Programmation dynamique

Quentin Fortier

September 23, 2021

Sous-problèmes

Souvent, un problème peut se ramener à l'étude de sous-problèmes (le même problème, mais en plus petit).

Sous-problèmes

Souvent, un problème peut se ramener à l'étude de sous-problèmes (le même problème, mais en plus petit).

Exemple pour le calcul des termes de la suite de Fibonacci :

$$u_0 = 0$$

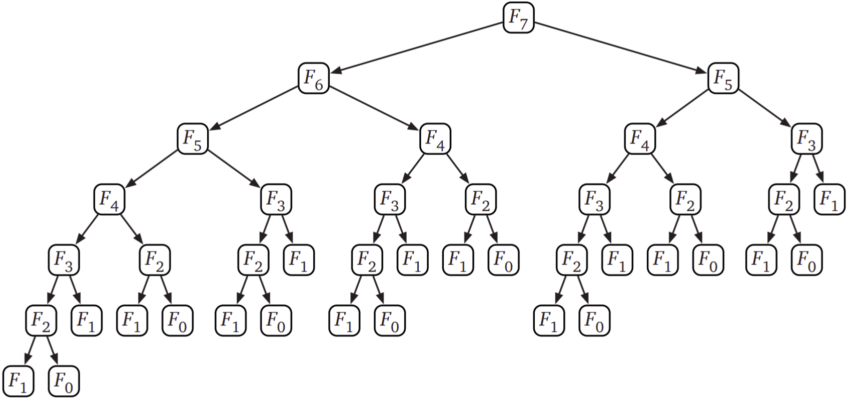
$$u_1 = 1$$

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$$

```python
def fibo(n):
    if n <= 1:
        return 1
    return fibo(n - 1) + fibo(n - 2)
```

Sous-problèmes

Problème : le même sous-problème est résolu plusieurs fois, ce qui est inutile et inefficace.

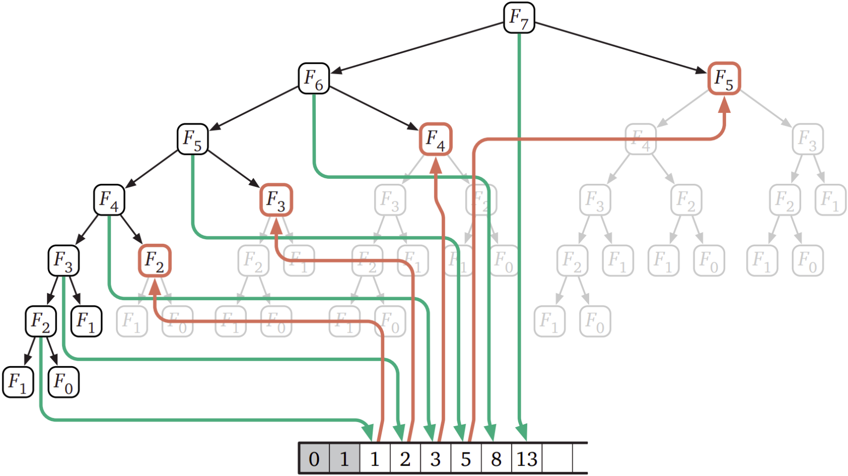


Sous-problèmes

Idée : stocker les valeurs des sous-problèmes pour éviter de les calculer plusieurs fois.

```
def fibo(n):
    F = [0, 1] # F[n] va contenir le nème terme
    for i in range(n - 1):
        F.append(F[-1] + F[-2])
    return F[-1]
```

Sous-problèmes



Sous-problèmes

Dans le cas de la suite de Fibonacci, on peut mémoriser seulement les 2 derniers termes :

```python
def fibo(n):
    f0, f1 = 0, 1
    for i in range(n - 1):
        f0, f1 = f1, f0 + f1
    return f1
```

Programmation dynamique

Pour résoudre un problème de programmation dynamique :

1. Chercher une équation de récurrence. Souvent, cela demande d'introduire un paramètre.

Programmation dynamique

Pour résoudre un problème de programmation dynamique :

1. Chercher une équation de récurrence. Souvent, cela demande d'introduire un paramètre.
2. Stocker en mémoire les résultats des sous-problèmes pour éviter de les calculer plusieurs fois.

Programmation dynamique

Nous allons voir 3 exemples d'applications :

- Sac à dos
- Bellman-Ford pour trouver des plus courts chemins dans un graphe
- Trouver une sous-suite croissante maximale dans un tableau

Sac à dos

Problème (sac à dos)

Entrée : un sac à dos de capacité de capacité C, des objets $o_1, ..., o_n$ de poids $p_1, ..., p_n$ et valeurs v_1, ..., v_n.
Sortie : la valeur maximum que l'on peut mettre dans le sac.

Sac à dos

Problème (sac à dos)

Entrée : un sac à dos de capacité de capacité C, des objets $o_1, ..., o_n$ de poids $p_1, ..., p_n$ et valeurs v_1, ..., v_n.
Sortie : la valeur maximum que l'on peut mettre dans le sac.

Soit $v[c][k]$ la valeur maximum que l'on peut mettre dans un sac de capacité c, en ne considérant que les objets o_1, ..., o_k.

Sac à dos

Problème (sac à dos)

Entrée : un sac à dos de capacité de capacité C, des objets $o_1, ..., o_n$ de poids $p_1, ..., p_n$ et valeurs v_1, ..., v_n.
Sortie : la valeur maximum que l'on peut mettre dans le sac.

Soit $v[c][k]$ la valeur maximum que l'on peut mettre dans un sac de capacité c, en ne considérant que les objets o_1, ..., o_k.

$$v[c][0] = 0$$

$$v[c][k] = \max(v[c][k-1], v[c-p_k][k-1] + v_k)$$

Sac à dos

Problème (sac à dos)

Entrée : un sac à dos de capacité de capacité C, des objets $o_1, ..., o_n$ de poids $p_1, ..., p_n$ et valeurs v_1, ..., v_n.
Sortie : la valeur maximum que l'on peut mettre dans le sac.

Soit $v[c][k]$ la valeur maximum que l'on peut mettre dans un sac de capacité c, en ne considérant que les objets o_1, ..., o_k.

$$v[c][0] = 0$$

$$v[c][k] = \max(\underbrace{v[c][k-1]}_{\text{sans prendre } o_k}, \underbrace{v[c-p_k][k-1] + v_k}_{\text{en prenant } o_k})$$

Sac à dos

Résolution du sac à dos par programmation dynamique

Pour $c = 0$ à C:

  $v[c][0] \leftarrow 0$

Pour $k = 1$ à n:

  Pour $c = 0$ à C:

    $v[c][k] \leftarrow \max(v[c][k-1], v[c-p_k][k-1] + v_k)$

Complexité :

Sac à dos

Résolution du sac à dos par programmation dynamique

Pour $c = 0$ à C:
$\quad v[c][0] \leftarrow 0$

Pour $k = 1$ à n:
$\quad$ Pour $c = 0$ à C:
$\quad\quad v[c][k] \leftarrow \max(v[c][k-1], v[c-p_k][k-1] + v_k)$

Complexité : $O(nC)$

Sac à dos

Comme on a juste besoin de stocker $v[...][k-1]$ pour calculer $v[...][k]$:

Sac à dos

Comme on a juste besoin de stocker $v[...][k-1]$ pour calculer $v[...][k]$:

Résolution du sac à dos par programmation dynamique

Pour $c = 0$ à C:
  $v[c] \leftarrow 0$

Pour $k = 1$ à n:
  Pour $c = 0$ à C:
    $v[c] \leftarrow \max(v[c], v[c - p_k] + v_k)$

Bellman-Ford

L'algorithme de Bellman-Ford permet de résoudre le problème suivant :

Problème (plus courts chemins)

Entrée : $G = (V, \overrightarrow{E})$ un graphe orienté pondéré par w sans cycle de poids négatif et $r \in V$.
Sortie : un tableau T tel que si $v \in V$, $T[v]$ contient la distance ($=$ longueur d'un plus court chemin) de r à v.

Bellman-Ford

L'algorithme de Bellman-Ford permet de résoudre le problème suivant :

Problème (plus courts chemins)

Entrée : $G = (V, \overrightarrow{E})$ un graphe orienté pondéré par w sans cycle de poids négatif et $r \in V$.
Sortie : un tableau T tel que si $v \in V$, $T[v]$ contient la distance ($=$ longueur d'un plus court chemin) de r à v.

Soit $d_k(v)$ le poids minimum d'un chemin de r à v utilisant au plus k arêtes.

Bellman-Ford

Soit $d_k(v)$ le poids minimum d'un chemin de r à v utilisant au plus k arêtes.

Bellman-Ford

Soit $d_k(v)$ le poids minimum d'un chemin de r à v utilisant au plus k arêtes.

$$d_{k+1}(v) = \min_{(u,v) \in E} d_k(u) + w(u, v)$$

Bellman-Ford

Soit $d_k(v)$ le poids minimum d'un chemin de r à v utilisant au plus k arêtes.

$$d_{k+1}(v) = \min_{(u,v) \in E} d_k(u) + w(u, v)$$

Preuve : soit C un plus court chemin de r à v utilisant au plus $k+1$ arêtes.

Bellman-Ford

Soit $d_k(v)$ le poids minimum d'un chemin de r à v utilisant au plus k arêtes.

$$d_{k+1}(v) = \min_{(u,v)\in E} d_k(u) + w(u,v)$$

Preuve : soit C un plus court chemin de r à v utilisant au plus $k+1$ arêtes.
Soit u le prédecesseur de v dans C.

Bellman-Ford

Soit $d_k(v)$ le poids minimum d'un chemin de r à v utilisant au plus k arêtes.

$$d_{k+1}(v) = \min_{(u,v)\in E} d_k(u) + w(u,v)$$

Preuve : soit C un plus court chemin de r à v utilisant au plus $k+1$ arêtes.
Soit u le prédecesseur de v dans C.
Alors le sous-chemin de C de r à u est un plus court chemin utilisant au plus k arêtes

Bellman-Ford

Soit $d_k(v)$ le poids minimum d'un chemin de r à v utilisant au plus k arêtes.

$$d_{k+1}(v) = \min_{(u,v)\in E} d_k(u) + w(u, v)$$

Preuve : soit C un plus court chemin de r à v utilisant au plus $k+1$ arêtes.
Soit u le prédecesseur de v dans C.
Alors le sous-chemin de C de r à u est un plus court chemin utilisant au plus k arêtes (s'il y avait un chemin plus court que C', on pourrait le remplacer dans C ce qui contredirait la minimalité de C).

Bellman-Ford

Soit $d_k(v)$ le poids minimum d'un chemin de r à v utilisant au plus k arêtes.

$$d_{k+1}(v) = \min_{(u,v)\in E} d_k(u) + w(u,v)$$

Preuve : soit C un plus court chemin de r à v utilisant au plus $k+1$ arêtes.
Soit u le prédecesseur de v dans C.
Alors le sous-chemin de C de r à u est un plus court chemin utilisant au plus k arêtes (s'il y avait un chemin plus court que C', on pourrait le remplacer dans C ce qui contredirait la minimalité de C).

Remarque : c'est une propriété de **sous-structure optimale** (un sous-chemin d'un plus court chemin est aussi un plus court chemin).

Bellman-Ford

On va utiliser un tableau `d[v][k]` pour stocker $d_k(v)$.

Algorithme de Bellman-Ford

```
d[r] <- 0
Pour v ≠ r:
    Pour k = 0 à |V| − 2:
        d[v][k] <- ∞

Pour k = 0 à |V| − 2:
    Pour tout sommet v:
        Pour tout arc (u, v) entrant dans v:
            Si d[u][k] + w(u, v) < d[v][k + 1]:
                d[v][k + 1] ← d[u][k] + w(u, v)
```

Bellman-Ford

On va utiliser un tableau `d[v][k]` pour stocker $d_k(v)$.

Algorithme de Bellman-Ford

```
d[r] <- 0
Pour v ≠ r:
    Pour k = 0 à |V| − 2:
        d[v][k] <- ∞

Pour k = 0 à |V| − 2:
    Pour tout sommet v:
        Pour tout arc (u, v) entrant dans v:
            Si d[u][k] + w(u, v) < d[v][k + 1]:
                d[v][k + 1] ← d[u][k] + w(u, v)
```

Complexité :

Bellman-Ford

On va utiliser un tableau `d[v][k]` pour stocker $d_k(v)$.

Algorithme de Bellman-Ford

```
d[r] <- 0
Pour v ≠ r:
    Pour k = 0 à |V| − 2:
        d[v][k] <- ∞

Pour k = 0 à |V| − 2:
    Pour tout sommet v:
        Pour tout arc (u, v) entrant dans v:
            Si d[u][k] + w(u, v) < d[v][k + 1]:
                d[v][k + 1] ← d[u][k] + w(u, v)
```

Complexité : $O(np)$ où $n = |V|$ et $p = |\vec{E}|$.

Bellman-Ford

Comme on a juste besoin de stocker $d[...][k-1]$ pour calculer $d[...][k]$:

Bellman-Ford

Comme on a juste besoin de stocker $d[...][k-1]$ pour calculer $d[...][k]$:

Algorithme de Bellman-Ford

d[r] <- 0
Pour v $\neq$ r:
    d[v] <- ∞

Pour $k = 0$ à $|V| - 2$:
    Pour tout sommet v:
        Pour tout arc (u, v) rentrant dans v:
            Si d[u] + w(u, v) < d[v]:
                d[v] $\leftarrow$ d[u] + w(u, v)

Sous-suite croissante

Soit T un tableau.

Définition

Une **sous-suite croissante** de T correspond à des éléments $T[i_1] \leq T[i_2] \leq ... \leq T[i_k]$ avec $i_1 \leq i_2 \leq ... \leq i_k$.

Sous-suite croissante

Soit T un tableau.

Définition

Une **sous-suite croissante** de T correspond à des éléments $T[i_1] \leq T[i_2] \leq ... \leq T[i_k]$ avec $i_1 \leq i_2 \leq ... \leq i_k$.

Problème

Trouver la longueur maximum d'une sous-suite croissante de T.

Sous-suite croissante

Soit T un tableau.

Définition

Une **sous-suite croissante** de T correspond à des éléments $T[i_1] \leq T[i_2] \leq ... \leq T[i_k]$ avec $i_1 \leq i_2 \leq ... \leq i_k$.

Problème

Trouver la longueur maximum d'une sous-suite croissante de T.

Exemple :

$$T = [8, 1, 3, 7, 5, 6, 4]$$

Sous-suite croissante

Soit T un tableau.

Définition

Une **sous-suite croissante** de T correspond à des éléments $T[i_1] \leq T[i_2] \leq ... \leq T[i_k]$ avec $i_1 \leq i_2 \leq ... \leq i_k$.

Sous-suite croissante

Soit T un tableau.

Définition

Une **sous-suite croissante** de T correspond à des éléments $T[i_1] \leq T[i_2] \leq ... \leq T[i_k]$ avec $i_1 \leq i_2 \leq ... \leq i_k$.

Problème

Trouver la longueur maximum d'une sous-suite croissante de T.

Sous-suite croissante

Soit T un tableau.

Définition

Une **sous-suite croissante** de T correspond à des éléments $T[i_1] \leq T[i_2] \leq ... \leq T[i_k]$ avec $i_1 \leq i_2 \leq ... \leq i_k$.

Problème

Trouver la longueur maximum d'une sous-suite croissante de T.

Exemple :

$$T = [8, 1, 3, 7, 5, 6, 4]$$

Longueur maximum : 4.

Sous-suite croissante

Soit T un tableau.
Soit $L[k]$ la longueur d'une **p**lus **l**ongue **s**ous-**s**uite **c**roissante (**PLSSC**) terminant en $T[k]$ (c'est à dire de la forme $T[i_1] \leq T[i_2] \leq ... \leq T[i_p] = T[k]$).

Sous-suite croissante

Soit T un tableau.
Soit $L[k]$ la longueur d'une **p**lus **l**ongue **s**ous-**s**uite **c**roissante (**PLSSC**) terminant en $T[k]$ (c'est à dire de la forme $T[i_1] \leq T[i_2] \leq ... \leq T[i_p] = T[k]$).

Exemple :

$$T = [8, 1, 3, 7, 5, 6, 4]$$

PLSSC terminant en $T[6]$ $(= 4)$:

Sous-suite croissante

Soit T un tableau.
Soit $L[k]$ la longueur d'une **p**lus **l**ongue **s**ous-**s**uite **c**roissante (**PLSSC**) terminant en $T[k]$ (c'est à dire de la forme $T[i_1] \leq T[i_2] \leq ... \leq T[i_p] = T[k]$).

Exemple :

$$T = [8, 1, 3, 7, 5, 6, 4]$$

PLSSC terminant en $T[6]$ $(= 4)$:

$$T = [8, \color{red}{1}, \color{red}{3}, 7, 5, 6, \color{red}{4}]$$

$L[6] = 3$

Sous-suite croissante

Soit $T[i_1] \leq ... \leq T[i_{p-1}] \leq T[i_p] = T[k]$ une PLSSC terminant en $T[k]$.

Sous-suite croissante

Soit $T[i_1] \leq ... \leq T[i_{p-1}] \leq T[i_p] = T[k]$ une PLSSC terminant en $T[k]$.

Alors $T[i_1] \leq ... \leq T[i_{p-1}]$ est une PLSSC terminant en $T[i_{p-1}]$

Sous-suite croissante

Soit $T[i_1] \leq ... \leq T[i_{p-1}] \leq T[i_p] = T[k]$ une PLSSC terminant en $T[k]$.

Alors $T[i_1] \leq ... \leq T[i_{p-1}]$ est une PLSSC terminant en $T[i_{p-1}]$ (s'il y avait une PLSSC plus grande on pourrait l'utiliser dans la PLSSC initiale pour contredire sa maximalité).

Sous-suite croissante

Soit $T[i_1] \leq ... \leq T[i_{p-1}] \leq T[i_p] = T[k]$ une PLSSC terminant en $T[k]$.

Alors $T[i_1] \leq ... \leq T[i_{p-1}]$ est une PLSSC terminant en $T[i_{p-1}]$ (s'il y avait une PLSSC plus grande on pourrait l'utiliser dans la PLSSC initiale pour contredire sa maximalité).
Donc :

$$L[k] = 1 + L[i_{p-1}]$$

Sous-suite croissante

Soit $T[i_1] \leq ... \leq T[i_{p-1}] \leq T[i_p] = T[k]$ une PLSSC terminant en $T[k]$.

Alors $T[i_1] \leq ... \leq T[i_{p-1}]$ est une PLSSC terminant en $T[i_{p-1}]$ (s'il y avait une PLSSC plus grande on pourrait l'utiliser dans la PLSSC initiale pour contredire sa maximalité).
Donc :

$$L[k] = 1 + L[i_{p-1}]$$

Comme on ne connaît pas i_{p-1}, on peut essayer toutes les possibilités et conserver le maximum :

$$\boxed{L[k] = 1 + \max_{\substack{i \leq k \\ T[i] \leq T[k]}} L[i]}$$