

Programmation linéaire

Quentin Fortier

October 21, 2021

Définition

Un programme linéaire est un problème qui consiste à maximiser (ou minimiser) une fonction linéaire avec des contraintes linéaires.

Exemple :

$$\max_{x_1, x_2 \in \mathbb{R}} \quad 4x_1 + 5x_2$$

$$\text{t.q} \quad 2x_1 + x_2 \leq 8$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 7$$

$$x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Il faut trouver les valeurs de x_1, x_2 qui maximisent $4x_1 + 5x_2$ en respectant les contraintes.

Programmation linéaire : méthode graphique

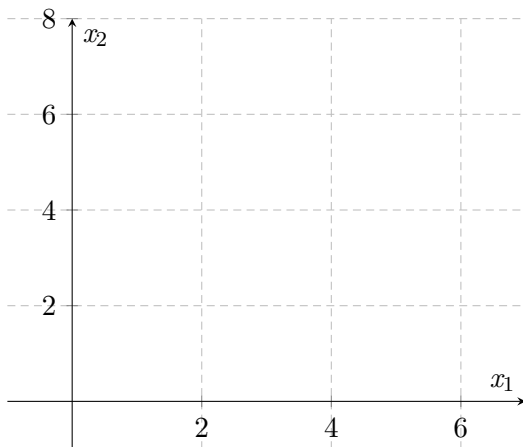
$$\max_{x_1, x_2 \in \mathbb{R}} \quad 4x_1 + 5x_2$$

$$\text{t.q.} \quad 2x_1 + x_2 \leq 8$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 7$$

$$x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

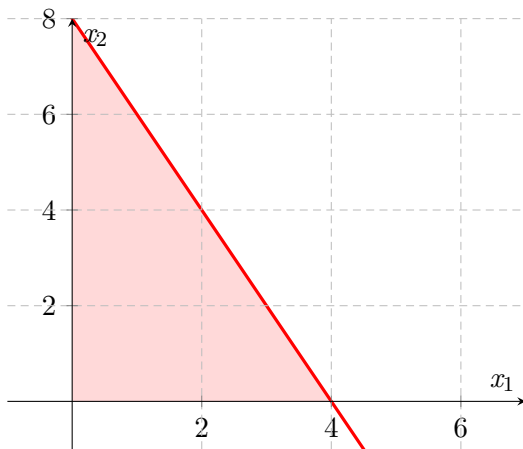


Programmation linéaire : méthode graphique

$$\max_{x_1, x_2 \in \mathbb{R}} \quad 4x_1 + 5x_2$$

$$\text{t.q.} \quad 2x_1 + x_2 \leq 8$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



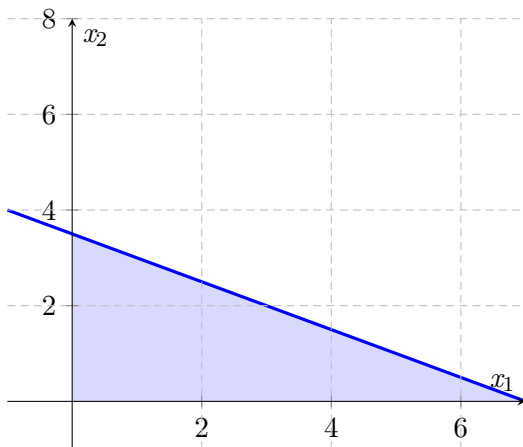
Programmation linéaire : méthode graphique

$$\max_{x_1, x_2 \in \mathbb{R}} \quad 4x_1 + 5x_2$$

t.q

$$x_1 + 2x_2 \leq 7$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



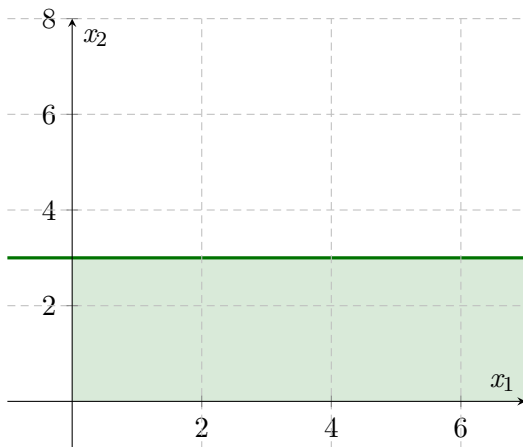
Programmation linéaire : méthode graphique

$$\max_{x_1, x_2 \in \mathbb{R}} \quad 4x_1 + 5x_2$$

t.q

$$x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



Programmation linéaire : méthode graphique

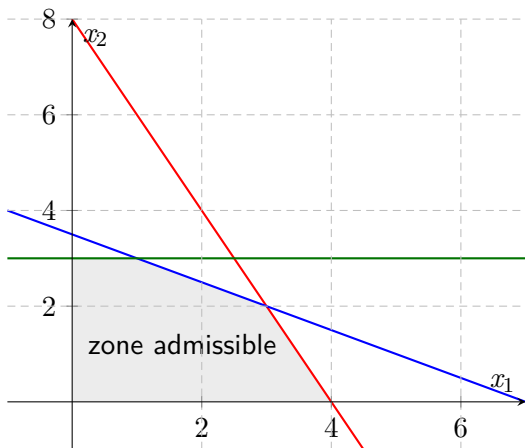
$$\max_{x_1, x_2 \in \mathbb{R}} \quad 4x_1 + 5x_2$$

$$\text{t.q.} \quad 2x_1 + x_2 \leq 8$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 7$$

$$x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



La zone admissible est un **polyèdre**.

Programmation linéaire : méthode graphique

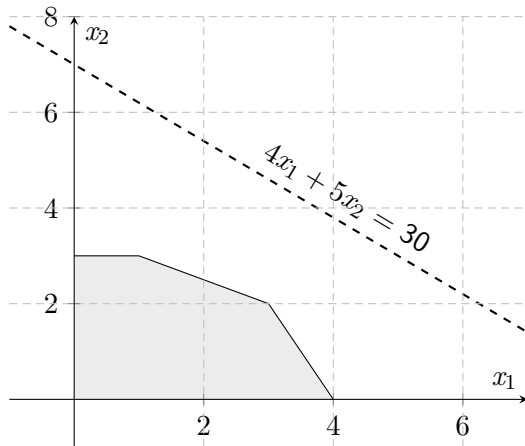
$$\max_{x_1, x_2 \in \mathbb{R}} \quad 4x_1 + 5x_2$$

$$\text{t.q.} \quad 2x_1 + x_2 \leq 8$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 7$$

$$x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



Programmation linéaire : méthode graphique

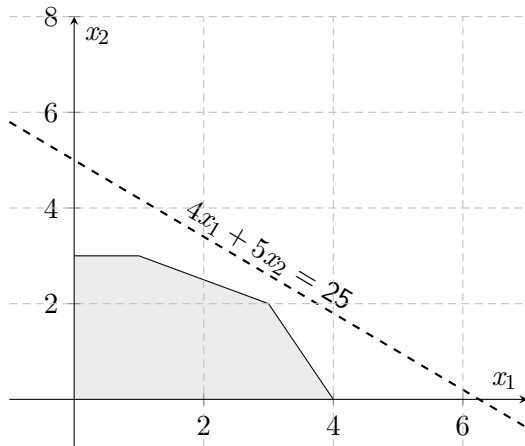
$$\max_{x_1, x_2 \in \mathbb{R}} \quad 4x_1 + 5x_2$$

$$\text{t.q.} \quad 2x_1 + x_2 \leq 8$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 7$$

$$x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



Programmation linéaire : méthode graphique

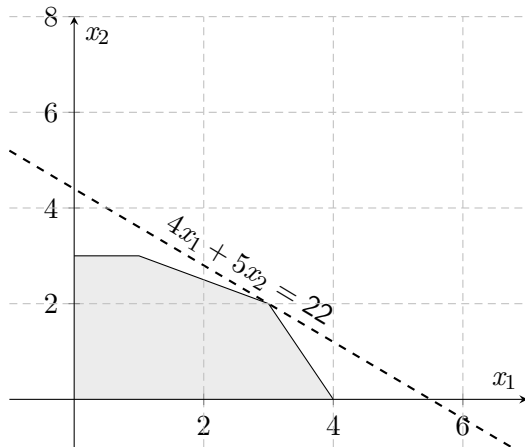
$$\max_{x_1, x_2 \in \mathbb{R}} \quad 4x_1 + 5x_2$$

$$\text{t.q.} \quad 2x_1 + x_2 \leq 8$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 7$$

$$x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



L'optimum est 22, atteint pour $x_1 = 3$ et $x_2 = 2$

Programmation linéaire : méthode graphique

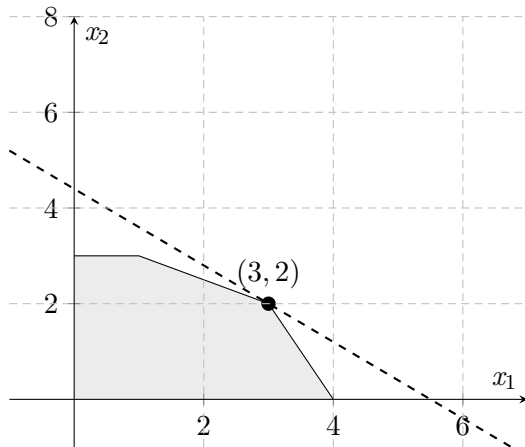
$$\max_{x_1, x_2 \in \mathbb{R}} \quad 4x_1 + 5x_2$$

$$\text{t.q.} \quad 2x_1 + x_2 \leq 8$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 7$$

$$x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



L'optimum est 22, atteint pour $x_1 = 3$ et $x_2 = 2$

Programmation linéaire : formulation générale

On peut mettre un programme linéaire sous forme matricielle :

$$\begin{array}{ll} \max_{x_1, x_2 \in \mathbb{R}} & 4x_1 + 5x_2 \\ \text{t.q} & 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 7 \\ & x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{ll} \max_{x \in \mathbb{R}^2} & cx \\ \text{t.q} & Ax \leq b \\ & x \geq 0_{\mathbb{R}^2} \end{array}$$

$$\text{avec } c = (4, 5), \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Programmation linéaire : formulation générale

Forme canonique

$$\max_{x \in \mathbb{R}^2} cx$$

$$Ax = b$$

$$x \geq 0_{\mathbb{R}^2}$$

Forme standard

$$\max_{x \in \mathbb{R}^2} cx$$

$$Ax \leq b$$

$$x \geq 0_{\mathbb{R}^2}$$

Programmation linéaire : forme canonique et standard

Forme canonique

$$\max_{x \in \mathbb{R}^2} cx$$

$$Ax = b$$

$$x \geq 0_{\mathbb{R}^2}$$

Forme standard

$$\max_{x \in \mathbb{R}^2} cx$$

$$Ax \leq b$$

$$x \geq 0_{\mathbb{R}^2}$$

Programmation linéaire : changer de forme

Changement de forme

- $\min \longrightarrow \max$

$$\min z \iff$$

Programmation linéaire : changer de forme

Changement de forme

- $\min \longrightarrow \max$

$$\min z \iff -\max(-z)$$

- $\leq 0 \longrightarrow \geq 0$

$$x \leq b \iff$$

Programmation linéaire : changer de forme

Changement de forme

- $\min \longrightarrow \max$

$$\min z \iff -\max(-z)$$

- $\leq 0 \longrightarrow \geq 0$

$$x \leq b \iff -x \geq b$$

- $\in \mathbb{R} \longrightarrow \geq 0$

$$x \in \mathbb{R} \iff$$

Programmation linéaire : changer de forme

Changement de forme

- $\min \longrightarrow \max$

$$\min z \iff -\max(-z)$$

- $\leq 0 \longrightarrow \geq 0$

$$x \leq b \iff -x \geq b$$

- $\in \mathbb{R} \longrightarrow \geq 0$

$$x \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} x = x^+ - x^- \\ x^+, x^- \geq 0 \end{cases}$$

Programmation linéaire : changer de forme

Changement de forme

- égalité \longrightarrow inégalité

$$ax = b \quad \Longleftrightarrow$$

Programmation linéaire : changer de forme

Changement de forme

- égalité \longrightarrow inégalité

$$ax = b \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} ax \leq b \\ ax \geq b \end{cases}$$

- inégalité \longrightarrow égalité

$$ax \geq b \quad \Longleftrightarrow$$

Programmation linéaire : changer de forme

Changement de forme

- égalité \longrightarrow inégalité

$$ax = b \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} ax \leq b \\ ax \geq b \end{cases}$$

- inégalité \longrightarrow égalité

$$ax \geq b \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} ax - s = b \\ s \geq 0 \end{cases}$$

$$ax \leq b \quad \Longleftrightarrow$$

Programmation linéaire : changer de forme

Changement de forme

- égalité \longrightarrow inégalité

$$ax = b \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} ax \leq b \\ ax \geq b \end{cases}$$

- inégalité \longrightarrow égalité

$$ax \geq b \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} ax - s = b \\ s \geq 0 \end{cases}$$

$$ax \leq b \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} ax + s = b \\ s \geq 0 \end{cases}$$

Programmation linéaire : changer de forme

Forme canonique

$$\max_{x \in \mathbb{R}^2} cx$$

$$Ax = b$$

$$x \geq 0_{\mathbb{R}^2}$$

Forme standard

$$\max_{x \in \mathbb{R}^2} cx$$

$$Ax \leq b$$

$$x \geq 0_{\mathbb{R}^2}$$

Exercice

Mettre sous forme canonique puis standard le PL suivant :

$$\min_{x_1, x_2 \in \mathbb{R}} x_1 - x_2$$

$$3x_1 - x_2 \geq 2$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$

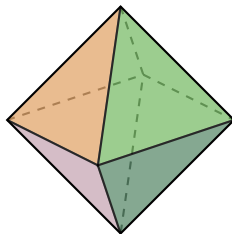
$$4x_1 - x_2 = 8$$

$$x_1 \leq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

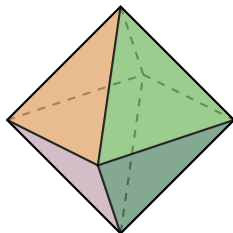
Programmation linéaire : géométrie

L'ensemble des solutions faisables (vérifiant les contraintes) est une intersection de demi-espaces qu'on appelle **polyèdre**.



Programmation linéaire : géométrie

L'ensemble des solutions faisables (vérifiant les contraintes) est une intersection de demi-espaces qu'on appelle **polyèdre**.



Les lignes de niveaux de la fonction objectif z sont des **hyperplans affines**.

L'optimum est obtenu en prenant la plus grande ligne de niveau qui intersecte le polytope. D'où :

Théorème

La valeur maximum de la fonction objectif est obtenu en un sommet du polytope des solutions admissibles.