Programmation linéaire

Quentin Fortier

October 20, 2021

Programmation linéaire

Définition

Un programme linéaire est un problème qui consiste à maximiser (ou minimiser) une fonction linéaire avec des contraintes linéaires.

Exemple :

$$\begin{aligned} \max_{x_1, x_2 \in \mathbb{R}} \quad & 4x_1 + 5x_2 \\ \text{t.q} \quad & 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 7 \\ & x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Il faut trouver les valeurs de x_1, x_2 qui maximisent $4x_1 + 5x_2$ en respectant les contraintes.

Programmation linéaire : méthode graphique

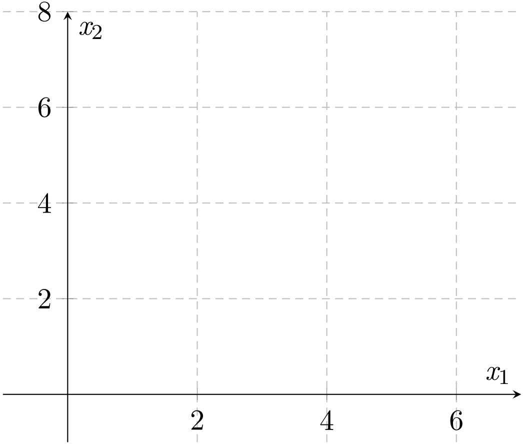
$$\max_{x_1, x_2 \in \mathbb{R}} \quad 4x_1 + 5x_2$$

$$\texttt{t.q} \quad 2x_1 + x_2 \leq 8$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 7$$

$$x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

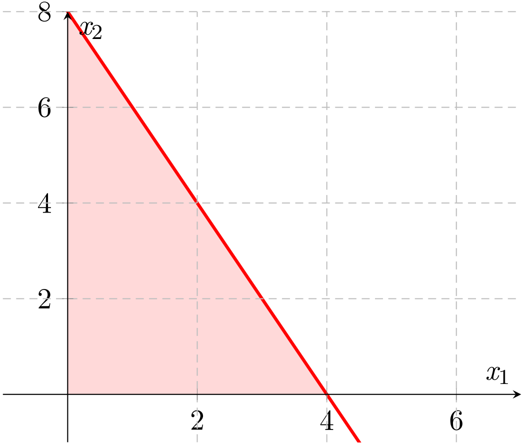


Programmation linéaire : méthode graphique

$$\max_{x_1,x_2\in\mathbb{R}} \quad 4x_1 + 5x_2$$

$$\text{t.q} \quad 2x_1 + x_2 \leq 8$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



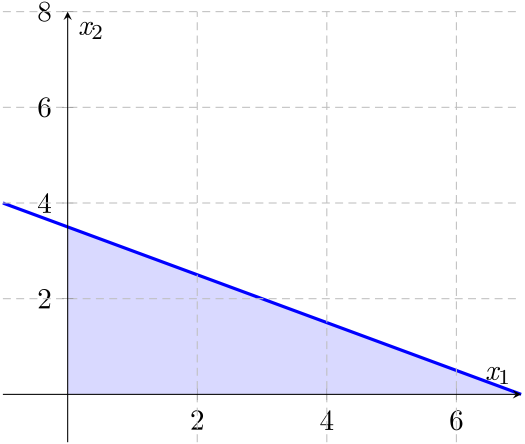
Programmation linéaire : méthode graphique

$$\max_{x_1, x_2 \in \mathbb{R}} \quad 4x_1 + 5x_2$$

t.q

$$x_1 + 2x_2 \leq 7$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



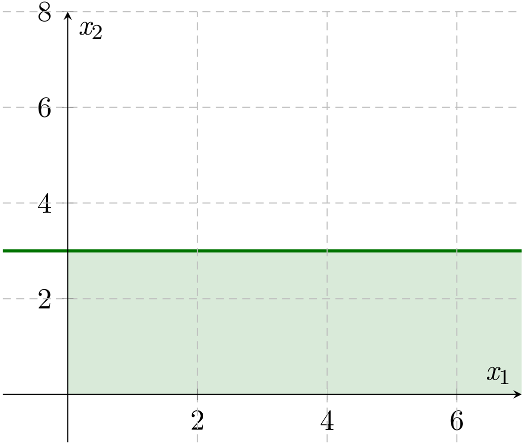
Programmation linéaire : méthode graphique

$$\max_{x_1,x_2\in\mathbb{R}} \quad 4x_1 + 5x_2$$

t.q

$$x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



Programmation linéaire : méthode graphique

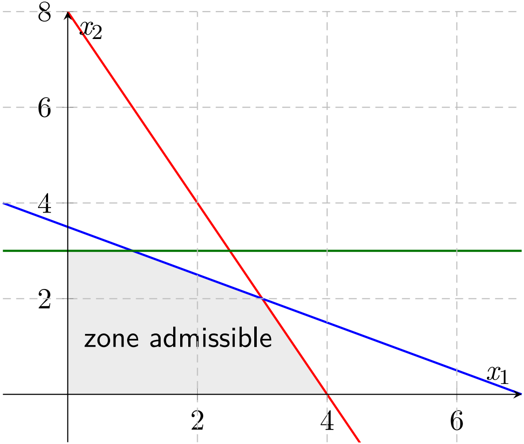
$$\max_{x_1,x_2\in\mathbb{R}} \quad 4x_1 + 5x_2$$

$$\text{t.q} \quad 2x_1 + x_2 \leq 8$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 7$$

$$x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

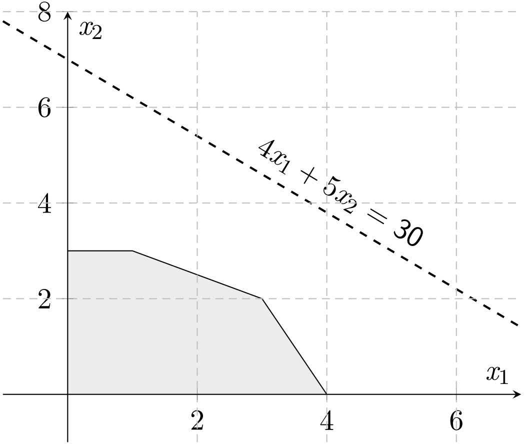


La zone admissible est un **polyhèdre**.

Programmation linéaire : méthode graphique

$$\max_{x_1, x_2 \in \mathbb{R}} \quad 4x_1 + 5x_2$$

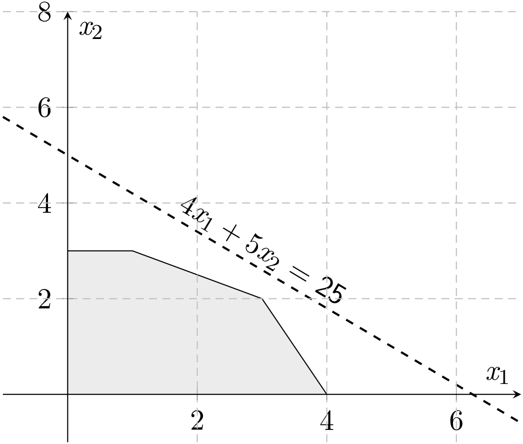
$$\begin{aligned} \texttt{t.q} \quad 2x_1 + x_2 &\leq 8 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 7 \\ x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$



Programmation linéaire : méthode graphique

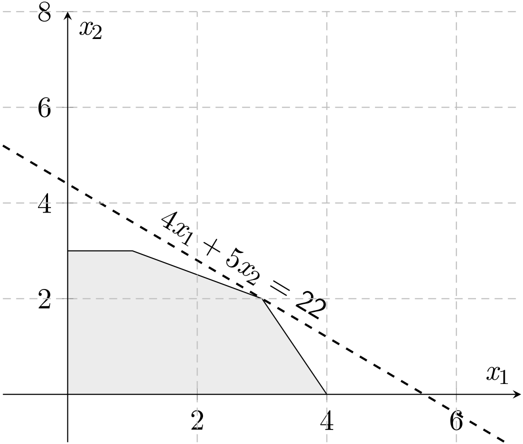
$$\max_{x_1, x_2 \in \mathbb{R}} \quad 4x_1 + 5x_2$$

$$\begin{aligned} \texttt{t.q} \quad 2x_1 + x_2 &\leq 8 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 7 \\ x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$



Programmation linéaire : méthode graphique

$$
\begin{aligned}
\max_{x_1, x_2 \in \mathbb{R}} \quad & 4x_1 + 5x_2 \\
\text{t.q} \quad & 2x_1 + x_2 \leq 8 \\
& x_1 + 2x_2 \leq 7 \\
& x_2 \leq 3 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

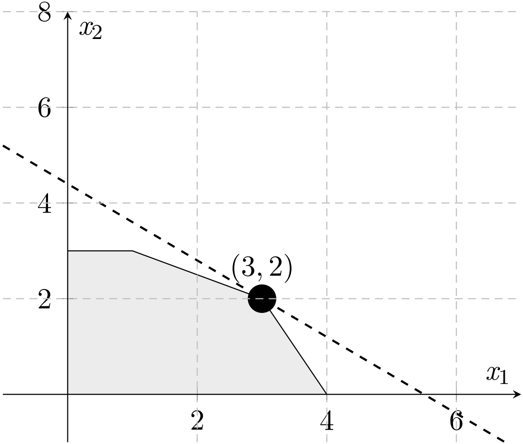


L'optimum est 22, atteint pour $x_1 = 3$ et $x_2 = 2$

Programmation linéaire : méthode graphique

$$\max_{x_1, x_2 \in \mathbb{R}} \quad 4x_1 + 5x_2$$

$$\begin{aligned} \text{t.q} \quad 2x_1 + x_2 &\leq 8 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 7 \\ x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$



L'optimum est 22, atteint pour $x_1 = 3$ et $x_2 = 2$

Programmation linéaire : formulation générale

On peut mettre un programme linéaire sous forme matricielle :

$$\begin{aligned} \max_{x_1, x_2 \in \mathbb{R}} \quad & 4x_1 + 5x_2 \\ \text{t.q} \quad & 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 7 \\ & x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max_{x \in \mathbb{R}^2} \; & cx \\ \text{t.q} \quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0_{\mathbb{R}^2} \end{aligned}$$

avec $c = (4, 5)$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

Programmation linéaire : formulation générale

Forme canonique

$$\max_{x \in \mathbb{R}^2} cx$$

$$Ax = b$$

$$x \geq 0_{\mathbb{R}^2}$$

Forme standard

$$\max_{x \in \mathbb{R}^2} cx$$

$$Ax \leq b$$

$$x \geq 0_{\mathbb{R}^2}$$

Programmation linéaire : forme canonique et standard

Forme canonique

$$\max_{x \in \mathbb{R}^2} cx$$

$$Ax = b$$

$$x \geq 0_{\mathbb{R}^2}$$

Forme standard

$$\max_{x \in \mathbb{R}^2} cx$$

$$Ax \leq b$$

$$x \geq 0_{\mathbb{R}^2}$$

Programmation linéaire : changer de forme

Changement de forme

- min $\longrightarrow$ max

$$\min z \quad \Longleftrightarrow$$

Programmation linéaire : changer de forme

Changement de forme

- min $\longrightarrow$ max

$$\min z \quad \Longleftrightarrow \quad -\max(-z)$$

- $\leq 0 \longrightarrow \geq 0$

$$x \leq b \quad \Longleftrightarrow$$

Programmation linéaire : changer de forme

Changement de forme

- min $\longrightarrow$ max

$$\min z \quad \Longleftrightarrow \quad -\max(-z)$$

- $\leq 0 \longrightarrow \geq 0$

$$x \leq b \quad \Longleftrightarrow \quad -x \geq b$$

- $\in \mathbb{R} \longrightarrow \geq 0$

$$x \in \mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow$$

Programmation linéaire : changer de forme

Changement de forme

- min $\longrightarrow$ max

$$\min z \quad \Longleftrightarrow \quad -\max(-z)$$

- $\leq 0 \longrightarrow \geq 0$

$$x \leq b \quad \Longleftrightarrow \quad -x \geq b$$

- $\in \mathbb{R} \longrightarrow \geq 0$

$$x \in \mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = x^+ - x^- \\ x^+, x^- \geq 0 \end{cases}$$

Programmation linéaire : changer de forme

Changement de forme

- égalité $\longrightarrow$ inégalité

$$ax = b \quad \Longleftrightarrow$$

Programmation linéaire : changer de forme

Changement de forme

- égalité $\longrightarrow$ inégalité

$$ax = b \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} ax \leq b \\ ax \geq b \end{cases}$$

- inégalité $\longrightarrow$ égalité

$$ax \geq b \quad \Longleftrightarrow$$

Programmation linéaire : changer de forme

Changement de forme

- égalité $\longrightarrow$ inégalité

$$ax = b \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} ax \leq b \\ ax \geq b \end{cases}$$

- inégalité $\longrightarrow$ égalité

$$ax \geq b \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} ax + s = b \\ s \geq 0 \end{cases}$$

$$ax \leq b \quad \Longleftrightarrow$$

Programmation linéaire : changer de forme

Changement de forme

- égalité $\longrightarrow$ inégalité

$$ax = b \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} ax \leq b \\ ax \geq b \end{cases}$$

- inégalité $\longrightarrow$ égalité

$$ax \geq b \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} ax + s = b \\ s \geq 0 \end{cases}$$

$$ax \leq b \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} ax - s = b \\ s \geq 0 \end{cases}$$

Programmation linéaire : changer de forme

Forme canonique

$$\max_{x \in \mathbb{R}^2} cx$$

$$Ax = b$$

$$x \geq 0_{\mathbb{R}^2}$$

Forme standard

$$\max_{x \in \mathbb{R}^2} cx$$

$$Ax \leq b$$

$$x \geq 0_{\mathbb{R}^2}$$

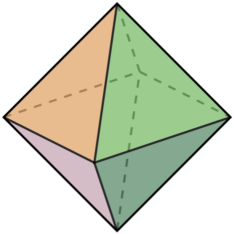
Exercice

Mettre sous forme canonique puis standard le PL suivant :

$$\begin{array}{rrrcl}
\min\limits_{x_1, x_2 \in \mathbb{R}} & x_1 & -x_2 & & \\
& 3x_1 & -x_2 & \geq & 2 \\
& x_1 & +2x_2 & \leq & 4 \\
& 4x_1 & -x_2 & = & 8 \\
& x_1 & & \leq & 0 \\
& & x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

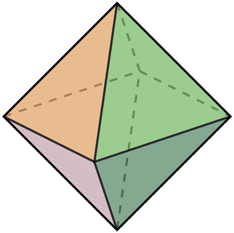
Programmation linéaire : géométrie

L'ensemble des solutions faisables (vérifiant les contraintes) est une intersection de demi-espaces qu'on appelle **polyhèdre**.



Programmation linéaire : géométrie

L'ensemble des solutions faisables (vérifiant les contraintes) est une intersection de demi-espaces qu'on appelle **polyhèdre**.



Les lignes de niveaux de la foncion objectif z sont des **hyperplans affines**.
L'optimum est obtenu en prenant la plus grande ligne de niveau qui intersecte le polytope. D'où :

Théorème

La valeur maximum de la fonction objectif est obtenu en un sommet du polytope des solutions admissibles.