पति / Jupiter
(6) शनि / Saturn

⑦ अरुण / Uranus ⑧ वरुण / Neptune

जैसे कि फिगर मे दिखाया गया है।



आठो ग्रहो के अपने उपग्रह भी होते है,

* उपग्रह / Satellites :- प्रत्येक ग्रह के चारो ओर कुछ आकाशीय पिण्ड परिक्रमण करते रहते है इन आकाशीय पिंडो को उपग्रह कहते है। जैसे :- पृथ्वी का उपग्रह चन्द्रमा है।

इस प्रकार सभी ग्रहो के उपग्रह संख्या के रूप मे दिये गए है।

	ग्रह / Planet	उपग्रह / Satellites की संख्या
1.	बुद्ध / Mercury	0
2.	शुक्र / Venus	0
3.	पृथ्वी / Earth	1
4.	मंगल / Mars	2
5.	बृहस्पति / Jupiter	63
6.	शनि / Saturn	31
7.	अरुण / Urenus	27
8.	वरुण / Neptune	13

~~सौर~~ सौर परिवार :-

* → ब्रह्माण्ड मे सूर्य, ग्रह, उपग्रह तथा अन्य आकाशीय पिण्डो को मिलाकर सौर परिवार कहते है।

सौर परिवार के संबंध मे सभी आकाशीय पिण्डो की गतियो के संबंध मे वैज्ञानिक केपलर ने तीन नियम प्रस्तुत किये, जो कि निम्नवत है।

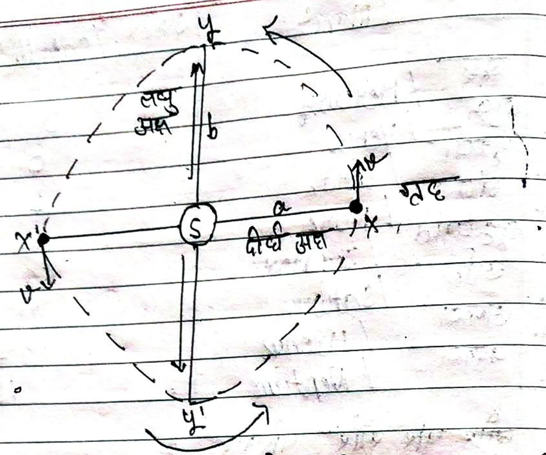
* कैपलर के नियम

→ वैज्ञानिक कैपलर ने ग्रहो की गति के संबंध मे तीन नियम प्रस्तुत किये।

1. कैपलर का प्रथम नियम या कक्षा का नियम

Keplar's Ist Low or Low of Orbit

→ सभी ग्रह सूर्य के चारो ओर दीर्घ वृत्ताकार कक्षाओ मे परिक्रमण करते रहते है तथा सूर्य कक्षाओ के एक Focus पर स्थित होता है। जैसे कि फिगर मे दिखाया गया है। इसे ही कैपलर का प्रथम नियम कहते है।

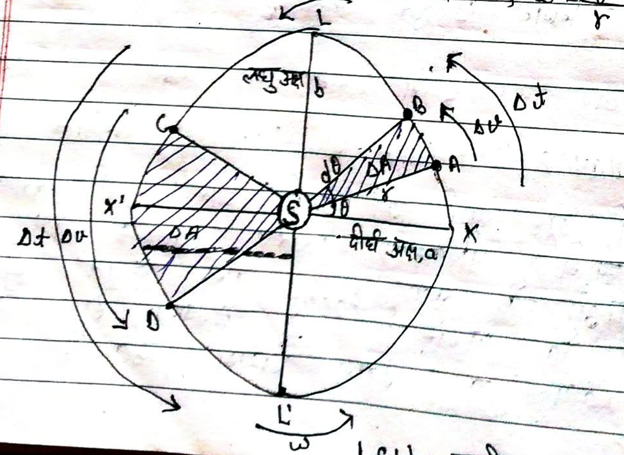


2\. केप्लर का द्वितीय नियम या क्षेत्रकलीय चाल का नियम

Keplar's 2nd Low or Low of Areal velocity

-) किसी भी ग्रह को सूर्य से मिलाने वाली रेखा समान समय अंतरालों मे समान क्षेत्रकल पार (sweep) करती है। अर्थात् ग्रह का क्षेत्रकलीय वेग नियत रहता है। इसे ही केप्लर का द्वितीय नियम कहते है, जैसे कि फिगर मे दिखाया गया है

ω = कोणीय वेग, $\omega = \frac{v}{r}$



LSL' = नाभि लम्ब

फिगर के अनुसार, Δt समयांतराल मे जब ग्रह (A) स्थिति से (B) स्थिति तक जाता है, तब ग्रह ΔA क्षेत्रकल प्राप्त करता है। तथा ΔT समयांतराल मे ही ग्रह बिन्दु (C) से (D) तक जाने पर समान क्षेत्रकल ΔA पार करता है, अर्थात्

$$\frac{\text{क्षेत्रकल } \Delta ASB}{\Delta t} = \frac{\text{क्षेत्रकल } \Delta CSD}{\Delta t}$$

त्रिज्या रेखा SA द्वारा पार किया गया क्षेत्रकल,

$$dA = \frac{1}{2} \times SA \times AB$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\because \text{कोण} = \frac{\text{चाप}}{\text{त्रिज्या}}, \quad d\theta = \frac{AB}{r} \\ &\therefore AB = r\,d\theta \\ &\because \frac{d\theta}{dt} = \omega = \text{कोणीय वेग} \end{aligned}}$$

$$dA = \frac{1}{2} \times r \times r\,d\theta$$

$$dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

Divide by dt

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \omega \quad \text{—— (1)}$$

जब कोई ग्रह सूर्य के ~~प्रतिह~~ परितह घूमता है तो उसका कोणीय संवेग (J) नियत रहता है। अर्थात्

* कोणीय संवेग = नियत

$J = I\omega$

when J = कोणीय संवेग

DATE / /
PAGE No.

$I =$ जड़त्व आघूर्ण
$\omega =$ कोणीय वेग

$\because I = mr^2$
$m =$ पिण्ड का द्रव्यमान
$r =$ अक्ष से दूरी

$J = mr^2\omega$

$\frac{J}{m} = r^2\omega$ —— (2)

समी॰ (2) से $r^2\omega$ का मान समी॰ (1) में रखने पर

$\therefore \frac{dA}{dt} = \frac{J}{2m}$

$\because \frac{J}{2m} =$ नियत

$\therefore \boxed{\frac{dA}{dt} = \text{नियत}}$

$\boxed{\text{क्षेत्रकलीय चाल} \left(\frac{dA}{dt}\right) = \text{नियत}}$ —— (3)

समी॰ (3) ही क्षेत्रकलीय चाल के नियत होने की समीकरण है तथा इसमें ग्रह का कोणीय संवेग संरक्षित होता है, इसलिए केपलर का द्वितीय नियम कोणीय संवेग संरक्ष संरक्षण के तुल्य है।

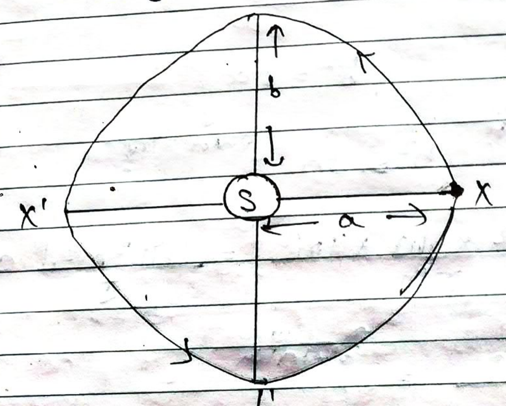
* केपलर का ~~द्वितीय~~ तीसरा नियम या परिक्रमणकालों का नियम

→ इनके अनुसार किसी भी ग्रह का सूर्य के परितः परिक्रमणकाल (T) का वर्ग उसकी दीर्घ वृत्ताकार कक्षा के अर्द्ध दीर्घ कक्ष (a) की तीसरी घात के अनुक्रमानुपाती होता है अर्थात्

$\boxed{T^2 \propto a^3}$ इसी को केपलर का तीसरा नियम कहते हैं।

DATE / /
PAGE No.

चित्र के अनुसार



यदि दीर्घ वृत्त की अर्द्ध दीर्घ अक्ष तथा अर्द्ध लघु अक्ष क्रमशः a तथा b हो तब दीर्घ वृत्त का क्षेत्रफल πab होता है, तब ग्रह का परिक्रमणकाल (T) निम्न प्रकार होता है, अर्थात्

परिक्रमणकाल, $T = \frac{\text{दीर्घ वृत्त का क्षेत्रफल}}{\text{क्षेत्रकलीय चाल}} = \frac{\pi ab}{\frac{dA}{dt}}$

$T = \frac{\pi ab}{\frac{J}{2m}}$; from eq. (3)

$T = \frac{\pi ab}{J} \times 2m$

Taking square on both side

$$T^2 = \frac{\pi^2 a^2 b^2 \times 4m^2}{J^2} \quad \text{—} (4)$$

$\because$ अर्द्ध नाभिलम्ब, $l = \frac{b^2}{a}$

$$b^2 = la$$

समी० (4) मे $b^2 = la$ रखने पर

$$T^2 = \frac{\pi^2 a^2 \times la \times 4m^2}{J^2} = \frac{4\pi^2 m^2 l\, a^3}{J^2}$$

$\because \frac{4\pi^2 m^2 l}{J^2}$ = नियतांक

$$\cancel{T^2 \propto a^3} \quad \boxed{T^2 \propto a^3} \quad \text{—} (5)$$

समी० (5) ही केपलर के तीसरे नियम की समी०

* गुरुत्वीय विभव / Gravitational Potential (V)

→ यदि हम किसी वस्तु को बाहर से गुरुत्वीय क्षेत्र के भीतर लाते है तो गुरुत्वीय क्षेत्र स्वयं उस वस्तु पर कार्य करता है अर्थात

एकांक द्रव्यमान को अनंत से गुरुत्वीय क्षेत्र के भीतर किसी बिन्दु तक लाने मे जितना कार्य प्राप्त होता उसे उस बिन्दु पर गुरुत्वीय विभव कहते है इसको (V) से लिखते है यह अदिश राशि है, इसका

मात्रक जूल प्रति किलोग्राम है।

यदि हम द्रव्यमान (m) के पिण्ड को अनन्त से गुरुत्वीय क्षेत्र (M) के किसी बिंदु तक लाने मे प्राप्त कार्य (W) हो तब प्राप्त गुरुत्वीय विभव ~~निम्नवत्~~ निम्नवत् प्रकार के अनुसार होता है।

• First condition :

(i)

$$V = \frac{-W}{m} = \frac{\text{joule}}{\text{Kg}}$$

where −ive = कार्य के प्राप्त होने को दर्शाता है।

• Second condition :

→ यदि (m) द्रव्यमान के पिण्ड को गुरुत्वीय क्षेत्र M से दूर अनन्त की ओर ले जाने के लिए हमे आकर्षण बल के विरुद्ध कार्य करना पड़ता है, इसलिए प्रकार के अनुसार

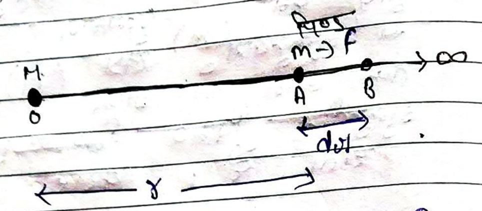
(ii)

$$V = +\frac{W}{m} = \frac{\text{joule}}{\text{Kg}}$$

where +ive = कार्य करना पड़ा होने को दर्शाता है।

$\int \rightarrow$ समाकलन चिन्ह

• बिन्दु द्रव्यमान के कारण गुरुत्वीय विभव —



माना बिन्दु (O) पर (M) द्रव्यमान का एक पिण्ड रखा है। जिससे गुरुत्वीय क्षेत्र बनता है। बिन्दु (O) से (r) दूरी पर (m) द्रव्यमान का एक पिण्ड रखा है। जिसे बिन्दु (A) से सूक्ष्म दूरी (dr) चलकर बिन्दु (B) तक ले जाते हैं। तब हमें गुरुत्वाकर्षण आकर्षण बल के विरुद्ध कार्य करना पड़ता है। तब

∴ Newton के आकर्षण बल के नियम से —

$$F = \frac{GMm}{r^2} \quad \text{—(1)}$$

पिण्ड m को A → B तक ले जाने में किया गया कार्य, $w = F\,dr$

Putting the value of F

$$W = \frac{GMm}{r^2}\,dr$$

सम्पूर्ण कार्य करने के लिए, समाकलन (Integral) करने पर —

taking limit : $r \rightarrow \infty$

$$W = \int_r^{\infty} \frac{GMm}{r^2}\,dr$$

$$W = GMm \int_r^{\infty} r^{-2}\,dr$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$W = GMm\left[\frac{r^{-2+1}}{-2+1}\right]_r^{\infty}$$

$$W = -GMm\left[\frac{1}{r}\right]_r^{\infty}$$

$$W = -GMm\left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{r}\right) = -GMm\left[0 - \frac{1}{r}\right]$$

$$\boxed{W = +\frac{GM_e m}{r}} \text{ joule (जूल)}$$

गुरुत्वीय विभव की परिभाषा से —

$$V = -\frac{W}{m}$$

Putting the value of W

$$V = -\frac{GM_e \cancel{m}}{\cancel{m} \times r}$$

Date / /
Page No.

$\boxed{V = -\frac{GMe}{r}}$ $\frac{joule}{kg}$ — ②

* अवकलन / (Differentiation) = कम करना (आवश्यकता के अनुसार) = कोई राशि dx^3 (माना)

अवकलन के चिह्न → $d, \partial, \partial, \nabla, \Delta, \square, D$

सूत्र → $\frac{dy}{dx} = \frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$

उदा० 1 $y = x^2 + 5x + 2$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[x^2+5x+2]$

→ $\frac{dy}{dx} = \frac{dx^2}{dx} + \frac{5dx}{dx} + \frac{d2}{dx}$

सूत्र के अनुसार → nx^{n-1}

$\frac{dy}{dx} = 2x^{2-1}\frac{dx}{dx} + 5\times1 + 0$

$= 2x + 5$

$\frac{dy}{dx} = 2x+5$ Ans

Date / /
Page No.

Note :- किसी भी राशि के आगे (d) लिखने पर या अन्य (symbol) चिन्ह ($\partial, \partial, \nabla, \Delta, \square, D$) लिखने पर उस राशि का अवकलन हो जाता है। जैसे कि उपरोक्त उदाहरण मे बताया गया है।

उदा० 2 → $y = 4x^3 + 7x^2w + 9xv + 3$

→ x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$\frac{dy}{dx} = \frac{4dx^3}{dx} + \frac{7wdx^2}{dx} + \frac{9v\,dx}{dx} + \frac{d3}{dx}$

Acc^n. to formula —

$\frac{dy}{dx} = \frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$

$\frac{dy}{dx} = 12x^2 + 14wx + 9v + 0$

$\boxed{\frac{dy}{dx} = 12x^2 + 14wx + 9v}$

उदा० 3 $y = \sin\theta$

θ के सापेक्ष अवकलन करने पर

Differentiation with respect to θ

diff. w.r. to θ

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{d(\sin\theta)}{d\theta}$$

$$\boxed{\frac{dy}{d\theta} = \cos\theta}$$

उदा० 4.5 $y = \log u$

u के सापेक्ष अवकलन करने पर

Differentation with respect to u

diff. w.r. to u

$$\frac{dy}{du} = \frac{d(\log u)}{du}$$

$$\boxed{\frac{dy}{du} = \frac{1}{u}}$$

* अवकलन के सूत्र :

1. $y = x^n$, $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$

2. $y = \text{constant}$, $\frac{dy}{dx} = 0$

जैसे $= 2$

$= 10$

3. $y = \log_e x$, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$

4. $y = \sin x$, $\frac{dy}{dx} = \cos x$

5. $y = \cos x$, $\frac{dy}{dx} = -\sin x$

6. $y = \sec x$, $\frac{dy}{dx} = \sec x \tan x$

7. $y = \cot x$, $\frac{dy}{dx} = -\operatorname{cosec}^2 x$

8. $y = \tan x$, $\frac{dy}{dx} = \sec^2 x$

9. $y = \operatorname{cosec} x$, $\frac{dy}{dx} = -\operatorname{cosec} x \cot x$

10. $y = e^x$, $\frac{dy}{dx} = e^x$

Imp 11. $y = \underset{\text{I}}{u}\,\underset{\text{II}}{v}$ (गुणा के लिए)

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}}$$

DATE / /
PAGE No.

(भाग के लिए)

Imp 12. $y = \frac{u}{v}$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}}$$

* समाकलन / Integral = योग करना = जोड़ना = Σ sigma
-> $\int$ symbol of Integration

-> समाकलन, अवकलन का उत्क्रम ही होता है। जैसे -> यदि किसी फलन $f(x)$ का x के सापेक्ष अवकलन गुणांक $f'(x)$ हो तो $f'(x)$ का x के सापेक्ष समाकलन $f(x)$ होगा। अर्थात् (समाकलन)

$$\int f'(x)\,dx = f(x)$$

Note :- यदि हमे किसी पद का समाकलन करना है, तो वहाँ पर पहले से ही अवकलन होना चाहिए। यदि अवकलन नहीं है तो हम वहाँ पर अवकलन बनाएंगे।

e.g. -> (जैसे)

DATE / /
PAGE No.

* समाकल के सूत्र — I = Integration = (समाकलन)

1. $I = \int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1$

2. $I = \int dx = x$

3. $I = \int c.u\,dx$
$= c\int u\,dx = c\int \sin x\,dx$, u = any terms
e.g. $u = \sin x$

4. $I = \int (u+v)\,dx$
$I = \int u\,dx + \int v\,dx$ e.g. $u = \sin x$
$v = \cos x$
or Any terms

5. $I = \int \frac{1}{x}\,dx = \log_e x = \log x$

6. $I = \int \sin x\,dx = -\cos x$

7. $I = \int \cos x\,dx = \sin x$

8. $I = \int \sec^2 x\,dx = \tan x$

DATE / /
PAGE NO.

9. $I = \int \operatorname{cosec}^2 x \, dx = -\cot x$

10. $I = \int \sec x \tan x \, dx = \sec x$

11. $I = \int \operatorname{cosec} x \cot x \, dx = -\operatorname{cosec} x$

12. $I = \int e^x dx = e^x$

13. $I = \int a^x dx = \frac{a^x}{\log_e a}$

14. $I = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x$

15. $I = \int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \cos^{-1} x$

16. $I = \int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x$

DATE / /
PAGE NO.

* समाकलन के प्रकार :- Type of Integration —

→ समाकलन दो प्रकार के होते हैं —

1. अनिश्चित समाकलन / Indefinite Integration
2. निश्चित समाकलन / Definite Integration.

* अनिश्चित समाकलन	* निश्चित समाकलन
• limit नही होती है, लेकिन यहाँ पर समाकलन करने के बाद नियतांक आता है।	• limit होते हैं, समाकलन करने के बाद नियतांक नही आता है।

उदा० 1 $I = \int x^3 dx$

$= \frac{x^{3+1}}{3+1} + \text{constant}$

$I = \frac{x^4}{4} + C$ Ans

उदा० 2. $I = \int \sin x \, dx$

$= -\cos x + C$ Ans

उदा० 1 $I = \int_1^4 x^3 \, dx$

$= \left[\frac{x^{3+1}}{3+1}\right]_1^4$ 4 (उच्च सीमा / Higher limit) 1 (निम्न सीमा / lower limit)

$= \left[\frac{x^4}{4}\right]_1^4 = \frac{1}{4}\left[x^4\right]^4$

$= \left[\frac{(4)^4}{4} - \frac{(1)^4}{4}\right] = \left[\frac{256}{4} - \frac{1}{4}\right]$

$= \left[\frac{256-1}{4}\right] = \frac{255}{4} = 63.75$

Ans

DATE / /
PAGE No.

निश्चित समाकलन

उदा॰ 2 $I = \int_R^\infty \frac{GMm}{x^2} dx$

$I = GMm \int_R^\infty dx$

$I = GMm \int_R^\infty x^{-2} dx$

$= GMm \left[\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\right]_R^\infty$

$I = -GMm \left[x^{-1}\right]_R^\infty$

$I = -GMm \left[\frac{1}{x}\right]_R^\infty$

$I = -GMm \left[\frac{1}{\infty} - \frac{1}{R}\right]$

$I = -GMm \left[0 - \frac{1}{R}\right]$ $\because \frac{1}{\infty} = 0$

$I = \frac{GMm}{R}$ Ans $\frac{1}{0} = \infty$

DATE / /
PAGE No.

Q. $y = 7x^3 + 2x^2 + 5x + 3$ का x के सापेक्ष अवकलन करो।

हल → x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$\frac{dy}{dx} = \frac{7dx^3}{dx} + \frac{2dx^2}{dx} + \frac{5dx'}{dx} + \frac{d3}{dx}$

Acc^n. to formula

$\frac{dy}{dx} = \frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$

$\frac{dy}{dx} = 21x^2 + 4x + 5 + 0$

$\boxed{\frac{dy}{dx} = 21x^2 + 4x + 5}$

Q. $y = 10x^2 + 3x + 4$ इसका समाकलन कीजिए।

हल → इसका समाकलन करने पर

$I = \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ सूत्र के अनुसार

$\frac{10x^{2+1}}{2+1} + C$ $\int \frac{10x^{2+1}}{2+1} + \int \frac{3x^{1+1}}{1+1} + \int 4x + C$

$I = \frac{10x^3}{3} + C$ $\int \frac{10x^3}{3} + \int \frac{3x^2}{2} + \int 4x + C$

DATE / /
PAGE NO.

हल :- $\frac{dy}{dx} = 10x^2 + 3x + 4$

taking integration on both side

$I = \int (10x^2 + 3x + 4)\, dx$

$I = \int 10x^2 dx + \int 3x dx + \int 4 dx + C$

use formula. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

$I = 10\int x^2 dx + 3\int x^1 dx + 4\int dx + C$

$I = 10 \times \frac{x^{2+1}}{2+1} + 3\times \frac{x^{1+1}}{1+1} + 4x + C$

$I = \frac{10x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + 4x + C$ Ans

Q-3 $y = x^5 e^x$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$\frac{dy}{dx} = \frac{udv}{dx} + \frac{vdu}{dx}$ सूत्र के अनुसार

$\frac{dy}{dx} = \frac{x^5 de^x}{dx} + \frac{e^x dx^5}{dx}$

DATE / /
PAGE NO.

$\Rightarrow x^5 e^x + e^x \times 5x^4$

$\frac{dy}{dx} = e^x x^4 [x + 5]$ Ans

Q4 $y = x^2 \sin x$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[\underset{I}{x^2} \underset{II}{\sin x}]$

$= \frac{x^2 d \sin x}{dx} + \frac{\sin x \, dx^2}{dx}$

$= x^2 \sin x + \sin x \times x^2$

$\frac{dy}{dx} = \sin x . x [\cancel{\sin} +$

$\frac{dy}{dx} = x^2 \cos x + \sin x \times 2x$

$y' = x^2 \cos x + 2x \sin x$

$y' = x[x \cos x + 2 \sin x]$

* गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा / Gravitational Potential Energy [U or P.E]

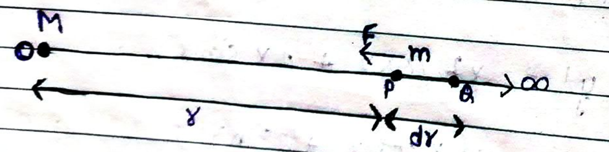
→ किसी वस्तु को अनंत से गुरुत्वीय क्षेत्र के भीतर किसी बिन्दु तक लाने मे जितना कार्य प्राप्त होता है। या गुरुत्वीय क्षेत्र से बाहर की ओर किसी वस्तु को अनंत तक ले जाने मे जितना कार्य करना पड़ता है, उसे उस बिन्दु पर वस्तु की गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा कहते है। इसको (U) से लिखते है।

अनंत पर गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा शुन्य होती है। यह एक अदिश राशि है।

माना (m) द्रव्यमान के पिण्ड को गुरुत्वीय द्रव्यमान (M) से (r) दूरी ले जाने पर स्थितिज ऊर्जा निम्न प्रकार होती है। अर्थात

• गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा –

$U \rightarrow W_{\infty \rightarrow r}$



$\therefore U = \int_{\infty}^{r} F\,dr$

$U = \int_{\infty}^{r} \frac{GMm}{r^2}\,dr$

$U = GMm \int_{\infty}^{r} \frac{dr}{r^2}$

$U = GMm \int_{\infty}^{r} r^{-2}\,dr$

$U = GMm \left[\frac{r^{-2+1}}{-2+1}\right]_{\infty}^{r}$

$U = -GMm \left[\frac{1}{r}\right]_{\infty}^{r}$

$U = -GMm \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{\infty}\right]$

$= -GMm \left[\frac{1}{r} - 0\right]$

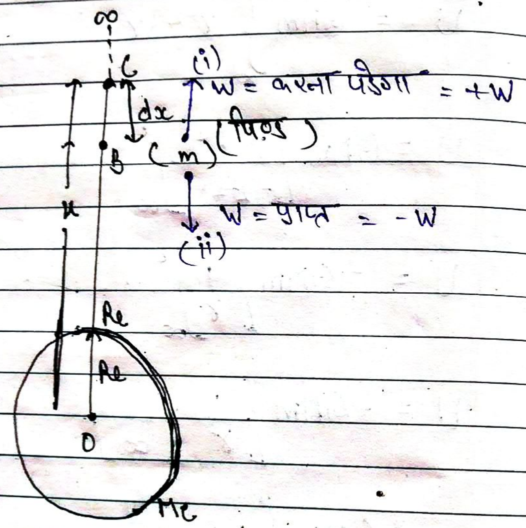
$\boxed{U = -\frac{GMm}{r} \text{ joule}}$ Ans

* पृथ्वी तल पर किसी पिण्ड कि गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा

→ पृथ्वी तल पर स्थित किसी पिण्ड की गुरुत्वीय स्थिति ऊर्जा यदि किसी वस्तु को अनंत से पृथ्वी तल तक लाने मे जो कार्य प्राप्त होता है। उसे पृथ्वी तल पर पिण्ड कि

गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा कहते हैं इसको (U) से लिखते हैं।

माना (m) द्रव्यमान के पिण्ड को पृथ्वी के केन्द्र से (x) दूरी पर ऊपर कि ओर बिन्दु (B) पर रखते हैं, तब फिगर के अनुसार



पृथ्वी (Me) तथा पिण्ड (m) के बीच गुरुत्वाकर्षण बल –

$$F = \frac{GMem}{x^2}$$

conditions – (i), पिण्ड m को B → C तक ले मे गुरुत्वाकर्षण बल के विरुद्ध किया गया सम्पूर्ण कार्य, आकर्षण

$$\int_0^W dW = \int_{Re}^{\infty} F\,dx$$

$$W = \int_{Re}^{\infty} \frac{GMem}{x^2}\,dx$$

$$W = GMem \int_{Re}^{\infty} \frac{dx}{x^2} = GMem \int_{Re}^{\infty} x^{-2}\,dx$$

$$= GMem \left[\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\right]_{Re}^{\infty}$$

$$= -GMem \left[\frac{1}{x}\right]_{Re}^{\infty} = -GMem \left[\frac{1}{\infty} - \frac{1}{Re}\right]$$

$$W = +\frac{GMem}{Re}$$

⇒ यदि (m) द्रव्यमान का पिण्ड पृथ्वी तल से (x) ऊँचाई पर हो तब पिण्ड (m) की गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा निम्न प्रकार होगी –

$$U = \frac{-GMem}{r}$$

Conditions :-

(i) $r = Re$, पिण्ड का (m), पृथ्वी के केन्द्र से x ऊँचाई पर रखा है।

(ii) $r = R_e + h$, पिण्ड ऊँचाई (m), पृथ्वी के तल से x या h पर रखा है।

(iii) $r = R_e$, पिण्ड पृथ्वी के तल के समीप या तल m, पर रखा है,

for :- (i) $U = -\frac{GM_e m}{R_e}$ —— ①

(ii) $U = -\frac{GM_e m}{(R_e+h)}$ —— ②

(iii) $U = -\frac{GM_e m}{R_e}$ —— ③

* [उपग्रहों की गति ← पाठ] [पलायन वेग]

* उपग्रह / Satellites

→ जो आकाशीय पिण्ड ग्रहों के परित: परिक्रमण कर रहे होते हैं, उन आकाशीय पिण्डों को उपग्रह कहते हैं। जैसे → पृथ्वी का उपग्रह चन्द्रमा है।

* उपग्रह के प्रकार :- उपग्रह दो प्रकार के होते हैं।

1. प्राकृतिक उपग्रह / Natural Satellite
2. कृत्रिम उपग्रह / Artificial Satellite

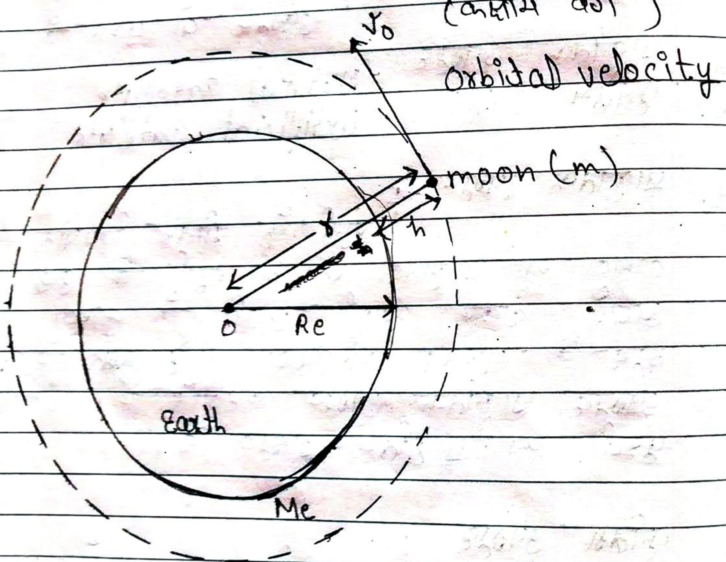
1. प्राकृतिक उपग्रह :- सूर्य के भीतर विस्फोट होने के कारण या प्राकृतिक रूप से सूर्य के कुछ टुकड़े अलग होकर अपनी ऊर्जा के कारण किसी ग्रह के परित: परिक्रमण करने लगते हैं, ऐसे उपग्रह प्राकृतिक उपग्रह कहलाते हैं। जैसे – चन्द्रमा पृथ्वी का प्राकृतिक उपग्रह है।

2. कृत्रिम उपग्रह :- मानव के द्वारा बनाये गए सभी उपग्रह को कृत्रिम उपग्रह कहते हैं। जैसे – INSAT का समूह अर्थात् INSAT 1A, INSAT 1B, INSAT 2C, INSAT 2D

INSAT → (Indian National Satellite System) ~~खोज~~ खोज – 1. डॉ० विक्रम साराभाई
2. होमी जहांगीर भाभा

* उपग्रहों का कक्षीय वेग / Orbital Velocity of Satellite (V_0)

प्रत्येक उपग्रह अपने ग्रह के चारों ओर नियत कक्षा में परिक्रमण करता है। इस कक्षा में उपग्रह का वेग नियत होता है। तब इस नियत वेग को ही उपग्रह का कक्षीय वेग कहते हैं। इसको (V_0) से लिखते हैं। जैसे की चित्र में दिखाया गया है।



माना पृथ्वी का केन्द्र (O) त्रिज्या (Re) तथा द्रव्यमान (Me) है पृथ्वी के केन्द्र से (r) दूरी पर पृथ्वी की कक्षा में चन्द्रमा (V_0) वेग से घूम रहा है चन्द्रमा का अपना द्रव्यमान (m) है तब न्यूटन के गुरुत्वाकर्षण बल के अनुसार पृथ्वी तथा चन्द्रमा के बीच लगने वाला आकर्षण बल तथा चन्द्रमा पर आरोपित अभिकेन्द्र बल (घूमते समय) यह दोनों बल एक-दूसरे को संतुलित करते हैं अर्थात्

गुरुत्वाकर्षण आकर्षण बल = अभिकेन्द्र बल

$$\frac{GMe\cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \frac{\cancel{m}V_0^2}{\cancel{r}}$$

$$\frac{GMe}{r} = V_0^2$$

$$\boxed{V_0 = \sqrt{\frac{GMe}{r}}} \quad \text{—— ①}$$

∵ $r = Re + h$

$$\boxed{V_0 = \sqrt{\frac{GMe}{Re+h}}} \quad \text{—— ②}$$

गुरुत्वीय त्वरण की परिभाषा से

$$g = \frac{GMe}{Re^2}$$

$$\boxed{GMe = gRe^2} \quad \text{—— ③}$$

समी॰ ③ से ~~GM~~ GMe का मान समी॰ ② में रखने पर

DATE / /
PAGE NO.

$$v_0 = \sqrt{\frac{gR_e^2}{(R_e+h)}}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{gR_e^2}{R_e\left(1+\frac{h}{R_e}\right)}}$$

$$\boxed{v_0 = \sqrt{\frac{gR_e}{\left[1+\frac{h}{R_e}\right]}}} \quad \text{—— (4)}$$

यदि कोई आकाशीय पिण्ड या उपग्रह पृथ्वी के अति समीप हो तब –

if $h << R_e$,

$\therefore$ h = neglect = नगण्य ≈ 0

$$v = \sqrt{\frac{gR_e}{1+\frac{0}{R_e}}} = \sqrt{\frac{gR_e}{1+0}} = \sqrt{\frac{gR_e}{1}}$$

$$\boxed{v = \sqrt{gR_e}} \quad \text{—— (5)}$$

$$v_0 = \sqrt{9.8 \times 6400 \times 10^3} = \sqrt{98 \times 6400 \times 10^2}$$

$$v = \sqrt{2 \times 49 \times 6400 \times 100}$$

DATE / /
PAGE NO.

$$v = \sqrt{2} \times 7 \times 80 \times 10$$

$$v = 1.414 \times 7 \times 80 \times 10$$

$$\boxed{v = 7.92 \text{ Km/sec}}$$ Ans

* उपग्रह का परिक्रमण काल

→ उपग्रह द्वारा ग्रह का एक पूरा चक्कर लगाने मे जितना समय लगता है उसे उसका परिक्रमण काल कहते है। इसको (T) से लिखते है।

फिगर के अनुसार,

माना उपग्रह का परिक्रमण काल (T) है, तब.

सूत्र :-) $T = \dfrac{\text{उपग्रह की कक्षा की परिधि या वृत्त की कुल दूरी}}{\text{कक्षीय वेग}}$

$$T = \frac{2\pi r}{v_0} = \frac{2\pi(R_e+h)}{v_0} \quad \text{—— (1)}$$

$$\because \quad v_0 = \sqrt{\frac{GM_e}{R_e+h}} = \sqrt{\frac{gR_e^2}{(R_e+h)}}$$

Putting the value of v_0 in eqn. (1)

$$\therefore \quad T = \frac{2\pi(R_e+h)}{\sqrt{\frac{GM_e}{R_e+h}}} = \frac{2\pi(R_e+h)(R_e+h)^{1/2}}{\sqrt{GM_e}}$$

$$\boxed{T = \frac{2\pi(R_e+h)^{3/2}}{\sqrt{GM_e}}} = \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{(R_e+h)^3}{GM_e}}} \quad \text{—— (2)}$$

DATE / /
PAGE No.

Again Putting

$$T = 2\pi \frac{(R_e+h)}{\sqrt{\frac{gR_e^2}{(R_e+h)}}} = \frac{2\pi (R_e+h)^{3/2}}{\sqrt{gR_e^2}}$$

$$\boxed{T = 2\pi \sqrt{\frac{(R_e+h)^3}{gR_e^2}}} \quad \text{——— (3)}$$

⇒ यदि उपग्रह पृथ्वी के तल के समीप ही परिक्रमण कर रहा हो तब,

$h << R_e$, $h =$ नगण्य $=$ neglect

∴ from eqn. (3)

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(R_e+0)^3}{gR_e^2}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\cancel{R_e^3}}{g\cancel{R_e^2}}} = 2\pi \sqrt{\frac{R_e}{g}}$$

∵ $R_e = 6400$ Km, $g = 9.8\ m/sec^2$

$$T = 2 \times 3.14 \sqrt{\frac{6400 \times 10^3}{9.8}}$$

$$T = 2 \times 3.14 \sqrt{\frac{6400 \times 10^4}{2 \times 49}}$$

∵ $\sqrt{2} = 1.414$

DATE / /
PAGE No.

$$T = \frac{2 \times 3.14 \times 80 \times 10^2}{1.414 \times 7}$$

(मीनट बनाने के लिए 60 से भाग)

$T = 5075$ sec

$T = 84$ Minute 6 sec Ans

* भू - स्थिर उपग्रह या भू - तुल्यकाली उपग्रह

→ पृथ्वी के परितह परिक्रमण कर रहे उपग्रह की वह कक्षा, जिसमे उसका परिक्रमण काल पृथ्वी का अपनी धुरी के परितह परिक्रमण काल के समान या 24 घंटे हो तथा घूर्णन की दिशा पश्चिम मे पूर्व के समान्तर हो तब ऐसे उपग्रह या पिण्ड को भू- तुल्यकाली उपग्रह कहते है। तथा यह उपग्रह जिस कक्षा मे परिक्रमण करता है तो उस कक्षा को भू- तुल्यकाली कक्षा कहते है।

पार्किंग कक्षा

* किसी भी क्रित्रिम उपग्रह या कोई अन्य आकाशीय
→ पिण्ड को पृथ्वी तल से किसी व्यक्ति के द्वारा या प्रक्षेक के द्वारा उस कक्षा के जिस बिन्दु पर उपग्रह को स्थिर देखने के लिए पृथ्वी तल से लगभग 36000 Km की ऊँचाई पर कक्षा मे स्थापित किया जाता है। तब ऐसी कक्षा को पार्किंग कक्षा कहते है। इस कक्षा की खोज वैज्ञानिक क्लार्क ने ~~कि~~ थी। इसलिए इसे क्लार्क कक्षा भी कहते है।

~~पार्कि~~

* पार्किंग कक्षा मे उपग्रह का कक्षीय वेग

* पार्किंग कक्षा में उपग्रह का कक्षीय वेग

$$v_0 = \sqrt{\frac{g R_e^2}{R_e + h}}$$

$$v_0 = R_e \sqrt{\frac{g}{R_e + h}}$$

∵ $R_e = 6370\ Km = 6370 \times 10^3 m \approx 6400\ Km$

$h = 36000\ Km = 36000 \times 10^3 m$

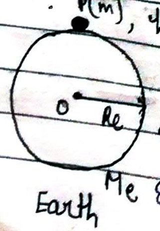
$$v_0 = 6370 \times 10^3 \sqrt{\frac{9.8}{(6370 + 36000) \times 10^3}}$$

$$v_0 = 3.1 \times 10^3 = 3.1\ Km/sec$$

* उपग्रह की सम्पूर्ण ऊर्जा

→ पृथ्वी के परितः परिक्रमण करते उपग्रह में स्थितिज ऊर्जा व गतिज ऊर्जा, दोनों प्रकार की ऊर्जा होती है। स्थितिज ऊर्जा स्थिति के कारण होती है क्योंकि उपग्रह पृथ्वी के गुरुत्वीय क्षेत्र में रहता है। गतिज ऊर्जा, उपग्रह की गति के कारण होती है। इन दोनों ऊर्जाओं के योग के कारण सम्पूर्ण ऊर्जा प्राप्त होती है। चित्र के अनुसार

P(m), h=0; पिण्ड, पृथ्वी तल पर



$U = -\frac{GM_em}{R_e}$ —— (1), $h=0$

$K = \frac{1}{2}\frac{GM_em}{R_e}$ —— (3)

$E = -\frac{1}{2}\frac{GM_em}{R_e}$ —— (4)

माना पृथ्वी का केन्द्र (O), त्रिज्या (R_e) तथा द्रव्यमान (M_e) है,

यदि पृथ्वी तल पर, m द्रव्यमान का पिण्ड रखा हो या पृथ्वी के समीप ही परिक्रमण कर रहा हो तब,

पृथ्वी तल पर, पिण्ड या उपग्रह की स्थितिज ऊर्जा

$$U = -\frac{GM_em}{R_e} \quad \text{—— (1)}$$

यदि उपग्रह का कक्षीय वेग v_0 हो, तब गतिज ऊर्जा

$$K.E = K = E_K = \frac{1}{2} m v_0^2 \quad \text{—— (2)}$$

उपग्रह को घूमते समय आवश्यक अभिकेन्द्रक बल, पृथ्वी तथा पिण्ड के बीच लगने वाले गुरुत्वाकर्षण बल से प्राप्त होता है। इसलिए

अभिकेन्द्र बल = गुरुत्वाकर्षण बल

$$\frac{m v_0^2}{r} = \frac{GM_em}{r^2}$$

∵ $r = R_e + h$, $h = 0$

$r \rightarrow R_e$

$$\frac{m v_0^2}{R_e} = \frac{GM_em}{R_e^2}$$

$$m v_0^2 = \frac{GM_em}{R_e}$$

DATE / /
PAGE NO.

Putting the value of Mv_0^2 in eqn ②

$$K.E = \frac{1}{2}\frac{GMem}{Re} \quad —③$$

• उपग्रह की सम्पूर्ण ऊर्जा, $T.E. = K.E. + P.E.$
$E_T = E_K + U$
$E = K + U$

Putting the value of $K + U$ from eqn. ① + ③

$$E = \frac{1}{2}\frac{GMem}{Re} - \frac{GMem}{Re}$$

$$\boxed{E = -\frac{1}{2}\frac{GMem}{Re}} \quad — ④$$

अर्थात् उपग्रह की सम्पूर्ण ऊर्जा ऋणात्मक है। इसका यह अर्थ है कि अनन्त पर उपग्रह की स्थितिज ऊर्जा तथा गतिज ऊर्जा का योग शून्य होगा। इसलिए अनन्त पर उपग्रह की सम्पूर्ण ऊर्जा शून्य होती है।

* उपग्रह की बंधन ऊर्जा / Binding Energy of Satellite (B.E)

→ पृथ्वी के परितः परिक्रमण करते किसी पिण्ड या उपग्रह को अपनी कक्षा छोड़ कर पलायन कर जाने के लिए या बाहर जाने के लिए आवश्यक ऊर्जा को उपग्रह की बंधन ऊर्जा कहते है। पृथ्वी तल से या समीप कक्षा मे से पिण्ड या उपग्रह को बाहर भेजने के लिए सम्पूर्ण ऊर्जा ऋणात्मक मान से धनात्मक मान में परिवर्तित होकर बंधन ऊर्जा के रूप मे आ जाती है।

DATE / /
PAGE NO.

$$\therefore B.E. = +\frac{1}{2}\frac{GMem}{Re} = +\frac{1}{2}\frac{gRe^2m}{Re}$$

$$\boxed{B.E = +\frac{1}{2}\frac{GMem}{Re} = +\frac{1}{2}gRem} \text{ joule}$$

* पलायन ऊर्जा / Escape ~~Velocity (ve)~~ Energy (Ee)

→ जब हम किसी पिण्ड या उपग्रह को पृथ्वी के क्षेत्र से या गुरुत्वीय क्षेत्र से फेंकने के लिए या पलायन करने के लिए पिण्ड या उपग्रह को जो ऊर्जा दी जाती है। इस ऊर्जा को ही पलायन ऊर्जा कहते है। लेकिन पृथ्वी तल पर किसी पिण्ड या उपग्रह की स्थितिज ऊर्जा ही फेंकने के बाद गतिज ऊर्जा मे परिवर्तित हो जाती है। अर्थात्

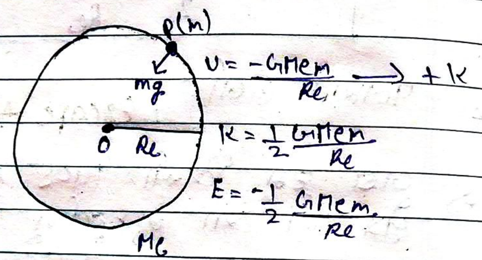
$$U = -\frac{GMem}{Re} \longrightarrow K.E \text{ या पलायन ऊर्जा}$$

$$\therefore \text{पलायन ऊर्जा / Escape Energy} = +\frac{GMem}{Re}$$

* पलायन वेग / Escape velocity (v_e)

→ पलायन वेग एक ऐसा न्यूनतम वेग है जो किसी पिण्ड या उपग्रह को पृथ्वी तल से ऊर्ध्वाधिर ऊपर की ओर फेंकने पर पिण्ड पृथ्वी के गुरुत्वीय क्षेत्र को पार कर जाता है तथा पृथ्वी पर कभी वापस नहीं लौटता तब ऐसे न्यूनतम वेग को पलायन वेग कहते हैं। इसको (v_e) से लिखते हैं।

फिगर के अनुसार,



पृथ्वी के तल पर पिण्ड कि गतिज ऊर्जा शून्य होती है, इसलिए ~~इसकी~~ ~~गतिज~~ ऊर्जा ~~+K~~ सम्पूर्ण स्थितिज ऊर्जा, गतिज ऊर्जा मे परिवर्तित होकर ऋणात्मक से धनात्मक ~~होने~~ होकर फेंकी जाती है। तब स्थितिज ऊर्जा गतिज ऊर्जा के बराबर होती है।

इसलिए,

$$P.E = K.E.$$

$$\frac{GM_e \cancel{m}}{R_e} = \frac{1}{2}\cancel{m} v_e^2$$

$$\boxed{v_e = \sqrt{\frac{2GM_e}{R_e}}}$$

∵ $GM_e = gR_e^2$

∴ $v_e = \sqrt{\frac{2gR_e^{\cancel{2}}}{\cancel{R_e}}}$

$$\boxed{v_e = \sqrt{2gR_e}}$$

∵ $g = 9.8\ m/sec^2$

$R_e = 6400 \times 10^3$ meter

$$v_e = \sqrt{2 \times 9.8 \times 6400 \times 10^3} = \sqrt{2 \times 2 \times 49 \times 6400 \times 10^2}$$

$$v_e = 2 \times 7 \times 80 \times 10 = 11.2\ km/sec$$

* कक्षीय वेग तथा पलायन वेग मे संबंध

Relation in between Orbital Velocity & Escape velocity

→ From the definition of Orbital velocity —

$$v_o = \sqrt{gR_e} \quad \text{— (1)}$$

from the definition of Escape velocity —

$$v_e = \sqrt{2gR_e} \quad \text{— (2)}$$

Putting the value of v_o

$$\boxed{v_e = \sqrt{2}\, v_o}$$

$$\frac{v_e}{v_o} = \frac{\sqrt{2}}{1}$$

DATE / /
PAGE No.

$$\boxed{\frac{v_e}{v_o} = \frac{1.414}{1}}$$

* पृथ्वी की कक्षा मे क्रित्रीम उपग्रह स्थापित करना