# Algorithmes de flots

Quentin Fortier

October 7, 2021

# Définitions

On considère un graphe orienté $\vec{G} = (V, \vec{E})$ avec une **capacité** $c : \vec{E} \longrightarrow \mathbb{R}^+$.

# Définitions

On considère un graphe orienté $\vec{G} = (V, \vec{E})$ avec une **capacité** $c : \vec{E} \longrightarrow \mathbb{R}^+$.

## Notations

Si $A \subseteq V$, on note:

- $A^+ = \{(u, v) \in \vec{E} \mid u \in A, v \notin A\}$ (« arcs sortants de $A$ »)

# Définitions

On considère un graphe orienté $\vec{G} = (V, \vec{E})$ avec une **capacité** $c : \vec{E} \longrightarrow \mathbb{R}^+$.

## Notations

Si $A \subseteq V$, on note:

- $A^+ = \{(u, v) \in \vec{E} \mid u \in A, v \notin A\}$ (« arcs sortants de $A$ »)
- $A^- = \{(u, v) \in \vec{E} \mid u \notin A, v \in A\}$ (« arcs rentrants dans $A$ »)

# Définitions

On considère un graphe orienté $\overrightarrow{G} = (V, \overrightarrow{E})$ avec une **capacité** $c : \overrightarrow{E} \longrightarrow \mathbb{R}^+$.

## Notations

Si $A \subseteq V$, on note:

- $A^+ = \{(u,v) \in \overrightarrow{E} \mid u \in A, v \notin A\}$ (« arcs sortants de $A$ »)
- $A^- = \{(u,v) \in \overrightarrow{E} \mid u \notin A, v \in A\}$ (« arcs rentrants dans $A$ »)
- Si $v \in V$, $v^+ = \{v\}^+$ et $v^- = \{v\}^-$

# Définitions

On considère un graphe orienté $\vec{G} = (V, \vec{E})$ avec une **capacité** $c : \vec{E} \longrightarrow \mathbb{R}^+$.

## Notations

Si $A \subseteq V$, on note:

- $A^+ = \{(u, v) \in \vec{E} \mid u \in A, v \notin A\}$ (« arcs sortants de $A$ »)
- $A^- = \{(u, v) \in \vec{E} \mid u \notin A, v \in A\}$ (« arcs rentrants dans $A$ »)
- Si $v \in V$, $v^+ = \{v\}^+$ et $v^- = \{v\}^-$

## Définition

Si $f : \vec{E} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ et $B \subseteq \vec{E}$ :

$$f(B) = \sum_{\vec{e} \in B} f(\vec{e})$$

# Définitions

## Flot

Soit $s, t \in V$.
Un **s-t flot** est une fonction $f : \overrightarrow{E} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ telle que :

- $\forall \overrightarrow{e} \in \overrightarrow{E}$ : $\boxed{0 \leq f(\overrightarrow{e}) \leq c(\overrightarrow{e})}$

# Définitions

## Flot

Soit $s, t \in V$.
Un **s-t flot** est une fonction $f : \vec{E} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ telle que :

- $\forall \vec{e} \in \vec{E}$ : $\boxed{0 \leq f(\vec{e}) \leq c(\vec{e})}$
- $\forall v \in V - \{s, t\}$ : $\boxed{f(v^-) = f(v^+)}$

## Définition

$f(s^+)$ est la **valeur** du flot $f$

# Définitions

## Flot

Soit $s, t \in V$.
Un **s-t flot** est une fonction $f : \vec{E} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ telle que :

- $\forall \vec{e} \in \vec{E}$ : $\boxed{0 \leq f(\vec{e}) \leq c(\vec{e})}$
- $\forall v \in V - \{s, t\}$ : $\boxed{f(v^-) = f(v^+)}$

## Définition

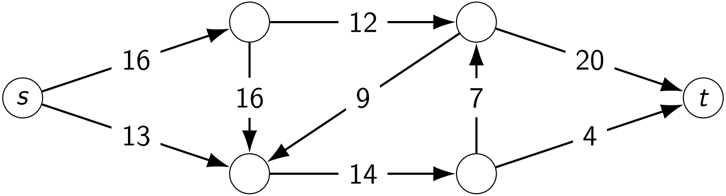
$f(s^+)$ est la **valeur** du flot $f$

## Problème

Trouver un flot dont la valeur est maximum.

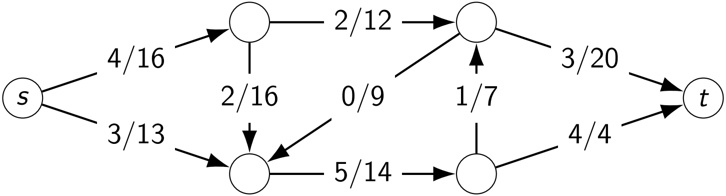
# Exemple

Exemple de graphe $\overrightarrow{G}$ avec une capacité $c$ sur les arcs :



# Définitions

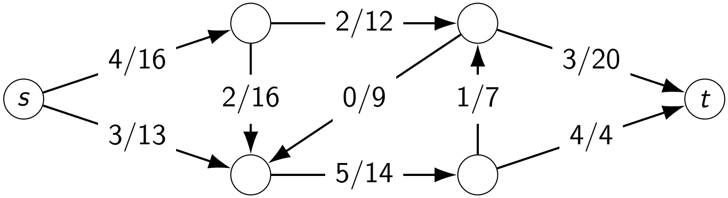
Exemple de flot :




Valeur du flot :

# Définitions

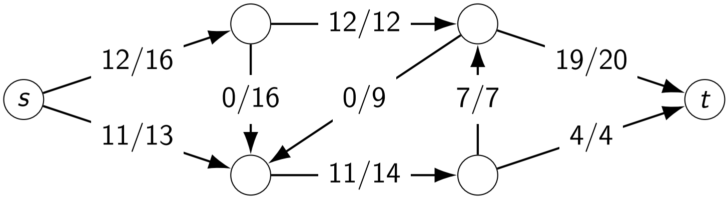
Exemple de flot :




Valeur du flot : $4 + 3 = 7$

# Définitions

Exemple de flot de valeur maximum :




Valeur de ce flot : 23

# Algorithme de Ford-Fulkerson

Idée : partir d'un flot $f$ non optimal (souvent le flot nul partout) et l'améliorer petit à petit.

# Algorithme de Ford-Fulkerson

Idée : partir d'un flot $f$ non optimal (souvent le flot nul partout) et l'améliorer petit à petit.

### Graphe résiduel

La **capacité résiduelle** d'un arc est le flot que l'on peut encore y ajouter (capacité initiale moins flot)

# Algorithme de Ford-Fulkerson

Idée : partir d'un flot $f$ non optimal (souvent le flot nul partout) et l'améliorer petit à petit.

### Graphe résiduel

La **capacité résiduelle** d'un arc est le flot que l'on peut encore y ajouter (capacité initiale moins flot)
Le **graphe résiduel** est obtenu en conservant la capacité résiduelle de chaque arc. Si un arc a une capacité résiduelle nulle, il est supprimé.

# Algorithme de Ford-Fulkerson

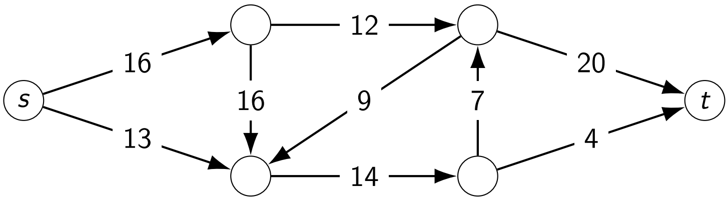
Idée : partir d'un flot $f$ non optimal (souvent le flot nul partout) et l'améliorer petit à petit.

## Graphe résiduel

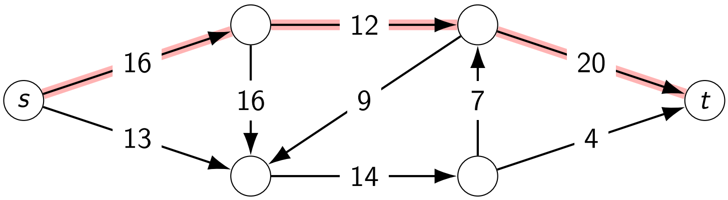
La **capacité résiduelle** d'un arc est le flot que l'on peut encore y ajouter (capacité initiale moins flot)
Le **graphe résiduel** est obtenu en conservant la capacité résiduelle de chaque arc. Si un arc a une capacité résiduelle nulle, il est supprimé.

Si on trouve un chemin $\overrightarrow{P}$ de $s$ à $t$ dans le graphe résiduel, on peut augmenter le flot du minimum des capacités de $\overrightarrow{P}$.

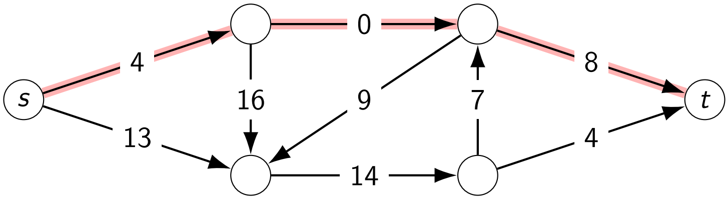
# Algorithme de Ford-Fulkerson



# Algorithme de Ford-Fulkerson



# Algorithme de Ford-Fulkerson




Flot augmenté de 12 (et capacité résiduelle diminuée de 12 le long du chemin).

On note sur chaque arc la capacité résiduelle (restante).

**Algorithme de Ford-Fulkerson**

Tant que $\exists$ un chemin $\overrightarrow{P}$ de $s$ à $t$ dans le graphe résiduel :

    $c \longleftarrow$ minimum des capacités de $\overrightarrow{P}$

    Diminuer de $c$ la capacité des arcs de $\overrightarrow{P}$

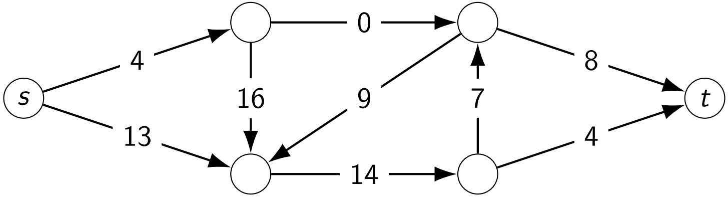
# Algorithme de Ford-Fulkerson

**Algorithme de Ford-Fulkerson**

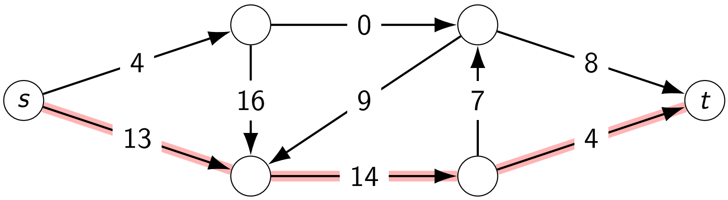
Tant que $\exists$ un chemin $\overrightarrow{P}$ de $s$ à $t$ dans le graphe résiduel :
  $c \longleftarrow$ minimum des capacités de $\overrightarrow{P}$
  Diminuer de $c$ la capacité des arcs de $\overrightarrow{P}$

À la fin, on peut connaître le flot sur chaque arc en retranchant la capacité résiduelle à la capacités initiale.

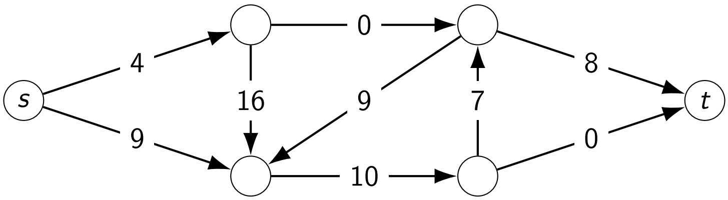
# Algorithme de Ford-Fulkerson

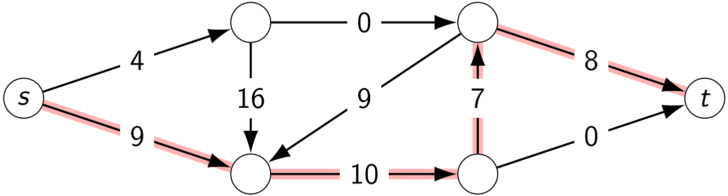


# Algorithme de Ford-Fulkerson

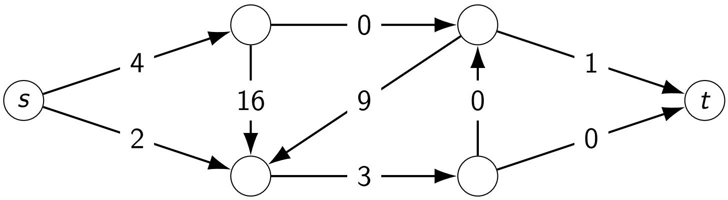


# Algorithme de Ford-Fulkerson

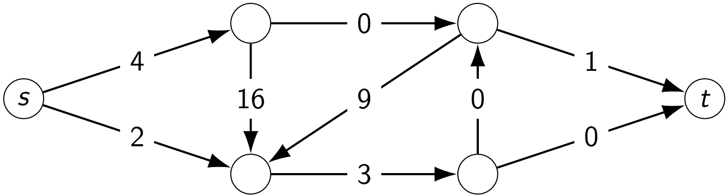



s
t
4
0
9
16
9
7
8
10
0

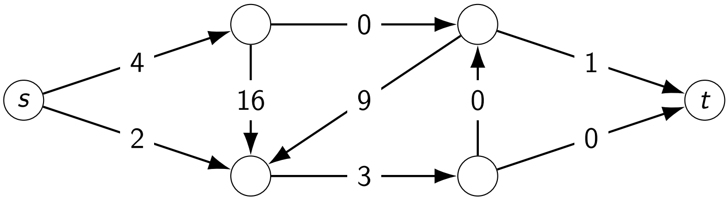
# Algorithme de Ford-Fulkerson



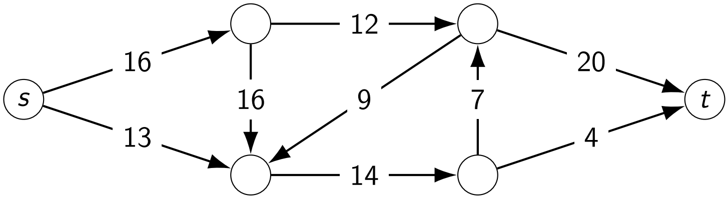
# Algorithme de Ford-Fulkerson



# Algorithme de Ford-Fulkerson



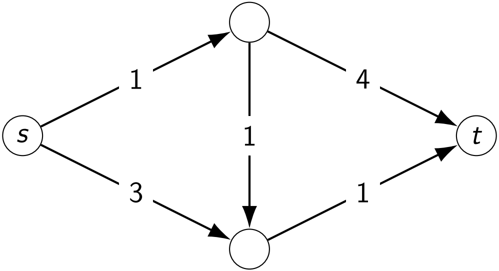

La comparaison avec le graphe initial permet de connaître le flot sur chaque arc :




Valeur du flot obtenu : 23

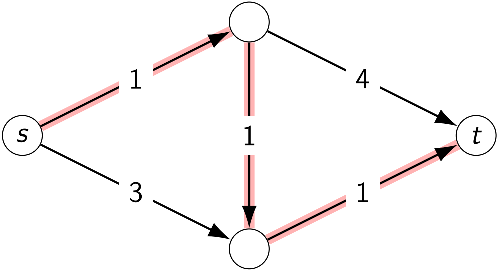
# Algorithme de Ford-Fulkerson

Lorsqu'on ajoute du flot sur un arc, on créé dans le graphe résiduel un arc dans le sens inverse (un **arc arrière**) dans la direction opposée :



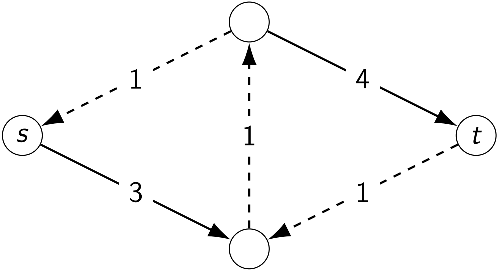
# Algorithme de Ford-Fulkerson

Lorsqu'on ajoute du flot sur un arc, on créé dans le graphe résiduel un arc dans le sens inverse (un **arc arrière**) dans la direction opposée :

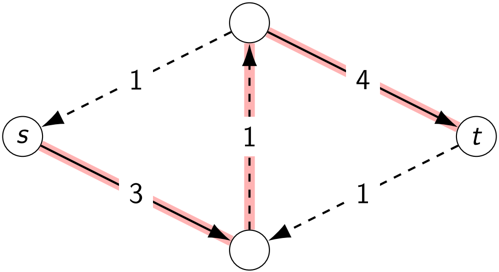


# Algorithme de Ford-Fulkerson

Lorsqu'on ajoute du flot sur un arc, on créé dans le graphe résiduel un arc dans le sens inverse (un **arc arrière**) dans la direction opposée :

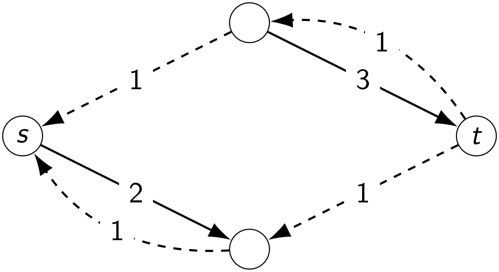


Lorsqu'on ajoute du flot sur un arc, on créé dans le graphe résiduel un arc dans le sens inverse (un **arc arrière**) dans la direction opposée :



# Algorithme de Ford-Fulkerson

Lorsqu'on ajoute du flot sur un arc, on créé dans le graphe résiduel un arc dans le sens inverse (un **arc arrière**) dans la direction opposée :



# Algorithme de Ford-Fulkerson

**Théorème**

Si les capacités initiales sont toutes entières, l'algorithme de Ford-Fulkerson termine (ne fait pas boucle infinie).

Preuve :

# Algorithme de Ford-Fulkerson

**Théorème**

Si les capacités initiales sont toutes entières, l'algorithme de Ford-Fulkerson termine (ne fait pas boucle infinie).

Preuve :

- Les capacités résiduelles restent toujours entières

# Algorithme de Ford-Fulkerson

**Théorème**

Si les capacités initiales sont toutes entières, l'algorithme de Ford-Fulkerson termine (ne fait pas boucle infinie).

Preuve :

- Les capacités résiduelles restent toujours entières
- À chaque itération, on diminue au moins de 1 la somme de toutes les capacités résiduelles. Donc il ne peut pas y avoir plus de $c(\vec{E})$ itérations.

# Algorithme de Ford-Fulkerson

**Théorème**

Si les capacités initiales sont toutes entières, l'algorithme de Ford-Fulkerson termine (ne fait pas boucle infinie).

Preuve :

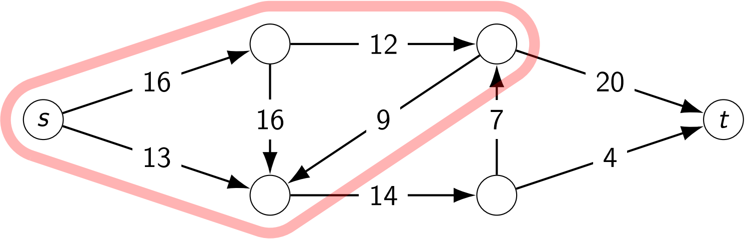
- Les capacités résiduelles restent toujours entières
- À chaque itération, on diminue au moins de 1 la somme de toutes les capacités résiduelles. Donc il ne peut pas y avoir plus de $c(\vec{E})$ itérations.

On a de plus un majorant grossier de la complexité : $\mathrm{O}(|c(\vec{E})|)$.
La complexité plus précise dépend de la façon dont on choisit les chemins.

# Coupes

## Définition

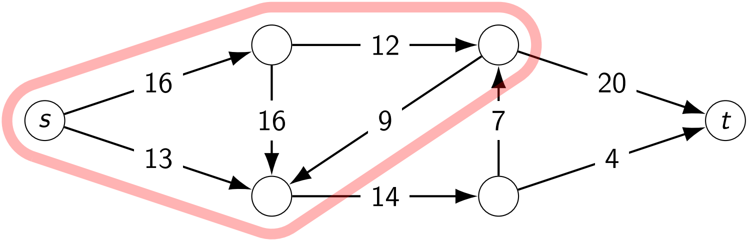
Une **coupe** de $\vec{G}$ est un ensemble $S \subseteq V$ contenant $s$ mais pas $t$.



# Coupes

## Définition

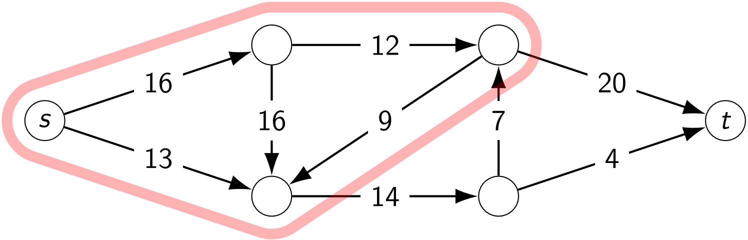
La capacité d'une coupe $S$ est la somme $c(S^+)$ des capacités des arcs sortant de $S$ :



# Coupes

**Définition**

La capacité d'une coupe $S$ est la somme $c(S^+)$ des capacités des arcs sortant de $S$ :

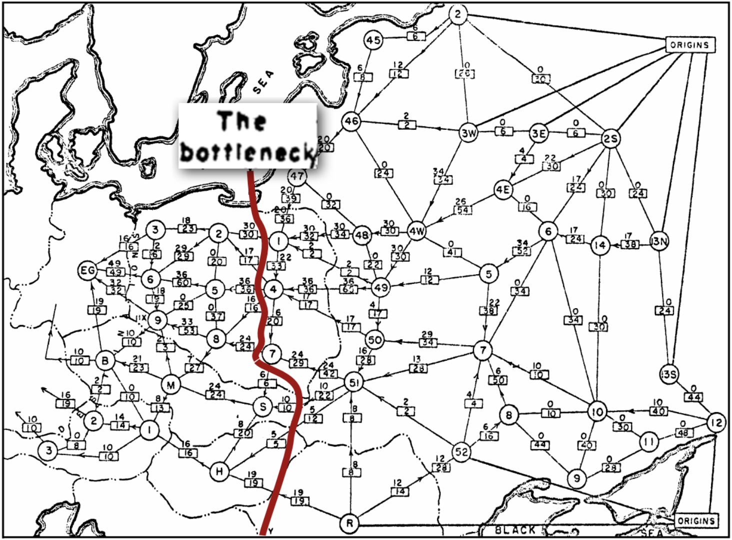



La capacité de cette coupe est $20 + 14 = 34$.

**Problème**

Trouver une coupe de capacité minimum dans un graphe.

# Coupes



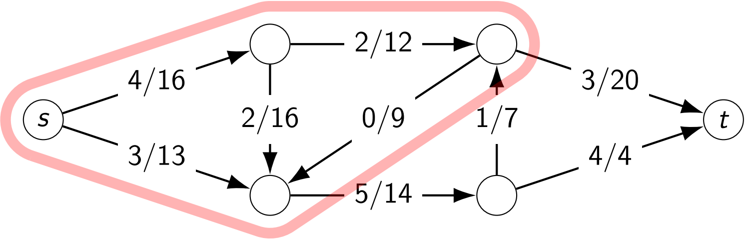

Plan américain de destruction d'un «min cut» des rails soviétiques

# Coupes

## Définition

Le flot sortant d'une coupe $S$ est définie par :

$$f(S) = f(S^+) - f(S^-)$$

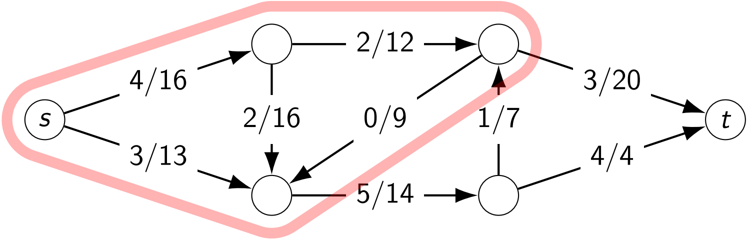


# Coupes

**Définition**

Le flot sortant d'une coupe $S$ est définie par :

$$f(S) = f(S^+) - f(S^-)$$




Le flot sortant de cette coupe est 5 + 3 - 1 = 7.

# Coupes

**Lemme 1**

Si $S$ est une coupe, $f(S) \leq c(S^+)$.

# Coupes

## Lemme 1

Si $S$ est une coupe, $f(S) \leq c(S^+)$.

Preuve :

$$f(S) = f(S^+) - f(S^-) \leq f(S^+) \leq c(S^+)$$

# Coupes

### Lemme 2

Si $S$ est une coupe, $f(S) = f(s^+)$.

# Coupes

## Lemme 2

Si $S$ est une coupe, $f(S) = f(s^+)$.

Preuve :
Soit $H_k$ : « Si $S$ est une coupe avec $k$ sommets alors $f(S) = f(s^+)$ ».

# Coupes

## Lemme 2

Si $S$ est une coupe, $f(S) = f(s^+)$.

Preuve :
Soit $H_k$ : « Si $S$ est une coupe avec $k$ sommets alors $f(S) = f(s^+)$ ».

- $H_1$ est vrai car alors $S = \{s\}$.

# Coupes

## Lemme 2

Si $S$ est une coupe, $f(S) = f(s^+)$.

<u>Preuve</u> :
Soit $H_k$ : « Si $S$ est une coupe avec $k$ sommets alors $f(S) = f(s^+)$ ».

- $H_1$ est vrai car alors $S = \{s\}$.
- Supposons $H_k$ vraie pour un $k \geq 1$.

# Coupes

## Lemme 2

Si $S$ est une coupe, $f(S) = f(s^+)$.

<u>Preuve</u> :
Soit $H_k$ : « Si $S$ est une coupe avec $k$ sommets alors $f(S) = f(s^+)$ ».

- $H_1$ est vrai car alors $S = \{s\}$.
- Supposons $H_k$ vraie pour un $k \geq 1$.
  Soit $S$ une coupe avec $k+1$ sommets.

**Lemme 2**

Si $S$ est une coupe, $f(S) = f(s^+)$.

Preuve :
Soit $H_k$ : « Si $S$ est une coupe avec $k$ sommets alors $f(S) = f(s^+)$ ».

- $H_1$ est vrai car alors $S = \{s\}$.
- Supposons $H_k$ vraie pour un $k \geq 1$.
  Soit $S$ une coupe avec $k+1$ sommets.
  Soit $v \in S$. Alors, en utilisant la définition :
  $f(S) = f(S - \{v\}) + f(\{v\})$.

# Coupes

## Lemme 2

Si $S$ est une coupe, $f(S) = f(s^+)$.

<u>Preuve</u> :

Soit $H_k$ : « Si $S$ est une coupe avec $k$ sommets alors $f(S) = f(s^+)$ ».

- $H_1$ est vrai car alors $S = \{s\}$.
- Supposons $H_k$ vraie pour un $k \geq 1$.
  Soit $S$ une coupe avec $k+1$ sommets.
  Soit $v \in S$. Alors, en utilisant la définition :
  $f(S) = f(S - \{v\}) + f(\{v\})$.
  Or $f(S \backslash \{v\}) = f(s^+)$ par hypothèse de récurrence et $f(\{v\}) = 0$.

# Coupes

## Lemme 2

Si $S$ est une coupe, $f(S) = f(s^+)$.

Preuve :
Soit $H_k$ : « Si $S$ est une coupe avec $k$ sommets alors $f(S) = f(s^+)$ ».

- $H_1$ est vrai car alors $S = \{s\}$.
- Supposons $H_k$ vraie pour un $k \geq 1$.
  Soit $S$ une coupe avec $k+1$ sommets.
  Soit $v \in S$. Alors, en utilisant la définition :
  $f(S) = f(S - \{v\}) + f(\{v\})$.
  Or $f(S \backslash \{v\}) = f(s^+)$ par hypothèse de récurrence et $f(\{v\}) = 0$.
  Donc $f(S) = f(s^+)$ : $H_{k+1}$ est vraie.

# Coupes

## Lemme 1

Si $f$ est un flot et $S$ une coupe, $f(S) \leq c(S^+)$.

## Lemme 2

Si $f$ est un flot et $S$ une coupe, $f(S) = f(s^+)$.

## Théorème max flow - min cut

Si un flot $f$ et une coupe $S$ vérifient $f(S) = c(S)$ alors :

- $f$ est un flot de valeur maximum
- $S$ une coupe de capacité minimum

Preuve :

# Coupes

**Lemme 1**

Si $f$ est un flot et $S$ une coupe, $f(S) \leq c(S^+)$.

**Lemme 2**

Si $f$ est un flot et $S$ une coupe, $f(S) = f(s^+)$.

**Théorème max flow - min cut**

Si un flot $f$ et une coupe $S$ vérifient $f(S) = c(S)$ alors :

- $f$ est un flot de valeur maximum
- $S$ une coupe de capacité minimum

Preuve : Soit $f^*$ un flot de valeur maximum.

# Coupes

## Lemme 1

Si $f$ est un flot et $S$ une coupe, $f(S) \leq c(S^+)$.

## Lemme 2

Si $f$ est un flot et $S$ une coupe, $f(S) = f(s^+)$.

## Théorème max flow - min cut

Si un flot $f$ et une coupe $S$ vérifient $f(S) = c(S)$ alors :

- $f$ est un flot de valeur maximum
- $S$ une coupe de capacité minimum

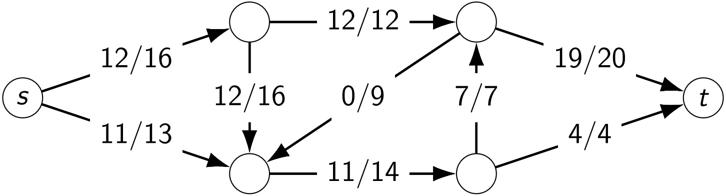
Preuve : Soit $f^*$ un flot de valeur maximum.

$$f^*(s^+) \underset{2}{=} f^*(S) \underset{1}{\leq} c(S) = f(S) \underset{2}{=} f(s^+)$$

# Coupes

## Question

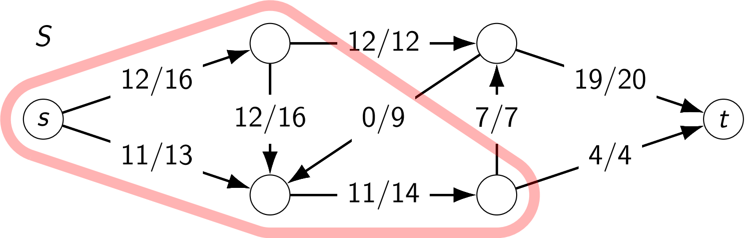
Comment prouver que ce flot est maximum ?



# Coupes

**Question**

Comment prouver que ce flot est maximum ?




$c(S) = 23 = f(S)$
Donc $f$ est un flot maximum et $S$ une coupe minimum.

# Coupes

**Théorème**

Si l'algorithme de Ford-Fulkerson termine, le flot obtenu est un flot maximum

Preuve :

# Coupes

**Théorème**

Si l'algorithme de Ford-Fulkerson termine, le flot obtenu est un flot maximum

Preuve :
Soit $S$ l'ensemble des sommets accessibles depuis $s$ dans le graphe résiduel.

# Coupes

**Théorème**

Si l'algorithme de Ford-Fulkerson termine, le flot obtenu est un flot maximum

<u>Preuve</u> :
Soit $S$ l'ensemble des sommets accessibles depuis $s$ dans le graphe résiduel.
Tout arc $\vec{e}$ sortant de $S$ a une capacité résiduelle nulle, donc $c(\vec{e}) = f(\vec{e})$. D'où :

$$c(S) = \sum_{\vec{e} \in \vec{E}} c(\vec{e}) = \sum_{\vec{e} \in \vec{E}} f(\vec{e}) = f(S)$$